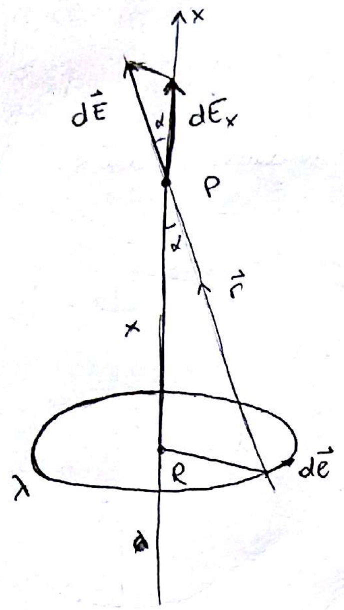
③ Calcolare il campo elettrico generato sull'asse x da una distribuzione uniforme di carica distribuita su spira circolare filiforme.



R = raggio del cerchio

λ = densità lineare di carica

$d\vec{\ell}$ genera un campo $d\vec{E}$ diretto come $\vec{r}$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, d\ell}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\hat{r}$$

Notiamo che $dE_\perp$ ad asse è 0 perchè i contributi degli elementi $d\vec{\ell}$ si annullano a vicenda.

Quindi $|d\vec{E}| = |d\vec{E}_x| \Rightarrow |\vec{E}| = |\vec{E}_x|$

Dove $d\vec{E}_x = d\vec{E}\cos\alpha$ (dove $\hat{r} \to \cos\alpha\,\hat{x}$) $d\vec{E}_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\cos\alpha\,\hat{x}$

$$dE_x = dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, d\ell}{r^2}\cos\alpha$$

Integrando su $d\vec{\ell}$:

$\int d\ell = 2\pi R$ circonferenza della spira

$$|\vec{E}| = E_x = \int dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\alpha \int d\ell =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4\pi}_2\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\cos\alpha\, \cancel{2\pi} R = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{\cos\alpha}{r^2}$$

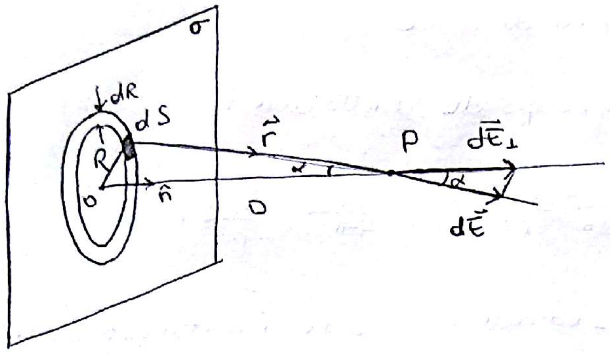
ma possiamo scrivere $x = r\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x}{r}$

e $r = \sqrt{x^2+R^2}$

$$\Rightarrow E_x = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{x}{r}\frac{1}{r^2} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{x}{r^3} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

4. Calcolare il campo elettrico generato dalla distribuzione di carica uniforme su un piano, a distanza D dal piano stesso.

σ = densità superficiale di carica $\rightarrow dq = \sigma(x,y,z)\, dS$



Suddividiamo il piano in anelli concentrici con centro in O.

Il campo generato da una spira di raggio R è

$$d\vec{E} = \frac{\sigma 2\pi R\, dR}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{n}\,\frac{\cos\alpha}{r^2} \qquad \text{dove} \quad dQ = \sigma\, 2\pi R\, dR$$

- tutti i punti della spira si trovano a distanza r da P
- solo $dE_\perp$ contribuisce a $d\vec{E}$ (contributi simmetrici // si annullano)

Bisogna ora sommare su tutte le spire del piano (cioè integrare), possiamo scrivere R e r in funzione dell'angolo α:

$$r = \frac{D}{\cos\alpha}, \quad R = D\,tg\alpha \rightarrow dR = D\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow d\vec{E} = \frac{\sigma 2\pi \overbrace{D\,tg\alpha}^{R}}{4\pi\varepsilon_0}\overbrace{D\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}}^{dR}\,\hat{n}\,\frac{\cos\alpha}{\underbrace{\frac{D^2}{\cos^2\alpha}}_{r^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cancel{D}tg\alpha\,\cancel{D}\frac{d\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}}\,\hat{n}\,\frac{\cos\alpha}{\cancel{D^2}}\cancel{\cos^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,tg\alpha\cos\alpha\, d\alpha\,\hat{n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}\cancel{\cos\alpha}\, d\alpha\,\hat{n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\alpha\, d\alpha\,\hat{n}$$

Quindi

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_0^{\pi/2}\frac{\hat{n}\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\hat{n}\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi/2} = \frac{\hat{n}\sigma}{2\varepsilon_0}$$

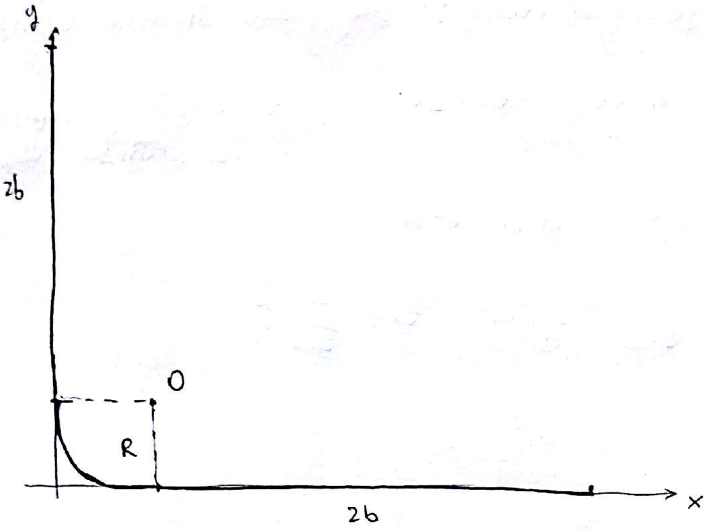
Il campo elettrico generato da uno strato uniforme (piano) è $\perp$ al piano e uniforme in tutto lo spazio. N.B.

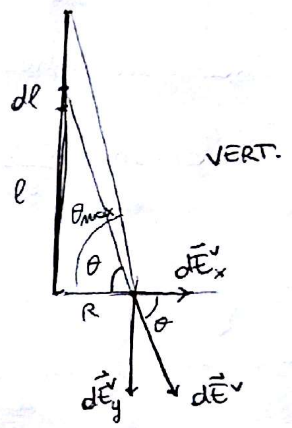
→ th Gauss

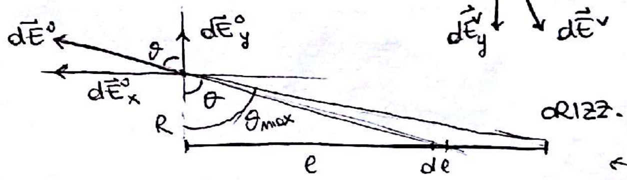
⑤ Filo sottile e rigido, uniformemente carico con densità di carica lineare $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} \text{due tratti rettilinei di lunghezza } 2b,\ \perp \text{ tra loro} \\ \text{un tratto di } \frac{1}{4} \text{ di crf con raggio } R \ (R \ll 2b) \text{ e centro } O \end{cases}$$

Calcolare $\vec{E}_0$ in O.







Consideriamo il filo orizzontale

$$dE = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$

$|dE_x| = dE \operatorname{sen}\theta$, $|dE_y| = dE \cos\theta$

Scriviamo l e r in funzione di R e θ: $l = R\,tg\theta$, $dl = R\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$, $r = \frac{R}{\cos\theta}$

allora:

$$\begin{cases} |dE_x| = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cancel{R} \frac{d\theta}{\cancel{\cos^2\theta}} \cdot \frac{\cancel{\cos^2\theta}}{R^{\cancel{2}}} \operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \\ |dE_y| = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} R \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{R^2} \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\theta_{max} = \frac{R}{\sqrt{R^2+4b^2}} \\ \operatorname{sen}\theta_{max} = \frac{2b}{\sqrt{R^2+4b^2}} \end{cases}$$

Integrando da 0 a θ_{max}:

$$|E_x| = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\theta_{max}} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}(1-\cos\theta_{max}) \longrightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{R}{\sqrt{R^2+4b^2}}\right)$$

$$|E_y| = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\theta_{max}} \cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \operatorname{sen}\theta_{max} \longrightarrow \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{2b}{\sqrt{R^2+4b^2}}$$

Dato che $R \ll 2b$: $\sqrt{R^2+4b^2} \sim \sqrt{4b^2} = 2b$ e $\frac{R}{2b} \sim 0$

allora

$$\begin{cases} |E^o_x| \simeq -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{R}{2b}\right) \simeq -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ E^o_y \simeq \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\frac{2b}{2b} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$

Per il tratto verticale valgono le stesse formule, ma adesso

$|dE_x| = dE \cos\theta$ e $|dE_y| = dE \,\text{sen}\,\theta$

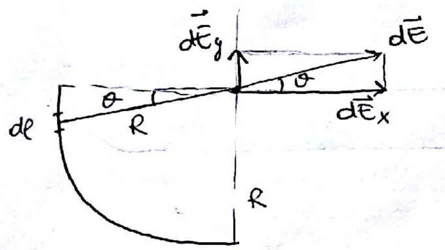
quindi

$$\begin{cases} E_x^v \simeq \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ E_y^v \simeq -\dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il contributo complessivo dei due tratti rettilinei è nullo: $\begin{cases} E_x^o + E_x^v = 0 \\ E_y^o + E_y^v = 0 \end{cases}$

L'unico tratto che contribuisce è il quarto di crf.

Consideriamo il quarto di circonferenza:



$dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\lambda\, dl}{R^2}$ ma $dl = R d\theta$

e $\hat{r} = (\cos\theta\,\hat{\imath}, \text{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}, 0)$

quindi

$dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\lambda\, d\theta}{R}$

$$\begin{cases} |dE_x| = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \cos\theta\, d\theta \\ |dE_y| = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \text{sen}\,\theta\, d\theta \end{cases}$$

integriamo da 0 a $\frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} |E_x| = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \,\text{sen}\,\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ |E_y| = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \text{sen}\,\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$

campo risultante.

$$\begin{cases} \vec{E}_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{\imath} \\ \vec{E}_y = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\hat{\jmath} \end{cases}$$

Il suo modulo è

$|\vec{E}| = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sqrt{2}$ perché $|\vec{E}| = \sqrt{|\vec{E}_x|^2 + |\vec{E}_y|^2}$