

Modellazione reologica della prova di aderenza a compressione-taglio per compositi laminati vetro-vetro e vetro-metallo

Maurizio Froli, Matteo Lazzarotti

1. Introduzione

L'impiego crescente di vetro laminato (*LSG: Laminated Safety Glass*) nel campo delle strutture architettoniche ha posto in rilievo l'esigenza di stabilire per via sperimentale in modo affidabile e ripetibile le effettive proprietà adesive ed i legami costitutivi che gli intercalari plastici, quali PVB o SGP®, sviluppano in opera nelle unioni vetro-vetro e vetro-metallo.

Si è osservato che le proprietà meccaniche del materiale plastico già laminato risultano sostanzialmente diverse da quelle del materiale vergine perché una volta laminato il materiale può avere subito processi di anisotropia o di alterazione chimica per interazione con gli aderenti.

Sotto il profilo strettamente meccanico, osserviamo anche che nelle giunzioni reali l'adesivo è sistematicamente disposto in strato sottile tra due aderenti solitamente molto più rigidi quali vetro o metalli e che esso è sempre sottoposto a sforzi di scorrimento e a sforzi ortogonali al suo piano medio, per cui l'intercalare è soggetto a complessi stati triassiali di sforzo.

La determinazione sperimentale delle proprietà adesive di questi materiali plastici deve essere quindi necessariamente effettuata su campioni aventi dimensioni le più piccole possibile ma comunque finite e tali da consentire la riproduzione di tutte le proprietà locali della adesione in opera. La preparazione dei campioni deve perciò avvenire rispettando tutte le condizioni di laminazione presenti sul luogo di produzione, tra le quali principalmente: il grado di pulizia delle superfici affacciate, il lato (zinco o aria) sul quale avviene l'incollaggio, i cicli di pressione e temperatura in autoclave, l'umidità relativa dell'ambiente in cui è stoccato il materiale plastico.

Attorno alla vasta problematica della determinazione delle proprietà adesive e visco-elastiche in sito dei materiali plastici in lastre di vetro stratificato sono state condotte in passato, presso il Laboratorio Ufficiale per le Esperienze dei Materiali da Costruzione della Università di Pisa, numerose indagini sperimentali su campioni di grandi dimensioni [1], [2].

In epoca recente la Regione Toscana ha finanziato un programma triennale di ricerche teoriche e sperimentali, denominato SISMIVETRA, avente come obiettivo l'approfondimento delle conoscenze attorno alle proprietà adesive e visco-elastiche di giunzioni vetro-vetro e vetro-metallo dotate di intercalari plastici di diversa specie. Il programma delle ricerche si è concluso nel corso del 2013 e diversi interessanti risultati sono stati già pubblicati (v. [3], [4]) e richiamati in sintesi nel paragrafo seguente.

Le misure sperimentali sono state effettuate su alcuni campioni di lastre stratificate a doppio strato in vera grandezza e su molti campioni, composti da due piastrine di vetro, sottoposti a prove di aderenza mediante il test di compressione-taglio, meglio noto come "*Compression Shear Test*" (CST).

Questa metodologia di prova, nella quale lo strato aderente è sottoposto a sforzi di taglio e di compressione simultaneamente crescenti, si è dimostrata vantaggiosa rispetto ad altri test nei quali l'intercalare è sottoposto unicamente a sforzi di taglio perché in questi casi la rottura dell'aderendo vetro precede quella dell'adesivo plastico [5].

Nella presente nota viene presentato un semplice modello analitico interpretativo della prova CST, grazie al quale è possibile descrivere teoricamente, introducendo qualche ipotesi semplificativa, lo stato di tensione puntuale presente nell'adesivo e quin-

di, mediante un processo di confronto iterativo con i risultati sperimentali macroscopici, dedurre le caratteristiche di resistenza e rigidità locali del materiale plastico nelle condizioni in situ.

2. Prove Sperimentali

2.1 Generalità

Presso il Laboratorio Ufficiale per le Esperienze dei Materiali da Costruzione della Università di Pisa è stata condotta una serie di prove del tipo CST su macchina di prova universale INSTRON 1186 a controllo di spostamento (v. Fig. 2.1). Il programma comprendeva quattro serie di 30 provini, ciascuna individuata rispettivamente dalle sigle OR; OS; NR; NS. Le sillabe, che contraddistinguono il nome della serie, indicano nell'ordine il grado di umidità relativa del PVB al momento della realizzazione del provino e l'autoclave utilizzata per la sua realizzazione come di seguito illustrato.

O ⇒ PVB liberato da tempo dalla confezione protettiva e immagazzinato in ambiente con 60% di umidità relativa;

N ⇒ PVB intatto, appena liberato dalla confezione protettiva;

R ⇒ Autoclave Rober (pressione 9.4 bar, temperatura 146°C, durata fase di carico 20 min, durata fase di scarico 4 h)

S ⇒ Autoclave Silen (pressione 12 bar, temperatura 140°C, durata fase di carico 50 min, durata fase di scarico 2.30 h)

Ogni provino è costituito da due strati di vetro (aderendi) con bordi lavorati a filo lucido uniti mediante uno strato di PVB (adesivo).

Le dimensioni geometriche degli aderendi sono: *spessore* $t_g = 6.6$ mm; *larghezza* $b = 50$ mm; *lunghezza* $l = 50$ mm.

L'adesivo presenta le stesse dimensioni in pianta con uno *spessore* $t_p = 0.76$ mm.

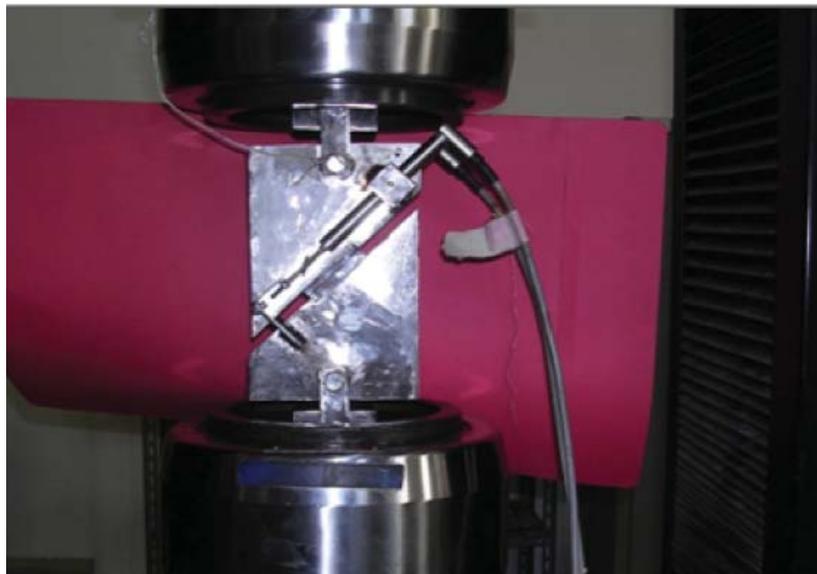


Figura 2.1 - Foto del dispositivo di prova CST

2.2 Prove CST

Le prove sono state eseguite ad una temperatura di 15°C, con una velocità di spostamento relativo delle teste della macchina di 5mm/min.

Con una scansione temporale di 0.42 s sono stati misurati la forza verticale F [kN] applicata ai blocchi di prova e lo scorrimento relativo totale δ [mm] tra i due strati di vetro del campione stratificato. Quest'ultimo è stato acquisito tramite due trasduttori induttivi, posti sulle due facce laterali del blocco di vincolo (Fig. 2.1) in maniera da poter effettuare una media delle due misure e rilevare eventuali spostamenti trasversali dovuti alla non perfetta planarità delle facce degli aderenti a contatto con i blocchi di prova.

I valori F - δ sono stati riportati in grafici (Fig 2.2) che hanno mostrato un comportamento macroscopico del PVB descrivibile tramite due fasi: una iniziale limitata a bassi valori di F , denominata dei Piccoli Spostamenti, in cui il legame forza-spostamento è quasi lineare e una seconda, denominata dei Grandi Spostamenti, che si mantiene fino a rottura e descrivibile in prima approssimazione tramite un secondo ramo lineare.

L'insieme delle due fasi può essere descritto nel piano F - δ da una bilatera che, se adottata quale legame costitutivo locale, permette di calcolare in forma chiusa la distribuzione delle tensioni tangenziali sull'adesivo.

In alternativa il legame globale F - δ può essere descritto più fedelmente da una legge quadratica e adottato ancora come legame locale, il calcolo delle tensioni tangenziali non può più essere effettuato in questo caso in forma chiusa ma solo numericamente.

Nel seguito verranno utilizzate entrambe le ipotesi descrittive del legame locale ai fini del calcolo (in forma continua oppure discreta) della variazione delle tensioni tangenziali sull'adesivo.

Nota la distribuzione delle tensioni tangenziali, il valore medio teorico (τ_{yxm}), può essere confrontato con quello sperimentale e fornire una indicazione sulla affidabilità del procedimento.

Dalla conoscenza dello scorrimento angolare, pari allo scorrimento medio rilevato dagli induttivi diviso per lo spessore del PVB, e della τ_{yxm} corrispondente si può ricavare per punti la curva τ - γ dalla quale possiamo trovare un nuovo valore del Modulo

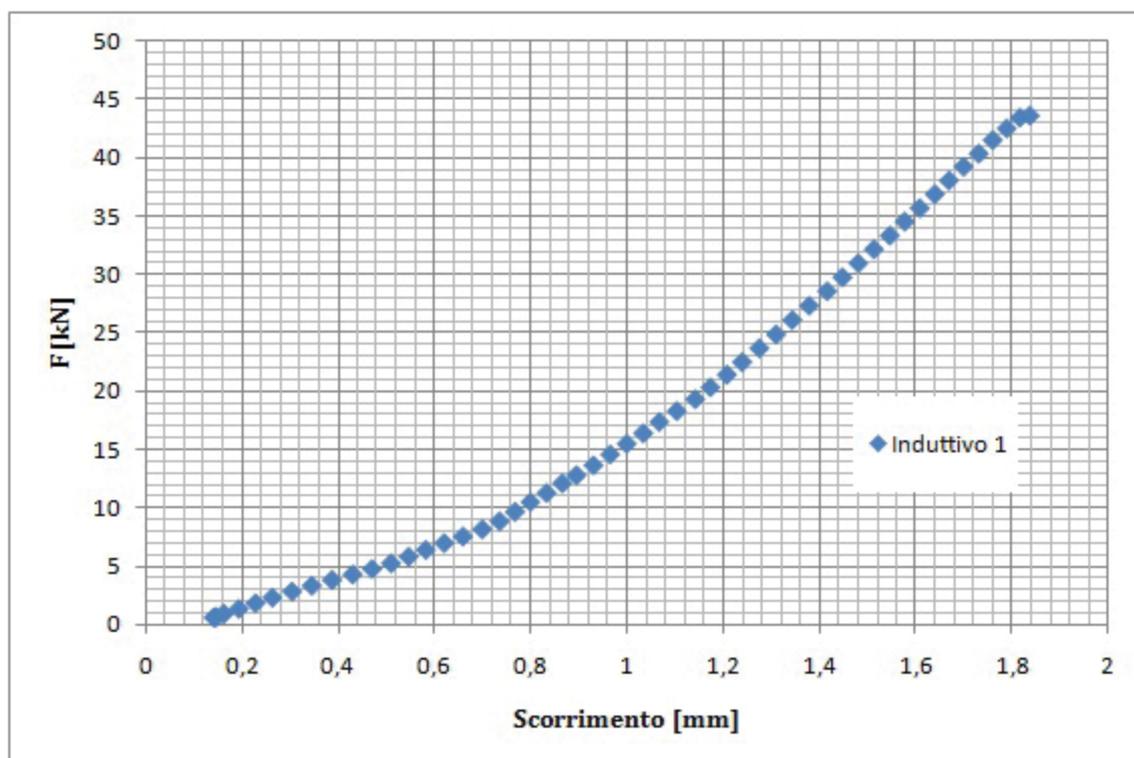


Figura 2.2 - Grafico sperimentale forza-scorrimento relativo

di Elasticità Tangenziale che ci permette, tramite la sopra citata legge, di ricalcolare una nuova tensione tangenziale media.

Per cui, tramite un semplice procedimento iterativo, si arriva alla determinazione dello stato di sollecitazione gravante sul PVB, che ci permette di determinare il valore medio della tensione tangenziale che produce la delaminazione del provino. Per ulteriori informazioni si rimanda in [8] in cui viene esposto il procedimento considerando un'interpolazione lineare dei dati.

3. Modellazione analitica della prova CST

3.1 Sollecitazioni trasmesse dalla macchina di prova al campione

La macchina di prova impone una forza F puntuale sui blocchi di serraggio del provini. L'effetto di tale forza, per la sagomatura dei blocchi, si esplica tramite una forza di compressione N , normale al piano del provino e una di taglio T agente parallelamente al piano di scorrimento. In Figura 3.1 viene riportato uno schema descrittivo della prova.

Poiché il piano di scorrimento è inclinato di 45° rispetto alla retta di applicazione della forza esterna F , ed in considerazione della preponderante rigidità dei blocchi di acciaio che costituiscono il dispositivo di prova, rispetto alla rigidità dei materiali costituenti il provino, sembra accettabile, e sistematicamente adottata, l'ipotesi che le due componenti della forza F , siano tra loro ortogonali ed egualmente intense (v. Fig.3.1):

$$N = T = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

Si ipotizza inoltre la costanza delle varie grandezze sulla larghezza b del campione, ossia la loro indipendenza dalla coordinata locale z ortogonale al piano di rappresentazione.

La forza T è scomponibile in una distribuzione di tensioni tangenziali da attrito statico $f_{yx}(x)$, presenti sull'interfaccia lato N e in una distribuzione di pressioni di contatto $p_x(y)$, presenti sull'interfaccia lato T .

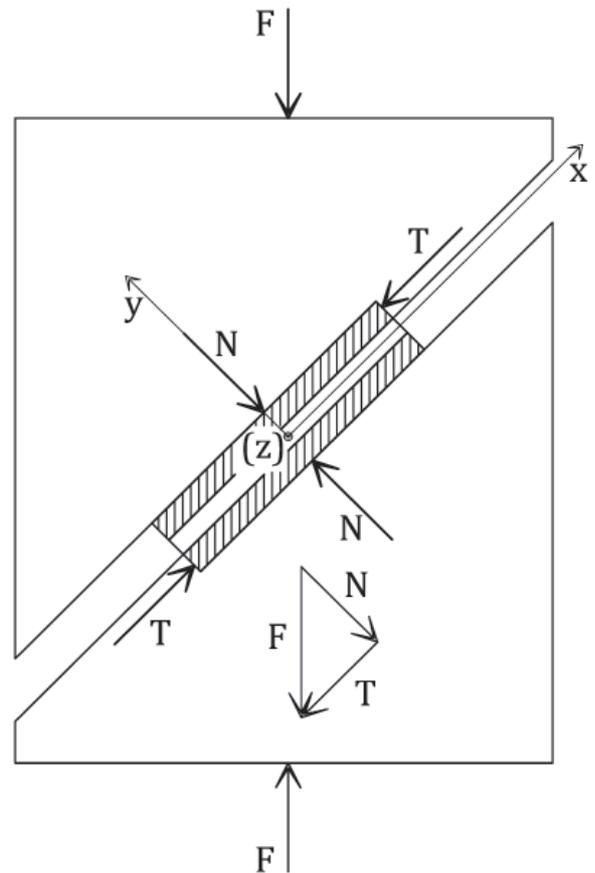


Figura 3.1 - Schema del dispositivo di prova e forze agenti sul campione

A rigore la $p_x(y)$ varia sullo spessore t_g di ciascuna piastrina ma può essere assunta uniformemente distribuita su di esso a causa della dimensione ridotta di t_g (Fig. 3.2).

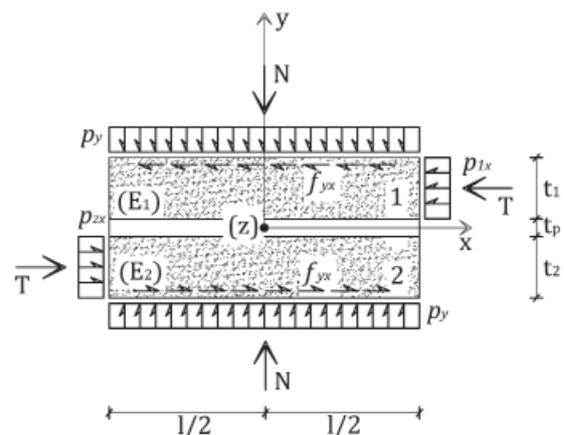


Figura 3.2 - Forze N e T e loro effetti sul provino

Per la considerazione fatta sulla rigidità dell'acciaio nei confronti di quella del vetro, si può pensare che la forza N produca una distribuzione uniforme di pressioni di contatto

$$(3.1) \quad p_y(x) = p_y = \frac{N}{bl}$$

Di conseguenza anche le forze di attrito $f_{yx}(x)$ sono costanti sull'interfaccia superiore e pari a

$$(3.2) \quad f_{yx} = \frac{\mu N}{bl}$$

Dove μ è il coefficiente di attrito statico tra vetro e acciaio variabile tra 0.5 e 0.7. Nel caso in esame è stato assunto il valore intermedio $\mu=0.6$.

Detto ciò la risultante delle forze di attrito risulta pari a

$$(3.3) \quad F_f = \mu N$$

Dalla differenza tra T e la risultante F_f si ricavano le p_{ix} , dove si conviene che il pedice $i = 1$ si riferisca alla lamina superiore e il pedice $i = 2$ alla lamina inferiore.

$$(3.4) \quad p_{ix} = \frac{(1 - \mu)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{F}{bt_i}$$

3.2 Stato di sforzo interno al provino

Così definite le condizioni al contorno del problema schematizziamo i due aderendi come due aste prismatiche di sezione b t_i e l'adesivo tramite una distribuzione uniforme di molle elastiche agenti in direzione x e dotate di rigidità $k(\gamma)$ funzione dello scorrimento angolare γ tramite la relazione (3.5), conseguenza di quanto esposto nel par. 2.2. (v. Fig. 3.3).

$$(3.5) \quad k(\gamma) = \frac{G_p(\gamma)}{t_p}$$

Al modello così ottenuto applichiamo un cinematico tale da produrre una traslazione relativa tra le due aste (Fig. 3.4).

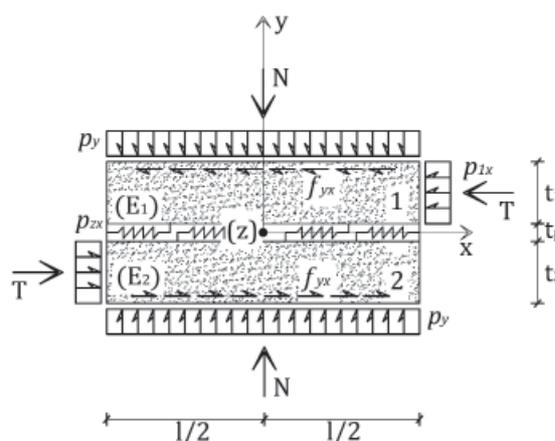


Figura 3.3 - Modello elastico

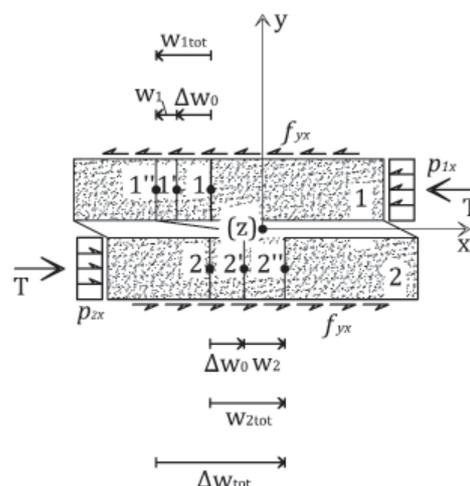


Figura 3.4 - Cinematismo

Siano:

- Δw_{tot} = scorrimento totale tra le parti (1) e (2);
- Δw_0 = spostamento che l'estremo sinistro di (1) e l'estremo destro di (2) subiscono per effetto dello scorrimento angolare del materiale plastico;
- w_{1tot} = spostamento assoluto di un punto generico dell'asta (1);
- w_{2tot} = spostamento assoluto di un punto generico dell'asta (2);
- w_1 = spostamento elastico di un punto dell'asta (1);
- w_2 = spostamento elastico di un punto generico dell'asta (2).

Vale che

$$w_{1tot} = w_1 + \Delta w_0, \quad w_{2tot} = w_2 + \Delta w_0,$$

$$\Delta w_{tot} = w_{1tot} - w_{2tot} = w_1 + w_2 + 2 \Delta w_0$$

Analizzando l'equilibrio alla traslazione in direzione x di un tratto elementare dell'asta (1) e dell'asta (2), lungo dx e largo b , (v. Fig. 7),

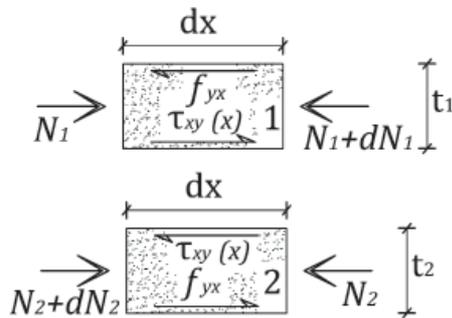


Figura 3.5 - Equilibrio degli elementi infinitesimi

risulta:

$$\frac{dN_1}{dx} + b \cdot (f_{yx} - \tau_{yx}(x)) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{dN_2}{dx} + b \cdot (\tau_{yx}(x) - f_{yx}) = 0$$

Ma per l'analogia elastica precedentemente esposta si può porre

$$(3.7) \quad \tau_{yx}(x) = k(\gamma) \cdot \Delta w_{tot}$$

dove $k(\gamma)$, rigidezza della molla elementare della distribuzione funzione dello scorrimento, è equivalente al rapporto tra il modulo di elasticità tangenziale dell'intercalare plastico $G_p(\gamma)$ diviso per il suo spessore t_p . Sostituendo la (3.7) nelle (3.6) si ottengono le Eq. (3.8)

$$(3.8) \quad \frac{dN_1}{dx} + b \cdot (f_{yx} - k(\gamma) \cdot \Delta w_{tot}) = 0$$

$$\frac{dN_2}{dx} + b \cdot (f_{yx} - k(\gamma) \cdot \Delta w_{tot}) = 0$$

Data la caratteristica del vetro di mantenersi in regime elastico lineare fino a rottura si può porre

$$(3.9) \quad \varepsilon_{1x}(x) = \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_{1tot}}{dx} = \frac{1}{E_1} \cdot (\sigma_{1x}(x) - \nu_1 \cdot p_y)$$

$$\varepsilon_{2x}(x) = \frac{dw_2}{dx} = \frac{dw_{2tot}}{dx} = \frac{1}{E_2} \cdot (\sigma_{2x}(x) - \nu_2 \cdot p_y)$$

nelle quali i simboli E_i , ν_i , σ_i ($i = 1,2$) indicano rispettivamente il modulo di elasticità normale, il coefficiente di contrazione laterale e lo sforzo assiale delle lamine di vetro.

Trascurando il contributo offerto dalle sollecitazioni p_y alla deformazione, e derivando le (3.9) si ottengono le (3.10) che legano le derivate seconde degli spostamenti totali delle aste allo stato di sollecitazione gravante sulla superficie della lamina

$$\frac{d^2}{dx^2} w_{1tot} = \frac{1}{E_1} \cdot \frac{d\sigma_{1x}(x)}{dx} = \frac{1}{E_1 t_1} \cdot (k(\gamma) \cdot \Delta w_{tot} - f_{yx})$$

(3.10)

$$\frac{d^2}{dx^2} w_{2tot} = \frac{1}{E_2} \cdot \frac{d\sigma_{2x}(x)}{dx} = \frac{1}{E_2 t_2} \cdot (k(\gamma) \cdot \Delta w_{tot} - f_{yx})$$

Sommando membro a membro i termini delle (3.10) si ottiene la Eq. (3.11)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (w_{1tot} + w_{2tot}) &= \\ &= k(\gamma) \cdot \Delta w_{tot} \left(\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) - f_{yx} \left(\frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) \end{aligned}$$

(3.11)

ponendo le quantità tra parentesi del secondo membro pari ad α si ottiene l'equazione differenziale ordinaria (3.12)

$$(3.12) \quad \frac{d^2}{dx^2} \Delta w_{tot} = k(\gamma) \cdot \Delta w_{tot} \alpha - f_{yx} \alpha$$

che risulta una estensione della equazione differenziale introdotta in [6] che a sua volta è una forma estesa dell'equazione di Bresson-Hermite.

Facendo l'equilibrio alla traslazione di una sezione generica del provino, ottenuta tramite l'intersezione di questo con un piano avente normale parallela

all'asse x , si ottiene l'Eq. (3.13) che lega tra di loro gli sforzi assiali nelle aste (aderendi) (3.13)

$$\sigma_{1x}(x) \cdot t_1 \cdot b + \sigma_{2x}(x) \cdot t_2 \cdot b = \frac{(1-\mu)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{F}{b \cdot t_1} \cdot b \cdot t_1$$

Le Eq.ni (3.13), (3.8) e (3.9) ci permettono di scrivere la derivata dell'Eq. (3.12) nella forma

$$(3.14) \quad \frac{d^2}{dx^2} \sigma_{1x}(x) = k_\alpha \cdot \sigma_{1x}(x) - C_\alpha$$

in cui:

$$k_\alpha = k(\gamma) \cdot \alpha$$

$$C_\alpha = \frac{k(\gamma)}{E_2} \cdot \frac{(1-\mu)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{F}{b \cdot t_1 \cdot t_2}$$

La (3.14) coincide formalmente con la equazione dedotta da Volkersen [7].

Nei campioni considerati in questo studio i due aderendi sono dello stesso materiale e dello stesso spessore per cui, $E_1=E_2=E_g$ e $t_1=t_2=t_g$. Considerando queste uguaglianze i coefficienti della (3.14) e l'equazione (3.4) assumono la forma

$$k_\alpha = k(\gamma) \cdot \left(\frac{2}{E_g t_g} \right)$$

$$C_\alpha = \frac{k(\gamma)}{E_g} \cdot \frac{(1-\mu)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{F}{b \cdot t_g^2}$$

$$p_x = \frac{(1-\mu)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{F}{b \cdot t_g}$$

A questo punto, per poter procedere con l'integrazione dell'Eq. (3.14) bisogna scegliere che modello di interpolazione dei dati vogliamo considerare. Inizialmente consideriamo quello di tipo bilineare, per cui la $k(\gamma) = costante$ pari alla tangente dell'angolo che la retta di interpolazione forma con l'asse delle ascisse. In questo caso l'integrale generale è pari a

$$(3.15) \quad \sigma_{1x}(x) = D_1 \cdot e^{\beta x} + D_2 \cdot e^{-\beta x} + \frac{C_\alpha}{\beta^2}$$

dove $\beta = \sqrt{k_\alpha}$. Le costanti D_1 e D_2 si ottengono imponendo le seguenti condizioni al contorno (della lamina 1):

$$\sigma_{1x} \left(-\frac{l}{2} \right) = 0$$

$$\sigma_{1x} \left(\frac{l}{2} \right) = \frac{(1-\mu)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{F}{b \cdot t_g}$$

e risultano pari a

$$D_1 = \left[\frac{(1-\mu)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{F}{b \cdot t_g} \cdot \frac{-e^{-\beta \frac{l}{2}}}{\left(e^{\beta \frac{l}{2}} - e^{-\beta \frac{l}{2}} \right)} - \frac{C_\alpha}{\beta^2} \right] \cdot \frac{1}{\left(e^{-\beta \frac{l}{2}} + e^{\beta \frac{l}{2}} \right)}$$

$$D_2 = \left[\frac{(1-\mu)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{F}{b \cdot t_g} \cdot \frac{e^{-\beta \frac{l}{2}}}{\left(e^{\beta \frac{l}{2}} - e^{-\beta \frac{l}{2}} \right)} - \frac{C_\alpha}{\beta^2} \right] \cdot \frac{1}{\left(e^{-\beta \frac{l}{2}} + e^{\beta \frac{l}{2}} \right)}$$

Mediante semplici passaggi algebrici, notando che il termine C_α/β^2 è trascurabile e che le dimensioni del provino $e^{\beta l} \approx 1$ si nota che $D_1 \approx -D_2$.

In conclusione si trova che l'andamento delle tensioni assiali nell'asta superiore del provino (asta 1) è dato dalla Eq. (3.16)

$$(3.16)$$

$$\sigma_{1x}(x) = \frac{C_\alpha}{\beta^2} + \left[p_x \cdot \frac{-e^{-\beta \frac{l}{2}}}{\left(e^{\beta \frac{l}{2}} - e^{-\beta \frac{l}{2}} \right)} - \frac{C_\alpha}{\beta^2} \right] \cdot \frac{(e^{-\beta \cdot x} + e^{\beta \cdot x})}{\left(e^{-\beta \frac{l}{2}} + e^{\beta \frac{l}{2}} \right)}$$

Derivando la (3.16) e sostituendola nella prima delle (3.6) si ottiene la legge di variazione delle tensioni tangenziali agenti sull'adesivo

$$(3.17)$$

$$\tau_{yx}(x) = \left[p_x \cdot \frac{-e^{-\beta \frac{l}{2}}}{\left(e^{\beta \frac{l}{2}} - e^{-\beta \frac{l}{2}} \right)} - \frac{C_\alpha}{\beta^2} \right] \cdot \beta \cdot t_g \cdot \frac{(e^{-\beta \cdot x} + e^{\beta \cdot x})}{\left(e^{-\beta \frac{l}{2}} + e^{\beta \frac{l}{2}} \right)} + f_{yx}$$

Diagrammando la precedente relazione si ottiene la Fig. 3.6.

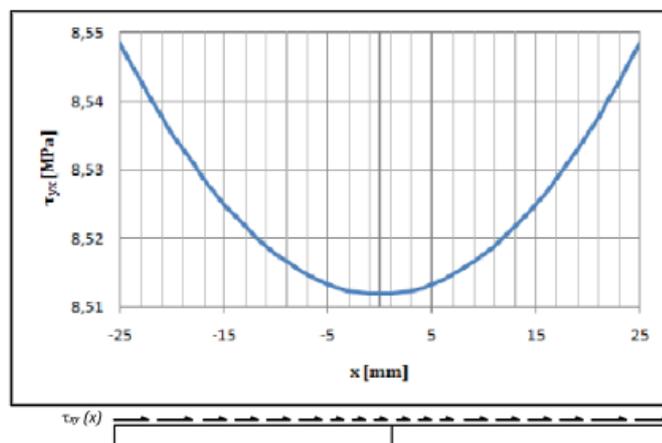


Figura 3.6 - Andamento delle τ_{yx}

Da tale figura si possono trarre le seguenti deduzioni:

- le tensioni tangenziali massime sono localizzate all'estremità del provino; tale concentrazione è dovuta dalle differenti proprietà elastiche tra aderendi e adesivo, tipica delle giunzioni tra due elementi molto differenti in termini elastici;
- l'andamento delle $\tau_{yx}(x)$ è simmetrico rispetto al sistema di riferimento adottato; tale condizione di simmetria produce una semplificazione nel procedimento utilizzato per la determinazione dello stato tensionale agente sull'adesivo, nella fase di transizione in cui il PVB cambia rigidezza, che verrà esposto nel capitolo 4.

4. Caratteristiche meccaniche prestazionali

Dalla legge delle $\tau_{yx}(F, x)$ si sono determinate le caratteristiche meccaniche medie del PVB, relative a ciascuna serie di provini:

- Moduli di Elasticità Tangenziale media " G_p " relativi alle due fasi (*Piccoli e Grandi spostamenti*);
- Tensione tangenziale media di scorrimento, τ_{yx} , calcolata in corrispondenza di F_y , limite superiore fase dei *Piccoli spostamenti*;
- Tensione tangenziale media massima, τ_{yxu} , calcolata in corrispondenza di F_u che produce la delaminazione del provino.

Di seguito si riporta l'algoritmo di calcolo utilizzato per la risoluzione del problema non lineare che si riscontra nella zona di transizione, in cui avviene il cambiamento di rigidezza del PVB.

Nello specifico, in questa zona coesistono tre situazioni differenti:

- due localizzate agli estremi del provino, in cui le tensioni tangenziali hanno superato il valore di τ_{yx} per cui il PVB ha rigidezza pari a k_1+k_2 ;
- una collocata nella parte centrale in cui il PVB ha rigidezza k_1 .

Per determinare le rigidzze delle molle è utile riferirsi alla Fig. 4.1; da cui si deduce che $k_1=Gp'/t_p$ e $k_2=Gp''/t_p-k_1$.

Lo stato tensionale di queste parti viene descritto da tre differenti equazioni differenziali del secondo

ordine, uguali alla Eq. (3.15), con condizioni al contorno incognite. In Fig. 4.2 si riporta una rappresentazione grafica della situazione che si viene a creare nella piastrina 1.

Si noti che per condizioni di simmetria l'estensione delle lamine estreme è identica, questo facilita il procedimento riducendo il numero di passaggi.

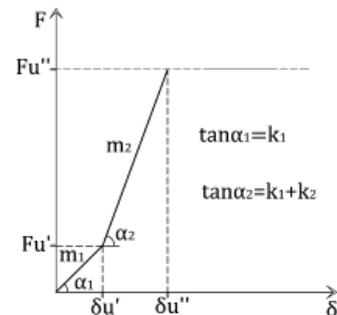
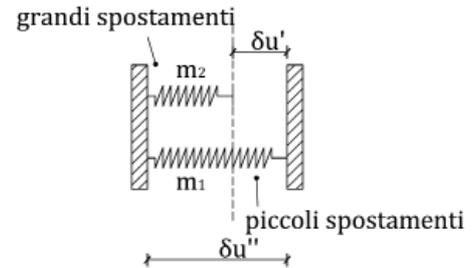


Figura 4.1 - Analogia meccanica per la determinazione delle rigidzze

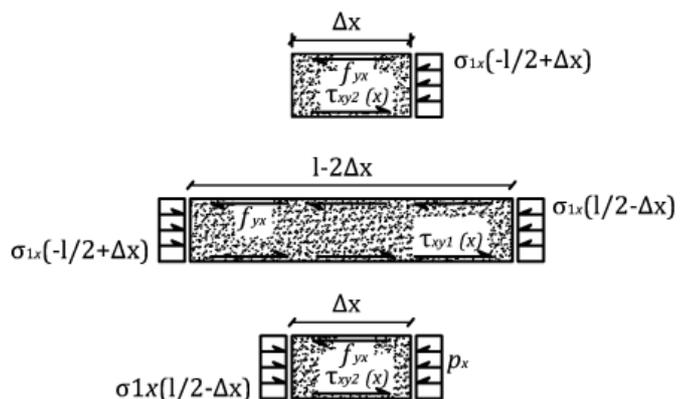


Figura 4.2 - Rappresentazione grafica delle tre fasi sulla piastrina 1e

Siano:

- $\sigma_{1x}(l/2-\Delta x)$ tensione assiale in corrispondenza di $x = l/2-\Delta x$
- $\sigma_{1x}(-l/2+\Delta x)$ tensione assiale in corrispondenza di $x = -l/2+\Delta x$
- $\tau_{yx}(x)$ tensione tangenziale prodotta dall'intercalare plastico avente rigidezza pari a k_1

- $\tau_{yx2}(x)$ tensione tangenziale prodotta dall'intercalare plastico avente rigidezza pari a $k_1 + k_2$
- Δx intervallo in cui la $\tau_{yx}(x) > \tau_{yxy}$

Imponendo l'equilibrio alla traslazione delle tre parti si ottiene il sistema costituito dalle Eq.ni (4.1), (4.2), (4.3):

$$\sigma_{1x}(\lambda) \cdot b \cdot t_g + b \cdot \int_{\lambda}^{\frac{l}{2}} \tau_{yx2}(x) dx - f_{yx} \cdot b \cdot \Delta x - p_x \cdot b \cdot t_g = 0 \quad (4.1)$$

$$\sigma_{1x}(\lambda) \cdot b \cdot t_g + b \cdot \int_{\lambda}^{\frac{l}{2}} \tau_{yx2}(x) dx - f_{yx} \cdot b \cdot \Delta x - p_x \cdot b \cdot t_g = 0 \quad (4.2)$$

$$\sigma_{1x}(-\lambda) \cdot b \cdot t_g + b \cdot \int_{-\lambda}^{\frac{l}{2}} \tau_{yx1}(x) dx - f_{yx} \cdot b \cdot (l - 2 \cdot \Delta x) - \sigma_{1x}(\lambda) \cdot b \cdot t_g = 0 \quad (4.3)$$

$$-\sigma_{1x}(-\lambda) \cdot b \cdot t_g + b \cdot \int_{-\lambda}^{\frac{l}{2}} \tau_{yx2}(x) dx - f_{yx} \cdot b \cdot \Delta x = 0$$

dove si è posto $\lambda = (l/2 - \Delta x)$ e $-\lambda = (-l/2 + \Delta x)$.

La soluzione del sistema non risulta immediata per cui si è ricorso al seguente algoritmo, di cui si riporta il generico passo k :

1. Determinazione del valore di F che produce all'estremo della lamina una $\tau_{yx1}(F, x) = \tau_{yxy}$ tramite l'Eq. (3.17);
2. Si aumenta il valore di F tramite incrementi di $\Delta F = 0.001 \text{ kN}$, definendo così $F_1 = F + \Delta F$;
3. Si calcola per quale valore di x la $\tau_{yx1}(F_1, x) = \tau_{yxy}$ e si associa il simbolo λ^k ;
4. Definiamo $\Delta x^k = l/2 - \lambda^k$;
5. Calcoliamo il valore di B^k , dato dall'Eq. (4.4)

$$(4.4) \quad B^k = \int_{\lambda^k}^{\frac{l}{2}} \tau_{yx1}(F_1, x) dx$$

6. Dalla (4.1) si ricava $\sigma_{1x}(\lambda^k) = a^k$. Questa è la seconda condizione al contorno dell'equazione differenziale, simile alla Eq. (3.15), scritta per la lamina di estremità "positiva";
7. Conoscendo entrambi le condizioni al contorno ($\sigma_{1x}(\lambda^k) = a^k$, $\sigma_{1x}(l/2) = px$) si risolve l'Eq. (4.5),

$$(4.5) \quad \sigma_{1x}^k(x) = D_1^k \cdot e^{\beta(k_2)x} + D_2^k \cdot e^{-\beta(k_2)x} + \frac{C_a(k_2, F_1)}{\beta(k_2)^2}$$

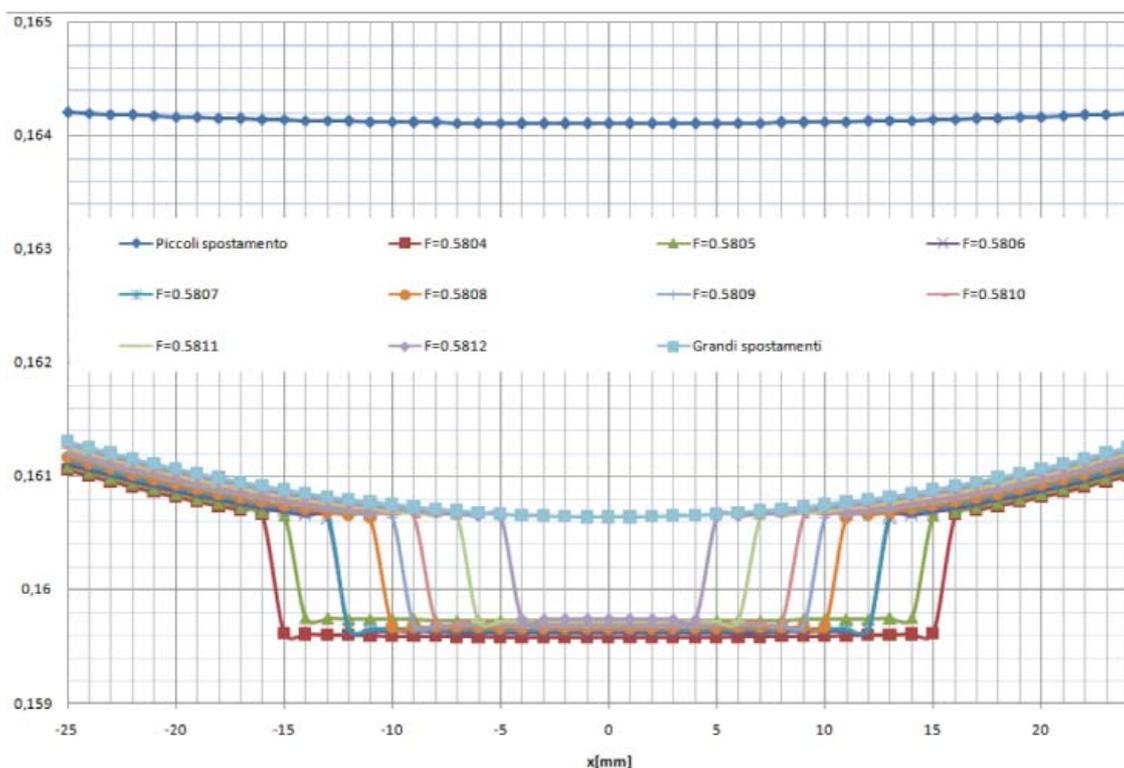


Figura 4.3 - Andamento tensioni nella fase di transizione

8. Per derivazione della Eq. (4.5) si ottiene la legge di variazione della $\tau_{yx2}^k(F, x)$;
9. Si calcola per quale valore di x la $\tau_{yx2}^k(F, x) = \tau_{xy}$ e si associa il simbolo λ^{k+1} ;
10. Definiamo $\Delta x^{k+1} = l/2 - \lambda^{k+1}$ e si effettua il test di convergenza, $|\Delta x^{k+1} - \Delta x^k| < 0.001$:
 - non verificato, si continua il procedimento con la determinazione di:

$$A^k = \int_{\lambda^k}^{\frac{l}{2}} \tau_{yx2}^k(F, x) dx$$

dopo di che si continua nei successivi passi fino alla convergenza;

- verificato, la $\tau_{yx2}^k(F, x) = \tau_{yx2+}^k(F, x)$ definitiva e la $\Delta x^{k+1} = \Delta x$ estensione della lamina di estremità in cui il mio intercalare si trova tutto con rigidità $k_1 + k_2$. A questo punto disponiamo di tutti i dati per risolvere la lamina di estremità negativa, dalla cui risoluzione si ricava la seconda condizione al contorno per risolvere la lamina centrale.

In Fig. 4.3 si riporta l'andamento delle tensioni tangenziali nell'adesivo al variare di F fino a completa estinzione della parte centrale in cui la $\tau_{yx}(x) < \tau_{yx}$.

Dalla Fig. 4.3 si osserva:

- il cambiamento di rigidità delle zone terminali comporta uno scarico dello stato tensionale nella zona intermedia;
- tramite successivi incrementi di F si determina, utilizzando l'algoritmo trovato, il valore di F_y . Questo è con buona approssimazione uguale al valore che ci fornisce la elaborazione dei dati di prova.

Basandoci su queste osservazioni si può dare un giudizio positivo all'algoritmo proposto.

Lo stesso algoritmo può essere utilizzato anche nel caso in cui la interpolazione della fase dei *Grandi spostamenti* avvenga tramite curva parabolica, in quanto si può considerare nell'intorno della fase di transizione una interpolazione lineare.

5. Interpolazione parabolica

5.1 Considerazioni generali

Tramite questa interpolazione la rigidità della molla equivalente, $k(\gamma)$, assume la forma espressa nell'Eq. (5.1),

$$(5.1) \quad k(\gamma) = \frac{G_p(\gamma)}{t_p} = \frac{A \cdot \tau^2 + B \cdot \tau + C}{t_p}$$

in cui le costanti A, B, C sono ricavate tramite procedimento statistico dei dati e variano al variare del gruppo di appartenenza del provino (NR, OR, NS, OS). In Fig. 5.1 viene riportato l'andamento in funzione γ del modulo di elasticità tangenziale.

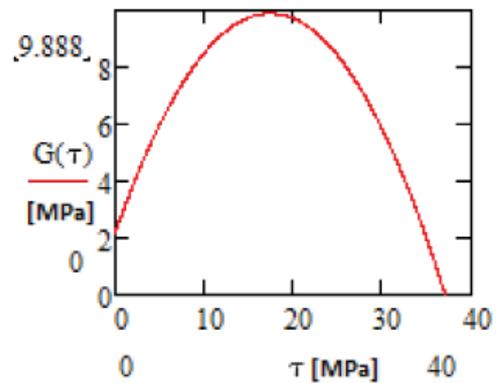


Figura 5.1 - Andamento $G_p(\gamma)$

In queste condizioni l'integrazione dell'Eq. (3.15) non è riconducibile ad un procedimento ordinario.

Per la risoluzione del problema quindi si è sviluppato il procedimento di seguito esposto, che si basa sulla suddivisione del provino in n blocchi elementari a ciascuno dei quali si impongono le condizioni di equilibrio e congruenza. Risultato finale è un sistema di $n+1$ equazioni in $n+1$ incognite.

5.2 Procedimento risolutivo

Le due lamine di vetro, costituenti il provino, vengono suddivise in n conci di pianta quadrata (lato Δx) e altezza pari a t_g . Attraverso questo procedimento siamo passati da un insieme aderendo-adesivo ad n insiemi della stessa specie che devono soddisfare singolarmente le condizioni di equilibrio e di congruenza originarie.

Si semplifica la verifica di queste condizioni tramite la seguente ipotesi:

- le tensioni tangenziali τ_i all'interfaccia Vetro-PVB vengono considerate variabili solo longitudinalmente e costanti per ogni elemento (Fig 5.2).

Tale ipotesi ci permette di considerare per la risoluzione del problema la sola linea di elementi, posti in mezzeria lungo la direzione longitudinale.

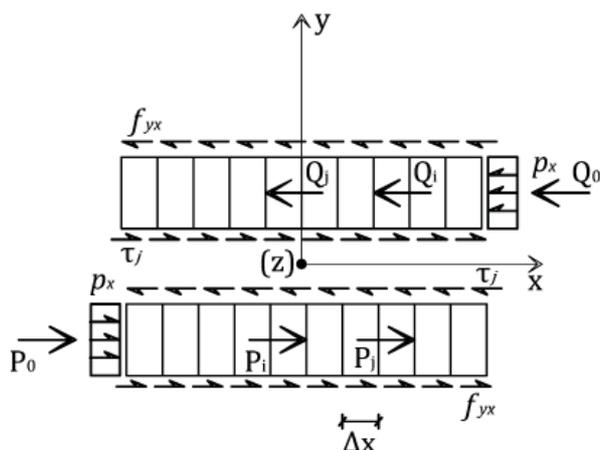


Figura 5.2 - Discretizzazione provino

Detti Q_{i-1} e Q_i i valori dello sforzo normale agenti rispettivamente sulle facce di destra e di sinistra del concio i-esimo, l'accorciamento di tale concio è dato dall'Eq. (5.2):

$$(5.2) \quad w_{1ei} = \frac{Q_{i-1} + Q_i}{2 \cdot E_g \cdot t_g}$$

L'accorciamento della metà sinistra del concio è dato dall'Eq. (5.3):

$$(5.3) \quad w_{1ei}^s = \frac{Q_{i-1} + 3 \cdot Q_i}{8 \cdot E_g \cdot t_g}$$

Siano:

- w_0 spostamento rigido della lamina superiore (che sarà pari per la polar simmetria a quello della lamina inferiore);
- w_{1tot} lo spostamento totale della lamina superiore, pari alla somma tra lo spostamento rigido, più la somma dei vari contributi elastici forniti dai vari concio.

Con la definizione di queste grandezze si può esprimere tramite la Eq. (5.4) lo spostamento del punto centrale appartenente al concio i-esimo.

$$(5.4) \quad w_{1i} = w_{1tot} - w_0 - \sum_{j=1}^{i-1} w_{1ei} - w_{1ei}^s$$

Stesse considerazioni si possono fare per la lamina inferiore, con l'avvertenza che la numerazione dei vari concio si svilupperà in senso opposto. Quindi, anche per questa possiamo definire lo spostamento del punto centrale appartenente al concio i-esimo, tramite la Eq. (5.5):

$$(5.5) \quad w_{2i} = w_{2tot} - w_0 - \sum_{j=1}^{i-1} w_{2ei} - w_{2ei}^d$$

con il seguente significato dei simboli:

- w_0 spostamento rigido della lamina inferiore;
- w_{2tot} spostamento totale della lamina inferiore;
- w_{2ei} Eq. (5.6);
- w_{2ei}^d Eq.(5.7).

$$(5.6) \quad w_{2ei} = \frac{P_{i-1} + P_i}{2 \cdot E_g \cdot t_g}$$

$$(5.7) \quad w_{2ei}^d = \frac{P_{i-1} + 3 \cdot P_i}{8 \cdot E_g \cdot t_g}$$

Gli sforzi assiali Q_i , P_i si esprimono tramite le Eq.ni (5.8), (5.9):

$$(5.8) \quad Q_i = Q_0 + f_{yx} \cdot i - \sum_{j=1}^i \tau_j$$

$$(5.9) \quad P_i = P_0 + f_{yx} \cdot i - \sum_{j=1}^i \tau_j$$

Lo scorrimento relativo tra il concio i-esimo superiore e quello inferiore è dato dall'Eq. (5.10):

$$(5.10) \quad \Delta w_{Ni} = \Delta w_{tot} - (w_{1i} + w_{2i})$$

Gli spostamenti dei punti centrali dei concio si possono trovare tramite la soluzione del problema elastico Fig. 5.3.

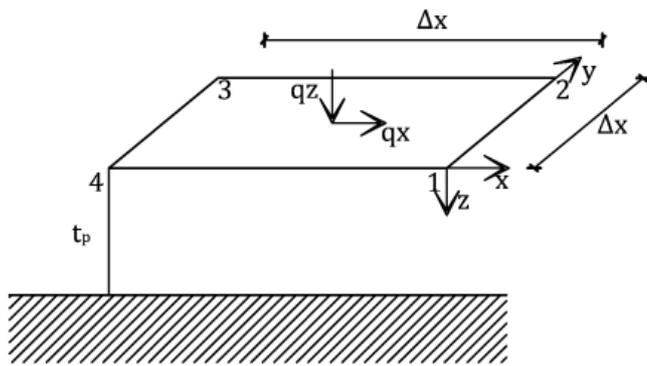


Figura 5.3 - Problema elastico

Riferendosi alla Fig. 5.3 per l'angolo 1, angolo contenuto nel quadrante xy positivo, lo spostamento è espresso dall'Eq. (5.11):

$$(5.11) \quad w_{ij} = q_j \cdot \frac{t_p}{E_p} \cdot (1 + \nu) I_{ij}$$

dove $I_{ij} = {}_0m_{ij} + {}_1m_{ij}\nu + {}_2m_{ij}\nu^2$ in cui i pedici ij permutano in x, y, z.

I fattori di influenza ${}_0m_{ij}$, ${}_1m_{ij}$ e ${}_2m_{ij}$ per l'angolo 1 sono diagrammati in funzione del rapporto $\Delta x/t_p$. Si nota inoltre che ${}_2m_{xx} = {}_2m_{xy} = {}_2m_{yy} = 0$.

Lo spostamento totale dell'angolo 1 viene fornito dall'Eq. (5.12):

$$(5.12) \quad w_i(k) = w_{ix}(k) + w_{iy}(k) + w_{iz}(k)$$

in cui l'indice i indica la direzione dello spostamento e x, y, z il verso della pressione.

Per il problema in esame: $q_x = \tau_i$, $q_y = 0$, $q_z = F/\text{rad}(2)bl$.

Esplicitando l'Eq. (5.12) per i quattro angoli in direzione longitudinale, e facendo la media aritmetica dei quattro spostamenti individuati di conseguenza, si ottiene la Eq. (5.13) che rappresenta semplicemente lo spostamento del punto centrale:

$$(5.13) \quad w_{ix} = \frac{w_x(1) + w_x(2) + w_x(3) + w_x(4)}{4} = \frac{t_p}{2 \cdot G_p(\tau_i)} \cdot (q_x \cdot I_{xx})$$

in cui si è considerato, dato lo spessore ridotto dello strato in PVB, un modulo di Poisson pari a 0.5.

Facendo gli stessi passaggi per la lamina inferiore, si ottiene lo scorrimento relativo tra il concio i-esimo superiore ed inferiore (Eq. (5.14)).

$$(5.14) \quad \Delta w_{Ti} = \frac{t_p}{G_p(\tau_i)} \cdot (q_x \cdot I_{xx})$$

Imponendo la condizione perfetta aderenza tra Vetro e PVB per ogni concio considerato si ottengono n equazioni della forma (Eq. (5.15)):

$$(5.15) \quad \Delta w_{Ni} - \Delta w_{Ti} = 0$$

Imponendo l'equilibrio totale alla striscia di elementi considerati si ottiene l'Eq. (5.16):

$$(5.16) \quad \sum_{j=1}^n \tau_j = \frac{F}{\sqrt{2} \cdot b \cdot \Delta x}$$

L'insieme delle (5.15), (5.16) costituisce un sistema di n+1 equazioni in n+1 incognite (τ_i (n), w_o (1)). Si osserva che le Eq.ni (5.15) sono quadratiche in τ_i , per cui si è presa in considerazione la radice più vicina al valore della tensione tangenziale calcolata considerando il $G(\gamma) = \text{cost}$.

In Fig. 5.4 si riporta il confronto tra gli andamenti delle tensioni tangenziali gravanti sul PVB, calcolate considerando un $G(\gamma) = \text{cost}$ (linea blu) ed un $G(\gamma) = A \tau_i^2 + B \tau_i + C$ (linea rossa).

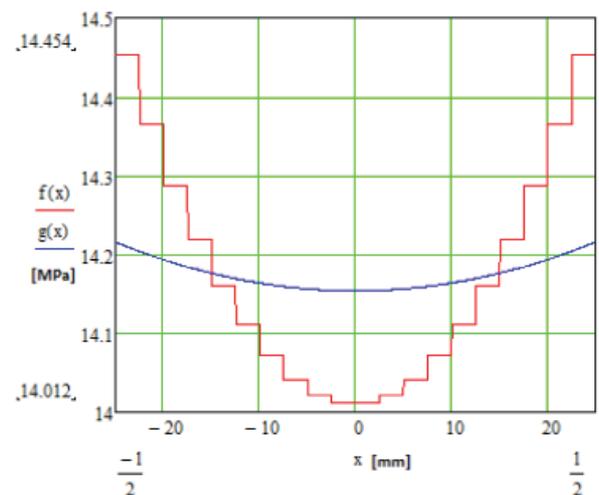


Figura 5.4 - Confronto tra le due distribuzioni teoriche di sforzi tangenziali

Anche in questo secondo caso, osservando i risultati ottenuti, si rileva la coerenza fisica qualitativa del procedimento esposto in precedenza dato che l'andamento delle tensioni tangenziali segue la distribuzione delle rigidezze nelle molle del modello.

Bibliografia

- [1] Froli M., Lani L., "Analisi strutturale di grandi lastre in vetro stratificato", *Costruzioni Metalliche*, n° 2, 2007.
- [2] Froli M., Lani L., "Adhesion and Viscoelasticity Properties of PVB in Laminated Safety Glass", *International Symposium on Applications of Architectural Glass ISAAG*, October 2010, Munich, Germany.
- [3] Froli M., Lani L., "Adhesion Creep and Relaxation Properties of PVB in Laminated Safety Glass", *Glass Performance Days*, June 2011, Tampere, Finland.
- [4] Froli M., Lani L., "The Influence of Parameter Setting on the Mechanical Properties of PVB in Lamination Process", *Challenging Glass 3 - Conference on Architectural and Structural Applications of Glass*, Bos, Louter, Nijse, Veer (Eds.), TU Delft, June 2012.
- [5] Keller U., Mortelmans H., "Adhesion in Laminated Safety Glass - What makes it work?", *Glass Processing Days*, June 1999, Tampere, Finland.
- [6] Froli M. "Analytical Remarks on the Anchorage of Elastic-plastically bonded ductile Bars", *Int. Journ. of Mech. Sciences*, 49, pages 589-596, 2007.
- [7] O. Volkersen, "Recherches sur la théorie des assemblages collés", *Construction Métallique*, 1965.
- [8] Lazzarotti M., "Indagine teorico sperimentale su giunzioni adesive vetro-vetro", *Tesi di laurea*, Pisa: Università di Pisa - Facoltà di Ingegneria, 2012.

Autori

Maurizio Froli
DESTeC Dept., Università di Pisa
m.froli@dic.unipi.it

Matteo Lazzarotti
Università di Pisa