УДК 519.63; 004.02
Н.О. Семенишин
Національний лісотехнічний університет України, Україна

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ РЕКУРЕНТНОЮ НЕЙРОННОЮ МЕРЕЖЕЮ ДЖОРДАНА

N.O. Semenyshyn

SOLVING HEAT EQUATION IN ONE DIMENSION USING JORDAN RECURRENT NEURAL NETWORK

Незважаючи на розвиток сучасної обчислювальної техніки, досягнення в програмному забезпеченні, конструюванні нових алгоритмів, є багато задач, які або не піддаються розв'язуванню наявними числовими методами, або не досягають задовільної точності. Це зумовило пошук нових ідейно методів, зокрема нейромережевих [1,2,3,4]. Накопичений величезний досвід застосування штучних нейронних мереж до розв'язування крайових задач математичної фізики.

В даній роботі розглядалась одновимірна задача теплопровідності для ізотропних матеріалів з граничними умовами першого типу

$$u_{xx} = \alpha u_t \tag{1}$$

де u – температура стержня в даній точці в певний момент часу, а постійна $\alpha = c\rho / k$, де *c* – теплоємність матеріалу стрижня, ρ – щільність матеріалу стержня і *k* – його теплопровідність.

Для розв'язання даної задачі розглянута рекурентна штучна нейронна мережа Джордана. Ми використали мережу даного типу оскільки задача теплопровідності містить змінну по часу, а як ми знаємо в рекурентних мережах є зворотний зв'язок, що дозволяє отримати інформацію з попереднього часового відліку. При цьому мережа Джордана була обрана завдяки тому, що в ній присутній прихований шар, а це в свою чергу позитивно впливає на апроксимацію результату [1].

Наша мережа в початковий момент часу приводить в активність нейрони вихідного шару, а саме ініціалізує значеннями з початкових і граничних умов рівняння і передає їх на наступний часовий шар.

На кожному часовому шарі **t** ми отримуємо нове значення температури із попередніх виходів за формулою:

$$u_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} f\left(\sum_{l=1}^{M_x} w_{kl} u_{i-1,l}\right) \tag{2}$$

де a – матриця ваг, що з'єднує прихований шар з вихідним; w – матриця ваг, що з'єднує вихідний шар попереднього часового шару з прихованим шаром в поточний момент часу; f – функція активації, зазвичай сигмоїдного типу.

Щоб застосувати нейромережеву методологію слід побудувати функціонал

$$J(u) = \sum_{(i,j)} \left(\frac{u_{i,j-1} + u_{i,j} + u_{i,j+1} - u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j} - u_{i-1,j+1}}{3\Delta t} - \alpha^2 \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j-1} - 2u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}}{2\Delta x^2} \right)^2$$

(3)

Як бачимо функціонал є різницею лівої і правої частини (1) із заміною диференціального оператора на скінченно-різницевий методом Кранка-Ніколсона, піднесений до квадрату і просумований по всіх точках області. Цей функціонал мінімізується по a_{jk} і w_{kl}. Важливою перевагою такого підходу є те, що ми можемо навчити мережу для деякої множини початкових і граних умов.

Відомо, що процес мінімізації побудований по методу найшвидшого спуску має дуже звивистий характер, рух майже перпендикулярний дну заглиблення, тоді як треба рухатись уздовж. Тому рекомендується вибирати ефективніші методи наприклад різновид методу Спряжених градієнтів – Флетчера-Рівса [1].

Щоб дослідити властивості апроксимації нашої мережі розглянемо приклад одновимірної задачі теплопровідності (1).

Дані початкові умови $u(0,x) = 0.4\sin(\frac{\pi x}{L})$, 0 <= x <= L, 0 <= t <= 0.05, L = 2; Δt = 0.005; Δx = 0.2; $u(t,0) = 0$, $u(t,L) = 0$; коефіцієнт температуропровід-ності (α) = 2.4094;

Точний розв'язок $u(t,x) = 0.2e^{\frac{-\alpha\pi^2 t}{L^2}} 2\sin(\frac{\pi x}{L})$

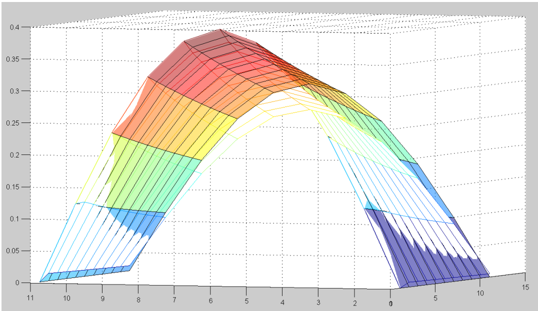

Рис. 1.Температурний розподіл задачі (середовище Matlab)

На графіку видно температурний розподіл точної функції – нижня біла поверхня; та розподіл функції апроксимованої нашою мережею – верхня прозора поверхня. Як бачимо є невелике розходження по центру поверхні. Середньоквадратична похибка рівна – 0.02024 для всієї поверхні.

Отже, у даній роботі проведено аналіз особливостей застосування нейромережевого підходу при побудові наближених розв'язків крайових задач для рівнянь параболічного типу. Розглянуто важливу для практики задачу теплопровідності. Розглянуто класичну архітектуру рекурентної нейронної мережі зі зворотним зв'язком (мережа Джордана).

Література

1. Васильев А.Н., Тархов Д.А. Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения. // СПб Государственный Поб литехнический Университет, 2009 г.

2. Горбаченко В.И. Нейрокомпьютеры в решении краевых задач теории поля. Кн.10 2003. 336 с.

3.Нестеренко Б.Б., Новаторський М.А. Асинхронні паралельні алгоритми нейронних мереж.

4. Новотарський М.А., Нестеренко Б.Б.. Штучні нейронні мережі: обчислення // Праці Інституту математики НАН України. – Т50. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2004. – 408 с.

5. Саймон Хайкин. Нейронные сети: полный курс, 2-е издание: Пер. с англ. − М.: Издательский дом «Вильямса», 2006. − 1104 с.