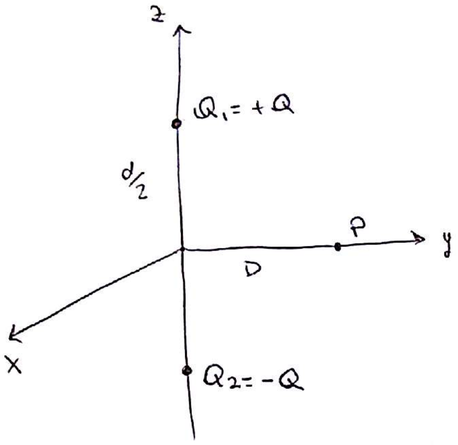
ESERCIZI: campi elettrici, principio di sovrapposizione, teorema di Gauss

① Due cariche puntiformi, di modulo $|Q|$ ma segno opposto, sono poste lungo l'asse z simmetricamente rispetto all'origine, a distanza $d/2$ dall'origine.
Calcolare il campo elettrico generato in P dell'asse y, posto a distanza D dall'origine.



Per il principio di sovrapposizione:

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

dove i è l'indice delle cariche sorgenti del campo (nel nostro caso $i = 1,2$)

Nelle sue componenti, nella formula di $\vec{E}_0(\vec{r})$,

$\vec{r}-\vec{r}_i$ diventa $\begin{cases} x - x_i \\ y - y_i \\ z - z_i \end{cases}$

e definiamo i vettori posizione di P, Q_1 e Q_2:

$$\begin{cases} \vec{r} \equiv (0, D, 0) \rightarrow \text{dove calcoliamo } \vec{E}_0(\vec{r}) \\ \vec{r}_1 \equiv (0, 0, \frac{d}{2}) \\ \vec{r}_2 \equiv (0, 0, -\frac{d}{2}) \end{cases}$$

quindi possiamo scrivere: $|\vec{r}-\vec{r}_1| = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} = \sqrt{D^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

e analogamente $|\vec{r}-\vec{r}_2| = \sqrt{D^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$

Indichiamo con $\Delta = \sqrt{D^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$, allora possiamo scrivere le componenti di $\vec{E}_0$ in questo modo

$$\begin{cases} E_{0x}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\Delta^3}(x-x_1) + \frac{-Q}{\Delta^3}(x-x_2)\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\Delta^3}(0-0) - \frac{Q}{\Delta^3}(0-0)\right] = 0 \\ E_{0y}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\Delta^3}(y-y_1) + \frac{-Q}{\Delta^3}(y-y_2)\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\Delta^3}D - \frac{Q}{\Delta^3}D\right] = 0 \\ E_{0z}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\Delta^3}(z-z_1) + \frac{-Q}{\Delta^3}(z-z_2)\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{\Delta^3}\left(0-\frac{d}{2}\right) - \frac{Q}{\Delta^3}\left(0+\frac{d}{2}\right)\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Qd}{\Delta^3} \end{cases}$$

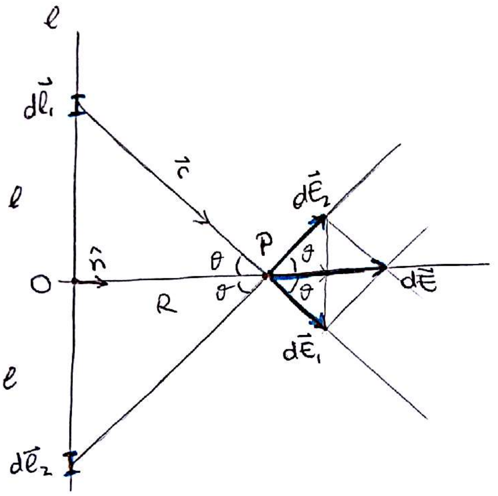
② Distribuzione uniforme di carica su supporto rettilineo $\vec{\ell}$ molto lungo (∞) e di dimensioni trasverse trascurabili.

Calcolare $\vec{E}_o$ in un punto P a distanza R.

La densità lineare di carica λ è nota e uniforme: $dq = \lambda(x,y,z)\, dl$

Calcoliamo il campo $\vec{E}_o$ come somma (integrale) dei campi elettrici elementari $d\vec{E}$ generati in P dai trattini elementari dl della distribuzione lineare rettilinea $\vec{\ell}$.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{\infty} d\vec{E} \simeq \int d\vec{E}$$



Notiamo che:

- $\vec{E}$ è solo su piano individuato da $\vec{\ell}$ e P
- ogni elemento $d\vec{\ell}_1$ ha un simmetrico $d\vec{\ell}_2$ rispetto a O: questi generano 2 contributi $d\vec{E}_1$ e $d\vec{E}_2$ con componente // uguale e opposta $\Rightarrow d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2$ è $\perp$ a $\vec{\ell}$.

(solo le componenti $\perp$ di $d\vec{E}_1$ e $d\vec{E}_2$ contribuiscono a $d\vec{E}$)

Dalla geometria dello schema, si ricava che:

$$d\vec{E} = d\vec{E}_1 + d\vec{E}_2 = \left(|d\vec{E}_1| + |d\vec{E}_2|\right)\cos\theta\,\hat{n} =$$

$$= \frac{2\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\hat{n}$$

Coulomb: $\boxed{|d\vec{E}_1| = |d\vec{E}_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}}$

dove $\lambda dl = dq$, $|d\vec{\ell}_1| = |d\vec{\ell}_2| = |d\vec{l}|$

Esprimiamo dl e r in funzione di R e θ, per calcolare $\vec{E}$ totale:

$$r = \frac{R}{\cos\theta}, \quad l = R\,tg\theta \rightarrow dl = R\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \qquad \left[\frac{d}{d\theta}tg\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\right]$$

Quindi:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\hat{n}}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2} 2\cos\theta\,\lambda\,\overbrace{\frac{R\,d\theta}{\cos^2\theta}}^{dl}\,\overbrace{\frac{\cos^2\theta}{R^2}}^{1/r^2} = \frac{\hat{n}\,\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta =$$

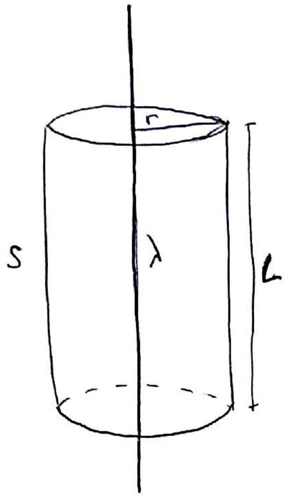
$$= \frac{\hat{n}\,\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\hat{n}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{R}.$$

th Gauss $\longrightarrow$

Se, invece, sfruttiamo il th di Gauss il campo $\vec{E}_0$ si calcola come segue.

$$\boxed{\Phi_S = \int \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{TOT}^{int}}{\varepsilon_0}} = \vec{E}_0 \cdot Area_S$$

Consideriamo una superficie cilindrica S, coassiale col filo:



Per motivi di simmetria: $\vec{E} \perp$ a filo

ed è costante in ogni punto di S

$\Downarrow$

flusso nullo sulle basi del cilindro, dove $\vec{E} \,//\, d\vec{S}$

Quindi il flusso:

$$\Phi_S(\vec{E}_0) = \vec{E}_0(r) \cdot 2\pi r L$$

Inoltre la carica totale contenuta nel cilindro è

$$Q_{int} = \lambda \cdot L$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0(r) \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_0(r) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$