

UNIVERSITÀ DI PISA



**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE E INDUSTRIALE**

Corso di laurea triennale in Ingegneria Civile, Ambientale e Edile

---

Tesi di laurea

**LE STRUTTURE A MOLTE IPERSTATICHE:  
UNA APPLICAZIONE AL CASO DEI TELAI PIANI**

Relatore:

*Prof. Ing. Paolo S. VALVO*

Laureando:

*Sergio CARACAPPA*

---

Anno Accademico 2015/2016

---

# INDICE

<b>INDICE .....</b>	<b>II</b>
<b>PREFAZIONE.....</b>	<b>IV</b>
<b>1 INTRODUZIONE.....</b>	<b>1</b>
1.1 Concetti di base .....	1
1.1.1 <i>Le forze agenti.....</i>	<i>1</i>
1.1.2 <i>Le deformazioni dei corpi e la legge di Hooke .....</i>	<i>2</i>
1.1.3 <i>Le reazioni dei vincoli .....</i>	<i>3</i>
1.1.4 <i>Le tensioni interne e la loro determinazione .....</i>	<i>3</i>
1.1.5 <i>Le caratteristiche di sollecitazione.....</i>	<i>5</i>
1.1.5.1 <i>Le convenzioni sui segni delle Caratteristiche di sollecitazione .....</i>	<i>6</i>
1.1.6 <i>Il principio di sovrapposizione degli effetti .....</i>	<i>7</i>
1.2 Il grado di vincolo di una struttura .....	8
1.2.1 <i>Il numero di vincoli di un corpo.....</i>	<i>8</i>
1.2.1.1 <i>Caso delle travi.....</i>	<i>9</i>
1.2.2 <i>L'equilibrio fra i carichi e le reazioni dei vincoli.....</i>	<i>10</i>
1.2.3 <i>Sistemi staticamente determinati ed indeterminati .....</i>	<i>12</i>
1.2.4 <i>Le indeterminazioni interne .....</i>	<i>14</i>
1.2.5 <i>I sistemi chiusi.....</i>	<i>14</i>
1.2.6 <i>La statica dei sistemi rigidi e la statica dei sistemi elastici... </i>	<i>15</i>

1.3	Il Principio dei Lavori Virtuali .....	16
1.3.1	<i>Enunciato e sue applicazioni</i> .....	16
1.3.1.1	L'equazione generale dei lavori virtuali .....	18
1.3.2	<i>I due modi diversi di applicare il principio</i> .....	19
1.3.3	<i>Il principio dei lavori virtuali applicato ai complessi piani di travi</i> .....	21
1.3.4	<i>Il calcolo degli spostamenti nelle travi mediante l'equazione dei lavori virtuali</i> .....	23
<b>2</b>	<b>LE STRUTTURE A MOLTE IPERSTATICHE</b>	
	<b>RISOLTE COL METODO DELLE FORZE</b> .....	<b>25</b>
2.1	Le strutture a molte iperstatiche .....	25
2.2	Il metodo delle forze.....	27
2.2.1	<i>Le basi concettuali su cui si fonda il Metodo delle Forze</i> .....	27
2.3	Le equazioni di congruenza di Müller-Breslau .....	29
2.4	Calcolo degli $\eta_{i0}$ , $\eta_{ia}$ , $\eta_{ik}$ mediante l'equazione dei lavori virtuali .....	31
2.4.1	<i>Vincoli cedevoli elasticamente</i> .....	32
<b>3</b>	<b>APPLICAZIONE AL CASO DI UN TELAIO</b>	
	<b>PIANO 9 VOLTE IPERSTATICO</b> .....	<b>34</b>
3.1	Dati del problema .....	34
3.2	Descrizione del procedimento di risoluzione .....	38
	<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>63</b>
	<b>SITI WEB CONSULTATI</b> .....	<b>63</b>
	<b>APPENDICE</b> .....	<b>64</b>

---

## PREFAZIONE

La tesi di laurea è una dissertazione scritta su un argomento attinente ad una delle materie studiate e costituisce il coronamento degli studi universitari. A tal proposito, la scelta di un argomento che riguardasse la Scienza delle Costruzioni è risultata spontanea visti l'interesse e l'apprezzamento maturati in me verso tale materia durante gli studi.

Ho proceduto, con il supporto datomi dal relatore Prof. Paolo S. Valvo, dapprima mettendo a fuoco il mio obiettivo, individuando cioè l'argomento di tesi, e poi cercando di realizzare un lavoro completo e organico su tale argomento attraverso l'impiego dei metodi di analisi e di sintesi appresi nel corso degli studi.

L'obiettivo principale di questa tesi è quello di approfondire lo studio del Metodo delle Forze per le strutture a molte iperstatiche; quindi, di applicare il metodo per risolvere a titolo di esempio un telaio piano 9 volte iperstatico, trovando le 9 incognite iperstatiche e le caratteristiche della sollecitazione.

Per quanto riguarda la risoluzione di tale problema, si è potuto constatare che il Metodo delle Forze risulta effettivamente laborioso se usato per risolvere sistemi con grado di iperstaticità elevato (in realtà, risulta già impegnativo se il grado di iperstaticità è superiore a 2 o 3). Questo principalmente perché esso non si presta ad essere automatizzato mediante l'ausilio di un calcolatore elettronico.

La presente tesi è suddivisa in tre capitoli. Nel primo capitolo vengono richiamati argomenti teorici indispensabili per poter comprendere i concetti fondamentali della Scienza delle Costruzioni relativi alla iperstaticità delle strutture. Nel secondo capitolo viene introdotto il caso di strutture a molte iperstatiche ed in particolare si descrive concettualmente uno dei possibili metodi di risoluzione, cioè il Metodo delle Forze. Nel terzo capitolo, infine, viene descritto lo svolgimento del problema in esame, ovvero un telaio piano 9 volte iperstatico risolto con il Metodo delle Forze, e riportati con opportuni commenti i risultati ottenuti.

---

---

**LE STRUTTURE A MOLTE IPERSTATICHE:  
UNA APPLICAZIONE AL CASO DEI TELAI PIANI**

---

# 1 INTRODUZIONE

## 1.1 Concetti di base

### 1.1.1 *Le forze agenti*

Le diverse parti o strutture resistenti di una costruzione sono sollecitate da forze di varia natura. Alcune agiscono continuamente ed invariabilmente nel tempo e costituiscono i carichi permanenti. Questi sono dovuti in primo luogo al peso proprio delle strutture resistenti, poi al peso di sovrastrutture gravanti su di esse. Altre forze agiscono invece non continuamente e con intensità variabile e costituiscono i *carichi variabili*. Questi comprendono i carichi utili che la costruzione è destinata a sopportare (persone, mobili, merci, macchine, veicoli, etc.), nonché le azioni nocive dovute agli agenti naturali (neve, vento, dilatazioni termiche, azioni sismiche). Nel caso di carichi variabili, si devono considerare per le verifiche le condizioni più gravose.

Le forze si considerano *concentrate* quando agiscono su punti isolati della superficie del corpo e *ripartite* quando agiscono su zone estese di essa. A rigore non esistono forze concentrate; tuttavia spesso conviene considerarle tali quando agiscono su di un'area molto ristretta. Per contro è utile considerarle ripartite quando sono costituite da molte forze pressoché concentrate, distribuite con una certa regolarità, come nel caso della folla. Le forze si distinguono anche in forze *statiche* quando sono costanti, oppure variano con sufficiente lentezza, così da non produrre forze di inerzia sulla costruzione, e in forze *dinamiche* quando sono rapidamente variabili.

### 1.1.2 Le deformazioni dei corpi e la legge di Hooke

L'esperienza insegna che ogni corpo si deforma sotto l'azione di forze esterne e che al cessare di queste tende più o meno a riprendere la forma primitiva. Questa tendenza è una proprietà posseduta in diversa misura da tutti i corpi e si chiama *elasticità*. Si può in generale pensare la deformazione di un corpo costituita di due parti: una *deformazione elastica* che scompare al cessare della sollecitazione che l'ha prodotta e una *deformazione permanente* che rimane anche dopo. Tuttavia, per certi corpi l'esperienza mostra che se la sollecitazione non ha superato un certo limite, la deformazione permanente è inapprezzabile. Quindi entro tale limite, chiamato *limite di elasticità*, questi corpi possono considerarsi elastici.

Dal punto di vista quantitativo, se si misura la deformazione di un corpo prodotta da una forza gradatamente crescente, si può osservare che dapprima essa varia in misura praticamente proporzionale alla forza, poi cresce più rapidamente. Se dunque non si supera un certo limite, chiamato *limite di proporzionalità*, la deformazione è proporzionale alla forza agente. Questa legge, enunciata da Robert Hooke nel 1678, costituisce il principale fondamento della Scienza delle Costruzioni.

Per molti corpi i due limiti di elasticità e di proporzionalità, diversi come significato, sono praticamente coincidenti.

Inoltre, si ipotizza in genere che i corpi elastici di cui ci si occupa siano *isotropi*, ossia che le loro proprietà elastiche siano uguali in tutte le direzioni, cosa che in realtà spesso non si verifica esattamente.

### *1.1.3 Le reazioni dei vincoli*

In generale, ogni elemento strutturale facente parte di una costruzione deve essere vincolato col suolo o con le altre parti in modo sufficiente per impedire qualunque movimento indesiderato (ad eccezione delle deformazioni elastiche). Per studiare una struttura resistente è necessario conoscere tutte le forze esterne che la sollecitano. Perciò, noti i carichi, occorre anzitutto determinare anche le reazioni dei vincoli. Queste reazioni devono soddisfare la nota condizione di mantenere in equilibrio il corpo qualora vengano sostituite ai vincoli, cioè di fare equilibrio ai carichi. Però, come si vedrà nel seguito, questa condizione non sempre è sufficiente per determinare le reazioni.

### *1.1.4 Le tensioni interne e la loro determinazione*

Determinate le reazioni dei vincoli e note così tutte le forze agenti sul corpo, si cercano le tensioni esistenti nell'interno di esso. Se si immagina tracciato per un punto generico nell'interno del corpo un elemento piano di superficie arbitrariamente orientato, attraverso questo elemento il materiale che è da una parte esercita una forza o tensione  $t$ , generalmente obliqua all'elemento, sul materiale che è dall'altra parte, e questo esercita sul primo una tensione uguale e contraria. La tensione  $t$  ha quindi in generale una componente  $\sigma$  normale all'elemento (tensione normale) ed una componente  $\tau$  giacente su di esso (tensione tangenziale), che si intendono riferite all'unità di area dell'elemento stesso. Le tensioni  $\sigma$  e  $\tau$ , variabili in generale da punto a punto nel corpo e per diversi orientamenti dell'elemento superficiale, caratterizzano lo stato di tensione del corpo.

Nell'ambito dell'Ingegneria Civile rivestono un ruolo importante le strutture "a telaio" costituite dall'insieme di più elementi strutturali schematizzabili come "travi"<sup>1</sup>.

Considerando una generica trave spaziale soggetta ad una distribuzione qualsiasi di forze esterne generalizzate e supponendo di avere determinato le reazioni vincolari, ci si propone adesso di eseguire l'analisi interna della trave, che consiste nella determinazione delle interazioni che due qualsiasi sezioni contigue si scambiano. La Statica non consente la determinazione puntuale delle interazioni, per la quale occorre fare ricorso alla Teoria della Elasticità. Tuttavia, si può sempre ridurre il complesso delle interazioni agenti su ciascuna sezione ad un vettore forza e ad un vettore momento applicati nel baricentro della sezione. Se si considera quindi una generica sezione S, il tronco di trave che la precede è in equilibrio; esso è soggetto a tutte le forze esterne che precedono la sezione ed al complesso delle tensioni interne che, attraverso questa, vengono trasmesse ad esso dal tronco che segue. Si conclude pertanto che le tensioni trasmesse da un tronco della trave all'altro tronco attraverso la sezione comune fanno equilibrio alle forze esterne agenti su quest'ultimo.

*OSSERVAZIONE:* Giova osservare fin d'ora che le tensioni interne non nascono come conseguenza immediata delle forze esterne, ma soltanto in seguito alle deformazioni che il corpo subisce: infatti, durante l'applicazione delle forze la trave si deforma e le sue parti si muovono, cioè l'equilibrio non sussiste ancora. Man mano crescono le forze, crescono le deformazioni e quindi anche le tensioni, che rappresentano le reazioni molecolari che il materiale oppone alla deformazione. Perciò le deformazioni del corpo aumentano fino a che le corrispondenti tensioni raggiungono valori capaci di equilibrare le forze esterne.

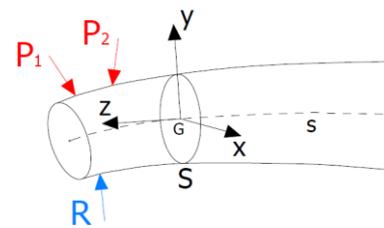
---

<sup>1</sup> Viene definito trave un solido generato da una superficie piana che si muove nello spazio in modo tale che, pur potendo variare di grandezza, di forma e di giacitura durante il moto, il suo baricentro percorra una data linea  $s$  (asse geometrico o fibra media) e la superficie stessa si mantenga costantemente ortogonale a questa linea.

### 1.1.5 Le caratteristiche di sollecitazione

Le forze esterne agenti sul tronco di trave che precede la sezione S (o sul tronco che la segue) possono variare in infiniti modi per numero, punti d'applicazione, intensità e rette d'azione delle forze stesse. Per evitare lo studio delle tensioni interne caso per caso, si sostituiscono a tali forze alcuni tipi di sollecitazioni equivalenti. In tal modo lo studio si riduce a quello dei pochi casi semplici in cui agiscono separatamente tali sollecitazioni; dopo di che, qualunque caso composto si studia sommando gli effetti prodotti dalle singole sollecitazioni<sup>2</sup>.

A tal fine, fissata una sezione S della trave, si può pensare di assumere una terna di assi ortogonali con l'origine nel baricentro G di S, avente l'asse z normale a S e gli assi x e y nel piano della sezione e coincidenti con



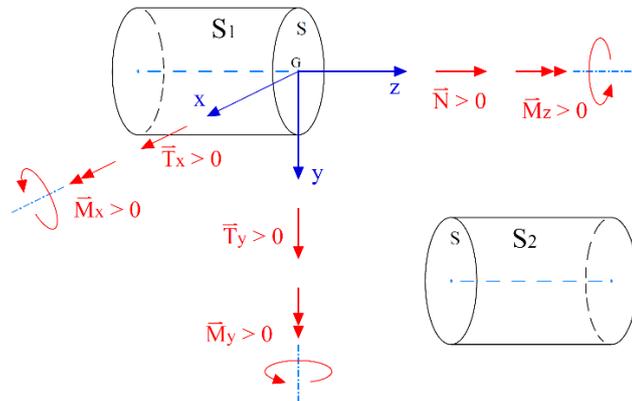
i suoi assi principali d'inerzia. Le forze che precedono la sezione S hanno in generale sei parametri: le somme delle loro componenti secondo gli assi ( $\Sigma X$ ,  $\Sigma Y$ ,  $\Sigma Z$ ), che costituiscono tre forze agenti secondo gli assi stessi, e le somme dei loro momenti rispetto agli assi ( $\Sigma M_x$ ,  $\Sigma M_y$ ,  $\Sigma M_z$ ), che costituiscono le tre coppie agenti in piani a essi normali.

Questi sei parametri sono le sei *caratteristiche di sollecitazione* e si indicano rispettivamente con  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  (o  $M_t$ ). La forza  $N$  si chiama *forza normale o assiale* e il suo effetto nell'intorno di S è quello di estendere o di accorciare la trave; le forze  $T_x$  e  $T_y$  si chiamano *forze di taglio* perché tendono a tagliare la trave secondo S; le coppie  $M_x$  e  $M_y$  si chiamano *momenti flettenti* perché inflettono la trave; la coppia  $M_z$  (o  $M_t$ ) si chiama *momento torcente* perché torce la trave.

<sup>2</sup> Tale sovrapposizione degli effetti è valida in generale solo nel caso di sistemi lineari, cioè modellabili attraverso sistemi di equazioni tutte lineari nelle incognite del problema.

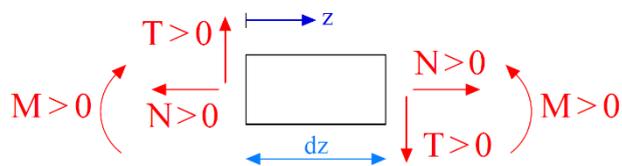
1.1.5.1 Le convenzioni sui segni delle Caratteristiche di sollecitazione

Le caratteristiche di sollecitazione che il tronco  $S_2$  trasmette al tronco  $S_1$  sono positive se di verso concorde con la terna locale, come si può vedere meglio in figura.



Viceversa, le caratteristiche della sollecitazione che il tronco  $S_1$  trasmette al tronco  $S_2$  sono positive se di verso opposto alla terna locale.

Nel caso di travi nel piano, avendo solo la forza normale (lungo z), una forza di taglio



(ortogonale a z e parallelo al piano) ed un momento flettente (con asse di sollecitazione ortogonale a z e contenuto nel piano), queste sono considerate positive quando:

- la forza normale tende ad allungare l'elemento;
- il taglio tende a far ruotare l'elemento in senso orario, o ugualmente tende a far abbassare la faccia di destra dell'elemento rispetto a quella di sinistra;
- il momento flettente tende ad allungare le fibre inferiori e accorciare quelle superiori.

### *1.1.6 Il principio di sovrapposizione degli effetti*

Le forze applicate ad una struttura producono diversi effetti, cioè reazioni dei vincoli, tensioni e deformazioni. A questi conviene aggiungere le caratteristiche della sollecitazione, le quali, pur non essendo degli effetti, ma soltanto delle quantità che si sostituiscono alle forze per comodità, dipendono anch'esse dalle forze. Nel caso dei sistemi lineari come quelli analizzati nel presente contesto, ciascuno di questi effetti soddisfa il seguente principio, detto della sovrapposizione degli effetti: *l'effetto prodotto da più forze agenti contemporaneamente è uguale alla somma degli effetti prodotti dalle singole forze pensate agenti separatamente.*

Poiché le diverse forze agenti sulla struttura si possono pensare aggiunte successivamente, questo principio significa che gli effetti di una forza sono indipendenti dalla preesistenza di altre forze; ossia che una forza applicata ad una struttura già soggetta ad altre forze produce effetti ulteriori uguali a quelli che produrrebbe applicandola alla struttura scarica; per cui i suoi effetti si sommano con quelli già prodotti dalle forze preesistenti.

Questo principio, di applicazione continua, è di grande utilità perché consente di scindere lo studio di casi complessi in quello dei casi semplici che risultano facendo agire separatamente le varie forze o le varie altre azioni (variazioni termiche, cedimenti di vincoli, etc.).

## 1.2 Il grado di vincolo di una struttura

### 1.2.1 Il numero di vincoli di un corpo

Per la ricerca delle tensioni interne occorre, come si è detto, conoscere tutte le forze esterne che agiscono sul corpo. Perciò è necessario determinare anzitutto le reazioni che sorgono nei vincoli per effetto delle forze applicate al corpo (o di altre cause) e che insieme con queste costituiscono appunto tutte le forze esterne. Questa determinazione in certi casi si presenta semplice, spedita e sicura, mentre in altri casi può essere laboriosa e talvolta incerta.

Considerando un sistema costituito da un solo corpo, qualunque movimento di un corpo libero nello spazio si può ricondurre a tre traslazioni secondo tre assi ortogonali e a tre rotazioni intorno agli stessi assi; quindi il corpo ha sei libertà di movimento. Se invece il corpo è mobile soltanto parallelamente ad un dato piano allora ha tre libertà di movimento, cioè due traslazioni secondo due assi ortogonali contenuti nel piano ed una rotazione intorno ad un asse normale al piano. Per impedire ogni movimento rigido del corpo (astruendo cioè dalle deformazioni elastiche) occorrono almeno tanti vincoli quante sono le sue libertà di movimento: quindi almeno sei per un corpo libero nello spazio ed almeno tre per un corpo mobile parallelamente ad un piano.

Quando i vincoli sono in numero *strettamente sufficiente* per impedire ogni movimento, si dice che il sistema è **ISOSTATICO**.

Quando esistono dei *vincoli sovrabbondanti* (cioè che si possono togliere senza che si renda possibile alcun movimento) il sistema si dice **IPERSTATICO**.

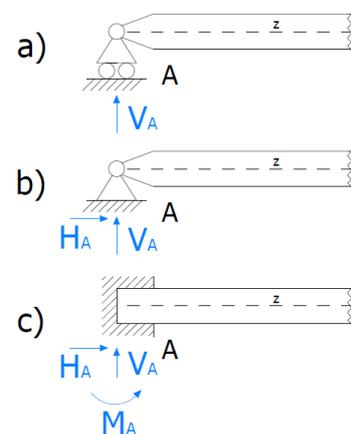
Se i vincoli fossero *insufficienti*, resterebbe possibile qualche movimento ed il sistema sarebbe **LABILE**.

Per impedire ogni movimento del corpo, non sempre basta che i vincoli siano in numero sufficiente, ma occorre anche accertarsi che siano *efficaci*, cioè che non presentino singolarità atte a consentire piccoli movimenti; ovvero si deve accertare che ciascun vincolo impedisca realmente il movimento consentito dai rimanenti. Questa verifica è assai semplice nel caso di un solo corpo, ma può essere complessa nei sistemi di più travi. In questi ultimi occorre anche accertarsi che i vincoli siano equamente distribuiti, cioè che non siano tali da vincolare troppo una parte del sistema e troppo poco un'altra parte.

### 1.2.1.1 Caso delle travi

Quando il corpo è una trave, i vincoli sono situati di solito nelle sezioni esterne e talvolta anche in punti intermedi. Ogni vincolo limita la mobilità di un punto dell'asse geometrico o della tangente all'asse in quel punto.

Così l'appoggio semplice (caso a) impedisce il movimento del punto A dell'asse in direzione trasversale, mentre consente al punto A di muoversi in direzione longitudinale e alla tangente in A all'asse di ruotare intorno ad A. La cerniera (caso b) fissa il punto A e consente alla tangente in A di ruotare intorno ad A; cioè fissa il baricentro A della sezione, ma consente a questa di ruotare. L'incastro (caso c) fissa il punto A e la direzione della tangente in A, ossia fissa la sezione.



*OSSERVAZIONE:* E' utile chiarire il significato dei movimenti consentiti da ciascun vincolo. Si è detto che i vincoli devono essere in numero sufficiente per impedire ogni movimento della trave considerata rigida. Per cui i movimenti consentiti dai vincoli a) e b) non possono avvenire, perché impediti dai vincoli rimanenti. Però la trave, pur non potendo approfittare di tali movimenti per un moto rigido, può compierli, sia pur in piccola misura, nella sua deformazione elastica. Così l'asse si

deforma in modo che il suo punto A si sposti soltanto in direzione  $x$  nel caso a), oppure non si sposti nel caso b), mentre la tangente in A può assumere in entrambi i casi una direzione qualsiasi; invece nel caso c) anche la tangente in A deve conservare la sua direzione primitiva. Di tali limitazioni si tiene conto quando si studia la deformazione, perché contribuiscono a renderla determinata.

### *1.2.2 L'equilibrio fra i carichi e le reazioni dei vincoli*

Se la struttura sta ferma, quindi è in equilibrio, per calcolare le reazioni dei vincoli si utilizza in ogni caso la loro proprietà di mantenere la struttura in equilibrio quando queste si pensino sostituite ai vincoli; cioè di fare equilibrio ai carichi. Tuttavia questa proprietà in certi casi è sufficiente per rendere determinato il problema, mentre in altri casi non basta; quindi occorre stabilire dei criteri per decidere anzi tutto a quale dei due casi appartiene la trave che si studia.

L'equilibrio fra i carichi noti e le reazioni incognite si traduce in un certo numero di equazioni che legano queste quantità.

Se il numero dei parametri incogniti che caratterizzano le reazioni è uguale al numero delle equazioni di equilibrio, allora il problema è POSSIBILE e DETERMINATO (cioè esiste un complesso di reazioni che fanno equilibrio ed è unico).

Se è maggiore, il problema è INDETERMINATO (esistono infiniti complessi di reazioni capaci di equilibrare le forze applicate).

Se è minore, il problema è generalmente IMPOSSIBILE (non esiste in generale un complesso di reazioni capaci di equilibrare le forze).

Escludendo il terzo caso, nel primo caso si dice che la struttura è **STATICAMENTE DETERMINATA** e nel secondo che è **STATICAMENTE INETERMINATA**.

Queste equazioni di equilibrio sono sei nello spazio:

$$\Sigma X = 0 \quad , \quad \Sigma Y = 0 \quad , \quad \Sigma Z = 0 \quad , \quad \Sigma M_x = 0 \quad , \quad \Sigma M_y = 0 \quad , \quad \Sigma M_z = 0 \quad ,$$

essendo  $X, Y, Z$  le componenti secondo tre assi di tutte le forze note e incognite ed  $M_x, M_y, M_z$  i loro momenti rispetto agli stessi assi.

Nel piano le equazioni si riducono a tre:

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma M = 0$$

essendo  $X$  e  $Y$  le componenti secondo due assi contenuti nel piano ed  $M$  i momenti rispetto a un punto del piano.

Considerando strutture costituite da un solo corpo o trave, si ha che:

- il problema è staticamente determinato se le reazioni dipendono da sei parametri incogniti in un sistema spaziale, o da tre in un sistema piano; la trave ha in questo caso vincoli appena sufficienti, ossia è isostatica;
- il problema è staticamente indeterminato se invece i vincoli sono di più; la trave ha in questo caso vincoli sovrabbondanti, ossia è iperstatica;
- il problema è impossibile se i vincoli, invece, sono di meno; la trave ha in questo caso vincoli insufficienti, ossia è labile.

### 1.2.3 Sistemi staticamente determinati ed indeterminati

Come si è detto nel paragrafo precedente, per capire se la trave è staticamente determinata o indeterminata basta contare i parametri delle reazioni, ossia i vincoli semplici, e confrontare tale numero con quello delle equazioni di equilibrio. Questo confronto non riesce però agevole nel caso di un sistema di più travi collegate fra loro; per cui di solito è preferibile utilizzare la constatazione fatta secondo cui *una trave isostatica è anche staticamente determinata, mentre una trave iperstatica è staticamente indeterminata*, essendo spesso più agevole esaminare se la struttura ha o no dei vincoli sovrabbondanti. E' poi possibile dimostrare che tale coincidenza, constatata per una trave unica, sussiste in generale per un sistema qualsiasi di travi.

Quindi, in generale, *un sistema isostatico è staticamente determinato, mentre un sistema iperstatico è staticamente indeterminato* e ha tante incognite in soprannumero (rispetto al numero delle equazioni di equilibrio) quanti sono i vincoli sovrabbondanti.

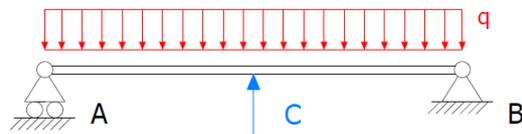
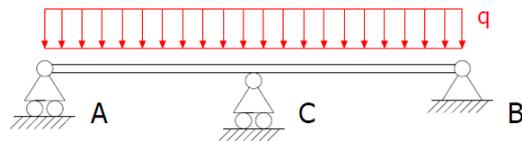
Infatti, dato un sistema isostatico, se si sopprime un vincolo qualunque sostituendolo con la reazione incognita, tutte le forze agenti sul sistema devono soddisfare la condizione di non provocare quel movimento che si è reso possibile. Questa condizione è soddisfatta soltanto se la reazione incognita ha un valore particolare. Dunque, *dato un sistema isostatico le condizioni di equilibrio rendono determinate le reazioni dei vincoli*.

Invece, dato un sistema iperstatico, se si sopprimono tutti i vincoli sovrabbondanti sostituendoli con le reazioni incognite, il sistema si riduce ad avere vincoli strettamente sufficienti, cioè non è ancora labile, ma isostatico. Perciò esso rimane in equilibrio qualunque siano le forze agenti, e quindi anche se alle reazioni incognite si assegnano dei valori arbitrari, cioè diversi da quelli delle reazioni vere. Dunque, *dato un sistema iperstatico le condizioni di equilibrio lasciano indeterminate le reazioni dei vincoli*

*sovrabbondanti, che devono invece venire determinate mediante condizioni d'altra natura.* Una volta determinate queste reazioni dei vincoli sovrabbondanti, si potranno poi calcolare anche quelle dei vincoli rimasti, mediante le condizioni di equilibrio, essendo ora il sistema staticamente determinato.

Se invece si assegnassero alle reazioni sovrabbondanti dei valori arbitrari diversi dai veri, varierebbero anche le reazioni dei vincoli rimasti, in modo da costituire insieme alle altre forze un sistema equilibrato ma estraneo a quello vero.

Ad esempio, se si rende isostatica la trave a tre appoggi in figura e si sostituisce l'appoggio in C con la reazione C, la trave resta in equilibrio anche se la C non ha il suo vero valore. Il valore della reazione C, che non si può



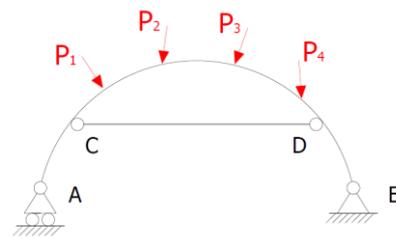
dunque dedurre dall'equilibrio, si ottiene osservando che il punto C della trave, che non si muoveva quando c'era l'appoggio, non deve muoversi anche quando questo è sostituito dalla reazione. Pertanto la reazione C ha quell'unico valore capace di annullare l'abbassamento  $\delta_c$  del punto C causato dal carico Q, cioè capace di produrre un innalzamento di C uguale all'abbassamento prodotto da Q. Se la reazione C fosse minore di tale valore, il punto C risulterebbe abbassato, mentre risulterebbe innalzato se la C fosse maggiore.

Inoltre, quando la struttura e i carichi presentano delle simmetrie che consentano di prevedere l'uguaglianza due a due di qualche parametro, il numero delle incognite in soprannumero è minore di quello dei vincoli sovrabbondanti.

### 1.2.4 Le indeterminazioni interne

Oltre che per i vincoli esterni che lo collegano al suolo, un sistema può essere iperstatico per eccesso di vincoli interni che ne collegano fra loro le varie parti o alcuni punti.

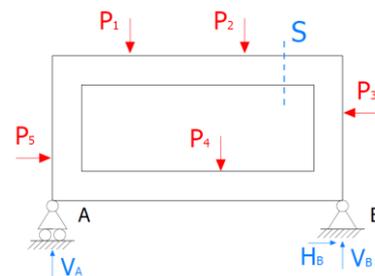
Ad esempio, l'arco in figura vincolato al suolo con un appoggio semplice ed una cerniera fissa, ha i vincoli esterni isostatici, mentre è iperstatico per il vincolo interno sovrabbondante costituito dal "tirante" CD.



Se i vincoli esterni sono strettamente sufficienti, la presenza di vincoli sovrabbondanti interni non ostacola la ricerca delle reazioni dei vincoli esterni, che si determinano utilizzando l'equilibrio fra i carichi e le reazioni esterne. L'impiego di considerazioni elastiche si rende poi necessario per determinare le reazioni dei vincoli interni, che generalmente occorre conoscere per calcolare le sollecitazioni delle varie parti del sistema.

### 1.2.5 I sistemi chiusi

Un sistema si dice *chiuso* quando una sezione S non separa le forze esterne in due parti (forze che precedono la sezione S e forze che la seguono); per cui, anche conoscendo le reazioni dei vincoli esterni, non si possono calcolare le sollecitazioni nella sezione.



Si conclude che un sistema chiuso è, in generale, iperstatico internamente e che per poter calcolare le sollecitazioni in una sezione è necessario renderlo aperto mediante uno o più tagli e determinare, per mezzo di considerazioni elastiche, le reazioni mutue attraverso i tagli stessi.

### 1.2.6 La statica dei sistemi rigidi e la statica dei sistemi elastici

Ogni corpo solido sotto l'azione di forze si deforma. Tuttavia, eccettuati alcuni corpi (alcuni materiali, come la gomma elastica) e supposto che le forze non raggiungano valori eccessivi, le deformazioni sono piccolissime rispetto alle dimensioni del corpo. Riesce perciò spontaneo studiare l'equilibrio del corpo, soggetto ai carichi e alle reazioni dei vincoli, facendo astrazione dalle deformazioni elastiche che esso subisce, cioè considerandolo rigido. Non sempre però è possibile semplificare la ricerca delle reazioni astrando dalle deformazioni che subiscono le strutture, per cui spesso si è costretti a tener conto delle deformazioni per rendere possibili o determinati problemi che altrimenti apparirebbero impossibili o indeterminati.

Si possono quindi incontrare dei casi nei quali la Statica dei sistemi rigidi basta per determinare le reazioni e dei casi che risultano determinati soltanto se si ricorre alla statica dei sistemi elastici.

Come si è visto, i primi si dicono *staticamente determinati* e corrispondono alle strutture con vincoli isostatici, cioè strettamente sufficienti; i secondi si dicono *staticamente indeterminati* e corrispondono alle strutture con vincoli iperstatici, cioè sovrabbondanti.

Per quanto detto, si può concludere che:

- i sistemi isostatici si studiano mediante la così detta Statica dei sistemi rigidi, che utilizza soltanto le condizioni di equilibrio del sistema considerato rigido, cioè senza tener conto della sua deformazione elastica;
- nei sistemi iperstatici, invece, le reazioni sarebbero indeterminate se si considerasse rigido il sistema, cioè esisterebbero infiniti complessi di reazioni capaci di fare equilibrio ai carichi; per renderle determinate è necessario tener conto della deformazione del sistema e delle condizioni di congruenza che essa deve soddisfare, ciò che costituisce la Statica dei sistemi elastici.

## 1.3 Il Principio dei Lavori Virtuali

### 1.3.1 Enunciato e sue applicazioni

Il mezzo d'indagine più generale e più acuto per lo studio della Statica dei sistemi rigidi e di quelli elastici è costituito dal Principio dei Lavori Virtuali, del quale si ricorda l'enunciato: *condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema materiale qualsiasi è che la somma dei lavori di tutte le forze agenti su di esso sia nulla per qualunque insieme di spostamenti virtuali piccolissimi e possibili.*

Questo principio esprime la seguente verità, mai smentita in nessun caso: se un corpo che può muoversi senza attrito è soggetto ad una forza che favorisce uno dei possibili movimenti, cioè che con tale movimento compie un lavoro positivo, quel movimento avviene senz'altro; lo stesso accade per un sistema di corpi soggetti a più forze, se per un possibile movimento del sistema le forze compiono dei lavori la cui somma algebrica è positiva; se invece per qualunque possibile movimento piccolissimo del sistema le forze agenti compiono dei lavori aventi la somma algebrica nulla, il sistema è in equilibrio; quindi se è in quiete rimane in quiete.

Il principio dei lavori virtuali gode della massima generalità, non essendo soggetto a restrizioni; quindi è applicabile a corpi perfettamente o imperfettamente elastici, e vale anche in presenza di cedimenti dei vincoli, di variazioni termiche, di difetti di montaggio e di tensioni iniziali dovute a qualsiasi causa.

Nello studio dei sistemi elastici presenta il notevole vantaggio di evitare l'analisi geometrica delle deformazioni, talvolta assai complessa, nonché quello dell'uniformità dei procedimenti.

Oltre a ciò, esso si presta per dimostrare rapidamente alcuni teoremi fondamentali sul lavoro di deformazione.

Per contro, quando si usa questo principio per calcolare le reazioni iperstatiche, la condizione che le rende determinate non appare forse così chiara e spontanea come uguagliando gli spostamenti, perché la condizione stessa interviene in una forma meno evidente, sebbene più generale. Inoltre non sempre rappresenta il mezzo più rapido, poiché molti problemi si risolvono più presto con metodi speciali. Tuttavia ciò è largamente compensato dai vantaggi suddetti.

Le più importanti applicazioni di questo principio nella Scienza delle costruzioni sono le seguenti:

- nel caso di sistemi che si possono considerare rigidi (sistemi isostatici), esso serve per trovare le reazioni dei vincoli esterni o per studiare le caratteristiche della sollecitazione in una sezione generica provocate da carichi fissi o mobili;
- nel caso di sistemi elastici, esso consente di determinare le reazioni dei vincoli sovrabbondanti, oppure di calcolare gli spostamenti elastici di punti del sistema.

Nel primo caso basta utilizzare la condizione che le reazioni facciano equilibrio alle forze applicate; per cui, se si pensa di imprimere al sistema supposto svincolato un opportuno movimento di corpo rigido, deve essere nulla la somma algebrica dei lavori virtuali che le forze agenti compiono per effetto degli spostamenti virtuali dei loro punti d'applicazione. Queste forze sono costituite dai carichi e dalle reazioni. Per tale movimento virtuale del sistema le tensioni interne, che pur esistono, non compiono alcun lavoro virtuale, perché non si ha deformazione elastica del sistema stesso.

Nel secondo caso, ovvero quando si cercano le reazioni dei vincoli iperstatici, oppure quando si studiano le deformazioni elastiche di un sistema sia isostatico che iperstatico, è necessario tener conto della deformazione elastica del sistema; perciò, l'insieme degli spostamenti virtuali deve essere tale da mettere in gioco questa deformazione. Quindi in questo caso anche le tensioni

interne compiono dei lavori virtuali, che devono figurare nella somma da eguagliare a zero. Il sistema delle forze in equilibrio è dunque costituito dai carichi, dalle reazioni dei vincoli e dalle tensioni interne e il lavoro virtuale è la somma di quello esterno dei carichi e delle reazioni e di quello interno delle tensioni che fanno loro equilibrio.

*OSSERVAZIONE:* Nel caso dei sistemi rigidi, affinché gli spostamenti siano possibili basta che siano compatibili coi vincoli esterni non soppressi. Invece nel caso di sistemi elastici deve essere possibile l'insieme degli spostamenti dei punti esterni e delle deformazioni interne. Ad esempio, nel caso di una travatura reticolare si possono assumere ad arbitrio gli spostamenti  $\delta$  dei vari nodi, ciò che determina anche le variazioni  $\Delta s$  delle lunghezze  $s$  delle aste; quindi le  $\Delta s$  non si possono assumere arbitrariamente, ma devono avere i valori conseguenti ai  $\delta$  assunti. Un insieme siffatto di spostamenti e di deformazioni compatibile con la compagine del sistema materiale e coi vincoli esterni si dice *congruente*.

### 1.3.1.1 L'equazione generale dei lavori virtuali

In generale, indicando con  $P_a$  le forze esterne (comprendendovi per ora anche le reazioni dei vincoli) e con  $\delta_b$  gli spostamenti dei loro punti di applicazione valutati, ossia proiettati, nelle direzioni e secondo i versi delle forze stesse, con  $Z_a$  gli sforzi interni e con  $\zeta_b$  le corrispondenti deformazioni, i lavori virtuali interno ed esterno sono espressi da:

$$L_e = \sum P_a \delta_b \quad , \quad L_i = - \sum Z_a \zeta_b \quad .$$

Perciò l'equazione generale dei lavori virtuali risulta:

$$\sum P_a \delta_b - \sum Z_a \zeta_b = 0 \quad , \quad \text{ossia} \quad \sum P_a \delta_b = \sum Z_a \zeta_b \quad .$$

Il segno di ciascun termine delle sommatorie dipende dalla concordanza o dalla discordanza dei versi dei due fattori  $P_a$  e  $\delta_b$  ,  $Z_a$  e  $\zeta_b$  .

Questa relazione ci dice che il lavoro virtuale esterno e quello interno devono essere uguali e di segno contrario.

### *1.3.2 I due modi diversi di applicare il principio*

Per eliminare i dubbi che può far sorgere il modo col quale applicheremo il principio dei lavori virtuali nello studio dei sistemi elastici, è opportuno chiarire la portata del principio stesso, che si presta a due diverse applicazioni perfettamente simmetriche.

Esso stabilisce una dipendenza fra tre circostanze distinte, e cioè:

- 1) l'equilibrio del sistema di forze;
- 2) la congruenza e compatibilità degli spostamenti;
- 3) l'annullarsi della somma dei lavori virtuali.

Quando due di tali circostanze sono verificate, lo è di conseguenza anche la rimanente.

Quando sono verificate le ultime due circostanze, lo è anche la prima (cioè, se gli spostamenti sono congruenti, l'annullarsi del lavoro è sufficiente per assicurarci che le forze sono in equilibrio).

Quando lo sono la prima e la terza, lo è anche la seconda (cioè, se le forze sono equilibrate, l'annullarsi del lavoro è sufficiente per assicurarsi che gli spostamenti sono congruenti).

Quando lo sono le prime due, lo è anche l'ultima (cioè la somma dei lavori virtuali si annulla necessariamente).

Di solito, nello studio dei sistemi rigidi si applica il principio nel primo modo: si sceglie ad arbitrio un insieme di spostamenti virtuali compatibile con i vincoli e si uguaglia a zero la somma dei lavori virtuali delle forze effettive agenti; ciò basta per assicurarsi che le forze che figurano in tale equazione sono in equilibrio; quindi se una di esse è incognita (ad esempio una reazione) si ricava risolvendo l'equazione.

Invece, nello studio dei sistemi elastici il principio si applica di solito nel secondo modo: si sceglie ad arbitrio un sistema di forze fittizie equilibrate e si uguaglia a zero la somma dei lavori virtuali per l'insieme delle deformazioni e degli spostamenti elastici effettivi; ciò basta per assicurarsi che tale insieme è congruente, come di fatto deve essere. Quindi se l'equazione contiene uno spostamento incognito, si ricava questo spostamento; se contiene una reazione iperstatica, che deve soddisfare la congruenza, cioè il rispetto dei vincoli, si ricava questa reazione.

Tuttavia è preferibile procedere nel primo modo anche studiando i sistemi elastici in quei casi in cui, pure avendosi parecchie reazioni sovrabbondanti, è possibile esprimere le deformazioni mediante un numero minore di spostamenti.

### 1.3.3 Il principio dei lavori virtuali applicato ai complessi piani di travi

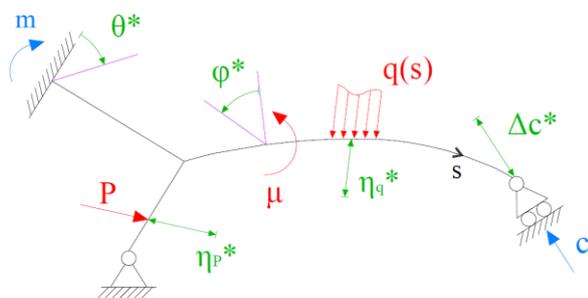
Nei problemi piani riguardanti strutture formate da travi, le caratteristiche della sollecitazione diverse da zero sono al più il momento flettente  $M_x$ , la forza di taglio  $T_y$ , la forza normale  $N_z$ , che per brevità verranno denominati d'ora in poi  $M$ ,  $T$ ,  $N$ .

Nel generico punto di una sezione trasversale saranno al più presenti le seguenti componenti di tensione:  $\sigma_z$  dovuta a  $M$  ed  $N$ ;  $\tau_z$  dovuta a  $T$ .

Si immagini adesso una qualsiasi struttura piana formata da travi e soggetta ad un generico sistema di forze e coppie, concentrate e distribuite, nonché a cedimenti anelastici ed a variazioni di temperatura.

Le varie travi vengono ridotte all'asse sul quale si suppongono applicate le diverse azioni.

Si indicano con  $\eta_q^*$ ,  $\eta_p^*$ ,  $\Delta c^*$  gli spostamenti virtuali dei punti di applicazione delle  $q(s)$ , delle  $P$  e delle  $c$  in direzione delle rispettive forze e con  $\theta^*$ ,  $\varphi^*$  le



rotazioni virtuali delle sezioni in cui sono applicate rispettivamente la generica coppia di incastro  $m$  e la generica coppia esterna  $\mu$ .

Il primo membro  $L_e$  della equazione dei lavori virtuali diviene:

$$L_e = \int q \eta_q^* ds + \sum P \eta_p^* + \sum \mu \varphi^* + \sum c \Delta c^* + \sum m \theta^*$$

dove si conviene che gli integrali siano estesi a tutti i segmenti  $s$  lungo i quali sono applicate le forze distribuite  $q(s)$  e che le sommatorie siano estese a tutte le forze e coppie concentrate, attive o reattive. I segni si intendono positivi se azioni e spostamenti (generalizzati) sono concordi.

L'espressione del lavoro virtuale interno  $L_i$  può ricavarsi in modo spedito come il lavoro che le caratteristiche della sollecitazione  $N$ ,  $T$ ,  $M$ , relative al sistema di forze-tensioni, compiono per effetto degli spostamenti e delle rotazioni delle sezioni (nel sistema virtuale degli spostamenti-deformazioni) descritte dalle caratteristiche della deformazione:

$$\varepsilon^* = \frac{N^*}{EA} + \alpha t_o^* \quad ; \quad \kappa^* = \frac{M^*}{EJ} + \frac{\alpha \Delta t^*}{h} \quad ; \quad \gamma^* = \chi \frac{T^*}{GA} .$$

Si ottiene così che:

$$\begin{aligned} L_i &= \int N \varepsilon^* ds + \int M \kappa^* ds + \int T \gamma^* ds = \\ &= \int \frac{N N^*}{EA} ds + \int \frac{M M^*}{EJ} ds + \int \chi \frac{T T^*}{GA} ds + \int \alpha N t_o^* ds + \int \frac{\alpha M \Delta t^*}{h} ds . \end{aligned}$$

L'equazione dei lavori virtuali ( $L_e=L_i$ ) applicata alle travi assume quindi la forma seguente:

$$\begin{aligned} \int q \eta_q^* ds + \sum P \eta_p^* + \sum \mu \varphi^* + \sum c \Delta c^* + \sum m \theta^* = \\ = \int \frac{N N^*}{EA} ds + \int \frac{M M^*}{EJ} ds + \int \chi \frac{T T^*}{GA} ds + \int \alpha N t_o^* ds + \int \frac{\alpha M \Delta t^*}{h} ds . \end{aligned}$$

Se si sceglie come sistema di forze-tensioni un sistema equilibrato, corrispondente ad una opportuna condizione di carico, e come sistema di spostamenti-deformazioni quello reale, corrispondente alla effettiva condizione e di carico, l'equazione dei lavori virtuali appena trovata consente di calcolare le rotazioni e gli spostamenti delle sezioni nei sistemi piani di travi.

In questo caso si scriveranno i termini relativi al sistema di forze-tensioni con il pedice  $m$  e si toglierà l'asterisco a quelli relativi al sistema degli spostamenti-deformazioni:

$$\begin{aligned} \int q_m \eta_q ds + \sum P_m \eta_p + \sum \mu_m \varphi + \sum c_m \Delta c + \sum m_m \theta = \\ = \int \frac{N_m N}{EA} ds + \int \frac{M_m M}{EJ} ds + \int \chi \frac{T_m T}{GA} ds + \int \alpha N_m t_o ds + \int \frac{\alpha M_m \Delta t}{h} ds . \end{aligned}$$

### 1.3.4 Il calcolo degli spostamenti nelle travi mediante l'equazione dei lavori virtuali

La determinazione degli spostamenti dei punti della linea d'asse e delle rotazioni delle sezioni di travi appartenenti ad un complesso strutturale è necessaria anzitutto per verificare se sono soddisfatti certi requisiti di funzionalità della costruzione dipendenti dalla sua deformabilità (ad esempio, una torre per le telecomunicazioni può risultare eccessivamente deformabile mentre un sistema di ammortizzamento degli urti può esserlo troppo poco). Inoltre, il calcolo delle deformazioni è necessario per la risoluzione di strutture staticamente indeterminate.

L'equazione dei lavori virtuali consente di determinare in modo agevole lo spostamento o la rotazione di una sezione della struttura che stiamo esaminando attraverso il metodo del cosiddetto *carico esploratore*. Esso consiste nell'applicare una forza unitaria (o una coppia unitaria) nella sezione di cui si vuole conoscere lo spostamento (o la rotazione) nella direzione dello spostamento incognito (o della rotazione incognita). Si assume quindi come sistema equilibrato di forze-tensioni quello corrispondente al carico esploratore e come sistema di spostamenti-deformazioni quello effettivo.

$$\text{Si ottiene così: } \left. \begin{array}{l} 1 \\ \eta \\ 1 \\ \varphi \end{array} \right\} = - \sum c_m \Delta c - \sum m_m \theta + \int \frac{N_m N}{EA} ds + \int \frac{M_m M}{EJ} ds + \int \chi \frac{T_m T}{GA} ds + \int \alpha N_m t_o ds + \int \frac{\alpha M_m \Delta t}{h} ds$$

I termini  $\Delta c$  e  $\theta$  sono noti perché rappresentano i cedimenti anelastici dei vincoli.

Le caratteristiche  $N$ ,  $T$ ,  $M$  sono quelle effettive perché relative alle deformazioni reali.

Le caratteristiche  $N_m$ ,  $T_m$ ,  $M_m$  e le reazioni  $c_m$  e  $m_m$  sono prodotte dal carico esploratore.

Se la struttura è isostatica le  $N_m$ ,  $T_m$ ,  $M_m$  (e le reazioni  $c_m$  e  $m_m$ ) si determinano senza difficoltà mentre le  $N$ ,  $T$ ,  $M$  sono note.

Se la struttura è iperstatica le  $N$ ,  $T$ ,  $M$  sono generalmente incognite ma le  $N_m$ ,  $T_m$ ,  $M_m$  (e le reazioni  $c_m$  e  $m_m$ ) possono essere calcolate anche su un sistema diverso da quello effettivo ottenuto da questo, ad esempio, introducendo sconnessioni in numero tale da rendere isostatico o addirittura labile lo schema di partenza, con l'unica condizione che l'equilibrio sia possibile e determinato. Per calcolare lo spostamento relativo (o rotazione relativa) tra due punti (o tra due sezioni), basterà applicare in questi punti due forze esploratrici opposte dirette secondo la congiungente i due punti (oppure due coppie esploratrici opposte applicate nelle due sezioni).

---

## 2 LE STRUTTURE A MOLTE IPERSTATICHE RISOLTE COL METODO DELLE FORZE

### 2.1 Le strutture a molte iperstatiche

E' stato detto più volte che il calcolo delle reazioni vincolari e delle sollecitazioni non può essere svolto, nelle strutture staticamente indeterminate, con le sole equazioni della Statica e che per sciogliere questa indeterminazione è necessario porre delle condizioni sulle deformazioni.

Nelle moderne costruzioni di acciaio o di calcestruzzo sono frequenti le strutture complesse, aventi numerosi vincoli sovrabbondanti sia esterni sia interni. Qualunque sia il numero delle incognite sovrabbondanti, è possibile studiare ogni struttura iperstatica.

Lo studio delle strutture a molte iperstatiche costituisce spesso una seria difficoltà per il progettista, difficoltà che può essere notevolmente ridotta con la scelta del metodo più conveniente per risolvere ciascun problema.

I metodi generali utilizzati per lo studio di strutture a molte iperstatiche sono il Metodo delle Forze ed il Metodo degli Spostamenti, tra i quali esiste una perfetta corrispondenza. Con il Metodo delle Forze si assumono come incognite le reazioni (forze e momenti) dei vincoli sovrabbondanti (sia esterni sia interni), che sono staticamente indeterminate; mentre col Metodo delle Deformazioni si assumono come incognite gli spostamenti e le rotazioni dei nodi della struttura, che sono indeterminate geometricamente).

Esistono diverse vie, più o meno convenienti, per risolvere i sistemi di equazioni lineari che s'incontrano in questi calcoli.

Esistono, inoltre, dei metodi particolari che consentono una riduzione considerevole del lavoro, sia abbreviando l'impostazione delle equazioni, che di solito sono più semplici ed immediate, sia diminuendo il numero delle incognite, e quindi anche il lavoro materiale che richiede la risoluzione di un sistema di numerose equazioni.

I vari metodi si distinguono in esatti ed in approssimati; i metodi esatti studiano la struttura con tutti i suoi vincoli iperstatici, mentre i metodi approssimati sono quelli che trascurano una parte di vincoli, o che studiano una parte della struttura isolandola dalla parte rimanente, o che sono basati su altre ipotesi semplificative. I metodi approssimati sono giustificati dal fatto che in pratica esistono numerose cause che rendono incerto il comportamento reale delle strutture complesse; per cui in certi casi è inutile eseguire un lungo e faticoso lavoro, per ottenere risultati che hanno un'esattezza soltanto apparente; tanto più che spesso questi metodi possono dare approssimazioni soddisfacenti.

Si hanno poi metodi di successiva approssimazione, che consentono di migliorare finché si vuole l'approssimazione stessa e di raggiungere al limite la *soluzione esatta*; per cui anche questi si possono considerare come esatti. Per soluzione esatta si intende quella che tiene esattamente conto di tutti i vincoli sovrabbondanti, ma trascura le deformazioni dovute a  $N$  ed a  $T$ ; quindi esatta nel senso tecnico della Scienza delle costruzioni.

*OSSERVAZIONE*: solitamente è lecito trascurare la deformazione dovuta ad  $N$  e  $T$  e considerare solo quella dovuta ad  $M$ ; nel caso di un arco però, ad esempio, si tiene conto del termine contenente  $N$  soltanto se si prevede che la curva delle pressioni si allontani poco dall'asse, ma si trascura ancora il termine contenente  $T$ ; nel caso di strutture reticolari si tiene conto della deformazione delle aste provocata da  $N$ , perché  $N$  è la sollecitazione prevalente.

Quando il progettista abbia ben compresa l'essenza dei vari metodi e se ne sia reso padrone, sarà in grado di applicare spontaneamente a ciascun tipo di struttura il metodo di calcolo più confacente.

## 2.2 Il metodo delle forze

Il metodo delle forze, come si è già detto, è un metodo utilizzato per l'analisi di strutture iperstatiche, ovvero staticamente indeterminate. Con il metodo delle forze si assumono come incognite le reazioni (forze e momenti, chiamate generalmente *incognite iperstatiche*  $X_i$ ) dei vincoli sovrabbondanti (sia esterni sia interni), che sono staticamente indeterminate, e le equazioni determinatrici delle  $X_i$  sono equazioni di congruenza.

### 2.2.1 Le basi concettuali su cui si fonda il Metodo delle Forze

Si può pensare di ridurre lo schema iperstatico originario ad uno schema isostatico, detto “principale”, ottenuto attribuendo alla struttura, mediante opportune sconnessioni, tanti gradi di libertà quanti sono i gradi di vincolo sovrabbondanti, che nel piano sono quelli superiori a tre (esclusa la presenza di vincoli inefficaci).

Le forze esterne, le variazioni termiche ed i cedimenti vincolari indurranno in generale delle deformazioni che risultano incompatibili con i vincoli aboliti (nei punti dove sono stati soppressi i vincoli si avranno generalmente spostamenti e rotazioni diversi da quelli reali).

Per rendere la deformazione congruente con i vincoli dello schema originario occorre imporre l'annullarsi di quelle componenti di spostamento che si manifestano sulle facce delle sconnessioni e che sono rivolte nella direzione dei movimenti consentiti dalle sconnessioni stesse.

Ad esempio, se si è eliminato un appoggio semplice, questo compirà nel sistema principale, per effetto delle azioni esterne e dei cedimenti anelastici, uno spostamento ortogonale al piano di scorrimento che in realtà è totalmente impedito. La condizione di congruenza consiste quindi nell'imporre nullo tale spostamento.

D'altra parte, per motivi di equilibrio, sulle facce delle sconessioni è necessario applicare quelle azioni mutue che le sconessioni hanno eliminato (due coppie opposte sulle facce di una cerniera, etc.)

Allora saranno queste azioni mutue, incognite, a produrre nelle sezioni sconnesse deformazioni tali che, sommate a quelle indotte dalle forze esterne, rendono la deformazione risultante identica a quella effettivamente presente nel sistema reale, vale a dire una deformazione congruente con i vincoli interni ed esterni.

### 2.3 Le equazioni di congruenza di Müller-Breslau

Se si prende in esame la sezione “i” nella quale è stata operata una sconnessione di ordine uno, affinché sia ripristinato l’equilibrio si deve applicare su entrambe le facce della sconnessione l’azione mutua incognita  $X_i$  che essa ha eliminato. Se invece, ad esempio, la sconnessione è completa, cioè di ordine tre, occorre applicare su entrambe le facce tutte e tre le caratteristiche della sollecitazione.

Detto  $\eta_i$  lo spostamento relativo effettivo che le facce della sconnessione compiono in direzione di  $X_i$ , esso è dato da:

$$\eta_i = \eta_{i0} + \eta_{ia} + \sum_{k=1}^n \eta_{ik} X_k$$

dove  $\eta_{i0}$  è lo spostamento relativo tra le facce della sconnessione prodotto dai carichi esterni,  $\eta_{ia}$  è quello dovuto alle varie forme di autotensione ed  $\eta_{ik}$  è quello prodotto dalla generica azione incognita  $X_k$ .

Ripetendo lo stesso ragionamento per tutte le  $n$  sconnessioni, si ottiene, per esteso, il seguente sistema di equazioni:

$$\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{1a} + \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 + \dots + \eta_{1n} X_n = 0$$

$$\eta_2 = \eta_{20} + \eta_{2a} + \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 + \dots + \eta_{2n} X_n = 0$$

:

:

$$\eta_n = \eta_{n0} + \eta_{na} + \eta_{n1} X_1 + \eta_{n2} X_2 + \dots + \eta_{nn} X_n = 0$$

Queste equazioni traducono il principio di sovrapposizione degli effetti riguardante i movimenti che ciascuna condizione di carico (forze esterne, incognite  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , distorsioni geometriche) induce in corrispondenza delle sezioni liberate dai vincoli iperstatici mediante sconnessioni, nella direzione dei movimenti consentiti dalle sconnessioni stesse.

*OSSERVAZIONE:* Il Teorema di Maxwell assicura che lo spostamento relativo  $\eta_{ik}$  che le facce della sconnessione “i” compiono per effetto della incognita  $X_k=1$  applicata nella sconnessione “k” è uguale allo spostamento relativo  $\eta_{ki}$  che le facce della sconnessione “k” compiono per effetto della incognita  $X_i=1$  applicata nella sconnessione “i” :  $\eta_{ik} = \eta_{ki}$  . Pertanto la matrice dei coefficienti  $\eta_{ik}$  del sistema delle equazioni di Müller-Breslau è simmetrica.

*OSSERVAZIONE:* Gli spostamenti relativi effettivi  $\eta_i$  possono essere eguali o diversi da zero. Sono uguali a zero quando la sconnessione è operata in una sezione, interna o vincolata al suolo, priva di distorsioni anelastiche. Sono viceversa diversi da zero quando la sconnessione è operata in una sezione sede di distorsioni o cedimenti anelastici.

## 2.4 Calcolo degli $\eta_{i0}$ , $\eta_{ia}$ , $\eta_{ik}$ mediante l'equazione dei lavori virtuali

Si prenda in esame una generica travatura staticamente indeterminata della quale si vuole conoscere il regime delle sollecitazioni.

E' necessario calcolare lo spostamento (o la rotazione) relativo tra le facce di una sconnessione sulle quali è applicata la generica incognita iperstatica  $X_i$  e la sua antagonista.

Utilizzando l'equazione dei lavori virtuali, applicheremo un carico esploratore unitario su ciascuna faccia della sconnessione considerata, nella direzione dello spostamento relativo cercato.

$$\text{Si ottiene che: } 1^* \eta_i = - \sum c_i \Delta c - \sum m_i \theta + \int \frac{N_i N}{EA} ds + \int \frac{M_i M}{EJ} ds + \int \chi \frac{T_i T}{GA} ds + \\ + \int \alpha N_i t_o ds + \int \frac{\alpha M_i \Delta t}{h} ds$$

In questa equazione il sistema equilibrato di forze-tensioni è quello prodotto dalla applicazione del carico esploratore  $X_i=1$  sul sistema principale che è staticamente determinato (reazioni  $c_i$  ed  $m_i$ , caratteristiche della sollecitazione  $N_i$ ,  $T_i$ ,  $M_i$ ).

Il sistema congruente degli spostamenti-deformazioni è quello effettivo, in parte noto (cedimenti anelastici  $\Delta c$ ,  $\theta$ , variazioni termiche  $t_o$  e  $\Delta t$ ) ed in parte incognito perché prodotto dalle caratteristiche della sollecitazione effettive  $N$ ,  $T$ ,  $M$  che non si conoscono ancora.

Le caratteristiche della sollecitazione  $N$ ,  $T$ ,  $M$  effettive sono provocate dai carichi esterni e dalle incognite iperstatiche  $X_k$ .

Perciò, dette  $N_0$ ,  $T_0$ ,  $M_0$  le caratteristiche agenti nel sistema principale per effetto dei carichi esterni ed  $N_k$ ,  $T_k$ ,  $M_k$  quelle agenti per effetto della generica  $X_k = 1$ , si può dire che:

$$N = N_0 + \sum_{k=1}^n N_k X_k \quad ; \quad T = T_0 + \sum_{k=1}^n T_k X_k \quad ; \quad M = M_0 + \sum_{k=1}^n M_k X_k \quad .$$

Sostituendo le precedenti nella equazione dei Lavori Virtuali, essa diventa:

$$1^* \eta_i = - \sum c_i \Delta c - \sum m_i \theta + \int \frac{N_i N_0}{EA} ds + \int \frac{M_i M_0}{EJ} ds + \int \chi \frac{T_i T_0}{GA} ds + \int \alpha N_i t_0 ds + \\ + \int \frac{\alpha M_i \Delta t}{h} ds + \sum_{k=1}^n X_k \left[ \int \frac{N_i N_k}{EA} ds + \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds + \int \chi \frac{T_i T_k}{GA} ds \right]$$

Si può introdurre a questo punto la seguente simbologia:

$$1^* \eta_{ia} = \eta_{ic} + \eta_{it} = - \sum c_i \Delta c - \sum m_i \theta + \int \alpha N_i t_0 ds + \int \frac{\alpha M_i \Delta t}{h} ds$$

$$1^* \eta_{i0} = \int \frac{N_i N_0}{EA} ds + \int \frac{M_i M_0}{EJ} ds + \int \chi \frac{T_i T_0}{GA} ds$$

$$1^* \eta_{ik} = \int \frac{N_i N_k}{EA} ds + \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds + \int \chi \frac{T_i T_k}{GA} ds$$

conferendo alla i-esima equazione dei Lavori Virtuali la stessa forma della i-esima equazione di Müller-Breslau :

$$\eta_i = \eta_{ia} + \eta_{i0} + \sum_{k=1}^n \eta_{ik} X_k .$$

#### 2.4.1 Vincoli cedevoli elasticamente

Nella schematizzazione di una struttura è talvolta necessario introdurre dei vincoli elastici in modo concentrato, rappresentati di solito mediante molle estensionali o rotazionali applicate in alcune sezioni.

Indicando con  $R$  la sollecitazione effettivamente presente in un vincolo elastico e con  $R_i$  quella prodotta in esso dalla generica incognita iperstatica  $X_i$ , il contributo allo spostamento (o alla rotazione) relativo delle facce della sconnessione sulle quali è applicata la  $X_i$ , dovuto alla cedevolezza dei vincoli elastici, è dato da:

$$\eta_{ie} = \sum_v R R_i \varepsilon \quad \left( \varepsilon = \frac{1}{k} \right)$$

nel quale la sommatoria è estesa a tutti i vincoli elastici.

Poiché, in generale, è:

$$R = R_0 + \sum_{k=1}^n R_k X_k ,$$

sostituendo si ottiene:

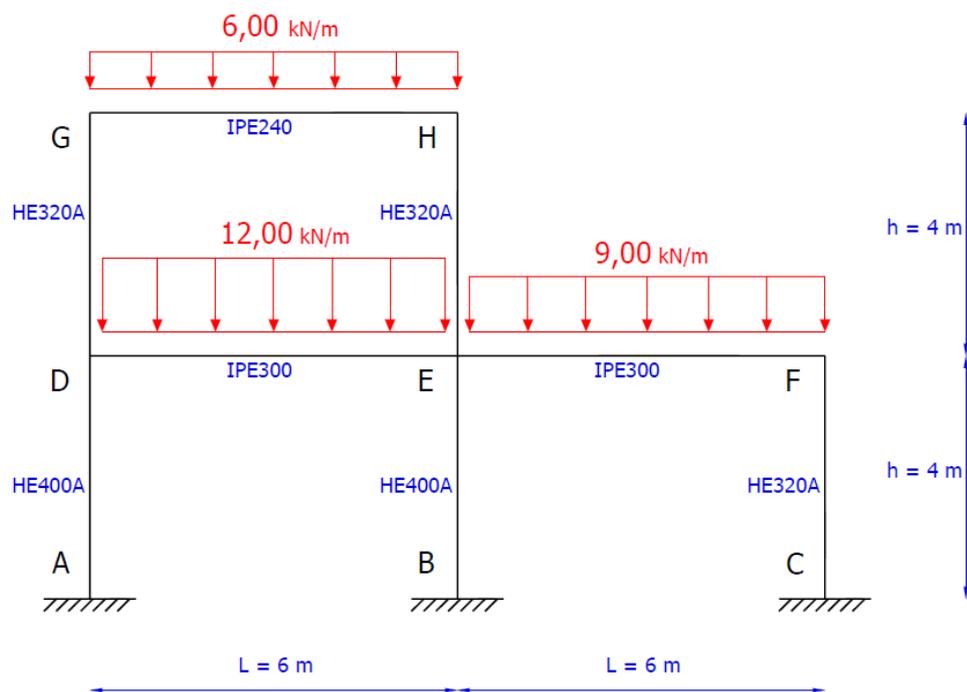
$$\eta_{ie} = \sum_v R_0 R_i \varepsilon + \sum_{k=1}^n X_k \sum_v R_i R_k \varepsilon .$$

Le quantità  $R_0 R_i$  saranno positive o negative a seconda che le  $R_0$  e le  $R_i$  siano concordi o discordi. Il segno corretto scaturisce in modo automatico se si adottano le stesse convenzioni nel sistema "0" e nei vari sistemi "1".

### 3 APPLICAZIONE AL CASO DI UN TELAIO PIANO 9 VOLTE IPERSTATICO

#### 3.1 Dati del problema

In questo lavoro di tesi è stato studiato come esempio applicativo il caso di un telaio piano, 9 volte iperstatico, rappresentato nella figura seguente:



Tale telaio è costituito da travi d'acciaio tutte incastrate fra loro. Considerato come un unico corpo rigido, dunque, il telaio ha tre gradi di libertà e basterebbe, ad esempio, soltanto l'incastro in A per garantire l'equilibrio (ovvero per avere un sistema isostatico, almeno esternamente). Invece, la presenza di tre incastri (in A, B e C) determina sei vincoli esterni sovrabbondanti. Quindi il sistema sarebbe sei volte iperstatico. In realtà, però, la struttura presenta anche una maglia chiusa (porzione DEGH) che la rende tre volte iperstatica internamente. In definitiva, essendo sei volte iperstatico esternamente e tre volte iperstatico internamente, si può concludere che il sistema è nove volte iperstatico.

Le forze agenti sulla struttura sono soltanto dei carichi verticali uniformemente distribuiti, agenti sulle travi orizzontali. Non sono presenti quindi azioni di tipo termico, cedimenti vincolari, ma soltanto tali carichi distribuiti. Nel calcolo, non viene tenuto conto del peso proprio della struttura.

Si assumono:

$$p_1 = 6,00 \frac{kN}{m} \quad \text{agente sulla trave orizzontale GH}$$

$$p_2 = 12,00 \frac{kN}{m} \quad \text{agente sulla trave orizzontale DE}$$

$$p_3 = 6,00 \frac{kN}{m} \quad \text{agente sulla trave orizzontale EF .}$$

In genere, la deformazione dovuta al taglio T è molto minore delle altre.

Inoltre, in presenza di strutture costituite da elementi dotati sia di rigidità flessionale finita sia di rigidità estensionale finita, la deformazione estensionale dovuta ad N è solitamente trascurabile rispetto alla deformazione flessionale dovuta ad M.

Quindi, solitamente è lecito trascurare le deformazioni dovute ad N e T.

Per cui possiamo assumere che negli integrali

$$\eta_{i0} = \int \frac{N_i N_0}{EA} ds + \int \frac{M_i M_0}{EJ} ds + \int \chi \frac{T_i T_0}{GA} ds, \quad \eta_{ik} = \int \frac{N_i N_k}{EA} ds + \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds + \int \chi \frac{T_i T_k}{GA} ds,$$

i termini  $\chi \frac{T_i T_0}{GA}$ ,  $\chi \frac{T_i T_k}{GA}$ ,  $\frac{N_i N_0}{EA}$ ,  $\frac{N_i N_k}{EA}$  siano trascurabili rispetto agli altri.

Questo significa che nel calcolo degli  $\eta_{i0}$  e  $\eta_{ik}$  entrerà in gioco soltanto la deformazione flessionale, e quindi entreranno in gioco soltanto  $M_0$ ,  $M_i$ ,  $M_k$ ,  $E$ ,  $J$ .

Per questo motivo ci si limiterà nel seguito a riportare in una tabella (utile poi per il calcolo degli  $\eta_{i0}$  e  $\eta_{ik}$ ) le espressioni che determinano l'andamento del momento flettente sui vari tratti di trave nei vari sistemi, e non dello sforzo normale  $N$  e dello sforzo di taglio  $T$ .

Le travi d'acciaio di cui è costituito il telaio in esame sono di quattro tipi:

HE320A, HE400A, IPE240, IPE300.

Le caratteristiche di ognuna di queste sono le seguenti:

Trave HE320A - Proprietà della sezione													
Profilo	G kg/m	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>el,y</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>pl,y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	A <sub>vz</sub> cm <sup>2</sup>	I <sub>z</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>pl,z</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> cm	S <sub>s</sub> cm	I <sub>T</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>w</sub> cm <sup>6</sup> × 10 <sup>-3</sup>
HE 320 A	97,6	22930	1479	1628	13,58	41,13	6985	465,7	709,7	7,49	71,63	108	1512

Trave HE400A - Proprietà della sezione													
Profilo	G kg/m	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>el,y</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>pl,y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	A <sub>vz</sub> cm <sup>2</sup>	I <sub>z</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>pl,z</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> cm	S <sub>s</sub> cm	I <sub>T</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>w</sub> cm <sup>6</sup> × 10 <sup>-3</sup>
HE 400 A	125	45070	2311	2562	16,84	57,33	8564	570,9	872,9	7,34	80,63	189	2942

Trave IPE240 - Proprietà della sezione													
Profilo	G kg/m	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>el,y</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>pl,y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	A <sub>vz</sub> cm <sup>2</sup>	I <sub>z</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>pl,z</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> cm	S <sub>s</sub> cm	I <sub>T</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>w</sub> cm <sup>6</sup> x10 <sup>-3</sup>
IPE 240	30,7	3892	324,3	366,6	9,97	19,14	283,6	47,27	73,92	2,69	43,37	12,88	37,39

Trave IPE300 - Proprietà della sezione													
Profilo	G kg/m	I <sub>y</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>el,y</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>pl,y</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>y</sub> cm	A <sub>vz</sub> cm <sup>2</sup>	I <sub>z</sub> cm <sup>4</sup>	W <sub>z</sub> cm <sup>3</sup>	W <sub>pl,z</sub> cm <sup>3</sup>	i <sub>z</sub> cm	S <sub>s</sub> cm	I <sub>T</sub> cm <sup>4</sup>	I <sub>w</sub> cm <sup>6</sup> x10 <sup>-3</sup>
IPE 300	42,2	8356	557,1	628,4	12,46	25,68	603,8	80,50	125,2	3,35	46,07	20,12	125,9

Di tutte le caratteristiche di tali profili, per quanto detto nelle pagine precedenti, nel caso in esame saranno utili soltanto i momenti d'inerzia  $I_y$ , che sono diversi tra loro e che verranno indicati, per distinguerli, nel seguente modo:

HE320A :  $J_1 = 22930 \text{ cm}^4$

HE400A :  $J_2 = 45070 \text{ cm}^4$

IPE240 :  $J_3 = 3892 \text{ cm}^4$

IPE300 :  $J_4 = 8356 \text{ cm}^4$

Inoltre, l'acciaio di cui è costituita la struttura ha un *Modulo di Young* o *Modulo di Elasticità Lineare* pari a:

$E = 210000 \text{ MPa}$

### 3.2 Descrizione del procedimento di risoluzione

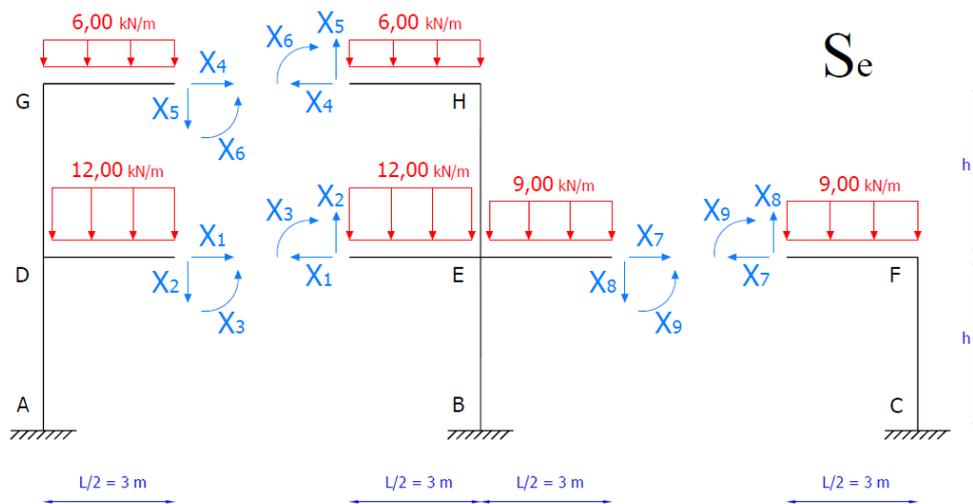
E' stato utilizzato il Metodo delle Forze, di cui sono già stati accennati nei paragrafi precedenti i concetti di base.

Per prima cosa deve essere ridotto lo schema iperstatico originario ad un sistema "equivalente" ottenuto attribuendo alla struttura, mediante opportune sconnessioni, tanti gradi di libertà quanti sono i gradi di vincolo sovrabbondanti.

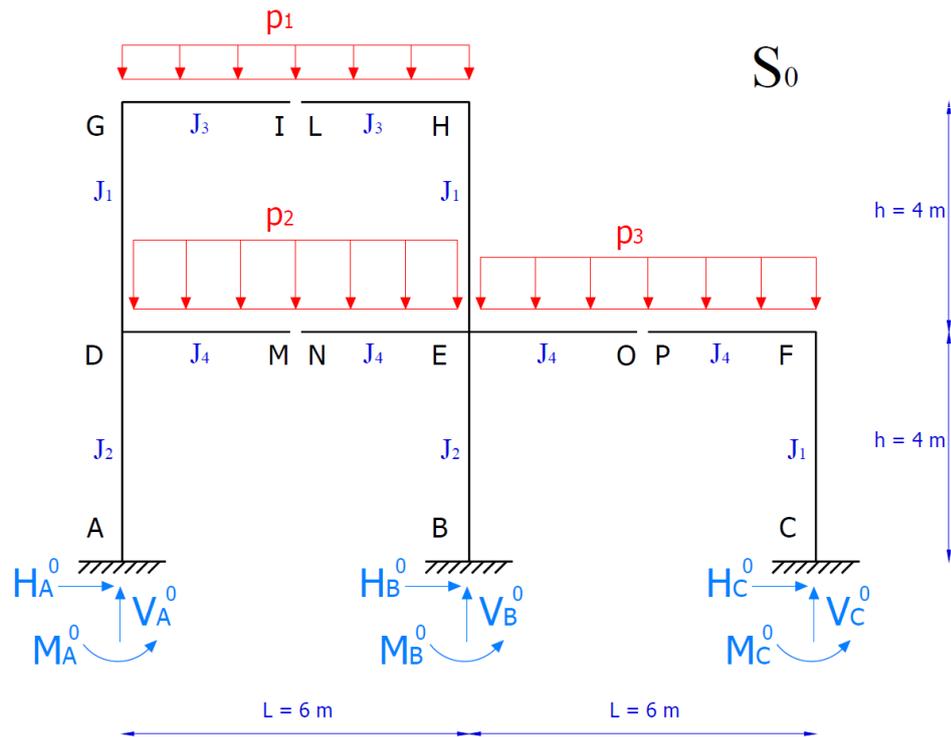
Questo sistema è stato ottenuto effettuando in particolare, per comodità, delle sconnessioni complete nella mezzeria di ognuna delle tre travi orizzontali.

Quando la sconnessione completa, cioè di ordine tre, occorre applicare su entrambe le facce della sconnessione tutte e tre le caratteristiche della sollecitazione.

Allora, il sistema ottenuto è il seguente:



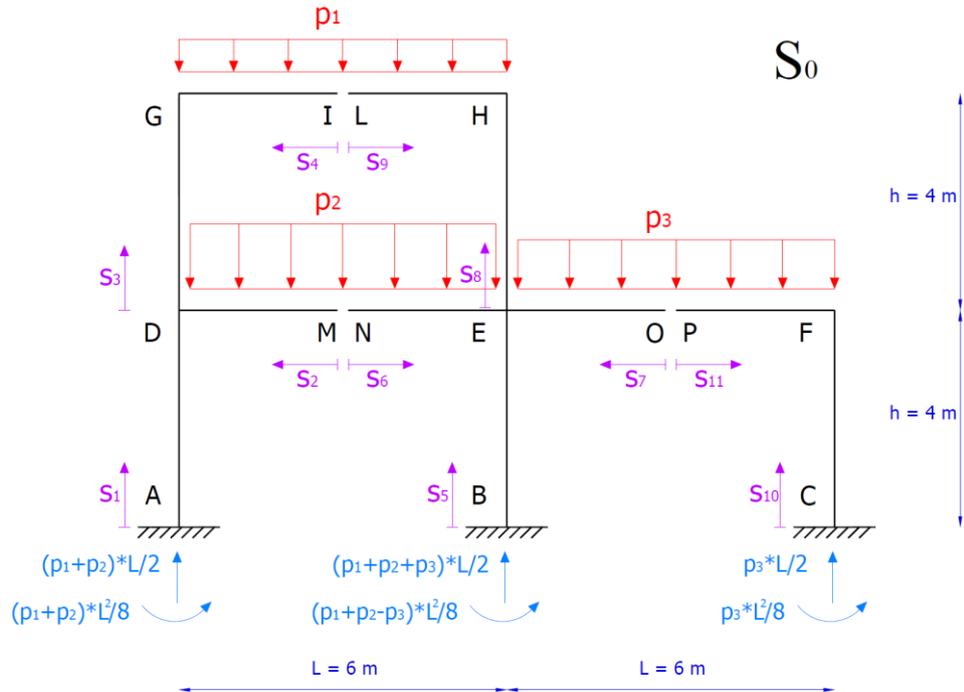
Si può ricavare adesso il sistema “principale”  $S_0$ , nel quale non vengono considerate le azioni delle 9 incognite iperstatiche. Tale sistema  $S_0$ , isostatico ed anche staticamente determinato, risulta essere il seguente:



Si scrivono allora le equazioni di equilibrio relative alle tre porzioni di struttura del sistema principale  $S_0$ , ognuna delle quali è isostatica, e si ricavano le reazioni vincolari:

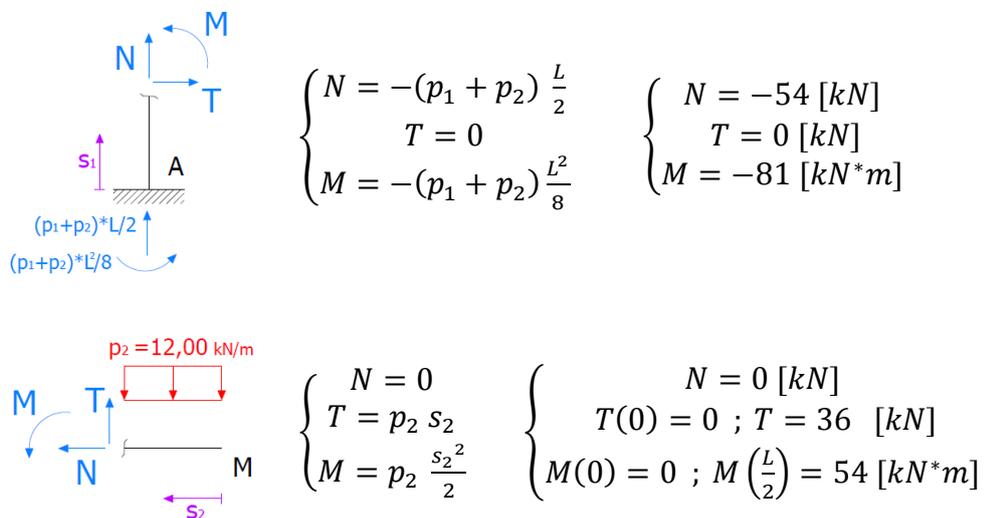
$$\begin{cases} H_A^0 = 0 \\ V_A^0 = (p_1 + p_2) \frac{L}{2} \\ M_A^0 = (p_1 + p_2) \frac{L^2}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} H_B^0 = 0 \\ V_B^0 = (p_1 + p_2 + p_3) \frac{L}{2} \\ M_B^0 = (p_3 - p_1 - p_2) \frac{L^2}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} H_C^0 = 0 \\ V_C^0 = p_3 \frac{L}{2} \\ M_C^0 = - p_3 \frac{L^2}{8} \end{cases}$$

Sostituendo alle reazioni vincolari i valori appena ricavati, si ottiene:



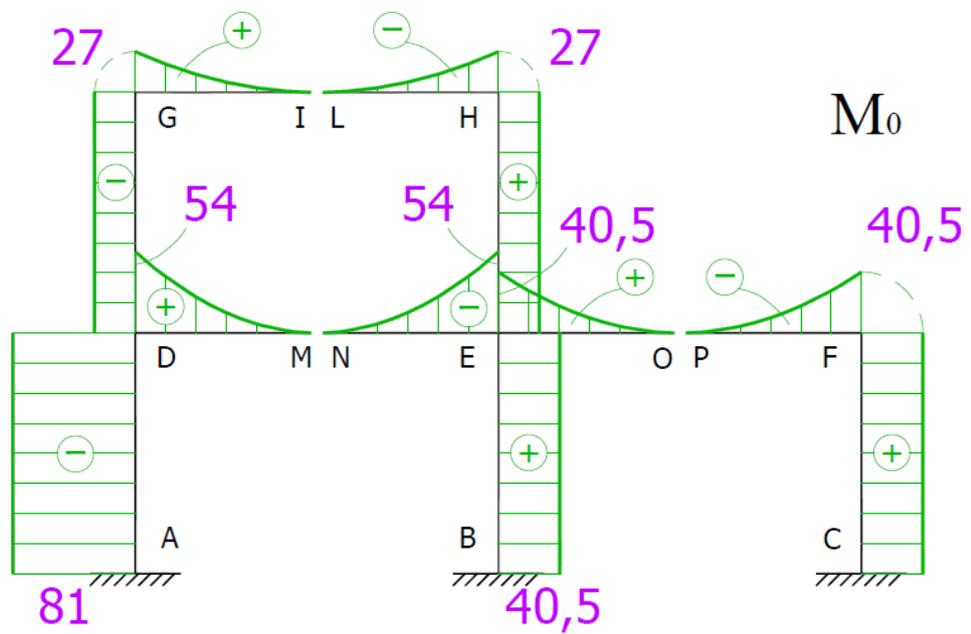
A questo punto si calcolano le caratteristiche della sollecitazione relative a tale sistema  $S_0$ . Per ogni singolo tratto, si introduce un'ascissa  $s_i$  come mostrato in figura.

Per esempio, sui tratti AD, MD avremo:



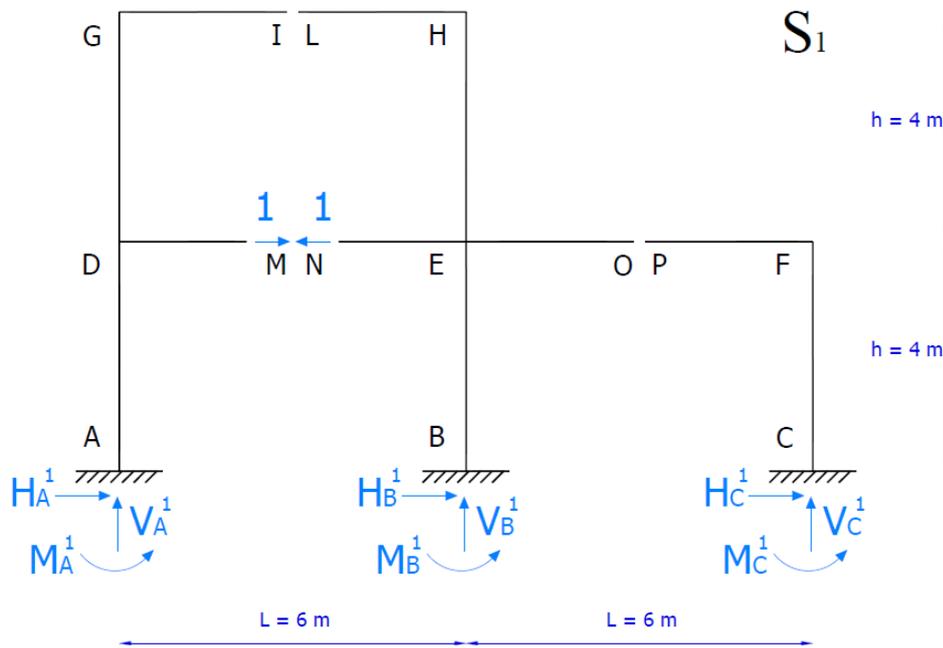
Continuando in questo modo per i restanti tratti di trave, si ricavano le caratteristiche della sollecitazione relative al sistema  $S_0$  per ogni tratto.

Il grafico che descrive l'andamento del momento flettente  $M_0$  nel sistema  $S_0$  è il seguente:



Si è passato poi allo studio dei sistemi  $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9$ .

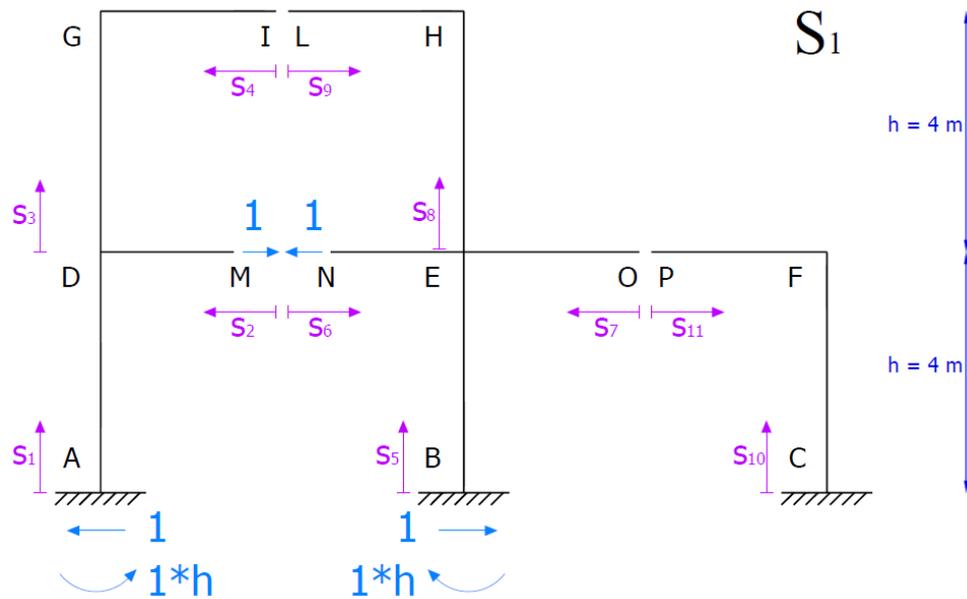
Il sistema  $S_1$ , nel quale agiscono come carichi soltanto le forze unitarie (aventi direzione e verso uguali alla  $X_1$ ) e le reazioni vincolari conseguenti ad esse, è il seguente:



Come fatto prima col sistema  $S_0$ , anche qui si impone l'equilibrio delle varie porzioni del sistema  $S_1$  (ognuna delle quali è isostatica) e si determinano quindi le reazioni vincolari:

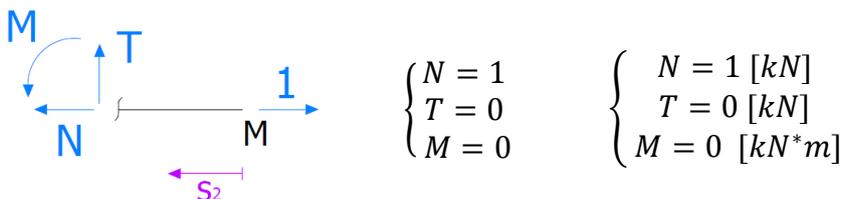
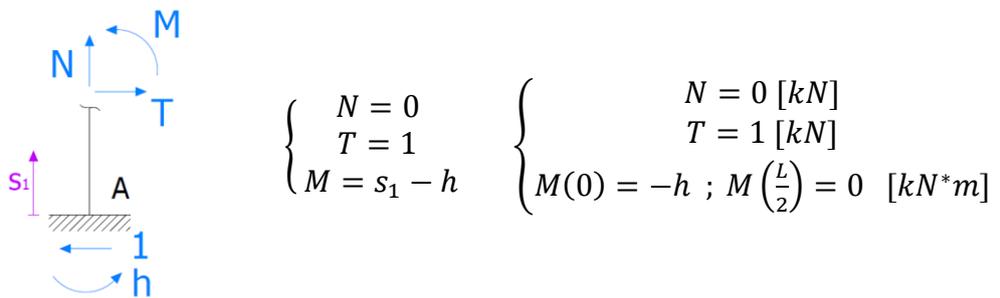
$$\begin{cases} H_A^1 = -1 \\ V_A^1 = 0 \\ M_A^1 = 1 h \end{cases} \quad \begin{cases} H_B^1 = 1 \\ V_B^1 = 0 \\ M_B^1 = -1 h \end{cases} \quad \begin{cases} H_C^1 = 0 \\ V_C^1 = 0 \\ M_C^1 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo alle reazioni vincolari i valori appena ricavati, si ottiene:



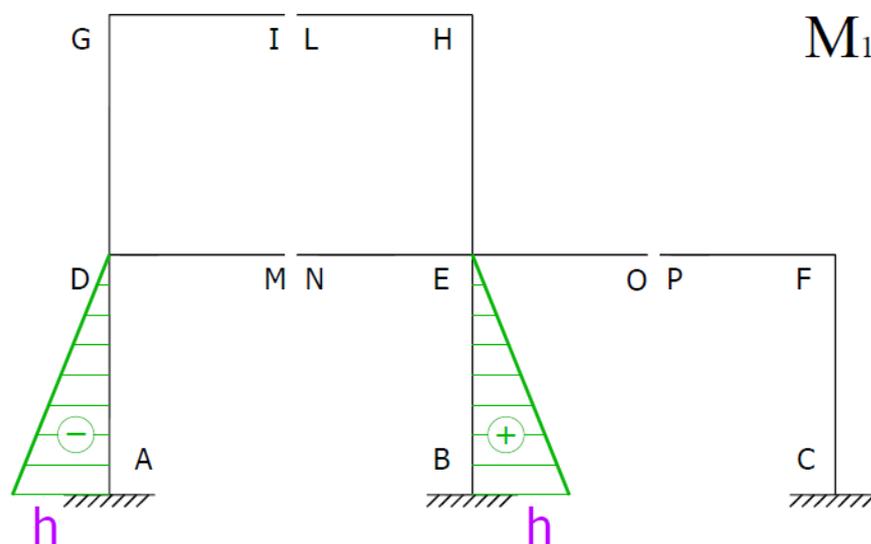
A questo punto si calcolano le caratteristiche della sollecitazione relative al sistema \$S\_1\$, per ogni singolo tratto, ognuno associato ad un'ascissa \$s\_i\$.

Per esempio, sui tratti AD, MD avremo:



Continuando in questo modo per i restanti tratti di trave, si ricavano le caratteristiche della sollecitazione relative al sistema  $S_1$  per ogni tratto.

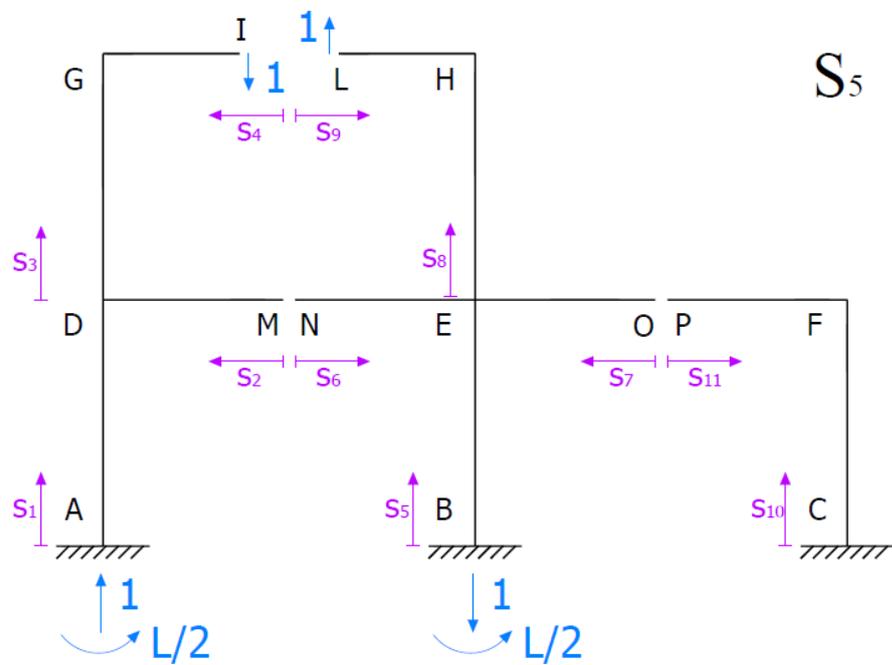
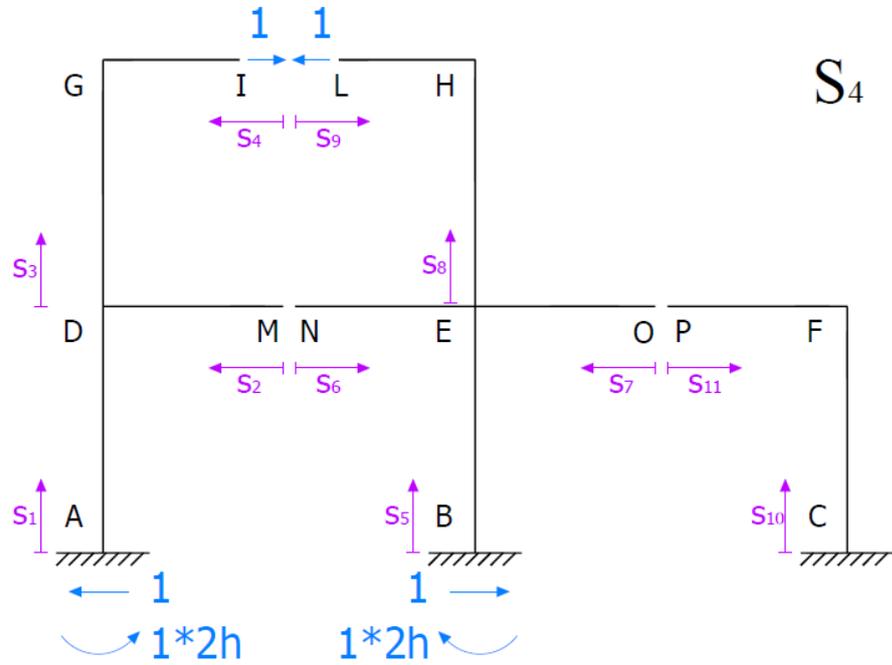
Il grafico che descrive l'andamento del momento flettente  $M_1$  relativo al sistema  $S_1$  è il seguente:

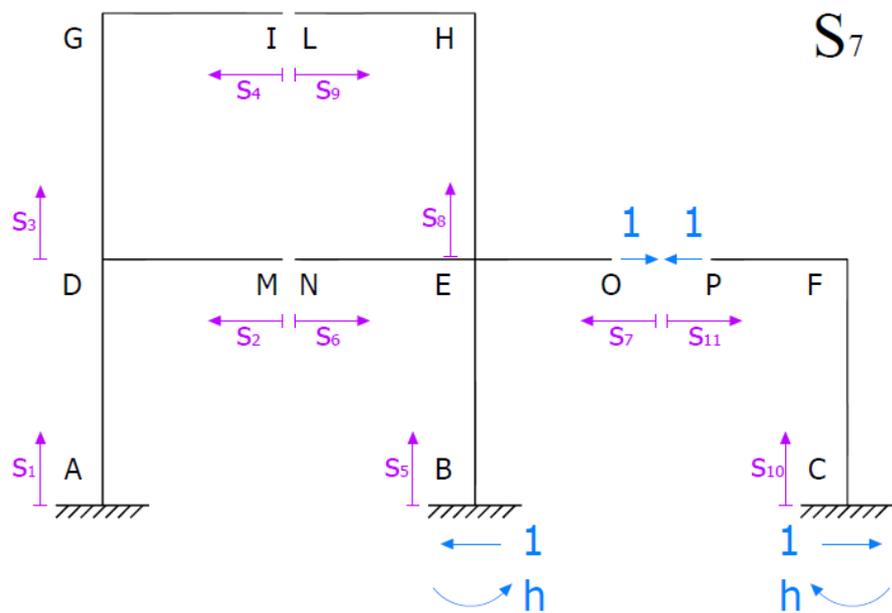
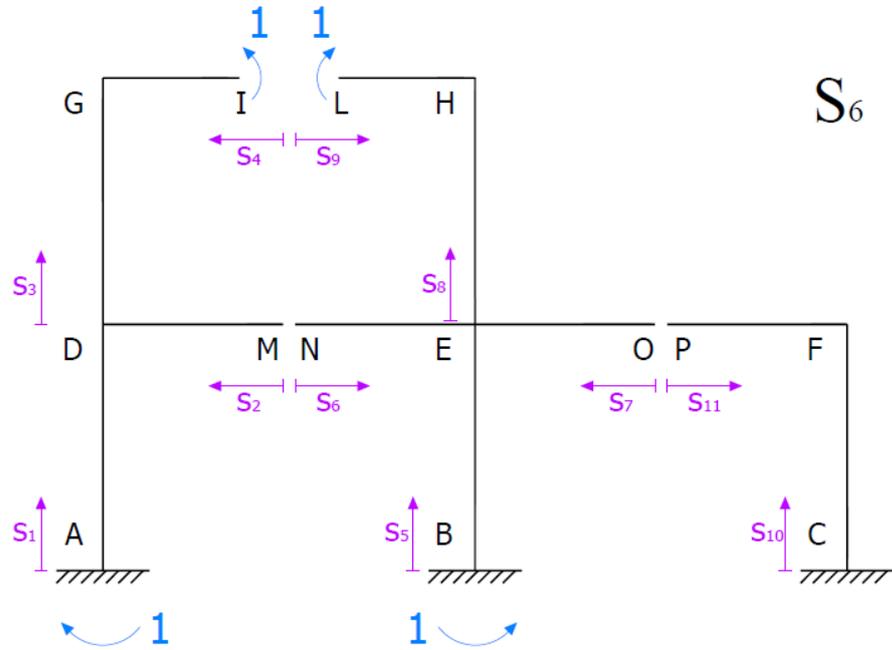


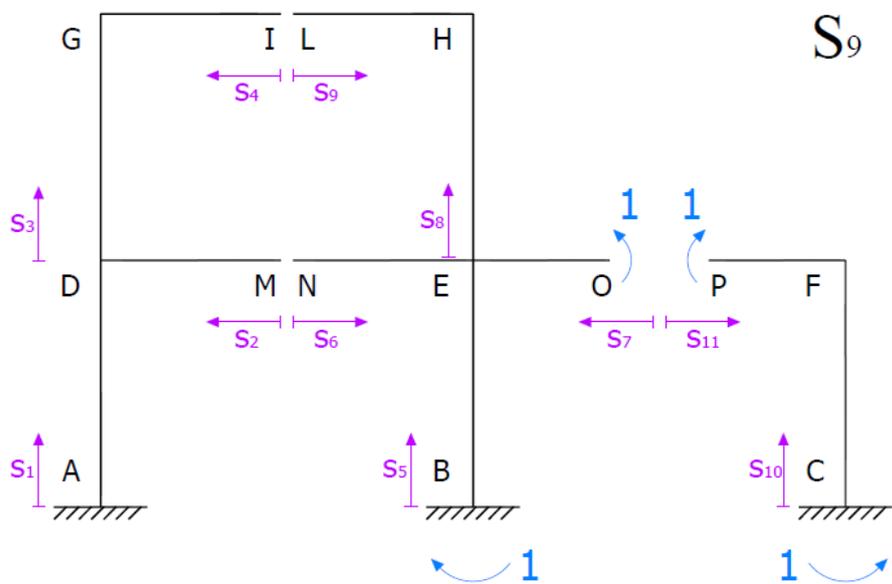
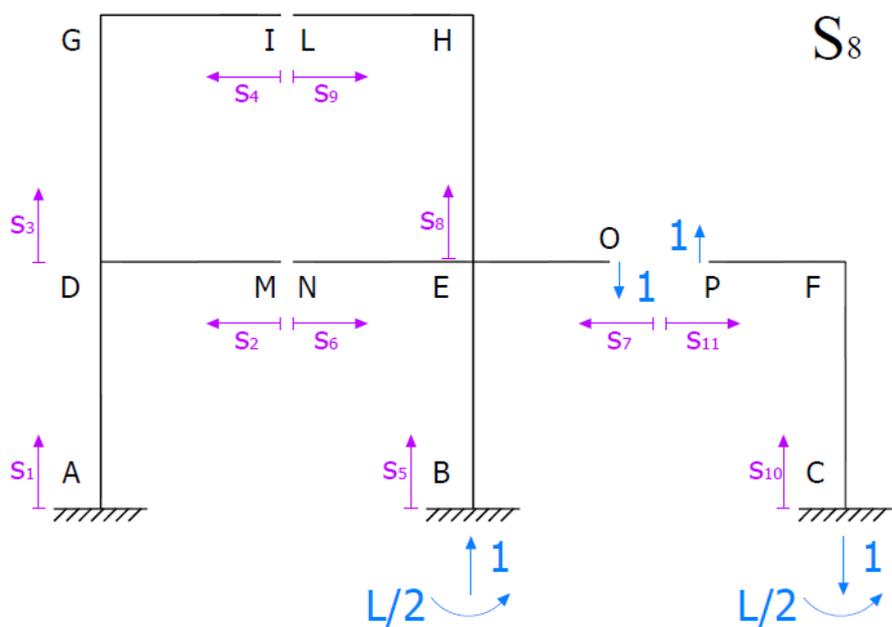
Si è proceduto in modo analogo per ognuno degli altri 8 sistemi, arrivando a determinare le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione relative ad ogni tratto di trave.

Con l'obiettivo di sintetizzare la descrizione del procedimento, i dettagli dei calcoli (eseguiti a mano) sono riportati in Appendice alla tesi.





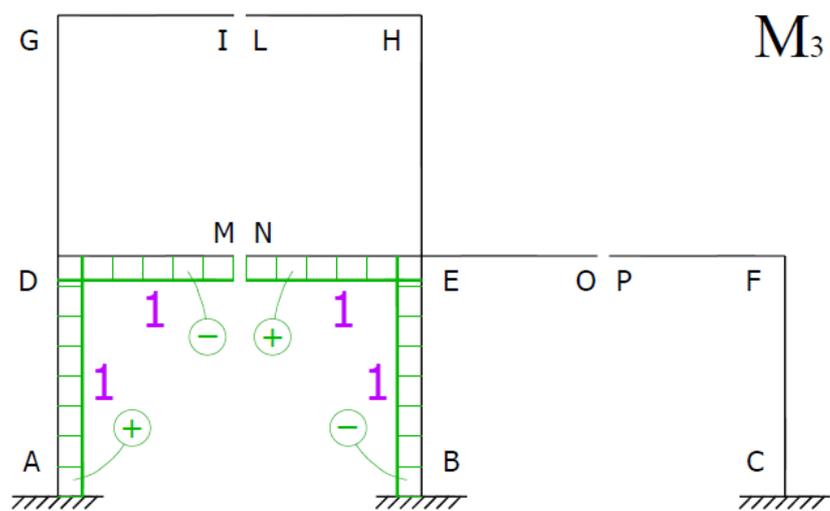
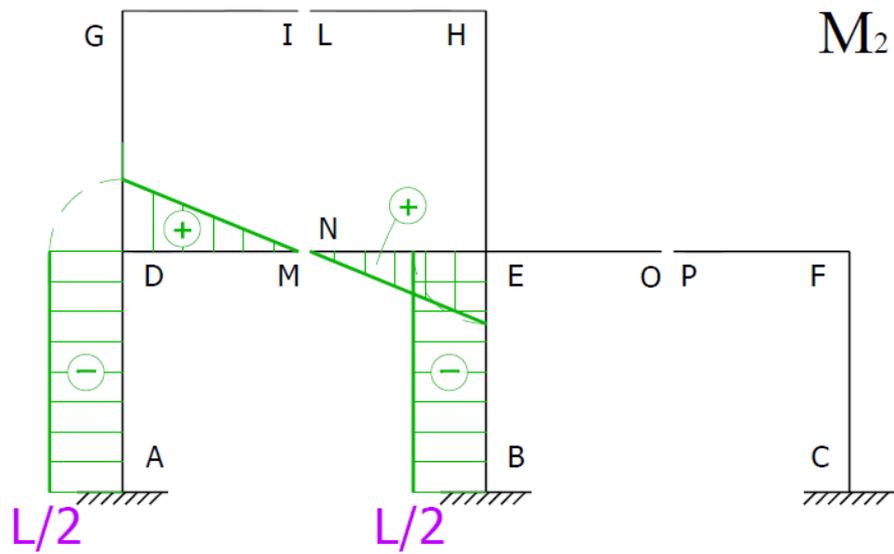


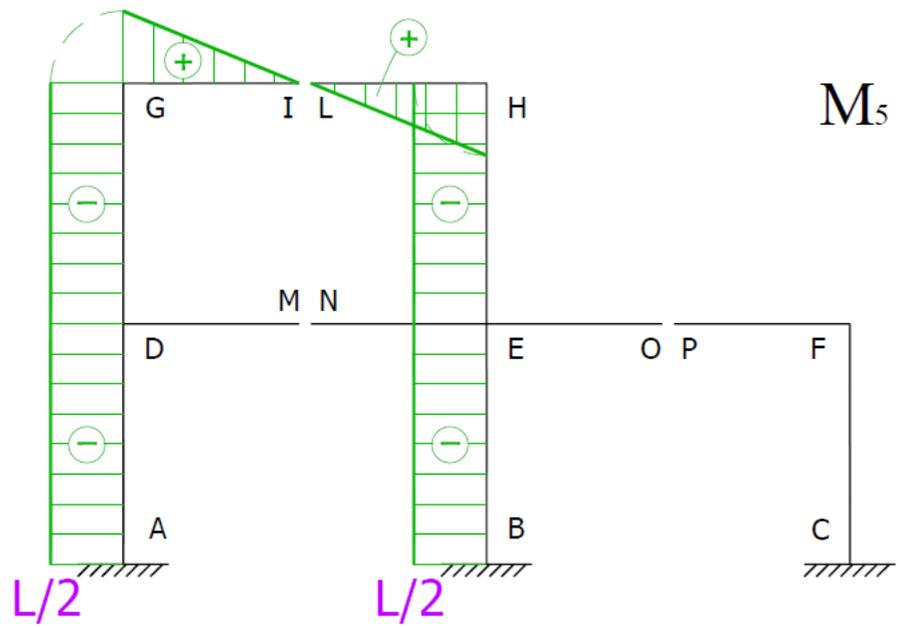
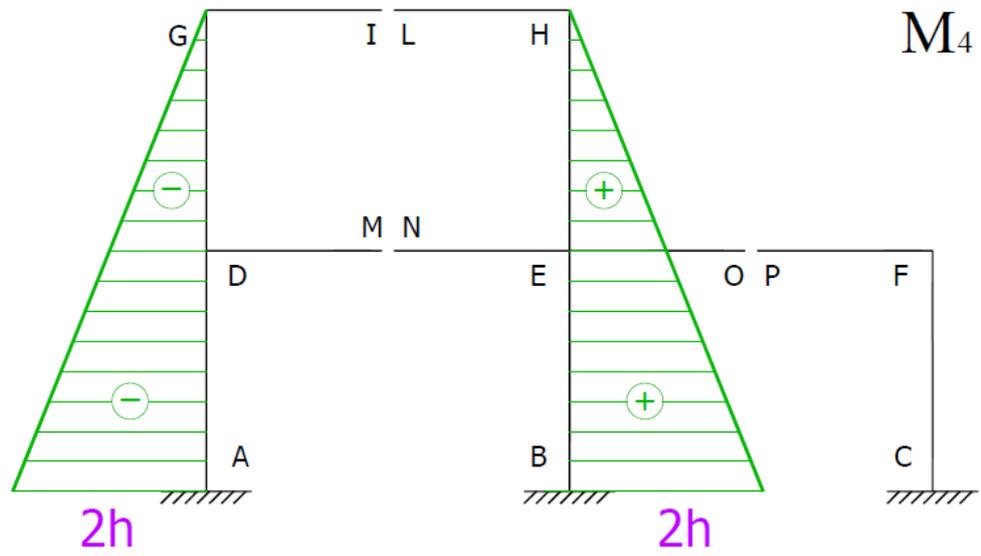


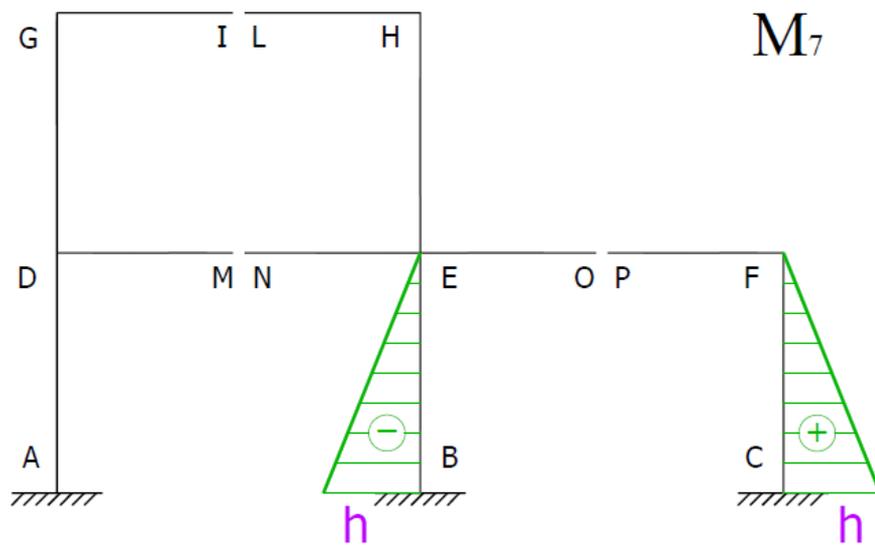
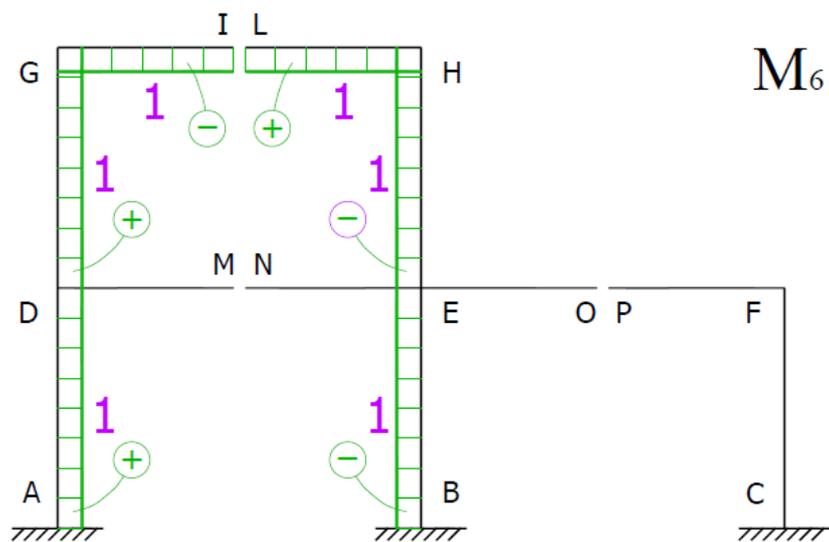


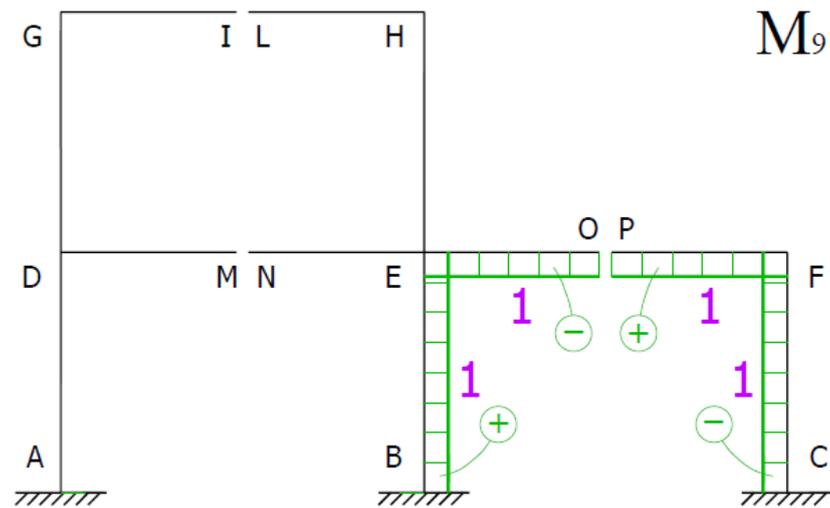
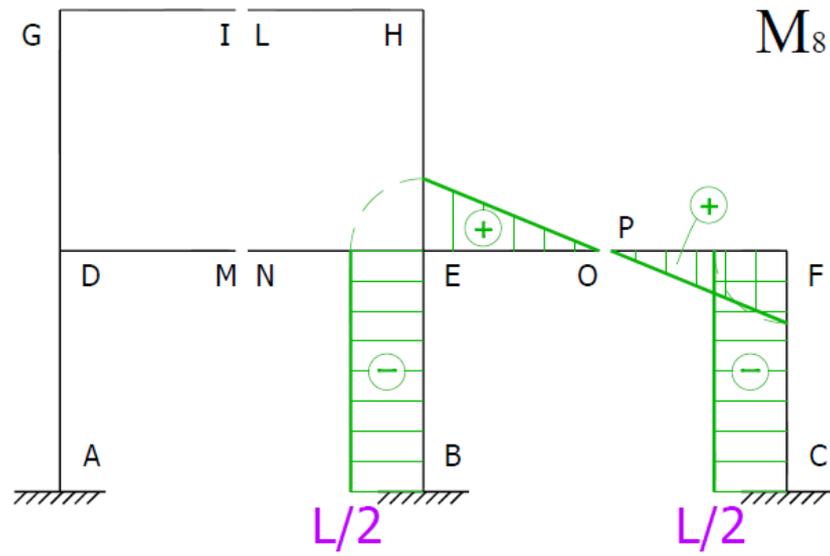
Estremi	Ascissa	$M^0$	$M^1$	$M^2$	$M^3$	$M^4$	$M^5$	$M^6$	$M^7$	$M^8$	$M^9$
AD	$0 < s_1 < h$	$(-p_1-p_2)*(L^2/8)$	$s_1-h$	$-L/2$	1	$s_1-2h$	$-L/2$	1	0	0	0
MD	$0 < s_2 < L/2$	$p_2*(s_2^2/2)$	0	$s_2$	-1	0	0	0	0	0	0
DG	$0 < s_3 < h$	$(-p_1)*(L^2/8)$	0	0	0	$s_3-h$	$-L/2$	1	0	0	0
IG	$0 < s_4 < L/2$	$p_1*(s_4^2/2)$	0	0	0	0	$s_4$	-1	0	0	0
BE	$0 < s_5 < h$	$(p_1+p_2-p_3)*(L^2/8)$	$h-s_5$	$-L/2$	-1	$2h-s_5$	$-L/2$	-1	$s_5-h$	$-L/2$	1
NE	$0 < s_6 < L/2$	$(-p_2)*(s_6^2/2)$	0	$s_6$	1	0	0	0	0	0	0
OE	$0 < s_7 < L/2$	$p_3*(s_7^2/2)$	0	0	0	0	0	0	0	$s_7$	-1
EH	$0 < s_8 < h$	$p_1*(L^2/8)$	0	0	0	$h-s_8$	$-L/2$	-1	0	0	0
LH	$0 < s_9 < L/2$	$(-p_1)*(s_9^2/2)$	0	0	0	0	$s_9$	1	0	0	0
CF	$0 < s_{10} < h$	$p_3*(L^2/8)$	0	0	0	0	0	0	$h-s_{10}$	$-L/2$	-1
PF	$0 < s_{11} < L/2$	$(-p_3)*(s_{11}^2/2)$	0	0	0	0	0	0	0	$s_{11}$	1

Si riportano qui di seguito anche i grafici del momento flettente  $M_i$  relativo ai vari sistemi:









Come accennato nel paragrafo precedente, per il calcolo degli  $\eta_{i0}$  e  $\eta_{ik}$  (che servono per determinare, mediante le equazioni di Müller-Breslau, le incognite iperstatiche  $X_i$ ) si prenderanno in considerazione soltanto i contributi di deformazione dati dal momento flettente.

Per questo motivo, le relazioni con le quali si determinano gli  $\eta_{i0}$  e  $\eta_{ik}$  si riducono alle seguenti:

$$\eta_{i0} = \int \frac{M_i M_0}{EJ} ds \quad ; \quad \eta_{ik} = \int \frac{M_i M_k}{EJ} ds .$$

Si è iniziato quindi col calcolare gli  $\eta_{i0}$ , ovvero  $\eta_{10}$ ,  $\eta_{20}$ ,  $\eta_{30}$ ,  $\dots$ ,  $\eta_{90}$ :

$$\begin{aligned} \eta_{10} &= L_{e\ tot}^{(1 \rightarrow 0)} = L_{i\ tot}^{(1 \rightarrow 0)} = L_{i\ AD}^{(1 \rightarrow 0)} + L_{i\ MD}^{(1 \rightarrow 0)} + L_{i\ DG}^{(1 \rightarrow 0)} + L_{i\ GI}^{(1 \rightarrow 0)} + \\ &\quad + L_{i\ BE}^{(1 \rightarrow 0)} + L_{i\ NE}^{(1 \rightarrow 0)} + L_{i\ OE}^{(1 \rightarrow 0)} + L_{i\ EH}^{(1 \rightarrow 0)} \\ &\quad + L_{i\ HL}^{(1 \rightarrow 0)} + L_{i\ CF}^{(1 \rightarrow 0)} + L_{i\ FP}^{(1 \rightarrow 0)} = \\ &= \int \frac{M_{AD}^1 M_{AD}^0}{E J_2} ds + \int \frac{M_{MD}^1 M_{MD}^0}{E J_4} ds + \int \frac{M_{DG}^1 M_{DG}^0}{E J_1} ds + \int \frac{M_{GI}^1 M_{GI}^0}{E J_3} ds + \\ &\quad + \int \frac{M_{BE}^1 M_{BE}^0}{E J_2} ds + \int \frac{M_{NE}^1 M_{NE}^0}{E J_4} ds + \int \frac{M_{OE}^1 M_{OE}^0}{E J_4} ds + \int \frac{M_{EH}^1 M_{EH}^0}{E J_1} ds + \\ &\quad + \int \frac{M_{HL}^1 M_{HL}^0}{E J_3} ds + \int \frac{M_{CF}^1 M_{CF}^0}{E J_1} ds + \int \frac{M_{FP}^1 M_{FP}^0}{E J_4} ds = \\ &= \int_0^h \frac{(s_1 - h)(-p_1 - p_2)(L^2/8)}{E J_2} ds + \int_0^h \frac{(h - s_5)(p_1 + p_2 - p_3)(L^2/8)}{E J_2} ds = \\ &= \frac{(-p_1 - p_2)(L^2/8)}{E J_2} \left( \frac{h^2}{2} - h^2 \right) + \frac{(p_1 + p_2 - p_3)(L^2/8)}{E J_2} \left( h^2 - \frac{h^2}{2} \right) = \mathbf{0,010270 [m]} \end{aligned}$$

In modo analogo sono stati calcolati gli altri  $\eta_{i0}$ , che sono i seguenti:

$\eta_{10} =$	0,010270	[m]
$\eta_{20} =$	0,005135	[m]
$\eta_{30} =$	-0,011290	rad
$\eta_{40} =$	0,039781	[m]
$\eta_{50} =$	0,005135	[m]
$\eta_{60} =$	-0,016228	rad
$\eta_{70} =$	0,003305	[m]
$\eta_{80} =$	-0,015228	[m]
$\eta_{90} =$	-0,006269	rad

Si è passato poi al calcolo degli  $\eta_{ik}$ , ovvero  $\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{13}, \dots, \eta_{99}$ :

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= L_{e\ tot}^{(l \rightarrow l)} = L_{i\ tot}^{(l \rightarrow l)} = L_{i\ AD}^{(l \rightarrow l)} + L_{i\ MD}^{(l \rightarrow l)} + L_{i\ DG}^{(l \rightarrow l)} + L_{i\ GI}^{(l \rightarrow l)} + \\ &\quad + L_{i\ BE}^{(l \rightarrow l)} + L_{i\ NE}^{(l \rightarrow l)} + L_{i\ OE}^{(l \rightarrow l)} + L_{i\ EH}^{(l \rightarrow l)} + \\ &\quad + L_{i\ HL}^{(l \rightarrow l)} + L_{i\ CF}^{(l \rightarrow l)} + L_{i\ FP}^{(l \rightarrow l)} = \\ &= \int \frac{M_{AD}^1 M_{AD}^1}{E J_2} ds + \int \frac{M_{MD}^1 M_{MD}^1}{E J_4} ds + \int \frac{M_{DG}^1 M_{DG}^1}{E J_1} ds + \int \frac{M_{GI}^1 M_{GI}^1}{E J_3} ds + \\ &\quad + \int \frac{M_{BE}^1 M_{BE}^1}{E J_2} ds + \int \frac{M_{NE}^1 M_{NE}^1}{E J_4} ds + \int \frac{M_{OE}^1 M_{OE}^1}{E J_4} ds + \int \frac{M_{EH}^1 M_{EH}^1}{E J_1} ds + \\ &\quad + \int \frac{M_{HL}^1 M_{HL}^1}{E J_3} ds + \int \frac{M_{CF}^1 M_{CF}^1}{E J_1} ds + \int \frac{M_{FP}^1 M_{FP}^1}{E J_4} ds = \\ &= \int_0^h \frac{(s_1-h)^2}{E J_2} ds + \int_0^h \frac{(h-s_5)^2}{E J_2} ds = \frac{2}{3} \frac{h^3}{E J_2} = \mathbf{0,000451 [m/kN]} \end{aligned}$$

In modo analogo si è proceduto calcolando gli altri  $\eta_{ik}$ , riportati tutti nella seguente tabella:

$\eta_{ik}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,000451	0,000000	-0,000169	0,001127	0,000000	-0,000169	-0,000225	-0,000254	0,000085
2	0,000000	0,001787	0,000000	0,000000	0,000761	0,000000	0,000254	0,000380	-0,000127
3	-0,000169	0,000000	0,000426	-0,000507	0,000000	0,000085	0,000085	0,000127	-0,000042
4	0,001127	0,000000	-0,000507	0,004042	0,000000	-0,000839	-0,000563	-0,000761	0,000254
5	0,000000	0,000761	0,000000	0,000000	0,004458	0,000000	0,000254	0,000380	-0,000127
6	-0,000169	0,000000	0,000085	-0,000839	0,000000	0,000985	0,000085	0,000127	-0,000042
7	-0,000225	0,000254	0,000085	-0,000563	0,000254	0,000085	0,000668	-0,000245	-0,000251
8	-0,000254	0,000380	0,000127	-0,000761	0,000380	0,000127	-0,000245	0,002154	0,000122
9	0,000085	-0,000127	-0,000042	0,000254	-0,000127	-0,000042	-0,000251	0,000122	0,000467

Questi spostamenti generalizzati  $\eta_{i0}$  e  $\eta_{ik}$  permettono di determinare le incognite iperstatiche  $X_i$ , mediante le equazioni di Müller-Breslau, ovvero:

$$\eta_i = \eta_{i0} + \sum_{k=1}^n \eta_{ik} X_k = 0$$

Scritta in forma estesa diventa:

$$\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 + \dots + \eta_{19} X_9 = 0$$

$$\eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 + \dots + \eta_{29} X_9 = 0$$

:

:

$$\eta_9 = \eta_{90} + \eta_{91} X_1 + \eta_{92} X_2 + \dots + \eta_{99} X_9 = 0$$

Queste equazioni possono essere riscritte nel seguente modo:

$$\eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 + \dots + \eta_{19} X_9 = -\eta_{10}$$

$$\eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 + \dots + \eta_{29} X_9 = -\eta_{20}$$

:

:

$$\eta_{91} X_1 + \eta_{92} X_2 + \dots + \eta_{99} X_9 = -\eta_{90}$$

Questo è un sistema lineare di nove equazioni e nove incognite.

Definendo con  $\mathbf{A}$  la matrice dei coefficienti  $\eta_{ik}$ , con  $\mathbf{B}$  il vettore dei termini noti ( $-\eta_{i0}$ ) e con  $\mathbf{X}$  il vettore delle incognite  $X_i$ , tale sistema può essere scritto in notazione matriciale:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

Per determinare le soluzioni bisogna calcolare la matrice inversa di  $\mathbf{A}$ , moltiplicarla per il vettore  $\mathbf{B}$ , ed il risultato di questo prodotto rappresenta proprio le soluzioni del sistema, ovvero:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

Da tale operazione, svolta rapidamente con Excel, si è ricavato quindi il vettore soluzione del sistema di equazione lineari, ovvero le 9 incognite iperstatiche, che risultano essere:

$X_1 =$	-0,228540	[kN]
$X_2 =$	-0,789405	[kN]
$X_3 =$	18,550611	[kN*m]
$X_4 =$	-7,283971	[kN]
$X_5 =$	-0,218998	[kN]
$X_6 =$	9,842507	[kN*m]
$X_7 =$	-8,342863	[kN]
$X_8 =$	1,180850	[kN]
$X_9 =$	14,919644	[kN*m]

Le caratteristiche della sollecitazione N, T, M effettive sono provocate dai carichi esterni e dalle incognite iperstatiche  $X_k$ .

Perciò, attraverso le relazioni

$$N = N_0 + \sum_{k=1}^n N_k X_k \quad , \quad T = T_0 + \sum_{k=1}^n T_k X_k \quad , \quad M = M_0 + \sum_{k=1}^n M_k X_k$$

si possono determinare queste caratteristiche della sollecitazione N, T, M effettive per ogni tratto della struttura.

Si è proceduto quindi col calcolo di N, T ed M.

Ad esempio, N, T ed M per il tratto AD risultano essere:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_{AD} &= N_{AD}^0 + N_{AD}^1 X_1 + N_{AD}^2 X_2 + N_{AD}^3 X_3 + N_{AD}^4 X_4 + N_{AD}^5 X_5 + \\
 &\quad + N_{AD}^6 X_6 + N_{AD}^7 X_7 + N_{AD}^8 X_8 + N_{AD}^9 X_9 = \\
 &= -54 + 0*(-0,228540) + (-1)*(-0,789405) + 0*18,550611 + \\
 &\quad + 0*(-7,283971) + (-1)*(-0,218998) + 0*9,842507 + \\
 &\quad + 0*(-8,342863) + 0*1,180850 + 0*14,919644 = \\
 &= -54 + 0,789405 + 0,218998 = \mathbf{-52,991597 \text{ [kN]}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{AD} &= T_{AD}^0 + T_{AD}^1 X_1 + T_{AD}^2 X_2 + T_{AD}^3 X_3 + T_{AD}^4 X_4 + T_{AD}^5 X_5 + \\
 &\quad + T_{AD}^6 X_6 + T_{AD}^7 X_7 + T_{AD}^8 X_8 + T_{AD}^9 X_9 = \\
 &= 0 + 1*(-0,228540) + 0*(-0,789405) + 0*18,550611 + \\
 &\quad + 1*(-7,283971) + 0*(-0,218998) + 0*9,842507 + \\
 &\quad + 0*(-8,342863) + 0*1,180850 + 0*14,919644 = \\
 &= -0,228540 - 7,283971 = \mathbf{-7,512511 \text{ [kN]}}
 \end{aligned}$$

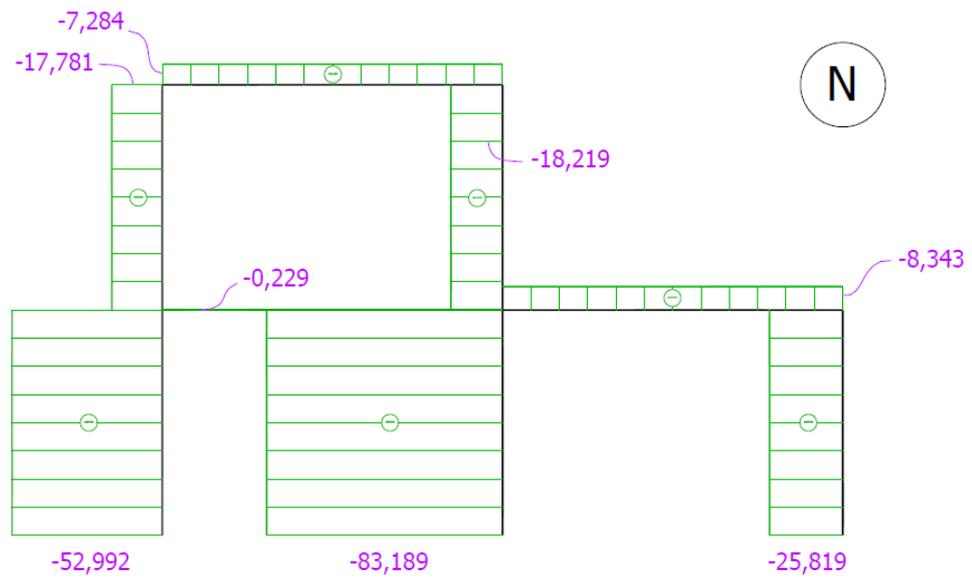
$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{AD} &= M_{AD}^0 + M_{AD}^1 X_1 + M_{AD}^2 X_2 + M_{AD}^3 X_3 + M_{AD}^4 X_4 + M_{AD}^5 X_5 + \\
 &\quad + M_{AD}^6 X_6 + M_{AD}^7 X_7 + M_{AD}^8 X_8 + M_{AD}^9 X_9 = \\
 &= (-p_1-p_2)*(L^2/8) + (s_1-h)*(-0,228540) + (-L/2)*(-0,789405) + \\
 &\quad + 1*18,550611 + (s_1-2h)*(-7,283971) + (-L/2)*(-0,218998) + \\
 &\quad + 1*9,842507 + 0*(-8,342863) + 0*1,180850 + 0*14,919644 = \dots = \\
 &= \mathbf{-7,512511*s_1 + 9,604255 \text{ [kN*m]}}
 \end{aligned}$$

Così procedendo, sono stati ricavati i seguenti valori o funzioni che descrivono l'andamento delle caratteristiche delle sollecitazioni nel sistema effettivo, che sono i seguenti:

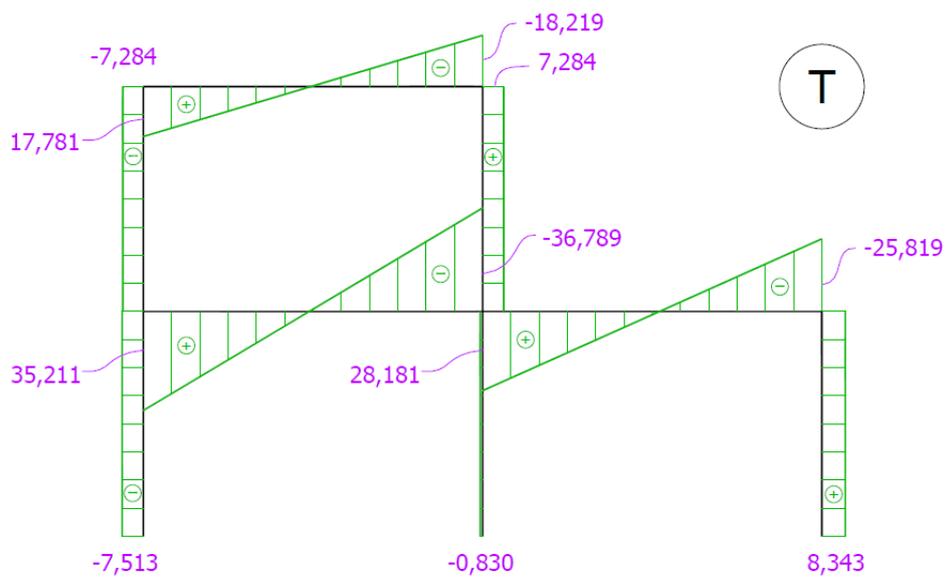
$N_{AD} =$	-52,9916	$T_{AD} =$	-7,51251
$N_{MD} =$	-0,22854	$T_{MD} =$	$12*s_2 - 0,789405$
$N_{DG} =$	-17,781	$T_{DG} =$	-7,28397
$N_{IG} =$	-7,283971	$T_{IG} =$	$6*s_4 - 0,218998$
$N_{BE} =$	-83,18925	$T_{BE} =$	-0,83035
$N_{NE} =$	-0,22854	$T_{NE} =$	$- 12*s_6 - 0,789405$
$N_{OE} =$	-8,342863	$T_{OE} =$	$9*s_7 + 1,180850$
$N_{EH} =$	-18,219	$T_{EH} =$	7,283971
$N_{LH} =$	-7,283971	$T_{LH} =$	$- 6*s_9 - 0,218998$
$N_{CF} =$	-25,81915	$T_{CF} =$	8,342863
$N_{PF} =$	-8,342863	$T_{PF} =$	$- 9*s_{11} + 1,180850$

$M_{AD} =$	$- 7,512511*s_1 + 9,604255$
$M_{MD} =$	$6*s_2^2 - 0,789405*s_2 - 18,550611$
$M_{DG} =$	$- 7,283971*s_3 + 12,635285$
$M_{IG} =$	$3*s_4^2 - 0,218998*s_4 - 9,842507$
$M_{BE} =$	$- 0,830352*s_5 + 0,694709$
$M_{NE} =$	$- 6*s_6^2 - 0,789405*s_6 + 18,550611$
$M_{OE} =$	$4,5*s_7^2 + 1,180850*s_7 - 14,919644$
$M_{EH} =$	$7,283971*s_8 - 11,321397$
$M_{LH} =$	$- 3*s_9^2 - 0,218998*s_9 + 9,842507$
$M_{CF} =$	$8,342863*s_{10} - 11,333646$
$M_{PF} =$	$- 4,5*s_{11}^2 + 1,180850*s_{11} + 14,919644$

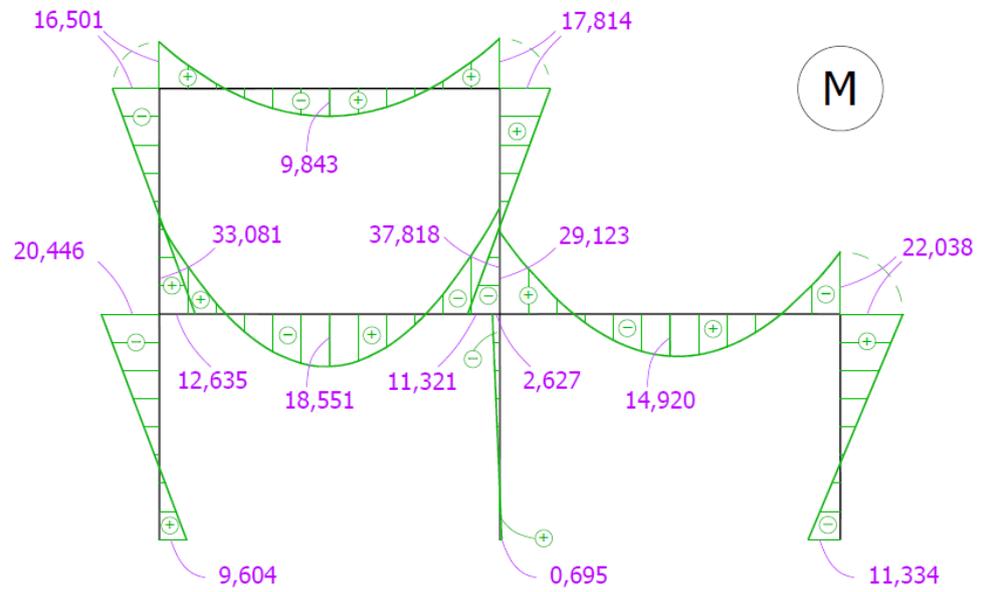
Una volta determinate queste è stato possibile tracciare anche i grafici di N, T ed M nel sistema effettivo, che sono i seguenti:



Unità di misura: [ kN ]



Unità di misura : [ kN ]



Unità di misura: [ kN\*m ]

Tali valori delle caratteristiche di sollecitazione serviranno poi per le opportune verifiche di resistenza.

---

## BIBLIOGRAFIA

BELLUZZI, Odone: Scienza delle costruzioni, Volume I

BELLUZZI, Odone: Scienza delle costruzioni, Volume II

FROLI, Maurizio: Appunti di Scienza delle costruzioni

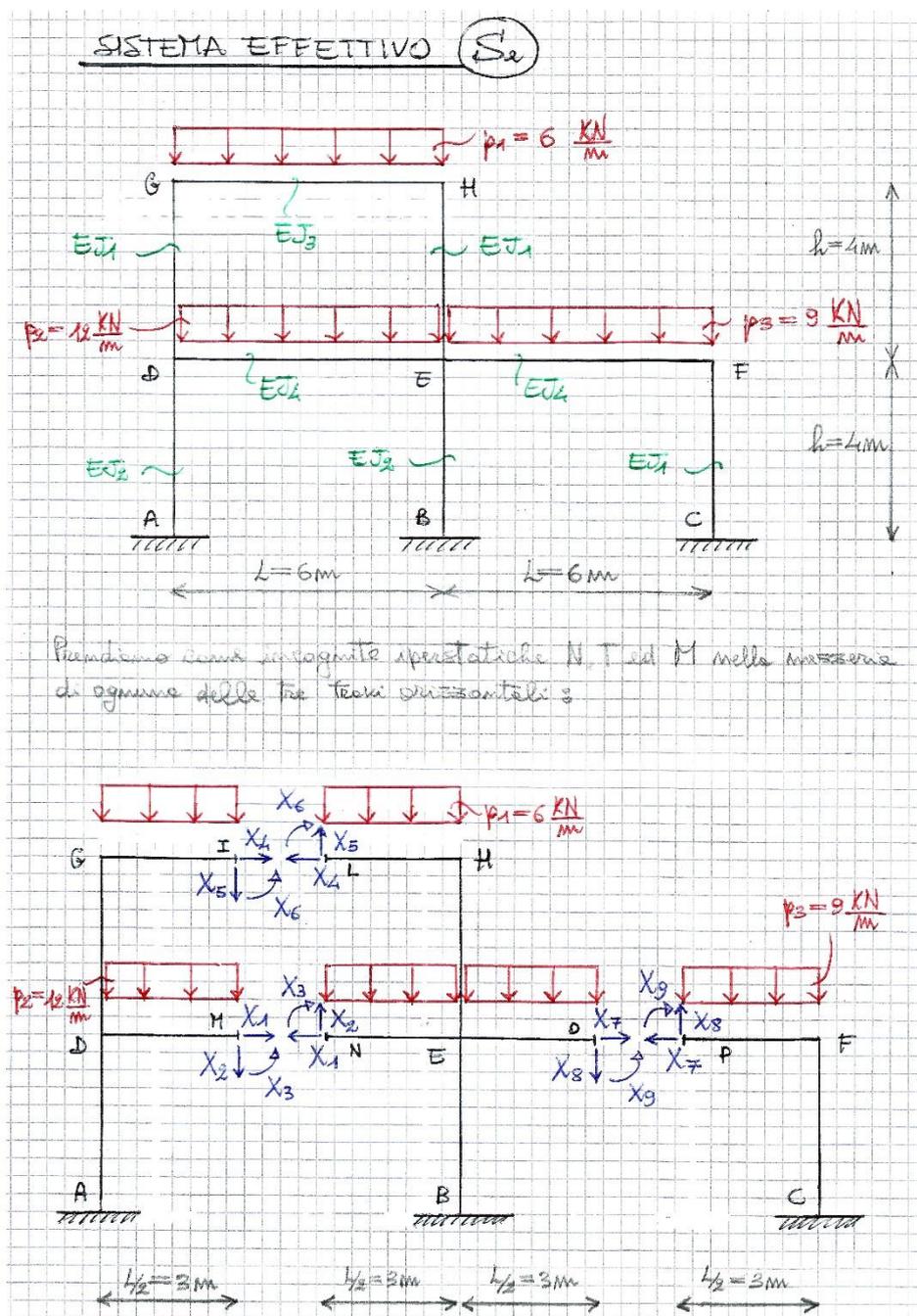
## SITI WEB CONSULTATI

Prontuario dei profili metallici - Manuali tecnici - Hoepli:

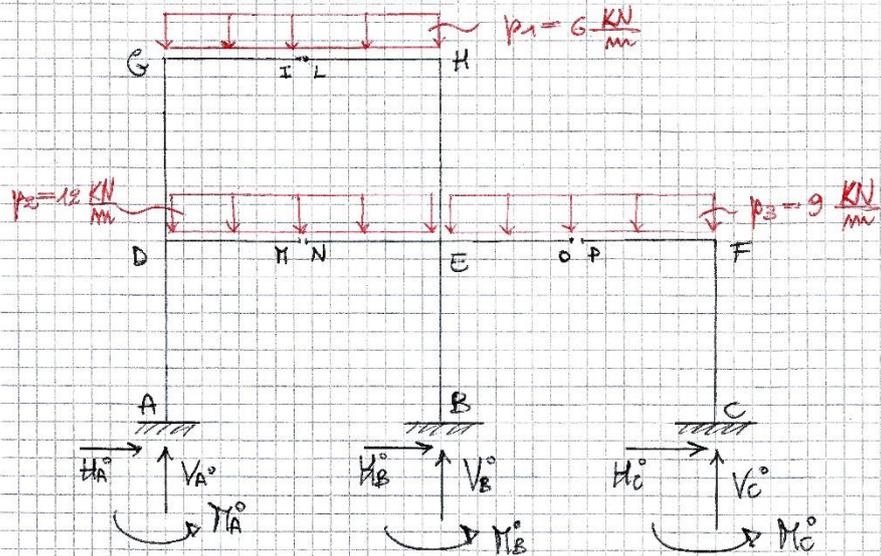
*[http://www.manualihoepi.it/media/doc/ditaddeo\\_cap1-2.pdf](http://www.manualihoepi.it/media/doc/ditaddeo_cap1-2.pdf)*

## APPENDICE

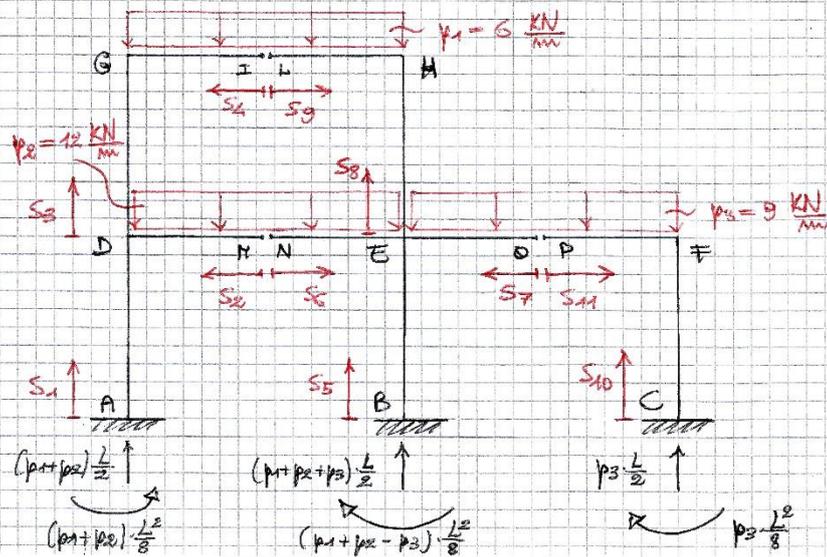
Calcolo delle caratteristiche della sollecitazione nei sistemi  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_9$ .



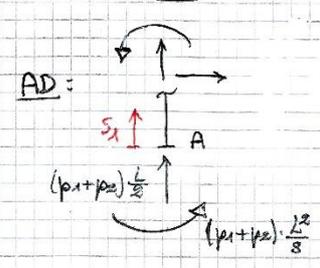
SISTEMA PRINCIPALE  $(S_0)$

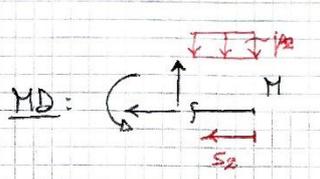


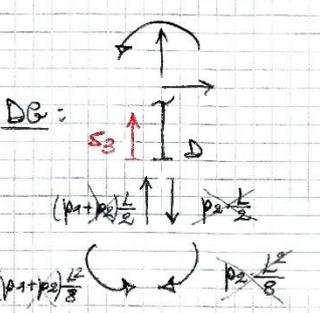
$$\begin{cases} H_A^0 = 0 \\ V_A^0 = (p_1 + p_2) \cdot \frac{L}{2} \\ M_A^0 = (p_1 + p_2) \cdot \frac{L^2}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} H_B^0 = 0 \\ V_B^0 = (p_1 + p_2 + p_3) \cdot \frac{L}{2} \\ M_B^0 = -(p_1 + p_2 - p_3) \cdot \frac{L^2}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} H_C^0 = 0 \\ V_C^0 = p_3 \cdot \frac{L}{2} \\ M_C^0 = -p_3 \cdot \frac{L^2}{8} \end{cases}$$

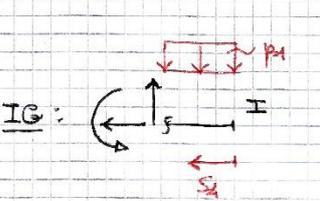


C.d.S. (S<sub>0</sub>)

AD:  
$$\begin{cases} N = -(p_1 + p_2) \cdot \frac{L}{2} \\ T = 0 \\ M = -(p_1 + p_2) \cdot \frac{L^2}{8} = -81 \end{cases}$$

MD:  
$$\begin{cases} N = 0 \\ T = p_2 \cdot S_2 \\ M = p_2 \cdot \frac{S_2^2}{2} \end{cases}$$

DG:  
$$\begin{cases} N = -p_1 \cdot \frac{L}{2} \\ T = 0 \\ M = -p_1 \cdot \frac{L^2}{8} = -27 \end{cases}$$

IG:  
$$\begin{cases} N = 0 \\ T = p_1 \cdot S_4 \\ M = p_1 \cdot \frac{S_4^2}{2} \end{cases}$$

BE:

$$\begin{cases} N = -(p_1 + p_2 + p_3) \cdot \frac{L}{2} \\ T = 0 \\ M = (p_1 + p_2 - p_3) \cdot \frac{L^2}{8} = 2.7 \end{cases}$$

NE:

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = -p_2 \cdot S_6 \\ M = -p_2 \cdot \frac{S_6^2}{2} \end{cases}$$

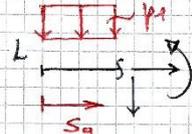
OE:

$$\begin{cases} N = 0 \\ T = p_3 \cdot S_7 \\ M = p_3 \cdot \frac{S_7^2}{2} \end{cases}$$

EH:

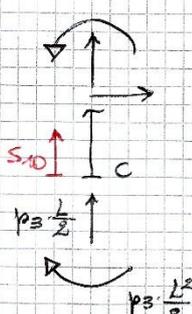
$$\begin{cases} N = -p_1 \cdot \frac{L}{2} \\ T = 0 \\ M = p_1 \cdot \frac{L^2}{8} \end{cases}$$

LH:



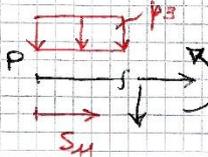
$$\begin{cases} N=0 \\ T=-p_1 \cdot S_g \\ M=-p_1 \cdot \frac{S_g^2}{2} \end{cases}$$
  

CE:



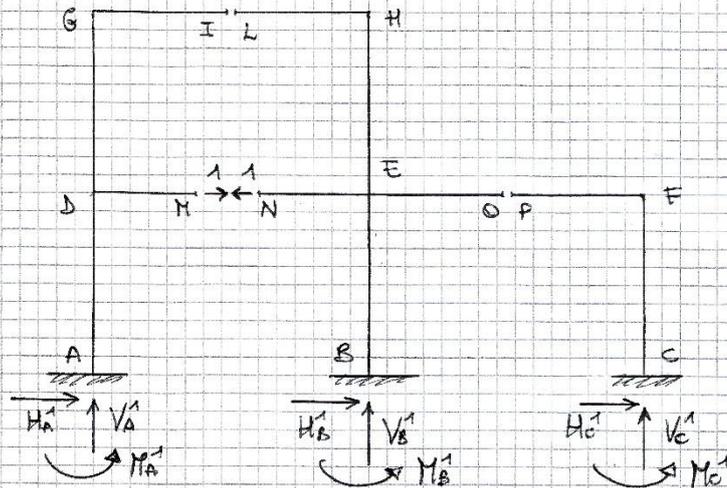
$$\begin{cases} N=-p_3 \cdot \frac{c}{2} \\ T=0 \\ M=p_3 \cdot \frac{c^2}{8} \end{cases}$$
  

PF:

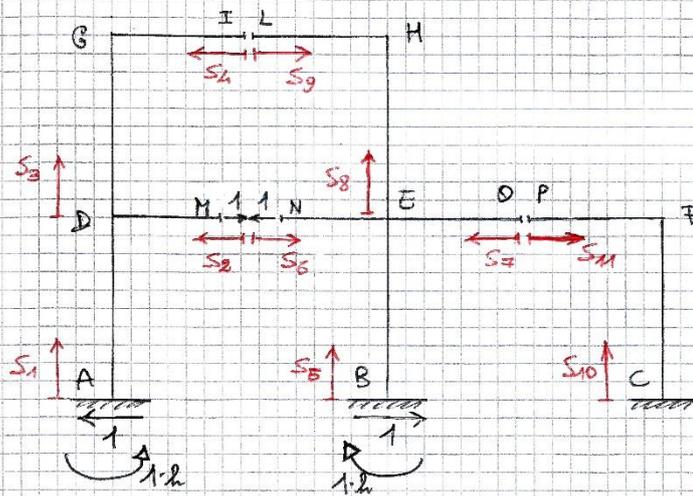


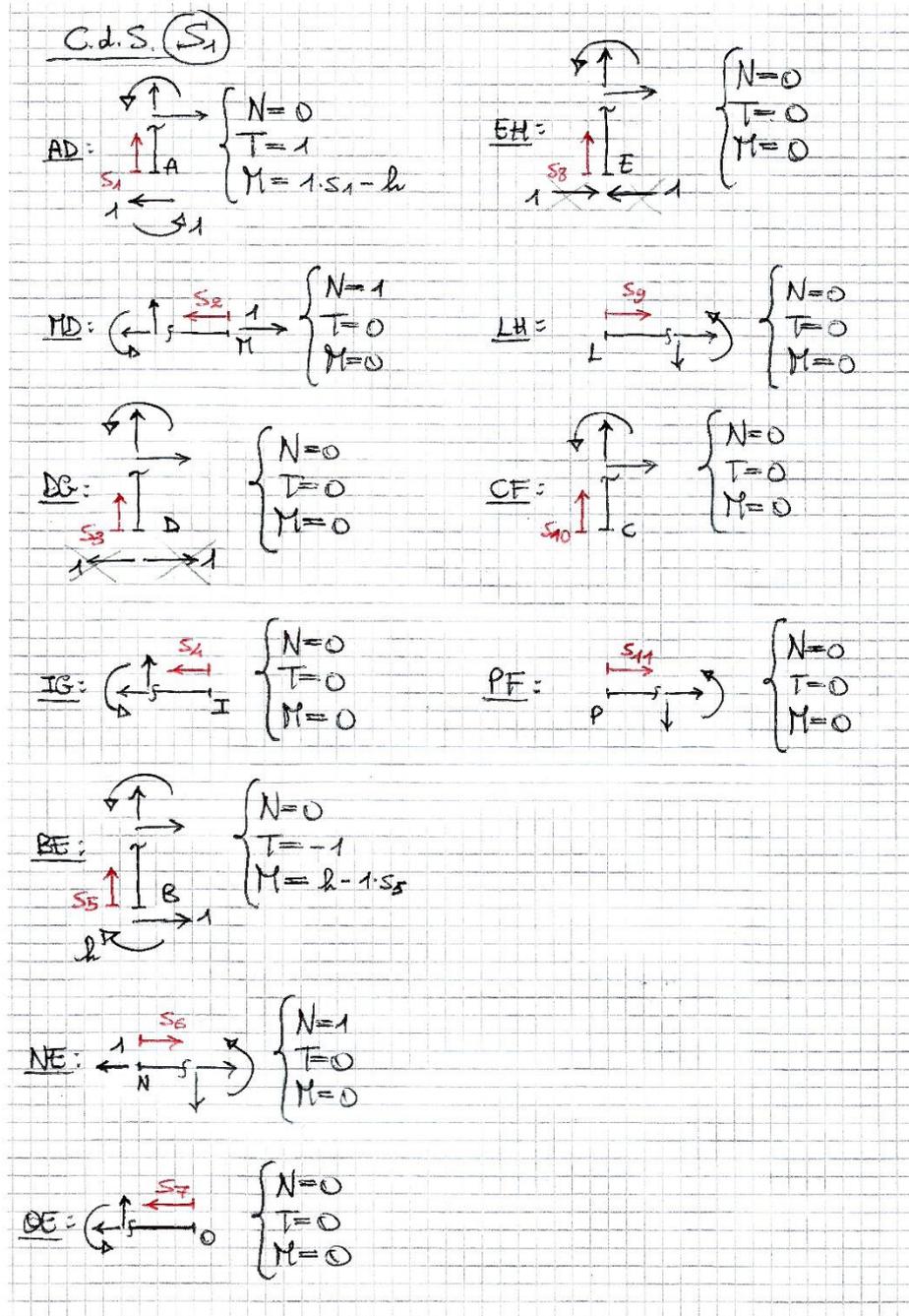
$$\begin{cases} N=0 \\ T=-p_3 \cdot S_{11} \\ M=-p_3 \cdot \frac{S_{11}^2}{2} \end{cases}$$

SISTEMA (S<sub>1</sub>)

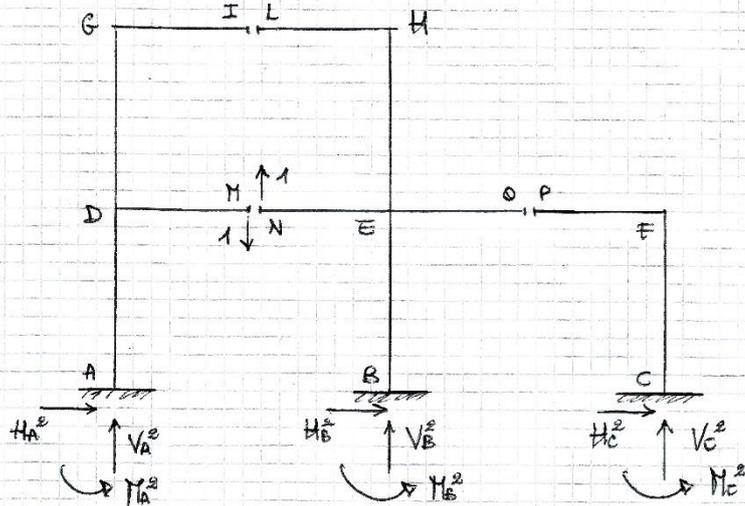


$$\begin{cases} H_A^1 = -1 \\ V_A^1 = 0 \\ M_A^1 = 1.2 \end{cases} \quad \begin{cases} H_B^1 = 1 \\ V_B^1 = 0 \\ M_B^1 = -1.2 \end{cases} \quad \begin{cases} H_C^1 = 0 \\ V_C^1 = 0 \\ M_C^1 = 0 \end{cases}$$

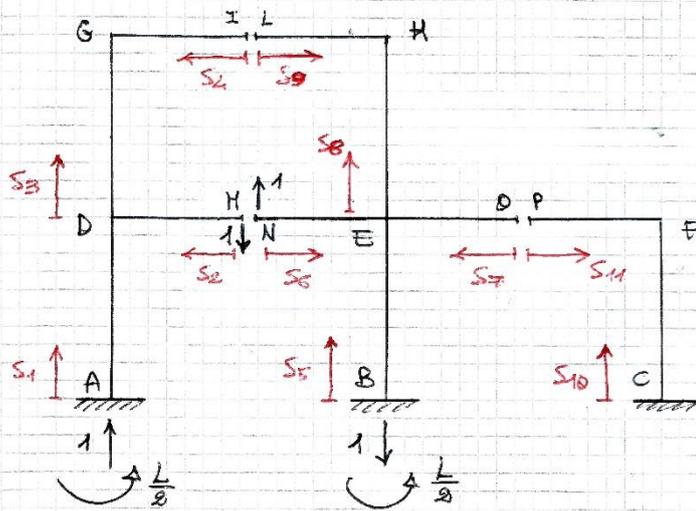


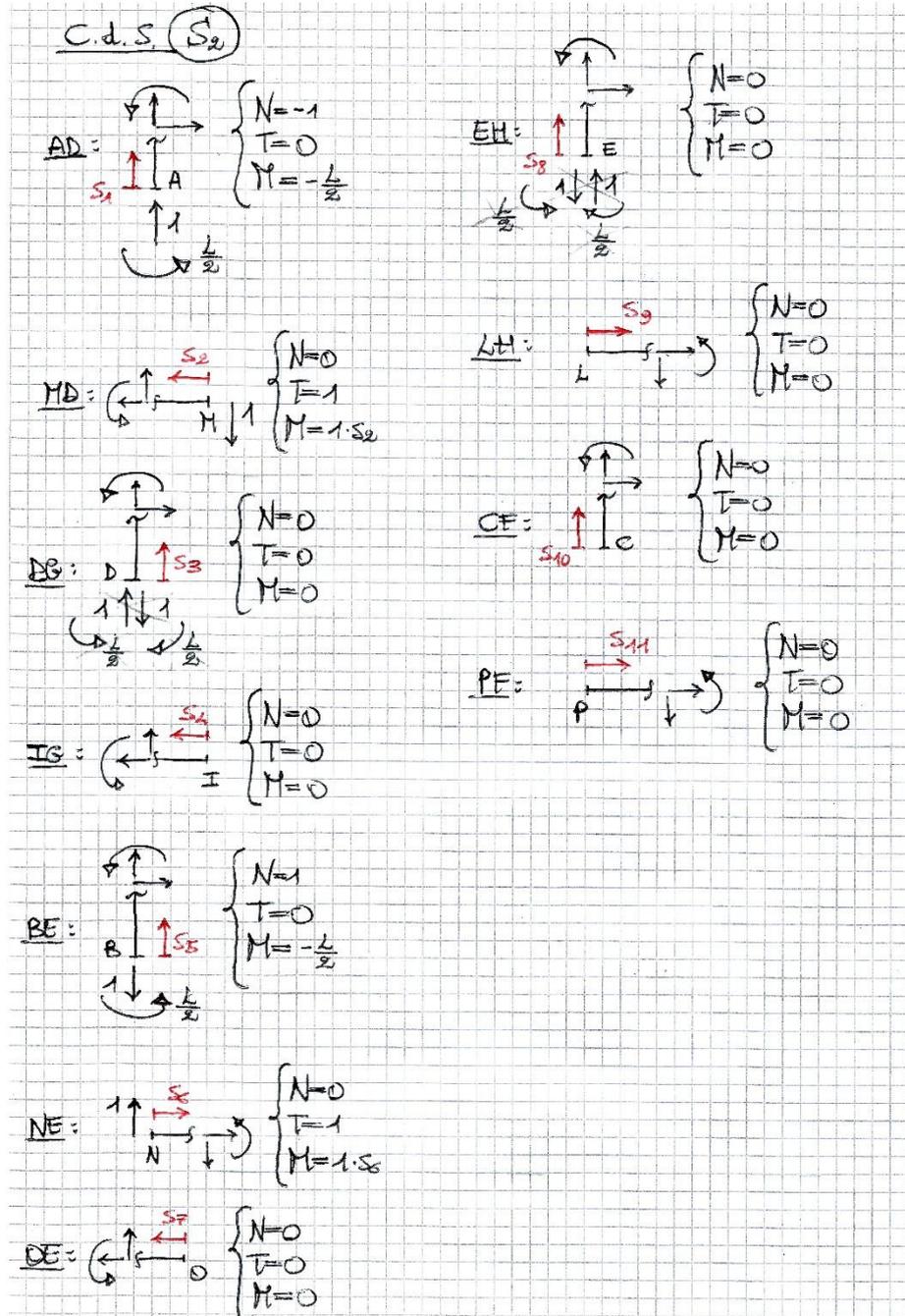


SISTEMA (S<sub>2</sub>)

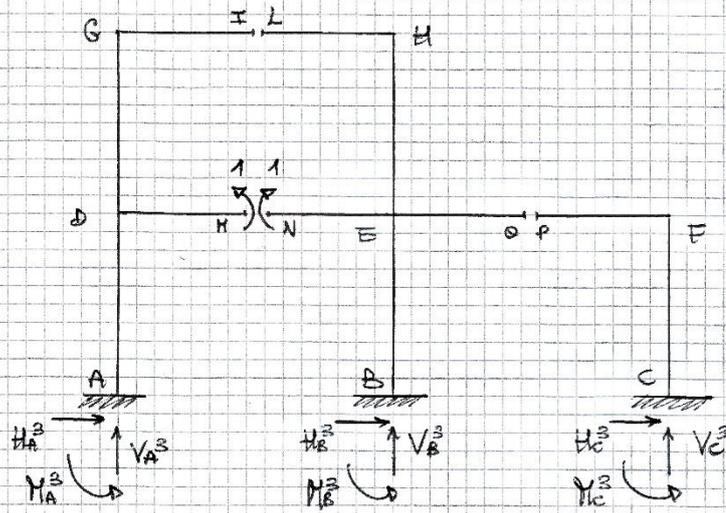


$$\begin{cases} H_A^e = 0 \\ V_A^e = 1 \\ M_A^e = 1 \cdot \frac{L}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} H_B^e = 0 \\ V_B^e = -1 \\ M_B^e = 1 \cdot \frac{L}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} H_C^e = 0 \\ V_C^e = 0 \\ M_C^e = 0 \end{cases}$$

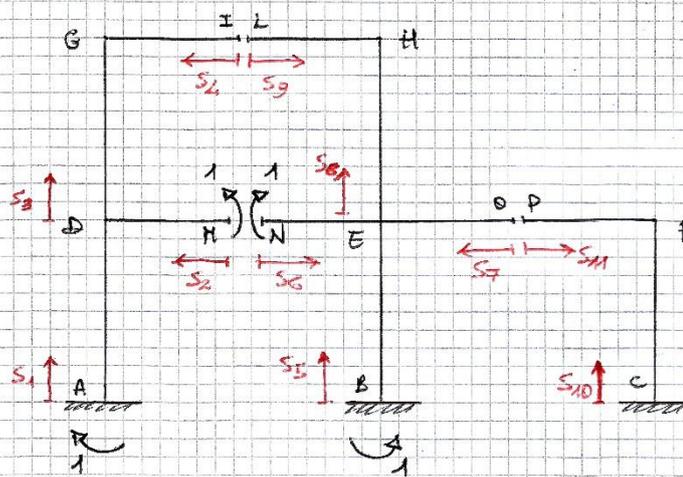


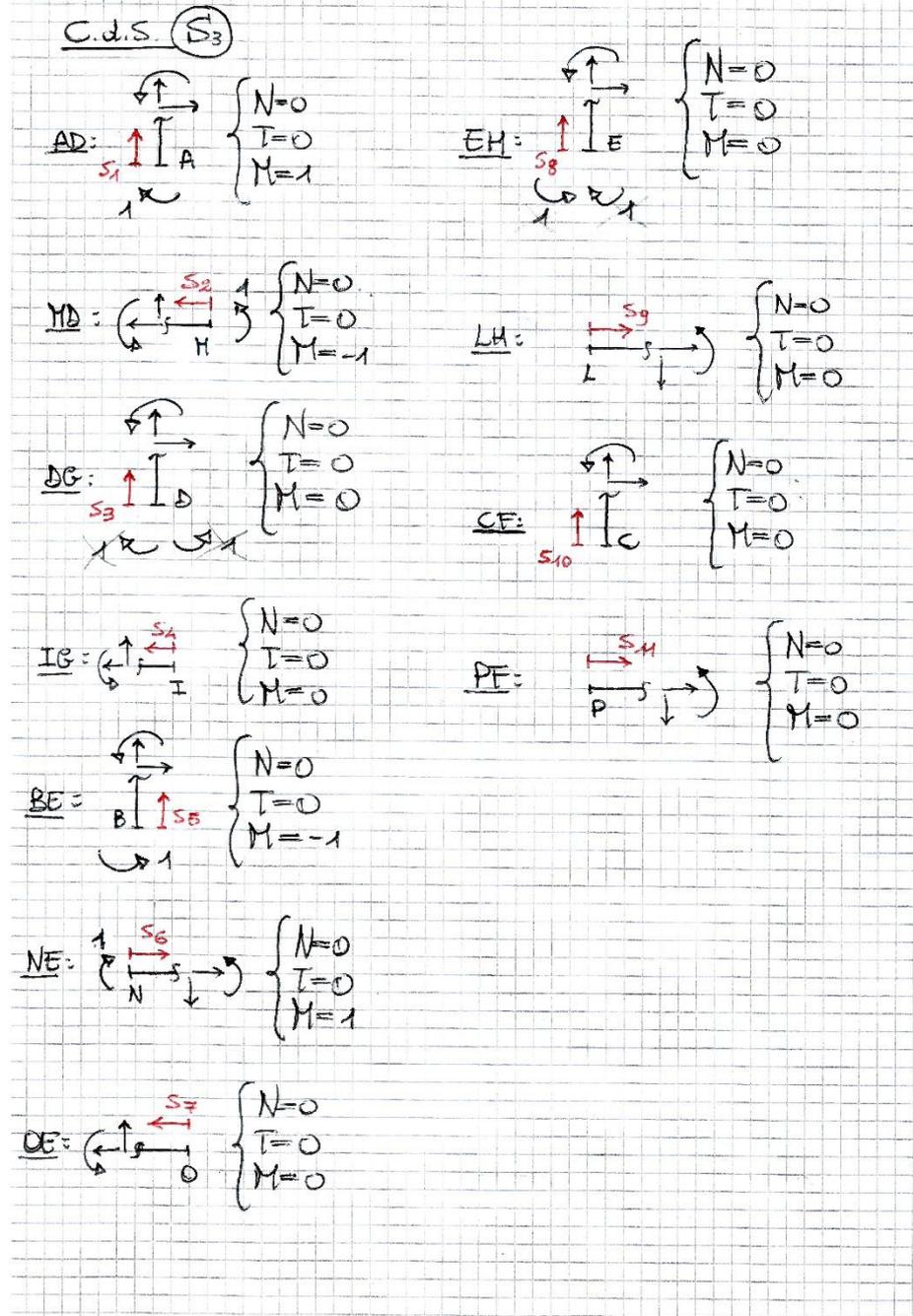


SISTEMA  $S_3$

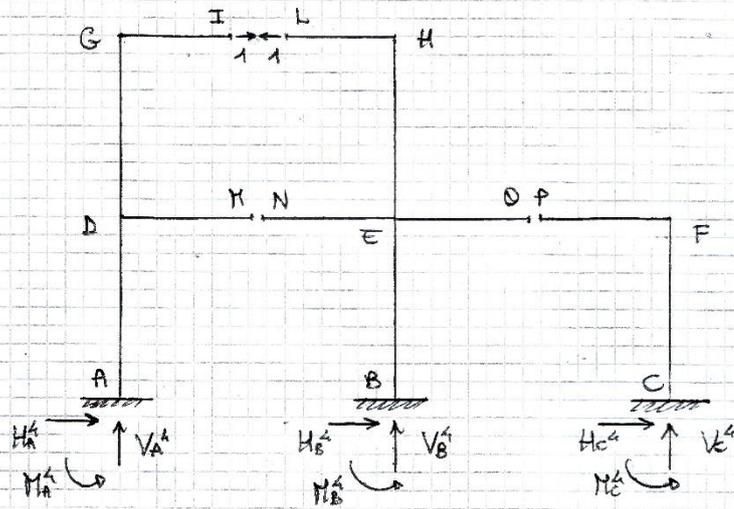


$$\begin{cases} H_A^3 = 0 \\ V_A^3 = 0 \\ M_A^3 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} H_B^3 = 0 \\ V_B^3 = 0 \\ M_B^3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} H_C^3 = 0 \\ V_C^3 = 0 \\ M_C^3 = 0 \end{cases}$$





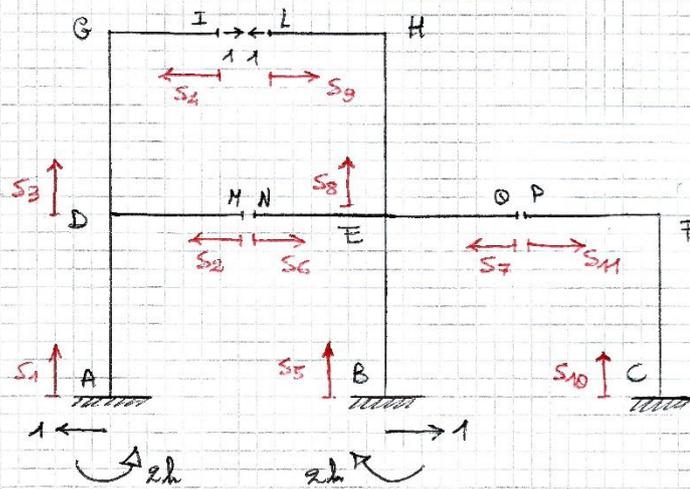
SISTEMA (S<sub>4</sub>)

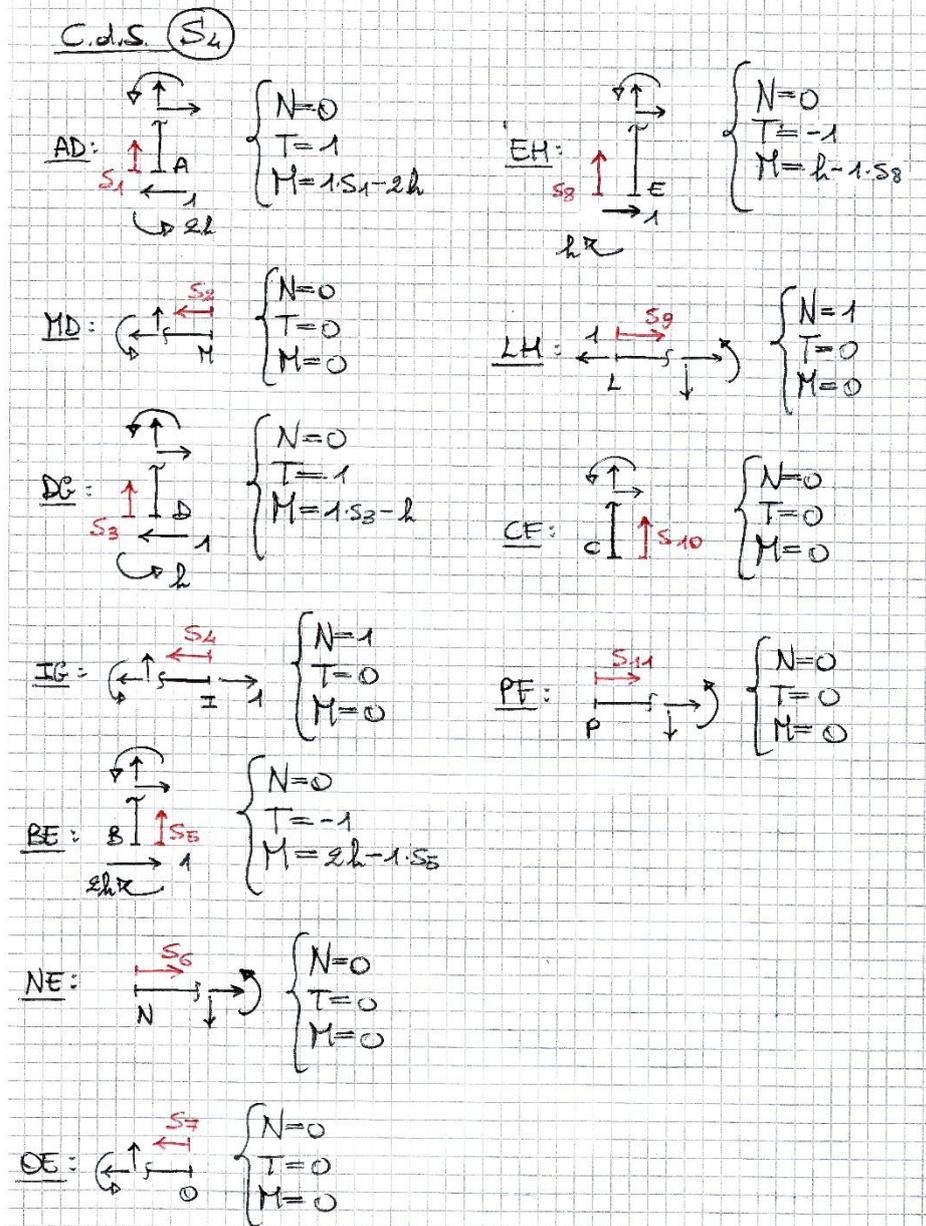


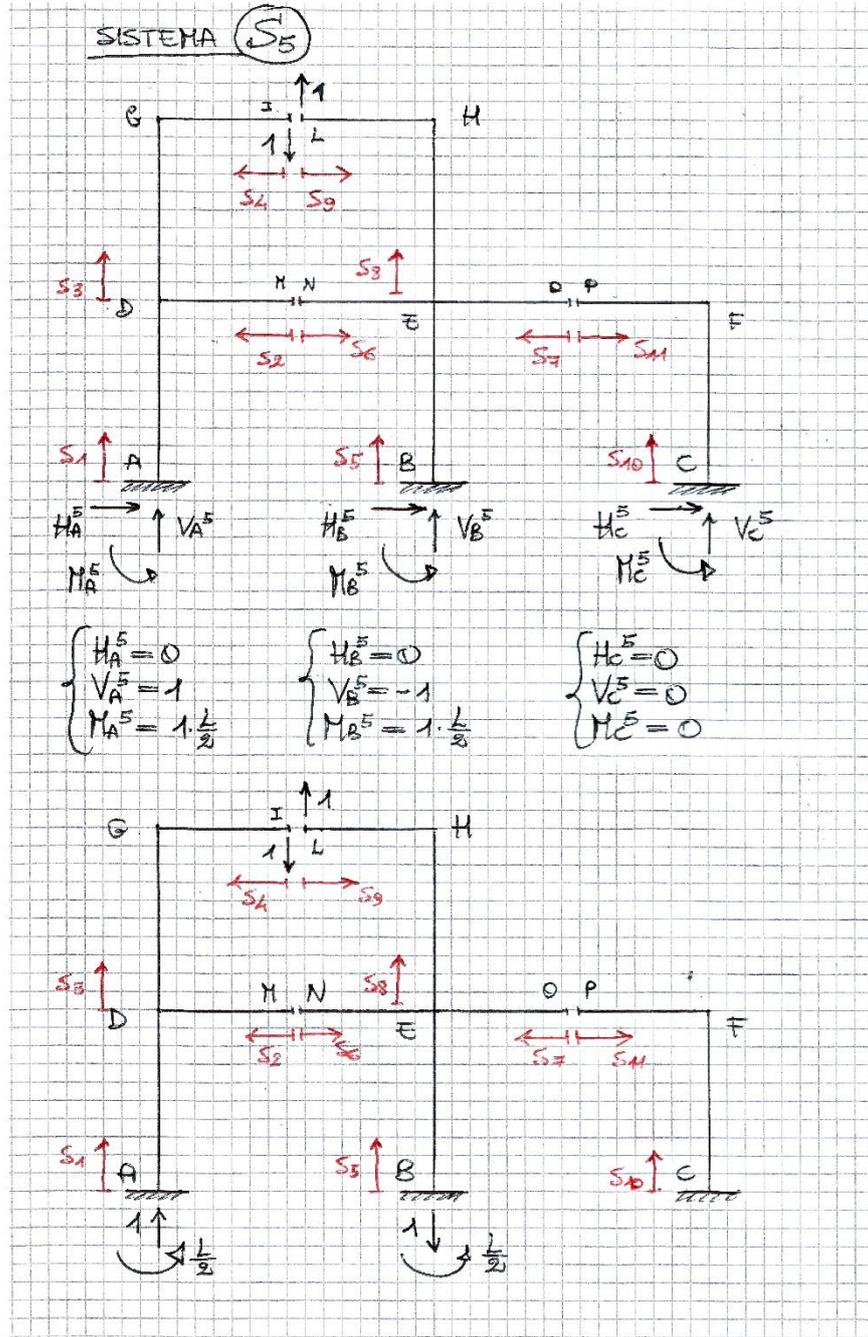
$$\begin{cases} H_A^k = -1 \\ V_A^k = 0 \\ M_A^k = 1 \cdot 2l \end{cases}$$

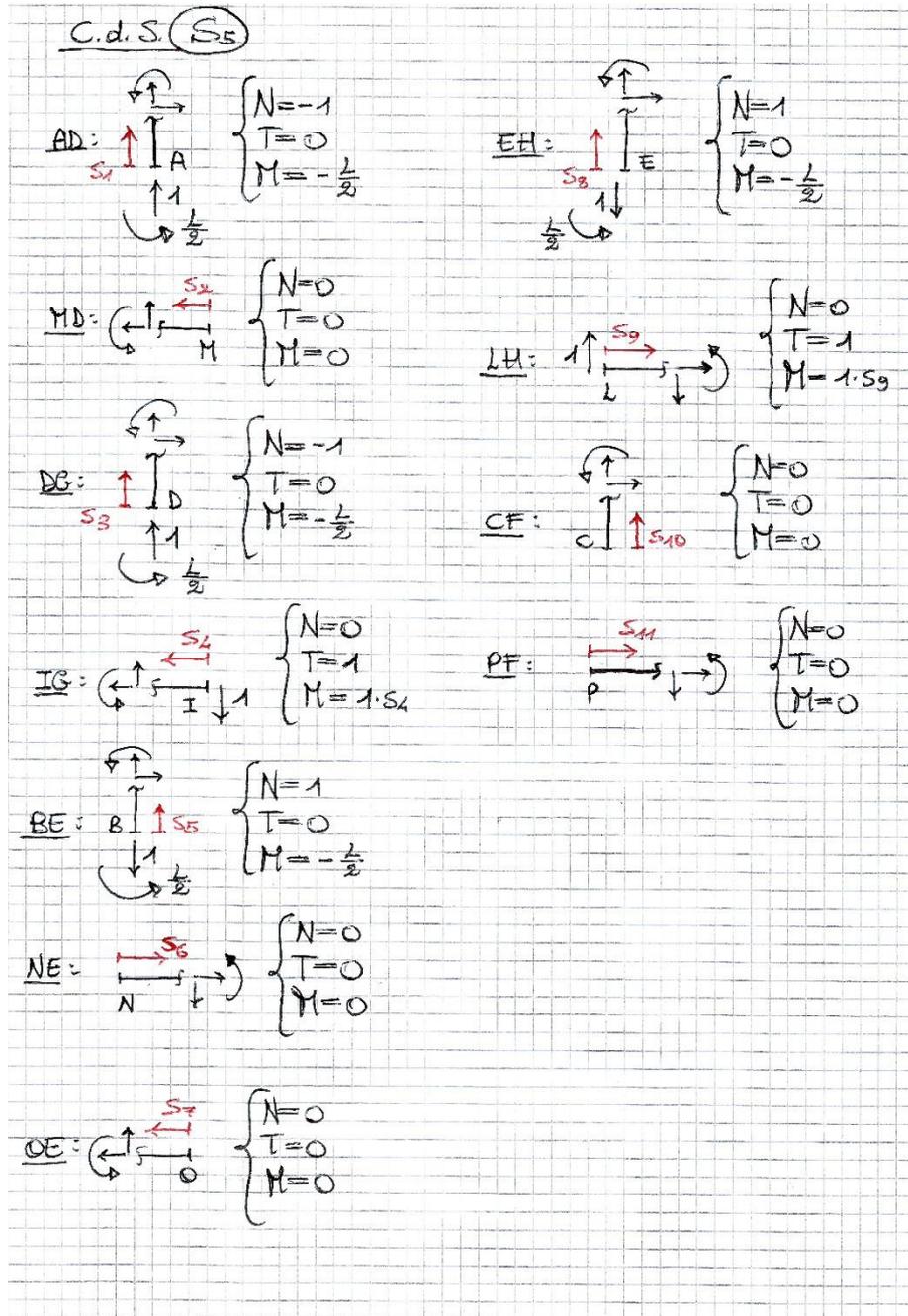
$$\begin{cases} H_B^k = 1 \\ V_B^k = 0 \\ M_B^k = -1 \cdot 2l \end{cases}$$

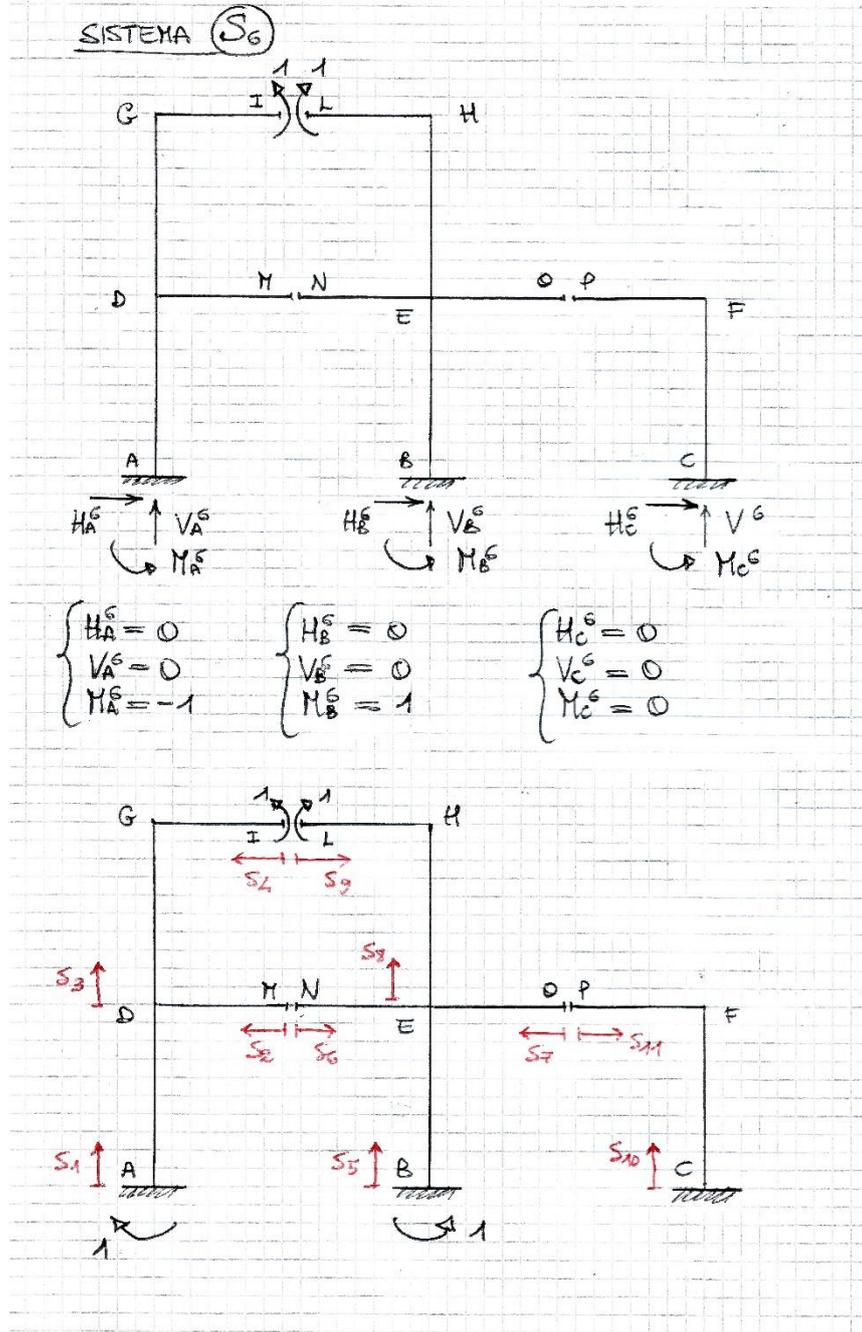
$$\begin{cases} H_C^k = 0 \\ V_C^k = 0 \\ M_C^k = 0 \end{cases}$$



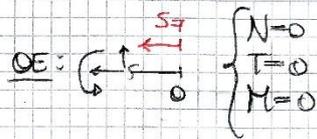
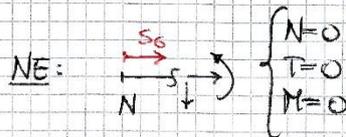
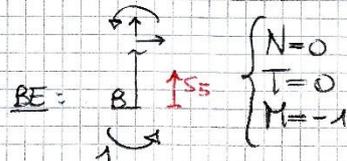
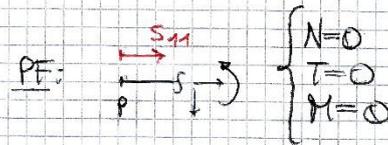
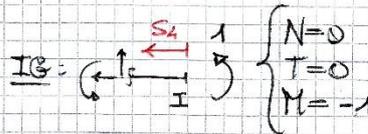
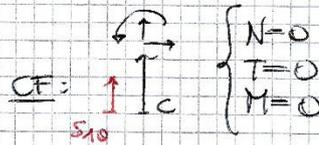
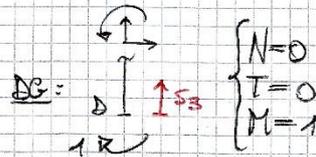
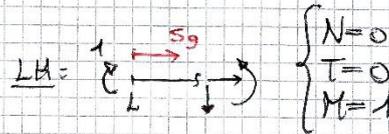
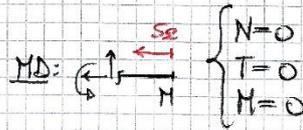
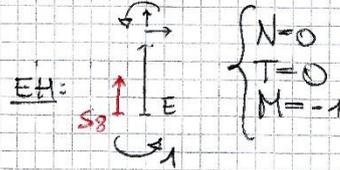
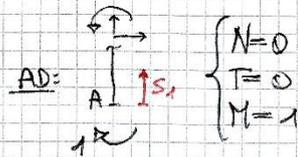




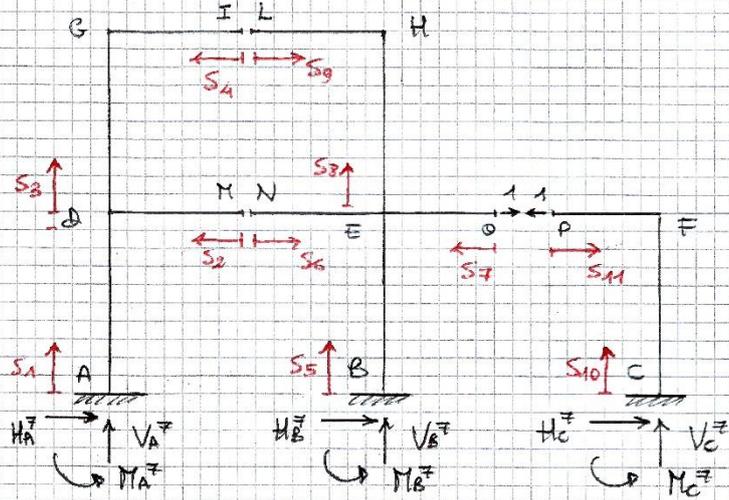




C.d.S. (S<sub>6</sub>)



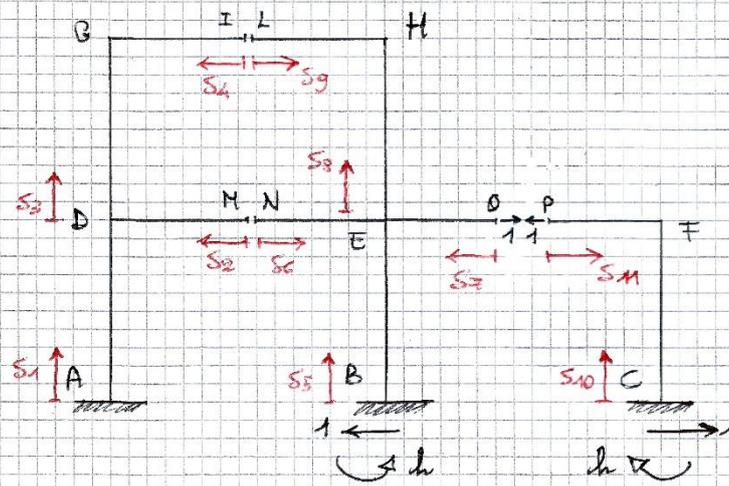
SISTEMA  $(S_7)$

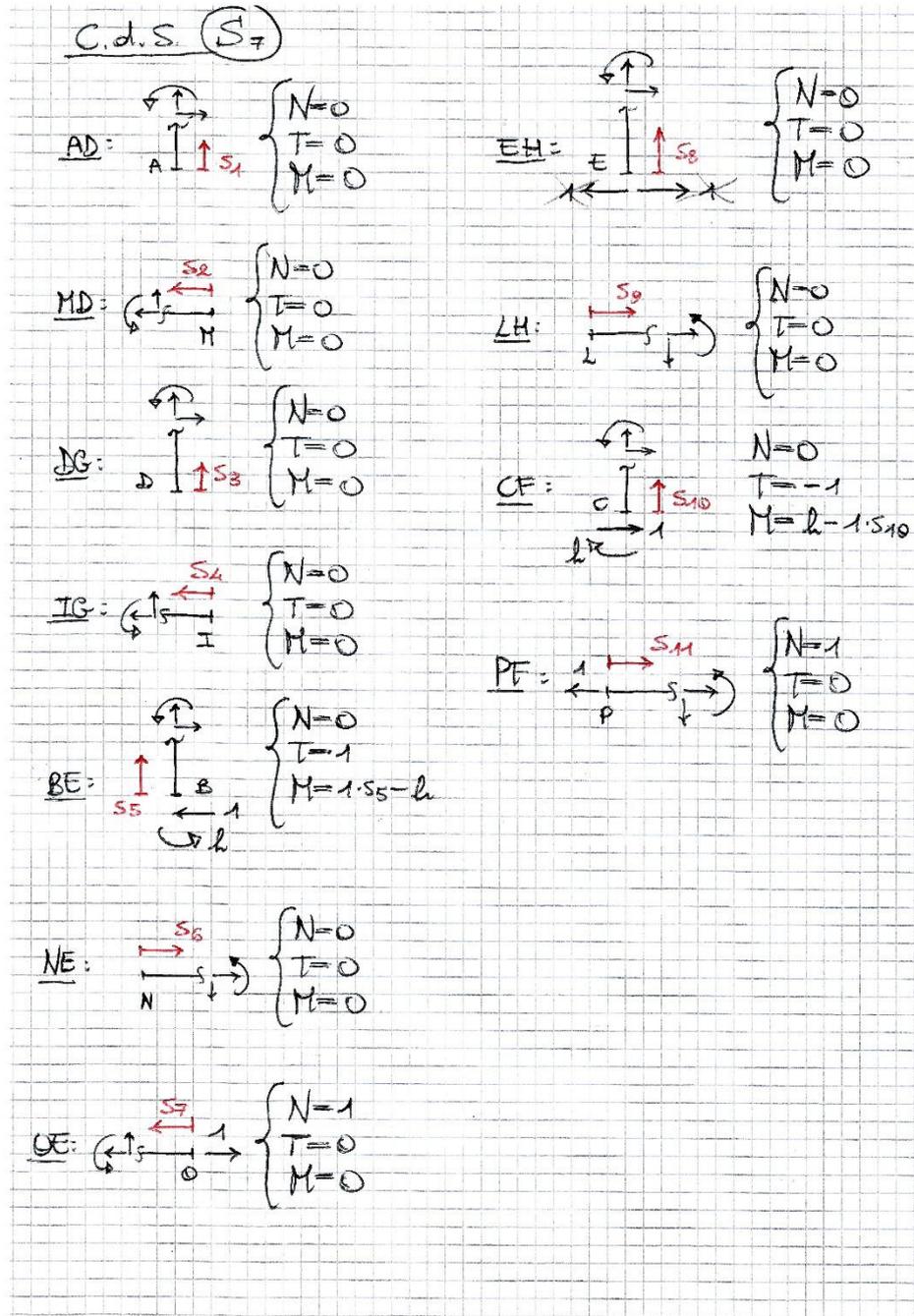


$$\begin{cases} H_A^z = 0 \\ V_A^z = 0 \\ M_A^z = 0 \end{cases}$$

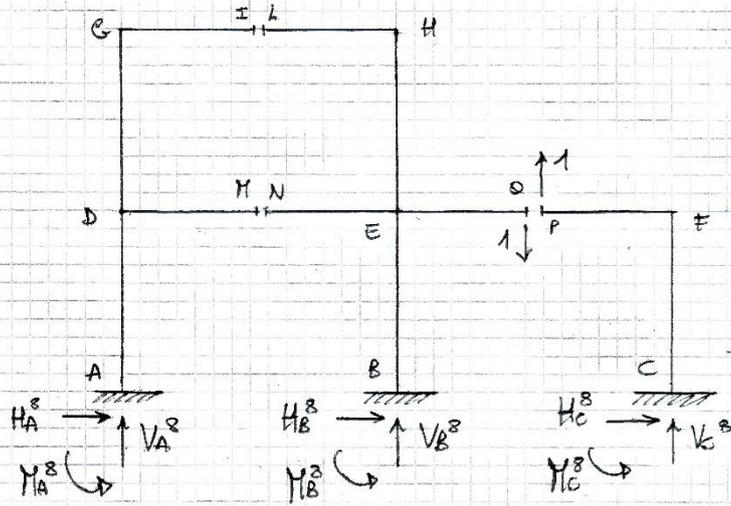
$$\begin{cases} H_B^z = -1 \\ V_B^z = 0 \\ M_B^z = 1 \cdot h \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_C^z = 1 \\ V_C^z = 0 \\ M_C^z = -1 \cdot h \end{cases}$$

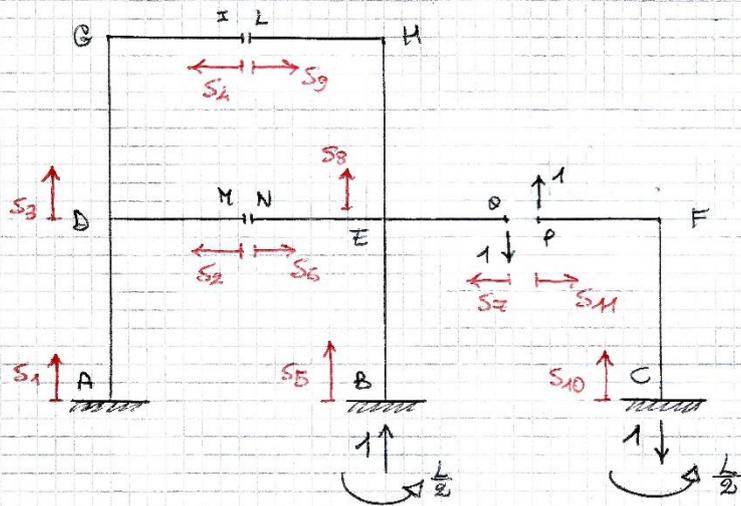




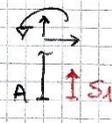
SISTEMA (S<sub>8</sub>)

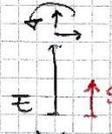


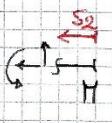
$$\begin{cases} H_A^B = 0 \\ V_A^B = 0 \\ M_A^B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} H_B^B = 0 \\ V_B^B = 1 \\ M_B^B = 1 \cdot \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} H_C^B = 0 \\ V_C^B = -1 \\ M_C^B = 1 \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

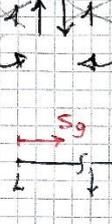


C.d.S. (S<sub>8</sub>)

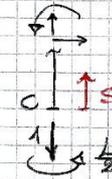
AD:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

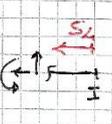
EH:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

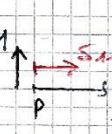
MD:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

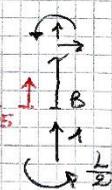
LH:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

DB:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

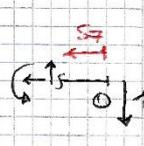
CE:   $\begin{cases} N=1 \\ T=0 \\ M=-\frac{1}{2} \end{cases}$

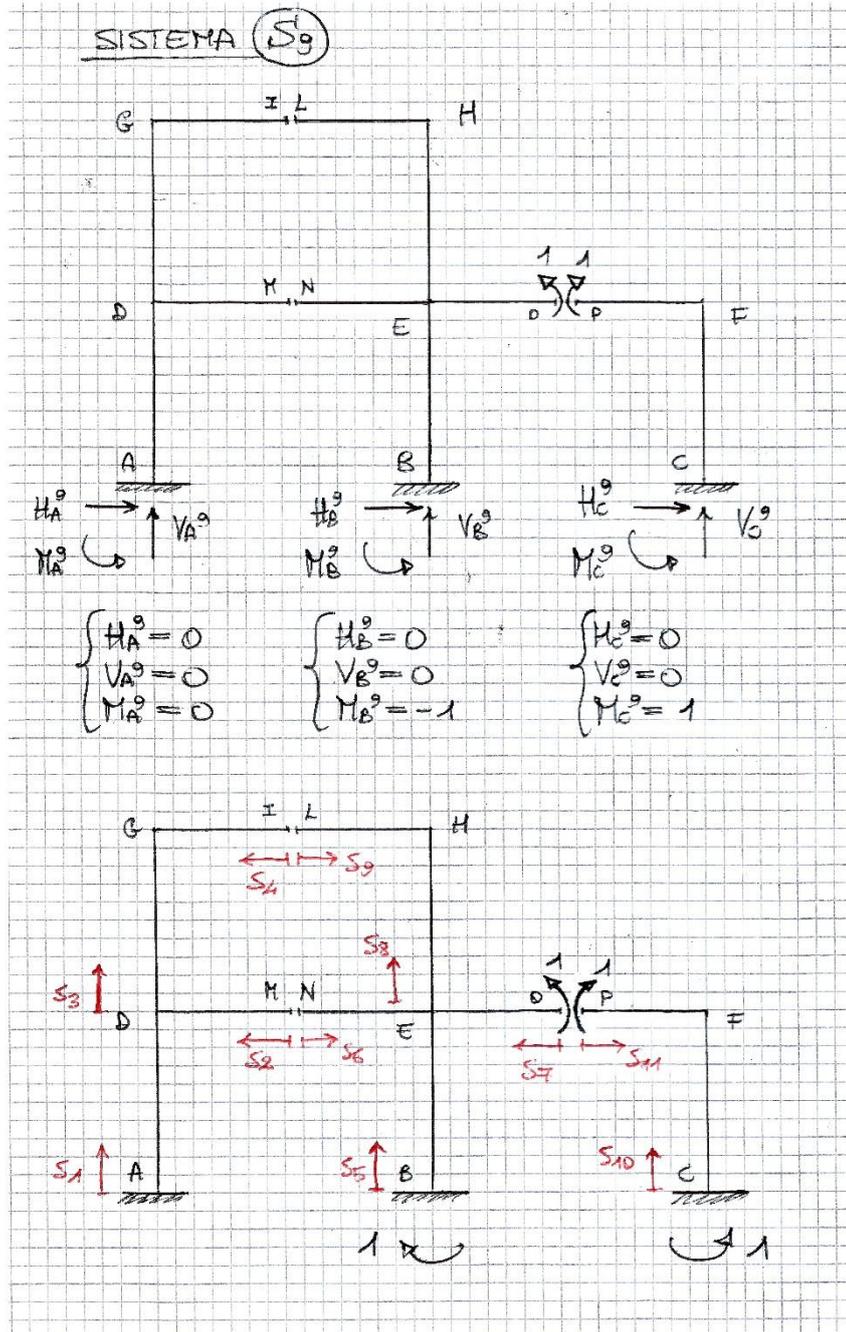
IG:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

PF:   $\begin{cases} N=0 \\ T=1 \\ M=1 \cdot S_{11} \end{cases}$

BE:   $\begin{cases} N=-1 \\ T=0 \\ M=-\frac{1}{2} \end{cases}$

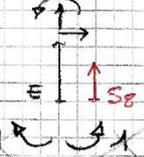
NE:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

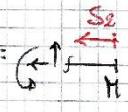
OE:   $\begin{cases} N=0 \\ T=1 \\ M=1 \cdot S_7 \end{cases}$

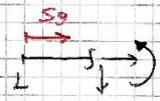


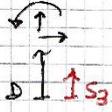
C.d.S. (S<sub>9</sub>)

AD:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

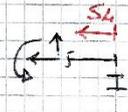
EH:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

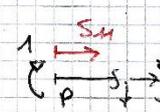
MD:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

LH:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

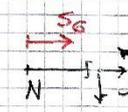
DG:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

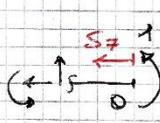
CE:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=-1 \end{cases}$

IG:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

PF:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=1 \end{cases}$

BE:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=1 \end{cases}$

NE:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=0 \end{cases}$

OE:   $\begin{cases} N=0 \\ T=0 \\ M=-1 \end{cases}$

Calcolo degli spostamenti generalizzati  $\eta_{i0}$  e  $\eta_{ik}$  :

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{10} &= \int_{L_e}^{(1 \rightarrow 0)} \dots = \int_{L_i}^{(1 \rightarrow 0)} \dots = \int_{L_{iAD}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iBD}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iDE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iFE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iGE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iHE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iIE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iJE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iKE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iLE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iME}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iNE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iOE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iPE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iQE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iRE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iSE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iTE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iUE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iVE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iWE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iXE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iYE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots + \int_{L_{iZE}}^{(1 \rightarrow 0)} \dots \\
 &= \int_0^h \frac{M_{AD} \cdot M_{AD}^1}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{M_{BE} \cdot M_{BE}^1}{EJ_2} ds = \int_0^h \frac{(p_1+p_2) \frac{L^2}{8} \cdot (h-s_1)}{EJ_2} ds + \\
 &+ \int_0^h \frac{(p_1+p_2-p_3) \frac{L^2}{8} \cdot (h-s_5)}{EJ_2} ds = \left| \frac{(p_1+p_2) \frac{L^2}{8} \cdot (h s_1 - \frac{s_1^2}{2})}{EJ_2} \right|_0^h + \\
 &+ \left| \frac{(p_1+p_2-p_3) \frac{L^2}{8} \cdot (h s_5 - \frac{s_5^2}{2})}{EJ_2} \right|_0^h = \frac{(p_1+p_2) \frac{L^2}{8} \cdot \frac{h^2}{2}}{EJ_2} + \frac{(p_1+p_2-p_3) \frac{L^2}{8} \cdot \frac{h^2}{2}}{EJ_2} = \\
 &= \frac{(p_1+p_2) \frac{L^2}{16} \cdot h^2}{EJ_2} + \frac{(p_1+p_2-p_3) \frac{L^2}{16} \cdot h^2}{EJ_2} = 0,006846492 + 0,003423246 \\
 &= 0,010269738 \text{ [M]} = \left( \frac{\text{KN}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{KN}} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{11} &= \int_{L_e}^{(1 \rightarrow 1)} \dots = \int_{L_i}^{(1 \rightarrow 1)} \dots = \int_0^h \frac{(s_1-h)^2}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{(h-s_5)^2}{EJ_2} ds = \\
 &= \int_0^h \frac{(s_1^2 - 2s_1h + h^2)}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{(h^2 - 2hs_5 + s_5^2)}{EJ_2} ds = \\
 &= \left| \frac{s_1^3}{3} - s_1^2 h + h^2 s_1 \right|_0^h + \left| \frac{h^2 s_5}{2} - h s_5^2 + \frac{s_5^3}{3} \right|_0^h = \\
 &= \frac{h^3}{3} - h^2 h + h^2 h + \frac{h^3}{3} - h^2 h + \frac{h^3}{3} = \frac{2h^3}{3} = 0,000450797 \text{ [mm]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{12} &= \int_{L_e}^{(1 \rightarrow 2)} \dots = \int_{L_i}^{(1 \rightarrow 2)} \dots = \int_0^h \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (s_1-h)}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (h-s_5)}{EJ_2} ds = \\
 &= \left| \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (h s_1 - \frac{s_1^2}{2})}{EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{(-\frac{1}{2}) \cdot (h s_5 - \frac{s_5^2}{2})}{EJ_2} \right|_0^h = \frac{L \cdot h^2}{4EJ_2} + \frac{L \cdot (-h^2)}{4EJ_2} = 0 \text{ [mm]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{13} &= \int_{L_e}^{(1 \rightarrow 3)} \dots = \int_{L_i}^{(1 \rightarrow 3)} \dots = \int_0^h \frac{(s_1-h)}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{(s_5-h)}{EJ_2} ds = \\
 &= \left| \frac{s_1^2}{2} - h s_1 \right|_0^h + \left| \frac{s_5^2}{2} - h s_5 \right|_0^h = \frac{-h^2}{2EJ_2} + \frac{-h^2}{2EJ_2} = \\
 &= -0,000169049 \text{ [1/KN]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{14} &= \int_{Li}^{Li(1+4)} = \int_{Li}^{Li(1+4)} = \int_0^h \frac{(s_1 - 2h)(s_1 - h)}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{(2h - s_5)(h - s_5)}{EJ_2} ds = \\
 &= \int_0^h \frac{(s_1^2 - 2hs_1 - 2hs_1 + 2h^2)}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{(2h^2 - 2hs_5 - hs_5 + s_5^2)}{EJ_2} ds = \\
 &= \left| \frac{s_1^3}{3} - \frac{4}{2}hs_1^2 + 2h^2s_1 \right|_0^h + \left| \frac{2h^2s_5 - \frac{2}{2}hs_5^2 + \frac{s_5^3}{3}}{EJ_2} \right|_0^h = \\
 &= \frac{h^3}{3} - \frac{4}{2}h^3 + 2h^3 + \frac{2h^2s_5 - \frac{2}{2}hs_5^2 + \frac{s_5^3}{3}}{EJ_2} = \\
 &= \frac{(2 - 9 + 12) \cdot h^3}{6EJ_2} + \frac{(12 - 9 + 2) \cdot h^3}{6EJ_2} = \frac{5h^3}{3EJ_2} = 0,001126994 \left[ \frac{m}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{15} &= \int_{Li}^{Li(1+5)} = \int_{Li}^{Li(1+5)} = \int_0^h \frac{(-\frac{1}{2})(s_1 - h)}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{(-\frac{1}{2})(h - s_5)}{EJ_2} ds = \\
 &= M_{12} = 0 \left[ \frac{m}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$1 \cdot M_{16} = \int_{Li}^{Li(1+6)} = \int_{Li}^{Li(1+6)} = \int_0^h \frac{(s_1 - h)}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{(s_5 - h)}{EJ_2} ds = M_{13} = -0,000169049 \left[ \frac{1}{KN} \right]$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{17} &= \int_{Li}^{Li(1+7)} = \int_{Li}^{Li(1+7)} = \int_0^h \frac{(s_5 - h)(h - s_5)}{EJ_2} ds = \int_0^h \frac{(2hs_5 - s_5^2 - h^2)}{EJ_2} ds = \\
 &= \left| \frac{2hs_5^2 - \frac{s_5^3}{3} - h^2s_5}{EJ_2} \right|_0^h = \frac{h^3 - \frac{h^3}{3} - h^3}{EJ_2} = -0,000225398 \left[ \frac{m}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{18} &= \int_{Li}^{Li(1+8)} = \int_{Li}^{Li(1+8)} = \int_0^h \frac{(-\frac{1}{2})(h - s_5)}{EJ_2} ds = \left| \frac{(-\frac{1}{2})(\frac{hs_5^2}{2} - hs_5)}{EJ_2} \right|_0^h = \\
 &= \frac{-\frac{h^2}{4} \cdot h}{EJ_2} = -0,000253573 \left[ \frac{m}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{19} &= \int_{Li}^{Li(1+9)} = \int_{Li}^{Li(1+9)} = \int_0^h \frac{(h - s_5)}{EJ_2} ds = \left| \frac{hs_5 - \frac{s_5^2}{2}}{EJ_2} \right|_0^h = \\
 &= \frac{-\frac{h^2}{2}}{EJ_2} = -0,000084524 \left[ \frac{1}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{20} &= \int_0^h \mathcal{L}_e^{(2+0)} = \int_0^h \mathcal{L}_i^{(2+0)} = \int_0^h \frac{(p_1+p_2) \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \frac{1}{2}}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{p_2 \cdot \frac{S_2^2}{2} \cdot S_2}{EJ_4} \cdot ds + \\
 &+ \int_0^h \frac{(p_3-p_1-p_2) \cdot \frac{L^2}{2} \cdot \frac{1}{2}}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{(-p_2) \cdot \frac{S_2^2}{2} \cdot S_2}{EJ_4} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{(p_1+p_2) \cdot L^3 \cdot S_1}{16 EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{p_2 \cdot S_2^3}{8 EJ_4} \right|_0^{L/2} + \left| \frac{(p_3-p_1-p_2) \cdot L^3 \cdot S_1}{16 EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{(-p_2) \cdot S_2^3}{16 EJ_4} \right|_0^{L/2} = \\
 &= \frac{(p_1+p_2) \cdot L^3 \cdot h}{16 EJ_2} + \frac{p_2 \cdot L^4}{128 EJ_4} + \frac{(p_3-p_1-p_2) \cdot L^3 \cdot h}{16 EJ_2} + \frac{(-p_2) \cdot L^4}{128 EJ_4} = \\
 &= \frac{p_3 \cdot L^3 \cdot h}{16 EJ_2} = 0,005134869 \text{ [m]} = \left( \frac{\text{KN}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{m}^4} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{KN}} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{21} &= \int_0^h \mathcal{L}_e^{(2+1)} = \int_0^h \mathcal{L}_i^{(2+1)} = \int_0^h \frac{(h-s_1) \cdot \left(\frac{L}{2}\right)}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{(S_2-h) \cdot \left(\frac{L}{2}\right)}{EJ_2} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{(h \cdot s_1 - \frac{s_1^2}{2}) \cdot \left(\frac{L}{2}\right)}{EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{\left(\frac{S_2^2}{2} - h \cdot S_2\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right)}{EJ_2} \right|_0^h = \frac{h^2 \cdot L}{4 EJ_2} + \frac{-h^2 \cdot L}{4 EJ_2} = 0 \left[ \frac{\text{m}}{\text{KN}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{22} &= \int_0^h \mathcal{L}_e^{(2+2)} = \int_0^h \mathcal{L}_i^{(2+2)} = \int_0^h \frac{L^2}{4 EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{S_2^2}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L^2}{4 EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{S_2^2}{EJ_4} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{L^2 \cdot S_1}{4 EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{S_2^3}{3 EJ_2} \right|_0^{L/2} + \left| \frac{L^2 \cdot S_1}{4 EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{S_2^3}{3 EJ_4} \right|_0^{L/2} = \\
 &= \frac{L^2 \cdot h}{2 EJ_2} + \frac{L^2 \cdot L^3}{24 EJ_4} = 0,000760721 + 0,001025781 = 0,001786502 \left[ \frac{\text{m}}{\text{KN}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{23} &= \int_0^h \mathcal{L}_e^{(2+3)} = \int_0^h \mathcal{L}_i^{(2+3)} = \int_0^h \frac{\left(-\frac{L}{2}\right) \cdot 1}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{(-S_2)}{EJ_4} \cdot ds + \int_0^h \frac{L \cdot S_1}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{S_2}{EJ_4} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{(-L) \cdot S_1}{2 EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{-S_2^2}{2 EJ_4} \right|_0^{L/2} + \left| \frac{L \cdot S_1^2}{2 EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{S_2^2}{2 EJ_4} \right|_0^{L/2} = \\
 &= \frac{-L \cdot h}{2 EJ_2} + \frac{-L^2}{8 EJ_4} + \frac{L \cdot h}{2 EJ_2} + \frac{L^2}{8 EJ_4} = 0 \left[ \frac{1}{\text{KN}} \right] = \left( \frac{\text{m}^2}{\text{KN}} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{m}^4} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{24} &= \int_0^h \mathcal{L}_e^{(2+4)} = \int_0^h \mathcal{L}_i^{(2+4)} = \int_0^h \frac{(2h-s_1) \cdot \left(\frac{L}{2}\right)}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{(S_2-2h) \cdot \left(\frac{L}{2}\right)}{EJ_2} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{(2h \cdot s_1 - \frac{s_1^2}{2}) \cdot \frac{L}{2}}{EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{\left(\frac{S_2^2}{2} - 2h \cdot S_2\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right)}{EJ_2} \right|_0^h = \frac{(2h^2 - \frac{h^2}{2}) \cdot \frac{L}{2}}{EJ_2} + \frac{\left(\frac{h^2}{2} - 2h^2\right) \cdot \frac{L}{2}}{EJ_2} = \\
 &= \frac{3h^2 L}{4 EJ_2} + \frac{-3h^2 L}{4 EJ_2} = 0 \left[ \frac{\text{m}}{\text{KN}} \right]
 \end{aligned}$$

$$1. M_{25} = \frac{Q^{(2+5)}}{L_2} = \frac{Q^{(2+5)}}{L_2} = \int_0^h \frac{L^2}{4EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L^2}{4EJ_2} \cdot ds = \left| \frac{L^2 \cdot s_1}{4EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{L^2 \cdot s_2}{4EJ_2} \right|_0^h =$$

$$= \frac{L^2 \cdot h}{4EJ_2} + \frac{L^2 \cdot h}{4EJ_2} = \frac{L^2 \cdot h}{2EJ_2} = 0,000760721 \left[ \frac{m}{kN} \right]$$

$$1. M_{26} = \frac{Q^{(2+6)}}{L_2} = \frac{Q^{(2+6)}}{L_2} = \int_0^h \frac{1 \cdot (-\frac{L}{2})}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{(-1) \cdot (\frac{L}{2})}{EJ_2} \cdot ds = \frac{-L \cdot h}{2EJ_2} + \frac{L \cdot h}{2EJ_2} = 0 \left[ \frac{1}{kN} \right]$$

$$1. M_{27} = \frac{Q^{(2+7)}}{L_2} = \frac{Q^{(2+7)}}{L_2} = \int_0^h \frac{(h-s_1) \cdot (\frac{L}{2})}{EJ_2} \cdot ds = \left| \frac{\frac{L}{2} \cdot (h \cdot s_1 - \frac{s_1^2}{2})}{EJ_2} \right|_0^h =$$

$$= \frac{L \cdot h^2}{4EJ_2} = 0,000253573 \left[ \frac{m}{kN} \right]$$

$$1. M_{28} = \frac{Q^{(2+8)}}{L_2} = \frac{Q^{(2+8)}}{L_2} = \int_0^h \frac{L^2}{4EJ_2} \cdot ds = \frac{L^2 \cdot h}{4EJ_2} = 0,00038036 \left[ \frac{m}{kN} \right]$$

$$1. M_{29} = \frac{Q^{(2+9)}}{L_2} = \frac{Q^{(2+9)}}{L_2} = \int_0^h \frac{-L}{2EJ_2} \cdot ds = \frac{-L \cdot h}{2EJ_2} = -0,000126736 \left[ \frac{1}{kN} \right]$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{30} &= \varphi_{x2}^{(3+0)} = \varphi_{x1}^{(3+0)} = \int_0^h \frac{(-p_1 - p_2) \cdot \frac{L^2}{2}}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{(-p_2) \cdot \frac{S_2^2}{2}}{EJ_4} \cdot ds + \int_0^h \frac{(p_2 - p_1 - p_2) \cdot \frac{L^2}{2}}{EJ_2} \cdot ds + \\
 &+ \int_0^{L/2} \frac{(-p_2) \cdot \frac{S_2^2}{2}}{2EJ_4} \cdot ds = \left| \frac{(p_1 + p_2) \cdot \frac{L^2}{2} \cdot S_1}{2EJ_2} \right|_0^h - \left| \frac{p_2 \cdot \frac{S_2^3}{6}}{6EJ_4} \right|_0^{L/2} - \left| \frac{(p_1 + p_2 - p_2) \cdot \frac{L^2}{2} \cdot S_1}{2EJ_2} \right|_0^h - \left| \frac{p_2 \cdot \frac{S_2^3}{6}}{6EJ_4} \right|_0^{L/2} \\
 &= -\frac{18 \cdot L^2 \cdot h}{8EJ_2} - \frac{12 \cdot L^3}{48EJ_4} - \frac{9 \cdot L^2 \cdot h}{8EJ_2} - \frac{12 \cdot L^3}{48EJ_4} = -\frac{27L^2 \cdot h}{8EJ_2} - \frac{L^3}{2EJ_4} = \\
 &= -0,005134869 - 0,006154687 = -0,011289556 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{31} &= \varphi_{x2}^{(3+1)} = \varphi_{x1}^{(3+1)} = \int_0^h \frac{(S_1 - h)}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{(S_2 - h)}{EJ_2} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{\frac{S_1^2}{2} - h \cdot S_1}{EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{\frac{S_2^2}{2} - h \cdot S_2}{EJ_2} \right|_0^h = -\frac{h^2}{2EJ_2} - \frac{h^2}{2EJ_2} = -\frac{h^2}{EJ_2} = \\
 &= -0,000169049 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{32} &= \varphi_{x2}^{(2+2)} = \varphi_{x1}^{(2+2)} = \int_0^h \frac{(-\frac{L}{2})}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{-S_2}{EJ_4} \cdot ds + \int_0^h \frac{\frac{L}{2}}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{S_2}{EJ_4} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{-L \cdot S_1}{2EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{-S_2^2}{2EJ_4} \right|_0^{L/2} + \left| \frac{L \cdot S_1}{2EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{S_2^2}{2EJ_4} \right|_0^{L/2} = -\frac{L \cdot h}{2EJ_2} - \frac{L^2}{8EJ_4} + \frac{L \cdot h}{2EJ_2} + \frac{L^2}{8EJ_4} = \\
 &= 0 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{33} &= \varphi_{x2}^{(3+3)} = \varphi_{x1}^{(3+3)} = \int_0^h \frac{1}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{1}{EJ_4} \cdot ds + \int_0^h \frac{1}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{1}{EJ_4} \cdot ds = \\
 &= \frac{h}{EJ_2} + \frac{L}{2EJ_4} + \frac{h}{EJ_2} + \frac{L}{2EJ_4} = \frac{2h}{EJ_2} + \frac{L}{EJ_4} = \\
 &= 0,00084524 + 0,000341927 = 0,001187167 \text{ [rad]} = \left( \frac{\text{mm} \cdot \text{mm}}{\text{KN} \cdot \text{mm}^4} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{34} &= \varphi_{x2}^{(3+4)} = \varphi_{x1}^{(3+4)} = \int_0^h \frac{S_1 - 2h}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{S_2 - 2h}{EJ_2} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{\frac{S_1^2}{2} - 2h \cdot S_1}{EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{\frac{S_2^2}{2} - 2h \cdot S_2}{EJ_2} \right|_0^h = -\frac{3h^2}{2EJ_2} - \frac{3h^2}{2EJ_2} = -\frac{3h^2}{EJ_2} = \\
 &= -0,000507147 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$1. M_{35} = \int_{L_a}^{L_b} \frac{1}{EI} ds = \int_{L_a}^{L_b} \frac{1}{EI} ds = 0 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN}} \right]$$

$$1. M_{36} = \int_{L_a}^{L_b} \frac{1}{EI} ds = \int_{L_a}^{L_b} \frac{1}{EI} ds = \frac{2L}{EI} = 0,00084524 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN.m}} \right]$$

$$1. M_{37} = \int_{L_a}^{L_b} \frac{L-s}{EI} ds = \left[ \frac{Ls - \frac{s^2}{2}}{EI} \right]_0^L = 0,00084524 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN}} \right]$$

$$1. M_{38} = \int_{L_a}^{L_b} \frac{L}{EI} ds = \frac{L \cdot L}{EI} = 0,000126786 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN}} \right]$$

$$1. M_{39} = \int_{L_a}^{L_b} \frac{-1}{EI} ds = \frac{-L}{EI} = -0,00042262 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN.m}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{40} &= \int_0^h \frac{p_1 + p_2}{2} \cdot \frac{L^2}{8} \cdot (2h - s_1) \cdot ds + \int_0^h \frac{p_1 \cdot \frac{L^2}{8} \cdot (2h - s_3)}{EJ_1} \cdot ds + \\
 &+ \int_0^h \frac{(p_1 + p_2 - p_3) \cdot \frac{L^2}{8} \cdot (2h - s_5)}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{p_1 \cdot \frac{L^2}{8} \cdot (2h - s_2)}{EJ_1} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{(p_1 + p_2) \cdot L^2 \cdot (2hs_1 - \frac{s_1^2}{2})}{8EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{p_1 \cdot L^2 \cdot (2hs_3 - \frac{s_3^2}{2})}{8EJ_1} \right|_0^h + \left| \frac{(p_1 + p_2 - p_3) \cdot L^2 \cdot (2hs_5 - \frac{s_5^2}{2})}{8EJ_2} \right|_0^h \\
 &+ \left| \frac{p_1 \cdot L^2 \cdot (2hs_2 - \frac{s_2^2}{2})}{8EJ_1} \right|_0^h = \\
 &= \frac{(p_1 + p_2) \cdot L^2 \cdot 3h^2}{16EJ_2} + \frac{p_1 \cdot L^2 \cdot h^2}{16EJ_1} + \frac{(p_1 + p_2 - p_3) \cdot L^2 \cdot 3h^2}{16EJ_2} + \frac{p_1 \cdot L^2 \cdot h^2}{8EJ_1} = \\
 &= \frac{(2p_1 + 2p_2 - p_3) \cdot L^2 \cdot 3h^2}{16EJ_2} + \frac{p_1 \cdot L^2 \cdot h^2}{8EJ_1} = \frac{21 \cdot L^2 \cdot h^2}{16EJ_2} + \frac{5 \cdot L^2 \cdot h^2}{8EJ_1} = \\
 &= 0,030809217 + 0,008971403 = 0,03978062 \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{41} &= \int_0^h \frac{(s_1 - 2)(s_1 - 2h)}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{(2h - s_5)(2h - s_5)}{EJ_2} \cdot ds = \\
 &= \int_0^h \frac{s_1^2 - 3s_1 \cdot h + 2h^2}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{2h^2 - 3s_5 \cdot h + s_5^2}{EJ_2} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{s_1^3}{3} - \frac{3h \cdot s_1^2}{2} + 2h^2 \cdot s_1 \right|_0^h + \left| \frac{2h^2 \cdot s_5}{2} - \frac{3h \cdot s_5^2}{2} + \frac{s_5^3}{3} \right|_0^h = \\
 &= \frac{h^3}{3} - \frac{3h^3}{2} + 2h^3 + \frac{2h^3}{2} - \frac{3h^3}{2} + \frac{h^3}{3} = \frac{(2 - 9 + 12)h^3}{6EJ_2} \cdot 2 = \\
 &= \frac{5h^3}{3EJ_2} = 0,001126994 \text{ [m]} \quad \left( \frac{\text{m}^3 \cdot \frac{\text{m}}{\text{KN}}}{\text{KN}} = \frac{\text{m}^4}{\text{KN}} \right)
 \end{aligned}$$

$$1 \cdot M_{42} = \int_0^h \frac{L \cdot (2h - s_1)}{2EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L \cdot (s_5 - 2h)}{2EJ_2} \cdot ds = 0 \text{ [m]}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{43} &= \int_0^h \frac{s_1 - 2h}{EJ_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{s_5 - 2h}{EJ_2} \cdot ds = \left| \frac{s_1^2}{2} - 2hs_1 \right|_0^h + \left| \frac{s_5^2}{2} - 2hs_5 \right|_0^h = \\
 &= \frac{-3h^2}{2EJ_2} - \frac{3h^2}{2EJ_2} = -\frac{3h^2}{EJ_2} = -0,000507147 \text{ [1/KN]} \\
 &\quad \left( \frac{\text{m}^2 \cdot \frac{\text{m}}{\text{KN}}}{\text{KN}} = \frac{1}{\text{KN}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1. M_{44} &= \int_0^L \frac{Q^{(4+4)}}{EI} = \int_0^L \frac{Q^{(4+4)}}{EI} = \int_0^L \frac{(s_1-2l)^2}{EI_2} ds + \int_0^L \frac{(s_2-l)^2}{EI_1} ds + \int_0^L \frac{(2l-s_5)^2}{EI_2} ds + \int_0^L \frac{(l-s_8)^2}{EI_1} ds = \\
 &= \int_0^L \frac{s_1^2 - 4ls_1 + 4l^2}{EI_2} ds + \int_0^L \frac{s_2^2 - 2ls_2 + l^2}{EI_1} ds + \int_0^L \frac{4l^2 - 4ls_5 + s_5^2}{EI_2} ds + \int_0^L \frac{l^2 - 2ls_8 + s_8^2}{EI_1} ds \\
 &= \left| \frac{s_1^3 - 2ls_1^2 + 4l^2s_1}{EI_2} \right|_0^L + \left| \frac{s_2^3 - ls_2^2 + l^2s_2}{EI_1} \right|_0^L + \left| \frac{4l^2s_5 - 2ls_5^2 + \frac{s_5^3}{3}}{EI_2} \right|_0^L + \left| \frac{l^2s_8 - ls_8^2 + \frac{s_8^3}{3}}{EI_1} \right|_0^L \\
 &= \frac{\frac{l^3}{3} - 2l^3 + 4l^3}{EI_2} + \frac{l^3 - l^3 + l^3}{EI_1} + \frac{\frac{l^3}{3} - l^3 + l^3}{EI_2} + \frac{l^3 - l^3 + \frac{l^3}{3}}{EI_1} = \\
 &= \frac{\frac{2l^3}{3} + 4l^3}{EI_2} + \frac{2l^3}{3EI_1} = \frac{14l^3}{3EI_2} + \frac{2l^3}{3EI_1} = \\
 &= 0,00315585 + 0,00086064 = 0,00401649 \left[ \frac{MN}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1. M_{45} &= \int_0^L \frac{Q^{(4+5)}}{EI} = \int_0^L \frac{Q^{(4+5)}}{EI} = \int_0^L \frac{L \cdot (2l-s_1)}{2EI_2} ds + \int_0^L \frac{L \cdot (l-s_2)}{2EI_1} ds + \int_0^L \frac{L \cdot (s_5-2l)}{2EI_2} ds + \\
 &+ \int_0^L \frac{L \cdot (s_8-l)}{2EI_1} ds = \left| \frac{L(2ls_1 - \frac{s_1^2}{2})}{2EI_2} \right|_0^L + \left| \frac{L(l s_2 - \frac{s_2^2}{2})}{2EI_1} \right|_0^L + \left| \frac{L(\frac{s_5^2}{2} - 2ls_5)}{2EI_2} \right|_0^L + \\
 &+ \left| \frac{L(\frac{s_8^2}{2} - ls_8)}{2EI_1} \right|_0^L = \frac{L \cdot 3l^2}{4EI_2} + \frac{L \cdot l^2}{4EI_1} + \frac{L \cdot (-3l^2)}{4EI_2} + \frac{L \cdot (-l^2)}{4EI_1} = 0 \left[ \frac{MN}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1. M_{46} &= \int_0^L \frac{Q^{(4+6)}}{EI} = \int_0^L \frac{Q^{(4+6)}}{EI} = \int_0^L \frac{(s_1-2l)}{EI_2} ds + \int_0^L \frac{(s_2-l)}{EI_1} ds + \int_0^L \frac{(s_5-2l)}{EI_2} ds + \int_0^L \frac{(s_8-l)}{EI_1} ds = \\
 &= \left| \frac{s_1^2 - 2ls_1}{EI_2} \right|_0^L + \left| \frac{s_2^2 - ls_2}{EI_1} \right|_0^L + \left| \frac{s_5^2 - 2ls_5}{EI_2} \right|_0^L + \left| \frac{s_8^2 - ls_8}{EI_1} \right|_0^L = \\
 &= \frac{-3l^2}{EI_2} - \frac{l^2}{EI_1} = -0,000839421 \left[ \frac{1}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1. M_{47} &= \int_0^L \frac{Q^{(4+7)}}{EI} = \int_0^L \frac{Q^{(4+7)}}{EI} = \int_0^L \frac{(s_5-l)(2l-s_5)}{EI_2} ds = \int_0^L \frac{2ls_5 - 2l^2 - s_5^2}{EI_2} ds = \left| \frac{2ls_5^2 - 2l^2s_5 - \frac{s_5^3}{3}}{EI_2} \right|_0^L = \\
 &= \frac{(\frac{2}{3} - 2 - \frac{1}{3})l^3}{EI_2} = \frac{(9-12-2)l^3}{9EI_2} = \frac{-5l^3}{9EI_2} = -0,000565497 \left[ \frac{MN}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$1. M_{48} = \int_0^L \frac{Q^{(4+8)}}{EI} = \int_0^L \frac{Q^{(4+8)}}{EI} = \int_0^L \frac{(s_5-2l)L}{2EI_2} ds = \left| \frac{(s_5^2 - 2ls_5)L}{2EI_2} \right|_0^L = \frac{-3l^2L}{4EI_2} = -0,000760721 \left[ \frac{MN}{KN} \right]$$

$$1. M_{49} = \int_0^L \frac{Q^{(4+9)}}{EI} = \int_0^L \frac{Q^{(4+9)}}{EI} = \int_0^L \frac{2l-s_5}{EI_2} ds = \left| \frac{2ls_5 - \frac{s_5^2}{2}}{EI_2} \right|_0^L = \frac{3l^2}{2EI_2} = 0,000253573 \left[ \frac{1}{KN} \right]$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{50} &= \mathcal{L}_e^{(5+0)} = \mathcal{L}_e^{(5+0)} = \int_0^h \frac{(p_1+p_2) \frac{L^2}{8} \cdot \frac{1}{2}}{EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{p_1 \frac{L^2}{8} \cdot \frac{1}{2}}{EI_1} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{p_1 \cdot \frac{S_1^2}{2} \cdot S_2}{EI_3} \cdot ds + \\
 &+ \int_0^h \frac{(p_3-p_1-p_2) \frac{L^2}{8} \cdot \frac{1}{2}}{EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{-p_1 \frac{L^2}{8} \cdot \frac{1}{2}}{EI_1} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{-p_1 \frac{S_1^2}{2} \cdot S_2}{EI_3} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{(p_1+p_2) \cdot L^3 \cdot S_1}{16 EI_2} \right|_0^h + \left| \frac{p_1 \cdot L^3 \cdot S_2}{16 EI_1} \right|_0^h + \left| \frac{p_1 \cdot S_2^4}{16 EI_3} \right|_0^{L/2} + \left| \frac{(p_3-p_1-p_2) \cdot L^3 \cdot S_1}{16 EI_2} \right|_0^h + \left| \frac{-p_1 \cdot L^3 \cdot S_2}{16 EI_1} \right|_0^h + \left| \frac{-p_1 \cdot S_2^4}{16 EI_3} \right|_0^{L/2} \\
 &= \frac{p_3 \cdot L^3 \cdot h}{16 EI_2} = 0,005134869 \text{ [M]} \quad \left( \frac{\text{KN}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{m}^4}{\text{KN}} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{m}^4} \right)
 \end{aligned}$$

$$1 \cdot M_{51} = \mathcal{L}_e^{(5+1)} = \mathcal{L}_u^{(5+1)} = \int_0^h \frac{L \cdot (h-S_1)}{2 EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L \cdot (S_2-L)}{2 EI_2} \cdot ds = 0 \text{ [KN]}$$

$$1 \cdot M_{52} = \mathcal{L}_e^{(5+2)} = \mathcal{L}_u^{(5+2)} = \int_0^h \frac{L^2}{4 EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L^2}{4 EI_2} \cdot ds = \frac{L^2 \cdot h}{2 EI_2} = 0,000760721 \text{ [KN]}$$

$$1 \cdot M_{53} = \mathcal{L}_e^{(5+3)} = \mathcal{L}_u^{(5+3)} = \int_0^h \frac{-L}{2 EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L}{2 EI_2} \cdot ds = 0 \text{ [KN]}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{54} &= \mathcal{L}_e^{(5+4)} = \mathcal{L}_e^{(5+4)} = \int_0^h \frac{L \cdot (2h-S_1)}{2 EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L \cdot (h-S_3)}{2 EI_1} \cdot ds + \\
 &+ \int_0^h \frac{L \cdot (S_2-2h)}{2 EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L \cdot (S_2-h)}{2 EI_1} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{L \cdot (2hS_1 - \frac{S_1^2}{2})}{2 EI_2} \right|_0^h + \left| \frac{L \cdot (hS_3 - \frac{S_3^2}{2})}{2 EI_1} \right|_0^h + \left| \frac{L \cdot (\frac{S_2^2}{2} - 2hS_2)}{2 EI_2} \right|_0^h + \left| \frac{L \cdot (\frac{S_2^2}{2} - hS_2)}{2 EI_1} \right|_0^h \\
 &= \frac{3L^2 \cdot L}{4 EI_2} + \frac{L^2 \cdot L}{4 EI_1} - \frac{3L^2 \cdot L}{4 EI_2} - \frac{L^2 \cdot L}{4 EI_1} = 0 \text{ [KN]}
 \end{aligned}$$

(\*)

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{56} &= \mathcal{L}_e^{(5+6)} = \mathcal{L}_u^{(5+6)} = \int_0^h \frac{-L}{2 EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{-L}{2 EI_1} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{-S_1}{EI_3} \cdot ds + \\
 &+ \int_0^h \frac{L}{2 EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L}{2 EI_1} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{S_2}{EI_3} \cdot ds = 0 \text{ [KN]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{57} &= \mathcal{L}_e^{(5+7)} = \mathcal{L}_u^{(5+7)} = \int_0^h \frac{L \cdot (h-S_1)}{2 EI_2} \cdot ds = \left| \frac{L \cdot (hS_1 - \frac{S_1^2}{2})}{2 EI_2} \right|_0^h \\
 &= \frac{L \cdot h^2}{2 EI_2} = 0,000253573 \text{ [KN]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 * 1 \cdot M_{55} &= \int_0^L \frac{L^2}{4EJ_2} \cdot ds + \int_0^L \frac{L^2}{4EJ_1} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{S_1^2}{EJ_3} \cdot ds + \\
 &+ \int_0^L \frac{L^2}{4EJ_2} \cdot ds + \int_0^L \frac{L^2}{4EJ_1} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{S_2^2}{EJ_3} \cdot ds = \\
 &= \left| \frac{L^2 \cdot S_1}{4EJ_2} \right|_0^L + \left| \frac{L^2 \cdot S_2}{4EJ_1} \right|_0^L + \left| \frac{S_1^3}{3EJ_3} \right|_0^{L/2} + \left| \frac{L^2 \cdot S_2}{4EJ_2} \right|_0^L + \left| \frac{L^2 \cdot S_2}{4EJ_1} \right|_0^L + \left| \frac{S_2^3}{3EJ_3} \right|_0^{L/2} = \\
 &= \frac{L^2 \cdot L}{2EJ_2} + \frac{L^2 \cdot L}{2EJ_1} + \frac{L^3}{12EJ_3} = 0,000760721 + 0,001495233 + 0,002202319 \\
 &= 0,004458273 \left[ \frac{M}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$1 \cdot M_{58} = \int_0^L \frac{L^2}{4EJ_2} \cdot ds = \left| \frac{L^2 \cdot S_1}{4EJ_2} \right|_0^L = \frac{L^2 \cdot L}{4EJ_2} = 0,00088036 \left[ \frac{M}{KN} \right]$$

$$1 \cdot M_{59} = \int_0^L \frac{-L}{2EJ_2} \cdot ds = \left| \frac{-L \cdot S_1}{2EJ_2} \right|_0^L = -0,000126786 \left[ \frac{1}{KN} \right]$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{60} &= \mathcal{L}_e^{(6+0)} = \mathcal{L}_i^{(6+0)} = \int_0^h \frac{(p_3 - p_2) \cdot L^2}{8 \cdot EJ_2} ds + \int_0^h \frac{(-p_1) \cdot L^2}{8 \cdot EJ_1} ds + \int_0^{L/2} \frac{(-p_1) \cdot S_3^2}{2 \cdot EJ_3} ds + \\
 &+ \int_0^h \frac{(p_3 - p_1 - p_2) \cdot L^2}{8 \cdot EJ_2} ds + \int_0^h \frac{(-p_1) \cdot L^2}{8 \cdot EJ_1} ds + \int_0^{L/2} \frac{(-p_1) \cdot S_3^2}{2 \cdot EJ_3} ds = \\
 &= \left| \frac{(-p_1 - p_2) \cdot L^2 \cdot S_1}{8 \cdot EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{(-p_1) \cdot L^2 \cdot S_3}{8 \cdot EJ_1} \right|_0^h + \left| \frac{(-p_1) \cdot S_3^3}{6 \cdot EJ_3} \right|_0^{L/2} + \left| \frac{(p_3 - p_1 - p_2) \cdot L^2 \cdot S_1}{8 \cdot EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{(-p_1) \cdot L^2 \cdot S_3}{8 \cdot EJ_1} \right|_0^h \\
 &+ \left| \frac{(-p_1) \cdot S_3^3}{6 \cdot EJ_3} \right|_0^{L/2} = \frac{(p_3 - 2p_1 - 2p_2) \cdot L^2 \cdot h}{8 \cdot EJ_2} - \frac{p_1 \cdot L^2 \cdot h}{4 \cdot EJ_1} - \frac{p_1 \cdot L^3}{24 \cdot EJ_3} = \\
 &= \frac{-27 \cdot L^2 \cdot h}{8 \cdot EJ_2} - \frac{6 \cdot L^2 \cdot h}{4 \cdot EJ_1} - \frac{6 \cdot L^3}{24 \cdot EJ_3} = \\
 &= -0,016927529 \text{ [rad]} \quad \left( \frac{KN \cdot m^2}{KN \cdot m^2} = \text{rad} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{61} &= \mathcal{L}_e^{(6+1)} = \mathcal{L}_i^{(6+1)} = \int_0^h \frac{S_1 - h}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{S_3 - h}{EJ_2} ds = \left| \frac{S_1^2 - 2S_1 h}{2 \cdot EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{S_3^2 - 2S_3 h}{2 \cdot EJ_2} \right|_0^h = \\
 &= \frac{-h^2}{2 \cdot EJ_2} - \frac{h^2}{2 \cdot EJ_2} = -\frac{h^2}{EJ_2} = -0,000169049 \text{ [rad]} \quad \left( \frac{m^2 - m^2}{KN \cdot m^2} \right)
 \end{aligned}$$

$$1 \cdot M_{62} = \mathcal{L}_e^{(6+2)} = \mathcal{L}_i^{(6+2)} = \int_0^h \frac{1}{2 \cdot EJ_2} ds + \int_0^h \frac{1}{2 \cdot EJ_2} ds = 0 \text{ [rad]}$$

$$1 \cdot M_{63} = \mathcal{L}_e^{(6+3)} = \mathcal{L}_i^{(6+3)} = \int_0^h \frac{1}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{1}{EJ_2} ds = \frac{2 \cdot h}{EJ_2} = 0,00024524 \text{ [rad]}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{64} &= \mathcal{L}_e^{(6+4)} = \mathcal{L}_i^{(6+4)} = \int_0^h \frac{S_1 - 2h}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{S_3 - h}{EJ_1} ds + \int_0^h \frac{S_2 - 2h}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{S_3 - h}{EJ_1} ds \\
 &= \left| \frac{S_1^2 - 2hS_1}{2 \cdot EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{S_3^2 - hS_3}{EJ_1} \right|_0^h + \left| \frac{S_2^2 - 2hS_2}{2 \cdot EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{S_3^2 - hS_3}{EJ_1} \right|_0^h = \\
 &= \frac{-3h^2}{2 \cdot EJ_2} - \frac{h^2}{2 \cdot EJ_1} - \frac{3h^2}{2 \cdot EJ_2} - \frac{h^2}{2 \cdot EJ_1} = -\frac{3h^2}{EJ_2} - \frac{h^2}{EJ_1} = \\
 &= -0,000839421 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$1 \cdot M_{65} = \mathcal{L}_2^{(6+5)} = \mathcal{L}_1^{(6+5)} = \int_0^h \frac{-L}{2EJ_2} ds + \int_0^h \frac{-L}{2EJ_4} ds + \int_0^{L/2} \frac{-S_0}{EJ_3} ds + \int_0^h \frac{L}{2EJ_2} ds + \int_0^h \frac{L}{2EJ_4} ds + \int_0^{L/2} \frac{S_0}{2EJ_3} ds = 0 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN}} \right]$$

$$1 \cdot M_{66} = \mathcal{L}_2^{(6+6)} = \mathcal{L}_1^{(6+6)} = \int_0^h \frac{1}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{1}{EJ_4} ds + \int_0^{L/2} \frac{1}{EJ_3} ds + \int_0^h \frac{1}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{1}{EJ_4} ds + \int_0^{L/2} \frac{1}{EJ_3} ds = \frac{2h}{EJ_2} + \frac{2h}{EJ_4} + \frac{L}{EJ_3} = 0,000984767 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN} \cdot \text{m}} \right]$$

$$1 \cdot M_{67} = \mathcal{L}_2^{(6+7)} = \mathcal{L}_1^{(6+7)} = \int_0^h \frac{h-s}{EJ_2} ds = \left[ \frac{h \cdot s - \frac{s^2}{2}}{EJ_2} \right]_0^h = \frac{h^2}{2EJ_2} = 0,000084524 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN}} \right]$$

$$1 \cdot M_{68} = \mathcal{L}_2^{(6+8)} = \mathcal{L}_1^{(6+8)} = \int_0^h \frac{L}{2EJ_2} ds = \frac{L \cdot h}{2EJ_2} = 0,000126786 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN}} \right]$$

$$1 \cdot M_{69} = \mathcal{L}_2^{(6+9)} = \mathcal{L}_1^{(6+9)} = \int_0^h \frac{-1}{EJ_2} ds = \frac{-h}{EJ_2} = -0,000042262 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN} \cdot \text{m}} \right]$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{70} &= \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+0)} = \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+0)} = \int_0^h \frac{(p_1 + p_2 - p_3) \cdot L^2 \cdot (s_5 - h)}{8 E J_2} ds + \int_0^h \frac{p_3 \cdot L^2 \cdot (h - s_{10})}{8 E J_1} ds = \\
 &= \left| \frac{9 \cdot L^2 \cdot \left(\frac{s_5^2}{2} - h s_5\right)}{8 E J_2} \right|_0^h + \left| \frac{9 \cdot L^2 \cdot \left(h s_{10} - \frac{s_{10}^2}{2}\right)}{8 E J_1} \right|_0^h = \frac{-9 L^2 h^2}{16 E J_2} + \frac{9 L^2 h^2}{16 E J_1} = \\
 &= 0,003305306 \text{ [MN]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{71} &= \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+1)} = \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+1)} = \int_0^h \frac{(h - s_5)(s_5 - h)}{E J_2} ds = \int_0^h \frac{-s_5^2 + 2 h s_5 - h^2}{E J_2} ds = \\
 &= \left| \frac{h s_5^2 - \frac{2}{3} s_5^3 - 2 h^2 s_5}{E J_2} \right|_0^h = \frac{(h^3 - 1 - h^3) h^3}{3 E J_2} = \frac{-h^3}{3 E J_2} = -0,00022539 \text{ [MN]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{72} &= \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+2)} = \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+2)} = \int_0^h \frac{L \cdot (h - s_5)}{2 E J_2} ds = \left| \frac{L \cdot \left(h s_5 - \frac{s_5^2}{2}\right)}{2 E J_2} \right|_0^h = \\
 &= \frac{L \cdot h^2}{4 E J_2} = 0,000253573 \text{ [MN]}
 \end{aligned}$$

$$1 \cdot M_{73} = \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+3)} = \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+3)} = \int_0^h \frac{h - s_5}{E J_2} ds = \left| \frac{2 s_5 - \frac{s_5^2}{2}}{E J_2} \right|_0^h = \frac{h^2}{2 E J_2} = 0,000084524 \text{ [KN]}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{74} &= \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+4)} = \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+4)} = \int_0^h \frac{(2h - s_5)(s_5 - h)}{E J_2} ds = \int_0^h \frac{3 h s_5 - 2 h^2 - s_5^2}{E J_2} ds = \\
 &= \left| \frac{\frac{3}{2} h s_5^2 - 2 h^2 s_5 - \frac{s_5^3}{3}}{E J_2} \right|_0^h = \frac{(9 - 12 - 2) h^3}{6 E J_2} = \frac{-5 h^3}{6 E J_2} = -0,000563497
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{75} &= \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+5)} = \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+5)} = \int_0^h \frac{L \cdot (h - s_5)}{2 E J_2} ds = \left| \frac{L \cdot \left(h s_5 - \frac{s_5^2}{2}\right)}{2 E J_2} \right|_0^h = \frac{L \cdot h^2}{4 E J_2} = \\
 &= 0,000253573 \text{ [MN]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{76} &= \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+6)} = \int_{x_e}^{x_i} \varphi^{(7+6)} = \int_0^h \frac{h - s_5}{E J_2} ds = \left| \frac{2 s_5 - \frac{s_5^2}{2}}{E J_2} \right|_0^h = \frac{h^2}{2 E J_2} = \\
 &= 0,000084524 \text{ [KN]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{77} &= \int_0^h \frac{S_5^2 - 2hS_5 + h^2}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{h^2 - 2hS_{10} + S_{10}^2}{EJ_1} ds = \\
 &= \left| \frac{S_5^3}{3} - hS_5^2 + h^2S_5 \right|_0^h + \left| \frac{h^2S_{10} - h \cdot S_{10}^2 + \frac{S_{10}^3}{3}}{EJ_1} \right|_0^h = \\
 &= \frac{(1-3+3)h^3}{3 \cdot EJ_2} + \frac{(3-3+1)h^3}{3EJ_1} = \frac{h^3}{3EJ_2} + \frac{h^3}{3EJ_1} = \\
 &= 0,00066843 \left[ \frac{M}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{78} &= \int_0^h \frac{L \cdot (h - S_5)}{2EJ_2} ds + \int_0^h \frac{L \cdot (S_{10} - h)}{2EJ_1} ds = \\
 &= \left| \frac{L \cdot (hS_5 - \frac{S_5^2}{2})}{2EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{L \cdot (S_{10}^2 - 2S_{10}h)}{2EJ_1} \right|_0^h = \frac{L \cdot h^2}{2EJ_2} - \frac{L \cdot h^2}{2EJ_1} = \\
 &= -0,000244835 \left[ \frac{M}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{79} &= \int_0^h \frac{S_5 - h}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{S_{10} - h}{EJ_1} ds = \\
 &= \left| \frac{S_5^2}{2} - hS_5 \right|_0^h + \left| \frac{S_{10}^2}{2} - hS_{10} \right|_0^h = -\frac{h^2}{2EJ_2} - \frac{h^2}{2EJ_1} = \\
 &= -0,00025661 \left[ \frac{1}{KN} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{80} &= \int_{x_2}^{(8+0)} = \int_{x_1}^{(8+0)} = \int_0^h \frac{(-L)(p_1+p_2-p_3) \cdot L^2}{16 E J_2} ds + \int_0^{L/2} p_3 \cdot \frac{S_7^2}{2 E J_2} ds + \\
 &+ \int_0^h \frac{(-L) \cdot p_3 \cdot L^2}{16 E J_1} ds + \int_0^{L/2} \frac{(-p_3) \cdot S_{11}^3}{2 E J_2} ds = \\
 &= - \left| \frac{9 \cdot L^3 \cdot S_5}{16 E J_2} \right|_0^h + \left| \frac{9 \cdot S_7^4}{8 E J_2} \right|_0^{L/2} - \left| \frac{9 \cdot L^3 \cdot S_{10}}{16 E J_2} \right|_0^h - \left| \frac{9 \cdot S_{11}^4}{8 E J_2} \right|_0^{L/2} = \\
 &= - \frac{9 L^3 h}{16 E J_2} + \frac{9 \cdot L^4}{128 E J_2} - \frac{9 L^3 h}{16 E J_1} - \frac{9 \cdot L^4}{128 E J_2} = \left( \frac{100 \text{ mm}^4}{\text{mm}} \cdot \frac{\text{m}^3}{\text{KN}} \cdot \frac{1}{\text{mm}^4} = \text{m} \right) \\
 &= -0,015227698 \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{81} &= \int_{x_2}^{(8+1)} = \int_{x_1}^{(8+1)} = \int_0^h \frac{L \cdot (S_5 - h)}{2 E J_2} ds = \left| \frac{L \cdot (S_5^2 - 2 S_5 h)}{2 E J_2} \right|_0^h = \\
 &= \frac{L \cdot (-2 h^2)}{4 E J_2} = -0,000253573 \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{82} &= \int_{x_2}^{(8+2)} = \int_{x_1}^{(8+2)} = \int_0^h \frac{L^2}{4 E J_2} ds = \left| \frac{L^2 \cdot S_5}{4 E J_2} \right|_0^h = \frac{L^2 \cdot h}{4 E J_2} = \\
 &= 0,00038036 \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{83} &= \int_{x_2}^{(8+3)} = \int_{x_1}^{(8+3)} = \int_0^h \frac{L}{2 E J_2} ds = \left| \frac{L \cdot S_5}{2 E J_2} \right|_0^h = \frac{L \cdot h}{2 E J_2} = \\
 &= 0,000126786 \text{ [1]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{84} &= \int_{x_2}^{(8+4)} = \int_{x_1}^{(8+4)} = \int_0^h \frac{L \cdot (S_5 - 2h)}{2 E J_2} ds = \left| \frac{L \cdot (S_5^2 - 2h S_5)}{2 E J_2} \right|_0^h = \\
 &= \frac{-3 L \cdot h^2}{4 E J_2} = -0,000760721 \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{85} &= \int_{x_2}^{(8+5)} = \int_{x_1}^{(8+5)} = \int_0^h \frac{L^2}{4 E J_2} ds = \left| \frac{L^2 \cdot S_5}{4 E J_2} \right|_0^h = \frac{L^2 \cdot h}{4 E J_2} = \\
 &= 0,00038036 \text{ [m]}
 \end{aligned}$$

$$1 \cdot M_{86} = \int_0^h \frac{L}{2EI_2} \cdot ds = \left. \frac{L \cdot s}{2EI_2} \right|_0^h = \frac{L \cdot h}{2EI_2} =$$

$$= 0,000126786 \left[ \frac{1}{KN} \right]$$

$$1 \cdot M_{87} = \int_0^h \frac{L(h-s)}{2EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L(s_{10}-h)}{2EI_1} \cdot ds =$$

$$= \left. \frac{L(hs - \frac{s^2}{2})}{2EI_2} \right|_0^h + \left. \frac{L(\frac{s_{10}^2}{2} - hs_{10})}{2EI_1} \right|_0^h = \frac{L \cdot h^2}{4EI_2} - \frac{L \cdot h^2}{4EI_1} =$$

$$= -0,000344838 \left[ \frac{M}{KN} \right]$$

$$1 \cdot M_{88} = \int_0^h \frac{L^2}{4EI_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{s^2}{EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L^2}{4EI_1} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{s_{11}^2}{EI_1} \cdot ds =$$

$$= \left. \frac{L^2 \cdot s}{4EI_2} \right|_0^h + \left. \frac{s^3}{3EI_2} \right|_0^{L/2} + \left. \frac{L^2 \cdot s}{4EI_1} \right|_0^h + \left. \frac{s_{11}^3}{3EI_1} \right|_0^{L/2} =$$

$$= \frac{L^2 \cdot h}{4EI_2} + \frac{L^3}{24EI_2} + \frac{L^2 \cdot h}{4EI_1} + \frac{L^3}{24EI_1} =$$

$$= 0,00032036 + 0,001025781 + 0,000747616 =$$

$$= 0,002153757 \left[ \frac{M}{KN} \right]$$

$$1 \cdot M_{89} = \int_0^h \frac{-L}{2EI_2} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{-s^2}{EI_2} \cdot ds + \int_0^h \frac{L}{2EI_1} \cdot ds + \int_0^{L/2} \frac{s_{11}}{EI_1} \cdot ds =$$

$$= \left. \frac{-L \cdot s}{2EI_2} \right|_0^h - \left. \frac{s^3}{3EI_2} \right|_0^{L/2} + \left. \frac{L \cdot s}{2EI_1} \right|_0^h + \left. \frac{s_{11}^2}{2EI_1} \right|_0^{L/2} =$$

$$= \frac{-L \cdot h}{2EI_2} - \frac{L^3}{8EI_2} + \frac{L \cdot h}{2EI_1} + \frac{L^2}{8EI_1} =$$

$$= 0,000122419 \left[ \frac{1}{KN} \right]$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{90} &= \varphi_{Li}^{(9+0)} = \varphi_{Li}^{(9+0)} = \int_0^L \frac{(p_1+p_2-p_3) \cdot L^2}{8 \cdot EJ_2} ds + \int_0^{L/2} \frac{(-p_3) \cdot S_7^2}{2 \cdot EJ_4} ds + \\
 &+ \int_0^L \frac{(-p_3) \cdot L^2}{8 \cdot EJ_1} ds + \int_0^{L/2} \frac{(-p_3) \cdot S_{A1}^2}{2 \cdot EJ_4} ds = \\
 &= \left| \frac{(p_1+p_2-p_3) \cdot L^2 \cdot S_5}{8 \cdot EJ_2} \right|_0^L + \left| \frac{(-p_3) \cdot S_7^3}{6 \cdot EJ_4} \right|_0^{L/2} + \left| \frac{(-p_3) \cdot L^2 \cdot S_{10}}{8 \cdot EJ_1} \right|_0^L + \left| \frac{(-p_3) \cdot S_{A1}^3}{6 \cdot EJ_4} \right|_0^{L/2} = \\
 &= \frac{9 \cdot L^2 \cdot h}{8 \cdot EJ_2} - \frac{9 \cdot L^3}{48 \cdot EJ_4} - \frac{9 \cdot L^2 \cdot h}{8 \cdot EJ_1} - \frac{9 \cdot L^3}{48 \cdot EJ_4} = \\
 &= 0,00711623 - 0,004616015 - 0,003364276 = \\
 &= -0,006268668 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{91} &= \varphi_{Li}^{(9+1)} = \varphi_{Li}^{(9+1)} = \int_0^L \frac{(h-s_5)}{EJ_2} ds = \left| \frac{h \cdot s_5 - \frac{s_5^2}{2}}{EJ_2} \right|_0^L = \\
 &= \frac{h^2}{2 \cdot EJ_2} = 0,00084524 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{92} &= \varphi_{Li}^{(9+2)} = \varphi_{Li}^{(9+2)} = \int_0^L \frac{-1}{EJ_2} ds = \left| \frac{-s_5}{EJ_2} \right|_0^L = \frac{-h}{EJ_2} = \\
 &= -0,00042262 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{92} &= \varphi_{Li}^{(9+2)} = \varphi_{Li}^{(9+2)} = \int_0^L \frac{-L}{2 \cdot EJ_2} ds = \left| \frac{-L \cdot s_5}{2 \cdot EJ_2} \right|_0^L = \frac{-L \cdot L}{2 \cdot EJ_2} = \\
 &= -0,000126786 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{94} &= \varphi_{Li}^{(9+4)} = \varphi_{Li}^{(9+4)} = \int_0^L \frac{(2h-s_5)}{EJ_2} ds = \left| \frac{2h \cdot s_5 - \frac{s_5^2}{2}}{EJ_2} \right|_0^L = \\
 &= \frac{3 \cdot h^2}{2 \cdot EJ_2} = 0,00253576 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \cdot M_{95} &= \varphi_{Li}^{(9+5)} = \varphi_{Li}^{(9+5)} = \int_0^L \frac{-L}{2 \cdot EJ_2} ds = \left| \frac{-L \cdot s_5}{2 \cdot EJ_2} \right|_0^L = \frac{-L \cdot h}{2 \cdot EJ_2} = \\
 &= -0,000126786 \text{ [rad]}
 \end{aligned}$$

$$1 \cdot M_{96} = \mathcal{L}_e^{(9+6)} = \mathcal{L}_u^{(9+6)} = \int_0^h \frac{-1}{EJ_2} ds = \left| \frac{-s}{EJ_2} \right|_0^h = -\frac{h}{EJ_2} =$$

$$= -0,00042262 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN} \cdot \text{m}} \right]$$

$$1 \cdot M_{97} = \mathcal{L}_e^{(9+7)} = \mathcal{L}_u^{(9+7)} = \int_0^h \frac{S_5 - h}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{S_{10} - h}{EJ_1} ds =$$

$$\left| \frac{S_5^2 - h S_5}{2EJ_2} \right|_0^h + \left| \frac{S_{10}^2 - h S_{10}}{2EJ_1} \right|_0^h = -\frac{h^2}{2EJ_2} - \frac{h^2}{2EJ_1} =$$

$$= -0,000250661 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN}} \right]$$

$$1 \cdot M_{98} = \mathcal{L}_e^{(9+8)} = \mathcal{L}_u^{(9+8)} = \int_0^h \frac{-L}{2EJ_2} ds + \int_0^{L/2} \frac{-S_7}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{L}{2EJ_1} ds + \int_0^{L/2} \frac{S_{11}}{EJ_2} ds =$$

$$\left| \frac{-L \cdot S_5}{2EJ_2} \right|_0^h - \left| \frac{S_7^2}{2EJ_2} \right|_0^{L/2} + \left| \frac{L \cdot S_{10}}{2EJ_1} \right|_0^h + \left| \frac{S_{11}^2}{2EJ_2} \right|_0^{L/2} =$$

$$= -\frac{L \cdot h}{2EJ_2} - \frac{L^2}{8EJ_2} + \frac{L \cdot h}{2EJ_1} + \frac{L^2}{8EJ_2} =$$

$$= 0,000122419 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN}} \right]$$

$$1 \cdot M_{99} = \mathcal{L}_e^{(9+9)} = \mathcal{L}_u^{(9+9)} = \int_0^h \frac{1}{EJ_2} ds + \int_0^{L/2} \frac{1}{EJ_2} ds + \int_0^h \frac{1}{EJ_1} ds + \int_0^{L/2} \frac{1}{EJ_2} ds =$$

$$\left| \frac{h}{EJ_2} + \frac{L}{2EJ_2} + \frac{h}{EJ_1} + \frac{L}{2EJ_2} \right| =$$

$$= 0,000467257 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{KN} \cdot \text{m}} \right]$$