IL METODO DELLE SOLUZIONI FONDAMENTALI PER LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DIRETTO M/EEG

Guido Ala[1], *Gregory Fasshauer*[2], *Elisa Francomano*[3], *Salvatore Ganci*[1], *Michael McCourt*[4]

[1]DEIM, [3]DICGIM
Università degli Studi di Palermo
Palermo (Italia)

[2]Department of Applied Mathematics
Illinois Institute of Technology
Chicago (USA)

[4]Department of Mathematical and Statistical Sciences
University of Colorado
Denver (USA)

Il problema della localizzazione delle sorgenti dell'attività cerebrale mediante elettroencefalografia (EEG) e/o magnetoencefalografia (MEG) riveste un rilevante interesse scientifico sia nella ricerca medica di base che in ambito diagnostico. L'attività cerebrale è causa di potenziali elettrici e di campi magnetici che possono essere rilevati, rispettivamente, attraverso appositi elettrodi posti sullo scalpo (EEG) e SQUID posizionati in prossimità della testa (MEG). Disponendo di misure di tali grandezze, la posizione e l'entità delle sorgenti neuronali possono essere stimate risolvendo un problema inverso; la soluzione accurata e rapida del problema diretto è dunque cruciale. Nel corso dell'ultimo anno, la ricerca già avviata circa la soluzione *mesh-free* del problema diretto M/EEG ha condotto alla messa a punto di un solutore basato sul metodo delle soluzioni fondamentali (MFS, *method of fundamental solutions*) capace di gestire la complessità fisico-geometrica dei modelli realistici della testa in maniera più efficiente rispetto ai tradizionali solutori BEM (*boundary element method*) e FEM (*finite element method*), basati su griglia.
Dal momento che le sorgenti elettriche cerebrali possono essere rappresentate mediante dipoli di corrente e che è accettabile l'approssimazione quasi-stazionaria delle equazioni di Maxwell, la soluzione del problema diretto viene ottenuta numericamente risolvendo un set di problemi ai valori al contorno nel potenziale elettrico scalare. La testa può essere rappresentata mediante un dominio conduttore Ω costituito da L gusci annidati ed elettricamente omogeni (Ω_ℓ sia il generico guscio di conducibilità σ_ℓ e contorno $\partial\Omega_\ell$), posizionati in un mezzo a conducibilità nulla. Sia $\mathcal{I}_{\ell,\ell+1} = \partial\Omega_\ell \cap \partial\Omega_{\ell+1}$ l'interfaccia tra il guscio ℓ ed il guscio $\ell+1$. Comunemente, si considerano tre gusci per rappresentare encefalo, cranio e scalpo. Il problema diretto del potenziale elettrico scalare ϕ può, quindi, essere formulato come il seguente set di problemi di valori al contorno:

$$\begin{cases} \sigma_\ell \nabla^2 \phi_\ell(\boldsymbol{p}) = S_\ell(\boldsymbol{p}), & \boldsymbol{p} \in \Omega_\ell, \\ \phi_\ell(\boldsymbol{p}) = \phi_{\ell+1}(\boldsymbol{p}), & \boldsymbol{p} \in \mathcal{I}_{\ell,\ell+1}|_{\ell \neq L}, \quad \ell = 1, \dots, L \\ \sigma_\ell \boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}) \cdot \nabla\phi_\ell(\boldsymbol{p}) = \sigma_{\ell+1} \boldsymbol{n}(\boldsymbol{p}) \cdot \nabla\phi_{\ell+1}(\boldsymbol{p}), & \boldsymbol{p} \in \mathcal{I}_{\ell,\ell+1}, \end{cases} \tag{1}$$

dove $\boldsymbol{n}$ è la generica normale alla superficie di interfaccia ed il termine di sorgente $S_\ell(\mathrm{p})$ è pari a $\nabla \cdot (\mathbf{Q}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'))$ – con $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ il valore in p della funzione delta di Dirac centrata in $\mathbf{p}'$ – se un dipolo sorgente di momento $\mathbf{Q}$ è posto in $\mathbf{p}' \in \Omega_\ell$, nullo altrimenti.
Il metodo delle soluzioni fondamentali è basato sull'espansione della funzione incognita mediante un set di soluzioni fondamentali K dell'equazione differenziale (di Laplace) che descrive il problema, sicché è possibile operare la collocazione esclusivamente sui contorni. Nell'applicare il MFS al problema del potenziale elettrico scalare, si introduce, per generalità, un parametro α_ℓ che assume valore unitario quando una sorgente è presente in Ω_ℓ o valore nullo altrimenti. Ciò consente di esprimere il potenziale nella generica regione ℓ come $\phi_\ell(\boldsymbol{p}) = \phi_{h,\ell}(\boldsymbol{p}) + \alpha_\ell \phi_{p,\ell}(\boldsymbol{p})$, in cui $\phi_{p,\ell}$ è una soluzione particolare (la cui espressione

analitica è nota) e $\phi_{h,\ell}$ è la sua soluzione omogenea associata, quest'ultima approssimabile tramite il MFS come:

$$\phi_{h,\ell}(\boldsymbol{p}) = \sum_{\boldsymbol{\xi}_j \in \Xi_\ell} c_j^\ell \, K(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\xi}_j), \;\; \boldsymbol{p} \in \Omega_\ell, \tag{2}$$

in cui Ξ_ℓ è l'insieme di centri relativi alla regione Ω_ℓ e c_j^ℓ i coefficienti dell'espansione da determinarsi tramite collocazione sulle superfici di interfaccia. Noti il potenziale elettrico e la permeabilità magnetica del mezzo, l'induzione magnetica è calcolabile per integrazione a partire della nota relazione di Ampere-Laplace.

A titolo di esempio, si riporta il confronto (Tab. 1), per un modello realistico della testa, tra i risultati inerenti al potenziale scalare dovuto ad un singolo dipolo, forniti da un solutore basato su BEM e quelli ottenuti tramite il solutore MFS proposto, rispetto a una soluzione di riferimento BEM ottenuta con una discretizzazione fine (circa 10000 elementi, Fig. 1).

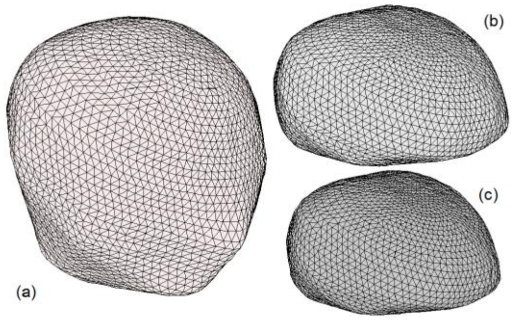

Figura 1 – Modello della testa e mesh BEM di riferimento per le interfacce (a) scalpo-aria, (b) cranio-scalpo, (c) encefalo-cranio.

Tabella 1 – Confronto tra MFS e BEM al variare del numero N di incognite (errore relativo in norma 2 sul potenziale sullo scalpo rispetto alla soluzione BEM di riferimento).

	MFS		**BEM**	
N	**Errore relativo**	**Tempo CPU** [s]	**Errore relativo**	**Tempo CPU** [s]
900	1.34e-01	0.3	3.92e-02	2.72
1382	6.85e-02	1.2	2.16e-02	4.26
2121	4.72e-02	3.9	1.40e-02	9.24
3257	3.75e-02	13.2	1.20e-02	20.7
5000	3.11e-02	35.5	9.11e-03	53.3

In Fig. 2, con riferimento al problema diretto MEG relativo ad una geometria reale, è riportato il confronto tra le distribuzioni dell'induzione magnetica su una superficie esterna alla testa, calcolate tramite MFS e tramite BEM, e dovute a 1000 dipoli di corrente unitari.

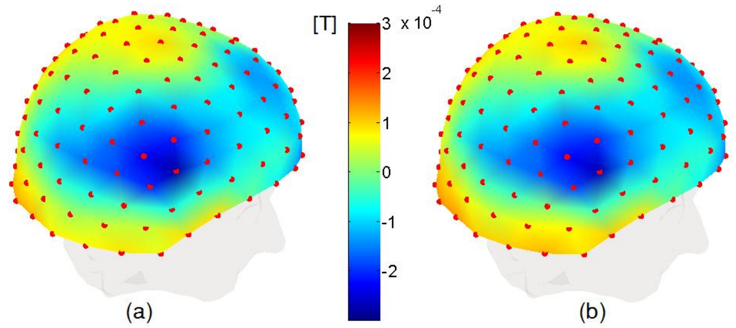

Figura 2 – Induzione magnetica in prossimità della testa calcolata tramite (a) BEM e (b) MFS.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Fairweather, A. Karageorghis, "The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems". *Advances in Computational Mathematics*, 9(1), 1998.

[2] G. Ala, G.E. Fasshauer, E. Francomano, S. Ganci, M.J. McCourt, "The Method of Fundamental Solutions in Solving Coupled Boundary Value Problems for M/EEG", *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015 (*in press*).

[3] G. Ala, G.E. Fasshauer, E. Francomano, S. Ganci, M.J. McCourt, "A Meshfree Solver for the MEG Forward Problem", *IEEE Transactions on Magnetics*, 51(3), 2015.