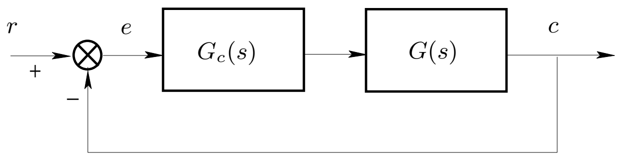
Prova scritta di Controlli Automatici

Bologna, 1 luglio 2014

Si consideri il sistema in retroazione rappresentato dal diagramma a blocchi di Fig. 1. La funzione di trasferimento $G(s)$ abbia l'espressione riportata accanto alla Fig. 1.



$$G(s) = \frac{100\,(s+20)}{s(s+1)(s+40)}$$

Figura 1: Sistema in retroazione.

a) Si assuma $G_c(s) = K$. Si determini l'intervallo dei valori del parametro K per i quali il sistema ad anello chiuso è stabile asintoticamente.

b) Si assuma $G_c(s) = 1$. Si traccino i diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione guadagno d'anello $G_l(s) = G_c(s)G(s)$. A questo scopo si suggerisce di utilizzare le carte graduate in scala logaritmica allegate al testo.

c) Si assuma $G_c(s) = 1$. Si tracci qualitativamente il diagramma polare della funzione di risposta armonica d'anello $G_l(s) = G_c(s)\,G(s)$. Si determinino, in particolare, l'ascissa di un eventuale asintoto verticale, l'angolo con cui il diagramma termina sull'asse reale e la relativa ascissa, ed eventuali intersezioni con l'asse reale. Si determini inoltre il margine di ampiezza del sistema.

d) Si assuma $G_c(s) = K/s$. Si determini il valore del parametro K per il quale l'errore a regime del sistema ad anello chiuso nella risposta al riferimento $r(t) = t^2/2$ risulta uguale a 0.1. Si verifichi che per tale valore di K il sistema ad anello chiuso risulti stabile.

e) Si progetti il regolatore $G_c(s)$ come una rete a ritardo e anticipo che conferisca al sistema compensato margine di fase $M_\varphi = 60°$. Si ricorda che la funzione di trasferimento della rete a ritardo e anticipo ha l'espressione

$$G_c(s) = \frac{(1+\tau_1 s)\,(1+\tau_2 s)}{(1+\alpha\tau_1 s)\left(1+\dfrac{\tau_2}{\alpha}s\right)}\,.$$

Si ricorda inoltre che la pulsazione ω_0 di centro banda della rete è legata alle costanti di tempo τ_1 e τ_2 dalla relazione $\omega_0 = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$ e che l'attenuazione introdotta dalla rete in centro banda ha l'espressione $|G_c(j\omega_0)| = \dfrac{\tau_1+\tau_2}{\alpha\tau_1+\tau_2/\alpha}$. Si suggerisce di progettare la rete assumendo come pulsazione di centro banda della rete stessa la pulsazione alla quale il sistema non compensato presenta fase uguale a $-120°$ e assumendo il valore 4 come rapporto fra le costanti di tempo $\rho = \tau_2/\tau_1$.

a) $G(s) = \dfrac{100\,(s+20)}{s(s+1)(s+40)}$

$1 + K G(s) = 0$

$$1 + \frac{100K\,(s+20)}{s(s+1)(s+40)} = 0$$

$$1 + \frac{100Ks + 2000K}{s^3 + 41s^2 + 40s} = 0$$

$$s^3 + 41s^2 + 10\,(10K + 4)\,s + 2000K = 0$$

3	1	$10\,(10K+4)$
2	41	$2000K$
1	$2100K + 1640$	
0	$2000K$	

$$-2000K + 41 * (100K + 40) = -2000K + 4100K + 1640 = 2100K + 1640$$

$$\begin{cases} 2100K + 1640 > 0 \\ 2000K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2100K > -1640 \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K > -\dfrac{\overset{82}{\cancel{1640}}}{\underset{105}{\cancel{2100}}} = -\dfrac{82}{105} = -0.7810 \\ K > 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$K > 0$$

b) Si vedano i grafici

c) Ascissa dell'asintoto verticale:

$$G(s) = \frac{50\,(1 + 0.05s)}{s(1+s)(1+0.025s)}$$

$$\sigma_a = 50\,(0.05 - 1 - 0.025) = 50\,(-0.9750) = -48.75$$

Il diagramma polare termina nell'origine tangente in $-\pi$. Infatti:

$$\lim_{\omega \to \infty} \arg G(j\omega) = (m-n)\frac{\pi}{2} + \cancel{\operatorname{sign}(K_1 - 1)}\frac{\pi}{2} = (1-3)\frac{\pi}{2} = -\pi$$

$$\operatorname{sign} K_1 = \operatorname{sign} K = 1$$

Il diagramma polare non presenta intersezioni con l'asse reale (si veda il punto a), ad eccezione dell'origine. Di conseguenza il margine di ampiezza è infinito.

d) $$G_\ell(s) = G_c(s)\,G(s) = \frac{K}{s}\cdot\frac{100\,(s+20)}{s(s+1)(s+40)} = \frac{100K\,(s+20)}{s^2(s+1)(s+40)}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G_\ell(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s^2}\,\frac{100K\,(s+20)}{\cancel{s^2}(s+1)(s+40)} =$$

$$= \frac{2000K}{40} = 50\,K$$

$$e_r = 0.1 = \frac{1}{K_a} = \frac{1}{50K} \Rightarrow \overset{5}{\cancel{50}}K = \cancel{10} \Rightarrow K = \frac{1}{5} = 0.2$$

Verifica della stabilità: per $K = 0.2$ è

$$G_\ell(s) = \frac{0.2\cdot 100\,(s+20)}{s^2(s+1)(s+40)} = \frac{20\,(s+20)}{s^4+41s^3+40s^2} \Rightarrow 1+G_\ell(s)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s^4+41s^3+40s^2+20s+400=0$$

4	1	40	400
3	41	20	0
2	1620	16'400	
1	−640'000	0	
0	16'400		

La prima colonna della tabella di Routh presenta due variazioni di segno. Dunque il sistema ad anello chiuso è instabile.

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

a) Si nota (dai diagrammi di Bode e con la conseguente verifica per via analitica), che

per $\omega_0 = 0.6$ rad/sec

$\angle G(j\omega_0) = -120.1^\circ$

$|G(j\omega_0)| = 71.48$

Si assume perciò $\omega_0 = 0.6$ rad/sec. come pulsazione di centro banda della rete a ritardo e anticip

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}} = \frac{1}{\sqrt{4\tau_1^2}} = \frac{1}{2\tau_1} \Rightarrow \tau_1 = \frac{1}{2\omega_0} = \frac{1}{2\times 0.6} = \frac{1}{1.2} = 0.8333$$

Inoltre $\tau_2 = 4\tau_1$

$$\tau_2 = 4\tau_1 = 4\times 0.8333 = 3.3332$$

Al fine di determinare il valore di α si impone:

$$|G_c(j\omega_0)| = \frac{1}{|G(j\omega_0)|} = \frac{\tau_1+\tau_2}{\alpha\tau_1 + \frac{\tau_2}{\alpha}} \Rightarrow \alpha\tau_1 + \frac{\tau_2}{\alpha} = (\tau_1+\tau_2)\,|G(j\omega_0)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2\tau_1 + \tau_2 - \alpha(\tau_1+\tau_2)|G(j\omega_0)| = 0 \Rightarrow \alpha^2\tau_1 + \tau_2 - \alpha(\tau_1+\tau_2)|G(j\omega_0)| = 0$$

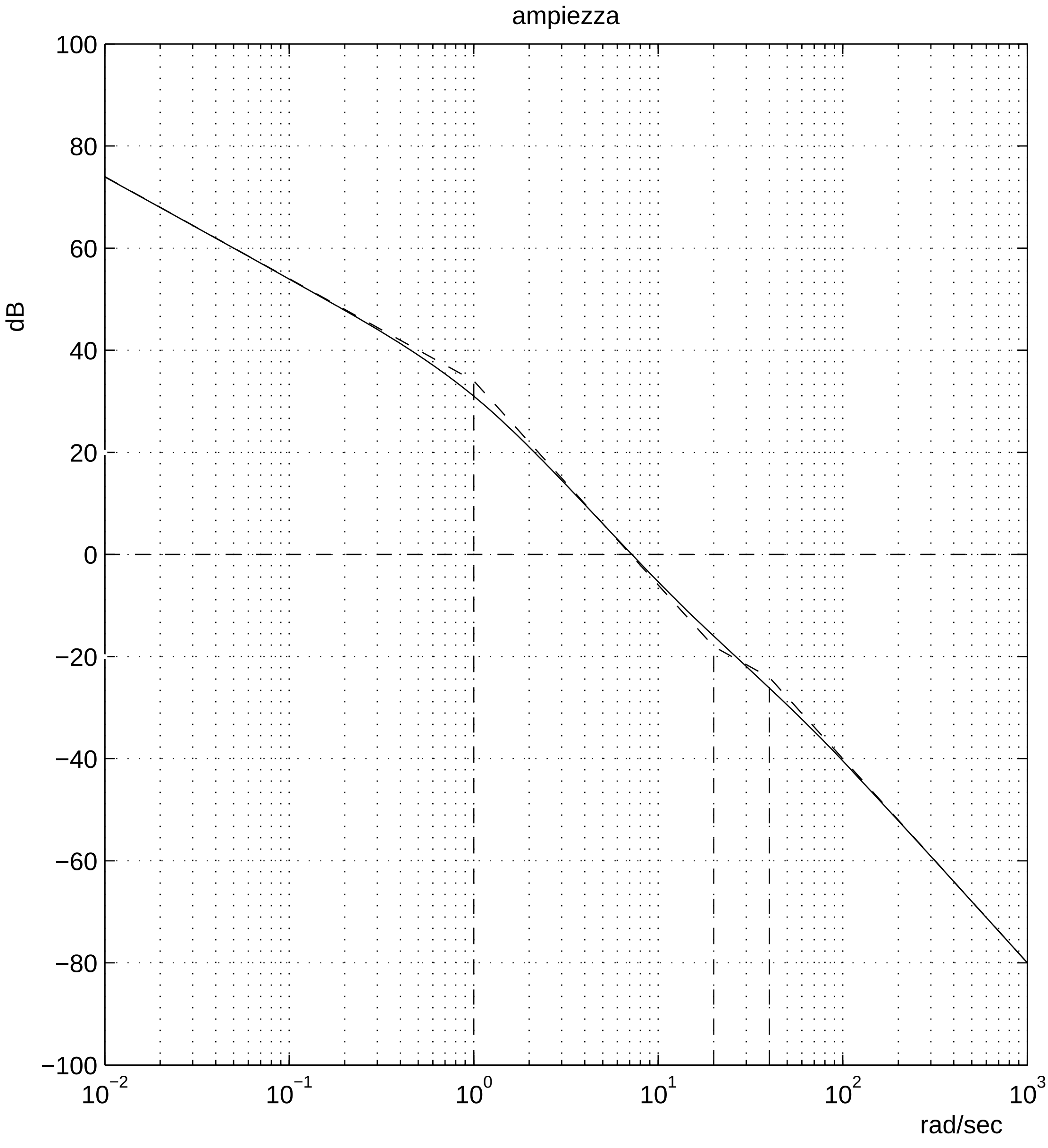
$$0.8333\alpha^2 - 71.48\,(0.8333 + 3.3333)\alpha + 3.3333 = 0$$

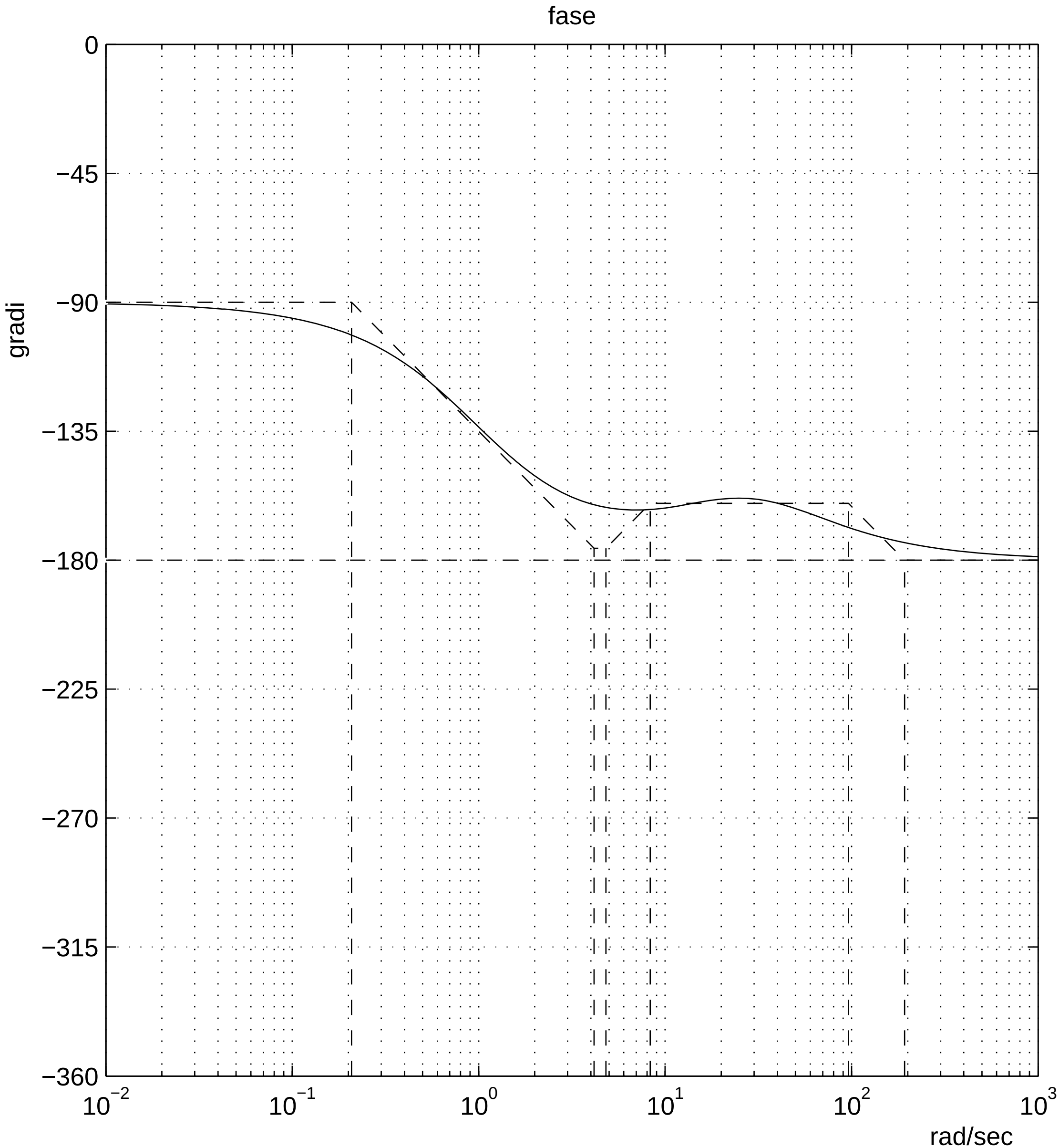
$$0.8333\alpha^2 - 297.8286\,\alpha + 3.3333 = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{cases} 357.3974 \leftarrow \text{NO} \\ 0.0112 \leftarrow \text{SI} \end{cases}$$

$$G_c(s) = \frac{(s+0.3)(s+1.2)}{(s+0.0036)(s+107.1)}$$

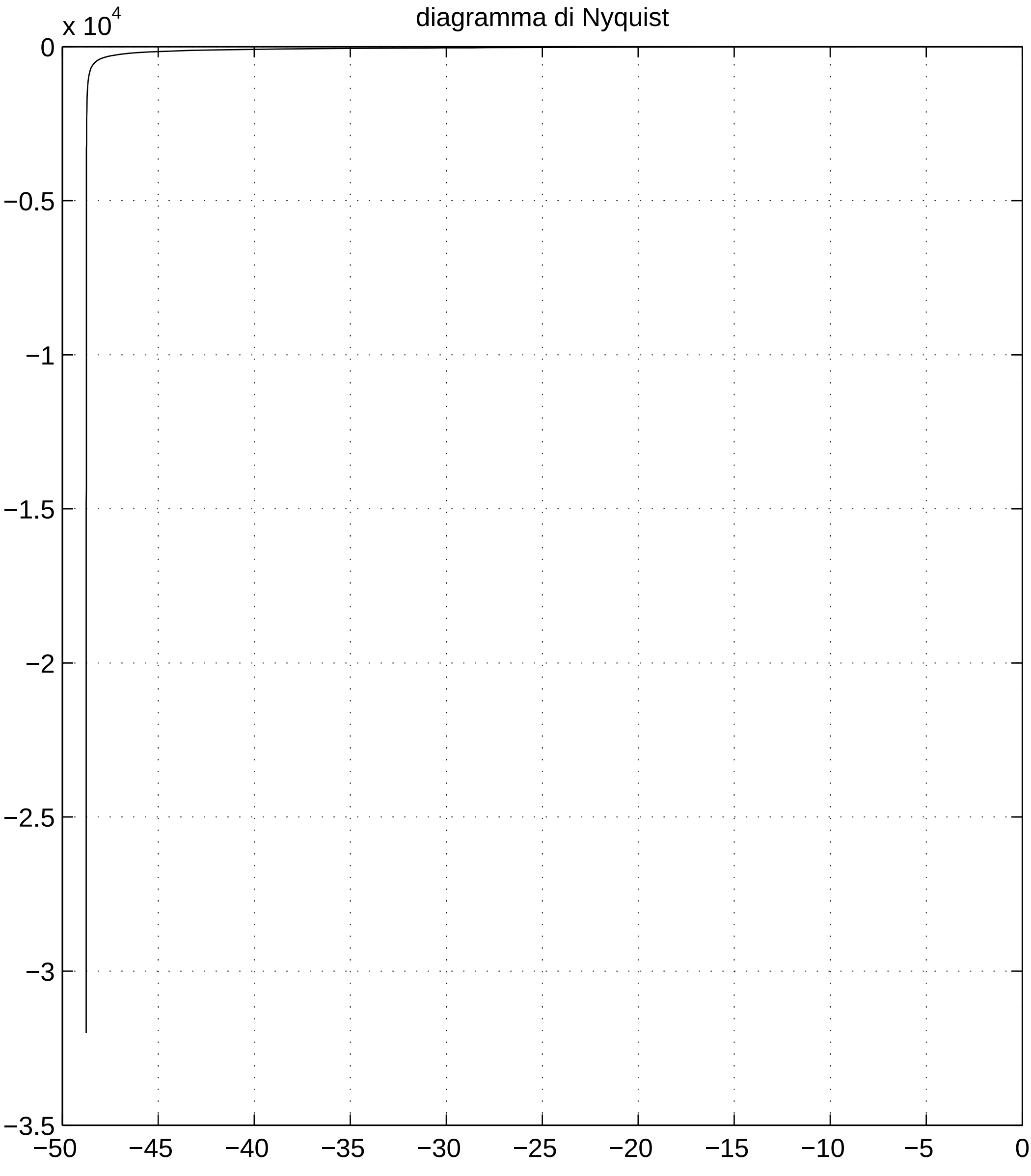
TFI: Verifica $M_f = 59.91^\circ$ per $\omega = 0.6$ rad/sec

$\Rightarrow$


ampiezza
dB
rad/sec
100
80
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}



fase
gradi
0
−45
−90
−135
−180
−225
−270
−315
−360
10^−2
10^−1
10^0
10^1
10^2
10^3
rad/sec



SI USI L'OPZIONE 7 DEL MENU PER

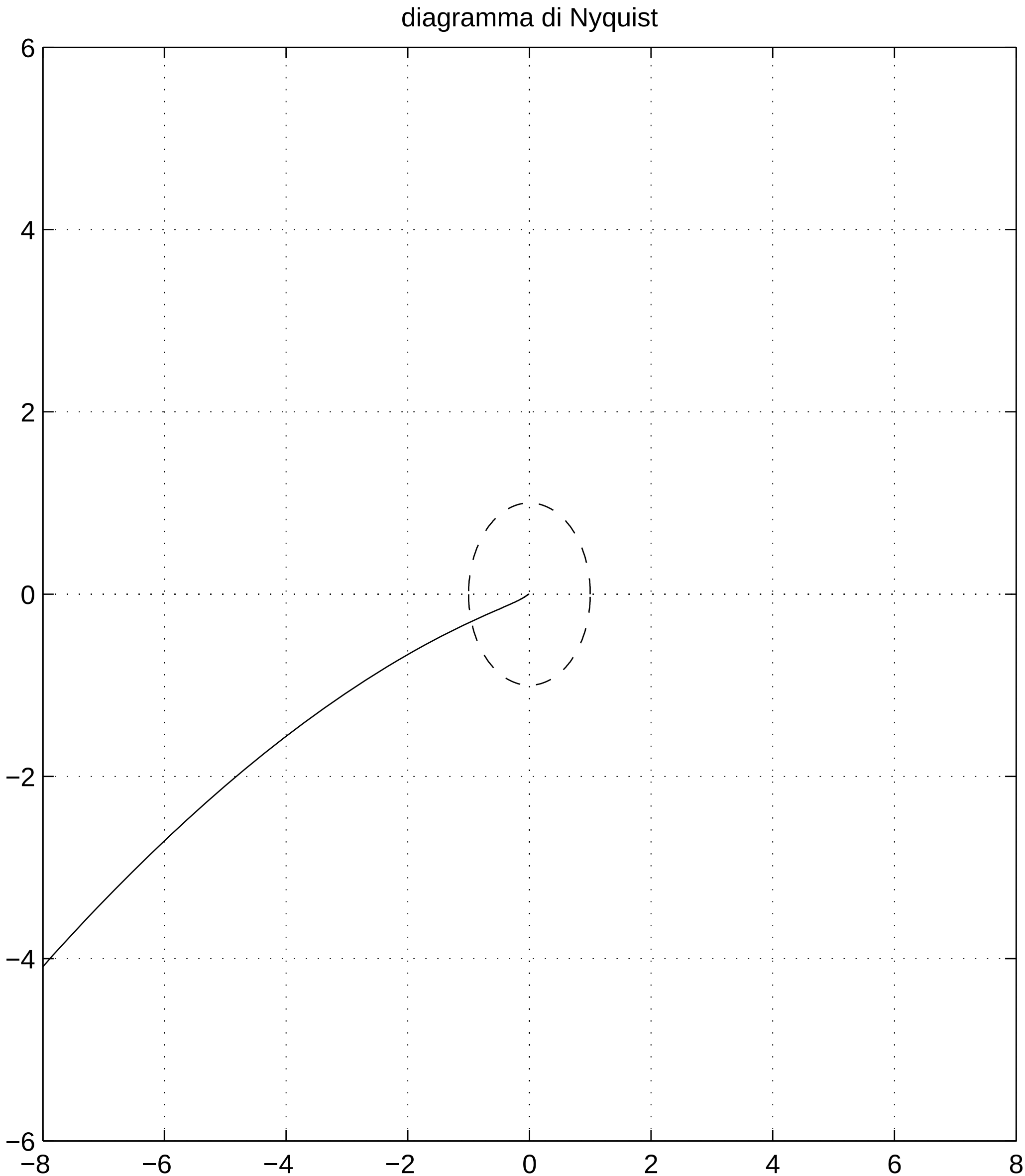


diagramma di Nyquist
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8