



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Dipartimento di Ingegneria Astronautica, Elettrica ed Energetica

Tesi di dottorato in Energia e Ambiente

Habitat Spaziale e Telerilevamento

RELAZIONI COMPATTE PER IL PROGETTO DI COSTELLAZIONI SATELLITARI

Tutore:

Prof. Franco Gugliemetti

Co-tutore:

Prof. Christian Circi

Candidato: Marco Cinelli

INDICE

| | |
|--|----|
| INTRODUZIONE | 1 |
| 1. COSTELLAZIONI DI SATELLITI: GENERALITÀ | 4 |
| 1.1 FUNZIONE OPERATIVA | 4 |
| 1.2 ORBITE PER L'OSSERVAZIONE PLANETARIA | 9 |
| 1.2.1 ORBITE PERIODICHE | 9 |
| 1.2.2 QUOTE CARATTERISTICHE | 12 |
| 1.2.3 ORBITE AD ELEVATA ECCENTRICITÀ | 14 |
| 1.2.4 ORBITE SINCRONE CON IL SOLE | 15 |
| 1.3 APPROCCIO METODOLOGICO | 17 |
| 1.3.1 CENNI STORICI | 19 |
| 1.3.2 COSTELLAZIONI DI TIPO WALKER | 22 |
| 1.3.3 COSTELLAZIONI CON CORRIDOI DI COPERTURA | 27 |
| 1.3.4 COSTELLAZIONI BASATE SU TRACCE A TERRA | 30 |
| 2. SOLUZIONI ANALITICHE PER ORBITE PERIODICHE | 34 |
| 2.1 PERTURBAZIONI ORBITALI | 35 |
| 2.1.1 ASIMMETRIA DEL GEOPOTENZIALE | 36 |
| 2.1.2 EFFETTI DI TERZO CORPO | 44 |
| 2.2 RICERCA ANALITICA DI ORBITE PERIODICHE | 49 |
| 2.3 EQUAZIONI POLINOMIALI | 50 |
| 2.3.1 POLINOMIO PER ORBITE PERIODICHE | 51 |
| 2.3.1.1 RISULTATI ANALITICI E RISULTATI NUMERICI | 54 |
| 2.3.2 POLINOMIO PER ORBITE SINCRONE E MULTI-SINCRONE CON IL SOLE | 58 |
| 2.3.2.1 RISULTATI ANALITICI E RISULTATI NUMERICI | 61 |
| 2.4 FATTORI CORRETTIVI | 65 |
| 3. RELAZIONI COMPATTE PER IL DISEGNO DI COSTELLAZIONI | 68 |
| 3.1 RELAZIONI COMPATTE | 69 |
| 3.1.1 SATELLITE SINGOLO | 69 |
| 3.1.2 SATELLITI LUNGO LA STESSA ORBITA | 72 |
| 3.1.3 SATELLITI SU PIÙ PIANI ORBITALI | 73 |
| 3.2 RIDUZIONE DELLA DISTANZA TRA LE TRACCE AL SUOLO | 74 |
| 3.2.1 SATELLITI LUNGO LA STESSA ORBITA | 74 |
| 3.2.2 SATELLITI SU PIÙ PIANI ORBITALI | 79 |
| 3.3 RIDUZIONE DELL'INTERVALLO DI RIVISITAZIONE | 81 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 3.3.1 | SATELLITI LUNGO LA STESSA ORBITA | 82 |
| 3.3.2 | SATELLITI SU PIÙ PIANI ORBITALI | 85 |
| 3.4 | RIVISITAZIONE A INTERVALLI REGOLARI | 87 |
| 3.4.1 | CASO GENERALE | 88 |
| 3.4.2 | COSTELLAZIONI OMOGENEE | 89 |
| 3.5 | POSIZIONE ISTANTANEA DEL PUNTO SUB-SATELLITARE | 91 |
| 3.5.1 | LATITUDINE ISTANTANEA | 91 |
| 3.5.2 | LONGITUDINE ISTANTANEA | 93 |
| 4. | COSTELLAZIONI PER LA COPERTURA CONTINUA DI UNA BASE EQUATORIALE | 95 |
| 4.1 | DETERMINAZIONE DEL NUMERO MINIMO DI SATELLITI PER LA COPERTURA CONTINUA | 95 |
| 4.2 | DISEGNO DELLA COSTELLAZIONE PER LA COPERTURA CONTINUA | 99 |
| 4.3 | ESEMPI APPLICATIVI: COPERTURA DELLA BASE EQUATORIALE DI MALINDI MEDIANTE PMSSO | 102 |
| 4.3.1 | INDIVIDUAZIONE NUMERO MINIMO DI SATELLITI | 102 |
| 4.3.2 | DISEGNO DELLA COSTELLAZIONE | 105 |
| 4.4 | LIMITI DI APPLICABILITÀ PER LE INCLINAZIONI MEDIE E POLARI | 108 |
| 4.3.3 | APPLICAZIONE: COPERTURA CONTINUA CON ORBITA POLARE | 110 |
| | CONCLUSIONI | 113 |
| | BIBLIOGRAFIA | 115 |
| | APPENDICE A: CODICI MATLAB | 123 |

INTRODUZIONE

In questo lavoro saranno individuate equazioni originali in grado di descrivere gli effetti perturbativi di lungo periodo e secolari, sugli elementi orbitali classici, di un satellite posto sotto l'influenza di un terzo corpo, nel caso più generale in cui quest'ultimo descriva un'orbita ellittica ed inclinata rispetto all'equatore del corpo primario del satellite.

Tali equazioni, unitamente a quelle in grado di stimare gli effetti perturbativi dovuti all'asimmetria del geopotenziale, saranno utilizzate per giungere analiticamente a polinomi risolutivi per orbite dedite all'osservazione ambientale (orbite periodiche sincrone e multi-sincrone con il moto apparente del Sole).

Saranno dunque fornite *relazioni compatte* originali per il disegno rapido di costellazioni basato sulla disposizione delle tracce a terra di satelliti posti su una comune orbita periodica, valutata mediante l'uso dei polinomi risolutivi che tengono conto degli effetti perturbativi dell'asimmetria del geopotenziale e del terzo corpo, della quale sono state accuratamente scelte le caratteristiche di osservazione. Data l'estrema semplicità di queste relazioni, ne è possibile l'implementazione su appositi codici che consentiranno di disegnare le costellazioni e valutarne le prestazioni nell'ambito dell'osservazione planetaria, con estrema facilità ed accuratezza.

In definitiva, fissate le specifiche della missione, espresse in termini di obiettivo dell'osservazione, risoluzione al suolo e frequenza di rivisitazione su una specifica area, e dunque fissate le caratteristiche di ripetitività di una comune orbita periodica di riferimento della costellazione, sarà possibile individuare gli elementi orbitali in grado di soddisfare dette caratteristiche mediante l'uso dei polinomi risolutivi. Nota l'orbita di riferimento, e fissate le dimensioni della costellazione, in termini di numero di satelliti totali, numero di piani orbitali e numero di satelliti su ciascun piano, sarà infine possibile

utilizzare le citate relazioni compatte al fine di individuare le fasi da imporre tra i satelliti su uno stesso piano orbitale (in anomalia media) e tra i diversi piani (in ascensione retta del nodo ascendente) per rispettare le specifiche di osservazione della missione, e giungere infine, con estrema semplicità, al disegno della costellazione.

La tesi è stata sviluppata come segue:

- *Capitolo 1:* è presentata una panoramica delle principali costellazioni, raggruppate in funzione della missione operativa, e delle più importanti orbite per l'osservazione planetaria. Sono offerti un quadro storico e lo stato dell'arte delle più comuni metodologie per il disegno delle costellazioni di satelliti;
- *Capitolo 2:* sono analizzati i disturbi dovuti alle principali perturbazioni agenti sui satelliti e, in particolare, vengono individuate equazioni originali in grado di descrivere le variazioni temporali degli elementi orbitali dovuti alla presenza di un terzo corpo, nel caso più generale di orbita ellittica ed inclinata rispetto all'equatore del corpo primario del satellite. Sono ricavate equazioni polinomiali risolventi che permettono di progettare analiticamente orbite periodiche, sincrone e multi-sincrone con il moto apparente del Sole, di caratteristiche scelte, tenendo conto degli effetti dovuti all'asimmetria del geopotenziale e al terzo corpo. Infine, sono proposti esempi applicativi per valutare l'entità degli errori da cui le soluzioni individuate sono afflitte, ed è valutata una procedura iterativa per la loro correzione;
- *Capitolo 3:* sono proposte nuove relazioni compatte per il disegno rapido di costellazioni di satelliti per l'osservazione ambientale, basate sulla disposizione delle tracce a terra di satelliti posti su una comune orbita periodica di caratteristiche note. Per il caso a singolo piano orbitale e multi-piano, sono esaminate le condizioni che

consentono di ottenere un reticolato uniforme delle tracce al suolo e l'aumento della frequenza di rivisitazione su una data regione, sia nel caso di costellazione omogenea (stessa fase in RAAN tra i diversi piani orbitali, e in anomalia media tra i satelliti posti sullo stesso piano), che non-omogenea. Sono infine riportate equazioni che permettono una rapida ricostruzione temporale della traccia al suolo di costellazioni basate su una comune orbita periodica;

- *Capitolo 4:* facendo uso degli strumenti presentati nei precedenti capitoli, viene proposta una possibile metodologia per l'individuazione di costellazioni, basate su una comune orbita di riferimento periodica e composte dal minimo numero di satelliti, in grado di garantire la copertura continua di una base equatoriale. Esempi applicativi sono proposti per la copertura del "Centro spaziale Luigi Broglio" di Malindi (Kenya) con orbite periodiche multi-sincrone con il Sole. Sono infine discussi alcuni limiti applicativi della metodologia introdotta.

COSTELLAZIONI DI SATELLITI: GENERALITÀ

Si definisce costellazione, un insieme di satelliti, solitamente simili per disegno, orbita, e carico utile, che coopera ad uno stesso obiettivo operativo; per tale ragione il payload della missione è ripartito tra i diversi satelliti.

Le costellazioni possono essere classificate tenendo conto di diversi aspetti che le caratterizzano quali la funzione operativa (o missione), la metodologia utilizzata nel disegno della costellazione, le caratteristiche delle orbite utilizzate...

In questo capitolo è proposta una panoramica storica delle costellazioni passate, presenti e in fase di realizzazione, suddivise secondo la finalità operativa. In seguito, è presentata una classificazione delle principali orbite caratteristiche. Infine, è stato ricostruito lo stato dell'arte delle principali metodologie utilizzate per il disegno delle costellazioni.

1.1 FUNZIONE OPERATIVA

Le principali funzioni operative assolte dalle costellazioni di satelliti, possono essere raggruppate nelle seguenti:

- Telecomunicazioni, a carattere globale o regionale;
- Navigazione e creazione di reti locali (a questo campo è possibile ricondurre anche le applicazioni riguardanti la geodesia);
- Osservazione e monitoraggio terrestre globale o di aree specifiche.

La missione influenza sensibilmente il disegno di una costellazione. In particolare, gli obiettivi da perseguire determinano la scelta degli elementi orbitali e del numero di satelliti da impiegare; conseguentemente, ne sono

influenzati anche i costi per l'immissione in orbita dei satelliti e della loro manutenzione, in termini di frequenza ed entità delle manovre correttive. La missione determina inoltre il carico utile dei singoli satelliti.

Classifichiamo anzitutto le costellazioni tra quelle in grado, o meno, di garantire una copertura globale e continua e, tra queste, quelle che possono offrire copertura multipla, per le quali- da ogni punto della Terra- è possibile per ogni istante avere in vista più satelliti. Le costellazioni finalizzate alla navigazione satellitare e alla geo-localizzazione, richiedono- a parità di quota scelta per l'orbita di riferimento della costellazione- un numero di satelliti superiore, perché tali sistemi necessitano, per essere operativi, di copertura multipla (in genere, almeno quattro satelliti devono essere in vista).

Il primo a formulare una costellazione finalizzata alla comunicazione in grado di coprire la quasi totalità del globo terrestre fu A. C. Clarke [A.C. Clarke, 1945] che, nel 1945, ipotizzò una costellazione formata da tre satelliti posti in orbita geostazionaria (GEO), di cui di più si dirà nel Cap. 1.2.2, equamente sfasati tra loro in ascensione retta al nodo ascendente (RAAN). Questa soluzione costituisce l'applicazione più semplice per avere una copertura continua nel tempo, ma solo per regioni fino alle medie latitudini, e in particolare della fascia equatoriale, mentre non assicura la copertura delle alte latitudini e delle calotte polari. Infatti, la copertura garantita da un satellite è una circonferenza la cui semi-ampiezza (θ) è ricavabile (vedi Fig. 1.1) con semplici relazioni di trigonometria sferica:

$$\theta = \arccos\left(\frac{R_p}{R_p + h} \cos \varepsilon\right) - \varepsilon \quad (1.1)$$

con R_p il raggio planetario del corpo primario, h l'altezza del satellite e ε l'angolo di maschera, ovvero il minimo angolo di elevazione che consente di avere il satellite in vista, per cui si è soliti assumere valori costanti prossimi a

5° - 10° ; l'equazione mostra come, per fissati valori di ε , θ dipenda esclusivamente dalla quota del satellite.

Sostituendo nell'Eq. (1.1) la quota di geosincronismo ($h = 35768$ km) e ponendo $\varepsilon = 10^{\circ}$, si ricava $\theta \cong 70^{\circ}$, semi-ampiezza del cerchio di copertura per un satellite in orbita geostazionaria.

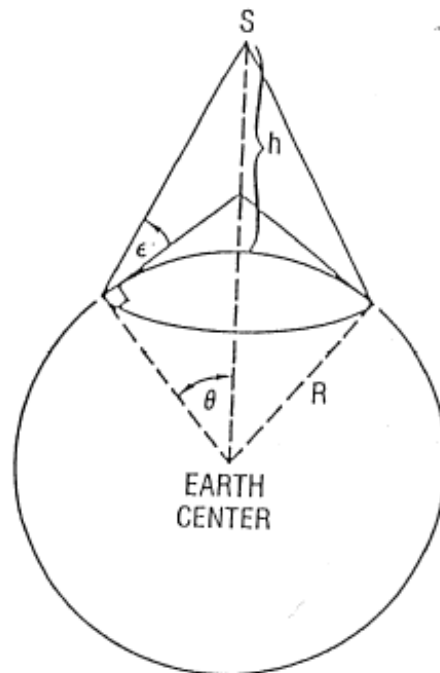


Figura 1.1: Semi-ampiezza del cerchio di acquisizione di un satellite.

Nei decenni successivi, il disegno e la messa in orbita di costellazioni hanno rivestito un ruolo crescente nell'ambito delle applicazioni spaziali; in particolare, hanno visto un notevole sviluppo le costellazioni finalizzate alla navigazione e alla geodesia. Il primo importante sistema satellitare di navigazione globale (GNSS, *Global Navigation Satellite System*) è stato il TRANSIT [Rosetti e Carnebianca, 1993], conosciuto anche come NAVSAT, sviluppato dalla marina militare degli Stati Uniti (U.S. Navy) a partire dalla fine degli anni '50, e basato sulla misurazione dell'effetto doppler del segnale a 150 e 400 MHz inviato da una costellazione nominale di almeno cinque satelliti (e fino a sette) posti in orbita bassa polare alla quota di circa 1075 km, con

periodo orbitale di circa 106 minuti. Dal 1973, Il Dipartimento della Difesa statunitense (USDOD) sviluppa un nuovo e più efficiente sistema che prende il nome di GPS (*Global Positioning System*) [Hegarty e Chatre, 2008], il quale diviene pienamente operativo solo a metà degli anni '90. Il sistema, tuttora in funzione, si basa su misure di pseudo-range e prevede una costellazione nominale di 24 satelliti in orbita media semi-sincrona con la Terra ad un'inclinazione di circa 55°.

Negli ultimi anni, costellazioni finalizzate alla navigazione da satellite, sono state poste in orbita anche da altri paesi; è il caso del GLONASS (*GLOBAL NAVIGATION Satellite System*) [Revnivkykh, 2008] curato dalla Difesa russa (VKO), del cinese BeiDou [Han et al., 2011] che ha la peculiarità di utilizzare una costellazione ibrida di satelliti alle quote geostazionaria e media, garantendo una copertura solo a carattere regionale. Risultano in via di completamento il sistema Galileo [Benedicto et al., 2000] dell'Unione Europea, composto da una costellazione nominale di 27 satelliti in orbita media inclinata di 56°, e l'indiano IRNSS (*Indian Regional Navigation Satellite System*) [Saikiran e Vikram, 2013], dell'ISRO (*Indian Space Research Organisation*) formato da 7 satelliti in quota geosincrona, in grado di offrire copertura solo locale, come il cinese BeiDou.

Le caratteristiche orbitali e la geometria della costellazione dei principali sistemi di GNSS di cui si è fatta menzione, sono riassunti in Tab. 1.1; per una migliore interpretazione del significato di alcune voci (caratteristiche di periodicità, geometria della costellazione), si rimanda ai paragrafi successivi.

Una panoramica dettagliata delle costellazioni finalizzate alle telecomunicazioni sviluppate fino alla fine dello scorso millennio è stata proposta da J.V. Evans [Evans, 2000]. Tra queste vanno ricordati i progetti Teledesic, finalizzato alla navigazione internet e che avrebbe previsto 840 satelliti in orbita bassa, numero poi ridimensionato a 288; la costellazione Globalstar, composta da 80 satelliti in orbita bassa e concepita per la telefonia

satellitare; e, per analoga missione, il progetto Iridium di Motorola, che ha visto il lancio di 95 satelliti in orbita bassa.

| Sistema | GPS (Stati Uniti) | GLONASS (Russia) | Galileo (Unione Europea) |
|--|----------------------|---------------------|-----------------------------|
| Altitudine [km] | 20180 | 19100 | 23220 |
| Periodo orbitale | 11h58' | 11h15' | 14h5' |
| Caratteristiche di periodicità [orbite/giorno siderale] | 2 | 2+1/8 | 1+7/10 |
| Inclinazione | circa 55° | 64.8° | 56° |
| Geometria della costellazione [N/p/f] | 24/6/1 | 24/3/2 | 27/3/1 |

Tabella 1.1: Caratteristiche delle costellazioni dei principali sistemi di navigazione satellitare

Tra i progetti attualmente in via di sviluppo, va menzionata la costellazione OneWeb [<http://oneweb.world/>] finalizzata ad una copertura internet globale (LTE, 3G e WiFi) a basso costo, con l'uso di 648 satelliti in orbita bassa.

Nelle applicazioni finalizzate all'osservazione e al monitoraggio ambientale, non è strettamente richiesta una copertura globale continua nel tempo; ciò induce al disegno di costellazioni formate da un numero di satelliti solitamente ridotto rispetto a quelle in uso nella navigazione e nelle telecomunicazioni. La scelta del numero di satelliti è, per queste applicazioni, strettamente connessa alla frequenza con cui s'intende osservare le zone d'interesse e alla risoluzione delle immagini acquisite: elevate risoluzioni spaziali implicano l'utilizzo di orbite a bassa quota.

Tra le costellazioni per l'osservazione ambientale, citiamo la franco-statunitense A-train [Stephens et al., 2002], attualmente formata da 6 satelliti in orbita periodica eliosincrona, e l'italiana COSMO-SkyMed (*CONstellation of small Satellites for the Mediterranean basin Observation*) [Coletta et al., 2008], progetto congiunto dell'ASI (*Agenzia Spaziale Italiana*) e del Ministero della Difesa, costituita da 4 satelliti attivi in orbita periodica eliosincrona. Quest'ultima, congiuntamente ai due satelliti ottici della costellazione *Pléiades* [Gleyzes et al., 2012] sviluppata dal CNES (*Centre National d'Etudes Spatiales*) dà luogo al sistema bilaterale ORFEO (*Optical and Radar Federated Earth Observation*) [Poli et al., 2013].

1.2 ORBITE PER L'OSSERVAZIONE PLANETARIA

Le orbite impiegate nell'osservazione planetaria possono essere classificate tenendo conto di diversi aspetti. Una prima classificazione è possibile tra orbite in cui il grigliato descritto dal punto sub-satellitare si ripeta nel tempo (*orbite periodiche*), o meno; ulteriori distinzioni possono essere fatte in funzione dei valori assunti dai diversi elementi orbitali. Infine, è possibile riconoscere particolari sincronie quali- ad esempio- quella con la rotazione terrestre (orbite geosincrone) o con il moto apparente del Sole attorno alla Terra (orbite eliosincrone e multi-sincrone con il Sole [Ulivieri e Anselmo, 1991]).

1.2.1 ORBITE PERIODICHE

Si definiscono periodiche, o "in fase" con la Terra, quelle orbite in cui un satellite descrive un numero intero (R) di rivoluzioni in un numero intero (m) di giorni nodali, che definiscono la durata del ciclo di ripetitività, cioè l'intervallo di tempo tra due passaggi del punto sub-satellitare su uno stesso punto della superficie terrestre quale, ad esempio, uno dei nodi ascendenti. Nelle orbite periodiche, il grigliato descritto dal satellite- ovvero la traccia dei successivi punti sub-satellitari- risulta regolare e si ripete ad intervalli costanti pari al ciclo di ripetitività [Ortore et al., 2012].

Matematicamente, questa condizione è espressa dalla relazione [King, 1976]:

$$m \cdot D_n = R \cdot T_n \quad (1.2)$$

con:

- m il numero intero di giorni nodali;
- R il numero intero di rivoluzioni;
- D_n la durata del giorno nodale, cioè il periodo di rotazione terrestre calcolato rispetto al nodo orbitale;

- T_n la durata del periodo nodale, ovvero l'intervallo temporale tra due successivi passaggi del satellite per il nodo ascendente.

In Eq. (1.2) i valori assegnati ai parametri m ed R , che descrivono le caratteristiche di ripetitività del ciclo di osservazione, devono essere interi primi tra loro. Il rapporto R/m definisce il parametro q pari al numero di rivoluzioni- in generale non intero- compiute dal satellite nell'arco di un giorno nodale (orbite/giorno nodale):

$$q = \frac{R}{m} = \frac{D_n}{T_n} = N_i + N_f = N_i + \frac{k}{m} \quad (1.3)$$

dove:

- N_i è la parte intera di q , ovvero il numero intero di rivoluzioni completate dal satellite in un giorno nodale;
- $N_f = k/m$ è la parte frazionaria di q , con k un numero intero primo con m e minore o uguale a $(m-1)$.

L'Eq. (1.3), mostra come sia possibile riscrivere q come la somma di un numero intero e di una parte frazionaria, che sarà possibile razionalizzare, individuando k ed m . Per tale ragione, da un punto di vista matematico, ogni orbita sembrerebbe periodica. Tale affermazione deve essere rivista alla luce di aspetti di natura teorica e pratica, che pongono stringenti vincoli sulla durata del ciclo di ripetitività dell'orbita periodica, quindi su m . Anzitutto, m deve essere sufficientemente contenuto da poter assumere costanti, e pari ai loro valori medi, le grandezze utili a definire le durate di periodo nodale e giorno nodale (a breve introdotte). Contrariamente, al trascorrere dei cicli di ripetitività, il punto sub-satellitare non descriverebbe la stessa traccia, ed i successivi grigliati non sarebbero sovrapponibili ai precedenti.

Inoltre, la durata dei cicli di ripetitività, quindi dei cicli di osservazione, deve avere durata commisurabile alla durata della missione e alle tempistiche che

caratterizzano le variazioni in seno ai fenomeni- ad esempio di natura ambientale- oggetto dell'osservazione.

Ricordando la definizione di giorno nodale e periodo nodale [Merson, 1961]:

$$Dn = \frac{2\pi}{\omega_p - \dot{\Omega}} \quad (1.4)$$

$$Tn = \frac{2\pi}{\dot{M} + \dot{\omega}} = \frac{2\pi}{\dot{\xi}} \quad (1.5)$$

con:

- ω_p la velocità di rotazione planetaria del corpo primario;
- $\dot{\Omega}$ la rotazione della linea dei nodi (RAAN);
- \dot{M} la variazione dell'anomalia;
- $\dot{\omega}$ la rotazione della linea delle apsidi (essendo ω l'argomento del pericentro);
- $\dot{\xi} = \dot{M} + \dot{\omega}$ la variazione dell'argomento di latitudine.

Limitando gli effetti perturbativi allo schiacciamento polare (armonica zonale J_2 del campo gravitazionale), le variazioni temporali degli elementi classici utili alla valutazione del giorno nodale e del periodo nodale sono [Kozai, 1959]:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3R_p^2 J_2}{2} \frac{n \cos i}{a^2 (1-e^2)^2} \quad (1.6)$$

$$\dot{\omega} = \frac{3R_p^2 J_2}{4} \frac{n(4-5\sin^2 i)}{a^2 (1-e^2)^2} \quad (1.7)$$

$$\dot{M} = n + \frac{3R_p^2 J_2}{4} \frac{n(2-3\sin^2 i)}{a^2 (1-e^2)^{3/2}} \quad (1.8)$$

Essendo a il semiasse maggiore dell'orbita, e l'eccentricità dell'orbita, i l'inclinazione del piano orbitale, e $n = \sqrt{\mu_p / a^3}$ il moto medio del satellite, con μ_p il parametro gravitazionale planetario.

La terza riga di Tab. 1.1 evidenzia che il ricorso alle orbite periodiche nel disegno di costellazioni satellitari- anche in missioni diverse da quelle dei sistemi di navigazione- è prassi consolidata dovuta alla grande capacità che queste orbite hanno di rispondere a requisiti ricorrenti nelle missioni quali, ad esempio, la frequenza di rivisitazione. Inoltre, nel caso in cui l'intera costellazione sia costituita da satelliti posti su orbite aventi le stesse caratteristiche di periodicità (stesso q), sarà possibile valutare le prestazioni offerte dalla costellazione limitatamente al periodo di ripetitività (m), semplificandone notevolmente il disegno e l'analisi delle prestazioni. Grande importanza acquisiscono quegli strumenti che consentano di individuare rapidamente e con precisione le soluzioni di orbite periodiche con caratteristiche accuratamente scelte in funzione della missione. Per tale ragione, questa tematica sarà largamente affrontata nel Cap. 2, dove saranno proposte soluzioni originali per l'individuazione analitica di orbite periodiche.

1.2.2 QUOTE CARATTERISTICHE

Secondo la classificazione fornita dal *Goddard Space Flight Center*, in base alla quota possiamo riconoscere tre distinte tipologie orbitali:

- H.E.O. (*High Earth Orbit*) con apogeo posto ad una quota superiore a quella di geosincronismo, ovvero quella quota a cui il moto medio del satellite è pari (o "sincrono") alla velocità di rotazione terrestre ($n = \omega_p$); ricordando la definizione data del moto medio, nel caso kepleriano- trascurando cioè tutti gli effetti perturbativi in grado di influenzare il moto medio del satellite- ciò si verifica per valori del raggio vettore all'apogeo pari o superiori a 42164.199 km ($h \geq 35768$ km). Per le H.E.O. si ha $q \leq 1$ orbita/giorno. Un'orbita geosincrona

con inclinazione ed eccentricità nulle ($i = 0^\circ$, $e = 0$) è detta geostazionaria o G.E.O. (*Geostationary Earth Orbit*); il suo punto sub-satellitare risulta stazionario, la traccia a terra è un punto (posto sull'Equatore) e il satellite "osserva" continuamente, e con le medesime caratteristiche geometriche, la stessa regione. In virtù di queste proprietà, le orbite G.E.O. assumono grande rilevanza per quelle applicazioni in cui è richiesta la copertura continua di una stessa regione come le telecomunicazioni, la meteorologia e la navigazione. L'orbita G.E.O. presenta tuttavia il grande limite di non offrire una copertura globale, in virtù del valore di θ precedentemente calcolato.

Il primo satellite geosincrono posto in orbita è stato lo statunitense *Syncom* (*Synchronous Communications Satellite*), nel 1963 [Capderou, 2005]; allo stesso anno risale anche il *Syncom-3*, primo satellite geostazionario, finalizzato alla trasmissione in diretta delle immagini televisive dei giochi olimpici di Tokyo '64.

- M.E.O. (*Medium Earth Orbit*) con apogeo posto ad una quota compresa tra 2000 km e la quota di geosincronismo. In virtù delle grandi limitazioni dovute alla presenza in questo intervallo di quote delle cosiddette *Fasce di van Allen*, l'uso di tali orbite viene limitato a quote superiori a 19000 km, laddove i disturbi delle fasce vengono meno. Come mostrato in Tab. 1.1, le M.E.O. sono le più utilizzate nell'ambito della navigazione e nelle missioni di geodesia terrestre, in particolare per quote tra 19000 km e 25000 km, dove si ha $q \cong 2$ orbite/giorno.

- L.E.O. (*Low Earth Orbit*) con apogeo fino a 2000 km, sono le orbite che consentono la miglior risoluzione al suolo e il minor costo per la messa in orbita. Inoltre esse permettono la trasmissione di un segnale a banda larga con ridotta latenza. Per tali caratteristiche, sono utilizzate nell'ambito delle missioni finalizzate all'osservazione terrestre (*telerilevamento* dell'ambiente terrestre) e/o alle comunicazioni, mentre risultano scarsamente impiegate per

i sistemi di navigazione (fa eccezione il TRANSIT) in virtù del contenuto valore di θ caratterizzante le basse quote ($\theta \leq 35^\circ$), che imporrebbe un numero estremamente elevato di satelliti per avere coperture continue multiple. Le L.E.O. sono caratterizzate da periodi orbitali intorno a 100' e da $13 < q < 15$.

1.2.3 ORBITE AD ELEVATA ECCENTRICITÀ

Come si vedrà successivamente, una delle principali ipotesi semplificative nel disegno di costellazioni satellitari è l'uso di orbite circolari, a eccentricità nulla ($e = 0$). Tale scelta consente di ridurre la complessità del problema di copertura globale e continua, ed i costi di produzione dei satelliti stessi, evitando loro di dover operare in un ampio intervallo di quote, caratterizzate da diverso ambiente spaziale.

L'uso di orbite ellittiche, in particolare delle cosiddette orbite a elevata eccentricità H.E.O. (*Highly Elliptical Orbit*), consente la copertura prolungata su una regione di particolare interesse [Wertz, 2001].

Prendendo in esame l'Eq. (1.7), è sufficiente scegliere un valore dell'inclinazione tale che sia nullo il termine $(4 - 5 \sin^2 i)$ affinché $\dot{\omega} = 0$. Sotto questa ipotesi, le posizioni di pericentro ed apocentro si mantengono costanti nel tempo. Le inclinazione per cui ciò si verifica sono pari a 63.4° e 116.6° , e sono definite *inclinazioni critiche*.

Con orbite a elevata eccentricità e inclinazione critica, è possibile superare i limiti delle orbite geostazionarie per le alte latitudini. È questo il caso delle orbite Molniya [Allan, 1971] e Tundra [Brown, 1989]. Le prime sono semi-sincrone con la terra ($q = 2$), a inclinazione critica ed eccentricità nominale $e = 0.74$, le seconde sono in orbita geosincrona ($q = 1$), inclinazione critica e $0.2 < e < 0.4$. Esse permettono di ottenere la copertura continua di una regione (posta nell'intorno del punto sub-satellitare all'apogeo), con una costellazione di appena tre satelliti, rappresentando una valida alternativa alle orbite geostazionarie per le comunicazioni alle alte latitudini (Russia, Canada).

Un caso particolare è rappresentato dalla C.O.B.R.A. (*Communications Orbiting Broadband Repeating Array*) [Draim e Cefola, 2007], una costellazione ibrida di satelliti ad inclinazione critica ed elevata eccentricità e satelliti in orbita circolare equatoriale. Scegliendo opportunamente l'apogeo delle orbite ellittiche, questa costellazione consente un'elevata copertura di un singolo emisfero terrestre.

1.2.4 ORBITE SINCRONE CON IL SOLE

Sfruttando i marcati effetti perturbativi dovuti, in orbita bassa, principalmente allo schiacciamento polare (armonica zonale J_2), è possibile individuare orbite in grado di presentare particolari sincronie con il moto di apparente rivoluzione del Sole attorno alla Terra.

In primo luogo, è possibile definire *eliosincrona* - o *sun-sincrona*, o S.S.O. (*Sun-Synchronous Orbit*)- quell'orbita in cui l'angolo formato dalla congiungente Sole-centro del corpo primario con il piano orbitale del satellite si mantiene costante nel tempo. Ciò si verifica se la precessione della linea dei nodi è pari alla rotazione (apparente) del Sole attorno al corpo primario, cioè se risulta verificata l'equazione:

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{SUN} \quad (1.9)$$

dove $\dot{\Omega}_{SUN}$ è la velocità angolare di apparente rivoluzione del Sole. Dall'Eq. (1.4) si può facilmente calcolare che, per una S.S.O., il giorno nodale è pari al giorno solare medio ($D_n = D_{SUN}$).

Ricorrendo all'Eq. (1.6) è possibile ricavare analiticamente, tenendo conto dei soli effetti perturbativi dovuti a J_2 , la curva di elio-sincronismo (vedi Fig. 1.2), che descrive le coppie semiasse/inclinazione che consentono di ricavare orbite elio-sincrone terrestri. Le orbite elio-sincrone sono caratterizzate da valori del semiasse fino a 12000 km e inclinazioni superiori a 95° , quindi retrograde.

L'intervallo di maggior interesse si ha per altezze intorno a 700 km e inclinazioni prossime a 98° .

Il grande vantaggio offerto dall'utilizzo di queste orbite è che il satellite transita su una certa latitudine sempre alla stessa ora locale, rendendo possibile l'osservazione di una determinata regione sempre alla stessa ora locale, approssimativamente nelle stesse condizioni d'illuminazione. Questa proprietà le rende particolarmente performanti per l'osservazione dei fenomeni ambientali caratterizzati da mutamenti di natura stagionale.

Per osservare fenomeni che presentano variazione nelle diverse ore del giorno, è possibile ricorrere a orbite *multi-sincrone* con il Sole o M.S.S.O. (*Multi-Sun-Synchronous Orbit*) [Ulivieri, 1999]; in cui, ogni n giorni nodali il satellite attraversa l'equatore alla stessa ora locale. Ne consegue che, a differenza delle elio-sincrone, l'osservazione di una stessa latitudine alla stessa ora locale avverrà solo ogni n giorni nodali; in questo intervallo, regioni alla stessa latitudine saranno osservate a un'ora locale variabile con intervalli pari a $1/n$ giorni nodali. Matematicamente, n è espresso dalla:

$$n = \frac{\omega_E - \dot{\Omega}}{|\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_{SUN}|} \quad (1.10)$$

L'eq. (1.10) coincide con la (1.9) nel caso in cui $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{SUN}$ e $n \rightarrow \infty$. Per orbita terrestre, si hanno valori contenuti del parametro n ($45 \div 70$) limitatamente alle L.E.O. e fino alle medie latitudini.

L'uso delle orbite sincrone o multi-sincrone con il Sole può diventare particolarmente utile nell'ambito dell'osservazione terrestre se combinato alla condizione di periodicità, realizzando rispettivamente le cosiddette P.S.S.O. (*Periodic Sun-Synchronous Orbit*) e le P.M.S.S.O. (*Periodic Multi-Sun-Synchronous Orbit*), che permettono passaggi del satellite a intervalli regolari su una stessa zona, le prime caratterizzate da osservazioni alla stessa ora locale

(stesse condizioni di illuminazione), le seconde da osservazioni cadenzate ad intervalli costanti di ora locale.

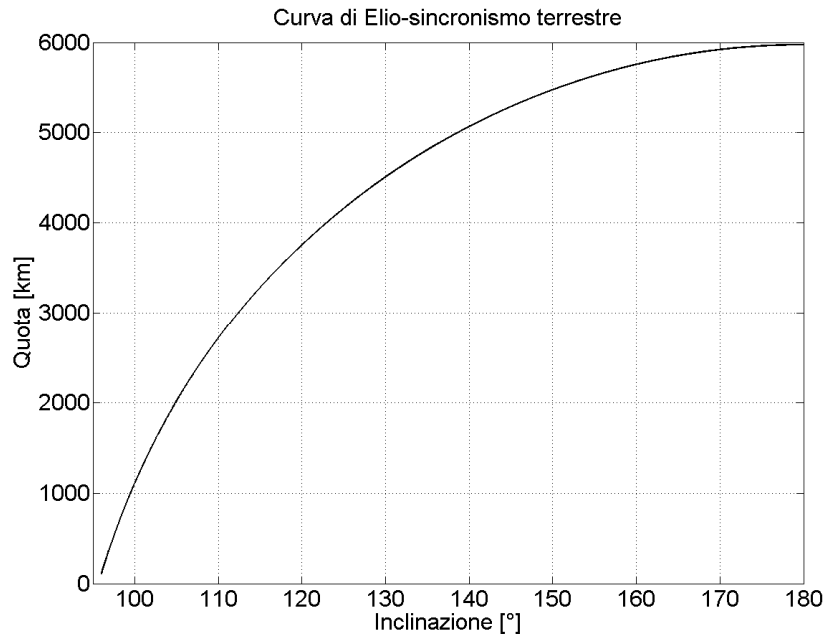


Figura 1.1: Quota di elio-sincronismo in funzione dell'inclinazione per orbita terrestre.

Le Eqq. (1.2), (1.9) e (1.10) mostrano come l'individuazione analitica degli elementi orbitali in grado di offrire le condizioni di elio-sincronismo/multi-sun-sicronismo e periodicità- in primis, semiasse e inclinazione- richiedano una conoscenza molto accurata degli effetti perturbativi, e in particolare delle variazioni temporali di RAAN, argomento del pericentro e anomalia media. Per tale ragione, nel Cap. 2, saranno forniti gli strumenti utili all'individuazione analitica, mediante equazioni polinomiali, delle coppie semiasse-inclinazione (laddove fisicamente ammissibili) in grado di soddisfare i valori scelti per i parametri che descrivono le caratteristiche di periodicità e sincronismo con il Sole (m , R ed n).

1.3 APPROCCIO METODOLOGICO

Le costellazioni possono ulteriormente essere classificate in base all'approccio metodologico con cui sono state disegnate. La scelta di uno tra i metodi qui

proposti è influenzata dalle caratteristiche di copertura che la costellazione deve possedere: globale o regionale, continua o discontinua, singola o multipla. D'altro canto, la metodologia influenzerà notevolmente la complessità del progetto di missione, inteso come l'individuazione di quelle orbite che siano le migliori per una specifica missione.

Il problema si traduce solitamente nell'individuazione del numero minimo di satelliti necessari a garantire uno specifico tipo di copertura. Talvolta, la soluzione ottenuta non è quella economicamente più favorevole, poiché realizzare e porre in orbita un maggior numero di satelliti a una quota più bassa può risultare meno dispendioso di un numero inferiore ad orbite più alte, e quindi la soluzione ottima deve essere individuata per la specifica missione: non esiste una trattazione univoca per il disegno di costellazioni ottime.

La natura geometrica del problema può dar luogo a notevoli complessità, parzialmente superabili introducendo talune ipotesi semplificative comuni alla gran parte delle tecniche utilizzate. Si fa solitamente ricorso a costellazioni omogenee, intendendo per tali quelle in cui le orbite di tutti i satelliti abbiano gli stessi valori di semiasse, inclinazione ed eccentricità; in merito a quest'ultimo elemento orbitale, si è soliti far ricadere la scelta sulle orbite circolari sebbene, come visto in precedenza (Molniya, Tundra e C.O.B.R.A.), non manchino le eccezioni. L'angolo di maschera (ε) è considerato costante per tutti i punti della superficie terrestre, e si è soliti trascurare gli effetti perturbativi (ipotesi di terra sferica, trattazione kepleriana). La scelta di orbite periodiche, congiuntamente all'utilizzo di costellazioni simmetriche, semplifica notevolmente non solo il disegno ma anche l'analisi delle prestazioni, che può essere ridotta a un lasso temporale non superiore al periodo di ripetitività, o a frazioni dello stesso nel caso di costellazioni simmetriche.

Secondo i più tradizionali approcci, le costellazioni di satelliti possono essere suddivise in quattro categorie principali [Beech et al., 1999]:

1. Omogenee simmetriche dette “a delta di Walker” (*Walker Delta Pattern*);
2. Polari basate sui corridoi di copertura (*Streets-of-Coverage*), anche dette “a stella”;
3. Basate sulla disposizione delle tracce a terra;
4. Ricavate mediante l’ausilio di codici adattivi (o genetici) random.

Nei paragrafi che seguono verrà offerta una panoramica dello stato dell’arte riguardo le metodologie elencate.

1.3.1 CENNI STORICI

Fin dal 1945, Clarke aveva individuato in una costellazione composta da tre satelliti in orbita G.E.O. (in Fig. 1.3 è riportata la configurazione originale), omogeneamente sfasati in RAAN, il modo più semplice per garantire una copertura continua del globo terrestre fino alle medie latitudini.

Nei decenni seguenti il problema si poneva come l’individuazione del numero minimo di satelliti atto a garantire una copertura continua e globale, dapprima semplice e poi, con l’avvento dei sistemi di navigazione satellitare, su tutti il GPS che richiede copertura almeno di grado quattro, anche multipla [Ulybyshev, 1999]. Importanti passi in avanti furono compiuti all’inizio degli anni ’60 con soluzioni che garantissero copertura completa regionale [Lüders, 1961] o globale [Vargo, 1960; Ullock, 1963]. Alla fine del decennio, Mozhaev introdusse le costellazioni cinematiche regolari in orbita circolare [Mozhaev, 1968; Mozhaev, 1973]. Parallelamente, ad analoghi risultati giungeva Walker, ponendo la base teorica per l’individuazione di quelle costellazioni, in grado di garantire copertura continua e globale, che prendono comunemente il nome di “Costellazioni Walker” (*Walker-type constellations*) [Walker, 1970; Walker, 1971], ed offrendo tavole contenenti il numero ottimo di satelliti utili alla

copertura continua e globale in funzione della quota [Walker, 1984]. Questi lavori influenzeranno notevolmente tutta la successiva letteratura che seguirà l'approccio proposto da Mozhaev e Walker, basato sulla distribuzione regolare dei satelliti e dei piani orbitali (costellazioni omogenee e simmetriche) per individuare le soluzioni in grado di determinare il numero minimo di satelliti necessari a garantire una copertura globale ennupla in funzione della quota [Emara e Leondes, 1977].

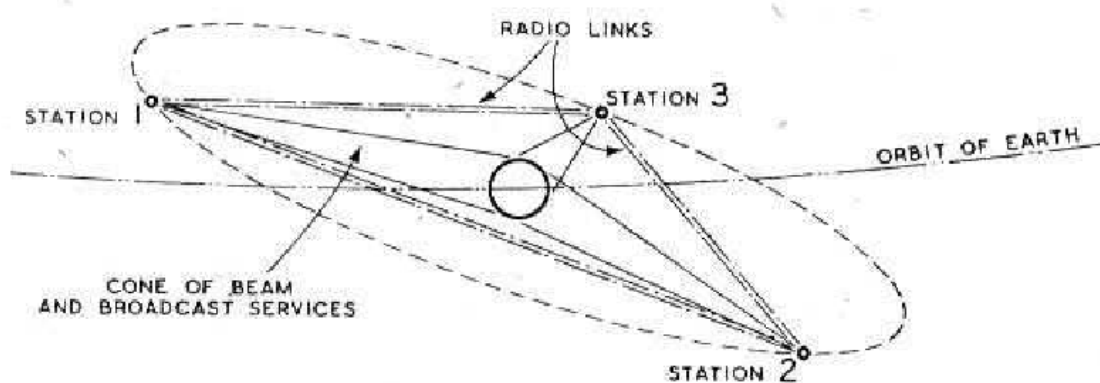


Figura 1.2: Costellazione di tre satelliti in orbita G.E.O. per copertura continua e completa [Clarke, 1945].

Negli anni seguenti sono stati sviluppati algoritmi basati sulla tecnica dei “corridoi di copertura” (anche detta a “stella”, da Walker). In merito, sono rilevanti i lavori proposti da Beste [Beste, 1978] e Draim [Draim, 1985; Draim, 1987], che indagano il caso della copertura multipla di ordine tre e quattro, arrivando a soluzioni in grado di ridurre mediamente del 15-20% il numero di satelliti necessari. Importanti risultati sono stati ottenuti anche nell’ambito della copertura zonale [Rider, 1986], di una specifica latitudine [Adams e Rider, 1987] e della copertura continua e globale singola e multipla [Rider, 1985]. Questi lavori hanno dimostrato che i corridoi di copertura sono più efficienti rispetto alle costellazioni di tipo Walker- in termini di numero di satelliti minimo- per le quote in cui la copertura globale continua richiede un numero di satelliti superiori a circa venti, rendendole di particolare interesse per costellazioni in orbita bassa.

In seguito, sono state presentate estensioni delle tavole di Walker [Lang, 1987], considerando anche il caso di costellazioni in orbita bassa [Lang, 1993] e di copertura doppia [Lang e Adams, 1997]. Altri lavori hanno affrontato l'ottimizzazione dei risultati prima ottenuti [Gutenev, 1992; Ulybyshev, 1998].

La copertura globale mediante l'uso di costellazioni basate su orbite ellittiche, o su costellazioni ibride (orbite circolari ed ellittiche), è notevolmente più complessa per via della mancanza di simmetria che caratterizza tale soluzione. Oltre alle già citate Molniya, Tundra e C.O.B.R.A., un'originale soluzione è quella rappresentata dal sistema satellitare ELLIPSO [Castiel et al., 1994].

Altro campo di ricerca, in cui la letteratura esistente è ben più limitata rispetto alle costellazioni di tipo Walker, segue l'approccio basato sull'analisi delle tracce a terra dei satelliti, posizionati su una comune orbita periodica le cui caratteristiche sono opportunamente scelte in funzione del grigliato che si desidera ottenere. Primi lavori al riguardo furono finalizzati all'individuazione della posizione dei nodi e alla descrizione delle caratteristiche della traccia a terra in funzione del numero di rivoluzioni per giorno nodale (q) [Lüders, 1968; King, 1976]. Tra i primi esempi applicativi di questa tecnica, ricordiamo il disegno della missione TOPEX [Farless, 1986]. Significativi contributi hanno successivamente permesso di ottenere relazioni compatte per l'individuazione dei nodi ascendenti e discendenti, e lo studio della distanza tra le tracce a terra a specifiche latitudini [Hopkins, 1988]. È stato illustrato come le relazioni compatte possono essere impiegate per il calcolo delle fasi in anomalia media tra i satelliti posti su uno stesso piano, e tra i piani orbitali della costellazione, al fine di ottimizzare l'osservazione di una specifica regione [Hanson et al., 1990]. Infine, limitatamente alle costellazioni uniformi (in cui è costante la fase in anomalia media tra satelliti di piani limitrofi), relazioni funzionali sono state individuate e impiegate nel disegno di costellazioni a singolo piano e su più piani orbitali [Circi et al., 2014].

Un ultimo ambito è quello dei cosiddetti *Algoritmi Genetici* (GAs, *Genetic Algorithms*): algoritmi adattivi basati su principi meta-euristici [Goldberg, 1983], la cui nomenclatura è in analogia con l'evoluzione genetica teorizzata da Darwin, cui l'approccio utilizzato in questi metodi s'ispira: a ogni iterazione, viene effettuata una selezione tra una popolazione di candidati "punti-soluzione", che vengono aggiornati- affinandoli- ad ogni iterazione; la scelta tra i punti-soluzione è effettuata secondo i valori di appositi indice di prestazione, caratterizzanti il problema in esame, calcolati nei singoli punti [Renders e Flasse, 1996]. Gli algoritmi genetici hanno avuto larga diffusione nei più diversi campi applicativi [Osman e Kelly, 1996], compreso il disegno di costellazioni di satelliti, ambito in cui i GAs sono stati particolarmente impiegati per l'ottimizzazione delle costellazioni finalizzate alla navigazione satellitare, con particolare riferimento al GPS [Dare, 1995; Saleh e Chelouah, 2004]. In questo settore, indici di prestazione solitamente utilizzati sono funzioni dipendenti dai valori dei diversi DOP (*Dilution of Precision*) valutabili: PDOP (*Position*), GDOP (*Geometric*), HDOP (*Horizontal*), VDOP (*Vertical*) e TDOP (*Time*). Il valore di questi parametri, che possono essere calcolati per ogni istante in ogni punto della superficie terrestre, dipende dal numero e dalla posizione dei satelliti visibili. Gli algoritmi adattivi ricercano, in funzione del numero dei satelliti, quelle combinazioni (costellazioni) in grado di rendere minimi i DOP e, in particolare, il GDOP, o funzioni prestazionali a esso correlate [Peterson et al., 2016].

In virtù della natura euristica dei metodi basati sui GAs, e tenuto conto che gli indici di prestazione sono caratteristici del problema particolare, ogni applicazione dovrà utilizzare un modello plasmato secondo le specifiche del processo che si intenda ottimizzare.

1.3.2 COSTELLAZIONI DI TIPO WALKER

Le costellazioni simmetriche elaborate da Walker sono costituite da satelliti disposti su piani orbitali caratterizzati da una comune declinazione

rispetto a un piano di riferimento (definita δ dall'autore, da cui il nome "delta", Fig. 1.5); adottando come piano di riferimento quello equatoriale, essa coincide con l'inclinazione (i).

Nelle costellazioni di tipo Walker, le prestazioni sono valutabili calcolando per ogni punto della superficie terrestre, in ogni istante, la distanza (ρ)- espressa in termini di angolo solido- dal più vicino punto sub-satellitare.

Critico sarà quel punto per cui questa distanza assumerà il suo valore massimo (ρ_{MAX}) nel corso del periodo di ripetitività della traccia a terra dell'intera costellazione, che sarà in grado di garantire copertura globale e continua nel tempo, a patto che sia sempre rispettata la condizione

$$\rho_{MAX} \leq \theta(h, \varepsilon) \quad (1.11)$$

Qualora si desideri avere copertura continua di grado n , il parametro ρ sarà identificativo del raggio che congiunge un generico punto della superficie terrestre al più vicino punto sub-satellitare, tale da delimitare una circonferenza all'interno della quale siano racchiusi altri $(n-1)$ punti sub-satellitari, in modo da avere n satelliti in vista. Una costellazione, è in grado di offrire una copertura di grado n soltanto se la condizione espressa dall'Eq. (1.11) risulta sempre verificata; per tale ragione, il comportamento della costellazione deve essere valutato nel tempo effettuando delle apposite propagazioni. Per ridurre le tempistiche di questo procedimento, semplificando la tecnica, possono essere poste delle forti ipotesi semplificative sul disegno di questo tipo di costellazioni.

Anzitutto è possibile definire quattro importanti parametri:

- i , inclinazione dei piani orbitali;
- T o N , il numero totale di satelliti della costellazione. T utilizzato da Walker, N adottato da altri autori [Ballard, 1980];
- P , il numero di piani orbitali;

- F , è un numero che può assumere tutti i valori compresi tra 0 e $(P-1)$. Esso descrive parametricamente la fase relativa tra i diversi piani orbitali (ΔM_R), definendo quest'ultima come la fase in anomalia media tra l' i -esimo satellite di un p -esimo piano e l' i -esimo satellite del $(p-1)$ -esimo piano. La relazione tra quest'ultima e il parametro F è data dalla:

$$\Delta M_R = F \frac{2\pi}{N} \quad (1.12)$$

in cui la quantità $(2\pi / N)$ prende il nome di *pattern unit* (valutata in radianti).

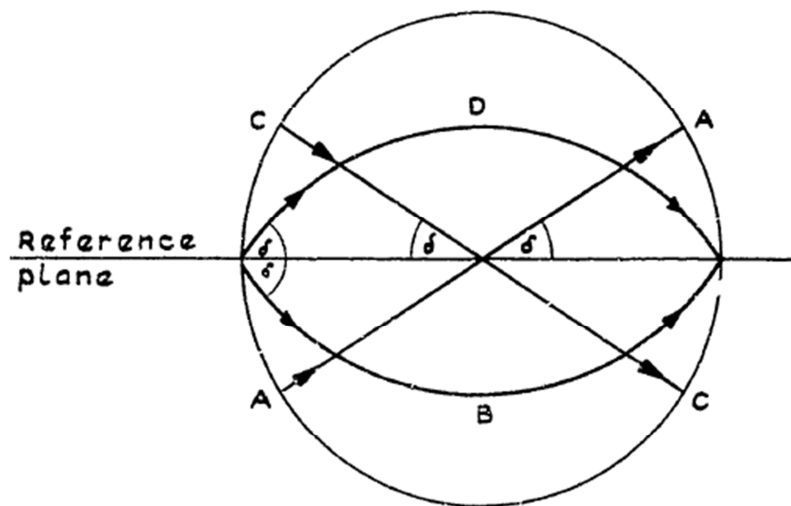


Figura 1.5: Costellazione a "delta" di Walker.

Una costellazione di questo tipo può essere sinteticamente descritta nella forma $(i, T/P/F)$ o $(i, N/P/F)$; in questo lavoro, si è deciso di adottare quest'ultima simbologia. Ad esempio, la costellazione GPS nominale da 24 satelliti valutata con la tecnica Walker, può essere sinteticamente descritta come una $55^\circ, 24/6/1$.

È inoltre posta l'ipotesi di omogeneità della costellazione: gli N satelliti sono uniformemente distribuiti su P piani orbitali ($N_p = N/P$ satelliti su ciascun piano orbitale). I nodi ascendenti dei piani sono uniformemente distribuiti lungo l'equatore ($\Delta\Omega = 2\pi / P$), e i satelliti sono equamente sfasati in anomalia

media lungo i piani orbitali ($\Delta M = 2\pi / N_p$). Si ricorre a orbite periodiche circolari aventi in comune, oltre all'inclinazione, anche la quota; questa scelta, che semplifica il disegno della costellazione, permette di avere un livello di segnale uniforme sulla superficie terrestre. L'uso di orbite ellittiche è indicato limitatamente alle missioni di copertura continua a carattere regionale (ad esempio, di un singolo emisfero terrestre). Infine, si assume costante, e pari a un valore opportunamente scelto (solitamente intorno a 5° - 10°), l'elevazione minima (ε).

Sotto queste ipotesi semplificative, la costellazione risulta simmetrica; la geometria tra i punti sub-satellitari si ripete ad intervalli regolari sottomultipli del periodo nodale. In questo modo, si può restringere l'analisi circa il rispetto dell'Eq. (1.11) a questo intervallo che è pari a $(T_n / 2N_p)$, $2R \cdot N_p$ volte inferiore rispetto al periodo di ripetitività ($R \cdot T_n$).

L'uso d'inclinazioni polari comporta ridondanza di copertura alle alte latitudini, a discapito delle medio-basse; per tale ragione, soprattutto in caso di costellazioni M.E.O., sono preferibili le medie inclinazioni (prossime a 55°). Si deve però tenere conto che, per particolari tipologie orbitali (es. le eliosincrone), l'inclinazione è un parametro di progetto che non può essere scelto, se non tra un ristretto intervallo di valori.

Il numero di satelliti necessari a garantire la copertura continua in funzione del semi-angolo di copertura (quindi dalla combinazione di quote ed elevazione minima), è fornito dalla [Walker, 1984]:

$$N = \frac{4}{[\theta(1 - pe^{-k})]^2} \quad (1.13)$$

avendo espresso θ in radianti e dove p è un coefficiente indicato da Walker tra 0.2 e 0.34, mentre $k = 0.08$ (Fig. 1.6). In caso di copertura multipla di ordine n , il numero minimo di satelliti si può valutare mediante la:

$$N = \frac{4n}{[\theta(1 - pe^{-nk})]^2} \quad (1.15)$$

L'ottimizzazione della costellazione si traduce nell'individuazione del numero minimo di satelliti necessario a soddisfare le specifiche della missione (copertura singola o multipla), fissato un certo numero di condizioni quali l'elevazione minima, la quota (che è strettamente correlata alle caratteristiche di periodicità dell'orbita, cioè a q), l'inclinazione (o un intervallo di inclinazioni). In altri casi, fissato il numero di satelliti totali (N), si ricercano i valori degli altri parametri tali da ottimizzare le prestazioni della costellazione. Quest'ultime possono essere valutate a partire dal semi-angolo di copertura (θ) massimo assunto dalla costellazione. Dalla (1.1) si può affermare che un aumento di θ implica un aumento dell'elevazione minima (ε) e/o della quota (h). Assumendo per ipotesi semplificativa ε costante, si può affermare che la costellazione sarà tanto più efficiente, quanto più sarà ridotto θ . In definitiva, l'ottimizzazione consiste nell'individuazione della costellazione per la quale sia minimo il valore del semi-angolo di copertura necessario (θ_{MIN}).

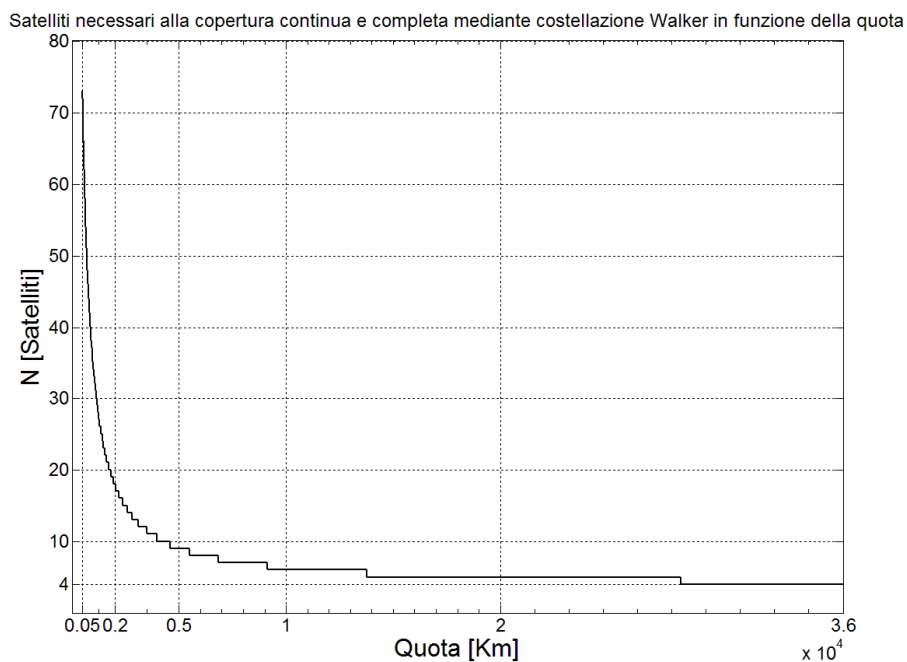


Figura 1.5: Satelliti necessari alla copertura completa con una costellazione Walker in funzione della quota ($\varepsilon= 5^\circ$).

1.3.3 COSTELLAZIONI CON CORRIDOI DI COPERTURA

La tecnica dei corridoi di copertura si basa sulla sovrapposizione dei cerchi di copertura di satelliti appartenenti a uno stesso piano e di piani contigui: quando tale sovrapposizione riesce a garantire che non vi siano punti della superficie terrestre al di fuori di tutte le circonferenze, allora la copertura globale e continua della superficie terrestre è garantita. Si definisce corridoio di copertura la distanza in longitudine tra i punti d'intersezione tra due cerchi di copertura (Fig. 1.6). Nell'ipotesi che i satelliti posti su uno stesso piano orbitale siano tra loro equamente sfasati in anomalia media con $\Delta M = 2\pi / N_p$, la semi-ampiezza (c_i) del corridoio di copertura offerto da ciascun piano può essere ricavata dalle relazioni di trigonometria sferica:

$$c_i = \arccos \left[\frac{\cos \theta}{\cos(\Delta M / 2)} \right] = \arccos \left[\frac{\cos \theta}{\cos(\pi / N_p)} \right] \quad (1.16)$$

I satelliti posti su un *i-esimo* piano garantiscono un corridoio di copertura in fase ascendente e uno in fase discendente: per ogni piano si ha quindi copertura complessiva pari a $4c_i$; di conseguenza, la condizione da rispettare per avere copertura globale è che risulti: $\sum_1^P c_i = \pi / 2$ avendo ancora una volta indicato con P il numero totale di piani orbitali. Oltre a questa condizione, dovrà anche essere rispettata quella sull'inclinazione minima in grado di garantire la copertura fino alle latitudini polari: $i_{\min} = \pi / 2 - c_i$.

Nell'ipotesi che tutti i satelliti siano posti su orbita circolare di caratteristiche comuni (stessa inclinazione e stessa quota), e che gli N satelliti della costellazione siano equamente distribuiti sui P piani orbitali (N_p per ogni piano), si avranno sempre $(P - 1)$ interfacce in cui i satelliti appartenenti a piani orbitali limitrofi risulteranno co-rotanti e due interfacce in cui saranno contro-rotanti (alternativamente in fase ascendente e discendente dell'orbita, o viceversa). La semi-ampiezza del corridoio assume lo stesso valore per tutti i

piani ($c_i = \Delta \forall i=1, \dots, P$). Se viene posta anche la condizione $\Delta M_R = \pi / N_P$, la fase tra i piani co-rotanti può essere scritta come $\Delta\Omega = \theta + \Delta$ (Fig. 1.7), e la distanza tra i nodi dei piani contro-rotanti è pari a 2Δ ; la condizione che garantisce la copertura globale di ordine uno diviene:

$$(P-1)\theta + (P+1)\Delta = \pi \quad (1.17)$$

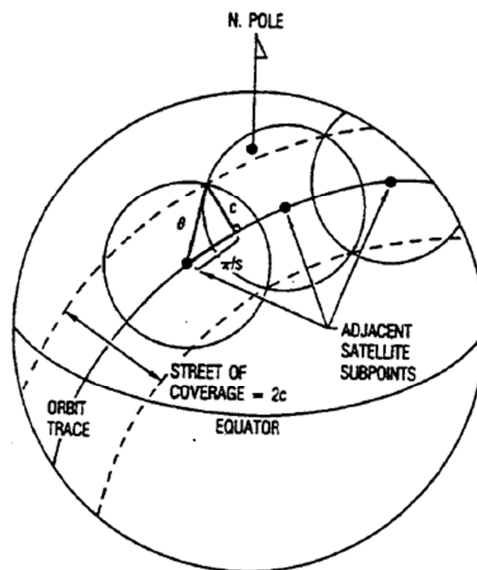


Figura 1.6: Corridoio di copertura [Beech et al., 1999].

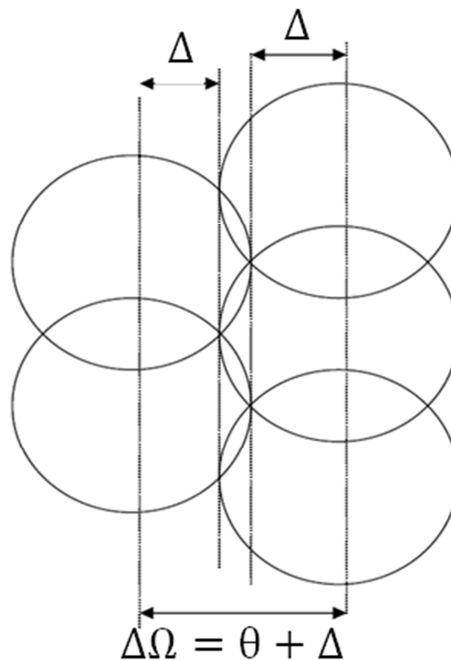


Figura 1.7: Fase in RAAN tra i piani co-rotanti ($\Delta\Omega = \theta + \Delta$).

Fissata l'orbita di riferimento e il numero di piani orbitali, l'Eq. (1.17) permette di stimare il numero minimo di satelliti su ogni piano e la fase in ascensione retta tra di essi che permettono la copertura globale, tramite la valutazione di Δ . Viceversa, fissato il numero di satelliti totali della costellazione e il numero di piani, scelto quindi un preciso valore di Δ , sarà possibile stimare il minimo angolo θ , dunque la quota minima dell'orbita di riferimento, e la fase in ascensione retta tra i diversi piani orbitali.

Un parametro utile a valutare l'efficienza della costellazione è il rapporto tra la copertura totale che può essere offerta dalla costellazione e quella richiesta per la copertura totale, ovvero l'intero angolo solido, 4π . Ricordando che l'angolo solido coperto da ogni satellite (Ω) della costellazione è pari a $\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$, il rapporto sarà:

$$\eta = \frac{N(1 - \cos \theta)}{2} \quad (1.18)$$

Il parametro η consente di valutare di quanto, la copertura offerta dalla costellazione, superi quella necessaria; valori caratteristici sono prossimi a 2; per cui, invertendo l'Eq. (1.18), il numero di satelliti richiesti per una costellazione è approssimabile a $N \cong 4 / (1 - \cos \theta)$ (Fig. 1.8).

Qualora sia richiesta la copertura limitatamente a intervalli di latitudine da un valore minimo $\pm \lambda_{\min}$ fino ai poli, l'Eq. (1.17) deve esser riscritta come: $(P-1)\theta + (P+1)\Delta = \pi \cos \lambda_{\min}$, e il numero minimo di satelliti richiesto è approssimabile a $N \cong 4 \cos \lambda_{\min} / (1 - \cos \theta)$.

Analoghe relazioni sono reperibili in letteratura- in particolare in Beste (1978)- per la copertura multipla di ordine tre e quattro.

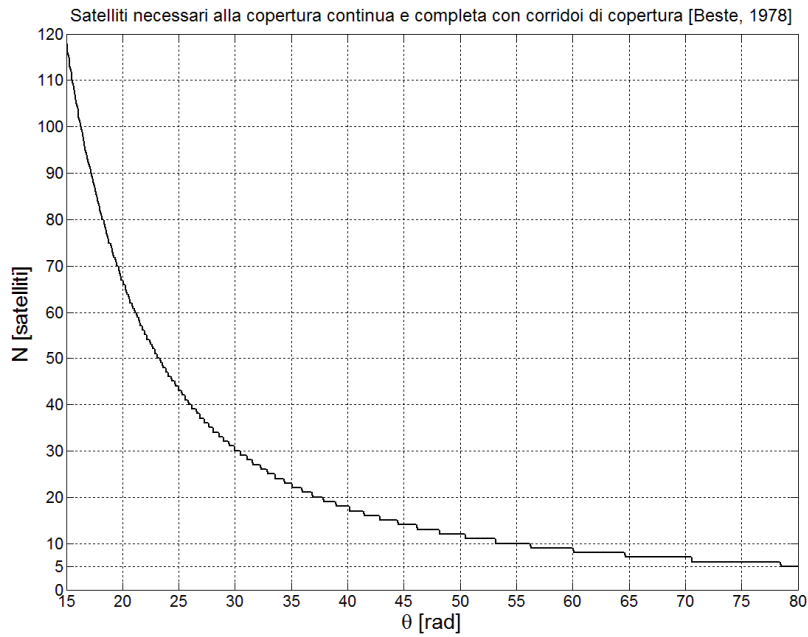


Figura 1.8: Satelliti necessari alla copertura continua e completa in funzione di θ con i corridoi di copertura.

1.3.4 COSTELLAZIONI BASATE SU TRACCE A TERRA

Questa tecnica si basa sull'analisi della distribuzione delle tracce a terra, dette anche *tracce al nadir*, dei satelliti della costellazione. Sebbene possa essere utilizzata anche per il disegno di costellazioni che offrano copertura globale e continua, è particolarmente indicata per ottimizzare l'osservazione su una determinata area geografica oppure per coperture a carattere globale a intervalli regolari finalizzate all'osservazione di specifici fenomeni ambientali. Ipotesi semplificativa è che tutti i satelliti traccino un'orbita circolare alla stessa inclinazione e con caratteristiche di periodicità comuni (stesso q).

Con questa tecnica, il disegno di costellazioni si risolve nell'individuazione delle fasi in anomalia media (ΔM) tra i satelliti posti su uno stesso piano orbitale e quelle tra i diversi piani orbitali, sia in termini di ascensione retta al nodo ascendente ($\Delta \Omega$) che di anomalia media (ΔM_R), nel caso di costellazioni multi-piano, tali da rendere massimo uno specifico aspetto dell'osservazione, quali la frequenza di rivisitazione e la risoluzione al suolo (funzione della distanza tra le tracce dei singoli satelliti).

Si definisce distanza all'equatore tra due nodi ascendenti consecutivi (S_t) come:

$$S_t = T_n(\omega_p - \dot{\Omega}) = \frac{2\pi}{q} [\text{rad}] \quad (1.19)$$

Per esprimere la stessa grandezza in chilometri, sarà sufficiente moltiplicare l'Eq. (1.19) per il raggio planetario (R_p). Considerando un'orbita periodica di caratteristiche note (R e m), alla fine del periodo di ripetitività, tra le tracce al suolo di due orbite consecutive (distanziate tra loro di S_t) andranno a disporsi altre $(m-1)$ tracce; quindi, tra due nodi ascendenti (o discendenti) consecutivi, si inseriranno altri $(m-1)$ nodi equamente spaziatati, il cui posizionamento nell'intervallo di ampiezza S_t dipenderà esclusivamente dalla parte frazionaria di q , ovvero dal parametro k di Eq. (1.3). In Fig. 1.9 è mostrata la disposizione dei nodi ascendenti nell'intervallo di ampiezza S_t al variare del parametro k . In tal modo, al termine del periodo di ripetitività, sarà possibile calcolare la distanza tra due vicini nodi ascendenti come:

$$S_m = \frac{S_t}{m} = \frac{2\pi}{R} [\text{rad}] \quad (1.20)$$

Questa grandezza corrisponde alla massima distanza in longitudine tra le tracce a terra che formano il grigliato. L'Eq. (1.20) è valida se si tiene conto della distribuzione dei soli nodi ascendenti (o discendenti). Se si vuole tenere conto di entrambe le fasi, si dovranno considerare i valori di R e m , o meglio la quantità $(R-m)/2$: se essa risulta pari ad un intero, al termine del periodo di ripetitività, i nodi discendenti coincidono con quelli ascendenti e l'Eq. (1.20) è ancora valida; ciò si verifica quando R e m hanno la stessa parità (entrambi dispari, non potendo essere entrambi pari dovendo risultare primi tra loro). Viceversa, se $(R-m)/2$ non è un numero intero, al termine del periodo di ripetitività ciascun nodo discendente si pone a metà tra due nodi ascendenti limitrofi. Ciò può essere dimostrato considerando la posizione del nodo

discendente relativo alla prima traccia; poiché il nodo ascendente di quest'ultima è spostato verso Ovest di S_t rispetto alla longitudine iniziale (λ_0), ovvero verso Est di $2\pi - S_t$ (rispetto a λ_0), il nodo discendente si troverà spostato, verso Est (rispetto a λ_0), di:

$$\frac{2\pi - S_t}{2} = \frac{qS_t - S_t}{2} = \frac{RS_m - mS_m}{2} = \frac{R-m}{2} S_m \quad (1.21)$$

Dunque, se R e m sono entrambi dispari, $(R-m)/2$ sarà un numero intero, mentre, se R e m hanno diversa parità, $(R-m)/2$ sarà un numero con parte decimale 0.5. In tale circostanza, il valore di S_m si dimezza e diviene pari a π/R . In ambo i casi, ogni giorno nodale, all'interno di un intervallo di ampiezza S_t si dispongono un nodo ascendente e uno discendente. Nelle Figg. 1.10a e 1.10b è mostrata la differente disposizione dei nodi discendenti tra un'orbita periodica con R e m entrambi dispari (Fig. 1.10a) ed una con R e m aventi diversa parità (Fig. 1.10b).

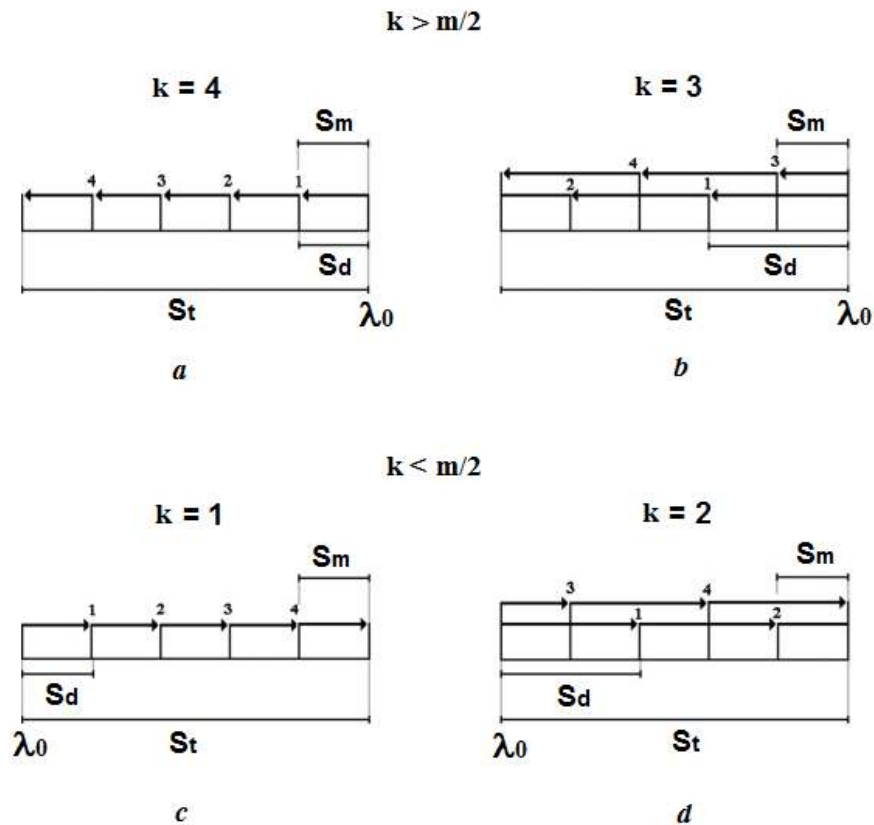


Figura 1.9: Disposizione dei nodi ascendenti nell'intervallo S_t al variare del parametro k per un'orbita periodica con $m=5$ [Ortore, 2016].

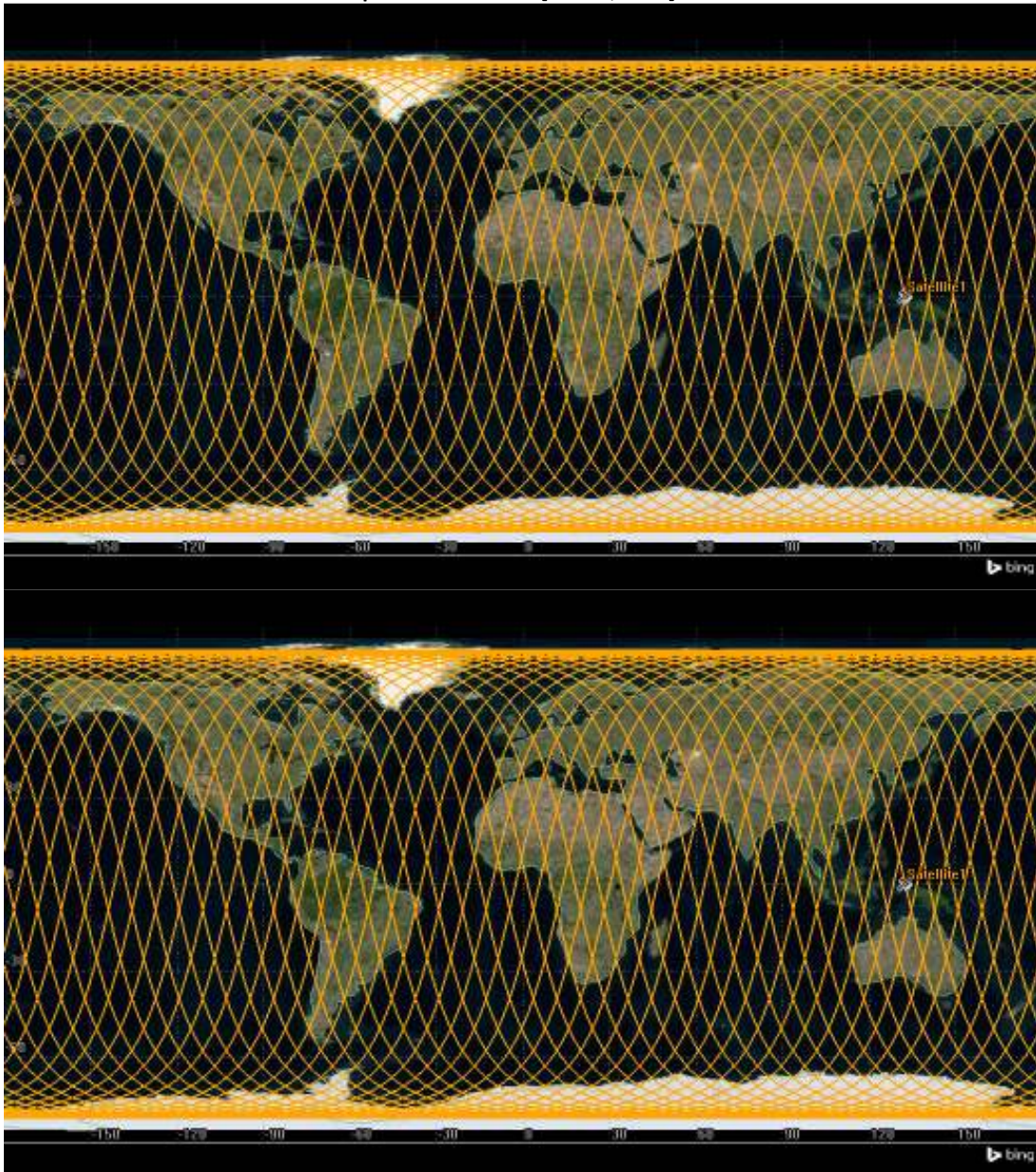


Figura 1.10: a) Disposizione dei nodi discendenti per $m=3$ ed $R=43$ (stessa parità); b) Disposizione dei nodi discendenti per $m=3$ ed $R=44$ (diversa parità).

SOLUZIONI ANALITICHE PER ORBITE PERIODICHE

Nel disegno di costellazioni basato sull'analisi delle tracce al suolo di orbite periodiche, è fondamentale individuare con grande accuratezza gli elementi orbitali- in particolare semiasse, inclinazione ed eccentricità- in grado di garantire un preciso valore del parametro q (orbite/giorno nodale) poiché, piccoli errori sulla stima di questo parametro, possono compromettere le prestazioni di osservazione in tempi ristretti. In particolare, se q è maggiore di quello atteso, S_i assume un valore minore, e tutti i nodi si trovano a est rispetto alla posizione stimata; viceversa, se q è inferiore a quello atteso, tutti i nodi si collocano a ovest rispetto al previsto. In ogni rivoluzione, l'errore sulla longitudine stimata dei nodi accresce di un valore pari alla differenza tra S_i atteso e reale. In orbita bassa, errori su q dell'ordine di 10^{-2} , comportano spostamenti di circa 2° sulla longitudine prevista dei nodi in appena una settimana.

L'Eq. (1.3) mostra che la corretta stima di q è legata all'accuratezza con cui sono valutati il giorno ed il periodo nodale; a loro volta correlati alla precisione con cui sono computate le variazioni temporali secolari degli elementi orbitali e, in particolare, le rotazioni della linea dei nodi e delle apsi, e la variazione dell'anomalia media. Per tale ragione è necessario individuare e descrivere le principali perturbazioni agenti su questi elementi orbitali.

In questo capitolo sono analizzati i disturbi perturbativi dovuti all'asimmetria del geopotenziale e alla presenza di uno o più corpi perturbanti. Per quest'ultimo disturbo, sarà proposta una trattazione originale che supera le ipotesi semplificative comunemente poste nella letteratura corrente, introducendo nelle equazioni la dipendenza dalla posizione del piano orbitale

(di apparente o reale rivoluzione) del terzo corpo rispetto al piano equatoriale del corpo primario, superando così l'ipotesi semplificativa di complanarità tra corpo primario e terzo corpo. Tale trattazione completa si rivela di particolare importanza soprattutto nel caso terrestre in cui, il moto corpi perturbanti (Sole e Luna), avviene su piani orbitali la cui inclinazione non è trascurabile.

Saranno dunque proposte delle equazioni polinomiali che permettono di ricavare soluzioni analitiche per orbite periodiche di caratteristiche note. Estensioni di questi polinomi saranno proposte anche per le orbite sincrone e multi-sincrone con il Sole.

Sono proposti esempi applicativi per testare le soluzioni ricavate risolvendo le equazioni polinomiali, comparandole ad analoghe soluzioni calcolate numericamente. Le orbite periodiche sono state testate sulla Terra, mentre su Europa sono proposte soluzioni per orbite sincrone e multi-sincrone con il Sole.

Quelle ricavate mediante le equazioni polinomiali sono da ritenersi delle soluzioni di prima approssimazione, poiché affette da errori che, seppur modesti, devono essere opportunamente stimati e corretti. Per tale ragione, è proposta una procedura iterativa per affinare le soluzioni polinomiali.

2.1 PERTURBAZIONI ORBITALI

In questo lavoro si è tenuto conto degli effetti perturbativi dovuti all'asimmetria del geopotenziale ed alla presenza di eventuali corpi perturbanti, che possono essere descritti analiticamente con elevata accuratezza. Altresì, sono state trascurate la resistenza aerodinamica e la pressione di radiazione solare, le cui entità sono funzione di variabili non stimabili con esattezza a priori, e legate- ad esempio- all'attività solare, all'assetto e ai parametri di progetto del satellite. Queste perturbazioni, dovranno in ogni caso essere opportunamente stimate per programmare le manovre correttive nel corso della missione. In particolare, per missioni in

orbita bassa terrestre, fino a quote intorno a 1000 km, si rende indispensabile la valutazione e la correzione del disturbo- non conservativo- legato alla resistenza aerodinamica, che ha come principali effetti quelli di dissipare l'energia meccanica totale, riducendo la quota del satellite, e circularizzare l'orbita.

2.1.1 ASIMMETRIA DEL GEOPOTENZIALE

La distribuzione delle masse planetarie non è sferica e la densità non uniforme: le superfici equipotenziali del campo gravitazionale sono approssimabili a degli ellissoidi. In particolare, viene definito *geoide* quella superficie ideale ortogonale in ogni punto alla direzione della gravità. Per tale ragione, il modello kepleriano non è in grado di descrivere esattamente il moto di un satellite attorno ad un pianeta. Si rende necessario un modello matematico in grado di descrivere di quanto il moto reale differisca rispetto a quello kepleriano.

I pianeti sono schematizzati da un'ellissoide in cui il raggio equatoriale è maggiore di quello polare, per descrivere l'effettivo schiacciamento ai poli, principale ragione del comportamento non-kepleriano dei satelliti.

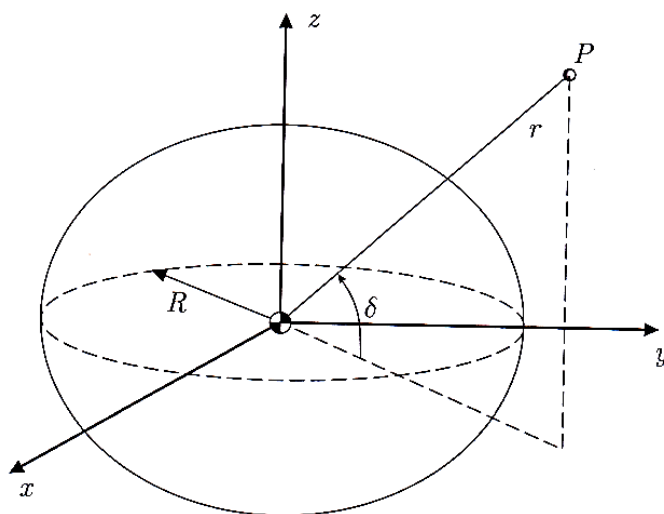


Figura 2.1: Coordinate del punto P

Per un generico punto P esterno all'ellissoide, il potenziale gravitazionale esercitato da quest'ultimo può essere espresso mediante una relazione del tipo [Mengali e Quarta, 2013]:

$$U = \frac{\mu_p}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^n [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)] P_{nm}(\sin \delta) \right\} \quad (2.1)$$

dove:

- μ_p è il parametro gravitazionale planetario, $\mu_p = G \cdot m$ con G costante gravitazionale universale di Newton ($G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$) e m la massa del pianeta;
- r , λ e δ sono, rispettivamente, il modulo del raggio vettore, la longitudine e la declinazione del punto P (Fig. 2.1), ovvero le coordinate che permettono di individuare il punto;
- P_{nm} sono i polinomi di Legendre di grado n e ordine m , che dipendono dalla variabile $\sin \delta$, e ottenibili mediante la formula ricorsiva [Legendre, 1786]:

$$P_{nm}(x) = \frac{1}{2^n n!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{n+m}(x^2-1)^n}{dx^{n+m}} \quad (2.2)$$

ponendo $x = \sin \delta$;

- C_{nm} e S_{nm} sono i coefficienti delle armoniche gravitazionali, parametri ricavati sperimentalmente e in grado di quantificare l'asimmetria del geopotenziale. Quest'ultime vengono suddivise in funzione dei valori assunti n ed m (Fig. 2.2):

- Se $m=0$ parleremo di *armoniche zonali*;
- Se $m=n$ parleremo di *armoniche settoriali*;
- Se $m \neq n$ parleremo di *armoniche tesserali*.

In Eq. (2.1) il termine μ_p/r esprime la componente *kepleriana* del potenziale. Ne consegue che, il termine legato alle armoniche C_{nm} e S_{nm} , può essere visto come la differenza tra il potenziale gravitazionale di un corpo reale e uno sferico (caso Kepleriano). È improprio definire perturbative le forze (conservative) dovute all'asimmetria del geopotenziale, per quanto, convenzionalmente, esse vengano così considerate.

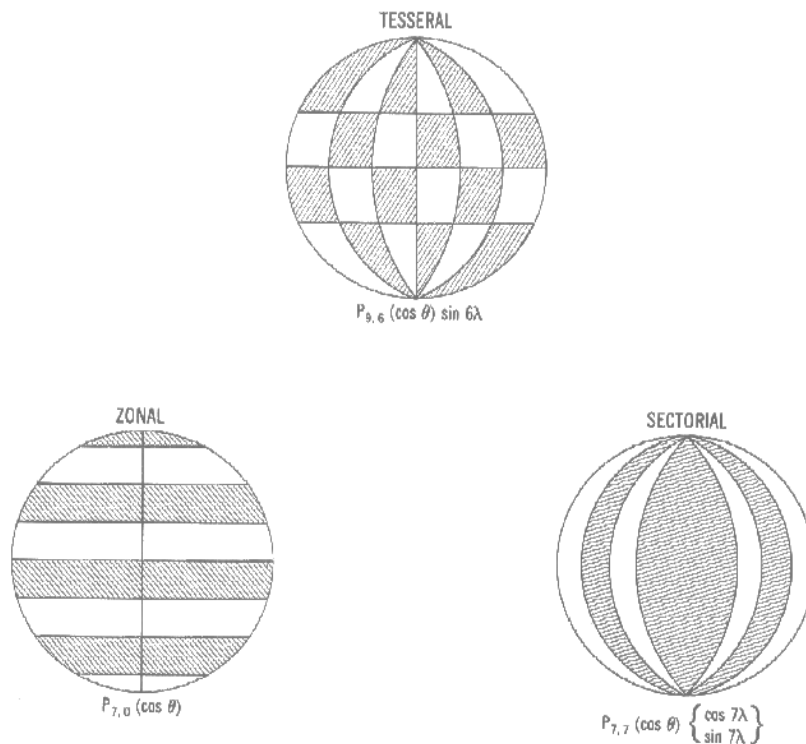


Figura 2.2: Armoniche zonali, settoriali e tesserali

Come evidenziato dall'Eq. (2.1) i termini del potenziale legati all'asimmetria del geopotenziale danno contributi indipendenti dalla longitudine solo nel caso in cui risulti $m=0$, quindi nel caso delle armoniche zonali. Esse sono le uniche in grado di produrre effetti secolari sugli elementi orbitali. Tenendo conto delle sole armoniche zonali, l'Eq. (2.1) si può ridurre alla:

$$U = \frac{\mu_p}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \delta) \right\} \quad (2.3)$$

Dove J_n sono i coefficienti delle armoniche zonali ricavati sperimentalmente.

In questo caso, i polinomi di Legendre di grado n assumono la forma:

$$P_{nm}(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (2.4)$$

Fino al sesto grado, i polinomi di Legendre ottenuti dall'Eq. (2.4) sono:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ponendo ancora $x = \sin \delta$.

Per stimare gli effetti perturbativi secolari sui singoli elementi orbitali, il potenziale deve essere mediato lungo un'orbita per ottenere il potenziale medio $\langle U \rangle$. Noto quest'ultimo, le variazioni temporali degli elementi orbitali si ottengono mediante le equazioni planetarie di Lagrange:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{da}{dt} = \frac{1}{na} \left(2 \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial M} \right) \\ \dot{e} &= \frac{de}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{1-e^2}{e} \left(-\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \omega} + \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial M} \right) \\ \dot{i} &= \frac{di}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left(-\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \Omega} + \cos i \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \omega} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left(\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial i} \right) \\ \dot{\omega} &= \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left(\frac{1-e^2}{e} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial e} - \frac{\cos i}{\sin i} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial i} \right) \\ \dot{M} &= \frac{dM}{dt} = n + \frac{1}{na^2} \left(-2a \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial a} - \frac{1-e^2}{e} \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial e} \right)\end{aligned}\quad (2.6)$$

Avendo denotato con \dot{a} , \dot{e} , \dot{i} , $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$, \dot{M} le variazioni temporali rispettivamente di semiasse, eccentricità, inclinazione, R.A.A.N., argomento del pericentro e anomalia media; con $\partial \langle U \rangle / \partial a$, $\partial \langle U \rangle / \partial e$, $\partial \langle U \rangle / \partial i$, $\partial \langle U \rangle / \partial \Omega$, $\partial \langle U \rangle / \partial \omega$, $\partial \langle U \rangle / \partial M$ le derivate parziali del potenziale mediato rispetto agli elementi orbitali.

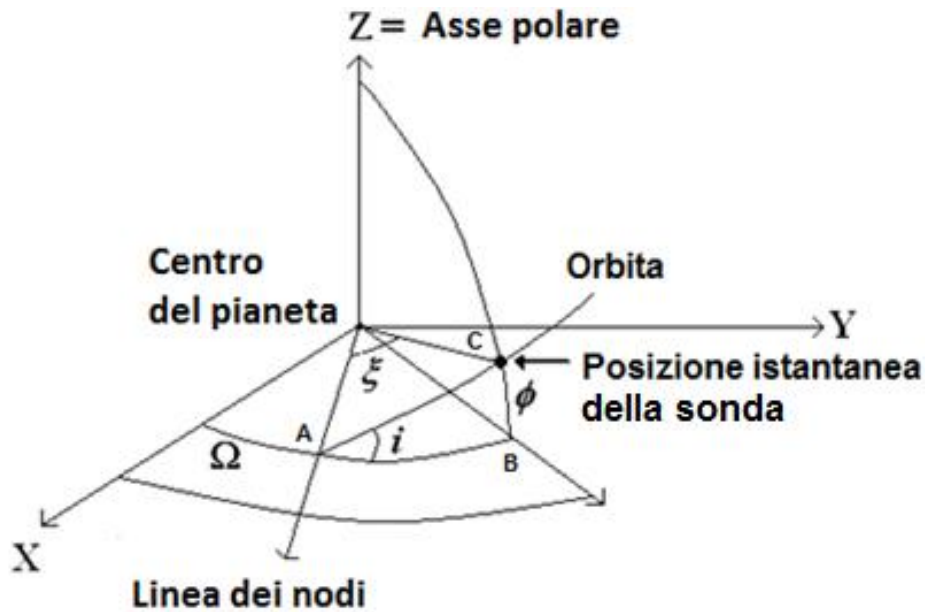


Figura 2.3: Triangolo sferico della posizione istantanea della sonda

Ad esempio, per l'armonica zonale J_2 dovuta allo schiacciamento polare dei pianeti, il potenziale di disturbo risulta essere:

$$U_{J_2} = -\frac{\mu_p}{r} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_2(\sin \delta) = -\frac{\mu_p J_2 R^2}{r^3} \frac{3 \sin^2 \delta - 1}{2} \quad (2.7)$$

Con riferimento alla Fig. 2.3, dal teoremi sui seni applicato alla trigonometria sferica, si ricava facilmente che $\sin \delta = \sin i \sin(\xi) = \sin i \sin(\omega + \nu)$ con ν anomalia vera del satellite. Utilizzando quest'ultima relazione, e facendo uso delle formule di duplicazione del coseno, il polinomio di Legendre di grado due risulta essere:

$$P_2(\sin \delta) = \frac{3 \sin^2 \delta - 1}{2} = \frac{3 \sin^2 i}{2} [1 - \cos 2(\omega + \nu)] - \frac{1}{2} \quad (2.8)$$

Inoltre, per le coniche il raggio vettore può essere scritto come:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad (2.9)$$

Sostituendo nell'Eq. (2.7) le Eqq. (2.8) e (2.9), si ricava:

$$U_{J_2} = -\frac{3 \mu_p J_2 R^2}{2 a^3} \left(\frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3 \left\{ \frac{\sin^2 i}{2} [1 - \cos 2(\omega + \nu)] - \frac{1}{3} \right\} \quad (2.10)$$

Quest'ultimo è il potenziale di disturbo che deve essere mediato lungo l'orbita. Per fare ciò è necessario integrare il potenziale secondo l'anomalia media nell'intervallo $[0; 2\pi]$:

$$\langle U_{J_2} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{J_2} dM \quad (2.11)$$

Non essendo esplicita nell'Eq. (2.10) la dipendenza di U_{J_2} dall'anomalia media, è possibile sostituire nell'integrale il differenziale dM utilizzando la relazione [Kozai,1959]:

$$dM = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} d\nu = \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu \quad (2.12)$$

passando all'integrale secondo l'anomalia vera, ed ottenendo infine:

$$\langle U_{J_2} \rangle = -\frac{3}{2} \frac{\mu_p J_2 R^2}{a^3 (1-e^2)^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \sin^2 i - \frac{1}{3} \right) \quad (2.13)$$

che costituisce il potenziale di disturbo dovuto allo schiacciamento polare mediato lungo l'orbita, le cui derivate parziali permettono di ricavare, utilizzando le equazioni di Lagrange (2.6), le variazioni temporali degli elementi orbitali.

Applicando questa procedura a tutte le armoniche zonali, si può verificare che esse producono effetti secolari solo su tre elementi orbitali (Ω , ω e M) e solo limitatamente alle armoniche di ordine pari. Agli effetti secolari si aggiungono effetti di breve o lungo termine, che assumono particolare rilevanza nel disegno di *orbite frozen*.

Prendendo in considerazione le armoniche zonali fino al quarto grado, le Eqq. (1.6), (1.7) e (1.8) divengono [Merson,1961]:

$$\dot{a}_j = 0 \quad (2.14)$$

$$\dot{e}_j = 0 \quad (2.15)$$

$$\dot{i}_j = 0 \quad (2.16)$$

$$\dot{\Omega}_j = -\frac{3R_p^2}{2} \frac{n \cos i}{a^2 (1-e^2)^2} \left\{ J_2 - \frac{R_p^2 J_2^2}{16} \frac{12 - 80 \sin^2 i - (4 + 5 \sin^2 i) e^2}{a^2 (1-e^2)^2} - \frac{5R_p^2 J_4}{16} \frac{(4 - 7 \sin^2 i)(2 + 3e^2)}{a^2 (1-e^2)^2} \right\} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_j = & \frac{3R_p^2 J_2}{4} \frac{n(4 - 5 \sin^2 i)}{a^2 (1-e^2)^2} + \\ & + \frac{3R_p^4 J_2^2}{128} \frac{n[10 \sin^2 i(76 - 89 \sin^2 i) + (56 - 36 \sin^2 i - 45 \sin^4 i) e^2]}{a^4 (1-e^2)^4} - \\ & - \frac{15R_p^4 J_4}{32} \frac{n \left[16 - 62 \sin^2 i + 49 \sin^4 i + \left(18 - 63 \sin^2 i + \frac{189}{4} \sin^4 i \right) e^2 \right]}{a^4 (1-e^2)^4} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
\dot{M}_J = n + \frac{3R_p^2 J_2}{4} \frac{n(2-3\sin^2 i)}{a^2(1-e^2)^{3/2}} + \frac{3R_p^4 J_2^2}{32} \\
\cdot \frac{n \left[100\sin^2 i - 131\sin^4 i + (20 - 98\sin^2 i + 67\sin^4 i)e^2 - \frac{1}{16}(280 - 328\sin^2 i + 791\sin^4 i)e^4 \right]}{a^4(1-e^2)^{9/2}} \\
- \frac{45R_p^4 J_4}{128} \frac{ne^2(8-40\sin^2 i + 35\sin^4 i)}{a^4(1-e^2)^3}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

In cui sono considerati anche gli effetti secolari di secondo ordine dell'armonica J_2 , che non possono essere trascurati quando $J_2 \propto 10^{-3}$ e le altre armoniche sono di almeno due ordini di grandezza inferiore; ciò si verifica, in generale, per i pianeti del Sistema Solare. In questo caso, il disturbo dovuto ai termini in J_2^2 , è di un ordine di grandezza paragonabile a quello di J_4 . Laddove, come per i principali satelliti naturali gioviani o Titano, $J_2 \propto 10^{-6} \div 10^{-5}$, i termini in J_2^2 sono numericamente irrilevanti.

Le armoniche dispari non danno contributi secolari, ma solo periodici di breve o lungo periodo. Quest'ultimi devono essere considerati nell'individuazione di quelle orbite in cui si mantengano costanti nel tempo inclinazione, eccentricità ed argomento del pericentro, le cosiddette *orbite frozen*, o qualora si voglia "congelare" anche solo uno di questi elementi orbitali. Gli effetti di lungo periodo dovuti all'armonica J_3 d'interesse per le orbite frozen sono [Paskowitz e Scheeres, 2006]:

$$\dot{e}_{J_3} = -\frac{3}{2} \frac{J_3 n}{a^3(1-e^2)^3} \sin i \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right) \cos \omega \tag{2.20}$$

$$\dot{i}_{J_3} = \frac{3}{2} \frac{\mu J_3}{na^6(1-e^2)^3} e \cos i \left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right) \cos \omega \tag{2.21}$$

$$\dot{\omega}_{J_3} = \frac{3}{2} \frac{J_3 n}{a^3(1-e^2)^3} \frac{\sin i \sin \omega}{e} \left[\left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i \right) (1 + 4e^2) - \frac{e^2}{\sin^2 i} \left(1 - \frac{19}{4} \sin^2 i + \frac{15}{4} \sin^4 i \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.22}$$

L'Eq. (2.22) mostra come alle inclinazioni convenzionalmente definite *critiche*, $i = 63.43^\circ$ e $i = 116.57^\circ$, soluzioni dell'equazione $\left(1 - \frac{5}{4} \sin^2 i\right) = 0$, gli effetti di lungo termine di J_3 sulla precessione della linea absidale non siano completamente nulli.

2.1.2 EFFETTI DI TERZO CORPO

Il potenziale di disturbo dovuto alla presenza di un corpo perturbante, può essere descritto mediante il problema dei tre corpi ristretto per il quale il potenziale di disturbo di terzo corpo è:

$$U_{III} = \mu_{III} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{d^3} \hat{d} \cdot \hat{r} \right) \quad (2.23)$$

con μ_{III} la costante planetaria del terzo corpo, \bar{d} e \bar{r} , rispettivamente, i vettori che congiungono il terzo corpo e il satellite al corpo, ed $r_1 = |\bar{r} - \bar{d}|$ la distanza tra il satellite e il terzo corpo (vedi Fig. 2.4).

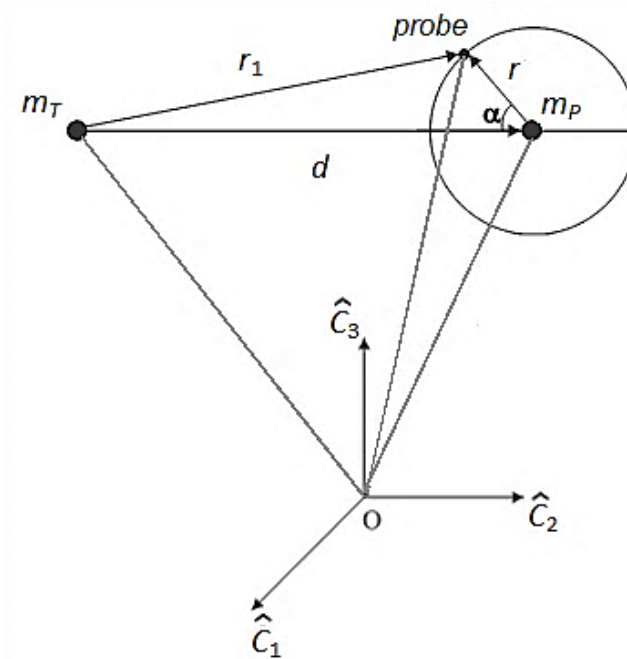


Figura 2.4: Geometria del problema dei tre corpi ristretto

Nel caso in cui $r \ll d$ sarà possibile approssimare il potenziale di disturbo con il gradiente di gravità a esso associato. Ciò consente di fornire un'approssimazione al secondo ordine mediante le tradizionali espansioni polinomiali di Legendre [Allan e Cook, 1963]:

$$U_{III} = \frac{\mu_{III} r^2}{d^3} P_2(\cos \alpha) \quad (2.24)$$

dove α è l'angolo formato tra i vettori \bar{r} e \bar{d} (vedi Fig. 2.4) e $P_2(\cos \alpha)$ è il polinomio di Legendre di grado due dell'Eq. (2.5), con $x = \cos \alpha$.

Nel caso in cui il satellite subisca l'influenza di più corpi perturbanti (es. Luna e Sole per satelliti in orbita terrestre), il potenziale di disturbo totale sarà dato dalla somma dei potenziali di disturbo dei singoli terzi corpi ($U_{III_{TOT}} = \sum_i U_{III_i}$).

Per valutare gli effetti a lungo termine del terzo corpo sugli elementi orbitali classici, il potenziale descritto dall'Eq. (2.24) deve essere mediato due volte, rispetto alle posizioni, lungo le loro orbite (reali o apparenti) attorno al corpo primario, del satellite e del corpo perturbante [Musen, 1961].

Il potenziale doppio-mediato è dato dalla [Allan e Ward, 1963]:

$$\langle\langle U \rangle\rangle = \frac{3}{4} \frac{\mu_{III}}{a_{III}^3 (1-e_{III}^2)^{3/2}} a^2 \left\{ \frac{1}{2} (1-e^2) (\hat{k} \cdot \hat{Z}_{III})^2 + e^2 \left[1 - \frac{5}{2} (\hat{e} \cdot \hat{Z}_{III})^2 \right] \right\} \quad (2.25)$$

dove a_{III} e e_{III} sono, rispettivamente, il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita che il corpo perturbante descrive rispetto al corpo primario, \hat{k} è il vettore unitario perpendicolare al piano orbitale del satellite, \hat{e} il vettore unitario dell'eccentricità, e \hat{Z}_{III} è il polo orbitale del corpo perturbante, che hanno componenti:

$$\hat{k} = \begin{bmatrix} \sin \Omega \sin i \\ -\cos \Omega \sin i \\ \cos i \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_{III} = \begin{bmatrix} \sin \Omega_{III} \sin i_{III} \\ -\cos \Omega_{III} \sin i_{III} \\ \cos i_{III} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i \\ \sin \omega \sin i \end{bmatrix}$$

con i_{III} e Ω_{III} , rispettivamente, l'inclinazione e la RAAN dell'orbita del corpo perturbante.

Sviluppando i termini $(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{Z}}_{III})^2$ e $(\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{Z}}_{III})^2$, l'Eq. (2.25) assume la forma:

$$\begin{aligned} \langle\langle U \rangle\rangle &= \frac{\kappa a^2}{2} \cdot \\ &\left\{ \begin{aligned} &2 \cos^2 i \cos^2 i_{III} + \sin(2i) \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) + 2 \sin^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) + \\ &+ e^2 \left[\begin{aligned} &4 + (5 \sin^2 \omega - 1) \sin(2i) \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) - 2 \cos^2 i \cos^2 i_{III} - 2 \sin^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) + \\ &-10 \sin^2 i \cos^2 i_{III} \sin^2 \omega - 10 \sin^2 i_{III} \sin^2(\Omega - \Omega_{III}) \cos^2 \omega + 5 \sin i \sin(2i_{III}) \sin(\Omega - \Omega_{III}) \sin(2\omega) + \\ &-10 \cos^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) \sin^2 \omega - 5 \cos i \sin^2 i_{III} \sin(2\Omega - 2\Omega_{III}) \sin(2\omega) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.27) \end{aligned}$$

$$\text{con } \kappa = \frac{3}{8} \frac{m' n'^2}{(1 - e_{III}^2)^{3/2}}, \quad m' = \frac{\mu_{III}}{\mu_P + \mu_{III}}, \quad n'^2 = \frac{\mu_P + \mu_{III}}{a_{III}^3}.$$

Sostituendo nelle equazioni planetarie di Lagrange (2.26), le derivate parziali del potenziale doppio-mediato:

$$\frac{\partial \langle\langle U \rangle\rangle}{\partial a} = \kappa a \cdot \left\{ \begin{aligned} &2 \cos^2 i \cos^2 i_{III} + \sin(2i) \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) + 2 \sin^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) + \\ &+ e^2 \left[\begin{aligned} &4 + (5 \sin^2 \omega - 1) \sin(2i) \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) - 2 \cos^2 i \cos^2 i_{III} - 2 \sin^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) + \\ &-10 \sin^2 i \cos^2 i_{III} \sin^2 \omega - 10 \sin^2 i_{III} \sin^2(\Omega - \Omega_{III}) \cos^2 \omega + 5 \sin i \sin(2i_{III}) \sin(\Omega - \Omega_{III}) \sin(2\omega) + \\ &-10 \cos^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) \sin^2 \omega - 5 \cos i \sin^2 i_{III} \sin(2\Omega - 2\Omega_{III}) \sin(2\omega) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle\langle U \rangle\rangle}{\partial e} &= \kappa a^2 e \cdot \\
&\left[\begin{aligned}
&4 + (5 \sin^2 \omega - 1) \sin(2i) \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) - 2 \cos^2 i \cos^2 i_{III} - 2 \sin^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) + \\
&-10 \sin^2 i \cos^2 i_{III} \sin^2 \omega - 10 \sin^2 i_{III} \sin^2(\Omega - \Omega_{III}) \cos^2 \omega + 5 \sin i \sin(2i_{III}) \sin(\Omega - \Omega_{III}) \sin(2\omega) + \\
&-10 \cos^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) \sin^2 \omega - 5 \cos i \sin^2 i_{III} \sin(2\Omega - 2\Omega_{III}) \sin(2\omega)
\end{aligned} \right] \\
\frac{\partial \langle\langle U \rangle\rangle}{\partial i} &= \frac{\kappa a^2}{2} \cdot \\
&\left\{ \begin{aligned}
&-2 \sin(2i) \cos^2 i_{III} + 2 \cos(2i) \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) + 2 \sin(2i) \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) + \\
&\left[\begin{aligned}
&2(5 \sin^2 \omega - 1) \cos(2i) \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) + 2 \sin(2i) \cos^2 i_{III} - 2 \sin(2i) \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) + \\
&-10 \sin(2i) \cos^2 i_{III} \sin^2 \omega + 5 \cos i \sin(2i_{III}) \sin(\Omega - \Omega_{III}) \sin(2\omega) + \\
&+10 \sin(2i) \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) \sin^2 \omega + 5 \sin i \sin^2 i_{III} \sin(2\Omega - 2\Omega_{III}) \sin(2\omega)
\end{aligned} \right]
\end{aligned} \right\} \\
\frac{\partial \langle\langle U \rangle\rangle}{\partial \omega} &= \frac{5\kappa a^2 e}{2} \cdot \\
&\left\{ \begin{aligned}
&\sin(2\omega) \left[\begin{aligned}
&\sin(2i) \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) - 2 \sin^2 i \cos^2 i_{III} + 2 \sin^2 i_{III} \sin^2(\Omega - \Omega_{III}) + \\
&-2 \cos^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III})
\end{aligned} \right] + \\
&+2 \cos(2\omega) \left[\sin i \sin(2i_{III}) \sin(\Omega - \Omega_{III}) - \cos i \sin^2 i_{III} \sin(2\Omega - 2\Omega_{III}) \right]
\end{aligned} \right\} \\
\frac{\partial \langle\langle U \rangle\rangle}{\partial \Omega} &= \frac{\kappa a^2}{2} \cdot \\
&\left\{ \begin{aligned}
&-\sin(2i) \sin(2i_{III}) \sin(\Omega - \Omega_{III}) - 2 \sin^2 i \sin^2 i_{III} \sin(2\Omega - 2\Omega_{III}) + \\
&\left[\begin{aligned}
&-(5 \sin^2 \omega - 1) \sin(2i) \sin(2i_{III}) \sin(\Omega - \Omega_{III}) + 2 \sin^2 i \sin^2 i_{III} \sin(2\Omega - 2\Omega_{III}) + \\
&-10 \sin^2 i_{III} \sin(2\Omega - 2\Omega_{III}) \cos^2 \omega + 5 \sin i \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) \sin(2\omega) + \\
&+10 \cos^2 i \sin^2 i_{III} \sin(2\Omega - 2\Omega_{III}) \sin^2 \omega - 10 \cos i \sin^2 i_{III} \cos(2\Omega - 2\Omega_{III}) \sin(2\omega)
\end{aligned} \right]
\end{aligned} \right\} \\
\frac{\partial \langle\langle U \rangle\rangle}{\partial M} &= 0
\end{aligned}
\tag{2.28}$$

è stato possibile individuare le variazioni temporali a lungo-termine degli elementi orbitali classici dovuti al disturbo di terzo corpo [Condoleo et al, 2016]:

$$\dot{a}_m = \frac{da}{dt} = 0 \quad (2.29)$$

$$\dot{e}_m = \frac{de}{dt} = -\frac{5\kappa e\sqrt{1-e^2}}{2n} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin(2\omega) \left[\sin(2i)\sin(2i_m)\cos(\Omega-\Omega_m) - 2\sin^2 i \cos^2 i_m + 2\sin^2 i_m \sin^2(\Omega-\Omega_m) \right] + \\ -2\cos^2 i \sin^2 i_m \cos^2(\Omega-\Omega_m) \\ +2\cos(2\omega) \left[\sin i \sin(2i_m) \sin(\Omega-\Omega_m) - \cos i \sin^2 i_m \sin(2\Omega-2\Omega_m) \right] \end{array} \right\} \quad (2.30)$$

$$\dot{i}_m = \frac{di}{dt} = \frac{\kappa}{2n\sqrt{1-e^2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2\cos i \sin(2i_m) \sin(\Omega-\Omega_m) + 2\sin i \sin^2 i_m \sin(2\Omega-2\Omega_m) + \\ \left[\begin{array}{l} 2(5\cos^2 \omega - 1) \cos i \sin(2i_m) \sin(\Omega-\Omega_m) - 2\sin i \sin^2 i_m \sin(2\Omega-2\Omega_m) + \frac{10}{\sin i} \sin^2 i_m \sin(2\Omega-2\Omega_m) \cos^2 \omega + \\ +5\cos(2i) \sin(2i_m) \cos(\Omega-\Omega_m) \sin(2\omega) - 10\cos i \cot i \sin^2 i_m \sin(2\Omega-2\Omega_m) \sin^2 \omega + \\ +10\cot i \sin^2 i_m \sin(2\omega) \cos(2\Omega-2\Omega_m) - 10\cot i \sin^2 i_m \sin(2\omega) \cos^2 i \cos^2(\Omega-\Omega_m) - 5\sin(2\omega) \sin(2i) \cos^2 i_m + \\ +10\cot i \sin^2 i_m \sin^2(\Omega-\Omega_m) \sin(2\omega) - 10\cos i \cot i \sin^2 i_m \sin(2\Omega-2\Omega_m) \cos(2\omega) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (2.31)$$

$$\dot{\Omega}_m = \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\kappa}{2n\sqrt{1-e^2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -4\cos i \cos^2 i_m + 2(\cos i \cot i - \sin i) \sin(2i_m) \cos(\Omega-\Omega_m) + 4\cos i \sin^2 i_m \cos^2(\Omega-\Omega_m) + \\ \left[\begin{array}{l} 2(5\sin^2 \omega - 1) \sin(2i_m) \cos(\Omega-\Omega_m) (\cos i \cot i - \sin i) + 4\cos i \cos^2 i_m - 4\cos i \sin^2 i_m \cos^2(\Omega-\Omega_m) + \\ +e^2 \left[\begin{array}{l} -20\cos i \cos^2 i_m \sin^2 \omega + 5\cot i \sin(2i_m) \sin(\Omega-\Omega_m) \sin(2\omega) + \\ +20\cos i \sin^2 i_m \cos^2(\Omega-\Omega_m) \sin^2 \omega + 5\sin^2 i_m \sin(2\Omega-2\Omega_m) \sin(2\omega) \end{array} \right] \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (2.32)$$

$$\dot{\omega}_m = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\kappa}{2n\sqrt{1-e^2}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 8 + 2\sin(2i_m) \cos(\Omega-\Omega_m) (5\sin(2i) \sin^2 \omega - \cot i) - 4\sin^2 i_m \cos^2(\Omega-\Omega_m) - 20\sin^2 i \cos^2 i_m \sin^2 \omega + \\ -20\sin^2 i_m \cos^2 \omega \sin^2(\Omega-\Omega_m) + 10\sin i \sin(2i_m) \sin(2\omega) \sin(\Omega-\Omega_m) - 20\cos^2 i \sin^2 i_m \sin^2 \omega \cos^2(\Omega-\Omega_m) + \\ -10\cos i \sin^2 i_m \sin(2\omega) \sin(2\Omega-2\Omega_m) \end{array} \right] + \\ -e^2 \left[\begin{array}{l} 8 + 2(5\sin^2 \omega - 1) \cot i \sin(2i_m) \cos(\Omega-\Omega_m) - 4\sin^2 i_m \cos^2(\Omega-\Omega_m) - 20\cos^2 i_m \sin^2 \omega + \\ -20\sin^2 i_m \sin^2(\Omega-\Omega_m) \cos^2 \omega + 5 \left(\sin i + \frac{1}{\sin i} \right) \sin(2i_m) \sin(2\omega) \sin(\Omega-\Omega_m) + \\ -5\cos i \sin^2 i_m \sin(2\omega) \sin(2\Omega-2\Omega_m) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (2.33)$$

$$\dot{M}_{III} = \frac{dM}{dt} - n = -\frac{\kappa}{n} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2 \left[2 \cos^2 i \cos^2 i_{III} + \sin(2i) \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) + 2 \sin^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) \right] + \\ + (1 + e^2) \left[\begin{array}{l} 4 + (5 \sin^2 \omega - 1) \sin(2i) \sin(2i_{III}) \cos(\Omega - \Omega_{III}) - 2 \cos^2 i \cos^2 i_{III} - 2 \sin^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) + \\ -10 \sin^2 i \cos^2 i_{III} \sin^2 \omega - 10 \sin^2 i_{III} \sin^2(\Omega - \Omega_{III}) \cos^2 \omega + 5 \sin i \sin(2i_{III}) \sin(\Omega - \Omega_{III}) \sin(2\omega) + \\ -10 \cos^2 i \sin^2 i_{III} \cos^2(\Omega - \Omega_{III}) \sin^2 \omega - 5 \cos i \sin^2 i_{III} \sin(2\Omega - 2\Omega_{III}) \sin(2\omega) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (2.34)$$

Le Eqq. (2.29)-(2.34) descrivono gli effetti a lungo termine di un corpo perturbante sugli elementi classici del satellite nel caso più generale, tenendo conto anche dell'inclinazione e della RAAN dell'orbita del terzo corpo. In taluni casi, queste dipendenze possono essere trascurate, contenendo gli errori derivanti da tale ipotesi semplificativa. In particolare, per i principali satelliti naturali del Sistema Solare, ovvero per i satelliti medicei di Giove e per Titano, i ridotti valori dell'inclinazione del corpo perturbante, permettono, con buona approssimazione, di porre $i_{III} = 0^\circ$. Diverso è il caso di satelliti in orbita terrestre, dal momento che i principali corpi perturbanti- il Sole e la Luna- hanno, rispettivamente, $i_{SOLE} = 23.44^\circ$ e $i_{LUNA} = 18.28^\circ \div 28.58^\circ$. Nel caso in cui il corpo perturbante sia il Sole, è possibile trascurare gli effetti legati a Ω_{III} , risultando $\Omega_{SOLE} = 0^\circ$. In letteratura è possibile reperire trattazioni in cui, rispetto al caso generale qui descritto, sia trascurata la sola dipendenza dalla RAAN del terzo corpo [Ortore et al, 2015], vengano trascurate anche l'inclinazione del piano orbitale del corpo perturbante (caso complanare) [Domingos et al, 2008] e l'eccentricità dell'orbita di terzo corpo ($e_{III} = 0$) [Broucke, 2003; Prado, 2003].

2.2 RICERCA ANALITICA DI ORBITE PERIODICHE

Soluzioni di orbite periodiche possono essere ricavate risolvendo Eq. (1.2), per fissati valori di m ed R , sostituendo nelle Eqq. (1.4) e (1.5) le variazioni degli elementi orbitali interessati, ottenuti sovrapponendo gli effetti perturbativi dovuti all'asimmetria del geopotenziale e alla presenza di

eventuali corpi perturbanti ($\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_J + \dot{\Omega}_{III}, \dot{\xi} = \dot{\omega}_J + \dot{M}_J + \dot{\omega}_{III} + \dot{M}_{III}$). Dovendo risolvere una sola equazione in cui figurano cinque elementi orbitali classici, oltre alle caratteristiche di periodicità, devono essere posti come condizione iniziale anche quattro di essi, mentre il quinto sarà ricavato risolvendo la condizione di periodicità; a patto che risulti fisicamente accettabile. Si è soliti scegliere come incognita il semiasse maggiore, i cui valori minimo e massimo fisicamente accettabili sono il raggio planetario e il raggio della sfera d'influenza del corpo primario.

Le Eqq. (2.29)-(2.34) sono tra loro concatenate, e le variazioni degli elementi orbitali non assumono un valore costante, ma sono variabili nel tempo. Inoltre, possono variare nel tempo anche gli elementi orbitali del corpo perturbante (i_{III} e Ω_{III}). Ne consegue che l'equazione di periodicità sia variabile nel tempo.

Per superare questa difficoltà, è possibile risolvere l'Eq. (1.2) linearizzando gli andamenti di RAAN e argomento di latitudine in funzione del tempo, assumendo $\dot{\Omega}$ e $\dot{\xi}$ pari ai coefficienti angolari delle rette frutto della linearizzazione. In alternativa, possono essere assunti degli opportuni valori medi per gli elementi orbitali del satellite e dei corpi perturbanti. In entrambi i casi, gli errori derivanti dalle semplificazioni effettuate (maggiori utilizzando il secondo metodo), devono essere opportunamente stimati e corretti; per tale ragione, la soluzione così ottenuta va considerata di prima approssimazione.

2.3 EQUAZIONI POLINOMIALI

Sostituendo nelle condizioni generali di periodicità (1.2), sincronismo (1.9) e multi-sincronismo (1.10) con il Sole, le relazioni che descrivono le variazioni temporali degli elementi classici, è possibile ottenere, sotto opportune ipotesi semplificative, delle equazioni- o sistemi di equazioni- che consentono l'individuazione degli elementi orbitali in grado di rispettare le caratteristiche di periodicità e sincronismo con il Sole imposte.

Condizione essenziale sotto la quale le equazioni polinomiali forniscono soluzioni ben approssimanti le caratteristiche scelte, è che- all'interno dei disturbi dovuti all'asimmetria del geopotenziale- l'armonica J_2 sia "dominante" rispetto alle altre, cioè le perturbazioni date dall'asimmetria del geopotenziale sono quasi-approssimabili a quelle della sola J_2 . Questa condizione è rispettata dalla quasi totalità dei pianeti e satelliti naturali del Sistema Solare, con la sola eccezione della Luna, in cui le perturbazioni dalle armoniche gravitazionali superiori non è trascurabile rispetto a quelle di J_2 .

In questo lavoro sono presentate equazioni polinomiali per la risoluzione di P.O., P.S.S.O e P.M.S.S.O.. Al fine di ottenere polinomi in forma chiusa, per le prime si è reso necessario trascurare, negli effetti di terzo corpo, la dipendenza dalla RAAN di satellite e corpo perturbante. Per le altre due tipologie di orbite scientifiche è stato possibile ottenere una coppia di equazioni nelle incognite semiasse maggiore ed inclinazione, a patto di trascurare, sempre negli effetti di terzo corpo, anche la dipendenza dall'inclinazione dell'orbita del corpo perturbante.

2.3.1 POLINOMIO PER ORBITE PERIODICHE.

Sommando gli effetti perturbativi presentati nelle Eqq. (2.17)-(2.19) e (2.32)-(2.34) le variazioni temporali di RAAN e argomento di latitudine possono essere descritti dalle:

$$\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_J + \dot{\Omega}_{III} = -\frac{3\sqrt{\mu_p}R_p^2}{2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \left[\frac{J_2}{a^{3.5}} + \frac{b_{22}+b_4}{a^{5.5}} + b_T a^{1.5} \right] \quad (2.35)$$

$$\dot{\xi} = \dot{\omega}_J + \dot{M}_J + \dot{\omega}_{III} + \dot{M}_{III} = \sqrt{\mu_p} \left[\frac{1}{a^{1.5}} + \frac{3R_p^2}{4} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left(\frac{c_2}{a^{3.5}} + \frac{c_{22}+c_4}{a^{5.5}} + c_T a^{1.5} \right) \right] \quad (2.36)$$

Nel caso in cui si trascurino, negli effetti di terzo corpo, tutti i termini contenenti la differenza $(\Omega - \Omega_{III})$, i coefficienti presenti nelle Eqq. (2.35) e (2.36), assumono la forma:

$$b_{22} = -\frac{R_p^2 J_2^2}{16} \frac{(12 - 80 \sin^2 i) - (4 + 5 \sin^2 i) e^2}{(1 - e^2)^2}$$

$$b_4 = -\frac{5R_p^2 J_4}{16} \frac{(4 - 7 \sin^2 i)(2 + 3e^2)}{(1 - e^2)^2}$$

$$b_T = \frac{m'n'^2}{4R_p^2 \mu_p} \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 - e_{III}^2)^{3/2}} \left[\cos(2i_{III}) - \frac{\sin(2i_{III})}{\sin(2i)} + \tan i \sin(2i_{III}) \right] [3e^2 + 2 - 5e^2 \cos(2\omega)]$$

$$c_2 = J_2 [(1 - e^2)^{1/2} (2 - 3 \sin^2 i) + (4 - 5 \sin^2 i)]$$

$$c_{22} = \frac{R_p^2 J_2^2}{32} \frac{1}{(1 - e^2)^{5/2}} \left\{ (1 - e^2)^{1/2} [10 \sin^2 i (76 - 89 \sin^2 i) + (56 - 36 \sin^2 i - 45 \sin^4 i) e^2] + \right. \\ \left. + 4 [(100 \sin^2 i - 131 \sin^4 i) + (20 - 98 \sin^2 i + 67 \sin^4 i) e^2] - \frac{1}{4} (280 - 328 \sin^2 i + 79 \sin^4 i) e^4 \right\}$$

$$c_4 = \frac{15R_p^2 J_4}{32} \frac{1}{(1 - e^2)^2} \left\{ (1 - e^2)^{1/2} [(40 \sin^2 i - 35 \sin^4 i - 8) e^2] - \left[\frac{4}{3} (16 - 62 \sin^2 i + 49 \sin^4 i) + \right. \right. \\ \left. \left. + (24 - 84 \sin^2 i + 63 \sin^4 i) e^2 \right] \right\}$$

$$c_T = \frac{m'n'^2}{4R_p^2 \mu_p} \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 - e_{III}^2)^{3/2}} (c_\alpha - 2\sqrt{1 - e^2} c_\beta)$$

con:

$$c_\alpha = 2(1 - e^2) \left[3 \cos^2(i - i_{III}) - 1 + 5 \cos(2\omega) \sin^2(i - i_{III}) \right] - 5e^2 \frac{\cos i}{\sin i} \cos(2\omega) \sin[2(i - i_{III})] + \\ + 2 \frac{\cos i}{\sin i} \sin[2(i - i_{III})] + 3e^2 \frac{\cos i}{\sin i} \sin[2(i - i_{III})]$$

$$c_\beta = 2 \left[2 \cos^2(i - i_{III}) + 3e^2 \cos^2(i - i_{III}) - e^2 + 5e^2 \cos(2\omega) \sin^2(i - i_{III}) \right] + \\ + (1 - e^2) \left[3 \cos^2(i - i_{III}) - 1 + 5 \cos(2\omega) \sin^2(i - i_{III}) \right]$$

Infine, sostituendo nella (1.2) le Eqq. (2.35) e (2.36), si arriva all'equazione che consente di determinare analiticamente, fissato un valore per l'inclinazione del piano orbitale, il semiasse soluzione dell'orbita periodica:

$$d_T a^7 + d_1 a^{5.5} + d_K a^4 + d_2 a^2 + d_4 = 0 \quad (2.37)$$

con:

$$d_T = c_T - b_T \frac{2R}{m} \cos i, \text{ correlato ai disturbi di terzo corpo}$$

$$d_1 = -\frac{4\omega_p}{3\sqrt{\mu_p} R_p^2} \frac{R}{m} (1-e^2)^2, \text{ funzione delle caratteristiche di ripetitività}$$

dell'orbita

$$d_K = \frac{4}{3R_p^2} (1-e^2)^2, \text{ legato al moto Kepleriano}$$

$$d_2 = c_2 - J_2 \frac{2R}{m} \cos i, \text{ correlato agli effetti dell'armonica } J_2$$

$$d_4 = c_{22} + c_4 - (b_{22} + b_4) \frac{2R}{m} \cos i, \text{ legato ai disturbi forniti da } J_2^2 \text{ e } J_4$$

qualora, come nel caso di satelliti in orbita terrestre, si debba tener conto della presenza di più corpi perturbanti, i coefficienti b_T e c_T degli effetti di terzo corpo, saranno ottenuti sommando gli stessi coefficienti di tutti gli M corpi perturbanti; analogamente per il coefficiente d_T : $b_T = \sum_{i=1}^M b_{Ti}$, $c_T = \sum_{i=1}^M c_{Ti}$,

$$d_T = \sum_{i=1}^M d_{Ti}; \text{ con } b_{Ti} \text{ e } c_{Ti} \text{ e } d_{Ti} \text{ i coefficienti di un } i\text{-esimo corpo perturbante.}$$

2.3.1.1 RISULTATI ANALITICI E RISULTATI NUMERICI

Per verificare l'accuratezza dell'Eq. (2.37) è proposto un confronto, tra risultati analitici e numerici, condotto su orbite terrestri poste sotto l'influenza del Sole e della Luna. Com'è noto, il disturbo lunisolare assume particolare rilevanza alle alte quote, mentre risulta marginale, rispetto alle perturbazioni dovute all'asimmetria del geopotenziale, ed in particolare a quelli dovuti all'armonica J_2 , per le L.E.O.; per tale ragione, l'analisi comparativa è stata condotta principalmente su orbite semi-sincrone, sincrone o super-sincrone con la rotazione terrestre, con riferimento a orbite caratteristiche delle costellazioni G.P.S., Molniya e Tundra. A quota bassa, è proposta per l'orbita nominale (periodica ed eliosincrona) del satellite Cosmo-SkyMed-1.

Al fine di poter trascurare la dipendenza dal tempo dell'Eq. (2.37) sono stati scelti valori medi costanti per gli elementi classici del satellite e dell'orbita dei corpi perturbanti. In tutti gli esempi proposti, saranno poste le condizioni: $\Omega=0$ e $\omega=0$. Valori costanti nel tempo sono stati assunti anche per l'inclinazione lunare ($i_{LUNA}=18.30^\circ$). Per analizzare gli errori derivanti da quest'ultima approssimazione, viene proposto un confronto tra le soluzioni ottenute con i due valori estremali di i_{LUNA} pari a 18.28° e 28.58° . Per gli altri elementi delle orbite dei corpi perturbanti si è assunto: $i_{SOLE}=23.44^\circ$, $e_{SOLE}=0.01671022$, $e_{LUNA}=0.0554$. Per i coefficienti delle armoniche zonali si è fatto riferimento all'Earth Gravitational Model 96 (EGM 96) [Lemoine et al., 1998] i cui principali parametri sono riassunti in Tab. 2.1.

| R_p [km] | μ [km ³ /s ²] | J_2 | J_3 | J_4 | C_{22} | S_{22} | ω_p [rad/s] |
|---------------|---|----------|----------|-----------|----------|-----------|-----------------------|
| 6378.137 | 398600.5 | 1.082e-3 | 2.532e-6 | -1.611e-6 | 1.575e-6 | -9.024e-6 | 7.2921e-5 |

Tabella 2.1: Earth Gravitational Model 96 (EGM 96) [Lemoine et al., 1998]

Nelle tabelle che seguono, si è tenuto conto di tre distinte casistiche per le soluzioni ottenute numericamente:

- Caso A: soluzioni in cui si è tenuto conto degli effetti delle armoniche zonali, e del modello EGM 96, e degli effetti lunisolari;
- Caso B: come il caso A, più gli effetti perturbativi a lungo termine dell'armonica settoriale, ovvero quelli dovuti ai coefficienti C_{22} e S_{22} del potenziale completo in Eq. (2.1);
- Caso C: soluzioni con un modello (30x30) dell'EGM 96, più effetti lunisolari, più pressione di radiazione solare (considerando un satellite sferico con coefficiente di pressione di radiazione solare $C_r = 1$ e rapporto area/massa del satellite pari a $0.02 \text{ m}^2/\text{kg}$).

Le simulazioni numeriche sono state condotte utilizzando un integratore Runge-Kutta-Fehlberg 7(8), in cui le posizioni del Sole e della Luna sono state determinate utilizzando le efemeridi di questi corpi celesti (DE421). I valori numerici degli elementi orbitali sono stati ricavati attraverso i seguenti passaggi:

1. scelti i valori di e , i , ω e R/m , come soluzione di prima approssimazione è stato considerato il semiasse ottenuto con l'Eq. (2.37);
2. per la soluzione di prima approssimazione, sono state valutate numericamente le variazioni di $\dot{\Omega}$ e $\dot{\xi}$;
3. utilizzando i valori del punto 2. nelle Eqq. (1.4) e (1.5) (giorno nodale e periodo nodale), è stato valutato il valore di $q = R/m$ della soluzione di prima approssimazione ;
4. il valore corretto del semi-asse maggiore in grado di garantire il valore di q scelto è stato individuato con un procedimento iterativo;
5. la soluzione così ottenuta è stata propagata su un periodo di tempo sufficientemente lungo da valutare la stabilità della traiettoria proposta.

In Tab. (2.2) è riportata la comparazione tra le soluzioni numeriche (caso A) e le soluzioni analitiche ottenute con l'Eq. (2.6), sia tenendo conto degli

effetti lunisolari, che trascurandoli ($d_T = 0$); ipotesi sotto la quale le soluzioni ricavate sono estremamente prossime a quelle che si otterrebbero analiticamente tenendo conto dei soli effetti dell'armonica J_2 , risultando trascurabili- soprattutto in orbita alta- i contributi dovuti a J_4 . La tabella mostra come aver introdotto gli effetti lunisolari nella trattazione analitica consenta di ridurre notevolmente, in genere dimezzare, gli errori- in valore assoluto- tra soluzione analitica e soluzione numerica ($|\Delta a|$); che hanno ordine di grandezza piuttosto contenuto, con valori massimi, per le medie inclinazioni, inferiori a 5 km.

| Parametri di periodicità | | Elementi orbitali | | | | Soluzione numerica (caso A) | Soluzioni con l'Eq. 2.6 senza Sole e Luna ($d_T=0$) | | Soluzioni con l'Eq. 2.6 completa | |
|--------------------------|-----|-------------------|-------|--------------|--------------|-----------------------------|---|-------------------|----------------------------------|-------------------|
| m | R | i [°] | e | Ω [°] | ω [°] | a [km] | a [km] | $ \Delta a $ [km] | a [km] | $ \Delta a $ [km] |
| 1 | 1 | 15 | 0.001 | 0 | 0 | 42164.11 | 42166.02 | 1.91 | 42165.03 | 0.92 |
| 1 | 1 | 15 | 0.1 | 0 | 0 | 42164.29 | 42166.05 | 1.76 | 42165.06 | 0.77 |
| 1 | 1 | 15 | 0.25 | 0 | 0 | 42165.17 | 42166.24 | 1.07 | 42165.20 | 0.03 |
| 3 | 2 | 23.44 | 0.001 | 0 | 0 | 55246.35 | 55252.10 | 5.75 | 55249.22 | 2.87 |
| 3 | 2 | 23.44 | 0.1 | 0 | 0 | 55246.67 | 55252.21 | 5.45 | 55249.22 | 2.55 |
| 3 | 2 | 23.44 | 0.25 | 0 | 0 | 55247.84 | 55252.27 | 4.43 | 55249.24 | 1.40 |
| 2 | 1 | 45 | 0.001 | 0 | 0 | 66922.73 | 66931.88 | 9.15 | 66927.02 | 4.29 |
| 2 | 1 | 45 | 0.1 | 0 | 0 | 66923.22 | 66931.87 | 8.67 | 66926.97 | 3.75 |
| 2 | 1 | 45 | 0.25 | 0 | 0 | 66925.05 | 66931.93 | 6.88 | 66926.71 | 1.66 |
| 2 | 1 | 63.43 | 0.001 | 0 | 0 | 66926.48 | 66931.17 | 4.69 | 66927.74 | 1.26 |
| 2 | 1 | 63.43 | 0.1 | 0 | 0 | 66926.92 | 66931.17 | 4.25 | 66927.66 | 0.74 |
| 2 | 1 | 63.43 | 0.25 | 0 | 0 | 66928.18 | 66931.14 | 2.96 | 66927.26 | 0.92 |

Tabella 2.2: Confronto tra soluzioni analitiche ottenute mediante l'Eq. (2.6) e le soluzioni numeriche (Caso A)

Utilizzando un modello gravitazionale più completo (caso B e caso C), le soluzioni numeriche si modificano soprattutto in virtù degli effetti a lungo termine dell'armonica settoriale J_{22} . A tale scopo, è offerta la Tab. 2.3 che

mostra le differenze nelle soluzioni numeriche nei tre casi proposti: mentre le differenze tra *caso A* e *caso B* non sono trascurabili, sebbene inferiori a 1 km; le differenze tra *caso B* e *caso C* risultano irrilevanti, a conferma che- oltre all'armonica zonale J_2 e agli effetti lunisolari- è la sola armonica J_{22} ad avere una certa influenza alle quote delle soluzioni proposte.

Infine, nella Tab. 2.4 è investigata la dipendenza delle soluzioni analitiche dall'inclinazione lunare. Soluzioni per orbite con le stesse caratteristiche di periodicità sono riportate ponendo i due valori estremali pari dell'inclinazione dell'orbita lunare pari a 18.28° e 28.58° ; le differenze sono superiori a 1 km solo per orbite estremamente alte, con $a > 60000$ km.

| Parametri di periodicità | | Elementi orbitali | | | | Soluzione numerica caso A | Soluzione numerica caso B | Differenza assoluta B-A | Soluzione numerica caso C | Differenza assoluta C-B |
|--------------------------|-----|-------------------|-------|-----------------|-----------------|---------------------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| m | R | i [°] | e | Ω [°] | ω [°] | a [km] | a [km] | $ \Delta a $ [km] | a [km] | $ \Delta a $ [km] |
| 1 | 15 | 98.00 | 0.001 | 0 | 0 | 6949.09 | 6949.09 | 0.00 | 6949.02 | 0.07 |
| 1 | 2 | 55.00 | 0.001 | 0 | 0 | 26561.80 | 26562.41 | 0.61 | 26562.65 | 0.24 |
| 3 | 2 | 23.44 | 0.001 | 0 | 0 | 55246.35 | 55246.08 | 0.27 | 55246.13 | 0.05 |
| 2 | 1 | 45.00 | 0.001 | 0 | 0 | 66922.73 | 66922.71 | 0.02 | 66922.69 | 0.02 |
| 2 | 1 | 45.00 | 0.100 | 0 | 0 | 66923.22 | 66922.94 | 0.28 | 66922.83 | 0.11 |
| 2 | 1 | 63.43 | 0.001 | 0 | 0 | 66926.48 | 66926.46 | 0.02 | 66926.50 | 0.04 |
| 2 | 1 | 63.43 | 0.100 | 0 | 0 | 66926.92 | 66926.56 | 0.36 | 66926.45 | 0.11 |

Tabella 2.3: Confronto tra le soluzioni numeriche ottenute nelle tre casistiche (*Caso A*, *Caso B*, *Caso C*)

| Parametri di periodicità | | Elementi orbitali | | | | Soluzioni con l'Eq. 2.6 con $i_{LUNA}=18.28^\circ$ | Soluzioni con l'Eq. 2.6 con $i_{LUNA}=28.58^\circ$ | Differenza assoluta |
|--------------------------|-----|-------------------|-------|-----------------|-----------------|--|--|----------------------|
| m | R | i [°] | e | Ω [°] | ω [°] | a [km] | a [km] | $ \Delta a $ [km] |
| 1 | 1 | 15 | 0.001 | 0 | 0 | 42165.03 | 42165.07 | 0.043 |
| 1 | 1 | 15 | 0.25 | 0 | 0 | 42165.20 | 42165.24 | 0.041 |
| 1 | 1 | 18.28 | 0.25 | 0 | 0 | 42165.07 | 42165.10 | 0.030 |
| 1 | 1 | 28.58 | 0.001 | 0 | 0 | 42164.44 | 42164.43 | 0.007 |
| 1 | 1 | 63.43 | 0.001 | 0 | 0 | 42162.82 | 42162.70 | 0.114 |
| 1 | 1 | 45 | 0.001 | 0 | 0 | 42163.58 | 42163.51 | 0.065 |
| 1 | 1 | 80 | 0.001 | 0 | 0 | 42162.64 | 42162.51 | 0.133 |
| 2 | 1 | 45 | 0.001 | 0 | 0 | 66927.03 | 66926.41 | 0.617 |
| 2 | 1 | 45 | 0.25 | 0 | 0 | 66926.71 | 66926.12 | 0.589 |
| 2 | 1 | 63.43 | 0.001 | 0 | 0 | 66927.74 | 66926.97 | 0.765 |
| 3 | 2 | 63.43 | 0.001 | 0 | 0 | 55248.57 | 55248.22 | 0.349 |
| 3 | 1 | 63.43 | 0.001 | 0 | 0 | 87695.58 | 87693.29 | 2.291 |
| 3 | 1 | 63.43 | 0.25 | 0 | 0 | 87694.24 | 87692.05 | 2.183 |
| 1 | 1 | 63.43 | 0.268 | 0 | 0 | 42162.64 | 42162.53 | 0.108 |
| 1 | 2 | 55.00 | 0.001 | 0 | 0 | 26560.22 | 26560.21 | 0.010 |
| 1 | 2 | 63.43 | 0.741 | 0 | 0 | 26553.13 | 26553.12 | 0.008 |
| 16 | 237 | 97.88 | 0.001 | 0 | 0 | 6997.74 | 6997.74 | $6.49 \cdot 10^{-4}$ |

Tabella 2.4: Influenza di i_{LUNA} sulle soluzioni analitiche

2.3.2 POLINOMIO PER ORBITE SINCRONE E MULTI-SINCRONE CON IL SOLE.

Nel caso in cui si ricerchino analiticamente le soluzioni di orbite con particolari condizioni di sincronismo con il moto apparente del Sole attorno al pianeta, deve essere risolto il sistema composto dalle Eqq. (1.2) e (1.9)-

rispettivamente periodicità e eliosincronismo- per le P.S.S.O, o dalle Eqq. (1.2) e (1.10)- rispettivamente periodicità e muti-sincronismo con il Sole- per le P.M.S.S.O.. Come già affermato nel capitolo 1, l'Eq. (1.9) può essere ricavata dalla (1.10) ponendo $n \rightarrow \infty$; per tale ragione, la ricerca delle P.S.S.O. può essere condotta risolvendo lo stesso sistema di equazioni delle P.M.S.S.O., come caso particolare di quest'ultime.

In questo caso, le soluzioni sono fornite come coppie di valori semiasse/inclinazione univocamente determinate in funzione dei parametri di periodicità (m e R) e sincronismo con il Sole (n). I valori minimi possibili per n , sono determinati dall'entità delle perturbazioni agenti sulla rotazione della linea dei nodi. Per tale ragione, la fattibilità delle P.M.S.S.O. deve essere verificata su ogni pianeta, e il disegno di tali orbite è limitato a quei corpi primari che permettono di avere valori di n sufficientemente contenuti da risultare compatibili con la durata della missione e con l'osservazione dei fenomeni d'interesse.

Per ricavare un sistema di equazioni polinomiali esprimibili in forma chiusa, dovrà essere posta un'ulteriore ipotesi semplificativa sull'inclinazione dei corpi perturbanti: $i_{III} = 0^\circ$. Trascurando inoltre la dipendenza dall'eccentricità dell'orbita del terzo corpo ($e_{III} = 0$), le Eqq. (2.29)-(2.34) sono riconducibili a quelle proposte nei lavori di Prado (2003) e Broucke (2003). In questo caso, i coefficienti b_T e c_T (legati al corpo perturbante) delle Eqq. (2.35) e (2.36) divengono:

$$b_T = \frac{m'n'^2}{4R_p^2 \mu} (1-e^2)^{3/2} [3e^2 + 2 - 5e^2 \cos(2\omega)]$$

$$c_T = \frac{m'n'^2}{2R_p^2 \mu} (1-e^2)^{3/2} \left\{ 4 - 5 \sin^2 i + e^2 + 5(\sin^2 i - e^2) \cos(2\omega) + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{3} [(3e^2 + 7)(3 \sin^2 i - 2) - 15(1+e^2) \sin^2 i \cos(2\omega)] \right\}$$

Fissati e ed ω , e le caratteristiche di ripetitività (m e R) e sincronismo con il Sole (n), i possibili valori del semiasse soluzione della corrispondente P.M.S.S.O. sono forniti dalla soluzione dell'equazione [Cinelli et al, 2015]:

$$s_1 a^{15} + s_2 a^{13.5} + s_3 a^{12} + s_4 a^{10} + s_5 a^{8.5} + s_6 a^7 + s_7 a^5 + s_8 a^{3.5} + s_9 a^2 + s_{10} = 0 \quad (2.38)$$

i cui coefficienti s_i sono:

$$s_1 = \frac{9R_p^2 b_T^2 m' n'^2}{8(1-e^2)^{3/2}} \left\{ [5 \cos(2\omega) - 1] - \left[\frac{5 \cos(2\omega)(e^2 + 1) + 3e^2 + 1/3}{2\sqrt{1-e^2}} \right] \right\}$$

$$s_2 = \frac{3R_p^2 b_T^2 \sqrt{\mu}}{(1-e^2)^2} \frac{R}{m} (\hat{\Omega} - \omega_p)$$

$$s_3 = \frac{3R_p^2 b_T^2 \mu}{(1-e^2)^2} + \frac{\hat{\Omega}^2 m' n'^2}{2R_p^2 \mu} (1-e^2)^{3/2} \left\{ 10 \sin^2 \omega - \sqrt{1-e^2} [5(e^2 + 1)(\sin^2 \omega - 1) + 3e^2 + 7] \right\}$$

$$s_4 = \frac{9J_2 R_p^2 b_T}{4(1-e^2)^{5/2}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{m' n'^2}{(1-e^2)^{13/2}} \left[2(1-e^2)(5 \cos^2 \omega - 3) + \sqrt{1-e^2} (e^2 - 5 \cos^2 \omega (e^2 + 1) + 7/3) \right] - \\ & - \frac{R_p^2 b_T \mu}{(1-e^2)^{13/2}} [1 + (1-e^2)^5] \end{aligned} \right\}$$

$$s_5 = \frac{6J_2 R_p^2 b_T \sqrt{\mu}}{(1-e^2)^2} \frac{R}{m} (\hat{\Omega} - \omega_p) = \frac{2J_2}{b_T} s_2$$

$$s_6 = \frac{J_2}{(1-e^2)^2} \left\{ \hat{\Omega}^2 \frac{[5(1-e^2)^5 + 3]}{(1-e^2)^3} + 6R_p^2 b_T \mu \right\}$$

$$s_7 = \frac{9J_2^2 R_p^2}{2(1-e^2)^{5/2}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{m' n'^2}{4} \left[2(1-e^2)(5 \cos^2 \omega - 3) + \sqrt{1-e^2} (e^2 - 5 \cos^2 \omega (e^2 + 1) + 7/3) \right] - \\ & - \frac{R_p^2 b_T \mu}{(1-e^2)^{13/2}} [1 + (1-e^2)^5] \end{aligned} \right\}$$

$$s_8 = \frac{3J_2^2 R_p^2 \sqrt{\mu}}{(1-e^2)^2} \frac{R}{m} (\widehat{\Omega} - \omega_p) = \frac{J_2^2}{b_T^2} s_2$$

$$s_9 = \frac{3J_2^2 R_p^2 \mu}{(1-e^2)^2}$$

$$s_{10} = -9J_2^3 R_p^4 \mu \left[\frac{1+(1-e^2)^5}{4(1-e^2)^9} \right]$$

con:

$$\widehat{\Omega} = \frac{1}{(1 \pm n)} [\omega_p \pm n \cdot \dot{\Omega}_s]$$

Tra le possibili soluzioni, si devono selezionare le sole che risultano fisicamente accettabili. L'inclinazione soluzione può essere ricavata sostituendo il semiasse appena individuato nella:

$$\cos i = \frac{\widehat{\Omega}}{-\frac{3\sqrt{\mu}R_p^2}{2(1-e^2)^2}(J_2 + b_T a^5)} a^{7/2} \quad (2.39)$$

Le Eqq. (2.38) e (2.39) permettono di individuare univocamente la coppia semiasse/inclinazione, purché fisicamente ammissibile, soluzione della P.M.S.S.O. di caratteristiche scelte; le stesse equazioni possono essere utilizzare per individuare le soluzioni di P.S.S.O.: infatti, ponendo la condizione $n \rightarrow \infty$, risulta $\widehat{\Omega} = \dot{\Omega}_s$; sarà quindi sufficiente effettuare questa sostituzione nei coefficienti s_i di Eq. (2.38) e in Eq. (2.39).

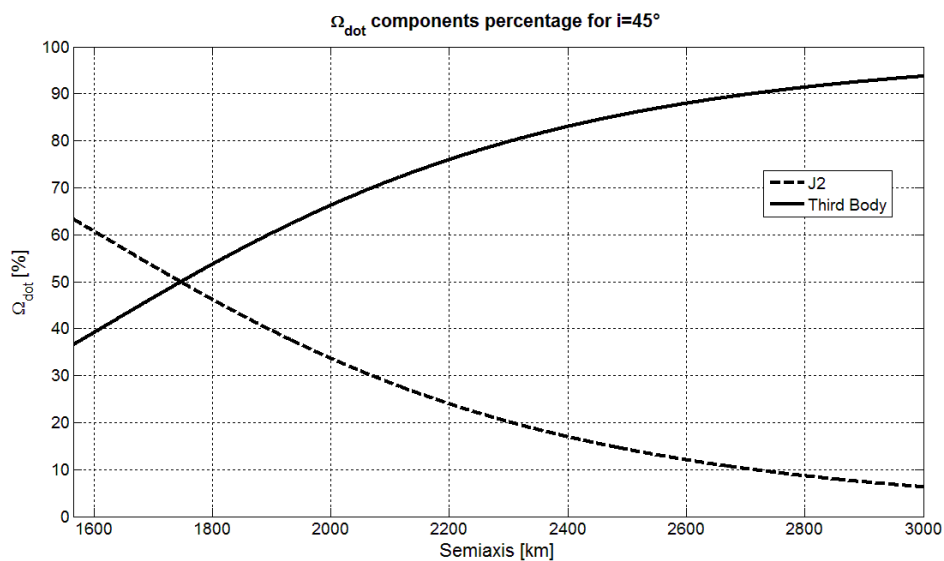
2.3.2.1 RISULTATI ANALITICI E RISULTATI NUMERICI

Nel caso terrestre, le P.S.S.O. e le P.M.S.S.O. sono caratteristiche delle L.E.O., dove il forte campo perturbativo sulla rotazione della linea dei nodi consente la condizione di eliosincronismo e permette valori di n molto contenuti

(inferiori a 50 alle medie latitudini). A queste quote, risulta dominante l'armonica J_2 , ed è possibile porre con buona approssimazione $\dot{\Omega} \cong \dot{\Omega}_{J_2}$. Per questa ragione, il confronto tra soluzioni analitiche e numeriche è stato eseguito assumendo come corpo primario il satellite naturale gioviano Europa. Per esso, e per tutti i principali satelliti naturali del Sistema Solare, il campo perturbativo dovuto all'asimmetria del geopotenziale è dello stesso ordine di grandezza dei disturbi dovuti alla presenza di terzi corpi, su tutti i pianeti attorno a cui queste lune orbitano [Ortore et al., 2014].

In particolare, su Europa la componente perturbativa dovuta alla presenza di Giove ha ordine di grandezza equiparabile a quella di J_2 anche alle basse quote ($R_p = 1565$ km), ed è predominante al di sopra dei 500 km di quota (vedi Figg. 2.5a-b). In tali condizioni, risolvere analiticamente le condizioni di periodicità ed eliosincronismo trascurando gli effetti perturbativi di terzo corpo indurrebbe a errori non accettabili sulla soluzione ottenuta.

Per l'analisi comparativa è stato utilizzato il modello planetario Anderson 1998 [Anderson et al., 1998] i cui principali parametri sono riassunti in Tab. 2.5, assieme agli altri dati planetari.



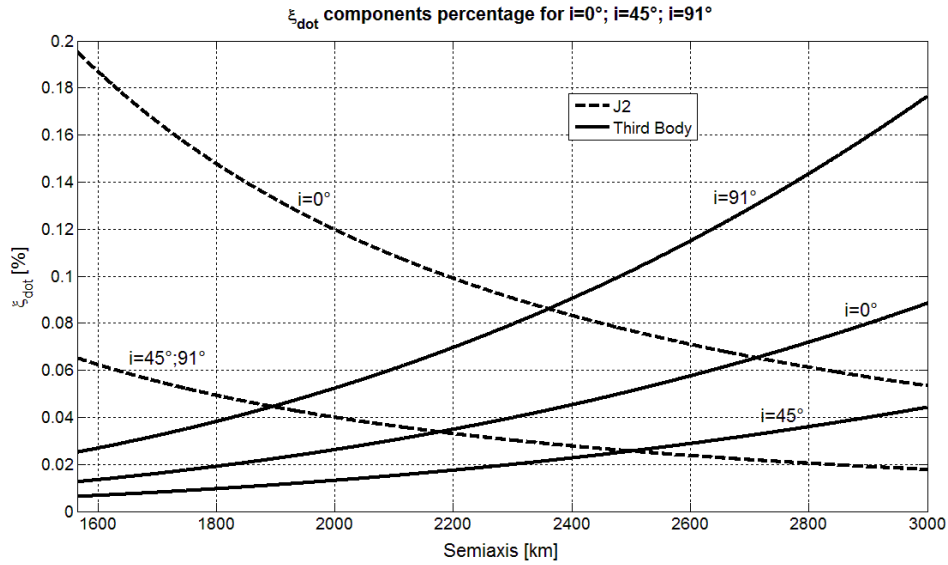


Figura 2.1: Ripartizione percentuale in funzione della quota degli effetti perturbativi su RAAN (a) e argomento di latitudine (b) dovuti agli effetti di terzo corpo (Giove) e allo schiacciamento polare (armonica J_2) su Europa

| R_p [km] | μ_p [km ³ /s ²] | J_2 | J_3 | J_4 | C_{22} | S_{22} | ω_p [rad/s] | Ω_{SUN} [rad/s] |
|---------------|---|----------|-------|-------|----------|----------|-----------------------|---------------------------|
| 1565.00 | 3202.72 | 4.355e-4 | 0 | 0 | 131.0e-6 | -11.9e-6 | 2.0478e-5 | 1.6785e-8 |

Tabella 2.5: Modello planetario Anderson 1998 [Anderson et al., 1998]

Nelle Tabb. 2.6 e 2.7 sono riassunti i risultati analitici e numerici, espressi come coppie semiasse/inclinazione, rispettivamente per P.S.S.O. e P.M.S.S.O.. Le soluzioni analitiche sono state ottenute risolvendo le Eqq. (2.38) e (2.39); mentre per quelle numeriche è stata utilizzata la procedura descritta nel successivo Par. 2.3.1.2, tenendo conto delle efemeridi JUP 230 per il moto di Giove e dei suoi satelliti. Il confronto ha evidenziato un deciso incremento degli errori sull'inclinazione per le P.S.S.O. dovuto, in larga parte, all'ipotesi approssimativa $i_{III} = 0^\circ$, i cui massimi effetti negativi sulla stima di $\dot{\Omega}$ si registrano per inclinazione quasi-polare, le uniche per cui è possibile l'eliosincronismo. Prestazioni migliori si ottengono qualora la condizione di eliosincronismo sia verificata a inclinazioni non-polari, come nel caso di Ganimede [Ortore et al, 2015]. Per le P.M.S.S.O. alle medie inclinazioni, gli errori sono notevolmente contenuti e la soluzione analitica ben approssima quella numerica.

| PSSO | | | | | | | |
|---------------------------------|----------|----------------------|--------------|---------------------|--------------|-------------------|------------------|
| Caratteristiche di ripetitività | | Soluzioni analitiche | | Soluzioni numeriche | | Errore assoluto | |
| <i>m</i> | <i>R</i> | <i>a [km]</i> | <i>i [°]</i> | <i>a [km]</i> | <i>i [°]</i> | $ \Delta a [km]$ | $ \Delta i [°]$ |
| 1 | 40 | 1684.38 | 91.14 | 1686.61 | 92.91 | 2.23 | 1.77 |
| 1 | 39 | 1713.09 | 91.16 | 1715.24 | 92.93 | 2.15 | 1.77 |
| 1 | 36 | 1807.12 | 91.22 | 1809.46 | 92.97 | 2.34 | 1.75 |
| 2 | 81 | 1670.47 | 91.13 | 1672.65 | 92.89 | 2.18 | 1.76 |
| 2 | 69 | 1859.21 | 91.25 | 1861.57 | 93.00 | 2.36 | 1.75 |
| 3 | 112 | 1763.77 | 91.20 | 1765.97 | 92.95 | 2.20 | 1.75 |
| 4 | 143 | 1815.55 | 91.23 | 1817.89 | 92.98 | 2.34 | 1.75 |
| 5 | 204 | 1662.26 | 91.12 | 1664.35 | 92.90 | 2.09 | 1.78 |
| 10 | 361 | 1803.78 | 91.21 | 1806.23 | 92.96 | 2.45 | 1.75 |

Tabella 2.6: Confronto tra soluzioni analitiche e soluzioni numeriche per le PSSO su Europa

| PMSSO | | | | | | | | |
|---------------------------------|----------|----------|----------------------|--------------|---------------------|--------------|-------------------|------------------|
| Caratteristiche di ripetitività | | | Soluzioni analitiche | | Soluzioni numeriche | | Errore assoluto | |
| <i>n</i> | <i>m</i> | <i>R</i> | <i>a [km]</i> | <i>i [°]</i> | <i>a [km]</i> | <i>i [°]</i> | $ \Delta a [km]$ | $ \Delta i [°]$ |
| 32 | 1 | 39 | 1678.32 | 40.79 | 1680.40 | 40.48 | 2.08 | 0.31 |
| 34 | 1 | 37 | 1740.37 | 42.27 | 1742.48 | 42.00 | 2.11 | 0.27 |
| 36 | 1 | 38 | 1711.48 | 46.84 | 1713.65 | 46.63 | 2.17 | 0.21 |
| 40 | 1 | 40 | 1656.87 | 53.99 | 1658.98 | 54.68 | 2.11 | 0.69 |
| 32 | 2 | 79 | 1664.12 | 41.50 | 1666.22 | 41.20 | 2.10 | 0.30 |
| 36 | 2 | 75 | 1726.67 | 46.31 | 1728.86 | 46.47 | 2.19 | 0.16 |
| 38 | 2 | 77 | 1698.23 | 50.19 | 1700.36 | 50.72 | 2.13 | 0.53 |
| 33 | 3 | 112 | 1728.99 | 40.67 | 1731.16 | 40.36 | 2.17 | 0.31 |
| 36 | 3 | 115 | 1701.54 | 47.20 | 1703.71 | 47.44 | 2.17 | 0.24 |
| 39 | 3 | 118 | 1674.86 | 52.24 | 1677.00 | 52.84 | 2.14 | 0.60 |

Tabella 2.7: Confronto tra soluzioni analitiche e soluzioni numeriche per le PMSSO su Europa

2.4 FATTORI CORRETTIVI

Le tabelle proposte mostrano gli errori, seppur contenuti, da cui sono affette le soluzioni analitiche; essi sono in parte dovuti alle approssimazioni poste nelle descrizioni degli effetti perturbativi di cui si tiene conto e in parte alle perturbazioni trascurate (es. le armoniche gravitazionali superiori a J_4). L'errore sul semiasse ($|\Delta a|$) è principalmente indice di un errore sulla condizione di periodicità, mentre quello- dove presente- sull'inclinazione ($|\Delta i|$) è indice di un errore sulla condizione di sincronismo con il Sole.

Come largamente discusso, piccoli errori sulla condizione di periodicità, quindi sulla stima di q associata a una determinata coppia semiasse/inclinazione, inducono effetti rilevanti sulla distribuzione delle tracce al suolo e, conseguentemente, sulle prestazioni della missione. Per tale ragione, quelle ottenute analiticamente devono considerarsi come delle soluzioni di prima approssimazione, da correggere stimandone gli opportuni valori di Δa e, limitatamente alle orbite eliosincrone e multi-sincrone con il sole, Δi .

Al riguardo, presentiamo una possibile procedura volta all'affinamento delle soluzioni analitiche. Nel caso di P.O., essa è riassumibile nei seguenti punti:

1. Scelte le caratteristiche di periodicità e tutti gli elementi classici ad eccezione del semiasse maggiore, una soluzione analitica di prima approssimazione è ricavata mediante l'Eq. (2.37). Ad essa sono associati dei valori "nominali" di giorno nodale (Dn_q) e periodo nodale (Tn_q), ovvero quei valori che consentono di ottenere le caratteristiche di ripetitività prescelte;
2. L'orbita soluzione è propagata numericamente e sono stimate le variazioni temporali $\dot{\Omega}$, $\dot{\omega}$ e \dot{M} , che permettono di computare

numericamente il periodo nodale (Tn_{NUM}), e quindi di stimare l'errore (ΔTn) della soluzione analitica rispetto a questo parametro:

$$\Delta Tn = Tn_q - Tn_{NUM} \quad (2.40)$$

3. Ipotizzando che la differenza tra il periodo nodale dell'orbita in grado di garantire esattamente il numero di orbite/giorno scelto (q) e la soluzione analitica possa essere identificata con quella tra i periodi orbitali ($T = 2\pi\sqrt{a^3 / \mu_p}$) delle due orbite, la correzione Δa da apportare alla soluzione di prima approssimazione può essere ricavata risolvendo l'equazione:

$$\Delta T_n \cong 2\pi \left(\sqrt{\frac{(a + \Delta a)^3}{\mu_p}} - \sqrt{\frac{a^3}{\mu_p}} \right) \quad (2.41)$$

con a semiasse maggiore di prima approssimazione;

4. la soluzione ottenuta sommando il Δa , ricavato risolvendo l'Eq. (2.41), ad a deve considerarsi la nuova soluzione di prima approssimazione ($= a + \Delta a$), e i punti 2. e 3. possono essere ripetuti iterativamente fin quando ΔTn non sia inferiore ad un valore di soglia opportunamente scelto in funzione della quota dell'orbita (del numero di orbite/giorno nodale), e tale da non produrre effetti eccessivamente negativi sulla distribuzione delle tracce al suolo. Maggiore sarà q minore dovrà essere il ΔTn di soglia.

Per affinare le soluzioni di P.S.S.O. e P.M.S.S.O. ottenute con le Eqq. (2.38) e (2.39), dopo il punto 3., deve essere corretto anche l'errore sulla condizione di sincronismo (o multi-sincronismo) con il Sole, quindi sulla rotazione della linea dei nodi. In questo caso, la correzione si esegue sull'inclinazione, imponendo un Δi rispetto alla soluzione di prima approssimazione. Una stima di Δi è possibile dalla differenza ($\Delta \dot{\Omega}$) tra la rotazione della linea dei nodi che permette la particolare condizione di sincronismo con il Sole, cioè del valore

atteso ($\dot{\Omega}_{ATT}$), e quello valutato numericamente ($\dot{\Omega}_{NUM}$): $\Delta\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{ATT} - \dot{\Omega}_{NUM}$.

Una buona approssimazione di Δi si ricava risolvendo l'equazione:

$$\Delta\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{ATT} - \dot{\Omega}_{NUM} \cong -\frac{3\sqrt{\mu_p} R_p^2}{2(1-e^2)^2} \left(\frac{J_2}{a^{3.5}} + \frac{b_{22} + b_4}{a^{5.5}} + b_T a^{1.5} \right) [\cos(i + \Delta i) - \cos i]$$

(2.42)

Anche in questo caso è necessario procedere iterativamente, imponendo successive correzioni Δa e Δi , fin quando ΔTn e $\Delta\dot{\Omega}$ non risultino al di sotto dei rispettiva valori di soglia opportunamente scelti.

RELAZIONI COMPATTE PER IL DISEGNO DI COSTELLAZIONI

Nell'ambito del disegno di costellazioni basato sull'analisi delle tracce a terra dei satelliti, sono proposte nuove relazioni compatte che permettono di ricostruire il grigliato della costellazione e di determinare le caratteristiche dei satelliti, in termini di fase in anomalia media e RAAN rispetto ad un satellite di riferimento, in grado di offrire le opportune distanze tra le tracce al suolo dei singoli satelliti e precisi valori dell'intervallo di rivisitazione su una determinata regione. Il metodo si basa sull'analisi della disposizione dei nodi ascendenti per un satellite posto su un'orbita periodica di caratteristiche di ripetitività (m e R) note.

Grazie alla loro semplicità, le equazioni presentate possono essere rapidamente implementate su codici di programmazione dedicati al disegno di costellazioni.

Sono analizzati tre distinte casistiche: la disposizione dei nodi ascendenti per un singolo satellite, per una costellazione formata da satelliti posti su un unico piano orbitale e il caso generale delle costellazioni a più piani orbitali. Partendo dalle relazioni presentate, sono ottenute le condizioni che permettono di massimizzare due fondamentali aspetti dell'osservazione: la frequenza di rivisitazione su una stessa regione e la distanza tra le tracce al suolo, minimizzando la quale, è possibile ottenere osservazioni alla massima risoluzione consentita dalla quota del satellite. Inoltre, è analizzato il caso particolare delle costellazioni omogenee.

Infine, sono riportate equazioni che permettono di ricostruire per intero la traccia al suolo in funzione del tempo, in termini di latitudine e longitudine, sia per orbita ellittica che circolare periodica.

Gli esempi grafici riportati in questo capitolo, sono stati realizzati mediante un propagatore orbitale appositamente realizzato in ambiente MATLAB. Parte dei codici scritti è stata riportata in *Appendice A*.

3.1 RELAZIONI COMPATTE

L'utilizzo delle relazioni proposte presuppone la conoscenza delle caratteristiche di ripetitività di una comune orbita di riferimento della costellazione. Come visto nel Par. 1.3.4, noto q è possibile calcolare il parametro $S_i = 2\pi/q$ in grado di esprimere la distanza all'equatore tra due nodi successivi (in ordine temporale). Negli esempi illustrativi che saranno in seguito proposti, è stata considerata un'orbita di riferimento periodica, con $q = 14 + 2/3$, $a = 7045.687$ km, $i = 99^\circ$ ed $e = 0$, la scelta di orbita circolare è preferibile, sebbene le relazioni proposte non perdano di validità per orbita ellittica; in Fig. 3.1 è riportata la traccia al suolo dell'orbita di riferimento. Per questa orbita $S_i = 24.55^\circ$ e $S_m = 8.18^\circ$ inoltre, risultando $R = 44$ pari ed $m = 3$ dispari, i nodi discendenti si dispongono, al termine del periodo di ripetitività, a metà tra due nodi ascendenti (cfr. Par. 1.3.4), dimezzando la minima distanza tra i nodi fino al valore $S_{m_MIN} = 4.09^\circ$.

Convenzionalmente, è stato scelto come positivo lo spostamento dei nodi verso est, e quello negativo verso ovest; in tal modo, in virtù della rotazione antioraria della Terra attorno al proprio asse, ogni nodo ascendente successivo si pone a una distanza in longitudine pari a $-S_i$ rispetto al precedente.

3.1.1 SATELLITE SINGOLO

Nel caso di un singolo satellite, indicando con λ_0 la longitudine geografica iniziale del nodo ascendente per l'orbita del satellite di riferimento (misurata al tempo t_0), la longitudine di ogni successivo nodo ascendente (separati da un intervallo temporale pari a periodo nodale T_n) può essere espresso, in un intervallo $[180^\circ \text{ ovest}; 180^\circ \text{ est}]$, dall'equazione:

$$\lambda_t = \lambda_0 - S_t[\text{ceil}(x) - q \text{int}(t)] \quad (3.1)$$

dove:

- t è il tempo normalizzato rispetto al giorno nodale (tempo / D_n);
- λ_t è la longitudine del nodo ascendente successivo più prossimo al tempo t ;
- $x = q t$;
- $\text{ceil}(x)$ è una funzione in grado di fornire l'intero più piccolo pari o maggiore di x ;
- $\text{int}(t)$ è una funzione che restituisce la parte intera di t ;

l'Eq. (3.1) consente di calcolare la posizione del nodo ascendente successivo più prossimo al tempo t ; nel caso in cui t sia un multiplo intero del periodo nodale normalizzato rispetto al giorno nodale- ovvero se è un multiplo intero di $1/q$ - λ_t coincide con la longitudine reale del satellite. In Fig. (3.2) sono riportate graficamente le longitudini di passaggio al nodo ascendente durante il periodo di ripetitività pari ad $m=3$ giorni nodali per l'orbita di riferimento, avendo convenzionalmente posto la longitudine del primo nodo sul meridiano di Greenwich ($\lambda_0 = 0^\circ$).

Calcolata la longitudine del nodo ascendente di ogni rivoluzione, per individuare quella del discendente, sarà sufficiente sommare la quantità $(\pi + S_t / 2)$. Affinché, al termine del periodo di ripetitività, nodi ascendenti e discendenti coincidano, tale quantità deve essere un intero di S_m ; come visto, ciò si verifica solo se R ed m sono entrambi dispari. Viceversa, $(\pi + S_t / 2)$ è un multiplo non intero di S_m (con parte decimale pari a 5) ed i nodi discendenti si dispongono a metà tra due ascendenti.

Considerando i soli valori interi del tempo t ($t = d$, multiplo del giorno nodale), dall'Eq. (3.1) è possibile giungere alla:

$$\lambda_d = \lambda_0 - S_i[\text{ceil}(x) - x] \quad d = 0, \dots, m \quad (3.2)$$

dove:

- λ_d è la longitudine del primo nodo successivo al tempo d ;
- $x = q \cdot d$

L'Eq. (3.2) permette di calcolare la longitudine del primo nodo di un d -esimo giorno nodale. Essi sono posti nell'intervallo $[\lambda_0; \lambda_0 - S_i]$; poiché, in m giorni nodali, all'interno di un intervallo S_i si dispongono $(m-1)$ nodi ascendenti, tra loro equi-spaziati di una distanza S_m . L'ordine con cui questi nodi sono progressivamente occupati è regolato dal valore di k legato alla parte frazionaria di q ($N_f = k/m$) [Hopkins, 1988].

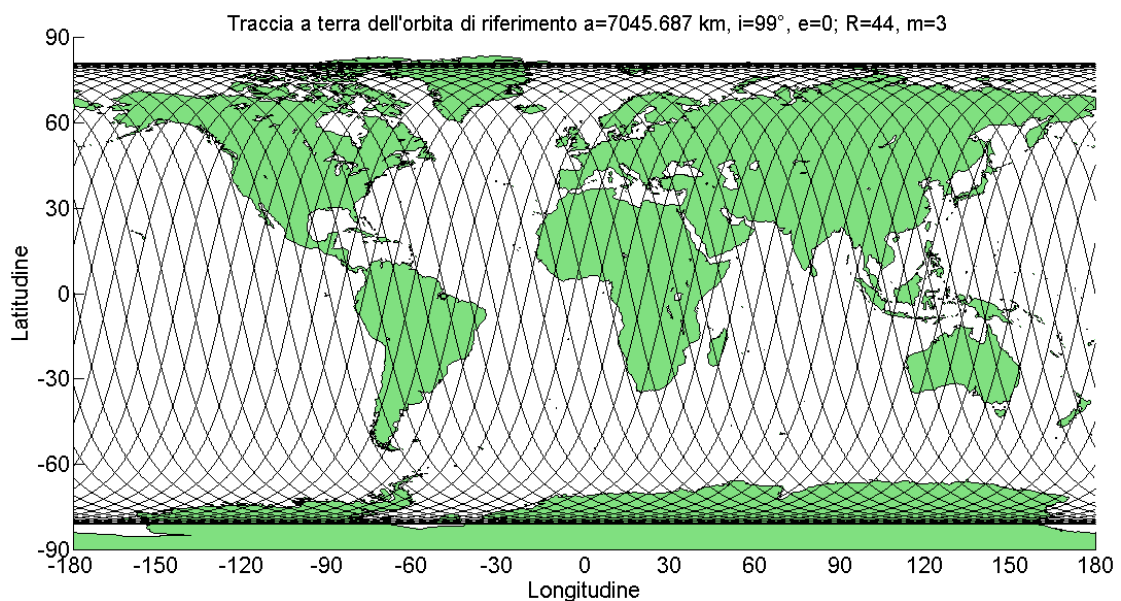


Figura 3.1: Traccia al suolo dell'orbita di riferimento ($a=7045.687$ km, $i=99^\circ$; $q=14+2/3$, $R=$, $m=3$)

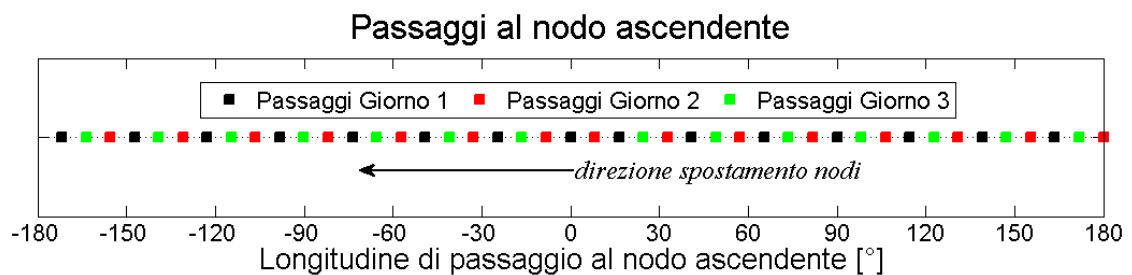


Figura 3.2: Longitudine dei nodi ascendenti dell'orbita di riferimento ($\lambda_0=0^\circ$)

3.1.2 SATELLITI LUNGO LA STESSA ORBITA

Per una costellazione di N satelliti posti sulla stessa orbita sfasati tra loro in anomalia media, una relazione simile alla (3.1), che permetta di calcolare la longitudine ($\lambda_{i,t}$) del primo nodo successivo al tempo t per ogni i -esimo satellite della costellazione, può essere scritta nella forma:

$$\lambda_{i,t} = \lambda_0 - S_i[\text{ceil}(x) - q \text{int}(t) - y] \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3)$$

dove:

- λ_0 è la longitudine iniziale del *satellite 1* (satellite di riferimento);
- $x = q t + y$;
- $y = \frac{\Delta M_i}{2\pi}$;
- ΔM_i la fase in anomalia media dell' i -esimo satellite rispetto al *satellite 1*.

Una costellazione di questo tipo- detta a *singolo piano*- può essere utilizzata per aumentare la risoluzione delle osservazioni (riducendo la distanza tra le tracce al suolo) o per aumentare la frequenza di rivisitazione. Per quest'ultima, come si vedrà in seguito (Par. 3.3.1), l'intervallo minimo tra due successive osservazioni è pari a un giorno nodale.

Prendendo in considerazione i soli valori interi, multipli del giorno nodale, per il tempo t , la (3.3) diviene:

$$\lambda_{i,d} = \lambda_0 - S_i[\text{ceil}(x) - x] \quad i = 1, \dots, N, \quad d = 0, \dots, m \quad (3.4)$$

dove:

- $\lambda_{i,d}$ è la longitudine del primo nodo di un i -esimo satellite in un d -esimo giorno nodale;
- $x = q d + y$.

Anche le longitudini calcolate per mezzo dell'Eq. (3.4) si collocano tutte nell'intervallo $[\lambda_0; \lambda_0 - S_t]$.

Ponendo $\Delta M_i = 0$, si ha $y = 0$ e le Eqq. (3.3) e (3.4) si riconducono alle (3.1) e (3.2) del singolo satellite.

3.1.3 SATELLITI SU PIÙ PIANI ORBITALI

Nel caso più generale di costellazioni di N satelliti posti su P piani orbitali sfasati tra loro in RAAN, contenenti ciascuno N_p satelliti, la relazione che permette di calcolare la longitudine ($\lambda_{p,i,t}$) del primo nodo successivo al tempo t per un i -esimo satellite di un p -esimo piano della costellazione, può essere scritta nella forma:

$$\lambda_{p,i,t} = \lambda_0 - S_t [\text{ceil}(x) - q \text{int}(t) - y] \quad p = 1, \dots, P, \quad i = 1, \dots, N_p \quad (3.5)$$

dove:

- $x = q t + \frac{\Delta M_{i,p}}{2\pi}$;
- $\Delta M_{i,p}$ è la fase in anomalia media dell' i -esimo satellite del p -esimo piano rispetto al satellite 1 del piano 1 (satellite di riferimento);
- $y = \frac{\Delta M_{i,p}}{2\pi} + \frac{\Delta \Omega_p}{S_t}$;
- $\Delta \Omega_p$ è la fase in longitudine tra il p -esimo e il piano 1 (di riferimento).

Un'equazione simile alle (3.2) e (3.4) può essere scritta per valori interi di t :

$$\lambda_{p,i,d} = \lambda_0 - S_t \left[\text{ceil}(x) - x - \frac{\Delta \Omega_p}{S_t} \right] \quad p = 1, \dots, P, \quad i = 1, \dots, N_p, \quad d = 0, \dots, m \quad (3.6)$$

dove:

- $\lambda_{p,i,d}$ è la longitudine del primo nodo successivo al tempo d dell' i -esimo satellite di un p -esimo piano;

$$x = q d + \frac{\Delta M_{i,p}}{2\pi}.$$

Ponendo $\Delta\Omega_p = 0$ si torna al caso del singolo piano; ponendo inoltre $\Delta M_{i,p} = 0$, le equazioni si riducono a quelle del singolo satellite.

Le costellazioni su più piani orbitali, sono le uniche che consentono di ridurre l'intervallo di rivisitazione su una stessa regione al di sotto del giorno nodale.

3.2 RIDUZIONE DELLA DISTANZA TRA LE TRACCE AL SUOLO

Costellazioni a singolo piano o multi-piano possono essere utilizzate per ridurre la massima distanza tra le tracce al suolo fino a S_m / N , valore che può essere ulteriormente dimezzato, tenendo conto anche della fase discendente del satellite lungo l'orbita, scegliendo m e R con diversa parità.

Affinché la massima distanza tra le tracce assuma tale valore minimo, il grigliato deve essere uniformemente distribuito, risultando le tracce equamente spaziate in longitudine, di un valore pari proprio a S_m / N .

3.2.1 SATELLITI LUNGO LA STESSA ORBITA

Per costellazioni con N satelliti su un unico piano orbitale, questa condizione può essere ottenuta scegliendo opportunamente la fase in anomalia media tra i satelliti della costellazione; quest'ultima può essere valutata mediante la relazione:

$$\Delta M_i = 2\pi \left(1 - \frac{I}{mN} - \frac{L}{m} \right) \quad I = 0, \dots, N-1, \quad L = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

Nell'Eq. (3.7), I e L sono due numeri interi. In particolare, ogni satellite è caratterizzato da un distinto valore di I diverso da quello degli altri satelliti (N satelliti, N diversi valori di I), mentre per L può essere arbitrariamente scelto per ciascun satellite. Questo perché, mentre il parametro I determina, in un generico intervallo S_i , la posizione delle tracce a terra, il parametro L è associato soltanto all'ordine con cui le tracce sono percorse. La (3.7) risulta in

grado di descrivere tutte le possibili configurazioni, per una costellazione di N satelliti, associate ad uno stesso reticolato uniforme delle tracce a terra.

Se il *satellite 1* è posto sull'orbita di riferimento della costellazione, e quindi al tempo $t=0$ ha una longitudine nota e fissata ($\lambda_{1,0} = \lambda_0$), per esso risultano $I=0$ e $L=m$ (quindi $\Delta M_i = 0$). Sotto questa ipotesi, considerando i possibili valori che possono essere assunti da I e L , il numero delle configurazioni (N_C) della costellazione in grado di dar luogo a un grigliato uniforme è pari a $N_C = m^{N-1}$. Se sul *satellite 1* non è posta alcuna condizione, le configurazioni sono $N_C = m^N$.

Per ricavare la (3.7) è possibile considerare la posizione del primo passaggio al nodo ascendente di un generico satellite, avente una fase ΔM_i rispetto al satellite di riferimento. Questo passaggio, posto a ovest rispetto alla longitudine iniziale (λ_0), si verifica ad una distanza in longitudine da questa pari a:

$$\Delta\lambda_i = S_i \left(1 - \frac{\Delta M_i}{2\pi} \right) \quad (3.8)$$

che coincide con la longitudine geografica nel caso in cui $\lambda_0 = 0$. Affinché il reticolato sia uniformemente spaziato, il passaggio deve necessariamente avvenire in una longitudine tra quelle fornite dalla:

$$\Delta\lambda_i = I \frac{S_m}{N} + L S_m \quad I=0, \dots, N-1, \quad L=1, \dots, m \quad (3.9)$$

Eguagliando le Eqq. (3.8) e (3.9), è possibile ricavare la (3.7).

Prendendo in esame l'orbita di riferimento e considerando una costellazione di $N=4$ satelliti, ponendo per il primo $\Delta M_1 = 0$, il numero di configurazioni in grado di offrire un reticolato equi-spaziato è $N_C = 3^{4-1} = 27$. La distanza tra le tracce, per ciascuna di queste configurazioni, è pari a $S_m / N = 2.0455^\circ$; mentre, la distanza dei nodi all'equatore, tenendo conto anche dei nodi discendenti, è pari a $S_m / 2N = 1.0228^\circ$. Le configurazioni corrispondono a tutte le

combinazioni ottenibili tra gli m valori di ΔM_i possibili per ciascun satellite (al variare di L). Per l'esempio proposto, in Tab. 3.1 sono riassunti i valori di ΔM_i possibili per ciascun satellite al fine di ottenere un reticolato equamente spaziato, ottenuti con l'Eq. (3.7). In particolare, la configurazione 0° , 90° , 180° , 270° , permette di avere una costellazione uniformemente sfasata lungo la stessa orbita.

A titolo esemplificativo, tra le 27 possibili sono state considerate due distinte configurazioni, le cui fasi in anomalia media sono riassunte in Tab. 3.2.

Nelle Figg. (3.3a) e (3.3b) sono proposte, rispettivamente, la traccia completa (in m giorni nodali) della *Configurazione 1*, ed un dettaglio della stessa sulla regione del Mar Mediterraneo.

| Satellite 2 | Satellite 3 | Satellite 4 |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\Delta M_2 = 210^\circ (I=1, L=1)$ | $\Delta M_3 = 180^\circ (I=2, L=1)$ | $\Delta M_4 = 150^\circ (I=3, L=1)$ |
| $\Delta M_2 = 90^\circ (I=1, L=2)$ | $\Delta M_3 = 60^\circ (I=2, L=2)$ | $\Delta M_4 = 30^\circ (I=3, L=2)$ |
| $\Delta M_2 = 330^\circ (I=1, L=3)$ | $\Delta M_3 = 300^\circ (I=2, L=3)$ | $\Delta M_4 = 270^\circ (I=3, L=3)$ |

Tabella 3.1: Fasi in anomalia media (ΔM_i) per avere un reticolato uniformemente spaziato con una costellazione di 3 satelliti un unico piano orbitale.

| Configurazione | ΔM_1 | ΔM_2 | ΔM_3 | ΔM_4 |
|-------------------------|----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| <i>Configurazione 1</i> | $0^\circ (I=0, L=m)$ | $90^\circ (I=1, L=2)$ | $180^\circ (I=2, L=1)$ | $270^\circ (I=3, L=3)$ |
| <i>Configurazione 2</i> | $0^\circ (I=0, L=m)$ | $90^\circ (I=1, L=2)$ | $60^\circ (I=2, L=2)$ | $30^\circ (I=3, L=2)$ |

Tabella 3.2: Due possibili configurazioni.

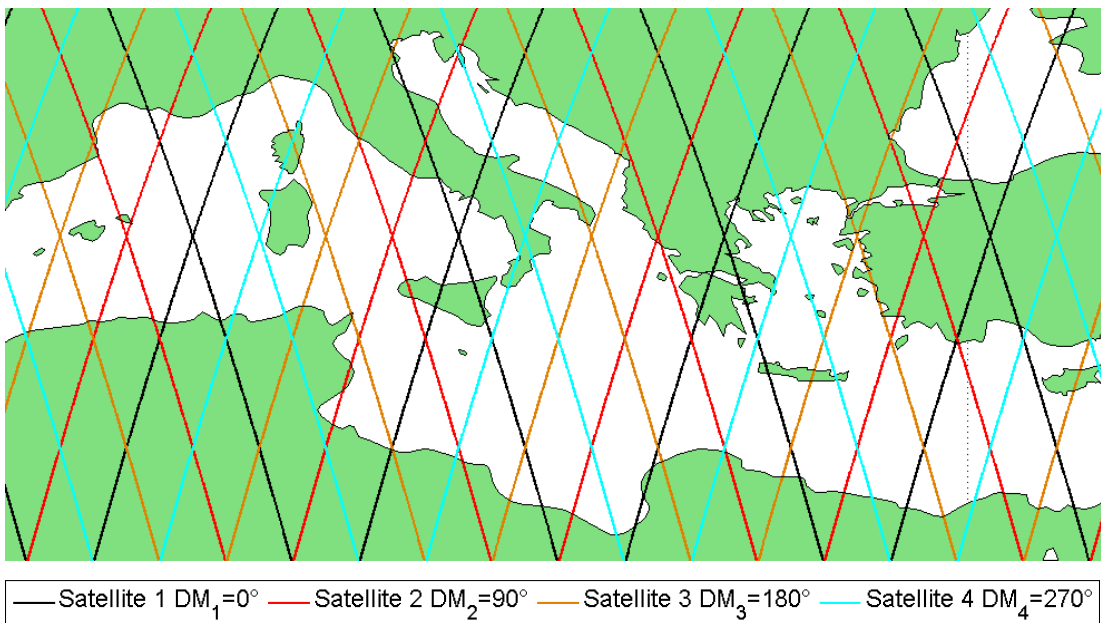
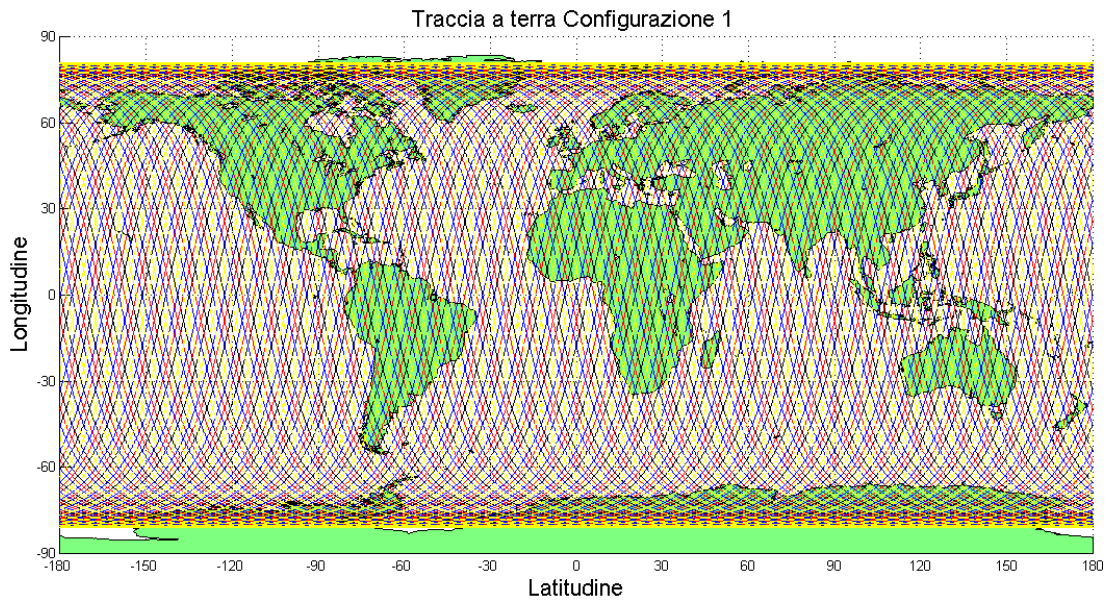


Figura 3.3: a) Traccia al suolo della "Configurazione 1" nell'intero periodo di ripetitività (3 giorni nodali); b) Dettaglio sulla regione del Mar Mediterraneo.

Nelle Figg.(3.4a) e (3.4b) è proposto un confronto nell'area del Mar Mediterraneo tra le tracce al suolo di *Configurazione 1* e *Configurazione 2*, limitatamente al primo giorno nodale del ciclo di periodicità. La comparazione evidenzia come le tracce delle due configurazioni, che dopo m giorni nodali descrivono lo stesso grigliato, quello di Fig. (3.3a), nel primo giorno nodale si dispongono diversamente, in virtù dei diversi valori delle fasi ΔM_i , scelti tra

quelli possibili, cioè dei diversi valori del parametro L che influenza soltanto l'ordine con cui le tracce si dispongono.

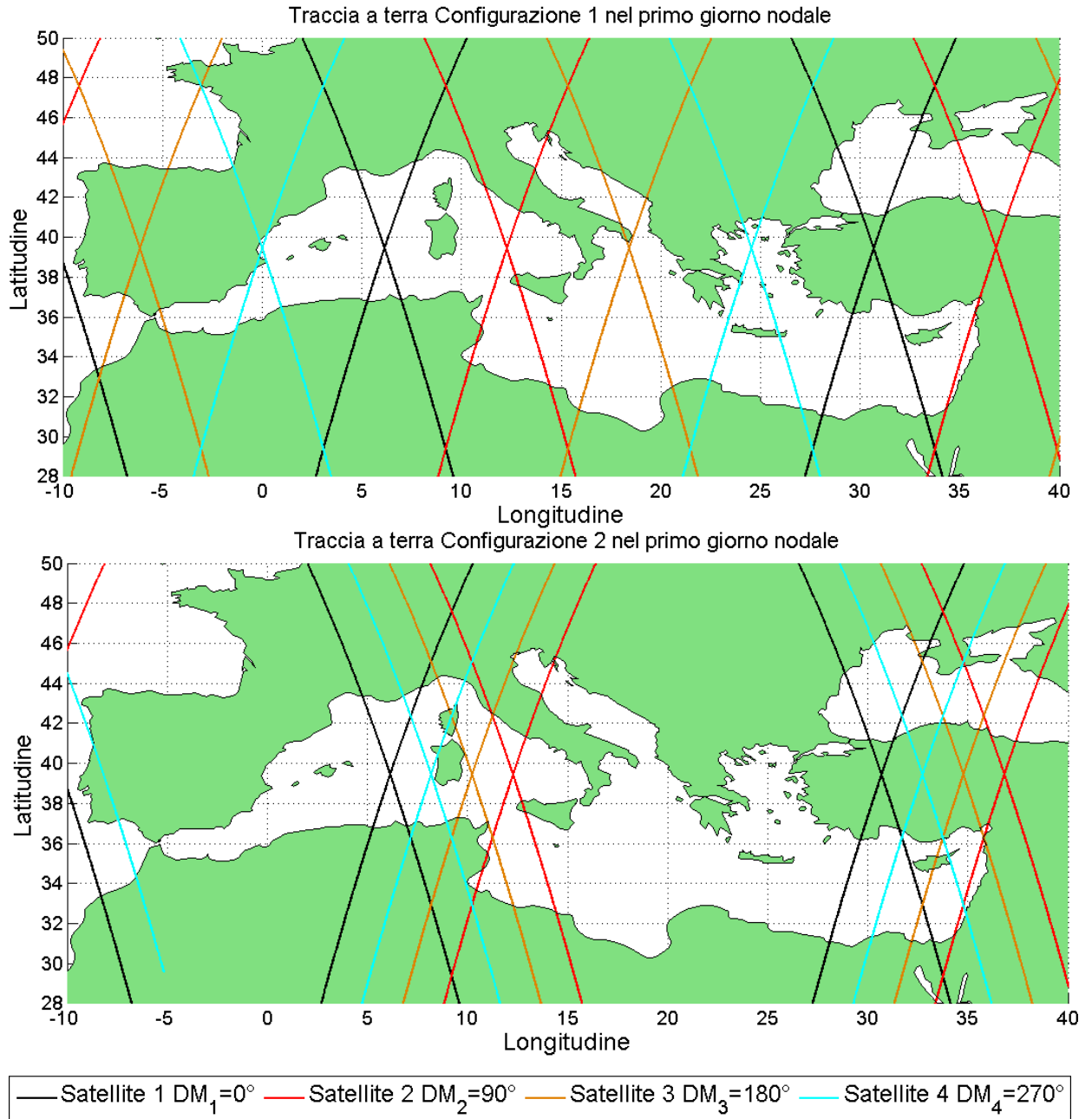


Figura 3.4: Confronto tra la traccia al suolo di "Configurazione 1" (a) e "Configurazione 2" (b) nel primo giorno nodale (dettaglio sulla regione del Mar Mediterraneo).

3.2.2 SATELLITI SU PIÙ PIANI ORBITALI

Nel caso di una costellazione di N satelliti su P piani orbitali, è possibile scrivere una relazione che, come la (3.7), permette di avere un reticolato equamente spaziato con una distanza tra le tracce pari a S_m / N :

$$\Delta M_{i,p} - q\Delta\Omega_p = 2\pi \left(1 - \frac{I}{mN} - \frac{L}{m} - J \right) \quad (3.10)$$

$$I = 0, \dots, N-1, \quad L = 1, \dots, m, \quad J = 0, \dots, R-1$$

L'Eq. (3.10) consente di ricavare una coppia di valori $\Delta M_{i,p}$ e $\Delta\Omega_p$ (rispettivamente fase in anomalia media e RAAN rispetto al satellite di riferimento) che garantisce l'equi-spaziatura tra le tracce. Uno dei due valori tra $\Delta M_{i,p}$ e $\Delta\Omega_p$ deve essere scelto arbitrariamente, mentre l'altro sarà ricavato risolvendo l'equazione, dopo aver introdotto gli opportuni valori dei tre parametri I , L e J . Come nel caso precedente, ogni satellite deve essere caratterizzato da un diverso valore di I , tra gli N possibili, mentre i parametri L e J possono essere scelti arbitrariamente negli intervalli indicati. In questo caso, affinché il satellite caratterizzato da $p=1$ e $i=1$ abbia al tempo $t=0$ longitudine pari a quella di riferimento ($\lambda_{1,1,0} = \lambda_0$), è necessario porre per esso $I=0$, $L=m$ e $J=0$. In questo modo, assegnata la fase $\Delta\Omega_p$ per ciascun piano, il numero di possibili valori di $\Delta M_{i,p}$ è pari a m , e il numero di configurazioni in grado di produrre un grigliato uniforme è $N_C = m^{N-1}$.

Come visto per il caso di satelliti su un unico piano orbitale, per ottenere l'Eq. (3.10), è possibile considerare il primo passaggio al nodo di un generico satellite, sfasato di $\Delta M_{i,p}$ e $\Delta\Omega_p$ rispetto al satellite di riferimento:

$$\Delta\lambda_{i,p} = S_t \left(1 - \frac{\Delta M_{i,p}}{2\pi} \right) + \Delta\Omega_p \quad (3.11)$$

Affinché il reticolato sia uniforme, esso dovrà essere posto in uno a scelta dei punti:

$$\Delta\lambda_{i,p} = I \frac{S_m}{N} + L S_m + J S_t \quad (3.12)$$

$$I = 0, \dots, N-1, \quad L = 1, \dots, m, \quad J = 0, \dots, R-1$$

Eguagliando le Eqq. (3.11) e (3.12), ricordando che $q = 2\pi/S_t$, si giunge infine alla (3.10).

Ad esempio, considerando ancora una volta l'orbita di riferimento dei precedenti esempi, con una costellazione di $N=12$ satelliti equamente distribuiti su $P=3$ piani ($N_p=4$), identificati da $\Delta\Omega_1=0^\circ$, $\Delta\Omega_2=120^\circ$, $\Delta\Omega_3=240^\circ$, e assumendo al tempo iniziale $\lambda_0=0^\circ$ per il satellite $p=1$ e $i=1$, il numero di configurazioni in grado di garantire che le tracce siano equamente distanziate di S_m/N è $3^{11}=177147$. Due possibili configurazioni sono riportate in Tab. 3.3.

| Satellite | p | i | $\Delta\Omega$ | ΔM | $\Delta\Omega$ | ΔM |
|-----------|---|---|----------------|------------|----------------|------------|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 2 | 0 | 110 | 0 | 230 |
| 3 | 1 | 3 | 0 | 220 | 0 | 220 |
| 4 | 1 | 4 | 0 | 90 | 0 | 90 |
| 5 | 2 | 1 | 120 | 120 | 120 | 120 |
| 6 | 2 | 2 | 120 | 350 | 120 | 230 |
| 7 | 2 | 3 | 120 | 100 | 120 | 100 |
| 8 | 2 | 4 | 120 | 90 | 120 | 210 |
| 9 | 3 | 1 | 240 | 120 | 240 | 240 |
| 10 | 3 | 2 | 240 | 110 | 240 | 110 |
| 11 | 3 | 3 | 240 | 100 | 240 | 340 |
| 12 | 3 | 4 | 240 | 330 | 240 | 330 |

Tabella 3.3: Due possibili configurazioni.

Tutte le configurazioni forniscono, al termine del ciclo (m giorni nodali) lo stesso reticolato. A risultati analoghi si può giungere anche scegliendo valori

inferiori o superiori del numero di piani (financo $P = N = 12$) o distribuendo non-uniformemente i satelliti su ciascun piano.

In conclusione, nella ricerca delle configurazioni in grado di garantire un grigliato uniforme, è possibile ottenere prestazioni analoghe sia preferendo una costellazione di satelliti posti su un solo piano orbitale, che scegliendo una costellazione a più piani, poiché la minima distanza possibile tra le tracce (S_m / N) è funzione esclusivamente del numero di satelliti che compongono la costellazione. La scelta di costellazioni multi-piano permette di avere tempistiche di passaggio sulla traccia di ogni satellite diverse rispetto al caso a singolo piano.

3.3 RIDUZIONE DELL'INTERVALLO DI RIVISITAZIONE

Diversamente, per quanto concerne la riduzione dell'intervallo di rivisitazione sulla stessa zona, le costellazioni multi-piano permettono di ottenere prestazioni non consentite dalla scelta di costellazioni a singolo piano. Per quest'ultime, come si vedrà, il minimo intervallo tra due osservazioni successive (Δt) di una stessa regione è pari a un giorno nodale, valore sotto il quale è possibile scendere solo con satelliti disposti su più piani orbitali.

Condizione in grado di garantire la riduzione della frequenza di rivisitazione è che almeno due satelliti, posti su orbite periodiche di uguali caratteristiche di ripetitività, descrivano, al termine del ciclo di osservazione (m giorni nodali), la stessa traccia al suolo, con un diverso ordine di percorrenza. In questo modo, i nodi di tutti i satelliti dedicati all'aumento della frequenza di rivisitazione, coincidono e, da ogni satellite aggiuntivo, non si ha alcun beneficio in merito alla riduzione della distanza tra le tracce, rispetto al caso di un singolo satellite.

Per tale ragione, è possibile affermare che la riduzione dell'intervallo di rivisitazione di una stessa regione (risoluzione temporale), è in contrapposizione alla riduzione della distanza tra le tracce (risoluzione spaziale); dunque, in caso di costellazioni con un numero elevato di satelliti, si

deve opportunamente scegliere quali dedicare all'una o all'altra finalità, in funzione delle specifiche della missione.

3.3.1 SATELLITI LUNGO LA STESSA ORBITA

Nel caso di satelliti lungo la stessa orbita, scelto λ_0 in modo che l'orbita di riferimento preveda un passaggio del punto sub-satellitare sulla regione per la quale si desidera aumentare la frequenza di rivisitazione, matematicamente, la condizione affinché un satellite della costellazione ripercorra la traccia al suolo dell'orbita di riferimento è che esista un tempo t appartenente all'intervallo $[0; m)$ per cui $\lambda_{i,t} = \lambda_0$. Ciò si verifica quando è nullo il termine tra parentesi quadre dell'Eq. (3.5), ovvero per valori della fase in anomalia media pari a:

$$\Delta M_i = 2\pi \left(1 - \frac{L}{m}\right) \quad L = 1, \dots, m \quad (3.13)$$

L'Eq. (3.13) evidenzia come siano soltanto m le possibili fasi in grado di soddisfare la condizione di ri-transito, tra cui il valore $\Delta M_i = 0$ (per $L = m$) convenzionalmente posto per il satellite di riferimento della costellazione. Utilizzando $N = m$ satelliti caratterizzati da ognuno dei possibili valori di ΔM_i ottenuti con la (3.13) si registra un transito su una stessa regione a intervalli regolari $\Delta t = m/N = 1$ giorni nodali; in questo caso, la costellazione risulta anche omogenea e i satelliti sono tra loro equi-sfasati in anomalia media del valore $2\pi/N = 2\pi/m$.

Più in generale, se si desidera avere un intervallo di rivisitazione costante su una stessa regione, il tempo minimo che può intercorrere tra due successivi passaggi è $\Delta t = lcm(N, m)/N$ giorni nodali [Ortore et al., 2012], avendo indicato con $lcm(N, m)$ il minimo comune multiplo tra N e m . Questa relazione evidenzia come l'intervallo minimo (costante) che intercorre tra due successive osservazioni è sempre un multiplo intero del giorno nodale. Inoltre, il valore minimo dell'intervallo di rivisitazione si ottiene nel caso, visto in precedenza, in cui si dispone di $N = m$ satelliti omogeneamente distribuiti; in

cui si ha $lcm(N, m) / N = 1$. Ne consegue che l'intervallo minimo di rivisitazione per costellazioni a singolo piano è pari a un giorno nodale, e che l'aggiunta di satelliti in eccedenza al valore $N = m$ non consentirebbe in alcun modo un aumento della frequenza di rivisitazione. Tale conclusione è di facile interpretazione se si tiene conto che utilizzare ciascuno dei valori forniti dall'Eq. (3.13) fa sì che il primo nodo ascendente di un i -esimo satellite coincida con uno degli m nodi dell'orbita di riferimento posti nell'intervallo $(-S_i; 0]$.

Prendendo in esame l'orbita di riferimento degli esempi precedenti, è stato possibile disegnare una costellazione di $N = m = 3$ satelliti equi-sfasati in anomalia media, con $\Delta M_1 = 0^\circ$, $\Delta M_2 = 120^\circ$, $\Delta M_3 = 240^\circ$. Nelle Figg. (3.4a-c) sono riportate le tracce al suolo dei tre satelliti in ciascuno dei tre giorni nodali costituenti il ciclo di osservazione. In Fig. (3.5a), in cui sono rappresentate le tracce nel primo giorno nodale, ovvero per t appartenenti all'intervallo $[0; q]$ (si ricorda che il tempo è normalizzato rispetto al periodo nodale), è stato evidenziato il punto sull'equatore di longitudine $\lambda_0 = 0^\circ$; dove il *satellite 1* (traccia nera) si trova al tempo $t = 0$. Nello stesso punto, il *satellite 2* (traccia rossa) si troverà al tempo $t = q$, cioè esattamente a un giorno nodale dal primo passaggio. Analogamente in Fig. (3.5b), per t appartenenti all'intervallo $[q; 2q]$, e Fig. (3.5c), per t appartenenti all'intervallo $[2q; R]$, si verificano rispettivamente i passaggi del *satellite 3* (traccia ciano), per $t = 2q$, e quindi di nuovo del *satellite 1* per $t = R$, tempo che segna la fine di un ciclo di ripetitività e l'inizio di un nuovo. Le figure evidenziano inoltre come, in ciascun giorno nodale, la somma delle tracce a terra dei diversi satelliti dia luogo al reticolato completo dell'orbita di riferimento (Fig. (3.1)).

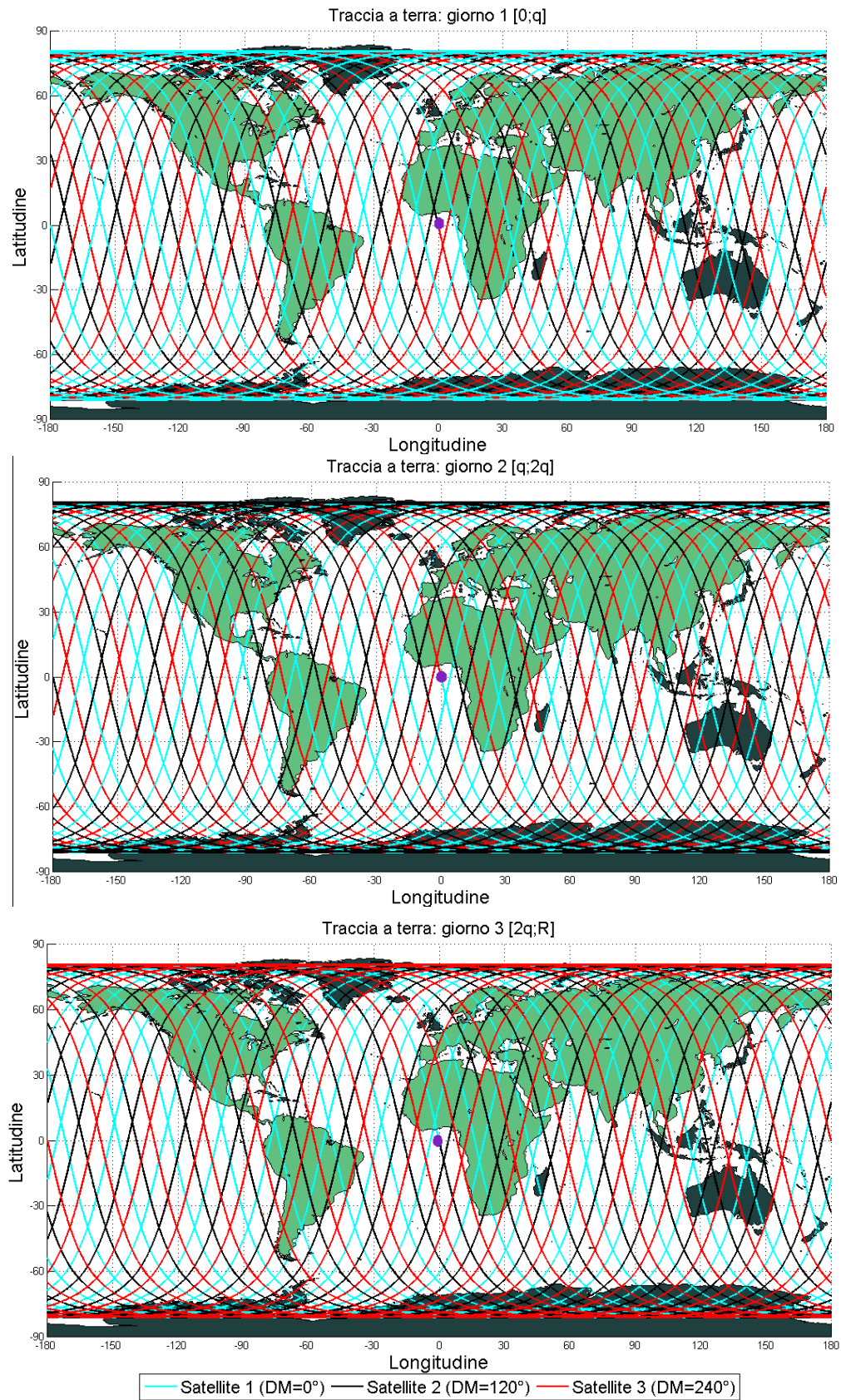


Figura 3.5: Riduzione dell'intervallo di rivisitazione con una costellazione di $N=m=3$ satelliti lungo la stessa orbita; traccia al suolo nel primo (a), secondo (b) e terzo (c) giorno del periodo di ripetitività.

3.3.2 SATELLITI SU PIÙ PIANI ORBITALI

In analogia al caso precedente, la condizione affinché un satellite ripercorra la traccia di quello di riferimento è che esista un tempo t appartenente all'intervallo $[0; m)$ per il quale risulti $\lambda_{p,i,t} = \lambda_0$, ovvero che al tempo $t = 0$, per il satellite p, i risulti $\lambda_{p,i,0} = H \cdot S_t / m = H \cdot S_m$ con $H = 1, \dots, R$, cioè se la longitudine di passaggio al primo nodo ascendente di un satellite corrisponde alla longitudine di uno degli R nodi ascendenti dell'orbita di riferimento. Ponendo questa condizione nell'Eq. (3.6), è possibile ottenere la condizione sulle fasi in anomalia media e RAAN che consentono la ripetizione della traccia al suolo dell'orbita di riferimento:

$$\Delta M_{i,p} + q\Delta\Omega_p = 2\pi \frac{H}{m} \quad H = 1, \dots, R \quad (3.14)$$

Facendo uso dell'Eq. (3.14), se si fissa $\Delta M_{i,p}$, al variare di H , esistono nell'intervallo $[0; 2\pi]$ soltanto m valori di $\Delta\Omega_p$ che consentono di ripercorrere la traccia del satellite di riferimento, tra loro sfasati di $2\pi/m$. Viceversa, se si fissa $\Delta\Omega_p$, esistono R diversi valori di $\Delta M_{i,p}$, tra loro sfasati di $2\pi/R$.

Al contrario delle costellazioni a singolo piano, quelle a più piani orbitali permettono di ottenere qualsiasi intervallo di rivisitazione, compresi quelli al di sotto di un giorno nodale. Ciò è possibile poiché, scegliendo opportunamente le due fasi, il primo nodo ascendente di un satellite p, i può coincidere con uno qualunque dei nodi ascendenti dell'orbita di riferimento, e non solo con quelli dell'intervallo $(-S_i; 0]$. Qualora si dispongano equamente i satelliti sui diversi piani, l'intervallo costante tra due successive osservazioni sulla stessa zona è $\Delta t = lcm(N_p, m) / (P \cdot N_p)$ giorni nodali; al riguardo, un caso particolarmente favorevole è quello delle costellazioni omogenee, che sarà affrontato nel paragrafo successivo.

Nelle Figg. (3.5a) e (3.5b) sono riportate le tracce al suolo dall'istante iniziale fino al momento della rivisitazione sul punto λ_0 di due diverse configurazioni. In quella di figura (3.5a), in cui sono presenti un primo satellite posto sull'orbita di riferimento (traccia nera) ed un secondo su un'orbita con fasi $\Delta\Omega = 60^\circ$ e $\Delta M = 200^\circ$ (traccia rossa), quest'ultimo ripercorre la traccia del primo dopo 0.1666 giorni nodali, pari a 4 ore. Nella seconda configurazione, in cui il satellite dedicato all'aumento di frequenza ha fasi $\Delta\Omega = 90^\circ$ e $\Delta M = 120^\circ$, la traccia è ripercorsa dopo 1.205 giorni nodali, pari a circa 29 ore, dopo il transito del satellite posto sull'orbita di riferimento.

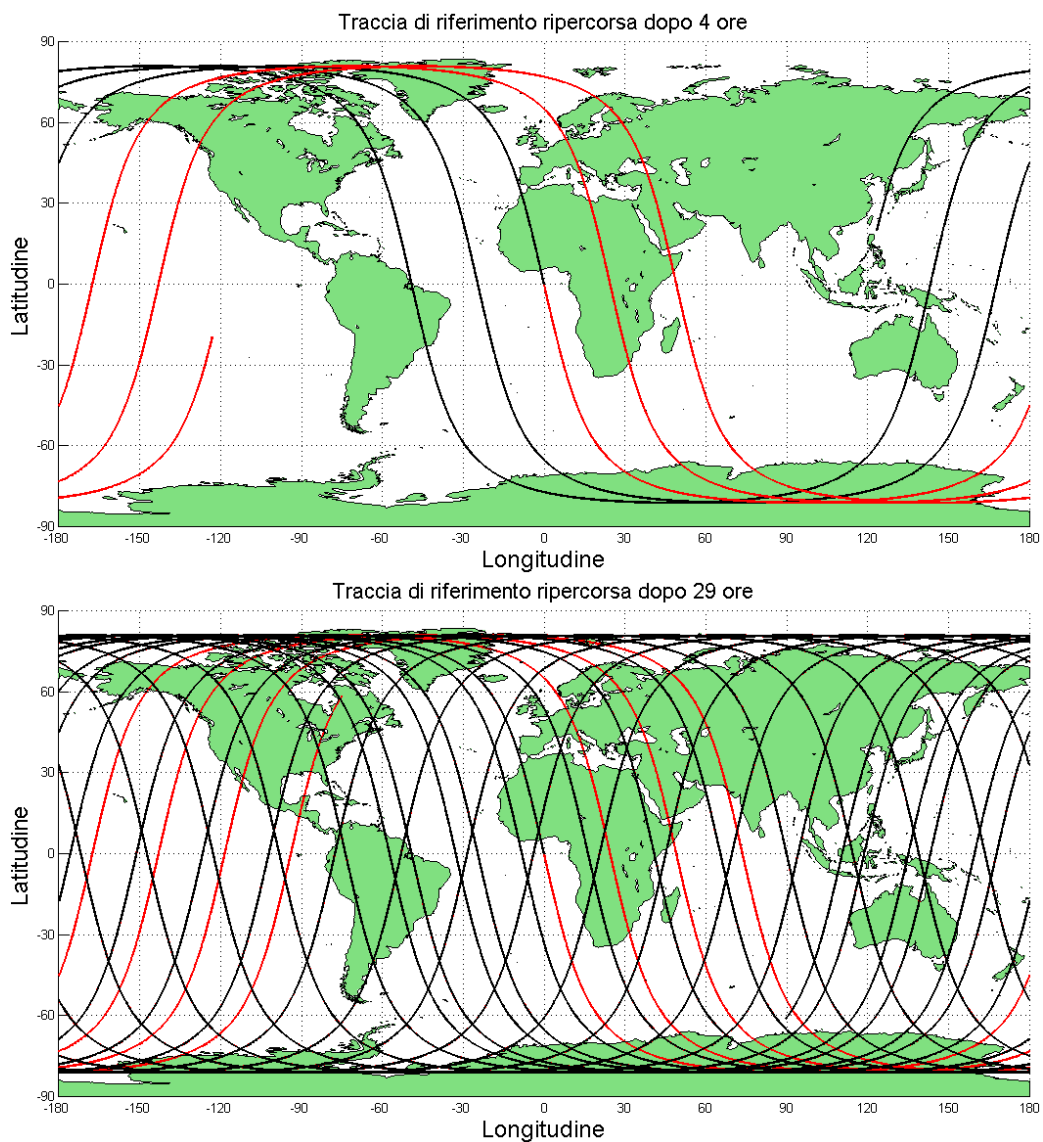


Figura 3.6: Traccia a terra ripercorsa dopo 4 ore (a) e dopo 29 ore (b).

In Tab. 3.4 sono riassunti i valori minimi e le condizioni che li consentono, limitatamente al caso della riduzione della distanza tra le tracce. In Tab. 3.5 sono riassunte le condizioni che permettono di minimizzare l'intervallo di rivisitazione su una stessa regione; per questa tabella sono stati considerati soltanto intervalli regolari.

| | Valore minimo | Condizione |
|--------------------------------------|----------------------|---|
| Singolo satellite | S_m | ---- |
| Costellazione a singolo piano | $\frac{S_m}{N}$ | $\Delta M_i = 2\pi \left(1 - \frac{I}{mN} - \frac{L}{m} \right)$ |
| Costellazione a più piani | $\frac{S_m}{N}$ | $\Delta M_{i,p} - q\Delta\Omega_p = 2\pi \left(1 - \frac{I}{mN} - \frac{L}{m} - J \right)$ |

Tabella 3.4: Quadro di sintesi delle condizioni per la riduzione della distanza tra le tracce al suolo.

| | Valore minimo [giorni nodali] | Condizione |
|--------------------------------------|--------------------------------------|--|
| Singolo satellite | m | ---- |
| Costellazione a singolo piano | 1 | $N = m$ $\Delta M_i = (i-1) \frac{2\pi}{m}, \quad i = 1, \dots, m$ |
| Costellazione a più piani | fino a $\frac{1}{P}$ | $\Delta M_{i,p} + q\Delta\Omega_p = 2\pi \frac{H}{m}$ $H = 1, \dots, R$ |

Tabella 3.5: Quadro di sintesi delle condizioni per la riduzione dell'intervallo di rivisitazione.

3.4 RIVISITAZIONE A INTERVALLI REGOLARI

Come visto nel paragrafo precedente, è possibile ottenere intervalli Δt di passaggio su una stessa zona costanti e pari a un giorno nodale per costellazioni a singolo piano; facendo uso di costellazioni a più piani orbitali è possibile ridurre l'intervallo tra due successive osservazioni al di sotto di un

giorno nodale. In questo paragrafo sono presentate le condizioni sulle fasi in ascensione retta e anomalia media che consentono di avere, nel caso di costellazioni multipiano, passaggi a intervalli regolari su una stessa zona. Come si vedrà, è possibile giungere fino al valore minimo $\Delta t = m/N$ giorni nodali; risultato che è ottenibile solo ponendo la fase in ascensione retta tra i vari piani entro ristretti intervalli.

In seguito al caso generale, viene analizzato quello delle costellazioni omogenee- la cui definizione viene in seguito fornita- che risulta particolarmente favorevole all'ottenimento di intervalli di rivisitazione regolari.

3.4.1 CASO GENERALE

Nel caso più generale in cui si dispone di un numero N di satelliti distribuiti, anche non uniformemente, su P piani orbitali, ed assegnato un indice j a ciascun satellite relativo all'ordine di passaggio nel nodo posto in λ_0 ($j=1$ per il primo satellite a passare in λ_0 , $j=2$ per il secondo e così via), è possibile ridurre l'intervallo costante tra due passaggi su una data regione fino al valore $\Delta t = m/N$. Tale valore è ottenuto se, per ogni satellite, è rispettata la condizione:

$$\Delta M_{j+1,j} = 2\pi \left[1 + \text{int} \left(\frac{R}{N} \right) \right] - q\Delta\Omega_{j+1,j}, \quad j=1, \dots, (N-1) \quad (3.15)$$

Avendo denotato con $\Delta M_{j+1,j}$ e $\Delta\Omega_{j+1,j}$ le fasi, rispettivamente, in anomalia media e RAAN tra i satelliti caratterizzati dagli indici $(j+1)$ e j .

Tenendo conto di fasi $\Delta M_{j+1,j}$ comprese nell'intervallo $[0; 2\pi)$, le fasi $\Delta\Omega_{j+1,j}$ dovranno essere scelte in modo da rispettare la disequazione:

$$0 \leq 2\pi \left[1 + \text{int} \left(\frac{R}{N} \right) \right] - q\Delta\Omega_{j+1,j} \leq 2\pi, \quad j=1, \dots, (N-1) \quad (3.16)$$

Dalla (3.16), dopo pochi passaggi si può giungere alla:

$$S_i \cdot \text{int}\left(\frac{R}{N}\right) \leq \Delta\Omega_{j+1,j} \leq S_i \left[1 + \text{int}\left(\frac{R}{N}\right)\right], \quad j=1, \dots, (N-1) \quad (3.17)$$

L'equazione (3.17) evidenzia come la scelta delle fasi $\Delta\Omega_{j+1,j}$ sia limitata a un intervallo di ampiezza S_i .

Ad esempio, qualora si disponga di $N=4$ satelliti per un'orbita con $m=3$ ed $R=43$ ($q=14+1/3$), sarà possibile ridurre gli intervalli (regolari) tra le successive osservazioni fino al valore $\Delta t = m/N = 0.75$ giorni nodali, scegliendo le fasi $\Delta\Omega_{j+1,j}$ in accordo con la condizione (3.17) e ricavando i corrispondenti univoci valori delle fasi in anomalie media $\Delta M_{j+1,j}$ dalla (3.15). Una possibile configurazione è stata riportata in Tab. 3.6 in cui, posto $\Omega = 0^\circ$ e $M = 0^\circ$ per il satellite $j=1$, i $\Delta\Omega_{j+1,j}$ sono stati selezionati in modo randomico negli intervalli ammessi dall'Eq. (3.17) e i $\Delta M_{j+1,j}$ ricavati con l'Eq. (3.15); il parametro H fa riferimento all'Eq. (3.14).

| Satellite (j) | Ω | $\Delta\Omega_{j+1,j}$ | M | $\Delta M_{j+1,j}$ | H |
|-------------------|----------|------------------------|--------|--------------------|-----|
| 1 | 0 | - | 0 | - | 0 |
| 2 | 268.90 | 268.90 | 105.82 | 105.82 | 33 |
| 3 | 160.86 | 251.96 | 94.36 | 348.54 | 20 |
| 4 | 58.98 | 258.12 | 354.67 | 260.31 | 10 |

Tabella 3.6: Una possibile configurazione per la rivisitazione di una stessa regione ad intervalli regolari.

3.4.2 COSTELLAZIONI OMOGENEE

Al fine di ottenere intervalli di rivisitazione costanti e pari al minimo valore possibile, si può far ricorso a costellazioni omogenee, che sono particolarmente favorevoli allo scopo. Definiamo in questo caso omogenee quelle costellazioni per le quali:

- N satelliti siano equamente distribuiti su P piani orbitali (N_p satelliti per ciascun piano orbitale);

- ΔM_R , ovvero la fase in anomalia media tra l'i-esimo satellite di un p-esimo piano e l'i-esimo satellite del (p-1)-esimo piano, risulti costante per tutti gli N satelliti;
- La fase in ascensione retta del nodo ascendente ($\Delta\Omega_{p,p-1}$) tra i diversi piani orbitali risulti costante e pari a $2\pi/P$;

In tali condizioni, è possibile ridurre l'intervallo costante tra due passaggi su una stessa zona fino al valore minimo $\Delta t = 1/P$ a condizione che su ogni piano orbitale siano posti $N_p = m$ satelliti e sia rispettata l'equazione:

$$\Delta M_R = 2\pi \left[1 - \text{frac} \left(\frac{q}{P} \right) \right] \quad (3.18)$$

dove $\text{frac}(q/P)$ è la parte frazionaria di (q/P) .

Assumendo come orbita di riferimento la stessa degli esempi precedenti, disponendo di $N = 6$ satelliti uniformemente distribuiti su $P = 2$ piani orbitali ($N_p = m = 3$), nell'ipotesi di costellazione omogenea ($\Delta\Omega_{p,p-1} = \pi$) l'Eq. (3.18) fornisce il valore $\Delta M_R = 5\pi/3$ in grado di garantire un intervallo di rivisitazione $\Delta t = 1/P = 0.5$ giorni nodali. La configurazione della costellazione omogenea è riportata in Tab. 3.7.

La tabella evidenzia che i satelliti su uno stesso piano hanno tra loro una fase in anomalia media pari a $\Delta M = 2\pi/m = 2\pi/3$. L'intervallo minimo $\Delta t = 0.5$ giorni nodali si sarebbe potuto ottenere anche con una costellazione non omogenea facendo uso dell'Eq. (3.15).

Per costellazioni omogenee, la condizione che consente di avere un reticolato equamente spaziato, precedentemente espressa dall'Eq. (3.10), può essere riscritta nella forma:

$$\text{lcm}(m, N_p)(\Delta M_R + \Delta\Omega) = 2\pi \frac{I}{P}, \quad I \in \mathbb{N} \quad (3.19)$$

| <i>p-esimo</i> piano | <i>i-esimo</i> satellite | Ω | M |
|-------------------------|-----------------------------|----------|-----|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 2 | 0 | 240 |
| 1 | 3 | 0 | 120 |
| 2 | 1 | 180 | 300 |
| 2 | 2 | 180 | 180 |
| 2 | 3 | 180 | 60 |

Tabella 3.7: Rivisitazione a intervalli regolari con una costellazione omogenea.

3.5 POSIZIONE ISTANTANEA DEL PUNTO SUB-SATELLITARE

Sono ora proposte le relazioni che consentono di ricavare la posizione istantanea del punto sub-satellitare in termini di latitudine e longitudine. In particolare, sono presentate delle equazioni che permettono la valutazione di queste due grandezze per orbita periodica circolare utilizzando i parametri caratteristici delle orbite periodiche introdotti in precedenza.

Le equazioni in seguito mostrate sono state utilizzate, implementandole in codici di calcolo dedicati, per la realizzazione di tutti i grafici riguardanti le tracce a terra dei diversi esempi proposti in questo capitolo.

3.5.1 LATITUDINE ISTANTANEA

Dalle relazioni di trigonometria sferica (vedi Fig. 2.3) è possibile ricavare la latitudine (φ) istantanea del punto sub-satellitare del satellite di riferimento della costellazione:

$$\varphi(\tau) = \sin^{-1} \{ \sin i \sin(\omega + \nu) \} \quad (3.20)$$

Ricordando che $\xi = \omega + \nu$, l'Eq. (3.20) può essere riscritta come:

$$\varphi(\tau) = \sin^{-1} \{ \sin i \sin[\dot{\xi}(\tau)\tau] \} \quad (3.21)$$

denotando con τ il tempo effettivo (cioè non-normalizzato rispetto al giorno nodale). L'Eq. (3.21), come ovvio, fornisce $\varphi = 0^\circ$ per $\tau = 0$, avendo ipotizzato che il satellite di riferimento si trovi sul nodo ascendente all'istante iniziale.

Nel caso di orbita ellittica, la variazione dell'argomento di latitudine $\dot{\xi}$ non assume un valore costante nel tempo, ma è funzione della posizione del satellite lungo l'orbita. Per tale ragione, in Eq. (3.21) si è tenuto conto della dipendenza dal tempo di questa grandezza. Per orbita circolare, o quasi-circolare, è invece possibile assumere un valore costante, e pari alla media lungo l'orbita, della variazione dell'argomento di latitudine ($\dot{\xi}(\tau) \cong \bar{\xi}$). Ricordando la definizione del periodo nodale data in Eq. (1.5), è possibile sostituire in Eq. (3.21) $\dot{\xi}(\tau)\tau = (2\pi/T_n)\tau = (2\pi q/D_n)\tau = 2\pi qt$, in cui si è indicato con t ancora una volta il tempo normalizzato rispetto al giorno nodale ($t = \tau/D_n$), arrivando alla:

$$\varphi(\tau) = \sin^{-1}[\sin i \sin(2\pi qt)] \quad (3.22)$$

Ponendo per la variabile temporale di Eq. (3.22) multipli interi di $1/q$ si verifica la condizione di passaggio lungo l'equatore, $\varphi(t) = 0^\circ$.

Qualora si abbia una fase ΔM rispetto all'orbita di riferimento, le Eqq. (3.21) per il caso di orbita ellittica e (3.22) per orbita circolare, divengono rispettivamente:

$$\varphi(\tau) = \sin^{-1}\{\sin i \sin[\Delta M + \dot{\xi}(\tau)\tau]\} \quad (3.23)$$

$$\varphi(t) = \sin^{-1}[\sin i \sin(\Delta M + 2\pi qt)] \quad (3.24)$$

Al contrario, l'introduzione di una fase $\Delta\Omega$ non influenza la latitudine istantanea del punto sub-satellitare per la quale, la trattazione del caso di costellazioni a singolo piano orbitale coincide con quella del caso a più piani orbitali.

3.5.2 LONGITUDINE ISTANTANEA

La valutazione della longitudine richiede trattazione distinta che tengo conto della fase, ascendente o discendente, in cui il satellite si trovi istantaneamente. Per il satellite di riferimento, facendo uso delle relazioni di trigonometria sferica, la longitudine istantanea del punto sub-satellitare per la fase ascendente e discendente è fornito, rispettivamente, dalle:

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \tan^{-1} \left\{ \cos i \tan[\dot{\xi}(\tau)\tau] \right\} - [\omega_E - \dot{\Omega}(\tau)]\tau \quad (3.25a)$$

$$\lambda(t) = (\lambda_0 - \pi) + \tan^{-1} \left\{ \cos i \tan[\dot{\xi}(\tau)\tau] \right\} - [\omega_E - \dot{\Omega}(\tau)]\tau \quad (3.25b)$$

L'Eq. (3.25b) è valida se il satellite si trova nella fase discendente dell'orbita, cioè se $[(4K+1)/4]T_n < \tau < [(4K+3)/4]T_n$, con $K \in \mathbb{N}$. Per tutti gli altri valori della variabile temporale, il satellite si troverà nella fase ascendente e si dovrà fare uso dell'Eq. (3.25a).

Nel caso di orbita circolare, o qualora sia possibile assumere $\dot{\xi}(\tau) \cong \bar{\xi}$ e $\dot{\Omega}(\tau) \cong \bar{\Omega}$, e passando alla variabile temporale normalizzata, le due equazioni precedenti divengono:

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \tan^{-1} \left\{ \cos i \tan[2\pi qt] \right\} - 2\pi \cdot t \quad (3.26a)$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (\lambda_0 - \pi) + \tan^{-1} \left\{ \cos i \tan[2\pi qt] \right\} - 2\pi \cdot t = \\ &= \lambda_0 + \tan^{-1} \left\{ \cos i \tan[2\pi qt] \right\} - \pi(1 + 2t) \end{aligned} \quad (3.26b)$$

In questo caso, la condizione sulla variabile temporale per la quale il satellite si trova nella fase discendente dell'orbita è $[(4K+1)/4q] < t < [(4K+3)/4q]$, con $K \in \mathbb{N}$. Ponendo in Eq. (3.26a) multipli interi del periodo nodale per la variabile temporale ($t = K/q$, con $K \in \mathbb{N}$) è possibile ottenere le longitudini di passaggio ai nodi ascendente; mentre, ponendo valori $t = (2N+1)/2q$, si ottengono le longitudini di passaggio ai nodi discendenti.

Nel caso generale di costellazioni su più piani orbitali, la longitudine istantanea di un satellite che abbia fasi ΔM e $\Delta\Omega$ rispetto al satellite di riferimento, le Eqq. (3.25a-b) per orbita ellittica divengono:

$$\lambda(\tau) = \lambda_0 + \Delta\Omega + \tan^{-1} \left\{ \cos i \tan[\Delta M + \dot{\xi}(\tau)\tau] \right\} - [\omega_E - \dot{\Omega}(\tau)]\tau \quad (3.27a)$$

$$\lambda(\tau) = (\lambda_0 - \pi) + \Delta\Omega + \tan^{-1} \left\{ \cos i \tan[\Delta M + \dot{\xi}(\tau)\tau] \right\} - [\omega_E - \dot{\Omega}(\tau)]\tau \quad (3.27b)$$

In questo caso, la condizione sulla variabile temporale per cui il satellite si trovi in fase discendente è: $[(4K+1)/4]T_n < (\tau + \Delta M / 2\pi) < [(4K+3)/4]T_n$, con $K \in \mathbb{N}$.

Per il caso circolare, le Eqq. (3.26a-b) divengono:

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \Delta\Omega + \tan^{-1} \left\{ \cos i \tan[\Delta M + 2\pi qt] \right\} - 2\pi \cdot t \quad (3.28a)$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (\lambda_0 - \pi) + \Delta\Omega + \tan^{-1} \left\{ \cos i \tan[\Delta M + 2\pi qt] \right\} - 2\pi \cdot t = \\ &= \lambda_0 + \Delta\Omega + \tan^{-1} \left\{ \cos i \tan[\Delta M + 2\pi qt] \right\} - \pi(1+2t) \end{aligned} \quad (3.28b)$$

Mentre, la condizione sulla variabile temporale per cui il satellite si trovi in fase discendente risulta essere: $(4N+1)/4q < (t + \Delta M / 2\pi q) < (4N+3)/4q$.

Ponendo nelle Eqq. (3.27a-b) e (3.28a-b) $\Delta\Omega = 0^\circ$ si ottengono le equazioni del caso di costellazioni a singolo piano orbitale. Infine, scegliendo valori della variabile temporale pari a $t = (2K\pi - \Delta M) / 2\pi q$ o $t = [(2K+1)\pi - \Delta M] / 2\pi q$ si ottengono, rispettivamente, le longitudini di passaggio ai nodi ascendenti e discendenti.

COSTELLAZIONI PER LA COPERTURA CONTINUA DI UNA BASE EQUATORIALE

In questo capitolo è proposta una metodologia che, facendo uso delle relazioni presentate nel *Capitolo 3*, permette l'individuazione di costellazioni, composte dal minimo numero possibile di satelliti, atte a garantire la copertura continua di una base equatoriale. Tali costellazioni sono basate su una comune orbita di riferimento periodica.

In seguito sono presentati alcuni esempi applicativi finalizzati all'individuazione del numero minimo di satelliti in grado di garantire la copertura continua del "Centro spaziale Luigi Broglio" di Malindi (Kenya) prendendo in considerazione orbite di riferimento periodiche multi-sincrone con il Sole (PMSSO), per le quali i polinomi risolutivi sono stati presentati nel *Capitolo 2*.

Il metodo è generalizzabile solo per la copertura di una stazione equatoriale, ricorrendo a orbite la cui inclinazione sia ridotta rispetto alla semi-apertura del cerchio d'acquisizione della stazione (θ). Sono dunque descritti limiti e possibili soluzioni per l'attuazione del metodo anche alle latitudini medie e polari, ed è proposto un esempio di copertura della stessa base equatoriale con orbita di riferimento periodica elio-sincrona.

Anche per gli esempi grafici riportati nel presente capitolo si è ricorso a un propagatore orbitale appositamente scritto in ambiente MATLAB e parzialmente riportato in *Appendice A*.

4.1 DETERMINAZIONE DEL NUMERO MINIMO DI SATELLITI PER LA COPERTURA CONTINUA

Il numero minimo di satelliti (N) utile a garantire la copertura continua di una base equatoriale sarà strettamente connesso alla scelta dell'orbita di riferimento della costellazione, ovvero alla quota (quindi alla semi-ampiezza del cerchio di copertura θ), all'inclinazione e alla posizione del nodo iniziale λ_0 . In questa trattazione, si farà ricorso a orbite periodiche, secondo la definizione data nei capitoli precedenti.

In assenza di vincoli specifici sulle caratteristiche di periodicità, precisi indici che sono in seguito discussi- permettono di stimare se l'orbita scelta rappresenti l'*optimum*, in termini di risoluzione spaziale o di minimo numero di satelliti necessari, per l'applicazione in essere.

Scelta l'orbita di riferimento (quota, inclinazione e λ_0), fissate latitudine ($\bar{\varphi}$) e longitudine ($\bar{\lambda}$) della stazione che si intenda coprire, e posto un valore per l'elevazione minima (ε), è possibile calcolare la semi-ampiezza θ del cerchio di acquisizione. Facendo uso delle Eqq. (3.24) e (3.28a-b) per orbita periodica, è possibile determinare in ogni istante la latitudine e la longitudine del satellite. Risolvendo rispetto alla variabile temporale (t) l'equazione:

$$\sqrt{(\varphi(t) - \bar{\varphi})^2 - (\lambda(t) - \bar{\lambda})^2} = \theta \quad (4.1)$$

è possibile determinare, nell'intervallo temporale $[0, m]$, tutti gli istanti in cui il satellite entri o esca dal cerchio di acquisizione. In generale, il numero di soluzioni fornite dall'Eq. (4.1) è variabile in funzione dell'orbita di riferimento e della posizione della stazione rispetto al grigliato da essa descritto.

Noti i tempi d'ingresso e uscita dal cerchio di acquisizione, è possibile calcolare la durata di tutti gli intervalli di permanenza del satellite all'interno dello stesso, denotati d'ora in poi come Δt_{IN} (Fig.4.1a), e quelli di permanenza

al di fuori del cerchio di acquisizione, denotati come Δt_{OUT} (Fig.4.1b). Così, una volta noti tutti i successivi Δt_{IN} e Δt_{OUT} , sarà possibile calcolare tutti i $\Delta t_{IN+OUT} = \Delta t_{IN} + \Delta t_{OUT}$ (Fig.4.1c), che indicheranno gli intervalli che intercorrono tra un ingresso (o un'uscita) nel cerchio di acquisizione e il successivo ingresso (o uscita).

Noti questi valori, il numero di satelliti in grado di garantire copertura continua della stazione sarà dato da:

$$N = \frac{\max(\Delta t_{IN+OUT})}{\min(\Delta t_{IN})} \quad (4.2)$$

dove $\max(\Delta t_{IN+OUT})$ è il massimo tra i Δt_{IN+OUT} calcolati e $\min(\Delta t_{IN})$ è il minimo tra i Δt_{IN} . L'Eq. (4.2) fornisce, in generale, valori non-interi di N ; non potendo- ovviamente- ricorrere a un numero non-intero di satelliti, è necessario introdurre l'operatore *ceil* :

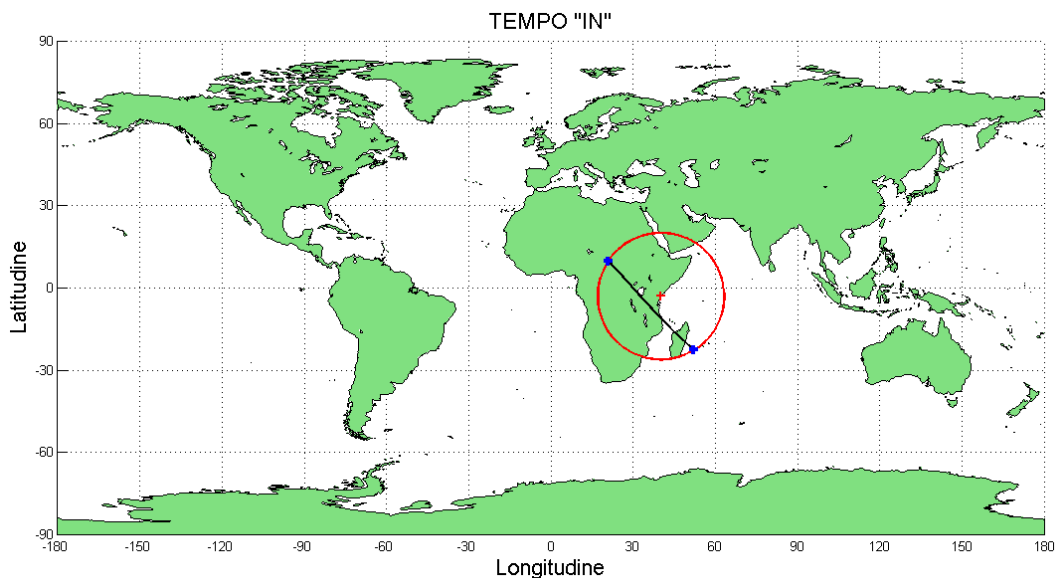
$$N = \text{ceil} \left[\frac{\max(\Delta t_{IN+OUT})}{\min(\Delta t_{IN})} \right] \quad (4.3)$$

Infatti, se sono noti $\max(\Delta t_{IN+OUT})$ e $\min(\Delta t_{IN})$, è possibile affermare che, tra due successivi ingressi di un satellite nel cerchio di acquisizione, intercorrerà al massimo un intervallo pari a $\max(\Delta t_{IN+OUT})$ e che, per ogni passaggio, il satellite sarà visibile dalla stazione per un tempo non inferiore a $\min(\Delta t_{IN})$. Quindi, se N satelliti vengono posti in modo che siano visibili dalla stazione a intervalli regolari non superiori a $\min(\Delta t_{IN})$, si ha la certezza che, durante l'intervallo in cui un satellite è al di fuori del cerchio di acquisizione, gli altri $(N-1)$ satelliti si succederanno nello stesso garantendo la copertura continua, finquando il primo satellite non vi farà di nuovo ingresso.

Per una data orbita di riferimento, affinché il valore N ottenuto con l'Eq. (4.3) coincida con il minimo valore assoluto di satelliti in grado di garantire

copertura continua per la stazione, occorre che gli intervalli di permanenza all'interno del cerchio di copertura abbiano la maggior durata possibile. Per tale ragione, riveste particolare importanza la scelta di λ_0 .

Inoltre, la scelta delle caratteristiche dell'orbita di riferimento, oltre che di λ_0 , deve essere operata in modo che gli intervalli Δt_{IN} e Δt_{IN+OUT} abbiano tra loro durata quanto più omogenea possibile. A tal proposito, due indicatori della bontà dell'orbita di riferimento scelta, sono dati dai rapporti: $\min(\Delta t_{IN+OUT})/\max(\Delta t_{IN+OUT})$ e $\min(\Delta t_{IN})/\max(\Delta t_{IN})$; tanto più questi quozienti sono prossimi al valore unitario, tanto più l'orbita scelta garantisce un valore ridotto di satelliti per la copertura continua. È bene osservare come, al crescere dell'inclinazione dell'orbita, il valore di questi quozienti, e in particolare di $\min(\Delta t_{IN})/\max(\Delta t_{IN})$, decresca necessariamente; ciò impone l'introduzione di particolari vincoli nella scelta dell'orbita, qualora si voglia ricorrere a inclinazioni medie o polari. Questi e altri limiti saranno successivamente discussi.



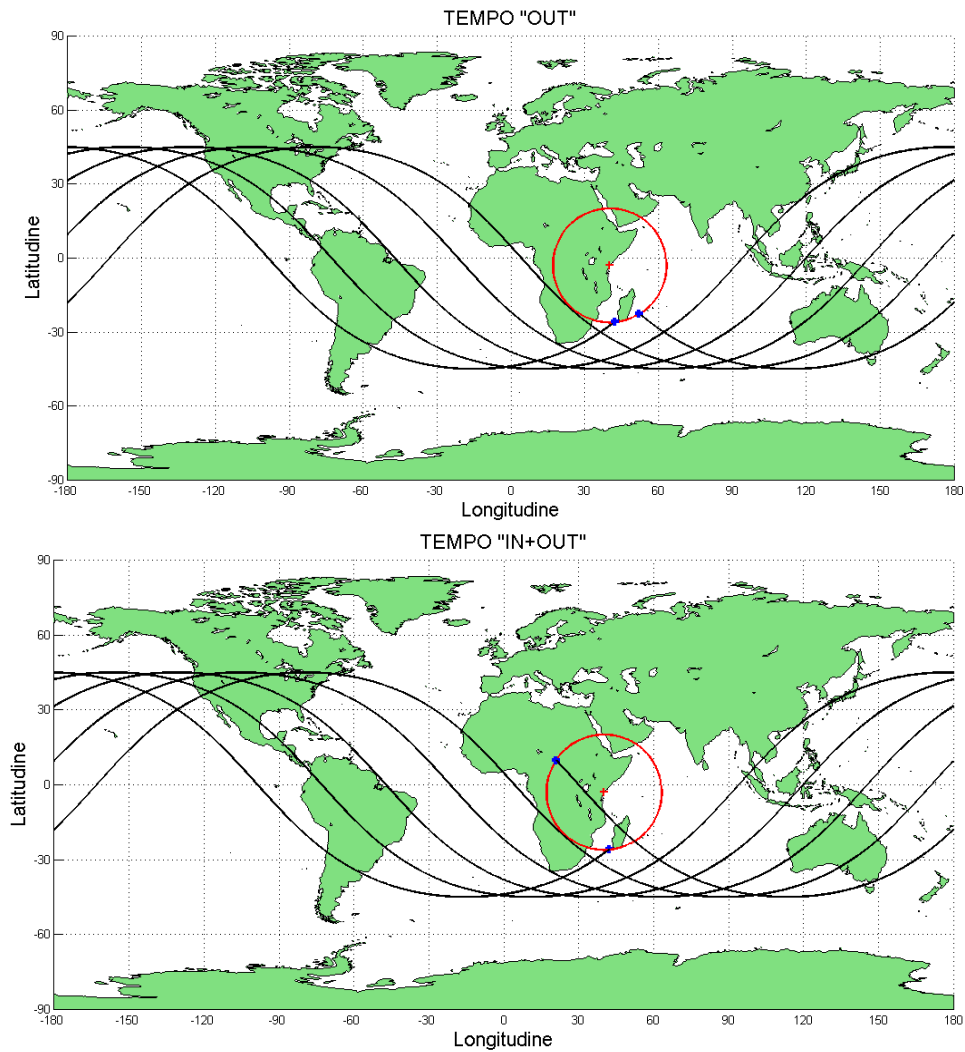


Figura 4.1: Tempo "IN" (a); tempo "OUT" (b); tempo "IN+OUT" (c).

4.2 DISEGNO DELLA COSTELLAZIONE PER LA COPERTURA CONTINUA

Noto N , è possibile procedere al calcolo delle fasi in ascensione retta e anomalia media dei satelliti della costellazione. Quest'ultima deve essere disegnata in modo che ciascun satellite faccia ingresso nel cerchio di acquisizione della stazione dopo un intervallo non superiore a $\min(\Delta t_{IN})$ rispetto al precedente.

Per rispondere a tale requisito, sarà sufficiente far ricorso ad una costellazione per cui la traccia a terra sia ripercorsa ad intervalli regolari (vedi Par. 3.4) pari a:

$$\Delta t = \frac{\max(\Delta t_{IN+OUT})}{N} \quad (4.4)$$

il Δt così calcolato è sempre minore o uguale a $\min(\Delta t_{IN})$. La scelta di tale valore di Δt , alternativamente a $\min(\Delta t_{IN})$, si rende necessaria poiché quest'ultimo sarebbe un intervallo regolare per un numero di satelliti, in generale non intero, calcolato secondo l'Eq. (4.2); al contrario, il valore ottenuto con l'Eq. (4.4) permette passaggi regolari per il numero (intero) di satelliti stimato mediante l'Eq. (4.3). A tal fine, s'introduce il coefficiente:

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\min(\Delta t_{IN})} \quad (4.5)$$

Il rapporto in Eq. (4.5) è un indice che consente di valutare la durata degli intervalli temporali per cui almeno due satelliti si trovino nel cerchio di acquisizione della stazione. Tanto più γ sarà prossimo al valore unitario, tanto più questi intervalli saranno ridotti. In un'orbita per cui siano contemporaneamente $\gamma=1$ e $\min(\Delta t_{IN})/\max(\Delta t_{IN})=1$, in ogni istante dalla stazione sarà visibile solamente un satellite, eliminando ridondanze superflue. Com'è facilmente verificabile, γ è strettamente connesso alla parte frazionaria del valore di N calcolato con l'Eq. (4.2): a $\text{frac}(N)$ ridotti corrisponderanno valori più bassi di γ .

In assenza di vincoli specifici sulle caratteristiche di ripetitività dell'orbita di riferimento, valori non unitari di γ suggeriscono due possibili alternative:

- 1) Ridurre la quota dell'orbita di riferimento (aumentando il parametro q) fin quando γ non assuma valore unitario. In tal modo è possibile migliorare la

risoluzione al suolo delle osservazioni senza variare il numero di satelliti della costellazione;

- 2) Aumentare la quota dell'orbita di riferimento (riducendo q) fin quando $frac(N)=0$. In tal modo, peggiorando minimamente la risoluzione delle osservazioni, sarà possibile ridurre di un'unità il numero di satelliti necessari alla copertura continua.

Fissato Δt è possibile calcolare i valori delle fasi $\Delta\Omega$ e ΔM facendo uso delle relazioni presentate nel Cap. (3.4) dedicato alla rivisitazione a intervalli regolari, facendo particolare riferimento al caso delle costellazioni omogenee, per cui $\Delta t = 1/P$. Invertendo questa relazione, è possibile calcolare il numero di piani della costellazione, ricavando $P = 1/\Delta t$. Il valore di P così ottenuto sarà, in generale, un numero non intero superiore a N . Ciò non costituisce un limite all'utilizzo delle formule presentate nel Cap. (3.4) che, in astratto, conservano la loro validità anche per costellazioni costituite da un numero non intero di satelliti e/o piani.

Noto P , è possibile calcolare la fase in RAAN tra i piani, che per costellazioni omogenee è $\Delta\Omega_{j,j-1} = 2\pi/P$, e la fase in anomalia media (ΔM_R) mediante l'Eq. (3.18). Sono dunque note $int(P)$ coppie di valori $\Delta\Omega_j, \Delta M_j$ delle quali solo N sono utili alla definizione della costellazione. La scelta tra le coppie di fasi deve essere compiuta tenendo conto che, avendo contraddistinto ogni coppia con un indice j pari all'ordine di passaggio su λ_0 che essa garantirebbe, per ognuno degli N satelliti deve essere scelta una combinazione di $\Delta\Omega_j$ e ΔM_j identificate da un indice tale che:

$$\begin{cases} j = \alpha + \beta \cdot N, & \alpha = 1, \dots, N, & \beta \in \mathbb{N} \\ j \leq int(P) \end{cases} \quad (4.6)$$

In Eq. (4.6), α deve assumere un valore diverso per ciascun satellite (tra gli N possibili), mentre β può essere scelto arbitrariamente, purché la somma

$(\alpha + \beta \cdot N)$ non superi il valore massimo $j = \text{int}(P)$. Il modo più semplice di disegnare la costellazione è di porre uno stesso valore di β per ciascun satellite, selezionando così N coppie di fasi in RAAN e anomalia media contraddistinte da N indici consecutivi.

La metodologia sin qui descritta, sarà di più immediata comprensione facendo riferimento agli esempi applicativi proposti nel paragrafo successivo.

4.3 ESEMPI APPLICATIVI: COPERTURA DELLA BASE EQUATORIALE DI MALINDI MEDIANTE PMSSO

Sono ora proposti alcuni esempi applicativi finalizzati alla copertura continua della base di Malindi, le cui coordinate sono $\bar{\varphi} = -2.995714^\circ$ e $\bar{\lambda} = 40.194956^\circ$, mediante l'uso di PMSSO, per le quali, dovendo contenere il valore del parametro n presentato in Eq. (1.10), si è reso indispensabile scegliere orbite dirette basse a inclinazione quasi-equatoriale.

Le orbite utilizzate sono state ricavate facendo uso delle equazioni polinomiali presentate nel Cap. 2, in particolare delle Eqq. (2.38) e (2.39).

Fissata l'orbita di riferimento, è stato scelto λ_0 in modo tale che la traccia a terra, comune a tutti i satelliti della costellazione, prevedesse la presenza di almeno un punto sub-satellitare esattamente sulla stazione; ciò impone che l'inclinazione debba essere maggiore o uguale alla latitudine (in valore assoluto) della stazione. Tra gli R valori di λ_0 in grado di rispondere a questo requisito, è stato preferito quello per cui il passaggio sulla stazione del satellite di riferimento avvenisse nella fase ascendente dell'ultima orbita di un periodo di ripetitività, ovvero nella fase ascendente della prima orbita di un nuovo ciclo di osservazioni.

Anzitutto, è stato individuato il numero minimo di satelliti in grado di garantire copertura continua per diversi valori del parametro q al variare

dell'elevazione minima fra tre valori significativi pari a 0° , 5° e 10° . In seguito, per una delle casistiche trattate, sono proposte diverse possibili configurazioni della costellazione in grado di garantire copertura continua della stazione di Malindi.

4.3.1 INDIVIDUAZIONE NUMERO MINIMO DI SATELLITI

Sono stati analizzati 3 distinti casi:

- 1) I caso: $q = 14.5$

In Tab. 4.1a sono riassunte le caratteristiche di periodicità, multi-sincronismo con il Sole, gli elementi orbitali classici e la posizione del nodo di inizio ciclo per l'orbita di riferimento; in Tab. 4.1b sono presentati i principali parametri utili all'individuazione nel numero minimo di satelliti necessari a garantire la copertura continua della stazione in funzione dell'elevazione minima richiesta (quindi al variare della semi-apertura del cerchio di acquisizione centrato sulla stazione).

| Caratteristiche PMSSO | | | | Caratteristiche orbita di riferimento | | | | | | |
|-----------------------|----|------|----|---------------------------------------|-----------|----------|---|----------|-----------------|--------------------|
| m | R | q | n | a [km] | h [km] | i [°] | e | M [°] | Ω [°] | λ_0 [°] |
| 2 | 29 | 14.5 | 46 | 7018.33 | 640.19 | 10.293 | 0 | 0 | 0 | 55.464 |

| $\varepsilon=0^\circ; \theta=24.66^\circ$ | | | | |
|--|------------------------------|----------------------------------|-------------------|----------|
| N | $\min(\Delta t_{IN})$ [s] | $\max(\Delta t_{IN+OUT})$ [s] | Δt [s] | γ |
| 9 | 729 | 6290 | 698.89 | 0.959 |
| $\varepsilon=5^\circ; \theta=20.13^\circ$ | | | | |
| N | $\min(\Delta t_{IN})$ [s] | $\max(\Delta t_{IN+OUT})$ [s] | Δt [s] | γ |
| 12 | 532 | 6298 | 524.83 | 0.987 |
| $\varepsilon=10^\circ; \theta=16.49^\circ$ | | | | |
| N | $\min(\Delta t_{IN})$ [s] | $\max(\Delta t_{IN+OUT})$ [s] | Δt [s] | γ |
| 19 | 345 | 6311 | 332.16 | 0.963 |

Tabella 4.1: I Caso, caratteristiche orbitali PMSSO (a) e parametri per la copertura continua (b).

2) II caso: $q = 14$

| Caratteristiche PMSSO | | | | Caratteristiche orbita di riferimento | | | | | | |
|-----------------------|----|----|----|---------------------------------------|-----------|----------|---|----------|-----------------|--------------------|
| m | R | q | n | a [km] | h [km] | i [°] | e | M [°] | Ω [°] | λ_0 [°] |
| 1 | 14 | 14 | 49 | 7190.62 | 812.48 | 5.890 | 0 | 0 | 0 | 67.901 |

| $\varepsilon=0^\circ; \theta=27.50^\circ$ | | | | |
|--|-------------------------------|-----------------------------------|-------------------|----------|
| N | min(Δt_{IN}) [s] | max(Δt_{IN+OUT}) [s] | Δt [s] | γ |
| 7 | 947 | 6522 | 928.16 | 0.984 |
| $\varepsilon=5^\circ; \theta=22.92^\circ$ | | | | |
| N | min(Δt_{IN}) [s] | max(Δt_{IN+OUT}) [s] | Δt [s] | γ |
| 9 | 769 | 6523 | 724.78 | 0.943 |
| $\varepsilon=10^\circ; \theta=19.13^\circ$ | | | | |
| N | min(Δt_{IN}) [s] | max(Δt_{IN+OUT}) [s] | Δt [s] | γ |
| 11 | 617 | 6526 | 593.27 | 0.962 |

Tabella 4.2: II Caso, caratteristiche orbitali PMSSO (a) e parametri per la copertura continua (b).

3) III caso: $q = 13$

| Caratteristiche PMSSO | | | | Caratteristiche orbita di riferimento | | | | | | |
|-----------------------|----|----|----|---------------------------------------|-----------|----------|---|----------|-----------------|--------------------|
| m | R | q | n | a [km] | h [km] | i [°] | e | M [°] | Ω [°] | λ_0 [°] |
| 1 | 13 | 13 | 57 | 7567.63 | 1189.49 | 6.333 | 0 | 0 | 0 | 65.620 |

| $\varepsilon=0^\circ; \theta=32.56^\circ$ | | | | |
|--|-------------------------------|-----------------------------------|-------------------|----------|
| N | min(Δt_{IN}) [s] | max(Δt_{IN+OUT}) [s] | Δt [s] | γ |
| 6 | 1232 | 7085 | 1180.83 | 0.965 |
| $\varepsilon=5^\circ; \theta=27.90^\circ$ | | | | |
| N | min(Δt_{IN}) [s] | max(Δt_{IN+OUT}) [s] | Δt [s] | γ |
| 7 | 1038 | 7087 | 1012.43 | 0.975 |
| $\varepsilon=10^\circ; \theta=23.90^\circ$ | | | | |
| N | min(Δt_{IN}) [s] | max(Δt_{IN+OUT}) [s] | Δt [s] | γ |
| 9 | 870 | 7090 | 787.78 | 0.906 |

Tabella 4.3: III Caso, caratteristiche orbitali PMSSO (a) e parametri per la copertura continua (b).

Le tabelle mostrano come, per alcuni dei casi indagati, il parametro γ assuma valori distanti da quello unitario. Tuttavia, per gli esempi proposti, avendo adottato PMSSO, non è possibile modificare la scelta della quota dell'orbita al fine di aumentare la risoluzione spaziale o ridurre di un'unità il numero di satelliti impiegati, come prima suggerito, poiché, variando la quota, sarebbero compromesse le condizioni di periodicità e multi-sincronismo con il Sole, prerequisite essenziale per questa tipologia di orbite.

4.3.2 DISEGNO DELLA COSTELLAZIONE

Limitatamente al *II caso* ($q=14$) con $\varepsilon=5^\circ$, viene seguita la procedura, illustrata nel Capitolo 4.2, utile al disegno della costellazione capace di garantire copertura continua della stazione.

Per tale casistica è stato valutato $N=9$ satelliti e $\Delta t = 724.78$ secondi, mediante Eq. (4.4). In primo luogo, al fine di utilizzare correttamente le equazioni del Cap. 3.4, è necessario normalizzare l'intervallo temporale secondo il giorno nodale, ottenendo: $\Delta t = 0.0085635$ giorni nodali.

Nota tale valore è possibile calcolare il numero dei piani $P=1/\Delta t=116.77$. Come anticipato, sebbene non intero, sarà ugualmente possibile sostituire questo valore in Eq. (3.18), ottenendo $\Delta M_R = 316.84^\circ$. Inoltre, nell'ipotesi di costellazione omogenea, è possibile calcolare la fase in RAAN tra i diversi piani come: $\Delta\Omega_{j,j-1} = 360^\circ / P = 3.083^\circ$.

Noti questi valori, è possibile calcolare le fasi $\Delta\Omega_j$ e ΔM_j di ciascuno degli $\text{int}(P)=116$ piani rispetto a quello di riferimento; i risultati ottenuti sono riassunti in Tab. 4.4.

Tra tutte le possibili coppie di fasi riportate in tabella, sarà necessario sceglierne una per ciascuno degli $N=9$ satelliti, rispettato le condizioni poste dall'Eq. (4.6). Due possibili configurazioni della costellazione sono riportate in Tab. 4.5.

| <i>Satellite j-esimo</i> | $\Delta\Omega_j$ [°] | ΔM_j [°] | <i>Satellite j-esimo</i> | $\Delta\Omega_j$ [°] | ΔM_j [°] | <i>Satellite j-esimo</i> | $\Delta\Omega_j$ [°] | ΔM_j [°] |
|------------------------------|-------------------------|---------------------|------------------------------|-------------------------|---------------------|------------------------------|-------------------------|---------------------|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 40 | 120.23 | 116.76 | 79 | 240.46 | 233.52 |
| 2 | 3.08 | 316.84 | 41 | 123.31 | 73.60 | 80 | 243.55 | 190.36 |
| 3 | 6.17 | 273.68 | 42 | 126.40 | 30.44 | 81 | 246.63 | 147.20 |
| 4 | 9.25 | 230.52 | 43 | 129.48 | 347.28 | 82 | 249.71 | 104.04 |
| 5 | 12.33 | 187.36 | 44 | 132.56 | 304.12 | 83 | 252.79 | 60.88 |
| 6 | 15.41 | 144.20 | 45 | 135.65 | 260.96 | 84 | 255.88 | 17.72 |
| 7 | 18.50 | 101.04 | 46 | 138.73 | 217.80 | 85 | 258.96 | 334.56 |
| 8 | 21.58 | 57.88 | 47 | 141.81 | 174.64 | 86 | 262.04 | 291.40 |
| 9 | 24.66 | 14.72 | 48 | 144.89 | 131.48 | 87 | 265.13 | 248.24 |
| 10 | 27.75 | 331.56 | 49 | 147.98 | 88.32 | 88 | 268.21 | 205.08 |
| 11 | 30.83 | 288.40 | 50 | 151.06 | 45.16 | 89 | 271.29 | 161.92 |
| 12 | 33.91 | 245.24 | 51 | 154.14 | 2.00 | 90 | 274.37 | 118.76 |
| 13 | 36.99 | 202.08 | 52 | 157.23 | 318.84 | 91 | 277.46 | 75.60 |
| 14 | 40.08 | 158.92 | 53 | 160.31 | 275.68 | 92 | 280.54 | 32.44 |
| 15 | 43.16 | 115.76 | 54 | 163.39 | 232.52 | 93 | 283.62 | 349.28 |
| 16 | 46.24 | 72.60 | 55 | 166.47 | 189.36 | 94 | 286.71 | 306.12 |
| 17 | 49.33 | 29.44 | 56 | 169.56 | 146.20 | 95 | 289.79 | 262.96 |
| 18 | 52.41 | 346.28 | 57 | 172.64 | 103.04 | 96 | 292.87 | 219.80 |
| 19 | 55.49 | 303.12 | 58 | 175.72 | 59.88 | 97 | 295.95 | 176.64 |
| 20 | 58.57 | 259.96 | 59 | 178.81 | 16.72 | 98 | 299.04 | 133.48 |
| 21 | 61.66 | 216.80 | 60 | 181.89 | 333.56 | 99 | 302.12 | 90.32 |
| 22 | 64.74 | 173.64 | 61 | 184.97 | 290.40 | 100 | 305.20 | 47.16 |
| 23 | 67.82 | 130.48 | 62 | 188.05 | 247.24 | 101 | 308.29 | 4.00 |
| 24 | 70.91 | 87.32 | 63 | 191.14 | 204.08 | 102 | 311.37 | 320.84 |
| 25 | 73.99 | 44.16 | 64 | 194.22 | 160.92 | 103 | 314.45 | 277.68 |
| 26 | 77.07 | 1.00 | 65 | 197.30 | 117.76 | 104 | 317.53 | 234.52 |
| 27 | 80.15 | 317.84 | 66 | 200.39 | 74.60 | 105 | 320.62 | 191.36 |
| 28 | 83.24 | 274.68 | 67 | 203.47 | 31.44 | 106 | 323.70 | 148.20 |
| 29 | 86.32 | 231.52 | 68 | 206.55 | 348.28 | 107 | 326.78 | 105.04 |
| 30 | 89.40 | 188.36 | 69 | 209.63 | 305.12 | 108 | 329.87 | 61.88 |
| 31 | 92.49 | 145.20 | 70 | 212.72 | 261.96 | 109 | 332.95 | 18.72 |
| 32 | 95.57 | 102.04 | 71 | 215.80 | 218.80 | 110 | 336.03 | 335.56 |
| 33 | 98.65 | 58.88 | 72 | 218.88 | 175.64 | 111 | 339.11 | 292.40 |
| 34 | 101.73 | 15.72 | 73 | 221.97 | 132.48 | 112 | 342.20 | 249.24 |
| 35 | 104.82 | 332.56 | 74 | 225.05 | 89.32 | 113 | 345.28 | 206.08 |
| 36 | 107.90 | 289.40 | 75 | 228.13 | 46.16 | 114 | 348.36 | 162.92 |
| 37 | 110.98 | 246.24 | 76 | 231.21 | 3.00 | 115 | 351.45 | 119.76 |
| 38 | 114.07 | 203.08 | 77 | 234.30 | 319.84 | 116 | 354.53 | 76.60 |
| 39 | 117.15 | 159.92 | 78 | 237.38 | 276.68 | | | |

Tabella 4.4: Fasi in RAAN e anomalia per avere $\Delta t=724.78$ s.

| COSTELLAZIONE 1 | | | | | COSTELLAZIONE 2 | | | | |
|-----------------|----------|---------|-------------------------|---------------------|-----------------|----------|---------|-------------------------|---------------------|
| j | α | β | $\Delta\Omega_j$ [°] | ΔM_j [°] | j | α | β | $\Delta\Omega_j$ [°] | ΔM_j [°] |
| 1 | 1 | 0 | 0.00 | 0.00 | 1 | 1 | 0 | 0.00 | 0.00 |
| 2 | 2 | 0 | 3.08 | 316.84 | 29 | 2 | 3 | 86.32 | 231.52 |
| 3 | 3 | 0 | 6.17 | 273.68 | 48 | 3 | 5 | 144.89 | 131.48 |
| 4 | 4 | 0 | 9.25 | 230.52 | 67 | 4 | 7 | 203.47 | 31.44 |
| 5 | 5 | 0 | 12.33 | 187.36 | 23 | 5 | 2 | 67.82 | 130.48 |
| 6 | 6 | 0 | 15.41 | 144.20 | 87 | 6 | 9 | 265.13 | 248.24 |
| 7 | 7 | 0 | 18.50 | 101.04 | 106 | 7 | 11 | 323.70 | 148.20 |
| 8 | 8 | 0 | 21.58 | 57.88 | 8 | 8 | 0 | 21.58 | 57.88 |
| 9 | 9 | 0 | 24.66 | 14.72 | 18 | 9 | 1 | 52.41 | 346.28 |

Tabella 4.5: Due possibili configurazioni della costellazione per la copertura continua della base di Malindi.

La *Costellazione 1* è stata costruita utilizzando le fasi caratterizzate da (i primi) nove valori consecutivi dell'indice j (stesso valore di β per tutti i satelliti); al contrario, per la *Costellazione 2* sono stati scelti valori non consecutivi di j (β diversi tra loro).

Entrambe le costellazioni permettono di avere copertura continua della stazione, infatti, la diversa scelta degli indici α e β (quindi di j), influenza solamente l'ordine con cui i satelliti transitano nel nodo λ_0 d'inizio ciclo. Per la *Costellazione 1*, i passaggi su λ_0 si concentrano tutti nella prima parte del periodo di ripetitività, succedendosi ad intervalli pari a $\Delta t = 0.0085635$ giorni nodali. Per la *Costellazione 2*, i passaggi sul nodo di inizio ciclo sono distribuiti (non-uniformemente) su tutto il periodo di ripetitività. Inoltre, mentre per la *Costellazione 1* si ha una successione di N passaggi consecutivi nel cerchio di acquisizione di satelliti tutti nella stessa fase orbitale (ascendente e discendente alternativamente), per la *Costellazione 2* possono alternarsi passaggi consecutivi in fase ascendente e discendente.

Infine, qualora P sia multiplo intero di N , è possibile scegliere opportunamente l'indice j per ciascun satellite al fine di ottenere una costellazione in cui, oltre alla copertura continua della stazione, la traccia a terra è ripercorsa a intervalli regolari pari $\Delta t = 1/N$ giorni nodali.

In Fig. 4.2 è riportata la posizione dei punti sub-satellitari della *Costellazione 2* in diversi istanti temporali del periodo di ripetitività.

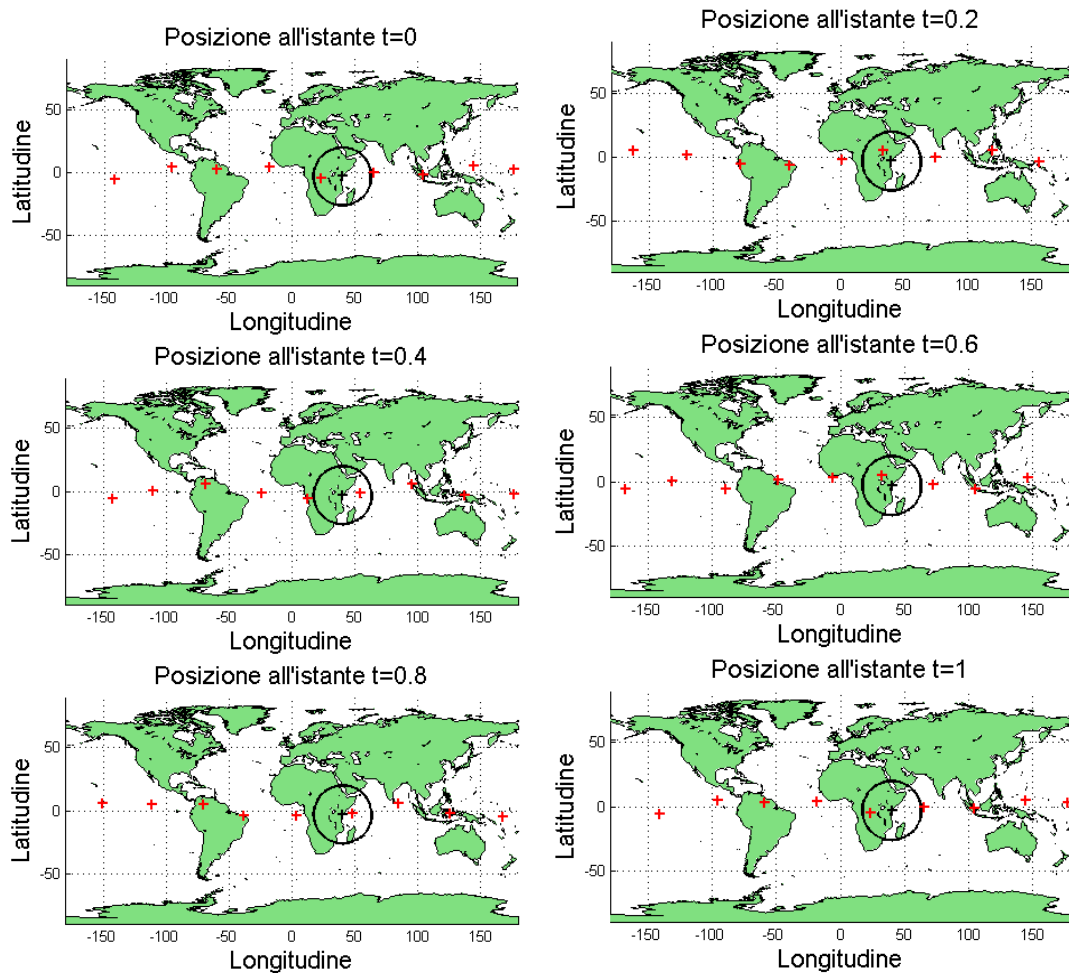


Figura 4.2: Posizione dei punti sub-satellitari della costellazione per diversi valori della variabile temporale (come frazione del giorno nodale).

4.4 LIMITI DI APPLICABILITÀ PER LE INCLINAZIONI MEDIE E POLARI

I fattori che principalmente influenzano il numero di satelliti necessari alla copertura continua di una base equatoriale (o quasi-equatoriale) sono:

- I. Le caratteristiche di ripetitività dell'orbita di riferimento (q), dunque la quota e , conseguentemente, la semi-apertura del cerchio di acquisizione della stazione (θ);

- II. L'inclinazione;
- III. La posizione del nodo d'inizio ciclo (λ_0);
- IV. L'elevazione minima richiesta.

Fatta eccezione per quest'ultimo, in assenza di vincoli specifici, per i primi tre parametri descritti, al fine di minimizzare N devono essere compiute scelte atte a perseguire i seguenti obiettivi:

- a) Massimizzare il numero e la durata dei singoli Δt_{IN} ;
- b) Avere valore quanto più prossimo a quello unitario per il rapporto $\min(\Delta t_{IN}) / \max(\Delta t_{IN})$. In altre parole, avere passaggi all'interno del cerchio di acquisizione con durata simile tra loro;
- c) Avere valore quanto più prossimo a quello unitario del coefficiente γ , riducendo al minimo la permanenza contemporanea di due o più satelliti all'interno del cerchio di acquisizione.

Tali obiettivi pongono forti restrizioni circa l'utilizzo di orbite alle inclinazioni medie e polari per le quali il numero di satelliti necessari alla copertura continua aumenta rapidamente.

Qualora i requisiti della missione impongano l'uso di una precisa inclinazione, ad esempio quella quasi-polare per le orbite eliosincrone, è possibile ricorrere ad alcuni accorgimenti che permettono di ben rispondere ai punti a), b) e c).

Come evidenziato dall'esempio che verrà proposto, il posizionamento di λ_0 assume particolare rilevanza nella massimizzare di numero e durata dei Δt_{IN} . Infatti, se λ_0 non è stato scelto accuratamente, o se alla quota dell'orbita di riferimento risulta $S_i < \theta$, si avranno dei passaggi nel cerchio di acquisizione la cui durata è estremamente ridotta rispetto agli altri passaggi. Se si considerassero anche questi passaggi, il rapporto $\min(\Delta t_{IN}) / \max(\Delta t_{IN})$ ne sarebbe inevitabilmente influenzato (si avrebbero valori molto bassi). Per tale

ragione, è consigliabile “filtrare” questi passaggi, non annoverandoli tra i Δt_{IN} , bensì tra i Δt_{OUT} .

4.4.1 APPLICAZIONE: COPERTURA CONTINUA CON ORBITA POLARE

Per questo esempio applicativo, è stata utilizzata un’orbita di riferimento periodica eliosincrona (PSSO) individuata mediante le Eqq. (2.38) e (2.39), le cui caratteristiche sono riassunte in Tab. 4.6.

| Caratteristiche PSSO | | | Caratteristiche orbita di riferimento | | | | | |
|----------------------|----|----|---------------------------------------|-----------|----------|---|----------|-----------------|
| m | R | q | a [km] | h [km] | i [°] | e | M [°] | Ω [°] |
| 1 | 13 | 13 | 7635.15 | 1257.01 | 100.67 | 0 | 0 | 0 |

Tabella 4.6: Caratteristiche dell’orbita di riferimento (PSSO).

Per tale orbita di riferimento, considerando un’elevazione minima $\varepsilon=5^\circ$, ponendo $\lambda_0=40.973^\circ$ (tale da avere almeno un punto sub-satellitare sulla stazione) si ottiene un reticolato (Fig. 4.3a) per il quale, trascurando i Δt_{IN} di breve durata, si rendono necessari $N=42$ satelliti per la copertura continua della base di Malindi. In alternativa, ponendo $\lambda_0=54.033^\circ$ (che non consente di avere almeno un punto sub-satellitare sulla stazione), si ottiene un grigliato (Fig. 4.3b) per cui la copertura continua della stazione è assicurata da $N=30$ satelliti.

Come mostrato dalle tracce al suolo, nel primo caso si hanno soltanto due Δt_{IN} di più lunga durata (circa 17’), per una copertura totale di circa 34’ a satellite; nel secondo caso, i Δt_{IN} sono quattro, di più breve durata (circa 15’), con una copertura di oltre 61’ a satellite. Una possibile configurazione per la costellazione da 30 satelliti è riassunta in Tab. 4.7.

È importante evidenziare come, anche nel secondo caso, il numero di satelliti richiesti per coprire una sola stazione sia tanto elevato da essere prossimo a quello stimato da Beste per una costellazione, con orbita di riferimento polare

alla stessa quota dell'esempio proposto, in grado di garantire copertura continua dell'intera superficie terrestre pari a 32 satelliti (cfr. Cap. 1.3.3).

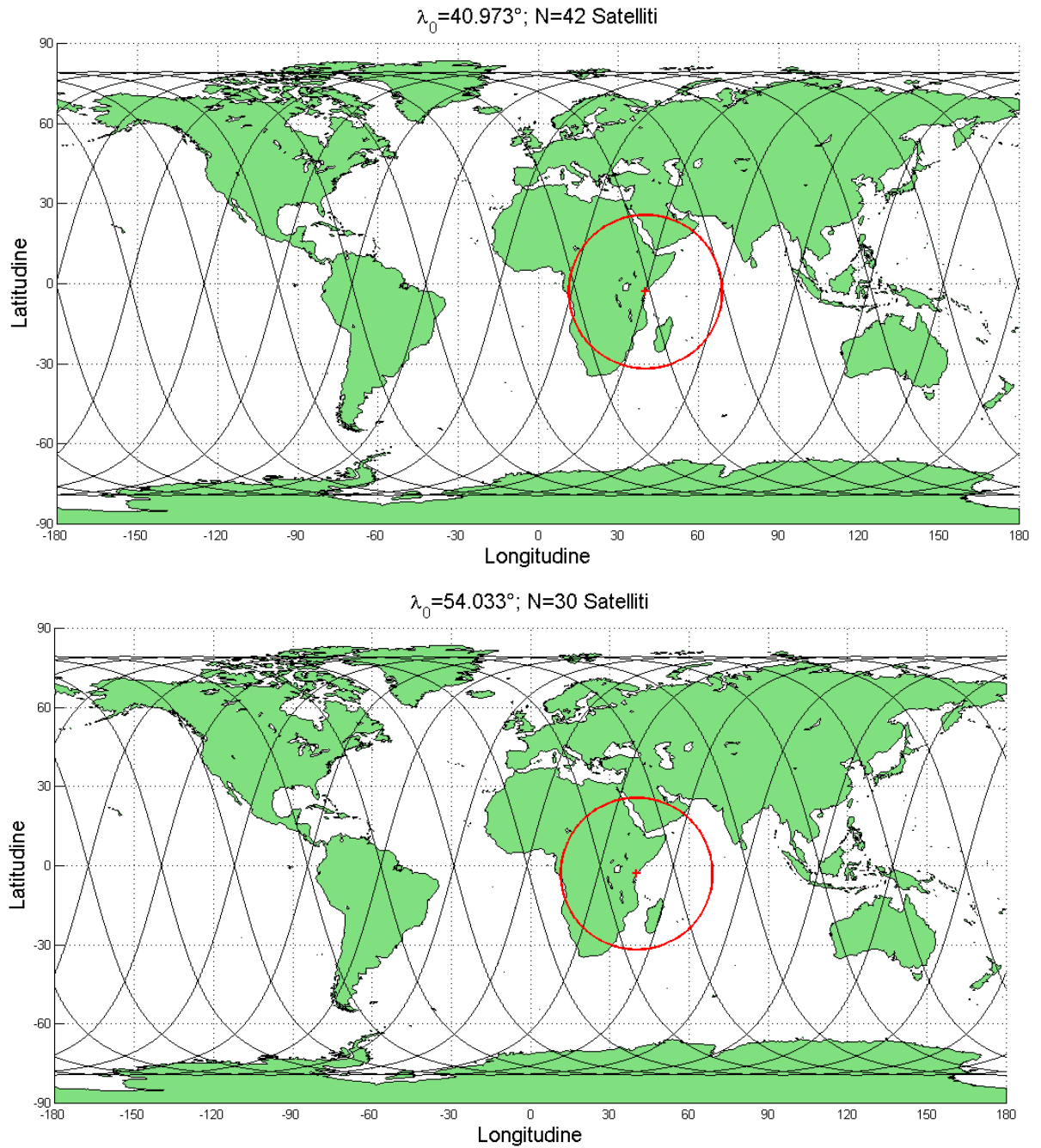


Figura 4.3: Traccia al suolo dell'orbita di riferimento con $\lambda_0=40.973^\circ$ (a) e con $\lambda_0=54.033^\circ$ (b).

| <i>Satellite</i> | $\Delta\Omega$ [°] | ΔM [°] | <i>Satellite</i> | $\Delta\Omega$ [°] | ΔM [°] | <i>Satellite</i> | $\Delta\Omega$ [°] | ΔM [°] |
|------------------|-----------------------|-------------------|------------------|-----------------------|-------------------|------------------|-----------------------|-------------------|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 11 | 61.35 | 282.45 | 21 | 122.70 | 204.91 |
| 2 | 3.38 | 316.02 | 12 | 64.73 | 238.48 | 22 | 126.08 | 160.93 |
| 3 | 6.77 | 272.05 | 13 | 68.12 | 194.50 | 23 | 129.47 | 116.95 |
| 4 | 10.15 | 228.07 | 14 | 71.50 | 150.52 | 24 | 132.85 | 72.98 |
| 5 | 13.53 | 184.09 | 15 | 74.88 | 106.55 | 25 | 163.75 | 31.23 |
| 6 | 16.91 | 140.12 | 16 | 78.26 | 62.57 | 26 | 167.13 | 347.25 |
| 7 | 20.30 | 96.14 | 17 | 109.17 | 20.82 | 27 | 170.52 | 303.27 |
| 8 | 23.68 | 52.16 | 18 | 112.55 | 336.84 | 28 | 173.90 | 259.29 |
| 9 | 54.58 | 10.41 | 19 | 115.93 | 292.86 | 29 | 177.28 | 215.32 |
| 10 | 57.97 | 326.43 | 20 | 119.32 | 248.89 | 30 | 180.67 | 171.34 |

Tabella 4.7: Possibile configurazione della costellazione in orbita polare.

CONCLUSIONI

Il presente lavoro ha permesso di determinare analiticamente relazioni per una più accurata valutazione degli effetti perturbativi, di lungo termine e secolari, dovuti alla presenza di un terzo corpo, nel caso generale in cui esso descriva un'orbita ellittica non-complanare rispetto all'equatore del corpo primario del satellite. In tal modo, è stato possibile introdurre, rispetto alla letteratura corrente, la dipendenza di tali effetti dall'inclinazione e dalla RAAN di terzo corpo.

Inoltre, sono state individuate analiticamente nuove equazioni polinomiali che consentono di determinare orbite periodiche tenendo conto degli effetti perturbativi derivanti dal campo gravitazionale fino all'armonica zonale J_4 e della perturbazione di terzo corpo. Analoghe equazioni polinomiali sono state trovate per la risoluzione di orbite periodiche multi-sincrone con il Sole, nell'ipotesi semplificativa di terzo corpo complanare con l'equatore del corpo primario. I test validativi su tali polinomi hanno evidenziato una netta riduzione degli errori sulle soluzioni rispetto a quelle ottenute con precedenti polinomi nei quali si teneva conto dei soli effetti perturbativi dell'armonica zonale J_2 , evidenziando l'importanza di aver introdotto gli effetti di terzo corpo, soprattutto per quei campi applicativi dove tale disturbo è particolarmente rilevante (orbita alta terrestre, principali lune del Sistema Solare).

Sono state infine trovate nuove relazioni compatte che consentono di ricavare le fasi tra i satelliti di una costellazione in termini di anomalia media e RAAN, permettendo di progettare, in modo rapido e accurato, una costellazione di satelliti disposti su più piani orbitali; la semplicità di queste equazioni ne consente la facile implementazione su codici dedicati. A tal proposito, sono stati offerti alcuni esempi applicativi relativi alla copertura continua della base di Malindi (Kenya).

Pertanto, fissate le caratteristiche di osservazione della costellazione, espresse in modo particolare sulla distanza tra le tracce al suolo (risoluzione spaziale) e sulla frequenza di osservazione di zone prefissate, l'uso sinergico dei polinomi risolutivi per orbite periodiche e multi-sincrone con il Sole, con le relazioni compatte per l'individuazione delle fasi tra i satelliti della costellazione, permetterà di progettare, con maggior semplicità rispetto alle più comuni metodologie, costellazioni in cui i satelliti siano in grado di soddisfare specifiche richieste sulla traccia al suolo, e quindi i requisiti di osservazione prefissati.

BIBLIOGRAFIA

- Adams, W.S., Rider, L.: Circular Polar Constellations Providing Continuous Single or Multiple Coverage Above a Specified Latitude. *Journal of the Astronautical Sciences*. **35**(2), 155–192 (1987).
- Allan, R. R.: Commensurable eccentric orbits near critical inclination. *Celestial Mechanics*, **3**(3), 320–330 (1971).
- Allan, R.R., Ward, G.N.: Planetary equations in terms of vectorial elements. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. **59**, 669–677 (1963).
- Allan, R.R., Cook, G.E.: The long period motion of the plane of a distant circular orbit. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*. **280**(1380), 97–109 (1964).
- Anderson, J.D., Schubert, G., Jacobson, R.A., Lau, E.L., Moore, W.B., Sjogren, W.L.: Europa's differentiated internal structure: inferences from four Galileo encounters. *Science*. **281**(5385), 2019–2022 (1998).
- Ballard, A.H.: Rosette constellations of earth satellites. *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions*. **5**, 656–673 (1980).
- Beech, T.W., Cornara, S., Belló-Mora, M., Dutruel-Lecohier, G.: A Study of Three Satellite Constellation Design Algorithms. In *14th International Symposium on Space Flight Dynamics* (1999).
- Benedicto, J., Dinwiddy, S., Gatti, G., Lucas, R., Lugert, M: *GALILEO: Satellite System Design and Technology*. European Space Agency (2010).
- Beste, D.C.: Design of Satellite Constellations for Optimal Continuous Coverage. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*. **14**(3), 466–473 (1978).
- Broucke, R.A.: Long-Term Third-Body Effects via Double Averaging. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. **26**(1), 27–32 (2003).

- Brown, D.L.: HEO spacecraft and launch scenarios. *Highly Elliptical Orbit Satellite Systems*, IEE Colloquium on. IET. 8/1 (1989).
- Capderou, M.: *Satellites - Orbits and Missions*. Springer-Verlag (2005).
- Castiel, D., Brosius, J.W., Draim, J. E.: Ellipso™: Coverage Optimization Using Elliptic Orbits. *Proceedings of the 15th AIAA International Communications Satellite Systems Conference* (1994).
- Cinelli, M., Circi, C., Ortore, E.: Polynomial equations for science orbits around Europa. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. **122**(3), 199-212 (2015).
- Circi, C., Ortore, E., Bunkheila, F.: Satellite constellations in sliding ground track orbits *Aerospace Science and Technology*. **39**, 395-402 (2014).
- Clarke, A.C.: Extra-terrestrial relays. *Wireless World*. **51**(10), 305-308, Oct. (1945).
- Coletta, A., Valentini, G., Capuzi, A., Caltagirone, F., De Carlo, M., De Luca, G., Battazza, F., Covello, F.: Il Programma COSMO-SkyMed: descrizione della missione e del sistema e primi risultati. *Rivista italiana di telerilevamento*. **40**(2), 5-13 (2008).
- Condoleo, E., Cinelli, M., Ortore, E., Circi, C.: Frozen Orbits with Equatorial Perturbing Bodies: The Case of Ganymede, Callisto, and Titan. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. **39**(10), 2264-2272 (2016).
- Daly, P.: Navstar GPS and GLONASS: global satellite navigation systems. *Electronics & Communication Engineering Journal*. **5**(6), 349-357, Dec. (1993).
- Dare, P.J.: *Optimal design of GPS networks: operational procedures*. University of East London (1995).
- Domingos, R.C., Vilhena de Moraes, R., Prado, A.F.B.A.: Third-body perturbation in the case of elliptic orbits for the disturbing body. *Mathematical Problems in Engineering*. ID 763654, 1-14 (2008).

- Draim, J.E.: Three-and four-satellite continuous-coverage constellations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. **8**(6), 725-730 (1985).
- Draim, J.E.: A common-period four-satellite continuous global coverage constellation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **10**(5), 492-499 (1987).
- Draim, J. E., Cefola, P. J., Ernandes, K. J.: Seamless Handovers in Cobra Teardrop Satellite. *Acta Astronautica*. **61**(1-6), 139-150 (2007).
- Emara, H.S., Leondes, C.T.: Minimum Number of Satellites of Three-Dimensional Continuous Worldwide Coverage. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*. **13**(2), 108-111 (1977).
- Evans, J.V.: The US proposed new multimedia communications satellite systems. *Proceedings of 2000 IEEE Aerospace Conference, Big Sky, Montana, 18-25, March (2000)*.
- Evans, J.V.: The US filings for multimedia satellites: a review. *International Journal of Satellite Communications*. **18**(3), 121-160, May/June (2000).
- Farless, D.L.: The application of periodic orbits to TOPEX mission design. *Astrodynamics 1985, Advances in the Astronautical Sciences. Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Conference, Vail, Colorado, August 12-15*. **58**(Part I), 13-36 (1986).
- Gleyzes, M.A., Perret, L., Kubik, P.: Pleiades system architecture and main performances. *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. **39**(B1), 537-542 (2012).
- Han, C., Yang, Y., Cai, Z: BeiDou navigation satellite system and its time scales. *Metrologia*, **48**(4), S213 (2010).
- Hanson, J.M., Evans, M.J., Turner, R.E.: Designing good partial coverage satellite constellations. *Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Portland, OR*. 214-231 (1990).

- Hegarty, C.J., Chatre, E.: Evolution of the Global Navigation Satellite System (GNSS). Proceedings of the IEEE. **96**(12), 1902-1917, Dec. (2008).
- Hopkins, R.G.: Long-term revisit coverage using multi-satellite constellations. AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Minneapolis, USA. AIAA paper N. 88-4276-CP (1988).
- Goldberg, D.E.: Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning. Addison-Wesley Publishing company (1983).
- Gutenev, A.A.: Optimization of Low-Altitude Global Communications Constellations. Journal of Guidance, Control, and Dynamics. **15**(4), 871-877 (1992).
- <http://oneweb.world/>
- King, J.C.: Quantization and Symmetry in Periodic Coverage Patterns with Applications to Earth Observation. Journal of Astronautical Sciences. **24**(4), 347-363, October-December (1976).
- Kozai, Y.: The motion of a close Earth satellite. Astron. J. **64**(1274), 367-377 (1959).
- Lang, T.J.: Symmetric Circular Orbit Satellite Constellations for Continuous Global Coverage. American Astronautical Society. AAS Paper 87-499, Aug. (1987).
- Lang, T. J.: Optimal Low Earth Orbit Constellations for Continuous Global Coverage. American Astronautical Society. AAS Paper 93-597, Aug. (1993).
- Lang, T.J., Adams, W.S.: A Comparison of Satellite Constellations for Continuous Global Coverage. International Astronautical Workshop on Mission Design and Implementation of Satellite Constellations, Toulouse, France. IAF Paper 97-D4, Nov. (1997).
- Legendre, A.M.: Recherches sur l'attraction des spheroides homogenes (1786).

- Lemoine, F.G., Kenyon, S.C., Factor, J.K., Trimmer, R.G., Pavlis, N.K., Chinn, D.S., Cox, C.M., Klosko, S.M., Luthcke, S.B., Torrence, M.H., Wang, Y.M., Williamson, R.G., Pavlis, E.C., Rapp, R.H., Olson, T.R.: The Development of the Joint NASA GSFC and NIMA Geopotential Model EGM96. NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland (1998).
- Lüders, R. D.: Satellite Networks for Continuous Zonal Coverage. *ARS Journal*. **31**(2), 179–184 (1961).
- Lüders, R. D.: The satellite trace repetition parameter Q. Aerospace Corp. TOR- 1001(2307)-3, 17 August (1966).
- Mengali, G., Quarta, A.: *Fondamenti di meccanica del volo spaziale*. Pisa University Press, 1-788 (2013).
- Merson, R.H.: The motion of a satellite in an axi-symmetric gravitational field. *Geophys. J. Int.* **4**(1), 17–52 (1961)
- Mozhaev, G.V.: On the Problem of Optimization of the Orbits of Satellite Systems Destined for Continuous Observation of the Earth Surface. Third All-Union Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Abstracts of Papers, USSR Academy of Sciences, Moscow (1968).
- Mozhaev, G.V.: The Problem of Continuous Earth Coverage and Kinetically Regular Satellite Networks. *Kosmicheskie Issledovania*. **10**(6), 833–840 (1972).
- Musen, P.: On the Long-Period Lunar and Solar Effect on the Motion of an Artificial Satellite. *Journal of Geophysical Research*. **66**, 2797–2813 (1961).
- Ortore, E.: *Orbite Periodiche*, Capitolo 12. Dispense di Astrodinamica (2016).
- Ortore, E., Circi, C., Bunkheila, F., Ulivieri, C.: Earth and Mars Observation Using Periodic Orbits. *Advances in Space Research*. **49**(1), 185–195 (2012).

- Ortore, E., Circi, C., Ulivieri, C., Cinelli, M.: Multi-sunsynchronous orbits in the solar system. *Earth, Moon, and Planets*, **111**(3-4), 157-172 (2014).
- Ortore, E., Circi, C., Cinelli, M.: Optimal orbits around Ganymede for the JUICE mission. *Aerospace Science and Technology*. **46**, 282-286 (2015).
- Ortore, E., Cinelli, M., Circi, C.: An analytical approach to retrieve the effects of a non-coplanar disturbing body. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. **124**(2), 163-175 (2016).
- Osman, I.H., Kelly, J.P.: Meta-heuristics: an overview. In *Meta-Heuristics*. Springer US. 1-21 (1996)
- Palmerini, G.B.: *Appunti per le lezioni di Sistemi di Guida e Navigazione Aerospaziali*. SIA, Roma (2010).
- Paskowitz, M.E., Scheeres, D.J.: Design of science orbits about planetary satellites: application to Europa. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. **29**(5), 1147-1158 (2006).
- Poli, D., Remondino, F., Angiuli, E., Agugiaro, G.: Evaluation of Pleiades-1a triplet on Trento testfield. *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sens Spat Inf Sci*. **40**, 287-292 (2013).
- Prado, A.F.B.A.: Third-Body Perturbation in Orbits Around Natural Satellites. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. **26**(1), 33-40 (2003).
- Renders, J.M., Flasse, S.P.: Hybrid methods using genetic algorithms for global optimization. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*. *IEEE Transactions*. **26**(2), 243-258 (1996).
- Revniviykh, S.: GLONASS status and progress. In *Proc. ION GNSS*. 609-633, Sept. (2010).
- Rider, L.: Analytic Design of Satellite Constellations for Zonal Earth Coverage Using Inclined Circular Orbits. *Journal of the Astronautical Sciences*. **34**(1), 31-64 (1986).

- Rider, L.: Optimized Polar Orbit Constellations for Redundant Earth Coverage. *Journal of the Astronautical Sciences*. **33**(2), 147–161 (1985).
- Rosetti, C., Carnebianca, C.: NAVSAT: A Global Satellite Based Navigation System. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*. **2**(12), 15-22, Dec. (1987).
- Saleh, H.A., Chelouah, R.: The design of the global navigation satellite system surveying networks using genetic algorithms. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, **17**(1), 111-122 (2004).
- Saikiran, B., Vikram, V.: IRNSS Architecture and Applications. *KIET Int. J. of Comm. & Electron*. **1**(3), 21-27 (2013).
- Stephens, G.L., Vane, D.G., Boain, R.J., Mace, G.G., Sassen, K., Wang, Z., Miller, S.D: The CloudSat mission and the A-Train: A new dimension of space-based observations of clouds and precipitation. *Bulletin of the American Meteorological Society*, **83**(12), 1771-1790 (2002).
- Ulivieri, C.: The Multi-synchronous Technique for Environment Monitoring by a Satellite Constellation. *Advances in the Astronautical Sciences*. **103**, 245–255 (1999).
- Ulivieri, C., Anselmo, L.: Multi-Sun-Synchronous orbits for earth observation. *Advances in the Astronautical Sciences*, Univelt Inc., San Diego. **76**(1), 123–133, 1991.
- Ullock, M.H., Schoen, A.H.: Optimum Polar Satellite Networks for Continuous Earth Coverage. *AIAA Journal*. **1**(1), 69–72 (1963).
- Ulybyshev, Y.: Near-polar satellite constellations for continuous global coverage. *Journal of spacecraft and rockets*. **36**(1), 92-99 (1999).
- Ulybyshev, Y.: Long-Term Formation Keeping of Satellite Constellation Using Linear-Quadratic Controller. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. **21**(1), 109–115 (1998).
- Vargo, L.G.: Orbital Patterns for Satellite Systems. *Journal of the Astronautical Sciences*. **7**(4), 78–86 (1960).

- Walker, J.G.: Circular Orbit Patterns Providing Whole Earth Coverage. Royal Aircraft Establishment Technical Report No. 70211 (1970).
- Walker, J. G.: Some Circular Orbit Patterns Providing Continuous Whole Earth Coverage. *Journal of the British Interplanetary Society*. **24**, 369–384, July (1971).
- Walker, J. G.: Satellite Constellations. *Journal of the British Interplanetary Society*. **37**(12), 559–571 (1984).
- Wertz, J.R: *Mission Geometry: Orbit and Constellation Design and Management*. El Segundo, CA: Microcosm Press (2001).

CODICI MATLAB

1) Individuazione delle coordinate del punto sub-satellitare e disegno della traccia a terra

```

%%% PROGRAMMA PER LA DETERMINAZIONE DI LATITUDINE E LONGITUDINE PER UN
%%% SATELLITE POSTO IN ORBITA PERIODICA CIRCOLARE
clc;
clear all;
close all;
% Dichiarazione delle costanti planetarie
J2=1.08263e-03; % J2 Terra
mi=398600.5; % Parametro gravitazionale terrestre
omega_E=(2*pi/0.997258)/(24*3600) % Rotazione terrestre [rad/s]
R_E=6378.137; % Raggio terrestre
K=1.5*J2*(R_E^2)*sqrt(mi);
% Dichiarazione degli elementi orbitali
incl=66.333 % inclinazione [°]
%incl=3 % inclinazione [°]
i=incl*(pi/180); % inclinazione [rad]
I=cos(i);
a=[7567.632155804654] % semiasse maggiore [km]
e=0.00 % eccentricità]
Z=1-e^2;
Lamda_0=0 % Longitudine del nodo di inizio ciclo ]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DM=304.285714285714; % Fase in anomalia media
Dm=DM*(pi/180) % in radianti
D_RAAN=[4.28571428571429,] % Fase in RAAN
D_raan=D_RAAN*(pi/180)
% Caratteristiche di periodicità
q=13 %
RAAN_dot=-(K*I)/(a^(7/2)*Z^2);
Dn=(2*pi)/(omega_E-RAAN_dot) % Giorno nodale [s]
Tn=Dn/q
[R m]=rat(q,0.0005)
% Calcolo del raggio del cerchio di copertura
eps=5 % Elevazione minima in [°]
EPS=eps*pi/180 % Elevazione minima in [rad]
TETA=acos((R_E/a)*cos(EPS))-EPS % Semi-apertura in [rad]
teta=TETA*180/pi % Semi-apertura in [°]
% CERCHIO DI COPERTURA
x=-2.94; % COORDINATE CENTRO CERCHIO DI COPERTURA: LATIDUINE
y=40.187; % COORDINATE CENTRO CERCHIO DI COPERTURA: LONGITUDINE
r=teta;
ang=0:0.01:2*pi;
xp=r*cos(ang);
yp=r*sin(ang);
X=x+xp;
Y=y+yp;
% Vettori dei tempi
% Passo=Tn/100;
Passo=1 %
Fine=Tn*q; %
Tau=[0:Passo:Fine]';
EpDay=(Tau/86400);
t=(Tau/Dn);

```

```

passi=length(t);
for l=1:passi;
    s=(t(l)+(Dm/(2*pi*q)))*q;
    s=floor(s);
    s=s/q;
    phi(l)=asin(sin(i)*(sin(Dm+2*pi*q*t(l))));
    PHI(l)=phi(l)*180/pi;
    arg(l)=cos(i)*(tan(Dm+2*pi*q*t(l)));
    alfa(l)=atan(arg(l));
    if t(l)>(s+Tn/(Dn*4)-Dm/(2*pi*q)) && t(l)<(s+(3*Tn)/(4*Dn)-Dm/(2*pi*q));
        alfa(l)=alfa(l)-pi;
    end;
    lambda(l)=Lamda_0+D_raan+alfa(l)-2*pi*t(l);
    LAMBDA(l)=lambda(l)*180/pi;
    if LAMBDA(l)<-180;
        LAMBDA(l)=LAMBDA(l)+360;
    end
    if ((LAMBDA(l)-y)^2+(PHI(l)-x)^2)<r^2;
        copertura(l)=1;
    else
        copertura(l)=0;
    end
end
POS=[Tau PHI' LAMBDA'];
figure(2)
geoshow('landareas.shp','FaceColor',[0.5 1.0 0.5])
geoshow(PHI,LAMBDA,'DisplayType','line','LineStyle','-','Color','r',
'MarkerEdgeColor','auto','LineWidth',1)
xlim([-180 180])
ylim([-90 90])
title('Traccia a terra Configurazione 1','FontSize',16)
xlabel('Longitudine','FontSize',16)
ylabel('Latitudine','FontSize',16)
grid on
hold on

```

2) Codice per la valutazione della copertura continua e completa di una costellazione

```

clear all
close all
clc
% Costanti planetarie
% Dichiarazione delle costanti planetarie
J2=1.08263e-03; % J2 Terra
mi=398600.5; % Parametro gravitazionale terrestre
omega_E=((2*pi/0.997258)/(24*3600)) % Rotazione terrestre [rad/s]
R_E=6378.137; % Raggio terrestre
K=1.5*J2*(R_E^2)*sqrt(mi);
% Dichiarazione degli elementi orbitali
incl=90 % inclinazione [°]
i=incl*(pi/180); % inclinazione [rad]
I=cos(i);
a=[7045.687;] % semiasse maggiore [km]
e=0.00 % eccentricità
Z=1-e^2;
% Caratteristiche dell'orbita periodica
m=1;%
R=15;%
q=R/m;%
RAAN_dot=-(K*I)/(a^(7/2)*Z^2);
Dn=(2*pi)/(omega_E-RAAN_dot) % Giorno nodale [s]
Tn=Dn/q
St=2*pi/q

```

```

Sm=St/m
% Calcolo del raggio del cerchio di copertura
eps=5 % Elevazione minima in [°]
EPS=eps*pi/180 % Elevazione minima in [rad]
TETA=acos((R_E/a)*cos(EPS))-EPS % Semi-apertura in [rad]
teta=TETA*180/pi % Semi-apertura in [°]
% Calcolo del Delta_t (tempo impiegato dal satellite per uscire dalla
% circonferenza di copertura a partire dal centro della stessa posto nel
% nodo, cioè sull'equatore)
% Posizione iniziale del satellite
Lamda_0=0
Dm=0
D_raan=0
syms t
phi=asin(sin(i)*(sin(Dm+2*pi*q*t)));
arg=cos(i)*(tan(Dm+2*pi*q*t));
alfa=atan(arg);
lambda=Lamda_0+D_raan+alfa-2*pi*t;
z=sqrt(phi^2+lambda^2);
DT=solve(z-TETA,t)
N=double(ceil(1/DT))
% INIZIALIZZAZIONE VETTORI FASI E POSIZIONE
D_raan(1)=0;
Dm(1)=0;
phi(1)=0;
PHI(1)=0;
arg(1)=0;
alfa(1)=0;
lambda(1)=0;
LAMBDA(1)=0;
index(1)=1;
for l=2:N;
    index(l)=1;
    % D_raan(l)=(l-1)*(2*pi/N);
    D_raan(l)=(l-1)*St;
    D_RAAN(l)=wrapTo360(D_raan(l)*180/pi);
    int=floor(q/N);
    frac=q/N-int;
    Dm(l)=Dm(l-1)+2*pi*(1-frac);
    DM(l)=wrapTo360(Dm(l)*180/pi);
    t=0;
    s=(t+(Dm(l)/(2*pi*q)))*q;
    s=floor(s);
    s=s/q;
    phi(l)=asin(sin(i)*(sin(Dm(l)+2*pi*q*t)));
    PHI(l)=phi(l)*180/pi;
    arg(l)=cos(i)*(tan(Dm(l)+2*pi*q*t));
    alfa(l)=atan(arg(l));
    if t>(s+Tn/(Dn*4)-Dm(l)/(2*pi*q)) && t<(s+(3*Tn)/(4*Dn)-Dm(l)/(2*pi*q));
        alfa(l)=alfa(l)-pi;
    end;
    lambda(l)=Lamda_0+D_raan(l)+alfa(l)-2*pi*t;
    LAMBDA(l)=lambda(l)*180/pi;
end
COST=[index' D_RAAN' DM' PHI' LAMBDA'] % RESOCONTO DELLA COSTELLAZIONE
figure(2)
% axesm('MapProjection','mercator')
axesm eckert4;
geoshow('landareas.shp','FaceColor',[0.5 1.0 0.5])
xlim([-180 180])
ylim([-90 90])
title('Traccia a terra Configurazione 1','FontSize',16)
xlabel('Latitudine','FontSize',16)
ylabel('Longitudine','FontSize',16)
hold on

```



```

for p=1:9;
x=PHI(p);
y=LAMBDA(p);
r=teta;
ang=0:0.01:2*pi;
xp=r*cos(ang);
yp=r*sin(ang);
X=x+xp;
Y=y+yp;
% w=length(X);
% for b=1:w;
%     if X(b)>90;
%         X(b)=90-(X(b)-90);
%     end
% end
figure(2)
geoshow(X,Y,'DisplayType','line','LineStyle','-','Color','k',
'MarkerEdgeColor','auto','LineWidth',1.5);
geoshow(x,y,'DisplayType','point','Color','r','MarkerEdgeColor',
'auto','LineWidth',1.5);
end

```

3) Codice per la valutazione della posizione istantanea dei punti sub-satellitari di una costellazione

```

%%% CODICE PER LA VALUTAZIONE DELLA POSIZIONE Istantanea DI UNA
COSTELLAZIONE
%%% ATTA A GARANTIRE LA COPERTURA CONTINUA DI UNA BASE
clc;
clear all;
close all;
% Dichiarazione delle costanti planetarie
J2=1.08263e-03; % J2 Terra
mi=398600.5; % Parametro gravitazionale terrestre
omega_E=((2*pi/0.997258)/(24*3600)) % Rotazione terrestre [rad/s]
R_E=6378.137; % Raggio terrestre
K=1.5*J2*(R_E^2)*sqrt(mi);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
incl=1.006992123507751e+002 % inclinazione [°]
i=incl*(pi/180); % inclinazione [rad]
I=cos(i);
a=[7.635149076771240e+003] % semiasse maggiore [km]
e=0.00 % eccentricità
Z=1-e^2;
Lamda_0=54.033153846153844 % Longitudine del nodo di inizio ciclo ]
Lamda_0=Lamda_0*pi/180 % Conversione in radianti
% Caratteristiche di periodicità
q=13
RAAN_dot=-(K*I)/(a^(7/2)*Z^2);
Dn=(2*pi)/(omega_E-RAAN_dot) % Giorno nodale [s]
Tn=Dn/q
[R m]=rat(q,0.0005)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
eps=5 % Elevazione minima in [°]
EPS=eps*pi/180 % Elevazione minima in [rad]
TETA=acos((R_E/a)*cos(EPS))-EPS % Semi-apertura in [rad]
teta=TETA*180/pi % Semi-apertura in [°]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x=-2.94; % COORDINATE CENTRO CERCHIO DI COPERTURA: LATIDUINE
y=40.187; % COORDINATE CENTRO CERCHIO DI COPERTURA: LONGITUDINE
r=teta;
ang=0:0.01:2*pi;
xp=r*cos(ang);
yp=r*sin(ang);

```

```

X=x+xp;
Y=y+yp;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Inserire in colonna 1 il progressivo che identifica il satellite, in
% colonna 2 l'identificativo del piano su cui è posto il satellite, in
% colonna 3 l'identificativo del satellite lungo il piano, in colonna 4 la
% fase in RAAN (in gradi) ed in colonna 5 la fase in anomalia media (in
% gradi)
COST=[1      1      1      0      0
2      1      2      3.006510402  320.9153648
3      1      3      6.013020804  281.8307295
4      1      4      9.019531206  242.7460943
5      1      5      12.02604161  203.6614591
...] % MATRICE DELLA COSTELLAZIONE (FORMATTARE COME SOPRA)
% Istante in cui verrà calcolata la posizione della costellazione (N.B. il
% tempo deve essere normalizzato rispetto al giorno nodale Dn)
for TT=1:21;
    t=(TT-1)*(1/20);
    tau=num2str(t);
    [N,M]=size(COST)
    figure(TT)
    % subplot(3,2,TT)
    geoshow('landareas.shp','FaceColor',[0.5 1.0 0.5])
    geoshow(X,Y,'DisplayType','line','LineStyle','-','Color','k',
'MarkerEdgeColor','auto','LineWidth',1.5);
    geoshow(x,y,'DisplayType','point','Color','k','MarkerEdgeColor',
'auto','LineWidth',2);
    xlim([-180 180])
    ylim([-90 90])
    title(['Posizione all'istante t=',tau],'FontSize',16)
    xlabel('Longitudine','FontSize',16)
    ylabel('Latitudine','FontSize',16)
    grid on
    hold on
    for l=1:N;
        Dm=COST(l,5)*pi/180;
        D_raan=COST(l,4)*pi/180;
        s=(t+(Dm/(2*pi*q)))*q;
        s=floor(s);
        s=s/q;
        phi(l)=asin(sin(i)*(sin(Dm+2*pi*q*t)));
        PHI(l)=phi(l)*180/pi;
        arg(l)=cos(i)*(tan(Dm+2*pi*q*t));
        alfa(l)=atan(arg(l));
        if t>(s+Tn/(Dn*4)-Dm/(2*pi*q)) && t<(s+(3*Tn)/(4*Dn)-Dm/(2*pi*q));
            alfa(l)=alfa(l)-pi;
        end;
        lambda(l)=Lamda_0+D_raan+alfa(l)-2*pi*t;
        LAMBDA(l)=lambda(l)*180/pi;
        if LAMBDA(l)<-180;
            LAMBDA(l)=LAMBDA(l)+360;
        end
        if ((LAMBDA(l)-y)^2+(PHI(l)-x)^2)<r^2;
            copertura(l)=1;
        else
            copertura(l)=0;
        end
        % subplot(3,2,TT)
        figure(TT)
        geoshow(PHI(l),LAMBDA(l),'DisplayType','point','Color','r',
'MarkerEdgeColor','auto','LineWidth',2);
        hold on
    end
end
end

```