EXISTENCE DE SOLUTION ANTIPERIODIQUE DE L'EQUATION IMPULSIVE DE LIÉNARD AVEC UNE FORCE HENSTOCK-KURZWEIL INTÉGRABLE

par

Etienne BONDO

Thèse présentée au Département de Mathématiques en vue de l'obtention du grade de docteur ès science (Ph.D)

FACULTÉ DES SCIENCES
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, décembre 2016

Le 04 Novembre 2016

le jury a accepté la thèse de Monsieur Étienne BONDO dans sa version finale.

Membres du jury :

Professeur Jean-Marc Belley
Directeur de recherche
Département de mathématiques

Professeure Marlène Frigon
Évaluatrice externe,
Université de Montréal

Professeure Vasilisa Shramchenko
Évaluatrice interne
Département de mathématiques

Professeure Virginie Charette
Directrice du Département de mathématiques
Et Présidente-Rapporteur

À Rébecca et nos enfants
À mes parents décédés
À mes frères et soeurs
Je dédie ce travail.

SOMMAIRE

Notre travail se consacre à l'étude de l'existence de solution T-anti-périodique de l'équation de Liénard dans le cas impulsif. Dans notre thèse, cette équation sera appliquée à l'équation du pendule simple, de Josephson dans la super-conductivité et enfin à l'équation de Van der Pol pour modéliser un circuit de triode à tube vide.

On considérera f et J des actions extérieures sur le système où f est une force Lebesgue intégrable (respectivement Henstock-Kurzweil intégrable au second chapitre) et J (parfois noté I) une stimulation impulsive. En appliquant le théorème du point fixe de Banach, on obtient des théorèmes d'existence de solution au sens de fonctions généralisées soumise à un ensemble de conditions données par les bornes *à priori*.
Ensuite, par le même théorème, la suite d'itérations $G^n(\theta_0)$ converge uniformément vers la solution θ à la vitesse de convergence bornée avec la première dérivée $\dot{\theta}$ est de variation totale finie sur $[0, 2T]$ et la dérivée seconde généralisée $\ddot{\theta}$ Lebesgue intégrable sur $[0, 2T]$ dans le cas non impulsif.

Finalement, sous les mêmes hypothèses avec f Henstock-Kurzweil (HK) intégrable, nous obtiendrons des conditions qui garantissent l'existence d'une solution T-anti-périodique θ absolument continue sur $\mathbb{R}$ de l'équation de Liénard, qui admet à la fois une dérivée première $\dot{\theta}$ de variation bornée et la seconde dérivée généralisée $\ddot{\theta}$ qui est $HK-$intégrable dans le cas non impulsif.

Comme au premier chapitre nous considérerons également le cas des instants d'impulsion τ_k indépendants d'état avec f $HK-$intégrable. À chaque fois nous donnons quelques exemples d'illustration pour appuyer nos résultats.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je tiens d'abord à remercier sincèrement mon directeur de recherche Jean-Marc Belley pour sa présence à mes côtés et son soutien moral qui m'ont été d'une valeur inestimable.
Mes remerciements vont également à tous les professeurs du département de mathématique en commencant par Virginie Charette la Directrice du département, Tomasz Kaczynski, Vasilisa Shramchenko et d'autres dont leur nom n'est pas mentionné ici. De près ou de loin nous avons profité de vos savoirs, je vous en remercie.

Je remercie aussi ma conjointe Rébecca Nizigiyimana qui a su m'apporter du reconfort moral dont j'avais besoin ainsi que nos trois enfants qui agrémentaient l'environnement familial.
À toutes mes connaissances du Département de mathématiques et de la Faculté des Sciences, je dis merci.

Étienne BONDO

Sherbrooke, Novembre 2016

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

La théorie des équations différentielles est un vaste domaine aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Celles-ci sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques comme pour l'étude de la radioactivité ou la mécanique céleste sans oublier la technique de datation par le C_6^{14}. D'autres décrivent purement des phénomènes de la nature comme le mouvement de la population régi par l'équation logistique et bien d'autres processus.

L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise. Dans un espace vectoriel normé E, une équation différentielle ordinaire en général a la forme $F(x, y, y^{'}, y^{''}, ..., y^n) = 0$ où F est une fonction continue sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times E^{n+1}$, qu'on appelle domaine. La fonction y est solution si elle est de classe C^n et si $\forall x \in I \subset E$, $F(x, y(x), y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^n(x)) = 0$. Dans un processus d'évolution, un système régi par une équation différentielle se caractérise par :

- Les états *à priori* possibles pour le système qui forment un espace de dimension finie ce qui veut dire que ces états peuvent être décrits par un nombre fini de variables. Il s'agit de l'espace des phases.
- Les lois gouvernant l'évolution temporelle et qui sont des fonctions au moins dérivables.

– L'évolution du système peut être déterministe. Étant donné les conditions initiales, l'état du système au temps présent , on peut déduire l'état du système tant au futur qu'au passé. Suivant la situation du problème, on y fait intervenir également des conditions aux limites.

Cependant nous distinguons les équations ordinaires (EDO) des équations aux dérivées partielles (EDP) où y est fonction de plusieurs variables et où interviennent des dérivées partielles. Ces dernières ont un espace d'état de dimension infinie et ne sont plus nécessairement des processus d'évolution déterministe.

Depuis plusieurs années, plusieurs chercheurs s'intéressent à l'existence des solutions de ces équations [10, 27, 28]. La résolution d'une équation différentielle requiert une bonne combinaison de connaissances en mathématiques telle que la continuité par rapport aux conditions initiales et aux autres paramètres du système. À titre d'exemple résoudre explicitement une équation différentielle à l'aide des fonctions usuelles et de l'opérateur de primitivation est rarement possible. Dépendamment du type de solution en quête, plusieurs methodes ont été développées comme celle de la théorie de groupe de Lie pour réduire le degré de l'équation (EDO) ou le nombre de variables (EDP), l'analyse des singularités de Painlévé pour analyser la stabilité des solutions, la méthode variationnelle, la méthode du point fixe et bien d'autres....Parmis les résultats, les solutions périodiques ont motivé les recherches depuis les alentours des années 1950 [4, 6, 7, 16, 22] avant que les recherches de ces dernières années ne s'interessent aux solutions antipériodiques [11, 12, 21, 35]. Nos efforts vont se focaliser sur l'équation différentielle ordinaire du second ordre à savoir l'équation de Liénard

$$\ddot{\theta} + g'(\theta)\,\dot{\theta} + h(\theta) = f$$

dans ses quelques formes où f représentera une action extérieure quelconque au système. Dans la littérature, Cartwright et Littlewood ont déjà étudié cette équation sous sa forme habituelle dans [9], [10] et bien d'autres ouvrages, tout comme l'ont fait plus récemment d'autres comme Hoffman et Weckesser dans [20] et Jankowski dans [21]. Notre objectif consistera à trouver les conditions qui garantissent l'existence d'une solution absolument continue θ de cette équation sous sa forme générale impulsive

$$\ddot{\theta} + g'(\theta)\,\dot{\theta} + h(\theta) = f + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\,\Delta_{\tau_k(\theta)} \tag{1}$$

par la méthode du point fixe de Banach. Ainsi notre travail se subdivise principalement en deux parties :

Au premier Chapitre, sous des conditions appropriées et f Lebesgue intégrable, nous prouvons l'existence de solution $T-$anti-périodique absolument continue θ de l'équation de Liénard impulsive générale soumise à la condition d'anti-périodicité

$$\theta(t) = -\theta(t+T) \tag{2}$$

sur $\mathbb{R}$. En introduction, nous commençons par définir un ensemble de quelques conditions qui nous permettront d'établir les théorèmes d'existence. Dans les préliminaires, nous donnons les définitions indispensables dont la définition d'une fonction généralisée et des espaces de fonctions $AC(2T), NBV(2T)$ et $L^1(2T)$ ainsi que des calculs élementaires qui nous seront utiles par la suite, nous donnons également la preuve du théorème principal. Par le théorème de contraction de Banach, les iterations G^n (où G est un opérateur à définir) convergent uniformement vers $\theta \in AC(2T)$. Des exemples y sont donnés également pour appuiyer nos résultats. À la fin de cette partie nous traitons le cas τ_k d'état indépendant avec $k \in \{1, ..., m\}$. Des exemples pour ce cas sont donnés également dans notre travail. Signalons en passant que les résultats du premier chapitre sont déjà publiés dans [5].

Au deuxième chapitre, sous les mêmes hypothèses qu'au chapitre précédent avec f Heinstock-Kurzweil intégrable, nous montrons l'existence de solution $T-$anti-périodique de l'équation (1). Nous donnons d'abord la définition de l'intégrale de Henstock ainsi que les propriétés harmoniques des fonctions $HK-$intégrables. Aussi par le théorème de contraction de Banach, nous montrons quelques résultats d'existence et les itérations G^n convergent uniformément vers la solution θ dans $AC(2T)$. Des exemples pour concrétiser nos résultats sont donnés à cette fin. Enfin comme au premier chapitre, nous considérons le cas τ_k d'état indépendant pour $k \in \{1, ..., m\}$ et nous donnerons des exemples également pour ce cas.

Nous terminerons ce travail avec une conclusion sans doute non exhaustive ainsi que les perspectives de nos recherches futures.

CHAPITRE 1

Équation impulsive de Liénard avec une force Lebesgue intégrable

1.1 Introduction

Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'existence de solutions anti-périodiques d'équations différentielles ordinaires. (Voir par exemple [1], [3], [11], [12], [21], [25], [29], [30], [35]-[36]). Ceci inclue des résultats sur l'existence de solutions anti-périodiques d'équations différentielles impulsives du premier ordre. Néanmoins, il subsiste un manque de résultats pour des équations anti-périodiques d'ordre supérieur avec impulsions dépendant de l'état. Ici, on considère l'existence de solutions anti-périodiques pour des équations impulsives de Liénard comme celles de Josephson et de van der Pol. Non seulement nous obtenons l'existence de solution unique, soumise à un ensemble minimal de conditions données par des bornes *à priori*, mais également la convergence ponctuelle vers la solution sur $[0, 2T]$ d'une suite d'itérations accompagnée d'une borne pour la vitesse de convergence.

Étant donné $T > 0$ et f réelle Lebesgue intégrable sur $[0, T]$, considérons l'équation de Liénard impulsivement entrainée

$$\ddot{\theta} + g'(\theta)\,\dot{\theta} + h(\theta) = f + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\,\delta_{\tau_k(\theta)} \tag{1.1}$$

avec la condition au bord

$$\theta(0) = -\theta(T) \tag{1.2}$$

où, pour tout $k \in \{1, ..., m\}$, $\delta_{\tau_k(\theta)}$ désigne une impulsion d'amplitude $a_k(\theta)$ à l'instant $\tau_k(\theta) \in [0, T)$. Notons que f, θ et $\delta_{\tau_k(\theta)}$ peuvent être prolongées de $[0, T]$ à $[0, 2T]$ par

$$f(t) = -f(t + T) \tag{1.3}$$

et ensuite à tout $\mathbb{R}$ par 2T-périodicité. Nous désignons par f, θ et

$$\Delta_{\tau_k(\theta)} = \delta_{\tau_k(\theta)} - \delta_{\tau_k(\theta)+T}$$

ces fonctions prolongées où $\delta_{\tau_k(\theta)}$ et $\delta_{\tau_k(\theta)+T}$ désigne l'unité d'impulsions aux instants $\tau_k(\theta) + 2nT$ et $\tau_k(\theta) + (2n+1)T$ $(n \in \mathbb{Z})$. Ainsi, il n'y a pas de perte de généralité en remplaçant (1.1) et (1.2) sur $[0, T]$ avec

$$\ddot{\theta} + g'(\theta)\,\dot{\theta} + h(\theta) = f + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\,\Delta_{\tau_k(\theta)} \tag{1.4}$$

et

$$\theta(t) = -\theta(t + T) \tag{1.5}$$

respectivement sur $\mathbb{R}$.

$L^1(2T)$ désignera l'espace de Banach des fonctions $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $2T$-périodiques presque partout. Munissons $L^1(2T)$ de la norme

$$\|x\|_1 = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} |x(t)|\, dt.$$

L'ensemble $NBV\,(2T)$ désigne l'espace de tout $x \in L^1\,(2T)$ de variation totale finie $v\,(x)$ sur $[0, 2T]$ et normalisé au sens que

$$x(t) = \frac{1}{2}[x(t-) + x(t+)] \tag{1.6}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. $AC\,(2T)$ est l'espace de toutes les fonctions 2T-périodiques absolument continues sur $[0, 2T]$. On a $AC(2T) \subset NBV(2T)$ [2, p. 269]. Nous supposerons les hypothèses suivantes :

- H1. h est une fonction impaire réelle continument différentiable sur $\mathbb{R}$.
- H2. g est une fonction réelle deux fois continument différentiable sur $\mathbb{R}$ pour laquelle la dérivée g' est paire.
- H3. $f \in L^1\,(2T)$ satisfait (1.3) pour presque tout $t \in \mathbb{R}$.
- H4. $a_k : NBV\,(2T) \to [-\gamma_k, \gamma_k]$ pour un certain $\gamma_k > 0$. De plus, il existe $\lambda_k > 0$ telle que la condition de Lipschitz

$$|a_k\,(x) - a_k\,(y)| \leq \lambda_k v\,(x - y) \tag{1.7}$$

soit satisfaite pour tout $x, y \in NBV\,(2T)$. Nous écrivons

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k, \qquad \Lambda = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k.$$

- H5. $\tau_k : NBV\,(2T) \to [0, T)$ est tel qu'il existe $\mu_k > 0$ pour lequel la condition de Lipschitz

$$|\tau_k\,(x) - \tau_k\,(y)| \leq \mu_k v\,(x - y) \tag{1.8}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in NBV\,(2T)$. Nous écrivons

$$\Upsilon = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \mu_k.$$

Définissons les fonctions $p_0, q_0 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ par

$$p_0(r) = T^2 \left(\|f\|_1 + 2\Gamma \right) + 4T\breve{g}(r) + T^2 \breve{h}(r) \tag{1.9}$$

et

$$q_0(r) = 4T\breve{g}'(r) + T^2 \breve{h}'(r) + \zeta_0 \tag{1.10}$$

où

$$\zeta_0 = 2\Lambda T^2 + 8\Upsilon T$$

et, pour chaque $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\breve{\psi}$ est une fonction croissante continue sur $(0, \infty)$ donnée par

$$\breve{\psi}(r) = \sup\{|\psi(s)| : -r \leq s \leq r\} \tag{1.11}$$

pour tout $r \in [0, \infty)$. Soient $\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi}$ et $\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi\pi}$ des fonctions $2T$-périodiques sur $\mathbb{R}$ avec la restriction sur $[t_0, t_0 + 2T]$ donnée par

$$\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi}(t) = \begin{cases} T + t_0 - t & t_0 < t < t_0 + 2T \\ 0 & t = t_0, t_0 + 2T \end{cases} \tag{1.12}$$

et

$$\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi\pi}(t) = \frac{6T(t - t_0) - 3(t - t_0)^2 - 2T^2}{6}. \tag{1.13}$$

Soit l'opérateur G sur $NBV(2T)$ donné par

$$G(\theta) = -g(\theta) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} + (f - h(\theta)) * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi} + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta) \Delta_{\tau_k(\theta)}^{\pi\pi} \tag{1.14}$$

où

$$\Delta_{\tau_k(\theta)}^{\pi\pi} = \delta_{\tau_k(\theta)}^{\pi\pi} - \delta_{\tau_k(\theta)+T}^{\pi\pi}$$

et les convolutions sont dans le sens de fonctions $2T$-périodiques. Nous pouvons maintenant énoncer notre principal résultat de ce chapitre.

Théorème 1.1 *Pour l'équation impulsivement entrainée de Liénard d'état dépendant (1.4) sur* $\mathbb{R}$ *soumis à H1-H5, soient* p_0 *et* q_0 *définies par (1.9) et (1.10), respectivement. S'il existe* $r_0 > 0$ *pour lequel* $p_0(r_0) = r_0$ *et* $q_0(r_0) < 1$ *simultanément, alors il existe une solution unique* $\theta \in AC(2T)$ *de (1.4) et (1.5), de variation totale* $v(\theta) \leq r_0$*, avec la dérivée première* $\dot{\theta} \in NBV(2T)$ *et la dérivée seconde* $\ddot{\theta}$ *(qui est élément de* $L^1(2T)$ *pour le cas non impulsif). De plus pour chaque* $\theta_0 \in NBV(2T)$ *avec* $v(\theta_0) \leq r_0$ *et vérifiant (1.5), les itérations* $G^n(\theta_0)$ *convergent uniformément vers* θ *à la vitesse bornée par*

$$\|\theta - G^n(\theta_0)\|_\infty \leq \frac{2\lambda^n r_0}{1-\lambda}$$

où $\lambda = q_0(r_0)$.

Ce théorème est à démontrer ultérieurement. L'équation

$$\ddot{\theta} + (c + d\cos\theta)\,\dot{\theta} + a\sin\theta = f + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\,\Delta_{\tau_k(\theta)} \tag{1.15}$$

pour $a, c, d \in \mathbb{R}$ est un exemple de (1.4) pour $g(\theta) = c\,\theta + d\sin\theta$ et $h(\theta) = a\sin\theta$. Une impulsion produit un saut en $\dot{\theta}$, mais pas en θ. Ceci est précisement le cas lorsque, par exemple, un pendule simple est soumis à des forces impulsives. En fait, (1.15) se réduit à l'équation du pendule simple forcé avec friction lorsque $d = 0$ et θ est le déplacement angulaire. L'angle de phase θ pour une jonction de Josephson dans la théorie des super conducteurs satisfait également (1.15). Un autre exemple de (1.4) est l'équation de van der Pol impulsivement entrainée

$$\ddot{\theta} - \mu\left(1 - \theta^2\right)\dot{\theta} + \theta = f + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\,\Delta_{\tau_k(\theta)} \tag{1.16}$$

pour $\mu > 0$. Cette équation, en l'absence de force impulsive, a été introduite par van der Pol [14]-[15] pour modéliser un circuit de triode à tube vide. Cartwright et Littlewood ont étudié (1.16) pour le cas non impulsif dans [9], [10], [27] et [28], comme ont fait plus récemment Guckenheimer, Hoffman et Weckesser dans [20], Kalas et Kadeřábek dans [22] et Lin dans [26] (par exemple). Nos résultats généraux pour l'équation de Liénard impulsivement entrainée (1.4) vont impliquer, dans des conditions appropriées, l'existence de solutions de (1.15) et (1.16) pour lesquelles (1.5) est satisfait. Par les techniques souvent basées sur des théorèmes de point fixe, plusieurs résultats existent dans la littérature sur l'existence de solutions périodiques des équations différentielles de premier et deuxième ordre sans conditions (1.5). (Voir, par exemple, [4], [7], [8], [16], [17], [18] et [32]). En particulier, les résultats dans [8] pour (1.15) et dans [6] pour (1.16) dans le cas périodique sans condition (1.5) sont obtenus par des méthodes similaires à celles utilisées ici pour établir l'existence de solutions de (1.4) qui satisfont (1.5). Dans [8] les fonctions g et h sont supposées satisfaire une condition de Lipschitz. Ceci n'est pas le cas ici.

Dans ce travail, chaque fonction réelle qui satisfait (1.3) presque partout sur $\mathbb{R}$ sera dite T-anti-périodique [5]. Les hypothèses sur g et h impliquent que $g'(\theta)\,\dot{\theta}$ et $h(\theta)$ sont T-anti-périodiques lorsque θ l'est.

1.2 Préliminaires

Rappelons qu'une fonction généralisée $2T$-périodique $x(t)$ est identifiée par une (unique) série de Fourier

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{x}(n)e^{in\omega t} \qquad (\omega = \pi/T, \quad t \in \mathbb{R})$$

avec $i = +\sqrt{-1}$ et coefficients de Fourier $\hat{x}(n) \in \mathbb{C}$ tels que i) $\hat{x}(-n)$ est le conjugué complexe de $\hat{x}(n)$ et ii) pour un certain $k \in \mathbb{N}$, $\hat{x}(n)/n^k \to 0$ lorsque $n \to \infty$ [13]. Sa dérivée généralisée, notée $\dot{x}$, s'identifie avec la fonction généralisée $2T$-périodique associée avec la série de Fourier

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} in\omega\hat{x}(n)e^{in\omega t}.$$

Sans crainte d'ambiguïté, nous allons simplement écrire

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) e^{in\omega t}$$

et

$$\dot{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} in\omega \hat{x}(n) e^{in\omega t}.$$

Deux fonctions généralisées sont égales si leurs coefficients de Fourier sont égaux. La moyenne $\bar{x}$ de x est donnée par $\bar{x} = \hat{x}(0)$. Définissons $\tilde{x}$ par $\tilde{x} = x - \bar{x}$. En particulier (voir, par exemple, [37, p. 333])

$$\delta_{t_0}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in\omega(t-t_0)},$$

$$\overline{\delta_{t_0}} = 1$$

et

$$\widetilde{\delta_{t_0}}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{in\omega(t-t_0)}$$

pour n'importe quel $t_0 \in [0, 2T)$. La convolution $x * y$ de deux fonctions généralisées x et y est une fonction généralisée donnée par

$$(x * y)(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n) \hat{y}(n) e^{in\omega t}$$

(qui est clairement commutative dans le sens que $x * y = y * x$). Si $x, y \in L^1(2T)$ alors

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} x(t) e^{-in\omega t}\, dt \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

et

$$(x * y)(t) = \frac{1}{2T} \int_0^{2T} x(t-s) y(s)\, ds$$

qui existe comme une fonction dans $L^1(2T)$ [23, p. 4-5]. Pour chaque $x, y \in L^1(2T)$ donnés, nous avons $x = y$ (Lebesgue presque partout) si et seulement si $\hat{x}(n) = \hat{y}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ [23, p. 13].

Par un résultat bien connu (voir par exemple [19, p. 57], [24, pp. 226, 229]) et [34, p. 157]) tout $x \in NBV(2T)$ admet, presque partout, une dérivée $\dot{x} \in \widetilde{L^1}(2T)$ où

$$\widetilde{L^1}(2T) = \{\tilde{x} : x \in L^1(2T)\}.$$

De plus, nous avons $\dot{x} = \dot{\tilde{x}}$ et si $v(x)$ désigne la variation totale de x sur $[0, 2T]$, alors l'ensemble $\widetilde{NBV}(2T)$ défini par

$$\widetilde{NBV}(2T) = \{\tilde{x} : x \in NBV(2T)\}$$

est un espace de Banach pour la norme v. De même, nous définissons $\widetilde{AC}\,(2T)$ qui est

$$\widetilde{AC}\,(2T) = \{\tilde{x} : x \in AC(2T)\}.$$

Chaque $x \in \widetilde{NBV}(2T)$ a une moyenne nulle sur $[0, 2T]$ et ainsi, pour chaque $t \in [0, 2T]$ donné, il existe $t' \in [0, 2T]$ tel que $x(t')$ a un signe opposé à celui de $x(t)$. Ainsi, $|x(t)| \leq |x(t) - x(t')|$ et de cette façon nous avons

$$|x(t)| \leq v(x) \tag{1.17}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \widetilde{NBV}(2T)$. Nous avons également

$$v(x * y) \leq v(x)\|y\|_\infty \tag{1.18}$$

pour tout $y \in \widetilde{NBV}(2T)$ (où $\|y\|_\infty$ signifie le suprémum essentiel de y sur tout intervalle de longueur $2T$) et

$$v(x * y) \leq v(x)\|y\|_1 \tag{1.19}$$

pour tout $y \in \widetilde{L^1}(2T)$. Chaque $x \in \widetilde{NBV}\,(2T)$ avec la dérivée $\dot{x} \in \widetilde{L^1}\,(2T)$ (presque partout) satisfait

$$2T\,\|\dot{x}\|_1 \leq v\,(x)$$

avec égalité lorsque $x \in \widetilde{AC}\,(2T)$ (voir par exemple [2, p.273] et [33, p. 110]). D'autre part, tout $x \in \widetilde{AC}\,(2T)$ avec $\dot{x} \in \widetilde{NBV}\,(2T)$ satisfait

$$v\,(x) = 2T\|\dot{x}\|_1 \leq 2Tv\,(\dot{x}) \tag{1.20}$$

par (1.17) appliqué à $\dot{x}$ au lieu de x.

Pour une fonction généralisée arbitraire $2T$-périodique x de moyenne nulle, soit x^π sa primitive $2T$-périodique généralisée de moyenne nulle donnée par

$$x^\pi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \widehat{x^\pi}(k)e^{ik\omega t}$$

où

$$\widehat{x^\pi}\,(k) = \frac{\widehat{x}\,(k)}{ik\omega} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\,. \tag{1.21}$$

Par exemple, $\widetilde{\delta_{t_0}}^\pi(t)$ et $\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi\pi}(t)$ sont données par l'extension $2T$-périodique sur $\mathbb{R}$ de (1.12) et (1.13) respectivement.

Remarque 1.2 *Nous avons $\delta_{t_0} = 1+\widetilde{\delta_{t_0}}$ et ainsi, sur $[0,2T]$, une primitive généralisée de δ_{t_0} est donnée par $\kappa+t+\widetilde{\delta_{t_0}}^\pi$ pour $\kappa \in \mathbb{R}$ arbitraire. Ainsi, par (1.12), une impulsion δ_{t_0} en accélération à l'instant $t_0 \in [0,2T)$ entraine une augmentation instantanée d'amplitude $2T$ de la vitesse à cet instant.*

Clairement $\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi\pi}$ donnée par (1.12) est absolument continue sur $[t_0, t_0+2T]$ et sa dérivée généralisée $\widetilde{\delta_{t_0}}^\pi$ donnée par (1.13) (qui est précisément la dérivée classique de $\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi\pi}(t)$ lorsque $t \in \,]t_0, t_0+2T[$) est à variation bornée sur $[t_0, t_0+2T]$. De plus, l'identité

$$x^\pi\,(t) = x * \delta_0^\pi\,(t) \tag{1.22}$$

est satisfait pour toute fonction généralisée $2T$-périodique x de moyenne nulle. Par (1.12) et (1.13) nous avons également

$$v\left(\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi\pi}\right) = 2T\left\|\widetilde{\delta_0}^\pi\right\|_1 = T^2, \tag{1.23}$$

$$v\left(\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi\pi} - \widetilde{\delta_{t_0+T}}^{\pi\pi}\right) = 2T \left\|\widetilde{\delta_0}^{\pi} - \widetilde{\delta_T}^{\pi}\right\|_1 = 2T^2, \tag{1.24}$$

$$\left\|\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi\pi}\right\|_\infty = \frac{T^2}{3},$$

$$v\left(\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi}\right) = 4T, \tag{1.25}$$

$$v\left(\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi} - \widetilde{\delta_{t_0+T}}^{\pi}\right) = 4T, \tag{1.26}$$

et

$$\left\|\widetilde{\delta_{t_0}}^{\pi}\right\|_\infty = T$$

pour $t_0 \in [0, 2T)$ arbitraire. Si $0 \leq t' < t'' < 2T$ alors, utilisant

$$v(\widetilde{\delta_{t''}}^{\pi\pi} - \widetilde{\delta_{t'}}^{\pi\pi}) = \int_{t'}^{t''} |\widetilde{\delta_{t''}}^{\pi} - \widetilde{\delta_{t'}}^{\pi}| \, dt + \int_{t''}^{t'+2T} |\widetilde{\delta_{t''}}^{\pi} - \widetilde{\delta_{t'}}^{\pi}| \, dt$$

où

$$\int_{t'}^{t''} |\widetilde{\delta_{t''}}^{\pi} - \widetilde{\delta_{t'}}^{\pi}| \, dt = 2T\,(t'' - t') - (t'' - t')^2$$

et

$$\int_{t''}^{t'+2T} |\widetilde{\delta_{t''}}^{\pi} - \widetilde{\delta_{t'}}^{\pi}| \, dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(t'' - t')\left(2\sqrt{2}T - \sqrt{2}\,(t'' - t')\right)$$

nous obtenons

$$v(\widetilde{\delta_{t''}}^{\pi\pi} - \widetilde{\delta_{t'}}^{\pi\pi}) = 4T|t'' - t'| - 2|t'' - t'|^2$$

et ainsi

$$v(\widetilde{\delta_{t''}}^{\pi\pi} - \widetilde{\delta_{t'}}^{\pi\pi}) \leqq 4T|t'' - t'|. \tag{1.27}$$

Soit $L^1_{ap}(2T)$, $NBV_{ap}(2T)$ et $AC_{ap}(2T)$ les sous espace fermés de toutes les fonctions T-antipériodiques dans $\widetilde{L^1}(2T)$, $\widetilde{NBV}(2T)$ et $\widetilde{AC}(2T)$, respectivement. Évidemment $AC_{ap}(2T) \subset NBV_{ap}(2T) \subset L^1_{ap}(2T)$ et nous avons

$$\overline{x} = x * 1 = 0$$

pour chaque $x \in L^1_{ap}(2T)$ donné. Si $x \in L^1_{ap}(2T)$ et $y \in L^1(2T)$, alors $x * y$ connue fonction de $L^1_{ap}(2T)$ [23, p. 4-5], est clairement T-anti-périodique car on a

$$\begin{aligned}
(x * y)(t+T) &= \frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t+T-s)\, y(s)\, ds \\
&= -\frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t-s)\, y(s)\, ds \\
&= -(x * y)(t)
\end{aligned}$$

où l'égalité est prise au sens de $L^1(2T)$. Ainsi nous avons ce qui suit

Lemme 1.3 *Si $x \in L^1_{ap}(2T)$ et $y \in L^1(2T)$, alors $x * y \in L^1_{ap}(2T)$.*

Pour $x \in L^1_{ap}(2T)$ arbitraire, (1.22) devient

$$x^{\pi}(t) = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(s)\, \widetilde{\delta_0}^{\pi}(t-s)\, ds \tag{1.28}$$

qui par le Lemme 1.3 montre que $x^{\pi} \in L^1_{ap}(2T)$. Néanmoins, la partie droite de (1.28) est continue en t. Pour le constater, on prend $t_0, t_1, t_2, ... \in \mathbb{R}$ tel que $t_n \to t_0$ lorsque $n \to \infty$. Alors $\delta_0^{\pi}(t_n - s) \to \delta_0^{\pi}(t_0 - s)$ presque partout en s et ainsi, par le théorème de la convergence dominée, la convolution pour $t = t_n$ converge à celle pour $t = t_0$. Ainsi, en prenant pour x^{π} le membre droite de (1.28) nous avons $x^{\pi}(t_n) \to x^{\pi}(t_0)$ lorsque $n \to \infty$. Ceci prouve ce qui suit.

Proposition 1.1 *Si $x \in L^1_{ap}(2T)$ alors x^{π} donné ponctuellement par (1.28) est une fonction continue T-anti-périodique.*

D'après ce qui précède, pour tous $x, y \in L^1_{ap}(2T)$ donnés, nous avons $x = y$ Lebesgue presque partout si et seulement

$$\widehat{x}(k) = \widehat{y}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \tag{1.29}$$

(et ainsi si et seulement si $x = y$ dans le sens des fonctions généralisées). De plus, si $x, y \in L^1_{ap}(2T)$ sont tels que

$$\widehat{x^\pi}(k) = \widehat{y^\pi}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \tag{1.30}$$

alors les fonctions continues x^π et y^π sont nécessairement égales et ainsi (1.21) implique que (1.30) est équivalent à $x = y$ Lebesgue presque partout.

Rappelons que si $x, y \in L^1_{ap}(2T)$ sont tels que

$$\widehat{x}(k) = ik\omega\widehat{y}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

alors x est une dérivée généralisée de y qui est univoquement déterminée (Lebesgue presque partout) par y. Pour montrer la propriété d'unicité, on suppose que pour $y \in L^1_{ap}(2T)$ donné, les fonctions $x = x_1 \in L^1_{ap}(2T)$ et $x = x_2 \in L^1_{ap}(2T)$ satisfont (1.2). Alors

$$\widehat{x_1}(k) = \widehat{x_2}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

et ainsi $x_1 = x_2$ Lebesgue presque partout. Ainsi nous écrivons $x = \dot{y}$ sans crainte d'ambiguité (Lebesgue presque partout).

1.3 Points fixes comme solutions

Puisque $\Delta_{\tau_k(\theta)} * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi} = \Delta^{\pi\pi}_{\tau_k(\theta)} = \widetilde{\delta_{\tau_k(\theta)}}^{\pi\pi} - \widetilde{\delta_{\tau_k(\theta)+T}}^{\pi\pi}$ alors la convolution des deux côtés de (1.4) avec $\widetilde{\delta_0}^{\pi\pi}$ montre que

$$\theta = G(\theta) \tag{1.31}$$

où en vertue de $g(\theta) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} = g'(\theta)\dot{\theta} * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi}$, l'opérateur G est donné par

$$G(\theta) = -g(\theta) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} + (f - h(\theta)) * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi} + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\,\Delta^{\pi\pi}_{\tau_k(\theta)}.$$

Si

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^{m} J_k(\theta)$$

où les fonctions $J_k : NBV_{ap}(2T) \to NBV_{ap}(2T)$ sont données par

$$J_k(\theta) = a_k(\theta)\, \Delta^{\pi\pi}_{\tau_k(\theta)}$$

alors (1.14) devient

$$G(\theta) = -g(\theta) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} + (f - h(\theta)) * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi} + J(\theta). \tag{1.32}$$

ce qui allège quelque peu la notation. Par nos hypothèses de départ sur g nous avons que $g'(\theta)\,\dot{\theta}$ est T-anti-périodique et ainsi, par le Lemme 1.3 et l'identité $g(\theta) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} = g'(\theta)\,\dot{\theta} * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi}$ nous obtenons que $g(\theta) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} \in NBV_{ap}(2T)$ pour tout $\theta \in NBV_{ap}(2T)$. La continuité de g' en conjonction avec (1.17) donne

$$\|g'(\theta)\|_{\infty} \leq \sup\{|g'(x)| : -\nu(\theta) \leq x \leq \nu(\theta)\} < \infty$$

et ainsi $g'(\theta)\,\dot{\theta} \in L^1_{ap}(2T)$ de laquelle suit que $g'(\theta)\,\dot{\theta} * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi} = g(\theta) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} \in AC_{ap}(2T)$ pour $\theta \in NBV_{ap}(2T)$. De même pour les autres termes à droite de (1.32). Nous avons maintenant le résultat suivant.

Proposition 1.2 *G envoie $NBV_{ap}(2T)$ dans $AC_{ap}(2T) \subset NBV_{ap}(2T)$.*

Chaque $\theta \in NBV_{ap}(2T)$ qui satisfait (1.31) pour $G : NBV_{ap}(2T) \to NBV_{ap}(2T)$ donné par (1.32) sera solution de (1.4) et ainsi pour établir l'existence de solution de (1.4) (dans le sens des fonctions généralisées) et (1.5) il suffit de prouver l'existence du point fixe $\theta \in NBV_{ap}(2T)$ pour G. Pour un tel θ, nous avons

$$\dot{\theta} = -g'(\theta)\,\dot{\theta} * \widetilde{\delta_0}^{\pi} + (f - h(\theta)) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\, \Delta^{\pi}_{\tau_k(\theta)} \tag{1.33}$$

et ainsi $\dot{\theta} \in NBV_{ap}(2T)$ et, par (1.4), $\ddot{\theta}$ existe comme une fonction généralisée (qui est dans $L^1_{ap}(2T)$ dans le cas non impulsif).

Remarque 1.4 *Nous avons*

$$v\left(f * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi}\right) \leq T^2 \left\|f\right\|_1 \tag{1.34}$$

par (1.19) et (1.23),

$$v\left(-g\left(\theta\right) * \widetilde{\delta_0}^{\pi}\right) \leq 4T \left\|g\left(\theta\right)\right\|_\infty \tag{1.35}$$

par (1.18) et (1.25),

$$v\left(-h\left(\theta\right) * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi}\right) \leq T^2 \left\|h\left(\theta\right)\right\|_\infty \tag{1.36}$$

par (1.18) et (1.23), et

$$v\left(J\left(\theta\right)\right) = v\left(\sum_{k=1}^{m} a_j\left(\theta\right)\Delta_{\tau_j(\theta)}^{\pi\pi}\right) \leq 2\Gamma v\left(\widetilde{\delta_0}^{\pi\pi}\right) \leq 2\Gamma T^2 \tag{1.37}$$

par (1.24) et pour

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k. \tag{1.38}$$

Par l'inégalité du triangle appliquée à (1.32) et par (1.34)-(1.37) nous obtenons

$$v\left(G\left(\theta\right)\right) \leq T^2 \left\|f\right\|_1 + 4T\left\|g\left(\theta\right)\right\|_\infty + T^2\left\|h\left(\theta\right)\right\|_\infty + 2\Gamma T^2 \tag{1.39}$$

où, par (1.17) et la continuité de g et h,

$$\left\|g\left(\theta\right)\right\|_\infty \leq \sup\{\left|g\left(s\right)\right| : -v\left(\theta\right) \leq s \leq v\left(\theta\right)\} < \infty$$

et

$$\left\|h\left(\theta\right)\right\|_\infty \leq \sup\{\left|h\left(s\right)\right| : -v\left(\theta\right) \leq s \leq v\left(\theta\right)\} < \infty.$$

Ici, la boule fermée dans $NBV_{ap}\left(2T\right)$ de rayon $r > 0$ centrée à la fonction nulle est désignée par B_r. Elle peut être écrite explicitement comme

$$B_r = \{x \in NBV_{ap}\left(2T\right) : v\left(x\right) \leq r\}.$$

Si, pour un certain $r > 0$ et $0 < \lambda < 1$, nous avons $G : B_r \to B_r$ et

$$v\left(G\left(x\right) - G\left(y\right)\right) \leq \lambda\nu\left(x - y\right)$$

pour tous $x, y \in B_r$, alors le théorème du point fixe de Banach implique l'existence d'un point fixe $\theta \in B_r$ de G pour lequel les itérations $G^n\left(\theta_0\right)$ pour $\theta_0 \in B_r$ arbitraire converge vers θ à une vitesse limitée par

$$v\left(\theta - G^n\left(\theta_0\right)\right) \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} v\left(\theta_0 - G\left(\theta_0\right)\right).$$

Par (1.17) et comme $\theta_0, G\left(\theta_0\right) \in B_r$ nous obtenons

$$\left\|\theta - G^n\left(\theta_0\right)\right\|_\infty \leq \frac{2\lambda^n r}{1 - \lambda} \tag{1.40}$$

et ainsi $G^n\left(\theta_0\right)$ converge ponctuellement vers θ à la vitesse uniformément délimitée par (1.40).

1.3.1 Preuve du Théorème 1.1

Pour toute fonction continue $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $\breve{\psi}$ donné par (1.11), nous avons

$$\left\|\psi\left(\theta\right)\right\|_\infty \leq \breve{\psi}(v\left(\theta\right))$$

et ainsi

$$\left\|\psi\left(\theta\right)\right\|_\infty \leq \breve{\psi}(r)$$

pour tout $\theta \in B_r$. Ainsi, par(1.39) nous avons, pour tout $\theta \in B_r$,

$$v\left(G\left(\theta\right)\right) \leq p_0\left(r\right)$$

pour p_0 donné par (1.9).

Pour tous $x, y \in B_r$ nous avons

$$v\left(g\left(x\right) * \delta_0^\pi - g\left(y\right) * \delta_0^\pi\right) \leq 4T\left\|g\left(x\right) - g\left(y\right)\right\|_\infty$$

par (1.35) et

$$v\left(h\left(x\right)*\delta_0^{\pi\pi}-h\left(y\right)*\delta_0^{\pi\pi}\right)\leq T^2\left\|h\left(x\right)-h\left(y\right)\right\|_\infty$$

par (1.36). Par (1.17) et le théorème des accroissements finis nous avons

$$\left\|g\left(x\right)-g\left(y\right)\right\|_\infty\leq\breve{g}'\left(r\right)\nu\left(x-y\right)$$

et

$$\left\|h\left(x\right)-h\left(y\right)\right\|_\infty\leq\breve{h}'\left(r\right)\nu\left(x-y\right)$$

pour tous $x,y\in B_r$. Par conséquent,

$$v\left(g\left(x\right)*\delta_0^{\pi}-g\left(y\right)*\delta_0^{\pi}\right)\leq 4T\breve{g}'\left(r\right)v\left(x-y\right)\tag{1.41}$$

et

$$v\left(h\left(x\right)*\delta_0^{\pi\pi}-h\left(y\right)*\delta_0^{\pi\pi}\right)\leq T^2\breve{h}'\left(r\right)v\left(x-y\right)\tag{1.42}$$

pour tous $x,y\in B_r$. En utilisant

$$J_k\left(y\right)-J_k\left(x\right)=\left(a_k\left(y\right)-a_k\left(x\right)\right)\Delta_{\tau_k(y)}^{\pi\pi}+a_k\left(x\right)\left(\Delta_{\tau_k(y)}^{\pi\pi}-\Delta_{\tau_k(x)}^{\pi\pi}\right)$$

en même temps que (1.7), (1.8), (1.24) et (1.27) nous avons

$$v\left(J_k\left(x\right)-J_k\left(y\right)\right)\leq\zeta_k v\left(x-y\right)$$

pour

$$\zeta_k=2\lambda_k T^2+8\gamma_k\mu_k T$$

$(k=1,...,m)$ et ainsi

$$v\left(J\left(x\right)-J\left(y\right)\right)\leq\zeta_0 v\left(x-y\right).\tag{1.43}$$

De

$$\begin{aligned}v\left(G\left(x\right)-G\left(y\right)\right)&\leq v\left(g\left(x\right)*\delta_0^{\pi}-g\left(y\right)*\delta_0^{\pi}\right)\\&\quad+v\left(h\left(x\right)*\delta_0^{\pi\pi}-h\left(y\right)*\delta_0^{\pi\pi}\right)+v\left(J\left(x\right)-J\left(y\right)\right)\end{aligned}$$

et les inégalités (1.41)-(1.43) il s'ensuit que, pour tous $x, y \in B_r$,

$$v\left(G\left(x\right)-G\left(y\right)\right)\leq q_0(r)v\left(x-y\right)$$

pour q_0 donné par (1.10).

S'il existe $r_0 > 0$ tel que $p_0\left(r_0\right) = r_0$ (G plonge B_{r_0} dans elle-même) et $q_0\left(r_0\right) < 1$ (G est une contraction sur B_{r_0}) alors, par le théorème du point fixe de Banach, il existe un $\theta \in B_{r_0} \cap AC_{ap}(2T)$ unique pour lequel (1.31) et (1.40) sont satisfaites. Nous avons prouvé le théorème 1.1.

1.3.2 Quelques exemples

Exemple 1.5 *Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation impulsivement entrainée du pendule simple indépendante d'état.*

$$\ddot{\theta}+c\ \dot{\theta}+a\sin\theta=f+\sum_{k=1}^{m}a_k\Delta_{\tau_k} \tag{1.44}$$

pour $a, c, a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$, $\tau_1, ..., \tau_m \in [0, T)$ et $f \in L^1_{ap}(2T)$. Alors $g\left(x\right) = cx$ et $h\left(x\right) = a\sin x$ et ces fonctions satisfont les conditions $g'\left(-x\right) = g'\left(x\right)$ et $h\left(-x\right) = -h\left(x\right)$. Nous avons pour $r \geq 0$

$$\breve{g}\left(r\right)=|c|r,$$

$$\breve{h}\left(r\right)=|a|\begin{cases}\sin r & 0\leq r\leq\pi/2\\ 1 & r>\pi/2,\end{cases}$$

$$\breve{g}'\left(r\right)=|c|,$$

$$\breve{h}'\left(r\right)=|a|$$

et

$$\breve{g}''\left(r\right)=0$$

Ainsi par (1.9) and (1.10) nous avons pour $r \geq 0$

$$p_0\left(r\right)=T^2\left(\left\|f\right\|_1+2\Gamma\right)+4T|c|r+T^2|a|\begin{cases}\sin r & 0\leq r\leq\pi/2\\ 1 & r>\pi/2\end{cases}$$

et

$$q_0(r) = 4T|c| + T^2|a|$$

puisque $\zeta_0 = 0$. *En supposant que (1.44) est non homogène, alors* $\|f\|_1 + 2\Gamma \neq 0$ *et ainsi si*

$$4T|c| < 1 \tag{1.45}$$

alors le graphe de p_0 *au premier quadrant intersecte celui de l'identité* $\iota(r) = r$ *à un certain point* $r_0 > 0$. *La condition* $q_0(r_0) < 1$ *devient*

$$\left(T^2|a| + 4T|c|\right) < 1 \tag{1.46}$$

ce qui implique (1.45). Ainsi, soumis à (1.46) il existe une solution unique $\theta \in B_{r_0} \bigcap AC_{ap}(2T)$ *de (1.44) sur* $\mathbb{R}$ *qui est telle que* $\dot{\theta} \in NBV_{ap}(2T)$ *et* $\ddot{\theta}$ *existe comme une fonction généralisée. Les itérations* $G^n(\theta_0)$ *convergent uniformément vers* θ *pour* $\theta_0 \in B_{r_0}$ *arbitraire à une vitesse bornée par (1.40) pour* $\lambda = 4T|c| + T^2|a|$ *et* $r = r_0$.

Exemple 1.6 *Considérons l'équation impulsivement entrainée de van der Pol indépendante d'état.*

$$\ddot{\theta} - \mu\left(1 - \theta^2\right)\dot{\theta} + \theta = f + \sum_{k=1}^{m} a_k \Delta_{\tau_k} \tag{1.47}$$

pour $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $\tau_1, ..., \tau_m \in [0, T)$ *et* $f \in L^1_{ap}(2T)$. *Alors*

$$g(x) = -\mu\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

et $h(x) = x$ *et ces fonctions satisfont les conditions* $g'(-x) = g'(x)$ *et* $h(-x) = -h(x)$. *Nous avons pour* $r \geq 0$

$$\breve{g}(r) = \mu \begin{cases} r - r^3/3 & 0 \leq r \leq 1 \\ 2/3 & 1 < r < 2 \\ r^3/3 - r & 2 \leq r < \infty, \end{cases}$$

$$\breve{h}(r) = r,$$

$$\breve{g}'(r) = \mu \begin{cases} 1 & 0 \le r \le \sqrt{2} \\ r^2 - 1 & \sqrt{2} < r < \infty, \end{cases}$$

$$\breve{h}'(r) = 1$$

et

$$\breve{g}''(r) = 2\mu r$$

Ainsi par (1.9) et (1.10) nous avons pour $r \ge 0$

$$p_0(r) = T^2 \left(\|f\|_1 + 2\Gamma + r\right) + 4T\mu \begin{cases} r - r^3/3 & 0 \le r \le 1 \\ 2/3 & 1 < r < 2 \\ r^3/3 - r & 2 \le r < \infty \end{cases}$$

et

$$q_0(r) = T^2 + 4T\mu \begin{cases} 1 & 0 \le r \le \sqrt{2} \\ r^2 - 1 & \sqrt{2} < r < \infty \end{cases}$$

*puisque $\zeta_0 = 0$. S'il existe $r_0 > 0$ pour lequel $p_0(r_0) = r_0$ et $q_0(r_0) < 1$ simultanément (comme c'est le cas lorsque $0 < r_0 < \sqrt{2}$ et $T^2 + 4T\mu < 1$ par exemple), alors il existe une solution unique $\theta \in B_{r_0} \cap AC_{ap}(2T)$ de (**??**) sur $\mathbb{R}$ avec la première dérivée $\dot{\theta} \in NBV_{ap}(2T)$ et dérivée seconde généralisée $\ddot{\theta}$. De plus les itérations $G^n(\theta_0)$ convergent uniformément vers θ pour $\theta_0 \in B_{r_0}$ arbitraire à la vitesse bornée par (1.40) pour $\lambda = q_0(r_0)$ et $r = r_0$.*

Ce qui suit est la conséquence du théorème 1.1. Comme nous pouvons le voir, il peut être utilisé pour obtenir des résultats impliquant les fonctions qui sont plus faciles à manipuler que p_0 et q_0.

Remarque 1.7 *Dans le contexte du théorème précédent, soient $p, q : [0, \infty) \to [0, \infty)$ les fonctions telles que $p_0 \le p$ et $q_0 \le q$ sur $[0, \infty)$. S'il existe $r' > 0$ pour lequel $p(r') = r'$ et $q(r') < 1$ simultanément, alors il existe $r_0 \in (0, r']$ tel que $p_0(r_0) = r_0$ et $q_0(r_0) < 1$. En conséquence, il existe une solution unique $\theta \in B_{r_0} \cap AC_{ap}(2T) \subset B_{r'} \bigcap AC_{ap}(2T)$ de (1.4) avec $\dot{\theta} \in NBV_{ap}(2T)$ et dérivée seconde généralisée $\ddot{\theta}$ (qui est Lebesgue intégrable* *dans le cas non impulsif). De plus, les itérations* $G^n(\theta_0)$ *convergent uniformément vers* θ *pour* $\theta_0 \in B_{r'} \supset B_{r_0}$ *arbitraire à la vitesse bornée par (1.40) pour* $\lambda = q(r')$ *et* $r = r'$.

De toute évidence p et/ou q différent pour la même équation pourrait conduire à des résultats plus nets

Exemple 1.8 *Nous appliquons la remarque 1.7 à l'équation de Josephson (1.15) sur* $\mathbb{R}$ *avec* $f \in L^1_{ap}(2T)$ *et les impulsions d'état dépendent qui satisfont les conditions de Lipschitz (1.7) et (1.8). Ici* $g(x) = cx + d\sin x$ *et* $h(x) = a\sin x$ *et ainsi, pour tout* $r \geq 0$,

$$\begin{aligned} \breve{g}(r) &\leq |c|r + |d| \begin{cases} \sin r & 0 \leq r \leq \pi/2 \\ 1 & r \geq \pi/2 \end{cases} \\ &\leq |d| + |c|r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \breve{h}(r) &= |a| \begin{cases} \sin r & 0 \leq r \leq \pi/2 \\ 1 & r \geq \pi/2 \end{cases} \\ &\leq |a|, \end{aligned}$$

$$\breve{g}'(r) \leq |c| + |d|,$$

$$\breve{h}'(r) = |a|$$

et

$$\begin{aligned} \breve{g}''(r) &= |d| \begin{cases} \sin r & 0 \leq r \leq \pi/2 \\ 1 & r \geq \pi/2 \end{cases} \\ &\leq |d| \end{aligned}$$

Ainsi, pour la fonction continue

$$p(r) = T^2\left(\|f\|_1 + 2\Gamma + |a|\right) + 4T\left(|d| + |c|r\right)$$

et la fonction constante

$$q(r) = 4T(|c| + |d|) + T^2|a| + \zeta_0$$

nous obtenons facilement $p_0 \leq p$ *et* $q_0 \leq q$ *sur* $[0, \infty)$. *Si* $4T|c| < 1$ *alors le graphe de* p *au premier quadrant intersecte celui de l'identité* $\iota(r) = r$ *au point*

$$r' = \frac{T^2(\|f\|_1 + 2\Gamma + |a|) + 4T|d|}{1 - 4T|c|}.$$

Ainsi, soumis à la condition $4T|c| < 1$, *il existe* $r_0 \in (0, r']$ *où* $p_0(r_0) = r_0$ *et en conséquence* $B_{r_0} \subset B_{r'}$. *La condition* $q(r') < 1$ *devient*

$$4T(|c| + |d|) + T^2|a| + \zeta_0 < 1 \tag{1.48}$$

ce qui implique $4T|c| < 1$. *Ainsi, soumis à (1.48) il existe une solution unique* $\theta \in B_{r_0} \bigcap AC_{ap}(2T)$ *de (1.15) qui est telle que* $\dot{\theta} \in NBV_{ap}(2T)$ *et* $\ddot{\theta}$ *existe comme une fonction généralisée. Les itérations* $G^n(\theta_0)$ *convergent uniformément vers* θ *pour* $\theta_0 \in B_{r'}$ *arbitraire à la vitesse bornée par (1.40) pour* $\lambda = 4T(|c| + |d|) + T^2|a| + \zeta_0$ *et* $r = r'$.

Exemple 1.9 *Nous appliquons la remarque 1.7 à l'équation de van der Pol (1.16) sur* $\mathbb{R}$ *avec* $f \in L^1_{ap}(2T)$ *et des impulsions d'état dépendant qui satisfont les conditions de Lipschitz (1.7) et (1.8). Ici* $g(x) = \mu(x^3/3 - x)$ *et* $h(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et ainsi pour tout* $r \geq 0$ *on obtient au moyen des résultats de l'exemple 1.6*

$$\breve{g}(r) \leq \mu \begin{cases} r & 0 \leq r \leq 2/3 \\ 2/3 & 2/3 < r < 2 \\ r^3/3 - 2 & 2 \leq r < \infty, \end{cases}$$

$$\breve{h}(r) = r,$$

$$\breve{g}'(r) \leq \mu(1 + r^2),$$

$$\breve{h}'(r) = 1$$

et

$$\breve{g}''(r) = 2\mu r$$

(à utiliser dans l'exemple 1.15). Ainsi pour les fonctions continues

$$p(r) = T^2\left(\|f\|_1 + 2\Gamma\right) + T^2 r + 4T\mu \begin{cases} r & 0 \le r \le 2/3 \\ 2/3 & 2/3 < r < 2 \\ r^3/3 - 2 & 2 \le r < \infty, \end{cases}$$

et

$$q(r) = 4T\mu + T^2 + \zeta_0 + 4T\mu\, r^2$$

nous avons $p_0 \le p$ and $q_0 \le q$ sur $[0,\infty)$. Si le graphe de p au premier quadrant intersecte celui de l'identité $\iota(r) = r$ à un certain point $r' > 0$ (que nous prenons comme le plus petit des deux) alors G donné par (1.14) plonge $B_{r'}$ dans lui-même. Sous réserve de la condition ajoutée $q(r') < 1$, il existe $r_0 \in (0, r')$ tel que $p_0(r_0) = r_0$ et $q_0(r_0) < 1$ simultanément. Ainsi, sous ces conditions, il existe une solution unique $\theta \in B_{r_0} \bigcap AC_{ap}(2T)$ de (1.16) qui est telle que $\dot{\theta} \in NBV_{ap}(2T)$ et $\ddot{\theta}$ qui existe comme une fonction généralisée. Les itérations $G^n(\theta_0)$ convergent uniformément vers θ pour $\theta_0 \in B_{r'} \supset B_{r_0}$ arbitraire à la vitesse bornée par (1.40) pour $\lambda = q(r')$ et $r = r'$.

1.3.3 Le cas τ_k d'état indépendant

Le cas où $\tau_k \in [0, T)$ est indépendant d'état pour $k \in \{1, ..., m\}$ peut être traité en utilisant (1.33) au lieu de (1.4). (On doit supposer τ_k indépendant d'état lorsqu'on utilise (1.33) parce qu'on manque une inégalité comme (1.27) pour $v(\widetilde{\delta_{t''}}^{\pi} - \widetilde{\delta_{t'}}^{\pi})$). En écrivant ϑ pour $\dot{\theta} \in NBV_{ap}(2T)$, (1.33) devient

$$\vartheta = -g(\vartheta^{\pi}) + (f - h(\vartheta^{\pi})) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} + \sum_{k=1}^{m} a_k(\vartheta^{\pi})\, \Delta_{\tau_k}^{\pi} \tag{1.49}$$

où $\vartheta \in NBV_{ap}(2T)$. Pour alléger la notation, nous introduisons une fonction I : $NBV_{ap}(2T) \to NBV_{ap}(2T)$ donnée par

$$I(\vartheta) = \sum_{k=1}^{m} I_k(\vartheta)$$

où les fonctions $I_k : NBV_{ap}(2T) \to NBV_{ap}(2T)$ sont définies par

$$I_k(\vartheta) = a_k(\vartheta^\pi)\,\Delta^\pi_{\tau_k}.$$

Ainsi (1.49) devient

$$\vartheta = -g(\vartheta^\pi) + (f - h(\vartheta^\pi)) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} + I(\vartheta) \tag{1.50}$$

où $\vartheta \in NBV_{ap}(2T)$ (et ainsi $\vartheta^\pi, g(\vartheta^\pi), h(\vartheta^\pi) \in AC_{ap}(2T)$). Nous écrivons (1.50) comme

$$\vartheta = H(\vartheta) \tag{1.51}$$

où H est donné par

$$H(\vartheta) = -g(\vartheta^\pi) + (f - h(\vartheta^\pi)) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} + I(\vartheta) \tag{1.52}$$

pour tout $\vartheta \in NBV_{ap}(2T)$.

Proposition 1.3 *H plonge $NBV_{ap}(2T)$ en lui-même.*

Démonstration. Nous avons

$$v\left(f * \widetilde{\delta_0}^{\pi}\right) \leq 4T\,\|f\|_1 \tag{1.53}$$

par (1.19) et (1.25),

$$v(-g(\vartheta^\pi)) = \int_0^{2T} |\dot{g}(\vartheta^\pi)| \leq 2T\,\|g'(\vartheta^\pi)\,\vartheta\|_\infty \tag{1.54}$$

par la règle de chaîne,

$$v\left(h\left(\theta\right)*\widetilde{\delta_0}^{\pi}\right)\leq 4T\left\|h\left(\theta\right)\right\|_{\infty} \tag{1.55}$$

par (1.19) et (1.25), et

$$v\left(I\left(\vartheta\right)\right)=v\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}a_j\left(\vartheta^{\pi}\right)\Delta_{\tau_j}^{\pi}\right)\leq\Gamma v\left(\widetilde{\Delta_0}^{\pi}\right)\leq 4\Gamma T \tag{1.56}$$

par (1.26) et pour Γ donné par (1.38). Par l'inégalité du triangle appliquée à (1.52) nous obtenons par (1.53)-(1.56)

$$v\left(H\left(\vartheta\right)\right)\leq 4T\left\|f\right\|_1+2T\left\|g'\left(\vartheta^{\pi}\right)\vartheta\right\|_{\infty}+4T\left\|h\left(\vartheta^{\pi}\right)\right\|_{\infty}+4\Gamma T$$

où, par (1.17) et (1.20),

$$\left\|g'\left(\vartheta^{\pi}\right)\vartheta\right\|_{\infty}\leq\breve{g}'\left(2Tv\left(\vartheta\right)\right)v\left(\vartheta\right)<\infty$$

et

$$\left\|h\left(\vartheta^{\pi}\right)\right\|_{\infty}\leq\breve{h}\left(2Tv\left(\vartheta\right)\right)<\infty.$$

Par conséquent nous avons

$$v\left(H\left(\vartheta\right)\right)\leq 4T\left(\|f\|_1+\Gamma\right)+2T\breve{g}'\left(2Tv\left(\vartheta\right)\right)v\left(\vartheta\right)+4T\breve{h}\left(2Tv\left(\vartheta\right)\right)<\infty. \tag{1.57}$$

■

S'il existe $r>0$ tel que H soit une contraction injective sur B_r, alors le théorème du point fixe de Banach garantit l'existence d'un $\vartheta\in B_r$ unique pour lequel (1.51) est satisfait. Par (1.57) nous avons, pour tout $x\in B_r$,

$$v\left(H\left(x\right)\right)\leq p_*\left(r\right) \tag{1.58}$$

où p_* est la fonction non décroissante sur $[0,\infty)$ donnée par

$$p_*\left(r\right)=4T\left(\|f\|_1+\Gamma\right)+2T\breve{g}'\left(2Tr\right)r+4T\breve{h}\left(2Tr\right). \tag{1.59}$$

Par conséquent, s'il existe $r_* > 0$ tel que

$$p_* (r_*) = r_*$$

alors, par (1.57), $v (H (x)) \leq r_*$ est satisfait pour tout $x \in B_{r_*}$ et ainsi H plonge B_{r_*} dans elle-même.

Pour la propriété de contraction maintenant. En partant de

$$I_k (x) - I_k (y) = (a_k (x^\pi) - a_k (y^\pi)) \Delta^\pi_{\tau_k}$$

et en utilisant (1.7), (1.20) et (1.26) nous obtenons

$$v (I_k (x) - I_k (y)) \leq 8\lambda_k T^2 v (x - y)$$

et ainsi

$$v (I (x) - I (y)) \leq \zeta_* v (x - y) \tag{1.60}$$

pour tout $x, y \in NBV_{ap} (2T)$ et

$$\zeta_* = 8\Lambda T^2.$$

Par le théorème des accroissements finis nous avons, pour tout $s \in [0, 2T]$ et tous $x, y \in B_r$ (pour $r > 0$ arbitraire),

$$|g' (x^\pi (s)) - g' (y^\pi (s))| = |g'' (z_s)| \; |x^\pi (s) - y^\pi (s)|$$

pour un certain z_s entre $x^\pi (s)$ et $y^\pi (s)$ (et ainsi, par (1.20), pour $z_s \in [-2Tr, 2Tr]$). Par (1.17) et (1.20) nous avons, pour tous $x, y \in B_r$ et tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g' (x^\pi (s)) - g' (y^\pi (s))| &\leq \breve{g}'' (2Tr) \, v (x^\pi - y^\pi) \\ &\leq 2T \breve{g}'' (2Tr) \, v (x - y) \end{aligned}$$

où

$$\breve{g}'' (2Tr) = \sup\{|g'' (s)| : -2Tr \leq s \leq 2Tr\}.$$

De plus, par la règle de chaîne et l'inégalité du triangle, nous avons

$$
\begin{aligned}
|\dot{g}(x^\pi(s)) - \dot{g}(y^\pi(s))| &\leq |g'(x^\pi(s)) - g'(y^\pi(s))|\,|x(s)| \\
&\quad + |g'(y^\pi(s))|\,|x(s) - y(s)| \\
&\leq \breve{g}''(2Tr)\,2Tv(x-y)\,|x(s)| \\
&\quad + \breve{g}'(2Tr)\,|x(s) - y(s)|
\end{aligned}
$$

et ainsi, par l'intermédiaire de

$$
v(g(x^\pi) - g(y^\pi)) = \int_0^{2T} |\dot{g}(x^\pi) - \dot{g}(y^\pi)|
$$

en même temps que $v(x^\pi) = \int_0^{2T} |x|$ et $v(x^\pi - y^\pi) = \int_0^{2T} |x - y|$ nous obtenons pour tous $x, y \in B_r$ (et ainsi $x^\pi, y^\pi \in B_{2Tr}$)

$$
v(g(x^\pi) - g(y^\pi)) \leq 2T\breve{g}''(2Tr)\,v(x-y)\,v(x^\pi) + \breve{g}'(2Tr)\,v(x^\pi - y^\pi)
$$

qui, puisque $v(x^\pi) \leq 2Tr$, implique

$$
v(g(x^\pi) - g(y^\pi)) \leq \Big(4T^2\breve{g}''(2Tr)\,r + 2T\breve{g}'(2Tr)\Big)\,v(x-y). \tag{1.61}
$$

Nous avons également, pour tous $x, y \in B_r$,

$$
v(h(x^\pi) * \delta_0^\pi - h(y^\pi) * \delta_0^\pi) \leq 4T\breve{h}'(2Tr)\,v(x^\pi - y^\pi)
$$

par le même raisonnement utilisé pour prouver (1.41), et ainsi

$$
v(h(x^\pi) * \delta_0^\pi - h(y^\pi) * \delta_0^\pi) \leq 8T^2\breve{h}'(2Tr)\,v(x-y). \tag{1.62}
$$

De

$$
\begin{aligned}
v(H(x) - H(y)) &\leq v(g(x^\pi) - g(y^\pi)) \\
&\qquad + v(h(x^\pi) * \delta_0^\pi - h(y^\pi) * \delta_0^\pi) + v(I(x) - I(y))
\end{aligned}
$$

il s'ensuit que, pour tous $x, y \in B_r$,

$$v\left(H\left(x\right)-H\left(y\right)\right)\leq q_*(r)v\left(x-y\right)$$

où

$$q_*\left(r\right)=4T^2\breve{g}''\left(2Tr\right)r+2T\breve{g}'\left(2Tr\right)+8T^2\breve{h}'\left(2Tr\right)+\zeta_* \tag{1.63}$$

par (1.60)-(1.62). Ceci complète la preuve du résultat suivant.

Théorème 1.10 *Étant donné $T>0$ et l'équation de Liénard impulsivement entrainée (1.4) sur $\mathbb{R}$ avec τ_k d'état indépendant, et soumise à H1-H5, soient p_* et q_* définies par (1.59) et (1.63), respectivement. S'il existe $r_*>0$ pour lequel $p_*\left(r_*\right)=r_*$ et $q_*\left(r_*\right)<1$ simultanément, alors il existe $\vartheta\in B_{r_*}$ unique pour lequel $\theta=\vartheta^\pi$ est une solution absolument continue de (1.4) et (1.5) avec la dérivée seconde généralisée $\ddot{\theta}=\dot{\vartheta}$ (Lebesgue intégrable dans le cas non impulsif). De plus, les itérations $H^n\left(\vartheta_0\right)$ convergent ponctuellement vers $\dot{\theta}=\vartheta$ pour $\vartheta_0\in B_{r_*}$ arbitraire à la vitesse uniformément bornée par*

$$\left\|\vartheta-H^n\left(\vartheta_0\right)\right\|_\infty\leq\frac{2\lambda^n r_*}{1-\lambda} \tag{1.64}$$

pour $\lambda=q_*\left(r_*\right)$.

Exemple 1.11 *Dans le contexte de l'exemple 1.5 avec τ_k état indépendant, (1.59) et (1.63) deviennent (pour $r\geq 0$)*

$$p_*\left(r\right)=4T\left(\left\|f\right\|_1+\Gamma\right)+2T|c|r+4T|a|\begin{cases}\sin 2Tr & si\ \ 0\leq 2Tr\leq\pi/2\\ 1 & si\ \ 2Tr>\pi/2\end{cases}$$

et

$$q_*\left(r\right)=2T|c|+8T^2|a|$$

(puisque $\zeta_*=0$). En supposant que (1.44) est non homogène, alors $\left\|f\right\|_1+\Gamma\neq 0$ et ainsi si $2T|c|<1$ (par opposition à (1.45)) est satisfait alors le graphe de p_* au premier

quadrant rencontre celui de l'identité $\iota(r) = r$ à un certain point $r_* > 0$. La condition $q_*(r_*) < 1$, qui est équivalente à

$$2T|c| + 8T^2|a| < 1 \tag{1.65}$$

implique $2T|c| < 1$. Ainsi, soumis à (1.65) il existe un $\vartheta \in B_{r_*}$ unique tel que $\theta = \vartheta^\pi$ est la solution de (1.44) dans $AC_{ap}(2T)$ pour lequel $\ddot{\theta} = \dot{\vartheta}$ existe comme fonction généralisée. De plus, les itérations $H^n(\vartheta_0)$ convergent uniformément vers ϑ pour $\vartheta_0 \in B_{r_*}$ arbitraire à un taux délimitée par (1.64) pour $\lambda = 2T|c| + 8T^2|a|$.

Exemple 1.12 *Dans le contexte de l'exemple 1.6 avec τ_k état indépendant, (1.59) et (1.63) deviennent (pour $r \geq 0$)*

$$p_*(r) = 4T\left(\|f\|_1 + \Gamma\right) + 8T^2 r + 2T\mu \begin{cases} 1 & si \;\; 0 \leq 2Tr \leq \sqrt{2} \\ r^2 - 1 & si \;\; 2Tr > \sqrt{2} \end{cases}$$

et

$$q_*(r) = 8T^2 + 16T^3\mu r^2 + 2T\mu \begin{cases} 1 & si \;\; 0 \leq 2Tr \leq \sqrt{2} \\ r^2 - 1 & si \;\; 2Tr > \sqrt{2} \end{cases}$$

*(puisque $\zeta_* = 0$). Si le graphe de p_* au premier quadrant intersecte celui de l'identité $\iota(r) = r$ en certain point $r_* > 0$ pour lequel $q_*(r_*) < 1$, alors il existe $\vartheta \in B_{r_*}$ unique tel que $\theta = \vartheta^\pi$ est la solution de (**??**) dans $AC_{ap}(2T)$ tel que $\ddot{\theta}$ existe comme fonction généralisée. De plus, les itérations $H^n(\vartheta_0)$ convergent uniformément vers ϑ pour $\vartheta_0 \in B_{r_*}$ arbitraire à une vitesse bornée par (1.64) pour $\lambda = q_*(r_*)$.*

Nous avons l'analogue utile de la remarque 1.7 suivant.

Remarque 1.13 *Dans le contexte du théorème précédent, soient $p, q : [0, \infty) \to [0, \infty)$ les fonctions telles que $p_* \leq p$ et $q_* \leq q$ sur $[0, \infty)$. S'il existe $r' > 0$ pour lequel $p(r') = r'$ et $q(r') < 1$ simultanément, alors il existe $r_* \in (0, r']$ tel que $p_*(r_*) = r_*$ et $q_*(r_*) < 1$. En conséquence, il existe un unique $\vartheta \in B_{r_*} \subset B_{r'}$ pour lequel $\theta = \vartheta^\pi$ est une solution* *absolument continue de (1.4) et (1.5) avec la dérivée seconde généralisée $\ddot{\theta} = \dot{\vartheta}$ (qui est Lebesgue intégrable dans le cas non impulsif). De plus, les itérations $H^n(\vartheta_0)$ convergent uniformément vers $\dot{\theta} = \vartheta$ pour $\vartheta_0 \in B_{r'}$ arbitraire à la vitesse bornée par*

$$\|\vartheta - H^n(\vartheta_0)\|_\infty \leq \frac{2\lambda^n r'}{1-\lambda} \tag{1.66}$$

pour $\lambda = q(r')$.

Exemple 1.14 *Dans le contexte de l'exemple 1.8 avec $\tau_k(\theta) = \tau_k$, si p et q sont les fonctions*

$$p = 4T(\|f\|_1 + \Gamma + |a|) + 2T(|c| + |d|)r$$

et

$$q = 8T^2(|a| + \Lambda) + 2T(|c| + |d|) + 4T^2|d|r$$

respectivement, alors $p_*(r) \leq p$ and $q_*(r) \leq q$. Lorsque

$$2T(|c| + |d|) < 1$$

alors

$$r' = \frac{4T(\|f\|_1 + \Gamma + |a|)}{1 - 2T(|c| + |d|)}$$

et, si $q(r') < 1$, alors il existe $\vartheta \in B_{r_*} \subset B_{r'}$ unique pour lequel $\theta = \vartheta^\pi$ est une solution absolument continue T-anti-périodique de

$$\ddot{\theta} + (c + d\cos\theta)\dot{\theta} + a\sin\theta = f + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\Delta_{\tau_k}$$

avec seconde dérivée généralisée $\ddot{\theta} = \dot{\vartheta}$. De plus, les itérations $H^n(\vartheta_0)$ convergent ponctuellement vers $\dot{\theta} = \vartheta$ pour $\vartheta_0 \in B_{r'}$ arbitraire au taux délimité par (1.66) pour $\lambda = q(r')$.

Exemple 1.15 *Dans le contexte de l'exemple 1.15 avec $\tau_k(\theta) = \tau_k$, Si les fonctions $p, q : [0,\infty) \to [0,\infty)$ sont données par*

$$p(r) = 4T(\|f\|_1 + \Gamma) + \left(2T\mu + 8T^2\right)r + 8T^3\mu r^3$$

et

$$q(r) = 2T\mu + 8T^2(1+\Lambda) + 24T^3\mu r^2$$

alors on a $p_* \leq p$ *et* $q_* \leq q$ *sur* $[0,\infty)$. *Si le graphe de* p *au premier quadrant intersecte celui de l'identité* $\iota(r) = r$ *à un certain point* $r' > 0$ *(que nous prenons comme le plus petit des deux) alors* H *donnée par (1.52) plonge* $B_{r'}$ *en elle-même. Sous réserve de la condition ajoutée* $q(r') < 1$, *il existe* $r_* \in (0, r')$ *tel que* $p_*(r_*) = r_*$ *et* $q_*(r_*) < 1$ *simultanément. Ainsi, sous ces conditions, il existe* $\vartheta \in B_{r_*} \subseteq B_{r'}$ *unique tel que* $\theta = \vartheta^\pi$ *est une solution absolument continue* T*-anti-périodique de*

$$\ddot{\theta} - \mu\left(1-\theta^2\right)\dot{\theta} + \theta = f + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\,\Delta_{\tau_k}$$

avec dérivée seconde généralisée $\ddot{\theta} = \dot{\vartheta}$. *De plus, les itérations* $H^n(\vartheta_0)$ *convergent uniformément vers* $\dot{\theta} = \vartheta$ *pour* $\vartheta_0 \in B_{r'}$ *arbitraire à la vitesse bornée par (1.66) pour* $\lambda = q(r')$.

1.4 Conclusion

L'équation de Liénard (1.4) devient quasi-linéaire lorsque g et h sont Lipschitziennes. En évitant cette condition, nous avons obtenu des résultats pour un véritable cas non linéaire (1.4). L'accent est mis sur les propriétés de g et h. L'utilisation de fonctions généralisées périodiques nous ont permis de couvrir le cas où la force du côté droit de (1.4) a une composante anti-périodique avec impulsion d'état dépendant. Comme résultat, nous avons obtenu sous des conditions appropriées données par des bornes *a priori*, l'existence d'une solution de (1.4) et (1.5) qui est absolument continue avec dérivée de variation bornée (sur des intervalles finis) et dérivée seconde généralisée. De plus, la solution peut être calculée numériquement comme la limite uniforme (et donc ponctuelle) d'une suite d'itérations avec une borne pour le taux de convergence.

CHAPITRE 2

Équation impulsive de Liénard avec f Henstock-Kurzweil intégrable

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous verrons que l'équation de Liénard impulsivement entrainée sous sa forme générale (1.4) avec f Henstock-Kurzweil (noté HK) intégrable [19, 31] admet une solution absolument continue θ satisfaisant la condition (1.5). Sous les mêmes considérations qu'au chapitre précédent, la convergence ponctuelle d'une suite d'itérations de Picard vers la solution θ est obtenue où la dérivée première $\dot{\theta}$ est de variation bornée et la dérivée seconde généralisée $\ddot{\theta}$ est $HK-$intégrable. Notons que l'intégrale de HK généralise l'intégrale de Riemann et de Lebesgue [19]. Comme nous l'avons fait au chapitre premier, les résultats seront appliquées aux équations de Josephson (1.15) et de Van der Pol (1.16) en guise d'illustration [5]. Dans la section suivante nous introduisons l'intégrale de HK et ses quelques propriétés.

2.2 L'intégrale de Riemann généralisée

2.2.1 L'intégrale de Henstock-Kurzweil

Nous commençons par une définition brève de la somme de Riemann pour l'intégrale de Riemann [34, p.121]. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, et $a = s_0 < s_1 < ... < s_{n-1} < s_n = b$ une partition de $[a,b]$ et soit t_i un point quelconque de l'intervalle $[s_{i-1}, s_i]$ pour $1 \leq i \leq n$. La somme de Riemann est donnée par :

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(s_i - s_{i-1})$$

et l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ est la limite (si elle existe) de ces sommes lorsque $max\{|s_i - s_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\} \to 0$.

La version de l'intégrale HK eut le concours des travaux de Jaroslaw Kurzweil et Ralph Henstock. Vers les années 1950, J.Kurzweil introduisit une version généralisée de l'intégrale de Riemann lors d'une étude des équations différentielles, dite intégrale de Jauge. Cette approche s'avéra une contribution importante pour la suite. Plus tard dans les années 60, R.Henstock utilisera cette nouvelle approche de Kurzweil pour généraliser l'intégrale de Lebesgue. Ainsi, elle sera souvent appelée l'intégrale de Jauge, de Riemann généralisée [31, p.102] ou de Henstock-Kurzweil [19, ch.9]. La fonction

$$f(t) = \begin{cases} t^{-3/2} \cos t^{-1} & \text{si } \ 0 < t < T \\ 0 & \text{si } \ t = 0, T \end{cases} \tag{2.1}$$

est un exemple de fonction Henstock-Kurzweil intégrable qui n'est pas Lebesgue intégrable sur $[0,T]$ [31, p.106-107].

Définition 2.1 *Soit ρ une fonction positive définie sur un intervalle $[a,b]$. Un intervalle marqué $(s,[c,d])$ de $[a,b]$ est un intervalle $[c,d] \subseteq [a,b]$ où $s \in [c,d]$. On dit que s marque le segment $[c,d]$ et la fonction ρ détermine le pas sur l'intervalle $[a,b]$. L'intervalle marqué $(s,[c,d])$ est plus fin que ρ si $[c,d] \subseteq (s-\rho(s), s+\rho(s))$.*

Remarque 2.1 *Si $P = \{(s_i, [c_i, d_i]), 1 \leq i \leq n\}$ est une collection d'intervalles marqués sur $[a, b]$, alors $\rho : [a, b] \to [0, +\infty)$ est assez petite pour qu'on ait $(d_i - c_i) \leq \rho(s_i)$ tout dépendant de $f(s_i)$.*

Nous avons les notions suivantes :

1. Si $(s_i, [c_i, d_i])$ est plus fine que ρ pour tout i, alors P est plus fine que ρ.
2. Soit $E \subseteq [a, b]$. Si P est plus fine que ρ où chaque $s_i \in E$, alors P est E-plus fine que ρ.
3. Si P est plus fine que ρ et $[a, b] = \cup_{i=1}^{n} [c_i, d_i]$, alors P est une partition marquée de $[a, b]$ qui est plus fine que ρ.

Si ρ est constant ou mieux encore lorsque $inf\{\rho(s) : s \in [a, b]\} > 0$, alors la collection de partitions marquées plus fine que ρ n'est autre que la collection de partitions marquées dans la définition de l'intégrale de Riemann. Nous considérerons le cas général de la fonction ρ pour laquelle $inf\{\rho(s) : s \in [a, b]\} = 0$. Le lemme suivant dû à Cousin garantit l'existence de partitions marquées de $[a, b]$ qui sont plus fines que ρ pour chaque fonction positive ρ sur $[a, b]$[19].

Lemme 2.2 *Si ρ est une fonction positive définie sur $[a, b]$, alors il existe une partition marquée de $[a, b]$ qui est plus fine que ρ.*

Si P est un ensemble fini d'intervalles marqués sur $[a, b]$ et si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alors on pose

$$f(P) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(d_i - c_i),$$

Maintenant, nous sommes en mesure de donner la définition de l'intégrale de Henstock.

Définition 2.2 *Une fonction réelle f définie sur $[a, b]$ est dite intégrable au sens de Henstock-Kurzweil (ou HK intégrable) s'il existe un réel I qui représente l'aire sous le* *graphe de f, tel que pour tout $\epsilon > 0$ donnée à priori, on peut trouver une fonction positive ρ sur [a,b] en sorte que pour toute partition P marquée ρ-fine de $[a,b]$ on ait $|f(P)-I| < \epsilon$.*

À la limite, le nombre I est l'intégrale unique de f sur $[a,b]$, notée habituellement $\int_a^b f(t)dt$.

À titre d'exemple, on mentionne la fonction caractéristique des nombres rationnels qui est une fonction bornée mais pas Riemann intégrable. On peut montrer néanmoins que cette fonction est $HK-$intégrable.

Exemple 2.3 *Étant donnée la fonction*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & si \;\; t \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \; t \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{2.2}$$

soient $\epsilon > 0$ et $\{r_1, r_2, ...\}$ une collection des nombres rationnels de $[0,1]$. On définit la fonction ρ sur $[0,1]$ telle que

$$\rho(t) = \begin{cases} \epsilon 2^{-n-1} & si \;\; t = r_n \\ 1 & si \;\; t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Soit la partition $P = \{(t_i, [c_i, d_i], 1 \leq i \leq p)\}$ $\rho-$fine de $[0,1]$. Supposons que $t_{i_1}, ..., t_{i_k}$ soient égaux à r_n. Alors $\bigcup_{j=1}^{k}(d_{i_j} - c_{i_j}) \subset \cup(r_n, \rho(r_n))$. Nous avons

$$\sum_{j=1}^{k} f(t_{i_j})(d_{i_j} - c_{i_j}) = \sum_{j=1}^{k}(d_{i_j} - c_{i_j}) < \epsilon 2^{-n}$$

Puisque $f(s) = 0$ lorsque $s \notin \mathbb{Q}$, il s'ensuit que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{p} f(t_i)(d_i - c_i) < \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon$$

Comme on l'a mentionné ci-haut, certaines fonctions (voir (2.1)) ne sont pas Lebesgue intégrables mais $HK-$intégrables (voir [19, p.196]).

Notons par $HK[a,b]$ (respectivement $L^1[a,b]$) l'espace de toute fonction réelle $HK-$intégrable (respectivement Lebesgue intégrable) sur $[a,b]$.

Exemple 2.4 *Soit $T > 0$ et posons*

$$\varphi(t) = t^5 \sin t^{-2}$$

sur $[0, T]$. On a

$$\dot{\varphi}(t) = 5t^4 \sin t^{-2} - 2t^2 \cos t^{-2}$$

sur $[0, T]$ et

$$\ddot{\varphi}(t) = 20t^3 \sin t^{-2} - 14t \cos t^{-2} - 4t^{-1} \sin t^{-2}$$

sur $(0, T]$. Prolongeons $\ddot{\varphi}$ à $[0, T]$ en posant

$$g(t) = \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) & si \;\; 0 < t \leq T \\ 0 & si \;\; t = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Or, les fonctions $t^3 \sin t^{-2}$ et $t \cos t^{-2}$ sont continues sur $[0, T]$ et donc sont éléments de $L^1[0, T]$. Cependant tout prolongement à $[0, T]$ de la fonction $t^{-1} \sin t^{-2}$ n'est pas dans $L^1[0, T]$ [31, p.29] et donc $g \notin L^1[0, T]$. Quand même, puisque $\dot{\varphi}$ est continue sur $[0, T]$ et que $\ddot{\varphi}$ existe sur $[0, T] \backslash \{0\}$, on a par [31, p.124], $g \in HK[0, T]$ et

$$\int_0^t g(s)ds = \dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(t)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Exemple 2.5 *Soit $T > 0$ et posons*

$$\varphi(t) = t^3 \cos t^{-1}$$

sur $[0, T]$. Alors on a

$$\dot{\varphi}(t) = 3t^2 \cos t^{-1} - t \sin t^{-1}$$

sur $[0, T]$ et

$$\ddot{\varphi} = 6t \cos t^{-1} + 2 \sin t^{-1} + t^{-1} \cos t^{-1}$$

sur $(0,T]$. *Prolongeons* $\ddot{\varphi}$ *à tout* $[0,T]$ *en posant*

$$g(t) = \begin{cases} \ddot{\varphi}(t) & si \;\; 0 < t \leq T \\ 0 & si \;\; t = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

La fonction $t\cos t^{-1}$ *est dans* $L^1[0,T]$ *et tout prolongement de* $\sin t^{-1}$ *à* $t=0$ *l'est aussi. Mais tout prolongement de* $t^{-1}\cos t^{-1}$ *n'est pas dans* $L^1[0,T]$ *[31, p.106-107] et donc* $g \notin L^1[0,T]$. *Or* $\dot{\varphi}$ *est continue sur* $[0,T]$ *et* $\ddot{\varphi}$ *existe sur* $[0,T]\backslash\{0\}$. *Donc, par [31, p.124],* $g \in HK[0,T]$ *et*

$$\int_0^t g(s)ds = \dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(t)$$

pour tout $t \in [0,T]$.

2.2.2 Quelques propriétés harmoniques des fonctions HK intégrables.

Dans cette sous-section, nous obtenons des propriétés harmoniques utiles pour quelques fonctions $HK-$ intégrables que l'on ne trouve pas dans la littérature. Nous rappelons sans crainte d'ambiguïté que

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{x}(n)e^{in\omega t} \qquad (\omega = \pi/T, \quad t \in \mathbb{R})$$

est une fonction généralisée $2T$-périodique.

Définition 2.3 *Étant donné* $T > 0$, *on désignera par* $HK(2T)$ *la classe de toutes les fonctions réelles* $2T$*-périodiques sur* $\mathbb{R}$ *et* $HK-$*intégrables sur* $[0,2T]$ *(ainsi* $HK-$*intégrables sur tout intervalle fermé borné dans* $\mathbb{R}$*).*

Étant donné $x \in HK(2T)$ l'intégrale HK de x se réduit à l'intégrale de Riemann si x est continue et à celle de Lebesgue si x est Lebesgue intégrable. Pour l'intervalle arbitraire borné $[t_1, t_2]$, l'intégrale HK s'écrit de façon habituelle $\int_{t_1}^{t_2} x(s)ds$ [19]. Les primitives

$$\pi_x(t) = \int_0^t x(s)ds \qquad \forall x \in HK(2T) \tag{2.5}$$

sont des fonctions continues en $t \in [0, 2T]$ [31, p. 108] et sont égales pour toutes les fonctions $x \in HK(2T)$ qui sont presque partout égales [31, p. 111].

Définition 2.4 *Étant donné $T > 0$, $HK_{ap}(2T)$ est l'espace des fonctions réelles HK-intégrables sur $[0, 2T]$ qui sont $2T-$périodiques sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant la condition (1.5) pour $x \in HK(2T)$ et $t \in \mathbb{R}$.*

En conséquence, si $x \in HK_{ap}(2T)$ alors tout multiple pair de T est une période de x. De plus, si $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $2T$-périodique et de variation bornée sur des intervalles compacts (ainsi la différence de deux fonctions croissantes sur de tels intervalles) alors $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $s \to x(t-s)y(s)$ est $HK-$intégrable sur $[0, 2T]$ [31, p. 108]. La convolution $x * y$ existe $\forall t \in \mathbb{R}$ et est commutative au sens que $x * y = y * x$. De plus, $x * y$ est $2T-$périodique puisque

$$\begin{aligned}
(x * y)(t + 2T) &= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} x(t + 2T - s)\, y(s)\ ds \\
&= \frac{1}{2T} \int_0^{2T} x(t - s)\, y(s)\ ds \\
&= (x * y)(t)
\end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Clairement, l'intégrale de HK de toute fonction dans $HK_{ap}(2T)$ sur chaque intervalle de longueur $2T$ est nulle et donc

$$x * 1 = 0 \qquad \forall x \in HK_{ap}(2T). \tag{2.6}$$

Si pour $x \in HK(2T)$ on définit

$$x^{\pi}(t) = \pi_x(t) - \pi_x * 1 \tag{2.7}$$

alors

$$x^\pi * 1 = 0 \qquad \forall x \in HK_{ap}(2T)$$

et donc $x^\pi(t)$ est l'unique primitive de x de moyenne nulle.

Remarque 2.6 *Pour tout $x, y \in HK(2T)$, si $\pi_x = \pi_y$ alors $x^\pi = y^\pi$ puisque*

$$x^\pi(t) = \pi_x(t) - \pi_x * 1 = \pi_y(t) - \pi_y * 1 = y^\pi(t).$$

L'inverse est également vrai puisque $x^\pi = y^\pi$ donne par (2.5) et (2.7)

$$\pi_x * 1 = -x^\pi(0) = -y^\pi(0) = \pi_y * 1$$

et ainsi $\pi_x = x^\pi + \pi_x * 1 = y^\pi + \pi_y * 1 = \pi_y$

Montrons à présent que pour tout $x \in HK_{ap}(2T)$, la fonction continue x^π est en fait $T-$anti-périodique . En vue d'alléger la notation, écrivons pour $t \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k(t) = cosk\omega t$$
$$s_k(t) = sink\omega t$$

et

$$\phi_k(t) = e^{ik\omega t} = c_k(t) + is_k(t) \qquad \omega = \pi/T$$

Puisque c_k et s_k sont de variation bornée, la convolution $x * \phi_k$ existe au sens de l'intégration HK pour tout $x \in HK(2T)$ [31, p.108]. Ainsi, nous sommes en position d'introduire pour chaque $x \in HK(2T)$ donné, les coefficients de Fourier

$$\hat{x}(k) = (x * \phi_k)(0) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Si on prend

$$\pi_{\phi_k} = \pi_{c_k} + i\pi_{s_k}$$

alors l'intégration par partie [31, p.110] montre que

$$\int_0^{2T} \pi_x(s)\phi_k(s)ds = -\int_0^{2T} \pi_{\phi_k}(s)x(s)ds \tag{2.8}$$

Par conséquent, pour tout $x \in HK(2T)$ nous avons par (2.8)

$$(x^\pi * \phi_k)(0) = (x * \frac{\phi_k}{ik\omega})(0) \qquad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \tag{2.9}$$

ou de façon équivalente

$$\widehat{x^\pi}(k) = \frac{\hat{x}(k)}{ik\omega} \qquad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}.$$

Si $K_n(t), (n \in \mathbb{N})$ désigne le noyau de Féjer continue $2T-$périodique sur $\mathbb{R}$ donné par

$$K_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \big(1 - \frac{|k|}{n+1}\big)\phi_k(s)$$

et si nous prenons

$$\widetilde{K_n}(s) = K_n(s) - 1$$

alors en multipliant les deux côtes de (2.9) par $1 - |k|/(n+1))$ et en sommant pour $k = \pm 1, ..., \pm n$ nous avons

$$\big(x^\pi * \widetilde{K_n}\big)(t) = \big(x * (\widetilde{K_n})^\pi\big)(t) \qquad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

et par (2.6)

$$(x^\pi * K_n)(t) = \big(x * (\widetilde{K_n})^\pi\big)(t) \qquad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in HK_{ap}(2T)$ nous avons,

$$\begin{aligned}(x^\pi * K_n)(t+T) &= \frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t+T-s)\big(\widetilde{K_n}^{\pi}\big)(s)ds \\ &= -\frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t-s)\big(\widetilde{K_n}^{\pi}\big)(s)ds \\ &= -(x^\pi * K_n)(t).\end{aligned}$$

Puisque x^π est continue, le théorème de Féjer donne que

$$\begin{aligned} x^\pi(t+T) &= lim_{n\to\infty}(x^\pi * K_n)(t+T) \\ &= -lim_{n\to\infty}(x^\pi * K_n)(t) \\ &= -x^\pi(t) \end{aligned}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$ et ainsi nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.7 *Si* $x \in HK_{ap}(2T)$ *alors* x^π *est une fonction continue réelle* $T-$*antipériodique sur* $\mathbb{R}$.

Supposons que x, y dans $HK(2T)$ sont telles que $x^\pi = y^\pi$ alors par la remarque 2.6

$$\int_0^t (x(s) - y(s))ds = \pi_x(t) - \pi_y(t) = 0 \qquad \forall t \in [0, 2T]$$

et ainsi $x = y$ presque partout Lebesgue (voir par exemple [31, p. 113]). Donc, si $x, y \in HK(2T)$ sont telles que

$$\widehat{x^\pi} = \widehat{y^\pi} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \tag{2.10}$$

alors les fonctions continues x^π et y^π sont nécessairement égales et ainsi $x = y$ presque partout Lebesgue et nous disons que $x = y$. L'égalité (2.10) est équivalente à

$$\hat{x}(k) = \hat{y}(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

et ainsi nous avons le résultat suivant

Lemme 2.8 *Étant donnés* $x, y \in HK(2T)$*, les affirmations suivantes sont équivalentes*

- *1.)* $x = y$ *presque partout Lebesgue.*
- *2.) (1.30) est satisfait*
- *3.) (1.2) est satisfait*

et dans ce contexte les fonctions continues x^π *et* y^π *sont nécessairement égales.*

Si $x, y \in HK\,(2T)$ sont tels que

$$\widehat{x}\,(k) = ik\omega\widehat{y}\,(k) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \tag{2.11}$$

alors x est une dérivée généralisée de y qui est univoquement déterminée par y (Lebesgue presque partout). Ainsi nous écrivons $x = \dot{y}$ sans crainte d'ambiguïté (Lebesgue presque partout).

Notons que $HK_{ap}(2T)$ contient l'espace $L^1_{ap}(2T)$ et ce dernier contient l'ensemble de toutes les fonctions $2T-$périodiques $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ noté $L^2_{ap}(2T)$ avec la norme usuelle

$$||x||_2 = \big[\frac{1}{2T}\int_0^{2T} |x(t)|^2 dt\big]^{1/2} < \infty.$$

$L^2_{ap}(2T)$ contient l'ensemble $NBV_{ap}(2T)$ de toutes les fonctions $T-$antipériodiques $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à variation totale bornée sur $[0, 2T]$ normalisée au sens de (1.6) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Chaque x dans $\in NBV_{ap}(2T)$ satisfait

$$|x(t)| \leq ||x||_\infty \leq v(x) \tag{2.12}$$

où $||x||_\infty$ est le suppremum essentiel sur $[0, 2T]$. Dans [8, éqn.(13)], on montre pour chaque $x \in NBV_{ap}(2T)$ que

$$||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \frac{1}{\sqrt{12}} v(x).$$

Puisque chaque $x \in NBV_{ap}(2T)$ admet presque partout la dérivée $\dot{x} \in L^1_{ap}(2T)$ [19, p.104], nous avons également

$$2T||\dot{x}||_1 \leq v(x)$$

avec égalité si $x \in AC_{ap}(2T)$. Notons que $AC_{ap}(2T) \subset C_{ap}(2T)$, l'espace de Banach de toutes les fonctions continues T-antipériodiques sur $\mathbb{R}$ avec la norme uniforme.

Si $f \in HK_{ap}(2T)$ alors $f^\pi = (\delta^\pi_o * f) \in C_{ap}(2T)$ et la fonction

$$\varphi = -\delta^{\pi\pi}_o * f$$

est dans $AC_{ap}(2T)$ et vérifie

$$\ddot{\varphi} = f$$

dans le sens des fonctions généralisées. Substituons θ par $\varphi + x$ dans (1.4) pour obtenir

$$\ddot{x} + g'(\varphi + x)(\dot{\varphi} + \dot{x}) + h(\varphi + x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(\varphi + x)\,\Delta_{\tau_k(\varphi+x)} \tag{2.13}$$

où a_j, t_j satisfont les conditions H_4 et H_5. Notre but est de montrer l'existence d'une solution $T-$antipériodique $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolument continue de (2.13) avec première dérivée $\dot{x} \in NBV_{ap}(2T)$ et seconde dérivée $\ddot{x} \in L_{ap}(2T)$. Ainsi $\theta = \varphi + x$ sera solution de (1.4) absolument continue soumise à (1.5).

Exemple 2.9 *La fonction* $g : [0, 2T] \to \mathbb{R}$ *de l'exemple 2.4 est dans* $HK[0,T]\backslash L^1[0,T]$. *Posons*

$$g(t) = \begin{cases} g(t) & si \;\; 0 \leq t < T \\ -g(t-T) & si \;\; T \leq t < 2T \\ g(0) & si \;\; t = 2T \end{cases} \tag{2.14}$$

que l'on prolonge de $[0, 2T]$ *à* $\mathbb{R}$ *par* $2T-$*périodicité. Cette fonction est dans* $HK[0,T]_{ap}\backslash L^1_{ap}[0,T]$. *On a*

$$f^{\pi}(t) = \begin{cases} \dot{\varphi}(t) - \frac{1}{2}\dot{\varphi}(T) & si \;\; 0 \leq t < T \\ \frac{1}{2}\dot{\varphi}(T) - \dot{\varphi}(t-T) & si \;\; T \leq t \leq 2T \end{cases}$$

$$f^{\pi\pi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) - \frac{1}{2}\varphi(T) & si \;\; 0 \leq t < T \\ \frac{1}{2}\varphi(T) - \varphi(t-T) & si \;\; T \leq t \leq 2T \end{cases}$$

où $\dot{\varphi}$ *et* φ *sont données dans l'exemple 2.4. On obtient les mêmes résultats si* g *est la fonction de l'exemple 2.5, comme le sont* $\dot{\varphi}$ *et* φ *aussi.*

2.3 Quelques résultats d'existence

Si $f \in HK_{ap}(2T)$ alors (1.14) devient

$$G(\theta) = f^{\pi\pi} - g(\theta) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} - h(\theta) * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi} + \sum_{k=1}^{m} a_k(\theta)\, \Delta_{\tau_k(\theta)}^{\pi\pi} \tag{2.15}$$

et donc par l'inégalité du triangle et (1.34)-(1.37) nous obtenons

$$v(G(\theta)) \leq v(f^{\pi\pi}) + 4T\|g(\theta)\|_\infty + T^2\|h(\theta)\|_\infty + 2\Gamma T^2.$$

En résonnant comme à la section 1.3 nous obtenons pour $r > 0$ et $\theta \in B_r$

$$v(G(\theta)) \leq p_{00}(r)$$

et

$$v(G(\theta_1) - G(\theta_2)) \leq q_0(r)v(\theta_1 - \theta_2)$$

pour

$$p_{00}(r) = v(f^{\pi\pi}) + 2\Gamma T^2 + 4T\breve{g}(r) + T^2\breve{h}(r) \tag{2.16}$$

et $q_0(r)$ donnée par (1.10). Ainsi nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 2.10 *Pour l'équation (1.4) sur $\mathbb{R}$ soumis à $H1 - H5$ avec $f \in L^1(2T)$ remplacée par $f \in HK(2T)$ dans $H3$, soient p_{00} et q_0 définies par (2.16) et (1.10) respectivement. S'il existe $r_0 > 0$ pour lequel $p_{00}(r_0) = r_0$ et $q_0(r_0) < 1$ simultanément, alors il existe une solution unique $\theta \in AC(2T)$ de (1.4) et (1.5), de variation totale $v(\theta) \leq p_{00}(r_0)$, avec dérivée première $\dot{\theta} \in NBV(2T)$ et dérivée seconde généralisée $\ddot{\theta}$ qui est élément de $HK(2T)$. De plus pour chaque $\theta_0 \in NBV(2T)$ avec $v(\theta_0) \leq r_0$ et vérifiant (1.5), les itérations $G^n(\theta_0)$ convergent uniformément vers θ à la vitesse bornée par*

$$\|\theta - G^n(\theta_0)\|_\infty \leq \frac{2\lambda^n r_0}{1-\lambda}$$

où $\lambda = q_0(r_0)$.

Exemple 2.11 *Dans l'exemple 1.5, si* $f \in HK_{ap}(2T)$ *alors*

$$p_{00}(r) = v(f^{\pi\pi}) + 2\Gamma T^2 + 4T|c|r + T^2|a| \begin{cases} \sin r & si \;\; 0 \leq r \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & si \;\; r > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

et

$$q_0(r) = 4T|c| + T^2|a|$$

où $r > 0$. *La condition* $q_0(r_0) < 1$ *devient (1.46) ce qui implique (1.45). Donc si* $v(f^{\pi\pi}) + 2\Gamma T^2 \neq 0$ *alors le graphe de* p_{00} *intersecte celui de* $i(r) = r$ *en un point* $r_0 > 0$ *et nous sommes dans les conditions du théorème avec* $\lambda = 4T|c| + T^2|a|$.

Exemple 2.12 *Dans l'exemple 1.6, si* $f \in HK_{ap}(2T)$ *alors*

$$p_{00}\,(r) = v(f^{\pi\pi}) + T^2\,(2\Gamma + r) + 4T\mu \begin{cases} r - r^3/3 & 0 \leq r \leq 1 \\ 2/3 & 1 < r < 2 \\ r^3/3 - r & 2 \leq r < \infty \end{cases}$$

et

$$q_0\,(r) = T^2 + 4T\mu \begin{cases} 1 & 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ r^2 - 1 & \sqrt{2} < r < \infty \end{cases}$$

S'il existe $r_0 > 0$ *pour lequel* $p_{00}(r_0) = r_0$ *et* $q_0(r_0) < 1$ *alors on est dans les conditions du théorème.*

Dans le contexte du théorème précédent, soient $p, q : [0, \infty) \to [0, \infty)$ deux fonctions continues telles que $p_{00} \leq p$ et $q_0 \leq q$ sur $[0, \infty)$. S'il existe $r' > 0$ tel que $p(r') = r'$ et $q(r') < 1$ alors il existe $r_0 \in (0, r']$ tel que $p_{00}(r_0) = r_0$ et $q_0(r_0) < 1$, ce qui nous permet d'appliquer le théorème 2.10 avec r' à la place de r_0.

Exemple 2.13 *Dans l'exemple 1.5 soit* f *le prolongement* $T-$*anti-périodique sur* $\mathbb{R}$ *de* $f \in HK[0, T] \backslash L^1[0, T]$ *(voir exemple 2.4), donnée par*

$$f(t) = 80(2t - T)^3 \sin(2t - T)^{-2} - 56(2t - T)\cos(2t - T)^{-2} - 16(2t - T)^{-1}\sin(2t - T)^{-2}$$

lorsque $t \in [0, T] \backslash \{T/2\}$ *et* $f(T/2) = 0$. *Donc on a, pour* $0 \leq t \leq T$,

$$f^{\pi}(t) = 10(2t-T)^4 \sin(2t-T)^{-2} - 4(2t-T)^2 \cos(2t-T)^{-2}$$

et

$$f^{\pi\pi}(t) = (2t-T)^5 \sin(2t-T)^{-2}$$

et ainsi on obtient

$$\begin{aligned} v(f^{\pi\pi}) &= 4\int_0^{T/2} |f^{\pi}(t)|dt \\ &\leq 40\int_0^{T/2} (2t-T)^4(2t-T)^{-2}dt + 16\int_0^{T/2} (2t-T)^2 dt \\ &= 56\int_0^{T/2} (2t-T)^2 dt \\ &= \frac{56T^3}{6}. \end{aligned}$$

De là et de l'exemple 1.8 découle que $p_{00} \leq p$ *et* $q_0 \leq q$ *sur* $[0, \infty)$ *pour*

$$p(r) = \frac{56T^3}{6} + T^2(2\Gamma + |a|) + 4T(|d| + |c|r)$$

et

$$q(r) = 4T(|c| + |d|) + T^2|a| + \zeta_0.$$

si $4T|c|<1$ *alors on a :*

$$r' = \frac{\frac{56T^3}{6} + T^2(2\Gamma + |a|) + 4T|d|}{1 - 4T|c|}$$

La condition $q(r') < 1$ *devient (1.48) ce qui implique* $4T|c| < 1$ *et nous place dans les conditions du théorème 2.10.*

Exemple 2.14 *Soit*

$$f(t) = 24(2t-T)\cos(2t-T)^{-1} + 16\sin(2t-T)^{-1} - 4(2t-T)^{-1}\cos(2t-T)^{-1}$$

lorsque $t \in [0,T]\backslash\{T/2\}$ *et* $f(T/2) = 0$ *dans l'exemple 1.6. D'après l'exemple 2.5 on a* $f \in HK[0,T]\backslash L^1[0,T]$ *. De plus*

$$f^{\pi}(t) = 6(2t-T)^2\cos(2t-T)^{-1} + 2(2t-T)\sin(2t-T)^{-1}$$

et

$$f^{\pi\pi}(t) = (2t-T)^3\cos(2t-T)^{-1}$$

sur $[0,T]$*. On a*

$$\begin{aligned}
v(f^{\pi\pi}) &= 4\int_0^{T/2} |f^{\pi}(t)|dt \\
&\leq 24\int_0^{T/2}(2t-T)^2 dt + 8\int_0^{T/2}(2t-T)(2t-T)^{-1}dt \\
&= 4(2t-T)^3\Big|_0^{T/2} + 4T \\
&= 4T(T^2+1).
\end{aligned}$$

et donc, de l'exemple 1.9 découle que $p_{00} \leq p$ *et* $q_0 \leq q$ *sur* $[0,\infty)$ *pour*

$$p(r) = 4T(T^2+1) + T^2 r + 4T\mu \begin{cases} r & 0 \leq r \leq 2/3 \\ 2/3 & 2/3 < r < 2 \\ r^3/3 - 2 & 2 \leq r < \infty, \end{cases}$$

et

$$q(r) = 4T\mu + T^2 + \zeta_0 + 4T\mu\, r^2$$

On est dans les conditions du théorème 2.10 s'il existe r' *tel que* $p(r') \leq r'$ *et* $q(r') < 1$*.*

Étant donné que $\Delta_{\tau_k(x)} * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi} = \Delta^{\pi\pi}_{\tau_k(x)} = \widetilde{\delta_{\tau_k(x)}}^{\pi\pi} - \widetilde{\delta_{\tau_k(x)+T}}^{\pi\pi}$ alors la convolution des deux côtés de (2.13) avec $\widetilde{\delta_0}^{\pi\pi}$ donne

$$x = G(x) \tag{2.17}$$

pour

$$G\,(x) = -g\,[x] * \widetilde{\delta_0}^{\pi} - h\,[x] * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi} + \sum_{k=1}^{m} a_k\,[x]\,\Delta^{\pi\pi}_{\tau_k[x]}. \tag{2.18}$$

où

$$g[x] = g(f^{\pi\pi} + x), \quad h[x] = h(f^{\pi\pi} + x)$$

et

$$a_j[x] = a_j(f^{\pi\pi} + x), \quad \tau_j[x] = \tau_j(f^{\pi\pi} + x).$$

Si on pose

$$J\,[x] = \sum_{k=1}^{m} J_k\,[x]$$

où les fonctions $J_k : NBV_{ap}(2T) \to NBV_{ap}(2T)$ sont données par

$$J_k\,[x] = a_k\,[x]\,\Delta^{\pi\pi}_{\tau_k[x]}$$

alors (2.18) devient

$$G\,(x) = -g\,[x] * \widetilde{\delta_0}^{\pi} - h\,[x] * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi} + J\,[x] \tag{2.19}$$

ce qui allège quelque peu la notation. Par nos hypothèses de départ sur g nous avons que $g'\,[x]\,(f^{\pi} + \dot{x})$ est T-anti-périodique. Ainsi, par le Lemme 1.3 et l'identité $g\,[x] * \widetilde{\delta_0}^{\pi} = g'\,[x]\,(f^{\pi} + \dot{x}) * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi}$ nous obtenons que $g\,[x] * \widetilde{\delta_0}^{\pi} \in NBV_{ap}\,(2T)$ pour tout $x \in NBV_{ap}\,(2T)$. La continuité de g' en conjonction avec (2.12) donne

$$\|g'\,[x]\,\|_\infty \leq \sup\{|g'\,(s)| : -\|f^{\pi\pi}\|_\infty - v\,(x) \leq s \leq \|f^{\pi\pi}\|_\infty + v\,(x)\} < \infty$$

et ainsi $g'\,[x]\,(f^{\pi} + \dot{x}) \in L^1_{ap}\,(2T)$ de laquelle suit que $g\,[x] * \widetilde{\delta_0}^{\pi} = g'\,[x]\,(f^{\pi} + \dot{x}) * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi} \in AC_{ap}\,(2T)$ pour tout $x \in NBV_{ap}\,(2T)$. Il en est de même pour les autres termes à droite de (2.18). Nous avons maintenant le résultat suivant.

Proposition 2.5 *G définie par (2.18) plonge $NBV_{ap}\,(2T)$ dans $AC_{ap}\,(2T) \subset NBV_{ap}\,(2T)$.*

Chaque $x \in NBV_{ap}(2T)$ qui satisfait (2.17) pour $G : NBV_{ap}(2T) \to NBV_{ap}(2T)$ donné par (2.18) est tel que $f^{\pi\pi} + x$ est solution de (2.13). Ainsi pour établir l'existence de solution de (2.13) (dans le sens des fonctions généralisées) sous la condition (1.5), il suffit de prouver l'existence du point fixe $x \in NBV_{ap}(2T)$ pour G donné par (2.18) . Pour un tel x, nous avons

$$\dot{x} = -g'[x](f^{\pi} + \dot{x}) * \widetilde{\delta_0}^{\pi} - h[x] * \widetilde{\delta_0}^{\pi} + \sum_{k=1}^{m} a_k[x]\,\Delta^{\pi}_{\tau_k[x]} \tag{2.20}$$

et ainsi $\dot{x} \in NBV_{ap}(2T)$ et, par (2.13), $\ddot{x}$ existe comme une fonction généralisée (de $HK_{ap}(2T)$ dans le cas non impulsif).

Remarque 2.15 *Nous avons*

$$v\left(-g[x] * \widetilde{\delta_0}^{\pi}\right) \leq 4T\,\|g[x]\|_{\infty} \tag{2.21}$$

par (1.18) et (1.25),

$$v\left(-h[x] * \widetilde{\delta_0}^{\pi\pi}\right) \leq T^2\,\|h[x]\|_{\infty} \tag{2.22}$$

par (1.18) et (1.23), et

$$v(J[x]) = v\left(\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j[x]\,\Delta^{\pi\pi}_{\tau_j[x]}\right) \leq 2\Gamma v\left(\widetilde{\delta_0}^{\pi\pi}\right) \leq 2\Gamma T^2 \tag{2.23}$$

par (1.24) et pour Γ *donné par (1.38). Par l'inégalité du triangle appliquée à (2.15) et par (2.21)-(2.23) nous obtenons*

$$v(G(x)) \leq 4T\,\|g[x]\|_{\infty} + T^2\,\|h[x]\|_{\infty} + 2\Gamma T^2 \tag{2.24}$$

où, par (2.12) et la continuité de g *et* h*,*

$$\|g[x]\|_{\infty} \leq \sup\{|g(s)| : -\|f^{\pi\pi}\|_{\infty} - v(x) \leq s \leq \|f^{\pi\pi}\|_{\infty} + v(x)\} < \infty$$

et

$$\|h[x]\|_{\infty} \leq \sup\{|h(s)| : -\|f^{\pi\pi}\|_{\infty} - v(x) \leq s \leq \|f^{\pi\pi}\|_{\infty} + v(x)\} < \infty.$$

Supposons que pour un certain $r > 0$ et $0 < \lambda < 1$, nous avons $G : B_r \to B_r$ et

$$v\left(G\left(x\right) - G\left(y\right)\right) \leq \lambda v\left(x - y\right)$$

pour tous $x, y \in B_r$, alors le théorème du point fixe de Banach implique l'existence d'un point fixe $x \in B_r$ de G pour lequel les itérations $G^n\left(x_0\right)$ pour $x_0 \in B_r$ arbitraire convergent vers x à une vitesse limitée par

$$v\left(x - G^n\left(x_0\right)\right) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} v\left(x_0 - G\left(x_0\right)\right).$$

Par (1.17) et sachant que $x_0, G\left(x_0\right) \in B_r$ nous obtenons

$$\left\|x - G^n\left(x_0\right)\right\|_\infty \leq \frac{2\lambda^n r}{1-\lambda} \tag{2.25}$$

et ainsi $G^n\left(x_0\right)$ converge ponctuellement vers x à la vitesse uniforme délimitée par (2.25).

Définissons les fonctions $p_0, q_0 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ par

$$p_0\left(r\right) = 2T^2\Gamma + 4T\breve{g}\left(r\right) + T^2\breve{h}\left(r\right) \tag{2.26}$$

et

$$q_0\left(r\right) = 4T\breve{g}'\left(r\right) + T^2\breve{h}'\left(r\right) + \zeta_0 \tag{2.27}$$

où

$$\zeta_0 = 2\Lambda T^2 + 8\Upsilon T$$

et, pour chaque $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\breve{\psi}$ est une fonction croissante continue monotone donnée par

$$\breve{\psi}\left(r\right) = \sup\{\left|\psi\left(s\right)\right| : -\left\|f^{\pi\pi}\right\|_\infty - r \leq s \leq \left\|f^{\pi\pi}\right\|_\infty + r\}$$

pour tout $r \in [0, \infty)$.

Théorème 2.16 *Pour l'équation impulsivement entrainée de Liénard d'état dépendant (1.4) sur $\mathbb{R}$ soumis à H1-H5, soient p_0 et q_0 définies par (2.26) et (2.27), respectivement et* *posons $\theta = f^{\pi\pi} + x$. S'il existe $r_0 > 0$ pour lequel $p_0(r_0) = r_0$ et $q_0(r_0) < 1$ simultanément, alors il existe une solution unique $x \in AC(2T)$ de (2.20) satisfaisant (1.5), de variation totale $v(x) \leq r_0$, avec première dérivée $\dot{x} \in NBV(2T)$ et dérivée seconde généralisée $\ddot{x}$ qui est élément de $L^1_{ap}(2T)$. De plus pour chaque $x_0 \in NBV(2T)$ avec $v(x_0) \leq r_0$ et satisfaisant (1.5), les itérations $G^n(x_0)$ convergent uniformément vers x à la vitesse bornée par*

$$\|x - G^n(x_0)\|_\infty \leq \frac{2\lambda^n r_0}{1-\lambda}$$

où $\lambda = q_0(r_0)$.

2.3.1 Preuve du Théorème 2.16

Pour chaque fonction continue donnée $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec $\breve{\psi}$ donné par (1.11), nous avons

$$\|\psi(x)\|_\infty \leq \breve{\psi}(v(x))$$

et ainsi

$$\|\psi(x)\|_\infty \leq \breve{\psi}(r)$$

pour tout $x \in B_r$. Ainsi, par(2.24) nous avons, pour tout $x \in B_r$,

$$v(G(x)) \leq p_0(r)$$

pour p_0 donné par (2.26).

Pour tous $x, y \in B_r$ nous avons

$$v\left(g[x] * \delta_0^\pi - g[y] * \delta_0^\pi\right) \leq 4T \|g[x] - g[y]\|_\infty$$

par (2.21) et

$$v\left(h[x] * \delta_0^{\pi\pi} - h[y] * \delta_0^{\pi\pi}\right) \leq T^2 \|h[x] - h[y]\|_\infty$$

par (2.22). Par (1.17) et le théorème des accroissements finis nous avons

$$\|g[x]-g[y]\|_\infty \leq \breve{g}'(r)\, v(x-y)$$

et

$$\|h[x]-h[y]\|_\infty \leq \breve{h}'(r)\, v(x-y)$$

pour tous $x, y \in B_r$. Par conséquent,

$$v\left(g[x]*\delta_0^\pi - g[y]*\delta_0^\pi\right) \leq 4T\breve{g}'(r)\, v(x-y) \tag{2.28}$$

et

$$v\left(h[x]*\delta_0^{\pi\pi} - h[y]*\delta_0^{\pi\pi}\right) \leq T^2\breve{h}'(r)\, v(x-y) \tag{2.29}$$

pour tous $x, y \in B_r$. En utilisant

$$J_k[y]-J_k[x] = \left(a_k[y]-a_k[x]\right)\Delta^{\pi\pi}_{\tau_k[y]} + a_k[x]\left(\Delta^{\pi\pi}_{\tau_k[y]} - \Delta^{\pi\pi}_{\tau_k[x]}\right)$$

en même temps que (1.7), (1.8), (1.24) et (1.27) nous avons

$$v\left(J_k[x]-J_k[y]\right) \leq \zeta_k v(x-y)$$

pour

$$\zeta_k = 2\lambda_k T^2 + 8\gamma_k\mu_k T$$

$(k = 1, ..., m)$ et ainsi

$$v\left(J[x]-J[y]\right) \leq \zeta_0 v(x-y)\,. \tag{2.30}$$

De

$$\begin{aligned} v\left(G(x)-G(y)\right) \leq{}& v\left(g[x]*\delta_0^\pi - g[y]*\delta_0^\pi\right) \\ &+ v\left(h[x]*\delta_0^{\pi\pi} - h[y]*\delta_0^{\pi\pi}\right) + v\left(J[x]-J[y]\right) \end{aligned}$$

et les inégalités (2.28)-(2.30) il s'ensuit que, pour tous $x, y \in B_r$,

$$v\left(G(x)-G(y)\right) \leq q_0(r) v(x-y)$$

pour q_0 donné par (2.27).

S'il existe $r_0 > 0$ tel que $p_0(r_0) = r_0$ (G prend B_{r_0} dans elle-même) et $q_0(r_0) < 1$ (ainsi G est une contraction sur B_{r_0}) alors, par le théorème du point fixe de Banach, il existe $x \in B_{r_0} \cap AC_{ap}(2T)$ unique pour lequel (2.17) et (2.25) sont satisfaites. Nous avons prouvé le théorème 2.16.

2.3.2 Quelques exemples

Exemple 2.17 *Considérons sur $\mathbb{R}$ l'équation impulsivement entrainée du pendule simple indépendante d'état.*

$$\ddot{\theta} + c\,\dot{\theta} + a\sin\theta = f + \sum_{k=1}^{m} a_k \Delta_{\tau_k}$$

pour $a, c, a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$, $\tau_1, ..., \tau_m \in [0, T)$ et $f \in HK_{ap}(T)$. Alors $g(x) = cx$ et $h(x) = a\sin x$ et satisfont respectivement les conditions $g'(-x) = g'(x)$ et $h(-x) = -h(x)$. Si nous substituons θ par $f^{\pi\pi} + x$ nous obtenons l'équation

$$\ddot{x} + c\,(f^{\pi} + \dot{x}) + a\sin[x] = \sum_{k=1}^{m} a_k \Delta_{\tau_k} \tag{2.31}$$

Nous avons pour $r \geq 0$

$$\breve{g}(r) = |c|(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r),$$

$$\breve{h}(r) = |a| \begin{cases} \sin(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$$\breve{g}'(r) = |c|,$$

$$\breve{h}'(r) = |a|$$

et

$$\breve{g}''(r) = 0$$

Ainsi par (2.26), (2.27) et les propriétés des fonctions HK-intégrables, nous avons pour $r \geq 0$

$$p_0(r) = 2\Gamma T^2 + 4T|c|(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) + T^2|a| \begin{cases} \sin(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

et

$$q_0(r) = 4T|c| + T^2|a|$$

puisque $\zeta_0 = 0$. *En supposant que (2.31) est non homogène, alors* $2\Gamma \neq 0$ *et ainsi si*

$$4T|c| < 1 \tag{2.32}$$

alors le graphe de p_0 *au premier quadrant intersecte celui de l'identité* $\iota(r) = r$ *à un certain point* $r_0 > 0$. *La condition* $q_0(r_0) < 1$ *qui devient*

$$\left(T^2|a| + 4T|c|\right) < 1 \tag{2.33}$$

implique (2.32). Ainsi, soumis à (2.33) il existe une solution unique $x \in B_{r_0} \bigcap AC_{ap}(2T)$ *de (2.31) sur* $\mathbb{R}$ *qui est telle que* $\dot{x} \in NBV_{ap}(2T)$ *et* $\ddot{x}$ *existe comme une fonction généralisée. Les itérations de* $G^n(x_0)$ *convergent uniformément vers* x *pour* $x_0 \in B_{r_0}$ *arbitraire à une vitesse délimitée par (2.25) pour* $\lambda = 4T|c| + T^2|a|$ *et* $r = r_0$.

Exemple 2.18 *Considérons l'équation impulsivement entrainée de Van der Pol indépendante d'état.*

$$\ddot{\theta} - \mu\left(1 - \theta^2\right)\dot{\theta} + \theta = f + \sum_{k=1}^{m} a_k \Delta_{\tau_k}$$

pour $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $\tau_1, ..., \tau_m \in [0, T)$ *et* $f \in HK_{ap}(2T)$. *Alors*

$$g(x) = -\mu\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

et $h(x) = x$ *et satisfont respectivement les conditions* $g'(-x) = g'(x)$ *et* $h(-x) = -h(x)$. *En substituant* θ *par* $f^{\pi\pi} + x$, *nous obtenons que*

$$\ddot{x} - \mu\left(1 - (f^{\pi\pi} + x)^2\right)(f^{\pi} + \dot{x}) + (f^{\pi\pi} + x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \Delta_{\tau_k} \tag{2.34}$$

Ainsi nous avons pour $r \geq 0$

$$\breve{g}(r) = \mu \begin{cases} (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) - (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)^3/3 & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq 1 \\ 2/3 & 1 < (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) < 2 \\ (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)^3/3 - (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) & 2 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) < \infty, \end{cases}$$

$$\breve{h}(r) = (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r),$$

$$\breve{g'}(r) = \mu \begin{cases} 1 & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq \sqrt{2} \\ (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)^2 - 1 & \sqrt{2} < (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) < \infty, \end{cases}$$

$$\breve{h'}(r) = 1$$

et

$$\breve{g''}(r) = 2\mu(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)$$

Ainsi par (2.26), (2.27) et les propriétés des fonctions HK*-intégrables, nous avons pour* $r \geq 0$

$$\begin{aligned} p_0(r) = {} & T^2\left(2\Gamma + (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)\right) \\ & + 4T\mu \begin{cases} (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) - (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)^3/3 & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq 1 \\ 2/3 & 1 < (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) < 2 \\ (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)^3/3 - (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) & 2 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$q_0(r) = T^2 + 4T\mu \begin{cases} 1 & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq \sqrt{2} \\ (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)^2 - 1 & \sqrt{2} < (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) < \infty \end{cases}$$

puisque $\zeta_0 = 0$. *Si il existe* $r_0 > 0$ *pour lequel* $p_0(r_0) = r_0$ *et* $q_0(r_0) < 1$ *simultanément (comme c'est le cas lorsque* $0 < (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r_0) < \sqrt{2}$ *et* $T^2 + 4T\mu < 1$ *par exemple), ainsi il existe une solution unique* $x \in B_{r_0} \cap AC_{ap}(2T)$ *de (2.34) sur* $\mathbb{R}$ *avec la première dérivée* $\dot{x} \in NBV_{ap}(2T)$ *et dérivée seconde généralisée* $\ddot{x}$. *De plus les itérations de* $G^n(x_0)$ *convergent uniformément vers* x *pour* $x_0 \in B_{r_0}$ *arbitraire à la vitesse bornée par (2.25) pour* $\lambda = q_0(r_0)$ *et* $r = r_0$.

Ce qui suit est la conséquence du théorème 2.16. Comme nous pouvons le voir, il peut être utilisé pour obtenir l'existence des résultats impliquant les fonctions qui sont plus faciles à manipuler que p_0 et q_0.

Remarque 2.19 *Dans le contexte du théorème précédent, soient* $p, q : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *les fonctions telles que* $p_0 \leq p$ *et* $q_0 \leq q$ *sur* $[0, \infty)$. *S'il existe* $r' > 0$ *pour lequel* $p(r') = r'$ *et* $q(r') < 1$ *simultanément, alors il existe* $r_0 \in (0, r']$ *tel que* $p_0(r_0) = r_0$ *et* $q_0(r_0) < 1$. *En conséquence, il existe une solution unique* $x \in B_{r_0} \cap AC_{ap}(2T) \subset B_{r'} \bigcap AC_{ap}(2T)$ *de (2.20) avec* $\dot{x} \in NBV_{ap}(2T)$ *et la dérivée seconde généralisée* $\ddot{x}$ *(qui est* $HK-$*intégrable dans le cas non impulsif). De plus, les itérations* $G^n(x_0)$ *convergent uniformément vers* x *pour* $x_0 \in B_{r'} \supset B_{r_0}$ *arbitraire à la vitesse bornée par (2.25) pour* $\lambda = q(r')$ *et* $r = r'$.

De toute évidence, p et/ou q différent pour la même équation pourrait conduire à des résultats plus nets.

Exemple 2.20 *Nous appliquons la remarque 2.19 à l'équation de Josephson (1.15) sur* $\mathbb{R}$ *avec* $f \in HK_{ap}(2T)$ *et les impulsions d'état dépendant qui satisfont les conditions de Lipschitz (1.7) et (1.8). Ici* $g(x) = cx + d\sin x$ *et* $h(x) = a\sin x$. *Si nous substituons* θ *par* $f^{\pi\pi} + x$ *nous obtenons l'équation*

$$\ddot{x} + (c + dcos(f^{\pi\pi} + x))\,(f^{\pi} + \dot{x}) + a\sin(f^{\pi\pi} + x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(f^{\pi\pi} + x)\Delta_{\tau_k(f^{\pi\pi}+x)} \quad (2.35)$$

et ainsi, pour tout $r \geq 0$,

$$\begin{aligned} \breve{g}(r) &\leq |c|(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) + |d| \begin{cases} \sin(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\leq |d| + |c|(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \breve{h}(r) &= |a| \begin{cases} \sin(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\leq |a|, \end{aligned}$$

$$\breve{g}'(r) \leq |c| + |d|,$$

$$\breve{h}'(r) = |a|$$

et

$$\begin{aligned}\breve{g}''(r) &= |d| \begin{cases} \sin(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ &\leq |d|\end{aligned}$$

Ainsi, pour la fonction continue

$$p(r) = T^2(2\Gamma + |a|) + 4T(|d| + |c|(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r))$$

et la fonction constante

$$q(r) = 4T(|c| + |d|) + T^2|a| + \zeta_0$$

nous obtenons facilement $p_0 \leq p$ et $q_0 \leq q$ on $[0, \infty)$. Si $4T|c| < 1$ alors le graphe de p au premier quadrant intersecte celui de l'identité $\iota(r) = r$ au point

$$r' = \frac{T^2(2\Gamma + |a|) + 4T(|d| + |c|\|f^{\pi\pi}\|_\infty)}{1 - 4T|c|}.$$

Ainsi, soumis à la condition $4T|c| < 1$, il existe $r_0 \in (0, r']$ où $p_0(r_0) = r_0$ et en conséquence $B_{r_0} \subset B_{r'}$. La condition $q(r') < 1$ devient

$$4T(|c| + |d|) + T^2|a| + \zeta_0 < 1 \tag{2.36}$$

ce qui implique $4T|c| < 1$. Ainsi, soumis à (2.36) il existe une solution unique $x \in B_{r_0} \bigcap AC_{ap}(2T)$ de (1.15) qui est telle que $\dot{x} \in NBV_{ap}(2T)$ et $\ddot{x}$ existe comme une fonction généralisée. Les itérations de $G^n(x_0)$ convergent uniformément vers x pour $x_0 \in B_{r'}$ arbitraire à la vitesse bornée par (2.25) pour $\lambda = 4T(|c| + |d|) + T^2|a| + \zeta_0$ et $r = r'$.

Exemple 2.21 *Nous appliquons la remarque 2.19 à l'équation de van der Pol (1.16) sur* $\mathbb{R}$ *avec* $f \in HK_{ap}(2T)$ *et des impulsions d'état dépendant qui satisfont les conditions de Lipschitz (1.7) et (1.8). Ici* $g(x) = \mu(x^3/3 - x)$ *et* $h(x) = x$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. En substituant* θ *par* $f^{\pi\pi} + x$*, nous obtenons que*

$$\ddot{x} - \mu\left(1 - (f^{\pi\pi} + x)^2\right)(f^{\pi} + \dot{x}) + (f^{\pi\pi} + x) = \sum_{k=1}^{m} a_k[x]\Delta_{\tau_k[x]} \tag{2.37}$$

et ainsi pour tout $r \geq 0$ *obtenu au moyen des résultats de l'exemple 1.6*

$$\breve{g}(r) \leq \mu \begin{cases} (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq 2/3 \\ 2/3 & 2/3 < (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) < 2 \\ (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)^3/3 - 2 & 2 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) < \infty, \end{cases}$$

$$\breve{h}(r) = (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r),$$

$$\breve{g}'(r) \leq \mu\left(1 + (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)^2\right),$$

$$\breve{h}'(r) = 1$$

et

$$\breve{g}''(r) = 2\mu(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)$$

Ainsi pour les fonctions continues

$$p(r) = 2\Gamma T^2 + T^2(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) + 4T\mu \begin{cases} (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) & 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) \leq 2/3 \\ 2/3 & 2/3 < (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) < 2 \\ (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)^3/3 - 2 & 2 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r) < \infty, \end{cases}$$

et

$$q(r) = 4T\mu + T^2 + \zeta_0 + 4T\mu(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + r)^2$$

nous avons $p_0 \leq p$ *et* $q_0 \leq q$ *sur* $[0, \infty)$*. Si le graphe de* p *au premier quadrant intersecte celui de l'identité* $\iota(r) = r$ *à un certain point* $r' > 0$ *(que nous prenons comme le plus petit des deux) alors* G *donné par (2.19) prend* $B_{r'}$ *dans lui-même. Sous réserve de la condition ajoutée* $q(r') < 1$*, il existe* $r_0 \in (0, r']$ *tel que* $p_0(r_0) = r_0$ *et* $q_0(r_0) < 1$ *simultanément. Ainsi, sous ces conditions, il existe une solution unique* $x \in B_{r_0} \bigcap AC_{ap}(2T)$ *de (2.37)* *qui est telle que $\dot{x} \in NBV_{ap}(2T)$ et $\ddot{x}$ qui existe comme une fonction généralisée. Les itérations de $G^n(x_0)$ convergent uniformément vers x pour $x_0 \in B_{r'} \supset B_{r_0}$ arbitraire à la vitesse bornée par (2.25) pour $\lambda = q(r')$ et $r = r'$.*

2.3.3 Le cas τ_k d'état indépendant revisité

Le cas où $\tau_k \in [0, T)$ est indépendant d'état pour $k \in \{1, ..., m\}$ peut être traité moyennant (2.20). En écrivant ϑ pour $\dot{x} \in NBV_{ap}(2T)$, (2.20) devient

$$\vartheta = -g[\vartheta^\pi] - h[\vartheta^\pi] * \widetilde{\delta_0}^\pi + \sum_{k=1}^{m} a_k[\vartheta^\pi] \Delta^\pi_{\tau_k} \tag{2.38}$$

où $\vartheta \in NBV_{ap}(2T)$. Pour alléger la notation, nous introduisons la fonction $I : NBV_{ap}(2T) \to NBV_{ap}(2T)$ donnée par

$$I(\vartheta) = \sum_{k=1}^{m} I_k(\vartheta)$$

où les fonctions $I_k : NBV_{ap}(2T) \to NBV_{ap}(2T)$ sont définies par

$$I_k(\vartheta) = a_k[\vartheta^\pi] \Delta^\pi_{\tau_k}.$$

Ainsi (2.38) devient, pour $\vartheta \in NBV_{ap}(2T)$

$$\vartheta = -g[\vartheta^\pi] - h[\vartheta^\pi] * \widetilde{\delta_0}^\pi + I(\vartheta) \tag{2.39}$$

et ainsi $\vartheta^\pi, g[\vartheta^\pi], h[\vartheta^\pi] \in AC_{ap}(2T)$. Nous écrivons (2.39) comme

$$\vartheta = H(\vartheta) \tag{2.40}$$

où H est donné par

$$H(\vartheta) = -g[\vartheta^\pi] - h[\vartheta^\pi] * \widetilde{\delta_0}^\pi + I(\vartheta) \tag{2.41}$$

pour tout $\vartheta \in NBV_{ap}(2T)$.

Proposition 2.6 *H plonge $NBV_{ap}(2T)$ dans lui-même.*

Démonstration. Nous avons

$$v\left(-g\left[\vartheta^{\pi}\right]\right)=\int_{0}^{2T}\left|\dot{g}\left[\vartheta^{\pi}\right]\right|\leq 2T\left\|g'\left[\vartheta^{\pi}\right]\left(f^{\pi}+\vartheta\right)\right\|_{\infty} \tag{2.42}$$

par la règle de chaîne,

$$v\left(h\left[\vartheta^{\pi}\right]*\widetilde{\delta_{0}}^{\pi}\right)\leq 4T\left\|h\left[\vartheta^{\pi}\right]\right\|_{\infty} \tag{2.43}$$

par (1.19) et (1.25), et

$$v\left(I\left(\vartheta\right)\right)=v\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}a_{j}\left[\vartheta^{\pi}\right]\Delta_{\tau_{j}}^{\pi}\right)\leq\Gamma v\left(\Delta_{0}^{\pi}\right)\leq 4\Gamma T \tag{2.44}$$

par (1.26) et pour Γ donné par (1.38). Par l'inégalité du triangle appliquée à (2.41)-(2.44) nous obtenons

$$v\left(H\left(\vartheta\right)\right)\leq 2T\left\|g'\left[\vartheta^{\pi}\right]\left(f^{\pi}+\vartheta\right)\right\|_{\infty}+4T\left\|h\left[\vartheta^{\pi}\right]\right\|_{\infty}+4\Gamma T$$

où, par (1.17) et (1.20),

$$\left\|g'\left[\vartheta^{\pi}\right]\left(f^{\pi}+\vartheta\right)\right\|_{\infty}\leq\breve{g}'\left(2Tv(f^{\pi}+\vartheta)\right)v\left(\left(f^{\pi}+\vartheta\right)\right)<\infty$$

et

$$\left\|h\left[\vartheta^{\pi}\right]\right\|_{\infty}\leq\breve{h}\left(2Tv(f^{\pi}+\vartheta)\right)<\infty.$$

Par conséquent nous avons

$$v\left(H\left(\vartheta\right)\right)\leq 4T\Gamma+2T\breve{g}'\left(2Tv\left(f^{\pi}+\vartheta\right)\right)v\left(f^{\pi}+\vartheta\right)+4T\breve{h}\left(2Tv\left(f^{\pi}+\vartheta\right)\right)<\infty. \tag{2.45}$$

■

S'il existe $r>0$ tel que H soit une contraction injective sur B_{r}, alors le théorème du point fixe de Banach garantit l'existence d'un $\vartheta\in B_{r}$ unique pour lequel (2.40) est satisfait. Par (2.45) nous avons, pour tout $x\in B_{r}$,

$$v\left(H\left(x\right)\right)\leq p_{*}\left(r\right) \tag{2.46}$$

où p_* est la fonction non décroissante sur $[0,\infty)$ donnée par

$$p_*(r) = 4T\Gamma + 2T\breve{g}'(2Tr)(\|f^\pi\|_\infty + r) + 4T\breve{h}(2Tr) \tag{2.47}$$

où

$$\breve{g}'(2Tr) = \sup\{|g'(s)| : -\|f^{\pi\pi}\|_\infty - 2Tr \leq s \leq \|f^{\pi\pi}\|_\infty + 2Tr\}$$

et

$$\breve{h}'(2Tr) = \sup\{|h(s)| : -\|f^{\pi\pi}\|_\infty - 2Tr \leq s \leq \|f^{\pi\pi}\|_\infty + 2Tr\}$$

Par conséquent, s'il existe $r_* > 0$ tel que

$$p_*(r_*) = r_*$$

alors, par (2.45), $v(H(x)) \leq r_*$ est satisfait pour tout $x \in B_{r_*}$ et ainsi H applique B_{r_*} dans elle-même.

Pour ce qui est de la propriété de contraction, en partant de

$$I_k(x) - I_k(y) = (a_k[x^\pi] - a_k[y^\pi])\Delta^\pi_{\tau_k}$$

en même temps que (1.7), (1.20) et (1.26) nous avons

$$v(I_k(x) - I_k(y)) \leq 8\lambda_k T^2 v(x-y)$$

et ainsi

$$v(I(x) - I(y)) \leq \zeta_* v(x-y) \tag{2.48}$$

pour tout $x, y \in NBV_{ap}(2T)$ et

$$\zeta_* = 8\Lambda T^2.$$

Par le théorème de la valeur moyenne nous avons, pour tout $s \in [0, 2T]$ et tous $x, y \in B_r$ (pour $r > 0$ arbitraire),

$$|g'[x^\pi(s)] - g'[y^\pi(s)]| = |g''[z_s]|\,|x^\pi(s) - y^\pi(s)|$$

pour un certain z_s entre $x^\pi(s)$ et $y^\pi(s)$ (et ainsi, par (1.20), pour $z_s \in [-2Tr, 2Tr]$). Par (1.17) et (1.20) nous avons, pour tous $x, y \in B_r$ et tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g'[x^\pi(s)] - g'[y^\pi(s)]| &\leq \breve{g''}(2Tr)\, v(x^\pi - y^\pi) \\ &\leq 2T\breve{g''}(2Tr)\, v(x-y) \end{aligned}$$

où

$$\breve{g''}(2Tr) = \sup\{|g''(s)| : -\|f^{\pi\pi}\|_\infty - 2Tr \leq s \leq \|f^{\pi\pi}\|_\infty + 2Tr\}.$$

De plus, par la règle de chaîne et l'inégalité du triangle, nous avons

$$\begin{aligned} |\dot{g}[x^\pi(s)] - \dot{g}[y^\pi(s)]| &\leq |g'[x^\pi(s)] - g'[y^\pi(s)]|\; |x(s)| + |g'(y^\pi(s))|\; |x(s) - y(s)| \\ &\leq \breve{g''}(2Tr)\, 2Tv(x-y)\, |x(s)| + \breve{g'}(2Tr)\, |x(s) - y(s)| \end{aligned}$$

et ainsi, par l'intermédiaire de

$$v\Big(g[x^\pi] - g[y^\pi]\Big) = \int_0^{2T} |\dot{g}[x^\pi] - \dot{g}[y^\pi]|$$

en même temps que $v(x^\pi) = \int_0^{2T} |x|$ et $v(x^\pi - y^\pi) = \int_0^{2T} |x-y|$ nous obtenons pour tous $x, y \in B_r$ (et ainsi $x^\pi, y^\pi \in B_{2Tr}$)

$$v(g[x^\pi] - g[y^\pi]) \leq 2T\breve{g''}(2Tr)\, v(x-y)\, v(x^\pi) + \breve{g'}(2Tr)\, v(x^\pi - y^\pi)$$

qui, puisque $v(x^\pi) \leq 2Tr$, implique

$$v(g[x^\pi] - g[y^\pi]) \leq \Big(4T^2\breve{g''}(2Tr)\, r + 2T\breve{g'}(2Tr)\Big)\, v(x-y). \tag{2.49}$$

Nous avons également, pour tous $x, y \in B_r$,

$$v(h[x^\pi] * \delta_0^\pi - h[y^\pi] * \delta_0^\pi) \leq 4T\breve{h'}(2Tr)\, v(x^\pi - y^\pi)$$

par le même raisonnement utilisé pour prouver (2.28), et ainsi

$$v(h[x^\pi] * \delta_0^\pi - h[y^\pi] * \delta_0^\pi) \leq 8T^2\breve{h'}(2Tr)\, v(x-y). \tag{2.50}$$

De

$$v\left(H\left(x\right)-H\left(y\right)\right)\leq v\left(g\left[x^{\pi}\right]-g\left[y^{\pi}\right]\right)+v\left(h\left[x^{\pi}\right]*\delta_0^{\pi}-h\left[y^{\pi}\right]*\delta_0^{\pi}\right)+v\left(I\left(x\right)-I\left(y\right)\right)$$

il s'ensuit que, pour tous $x, y \in B_r$,

$$v\left(H\left(x\right)-H\left(y\right)\right)\leq q_*(r)v\left(x-y\right)$$

où

$$q_*\left(r\right)=4T^2\breve{g}''\left(2Tr\right)r+2T\breve{g}'\left(2Tr\right)+8T^2\breve{h}'\left(2Tr\right)+\zeta_* \tag{2.51}$$

par (2.48)-(2.50). Ceci complète la preuve du résultat suivant.

Théorème 2.22 *Étant donné $T>0$ et l'équation de Liénard impulsivement entrainée (1.4) sur $\mathbb{R}$ avec τ_k d'état indépendant et soumise à H1-H5 avec $f \in L^1(2T)$ remplacée par $f \in HK(2T)$ dans H3, soient p_* et q_* définies par (2.47) et (2.51), respectivement. S'il existe $r_*>0$ pour lequel $p_*\left(r_*\right)=r_*$ et $q_*\left(r_*\right)<1$ simultanément, alors il existe $\vartheta \in B_{r_*}$ unique pour lequel $x=\vartheta^{\pi}$ est une solution absolument continue de (2.13) avec $\dot{x} \in NBV_{ap}(2T)$ et $\ddot{x}$ une fonction généralisée (dans $L^1_{ap}(2T)$ dans le cas non impulsif). De plus, les itérations $H^n\left(\vartheta_0\right)$ convergent ponctuellement vers $\dot{x}=\vartheta$ pour $\vartheta_0 \in B_{r_*}$ arbitraire à la vitesse uniforme bornée par*

$$\left\|\vartheta-H^n\left(\vartheta_0\right)\right\|_{\infty}\leq\frac{2\lambda^n r_*}{1-\lambda} \tag{2.52}$$

pour $\lambda=q_*\left(r_*\right)$. Par conséquent, $\theta=\left(f^{\pi\pi}+\vartheta^{\pi}\right)$ est une solution absolument continue de (1.4) et (1.5) avec les dérivées $\dot{\theta}=\left(f^{\pi}+\vartheta\right)\in L^1_{ap}(2T)$ et $\ddot{\theta}=(f+\dot{\vartheta})$ une fonction généralisée HK-intégrable.

Exemple 2.23 *Dans le contexte de l'exemple 2.17 avec τ_k état indépendant, (2.47) et (2.51) deviennent (pour $r\geq 0$)*

$$p_*\left(r\right)=4T\Gamma+|c|(\|f^{\pi\pi}\|_{\infty}+2Tr)+4T|a|\begin{cases}\sin(\|f^{\pi\pi}\|_{\infty}+2Tr) & si\ \ 0\leq\|f^{\pi\pi}\|_{\infty}+2Tr\leq\frac{\pi}{2}\\ 1 & si\ \ \|f^{\pi\pi}\|_{\infty}+2Tr>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

et

$$q_*(r) = 2T|c| + 8T^2|a|$$

(puisque $\zeta_* = 0$). En supposant que (2.35) est non homogène, alors $\Gamma \neq 0$ et ainsi si $2T|c| < 1$ (par opposition à (2.32)) est satisfait alors le graphe de p_* au premier quadrant rencontre celui de l'identité $\iota(r) = r$ à un certain point $r_* > 0$. La condition $q_*(r_*) < 1$, qui est équivalente à

$$2T|c| + 8T^2|a| < 1 \tag{2.53}$$

implique $2T|c| < 1$. Ainsi, soumis à (2.53) il existe un $\vartheta \in B_{r_*}$ unique tel que $x = \vartheta^\pi$ est la solution de (2.35) dans $AC_{ap}(2T)$ pour lequel $\ddot{x} = \dot{\vartheta}$ existe comme fonction généralisée. De plus, les itérations $H^n(\vartheta_0)$ convergent uniformément vers ϑ pour $\vartheta_0 \in B_{r_*}$ arbitraire à un taux délimitée par (2.52) pour $\lambda = 2T|c| + 8T^2|a|$.

Exemple 2.24 *Dans le contexte de l'exemple 1.6 avec l'état indépendant τ_k, (2.47) et (2.51) deviennent (pour $r \geq 0$)*

$$\begin{aligned} p_*(r) &= 4T\Gamma + 4T(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + 2Tr) \\ &\quad + 2T\mu \begin{cases} 1 & si \;\; 0 \leq (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + 2Tr) \leq \sqrt{2} \\ (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + 2Tr)^2 - 1 & si \;\; (\|f^{\pi\pi}\|_\infty + 2Tr) > \sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$q_*(r) = 8T^2 + 8T^2\mu(\|f^{\pi\pi}\|_\infty + 2Tr)$$

(puisque $\zeta_* = 0$). Si le graphe de p_* au premier quadrant intersecte celui de l'identité $\iota(r) = r$ en certain point $r_* > 0$ pour lequel $q_*(r_*) < 1$, alors il existe $\vartheta \in B_{r_*}$ unique tel que $x = \vartheta^\pi$ est la solution de (2.34) dans $AC_{ap}(2T)$ tel que $\ddot{x}$ existe comme fonction généralisée. De plus, les itérations $H^n(\vartheta_0)$ convergent uniformément vers ϑ pour $\vartheta_0 \in B_{r_*}$ arbitraire à une vitesse bornée par (2.52) pour $\lambda = q_*(r_*)$.

CONCLUSION

Notre thèse s'est portée sur l'étude des solutions $T-$antipériodiques de l'équation différentielle de Liénard dans le cas impulsif pour le pendule simple, l'équation de Josephson et enfin de van Del Pol avec f Lebesgue intégrable. La méthode utilisée est celle du point fixe de Banach. Des théorèmes d'existence ont été donnés et par le théorème de contraction de Banach, les itérations convergeaient numériquement vers la solution θ dans $AC(2T)$ pour chaque équation considérée. Par des exemples nous avons appuyé nos résultats. Au second chapitre, considérant f dans $HK(2T)$, nous avons obtenu des résulats similaires pour l'équation de Liénard dans le cas impulsif et pour chaque type d'équation différentielle considérée. Également par le théorème de contraction de Banach, la suite d'itérations de Picard convergeait uniformément vers la solution unique θ. Nous avons obtenu également des résultats pour les cas où τ_k est d'état indépendant en utilisant (1.33) et (2.20). Nous ne pourrions pas prétendre avoir épuisé la recherche sur ce sujet, d'autres pistes pour aller plus loin dans la recherche sont encore possibles. Une généralisation possible est la solution $T-$anti-périodique de la même équation avec des coefficients variables. En d'autres termes, on remplacerait $g(\theta)$ et $h(\theta)$ par $g(t,\theta)$ et $h(t,\theta)$ respectivement.

Bibliographie

[1] B. Ahmad and J.J. Nieto. Existence and approximation of solutions for a class of nonlinear impulsive functional differential equations with anti-periodic boundary conditions. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 69 :3291–3298., 2008.

[2] C. D. Aliprantis and O. Burkinshaw. *Principles of real analysis. Second edition.* Academic Press, Inc., 1990.

[3] S. Aizicovici A.R. Aftabizadeh and N.H. Pavel. On a class of second-order anti-periodic boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 171 :301–320., 1992.

[4] I. Bajo and E. Liz. Periodic boundary value problem for first order differential equations with impulses at variable times. *J. Math. Anal. Appl.*, 204 :65–73., 1996.

[5] J-M. Belley and E. Bondo. Anti-periodic solutions of liénard equations with state dependent impulses. *J. Differential Equations*, 261 :4164–4187., 2016.

[6] J.-M. Belley and R. Guen. Periodic van der pol equation with state dependent impulses", j. math. anal. appl. *J. Math. Anal. Appl.*, 426 :995–1011., 2015.

[7] J-M. Belley and M. Virgilio. Periodic duffing delay equations with state dependent impulses. *J. Math. Anal. Appl.*, 306 :646–662., 2005.

[8] J-M. Belley and M. Virgilio. Periodic liénard-type delay equations with state dependent impulses. *Nonlinear Anal.*, 3 :568–589., 2006.

[9] Cartwright and J. Littlewood. On nonlinear differential equations of the second order i : The equation $\ddot{y} - k(1-y^2)\dot{y} + y = b\cos(\lambda t + a)$, k large. *J. London Math. Soc.*, 20 :180–189., 1945.

[10] M. Cartwright and J. Littlewood. On nonlinear differential equations of the second order ii : The equation $\ddot{y} - kf(y,\dot{y}) + g(y,k) = p(t) = p_1(t) + kp_2(t)$, $k > 0, f(y) \geq 1$. *Ann. of Math.*, 2 :472–494., 1947.

[11] T. Chen and W. Liu. Anti-periodic solutions for higher-order liénard type differential equation with p-laplacian operato. *Bull. Korean Math. Soc.*, 49 :455–463., 2012.

[12] J.J. Nieto D. Franco and D. O'Regan. Anti-periodic boundary value problem for nonlinear first order ordinary differential equations. *Mathematical Inequalities & Applications*, 6 :477–485., 2003.

[13] H.F. Davis. *Fourier series and orthogonal functions*. Allyn and Bacon, Inc., 1963.

[14] B.van der Pol. A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations. *Radio Reviews*, 1 :701–710, 754–762., 1920.

[15] B.van der Pol. The nonlinear theory of electric oscillations. *Proc. IRE*, 22 :1051–1086., 1934.

[16] T. Ding and F. Zanolin. Periodic solutions of duffing's equations with superquadratic potential. *J. Differential Equations*, 97 :28–378., 1992.

[17] M. Frigon and D. O'Regan. First order impulsive initial and periodic problems with variable moments. *J.Math. Anal. Appl.*, 233 :730–739., 1999.

[18] M. Frigon and D. O'Regan. Second order sturm-lioville bvp's with impulses at variable times. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst., Ser. A, Math. Anal.*, 8 :149–159., 2001.

[19] R. A. Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, volume 4. Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 1994.

[20] K. Hoffman J. Guckenheimer and W. Weckesser. The forced van der pol equation i : The slow flow and its bifurcations. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 2 :1–35., 2003.

[21] T. Jankowski. Ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions of antiperiodic type. *Computers & Mathematics with Applications*, 6 :1419–1428., 2004.

[22] J. Kalas and Z. Kadeřábek. Periodic solutions of a generalized van der pol-mathieu differential equation. *Appl. Math. Comp.*, 234 :192–202., 2014.

[23] Y. Katznelson. *An introduction to harmonic analysis.* John Wiley & Sons Inc, 1968.

[24] J.F.C. Kingman and S.J. Taylor. *An Introduction to Measure and Probability*, volume 10. Cambridge University Press, 1966.

[25] Y. Li and L. Huang. Anti-periodic solutions for a class of liénard-type systems with continuously distributed delays. *Nonlinear Analysis : Real World Applications*, 10 :2127–2132., 2009.

[26] G. Lin. Periodic solutions for van der pol equation with time delay. *Appl. Math. Comp.*, 187 :1187–1198., 2007.

[27] J. Littlewood. On nonlinear differential equations of the second order iii : The equation $\ddot{y} - k(1-y^2)\dot{y} + y = b\cos(\lambda t + a)$, for large k and its generalizations. *Acta Math. (errata in Acta Math.* ***98*** *(1957) 110)*, 97 :267–308., 1957.

[28] J. Littlewood. On nonlinear differential equations of the second order iv : The equation $\ddot{y} - kf(y)\dot{y} + g(y) = bkp(\phi)$, $\phi = t + a$ for large k and its generalizations. *Acta Math.*, 98 :1–110., 1957.

[29] L. Liu and Y. Li. Existence and uniqueness of anti-periodic solutions for a class of nonlinear n-th order functional differential equations. *Opuscula Mathematica*, 31 :61–74., 2011.

[30] C. Ou. Antiperiodic solutions for high-order hopfield neural networks. *Computers & Mathematics with Applications*, 56 :1838–1844., 2008.

[31] Washek F. Pfeffer. *The Riemann Approach to Integration.* 109. Cambridge University press, California, 1993.

[32] I. Rachůnková and J. Tomeček. *A new approach to BVP's with state-dependent impulses*, volume 22. 2013.

[33] H.L. Royden. *Real Analysis", third edition.* Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

[34] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* third edition, McGraw-Hill Book Company, 1987.

[35] Y. Xing W. Ding and M. Han. Anti-periodic boundary value problems for first order impulsive functional differential equations. *Applied mathematics and Computation*, 186 :45–53., 2007.

[36] Y. Yin. Monotone Iterative Technique and Quasilinearization for some Anti-periodic Problems. *Nonlinear World*, 3 :253–266., 1996.

[37] A.H. Zemanian. *Distribution Theory and Transform Analysis.* Dover Publications, Inc., Minneola, N.Y., 1987.