

УДК 539.1

**В.А.ВАНИН**, доктор техн. наук, проф. НТУ «ХПИ»;  
**А.А.ГРИГОРЬЕВ**, аспирант, НТУ «ХПИ»

## ВЕКТОР ПЕРЕНОСА ЭНЕРГИИ ПРИ ПОПЕРЕЧНЫХ СМЕЩЕНИЯХ УПРУГОЙ СРЕДЫ

На основі аналогії рівнянь лінійної теорії пружності і електромагнітного поля виконане узагальнення теореми Умова – Пойтінга і отримана формула для вектора переносу енергії при поперечних зсувах пружного середовища. Представлена нова модель активного механічного середовища та вивчені особливості переносу енергії в гвинтовій хвилі трансляції, що рухається по ньому.

On the basis of the analogy of the equation of the linear theory of elasticity and an electromagnetic field the Poyting's theorem generalization is executed and the formula for the vector of transferring the energy at a cross – section displacement of the elastic environment is obtained. A new model of an active mechanical environment is presented and the singularities of the transferring the energy in a spiral re-peater wave which in its turn spreads along this environment are examined.

**Введение и постановка задачи.** Публикация продолжает цикл статей [1–3], в которых исследуются новые аспекты актуальной проблемы генерирования уединенных гармонических волн переноса (винтовых фононов), движущихся в активной упругой среде. Известно [4,5], что уравнения свободных или вынужденных механических колебаний упругой среды базируются на законе Гука о пропорциональности между деформациями и напряжениями, а этот закон в современной физике выводится из уравнений Максвелла [6] для электромагнитного поля, которые имеют вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -c^{-1} \partial \vec{H} / \partial t; & \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \cdot q; \\ \operatorname{rot} \vec{H} = c^{-1} \partial \vec{E} / \partial t + (4\pi / c) \vec{J}; & \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{E}(M)$ ,  $\vec{H}(M)$  – напряженности электрического и магнитного поля,  $q(M)$  – плотность электрического заряда в точке  $M$ ,  $\vec{J}(M)$  – плотность тока, созданного движением свободных зарядов;  $c$  – скорость света. В этой статье мы решим обратную задачу, и покажем, что уравнениям поперечных смещений упругой среды можно придать форму уравнений Максвелла. Это позволит открыть дорогу для применения в фундаментальных и прикладных задачах анализа сплошной упругой среды известных методов электродинамического расчета. В частности, будет получен результат, аналогичный теореме Умова – Пойтінга [7] о векторе переноса энергии в электромагнитном поле.

Многочисленные попытки дать механическую интерпретацию уравнениям Максвелла и потенциалам электромагнитного поля продолжают уже более 100 лет; с одной из современных трактовок можно, например, познакомиться в [8]. Еще во времена Пуанкаре (смотри [9]) было известно, что эта

задача имеет неединственное решение. Уравнения, полученные в данной статье, решают эту задачу частично (они не координированы с формулой для силы Лоренца), и авторы не считают, что использованная в ней интерпретация напряженностей  $\vec{E}(M)$ ,  $\vec{H}(M)$  отражает существо дела. Более того, в дальнейших публикациях цикла мы используем и подробно изучим новую модель активной механической среды, силовые поля которой также описываются уравнениями вида (1), но при другой физической трактовке напряженностей, и там сходство уравнений не будет формальным. Краткое описание модели, необходимое для понимания физической сущности решаемого примера, приводится в заключительной части статьи.

**Уравнение поперечных смещений упругой среды в потенциалах.** Запишем дифференциальное уравнение для малых упругих смещений  $\vec{u}(M, t)$  сплошной однородной (например, поликристаллической) среды [10]:

$$\rho \cdot \partial^2 \vec{u} / \partial t^2 = K \cdot \text{grad div } \vec{u} - G \cdot \text{rot rot } \vec{u} + \vec{F}, \quad (2)$$

где  $t$  – время;  $\rho$  – плотность среды;  $G$  – модуль сдвига;  $K$  – модуль Ламэ объемного сжатия,  $K = (2 + 2\mu / (1 - 2\mu)) \cdot G$ ;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $\vec{F}$  – известное поле плотностей внешних (массовых) сил.

В учебнике [10] показано, что если поле внешних сил имеет потенциалы  $U$  и  $\vec{L}$ ,

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{L} + \text{grad } U,$$

то и уравнение (2) имеет решение такого же вида:

$$\vec{u} = \text{rot } \vec{A} + \text{grad } \varphi, \quad (3)$$

причем потенциалы  $\varphi(M, t)$  и  $\vec{A}(M, t)$  удовлетворяют волновым уравнениям

$$a_{np}^{-2} \cdot \partial^2 \varphi / \partial t^2 = \text{div grad } \varphi + U / K, \quad (4)$$

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \vec{A} / \partial t^2 = \Delta \vec{A} + \vec{L} / G, \quad (5)$$

где  $a_{np} = \sqrt{K / \rho}$  – скорость звука для продольных колебаний;  $a_{non} = \sqrt{G / \rho}$  – скорость звука для поперечных колебаний;  $\Delta$  – дифференциальный оператор Лапласа,

$$\Delta \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \text{rot rot } \vec{A}.$$

В правой части равенства (3) первое слагаемое определяет поперечные смещения среды (они не сопровождаются сжимаемостью,  $\text{div rot } \vec{A} = 0$ ), второе – продольные смещения. Нас в этой статье будут интересовать только поперечные смещения (как известно, это «родная среда» для электромагнитных волн).

Заметим, что в силу известного тождества  $\text{rot grad } \zeta \equiv 0$  потенциал  $\vec{L}$  можно считать соленоидальным; тогда  $\text{div } \vec{A} = 0$ , и вместо уравнения (5) можно использовать равенство

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \bar{A} / \partial t^2 = -rot rot \bar{A} + \bar{L} / G . \quad (5 \text{ a})$$

Однако при решении задач из приложений обеспечить выполнение условия  $div \bar{L} = 0$  сложно, поэтому мы будем пользоваться равенством (5). При этом нужно учитывать, что потенциальная часть функций  $\bar{L}$  и  $\bar{A}$  приближает теорию поперечных механических колебаний к теории электромагнитного поля, но, с другой стороны, – носит чисто формальный характер.

**Факторизация уравнения поперечных смещений.** Имея целью получить факторизацию уравнения второго порядка (5) в виде системы уравнений первого порядка, вычислим от обеих его частей ротор:

$$rot[a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \bar{A} / \partial t^2] = rot grad div \bar{A} - rot rot rot \bar{A} + rot \bar{L} / G ,$$

что эквивалентно

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 (rot \bar{A}) / \partial t^2 = -rot rot rot \bar{A} + rot \bar{L} / G , \quad (6)$$

и обозначим

$$\bar{u}_{non} = rot \bar{A} ; \quad \bar{F}_{non} = rot \bar{L} .$$

В результате равенство (6) примет следующий вид:

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \bar{u}_{non} / \partial t^2 = -rot rot \bar{u}_{non} + \bar{F}_{non} / G . \quad (7)$$

В этом равенстве величина  $\bar{u}_{non}$  имеет размерность и физический смысл смещения точки среды, а  $\bar{F}_{non}$  – это плотность внешней массовой «поперечной» силы.

Обозначим скорость смещения среды  $\bar{v}_{non} = \partial \bar{u}_{non} / \partial t$  и определим поле упругих касательных напряжений равенством

$$\bar{q}_{non} = G \cdot rot \bar{u}_{non} - \bar{L} .$$

Тогда, как это несложно проверить, система дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{non}^{-1} \cdot \partial \bar{q}_{non} / \partial t &= rot (G \cdot \bar{v}_{non} / a_{non}) - a_{non}^{-1} \cdot \partial \bar{L} / \partial t \\ a_{non}^{-1} \cdot \partial (G \cdot \bar{v}_{non} / a_{non}) / \partial t &= -rot \bar{q}_{non} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

оказывается эквивалентной уравнению второго порядка (5). Кроме того, мы получаем еще два очевидных соотношения:

$$div \bar{v}_{non} = 0 ; \quad div \bar{q}_{non} = -div \bar{L} \quad \} . \quad (9)$$

Пусть в полученных равенствах величина  $-div \bar{L} / (4\pi)$  определяет «плотность зарядов»  $q$ , а величина  $(\partial \bar{L} / \partial t) / (4\pi)$  определяет «плотность токов», то есть

$$q = -div \bar{L} / (4\pi) , \quad \bar{J} = (\partial \bar{L} / \partial t) / (4\pi) .$$

Далее вектор  $\bar{q}_{non}$  будем обозначать как напряженность  $\bar{E}$  электрического

поля, а вектор  $G \cdot \vec{v}_{non} / a_{non}$ , имеющий ту же физическую размерность, что и  $\vec{E}$ , – как вектор напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ . Тогда, как несложно проверить, систему равенств (8) и (9) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -a_{non}^{-1} \partial \vec{H} / \partial t; & \text{div } \vec{E} = 4\pi \cdot q; \\ \text{rot } \vec{H} = a_{non}^{-1} \partial \vec{E} / \partial t + (4\pi / a_{non}) \vec{J}; & \text{div } \vec{H} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Сравнивая с равенствами (1), отмечаем, что мы получили систему уравнений Максвелла. Кроме того, прямым следствием принятых обозначений является равенство

$$\text{div } \vec{J} + \partial q / \partial t = 0;$$

напомним, что в электрофизике подобное равенство – это дифференциальная формулировка **закона сохранения заряда**, а в механике аналогичную форму имеет закон сохранения массы и уравнение неразрывности сплошной среды.

Таким образом, произвольное поперечное смещение упругой среды удовлетворяет уравнениям Максвелла, в которых роль скорости света  $c$  играет скорость звука  $a_{non}$ . В завершении этого пункта заметим, что, поскольку уравнения упругости выводятся на основе теории электромагнитного поля, полученный результат не удивляет. Но физический смысл уравнений и скорость волн изменяются кардинально (величина скорости – на пять порядков).

**Динамические потенциалы поперечных смещений среды.** Как следует из проведенного вывода, поле напряжений  $\vec{H}$  является соленоидальным и имеет векторный потенциал  $\vec{A}_H = G \cdot (\partial \vec{A} / \partial t) / a_{non}$ , где векторная функция  $\vec{A}$  является решением волнового уравнения (5). Продифференцируем это уравнение по времени,

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^3 \vec{A} / \partial t^3 = \Delta (\partial \vec{A} / \partial t) + (\partial \vec{L} / \partial t) / G,$$

откуда

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \vec{A}_H / \partial t^2 = \Delta \vec{A}_H + 4\pi \cdot \vec{J} / a_{non}. \quad (11)$$

Таким образом, векторный потенциал  $\vec{A}_H$  удовлетворяет неоднородному волновому уравнению (11).

Далее запишем тождество  $\vec{H} \equiv \text{rot } \vec{A}_H$  и подставим его в первое уравнение системы (10):

$$\text{rot } \vec{E} = -a_{non}^{-1} (\partial / \partial t) (\text{rot } \vec{A}_H), \text{ или } \text{rot} \left( -a_{non}^{-1} \cdot \partial \vec{A}_H / \partial t - \vec{E} \right) = 0.$$

Следовательно, поле  $\vec{a} = -a_{non}^{-1} \cdot \partial \vec{A}_H / \partial t - \vec{E}$  является потенциальным, и

$$-a_{non}^{-1} \cdot \partial \vec{A}_H / \partial t - \vec{E} \equiv \text{grad } \Phi,$$

где  $\Phi(M)$  – его скалярный потенциал.

Таким образом, мы получили представление для поля напряжений  $\vec{E}$  :

$$\vec{E} \equiv -grad \Phi - a_{non}^{-1} \cdot \partial \vec{A}_H / \partial t . \quad (12)$$

Заметим, что векторный потенциал  $\vec{A}_H$  в решаемой задаче не является единственным, и его выбор можно было, например, подчинить дополнительному условию  $div \vec{A}_H = 0$ , что и делают в некоторых теориях сплошной среды. Но, решая аналогичную задачу для электромагнитного поля, Лоренц предложил другое условие калибровки потенциалов, которое теперь называют **условием Лоренца**:

$$div \vec{A}_H + a_{non}^{-1} \cdot \partial \Phi / \partial t = 0 . \quad (13)$$

Покажем, что при выполнении этого условия скалярный потенциал  $\Phi(M)$  также удовлетворяет неоднородному волновому уравнению. Для этого подставим замену (12) в уравнение Максвелла  $div \vec{E} = 4\pi \cdot q$  и получим:

$$div(-grad \Phi - a_{non}^{-1} \cdot \partial \vec{A}_H / \partial t) = 4\pi \cdot q ,$$

то есть,

$$-\Delta \Phi - a_{non}^{-1} \cdot \partial (div \vec{A}_H) / \partial t = 4\pi \cdot q , \quad \text{или,} \quad -\Delta \Phi + a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \Phi / \partial t^2 = 4\pi \cdot q .$$

Итак,

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \Phi / \partial t^2 = \Delta \Phi + 4\pi \cdot q . \quad (14)$$

Покажем, что уравнения (11) и (14) не противоречат друг другу. Для этого обе части уравнения (14) умножим на коэффициент  $a_{non}^{-1}$  и продифференцируем по времени,

$$a_{non}^{-2} \partial^2 (a_{non}^{-1} \cdot \partial \Phi / \partial t) / \partial t^2 = \Delta (a_{non}^{-1} \cdot \partial \Phi / \partial t) + 4\pi \cdot a_{non}^{-1} \cdot \partial q / \partial t ,$$

а от обеих частей уравнения (11) вычислим дивергенцию:

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 div \vec{A}_H / \partial t^2 = \Delta div \vec{A}_H + (4\pi / c) div \vec{J} .$$

Складывая эти равенства, учтем условие Лоренца (13) и получим:

$$\partial q / \partial t + div \vec{J} = 0 ,$$

что отвечает закону сохранения заряда.

Таким образом, благодаря использованию условия Лоренца поперечные смещения среды удалось представить как колебания векторного и скалярного потенциалов. В отличие от связанных колебаний упругой среды, где имелись две скорости звука – для продольных и для поперечных потенциалов, динамические потенциалы  $\vec{A}_H$  и  $\Phi$  распространяются по среде с одинаковой скоростью  $a_{non}$ .

**Вектор энергии.** В той области, где «заряды» и «токи» отсутствуют, уравнения для динамических потенциалов становятся однородными,

$$a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \Phi / \partial t^2 = \Delta \Phi , \quad a_{non}^{-2} \cdot \partial^2 \vec{A}_H / \partial t^2 = \Delta \vec{A}_H , \quad (15)$$

а система уравнений Максвелла (10) принимает вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -a_{non}^{-1} \partial \vec{H} / \partial t; & \operatorname{div} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H} = a_{non}^{-1} \partial \vec{E} / \partial t; & \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

и соответствует известным уравнениям электромагнитного поля в вакууме [7].

Учтем, что напряженность  $\vec{H}$  пропорциональна скорости смещения среды,

$$\vec{H} = G \cdot \vec{v}_{non} / a_{non} = \sqrt{G \cdot \rho} \cdot \vec{v}_{non},$$

тогда система (16) примет вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\rho \cdot \partial \vec{v}_{non} / \partial t; & \operatorname{div} \vec{E} = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{v}_{non} = G^{-1} \cdot \partial \vec{E} / \partial t, & \operatorname{div} \vec{v}_{non} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, плотность  $w$  полной механической энергии поперечных смещений описывается формулой

$$w = k \cdot (\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2),$$

где  $k \cdot G^2 \cdot a_{non}^{-2} = \rho$ , то есть  $k = G^{-1}$ .

Пусть  $T$  – это некоторый объем среды, ограниченный поверхностью  $\Omega$  (рис. 1). Полная энергия  $W$  поля поперечных смещений, заполняющего этот объем, вычисляется по формуле:

$$W = G^{-1} \cdot \iiint_T (\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2) dV.$$

С течением времени эта энергия может изменяться; пусть  $P(t) = \partial W / \partial t$  обозначает мощность, протекающую в момент времени  $t$  через границу  $\Omega$ . Покажем, что указанная мощность равняется потоку вектора

$$\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{\lambda \cdot G}} [\vec{E}, \vec{H}] = [\vec{E}, \vec{v}_{non}]$$

через поверхность  $\Omega$ .

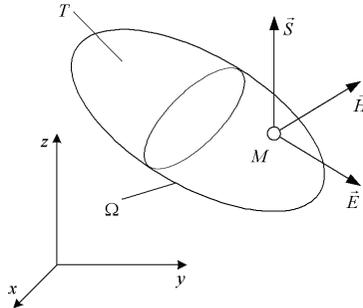


Рисунок 1

Вектор  $\vec{S}_* = [\vec{E}, \vec{H}]$  в теории электромагнитного поля называется **вектором энергии** (в научной литературе используются также названия **вектор Пойтинга** или **вектор Умова – Пойтинга**).

Для проверки высказанного утверждения вычислим дивергенцию этого вектора,

$$\operatorname{div} \vec{S}_* = \operatorname{div} [\vec{E}, \vec{H}] = (\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) - (\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}),$$

далее умножаем обе части первого уравнения системы (16) скалярно на вектор  $\vec{H}$ ,

$$(\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) = -a_{\text{non}}^{-1} (\vec{H}, \partial \vec{H} / \partial t)$$

третьего уравнения этой системы – умножим на вектор  $\vec{E}$ ,

$$(\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) = a_{\text{non}}^{-1} (\vec{E}, \partial \vec{E} / \partial t)$$

и полученные результаты вычтем в указанном ниже порядке:

$$\begin{aligned} (\vec{E}, \operatorname{rot} \vec{H}) - (\vec{H}, \operatorname{rot} \vec{E}) &= a_{\text{non}}^{-1} (\vec{E}, \partial \vec{E} / \partial t) + a_{\text{non}}^{-1} (\vec{H}, \partial \vec{H} / \partial t) = \\ &= a_{\text{non}}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2] \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \vec{S}_* = a_{\text{non}}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2].$$

Для вычисления потока вектора энергии через поверхность  $\Omega$  воспользуемся известной формулой Гаусса – Остроградского и получим:

$$\begin{aligned} \Pi_{\Omega}(\vec{S}_*) &= \iint_{\Omega} (\vec{S}_*, \vec{n}_0) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{S}_* dV = a_{\text{non}}^{-1} \cdot \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} [\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2] dV = \\ &= a_{\text{non}}^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V [\vec{E}^2 / 2 + \vec{H}^2 / 2] dV = a_{\text{non}}^{-1} \cdot G \cdot \frac{\partial}{\partial t} W(t) = \sqrt{\rho \cdot G} \cdot P(t). \end{aligned}$$

Следовательно,  $\Pi_{\Omega}(\vec{S}) = P(t)$ , что и требовалось показать. Аналогичное утверждение в электродинамике называют **теоремой Умова – Пойтинга** [9].

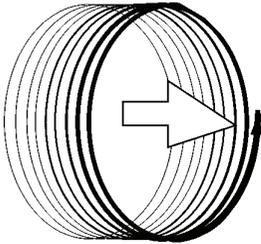


Рисунок 2

**Винтовая волна трансляции в активной механической среде.** Применим эту теорию для исследования винтовых фононов. Считается (смотри работу [3]), что фонон (механический аналог фотона) объединяет устойчивый волновой пакет, движущийся по траектории винтовой формы, и плоскую волну крутильной деформации, распространяющуюся внутри образующейся винтовой цилиндрической оболочки (рис. 2).

Движение фонона происходит по материалу, испытывавшему в прошлом упруго – пластическую деформацию (смотри, например, работу [11]) и находящемуся в точке  $M_0$  (рис. 3) гистерезисной кривой. На винтовой траектории материал находится в состоянии  $M_1$ , отвечающем тому же давлению  $p_0$ , но

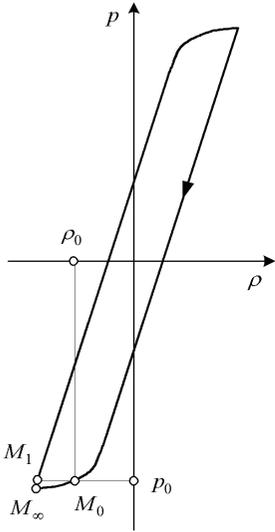


Рисунок 3

меньшей плотности  $\rho$ ,  $\rho_1 < \rho_0$ . Переход материала из состояния  $M_1$  в состояние  $M_1$  происходит на головном участке волны; при этом количество выделенной кинетической энергии на участке  $M_\infty \rightarrow M_1$  превосходит ее затраты на совершение перехода  $M_0 \rightarrow M_\infty$ , поэтому описываемая **механическая среда является активной**. И, что особенно важно для понимания природы рассматриваемого волнового тандема, после указанного перехода материал приобретает значительно большую жесткость, что отражено в изменении наклона гистерезисной кривой. Поэтому внешняя и внутренняя волна тандема являются слабо связанными.

Для описания движения такого объекта можно использовать модели цилиндрического винтового стержня (описанные, например, в [1,2]), сопряженные с известными трехмерными моделями колебаний упругой среды (в статье [3] были описаны их решения, обладающие цилиндрической симметрией).

Так, матричные уравнения свободных колебаний винтового стержня, приведенные в [1], оказываются нагруженными внешними силами или моментами сил  $F_x, F_y$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} Mx & \Theta \\ \Theta & My \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \begin{bmatrix} B + \Omega x & \Omega yx + \Delta \\ \Omega xy + \Delta & -B^T - \Omega x^T \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Fx \\ Fy \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} Cx & \Theta \\ \Theta & Cy \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \begin{bmatrix} Qx \\ Qy \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} I & \Theta \\ \Theta & I \end{bmatrix} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \begin{bmatrix} B^T + \Omega x^T & \Omega yx^T - \Delta \\ \Omega yx^T - \Delta & -B - \Omega x \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} Vx \\ Vy \end{bmatrix}, \end{aligned} \right.$$

в результате чего эти колебания становятся связанными с колебаниями среды (использованные в этих равенствах обозначения повторяют обозначения статьи [1]).

Внутренняя волна является гармонической затухающей волной трансляции, и в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  смещение среды  $\vec{u}$  описывается формулой

$$\vec{u} = \Delta u \cdot \{0; r; 0\} \cdot e^{-f \cdot (\omega t - \lambda z)} \cdot \sin(\omega t - \lambda z), \quad \omega t - \lambda z \geq 0,$$

где  $\Delta u$  – амплитудный коэффициент,  $\omega, \lambda, f$  – круговая частота, волновое число и логарифмический декремент затухания колебаний (рис. 4).

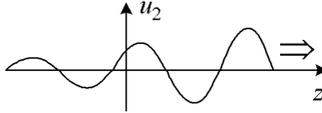


Рисунок 4

**Энергетический обмен в волне трансляции.** Вычислим следующие характеристики внутренней волны:

$$\vec{v}_{non} = \partial \vec{u} / \partial t = \Delta u \cdot \omega \cdot \{0; r; 0\} \cdot e^{-f \cdot (\omega t - \lambda z)} \cdot (\cos(\omega t - \lambda z) - f \cdot \sin(\omega t - \lambda z));$$

$$\vec{E} = G \cdot \text{rot} \vec{u}_{non} = G \cdot \Delta u \times$$

$$\times \{-\lambda \cdot (\cos(\omega t - \lambda z) - f \sin(\omega t - \lambda z)); 0; 2 \cdot \sin(\omega t - \lambda z)\} \cdot e^{-f \cdot (\omega t - \lambda z)};$$

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{v}_{non}] = G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega \cdot r \cdot e^{-2f \cdot (\omega t - \lambda z)} \cdot (\cos(\omega t - \lambda z) - f \cdot \sin(\omega t - \lambda z)) \cdot$$

$$\cdot \{2 \cdot \sin(\omega t - \lambda z); 0; \lambda \cdot (\cos(\omega t - \lambda z) - f \sin(\omega t - \lambda z))\}.$$

Следовательно, на фронте волны

$$\vec{S} = G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega \cdot \lambda \cdot r \cdot \{0, 0, 1\},$$

то есть, здесь энергия распространяется параллельно движению плоской волны, и переносимая мощность составляет

$$P_{\phi p} = (2\pi R^3 / 3) \cdot G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega \cdot \lambda = (2\pi R^3 / 3) \cdot G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega^2 / a_{non},$$

где  $R$  – радиус цилиндра.

Плотность потока энергии через боковую поверхность цилиндра описывается равенством

$$P_{\phi}(l) = 2 \cdot G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega \cdot R \cdot e^{-2f \cdot \lambda \cdot l} \cdot (\cos \lambda l - f \cdot \sin \lambda l) \cdot \sin \lambda l,$$

где  $l$  – расстояние до фронта волны (рис. 5). Вблизи от фронта эта плотность положительная, то есть здесь энергия передается от плоской волны к винтовой.

Суммарная мощность, передаваемая через боковую поверхность цилиндра, определяется формулой

$$P_{\phi} = G \cdot (\Delta u)^2 \cdot \omega \cdot R \cdot 2 \cdot \int_0^{\infty} [e^{-2f \cdot \lambda \cdot z} \cdot \sin(\lambda z) \cdot (\cos(\lambda z) - f \sin(\lambda z))] dz,$$

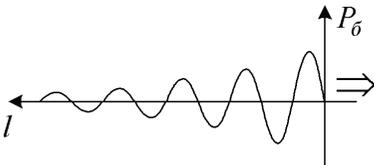


Рисунок 5

и, как показывает интегрирование, равняется нулю. Таким образом, при движении фонона происходит обратимый обмен энергией между внутренней плоской волной крутильной деформации и внешней винтовой волной, распространяющейся по цилиндрической спирали, причем на головном участке фонона внешняя волна получает энергию от внутренней.

## **Выводы.**

Выявлена формальная аналогия между уравнениями трехмерной модели линейной теории упругости и уравнениями Максвелла для электромагнитного поля. На основе этой аналогии получены интегральные и дифференциальные формулы, описывающие перенос энергии при поперечных смещениях сплошной упругой среды.

Выполнена краткая презентация новой модели активной механической среды, базирующейся на закономерностях упруго – пластической деформации материала. Исследованы особенности энергетического обмена в винтовой волне трансляции, распространяющейся по активной механической среде.

**Список литературы:** 1. *Лавинский В.И., Григорьев А.А.* Связанные колебания винтового цилиндрического стержня // Вестник НТУ «ХПИ». – 2008. – № 47. – С. 92-104. 2. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Солитоны Рассела в цилиндрической пружине // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 30. – С. 20-30. 3. *Ванин В.А., Григорьев А.А.* Внутренние связанные колебания и экспоненциальные волны переноса в цилиндрическом стержне // Вестник НТУ «ХПИ». – 2009. – № 42. – С. 29-38. 4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.–Л.: ОНТИ, 1935. 5. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. 6. *Максвелл Дж.* Трактат об электричестве и магнетизме. В 2-х томах. – М.: Наука, 1989. 7. *Никольский В.В.* Теория электромагнитного поля. – М.: Высшая школа, 1964. 8. *Сидоренков В.В.* Обобщение физических представлений о векторных потенциалах в классической электродинамике // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2006. – № 1. – С. 28-37. 9. *Пуанкаре А.* О науке. – М.: Наука, 1983. 10. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. 11. *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974.

*Поступила в редколлегию 03.09.2010*

УДК 539.3

**С. ДАРЯЗАДЕ**, аспирант, НТУ «ХПИ»

## **ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ОТВЕРСТИЯ В ПЛАСТИНАХ ИЗ ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ КОМПОЗИТОВ**

Робота присвячена дослідженню концентрації напружень в пластинах із композиційних матеріалів. Ефективні пружні постійні односпрямованих композитів розраховані для склопластиків та вуглепластиків з різними коефіцієнтами наповнення. Для визначення максимальних напружень на контурі отвору використане рішення плоскої задачі для ортотропного матеріалу. Проведені розрахунки для розтягнення під різноманітними кутами до головних напрямків ортотропії.

Work is devoted to the research of stress concentration in plates made from composite materials. Effective elastic constants of the unidirectional composites are combed for glass-plastics and coal-plastics with various filling factors. For definition of the maximal stress around of an hole it is used decisions for