



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Tesi di Laurea Magistrale

I problemi contestualizzati OCSE-PISA: le difficoltà degli studenti italiani

Relatore:

Prof. Pietro Di Martino

Controrelatore:

Prof. Franco Favilli

Candidata:

Sara Baldini

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

Indice

Introduzione	4
1. La ridefinizione degli obiettivi educativi	6
2. L'indagine OCSE-PISA e la valutazione della competenza matematica	11
2.1. Finalità generali	11
2.2. I risultati degli studenti italiani nella rilevazione OCSE-PISA	14
2.3. La rilevazione Pisa 2012	15
2.4. Da OCSE-PISA alla nostra ricerca	18
Appendice al capitolo 2	19
3. La costruzione della prova d'indagine	21
3.1. La costruzione della prova: le scelte e le motivazioni	21
3.2. La costruzione della prova: le due prove, i quesiti e le descrizioni	22
3.2.1. La prova 1	22
3.2.2. La prova 2	33
4. L'analisi dei protocolli della prova	42
4.1. La somministrazione della prova: le modalità	42
4.2. Risultati e analisi dei protocolli della prima prova	43
4.2.1. Risultati e analisi del quesito 1.1: Macchia di Petrolio	43
4.2.2. Risultati e analisi del quesito 1.2: Classifiche	48
4.2.3. Risultati e analisi del quesito 1.3: Noleggio di DVD	52
4.2.4. Risultati e analisi del quesito 1.4: Garage	57
4.3. Risultati e analisi dei protocolli della seconda prova	62

4.3.1. Risultati e analisi del quesito 2.1: Gelateria	62
4.3.2. Risultati e analisi del quesito 2.2: Apparecchi Difettosi	70
4.3.3. Risultati e analisi del quesito 2.3: Velocità di Flusso	77
4.4. Le opinioni dei docenti	83
4.5. Riflessioni conclusive a seguito della prima fase dell'indagine	85
5. Le interviste	87
5.1. Le interviste: la modalità	87
5.2. Le interviste agli studenti della prima prova	89
5.2.1. Analisi delle interviste del quesito 1.1: Macchia di Petrolio	89
5.2.2. Analisi delle interviste del quesito 1.2: Classifiche	94
5.2.3. Analisi delle interviste del quesito 1.3: Noleggio DVD	96
5.2.4. Analisi delle interviste del quesito 1.4: Garage	103
5.3. Le interviste agli studenti della seconda prova	111
5.3.1. Analisi delle interviste del quesito 2.1: Gelateria	111
5.3.2. Analisi delle interviste del quesito 2.2: Apparecchi Difettosi	117
5.3.3. Analisi delle interviste del quesito 2.3: Velocità di Flusso	122
5.4. Aspetti emotivi	126
6. Conclusioni	130
Bibliografia	133
Sitografia	134

Introduzione

Con il Decreto Ministeriale n.9/2010 è stato introdotto l'obbligo, per i consigli di classe, di compilare la Certificazione delle Competenze di base acquisite nell'assolvimento dell'obbligo di istruzione. Tale certificazione, che formalmente descrive gli obiettivi formativi che la scuola dovrebbe perseguire nel percorso educativo dai 6 ai 16 anni, declina le competenze in quattro assi culturali, tra i quali è incluso l'asse matematico.

All'interno dell'asse matematico, vengono riconosciute le seguenti competenze di base:

- utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica;
- confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni;
- individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi;
- analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Come abbiamo già sottolineato, questo adempimento, in parte anche formale, in linea con gli indirizzi delle politiche educative e formative europee, ha una importanza notevole perché evidenzia nuovi obiettivi (inseriti nei documenti ministeriali di indirizzo dei vari livelli scolari come le Indicazioni e le Linee Guida) e comunque condiziona la pratica didattica (anche perché supportato da valutazioni esterne coerenti con tali obiettivi).

Dal punto di vista sia della pratica che della ricerca didattica, l'attenzione alle competenze apre diversi fronti: dal come promuovere (in continuità tra i diversi livelli scolari) lo sviluppo di un certo tipo di competenze, al come valutare il livello di competenza matematico.

A proposito della valutazione delle competenze, a partire dal 2000, l'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico) ha promosso il programma per la valutazione dell'allievo, PISA (Programme for International Student Assessment), una rilevazione a cadenza triennale, volta proprio a testare le competenze degli studenti quindicenni in tre ambiti: lettura, matematica e scienze.

L'esistenza di uno strumento comparativo internazionale evidenzia altri elementi di discussione, in particolare: l'analisi di quello che i risultati ottenuti attraverso tale strumento possono dirci sul livello di competenza degli allievi. Per discutere di questo aspetto è importante affiancare l'uso dello strumento originale, con osservazioni più fini, che permettano di avere maggiori elementi per l'interpretazione delle difficoltà degli studenti.

È esattamente ciò che abbiamo provato a fare in questo lavoro di tesi, a partire dalle croniche difficoltà dei nostri studenti quindicenni di fronte alle prove OCSE-PISA. Se è infatti vero che qualche miglioramento nelle ultime edizioni c'è stato (a conferma del fatto che questo tipo di valutazioni, ed il clamore che suscitano, bene o male provocano dei cambiamenti), i risultati degli studenti italiani sono sempre al di sotto della media dei risultati dei Paesi OCSE.

L'aspetto interessante è che questi risultati hanno sempre un certo clamore mediatico, con titoli ad effetto sui giornali quali *"OCSE: è un analfabeta matematico un ragazzo italiano su quattro"*: titoli che guardano solamente i numeri, senza cercare di interpretare le difficoltà (che invece è la cosa che interessa di più dal punto di vista didattico).

In questo lavoro abbiamo focalizzato l'attenzione proprio sull'interpretazione delle difficoltà incontrate dai quindicenni italiani di fronte ai problemi contestualizzati delle prove OCSE-PISA. Questo porta con sé un duplice effetto: da una parte evidenziare i limiti di una valutazione di questo tipo, indicando cosa secondo noi "non può dire"; dall'altra suggerire interpretazioni di difficoltà dei nostri studenti, per andare al di là del numero di risposte corrette ad un singolo quesito e offrire anche spunti per riflessioni di natura prettamente didattica (cosa fare per contrastare certe difficoltà).

Il nostro lavoro dunque si sviluppa con l'intento di: evidenziare le difficoltà degli studenti rispetto alle tipologie di quesiti che OCSE-PISA usa per la valutazione della competenza matematica; far emergere i processi messi in atto dagli allievi nell'affrontare tali quesiti per interpretare le cause principali delle difficoltà.

L'organizzazione dell'elaborato è la seguente: nel primo capitolo abbiamo introdotto il contesto europeo in cui si colloca la necessità di sviluppare le competenze chiave per una cittadinanza attiva e abbiamo illustrato la risposta italiana a queste necessità.

Nel secondo capitolo abbiamo presentato l'indagine OCSE-PISA, analizzando obiettivi e caratteristiche. In particolare abbiamo focalizzato l'attenzione sull'edizione del 2012, il cui focus di indagine era la matematica.

Nel terzo capitolo comincia la parte di lavoro originale della tesi, con la strutturazione delle prove usate per la nostra indagine. Nel capitolo verranno motivate tutte le scelte fatte in questa fase.

Nel quarto capitolo riportiamo l'analisi dei protocolli scritti raccolti durante la prova, arricchita dalle interviste agli insegnanti e dalle note relative ai dubbi dei ragazzi che sono emersi esplicitamente durante lo svolgimento delle prove.

L'analisi di questo tipo dei protocolli raccolti ha fatto emergere, per ogni quesito, nuove domande e ipotesi interpretative, a cui si è cercato risposta (alle domande) e conferma (alle ipotesi interpretative) nella seconda fase di indagine, basata su interviste ad hoc con gli studenti. I risultati di questa fase della ricerca sono riassunti nel quinto capitolo.

Capitolo 1

La ridefinizione degli obiettivi educativi

Nel 2000, il Consiglio Europeo ha tenuto due sessioni straordinarie, a Lisbona, per concordare un nuovo obiettivo strategico, al fine di sostenere l'occupazione, le riforme economiche e la coesione sociale nel contesto di una economia basata sulla conoscenza. Nel documento¹ redatto in tale circostanza, si sottolinea che il processo continuo di internalizzazione, la rapidità dei cambiamenti ed il costante sviluppo di tecnologie richiedono al cittadino di disporre di diverse competenze, anche di natura trasversale, che consentano l'adattamento alle nuove situazioni. In questo clima di celeri mutamenti si avverte, da parte degli Stati europei, una crescente preoccupazione per la coesione sociale. Poiché l'individuo costituisce la risorsa più importante dell'Europa, è opportuno, come dichiarato nell'atto, che i sistemi europei di istruzione e formazione siano adeguati alle esigenze della società dei saperi ed alla necessità di migliorare il livello e la qualità dell'occupazione; devono quindi offrire possibilità di apprendimento e formazione adeguate a tutte le persone: giovani, adulti, disoccupati e persone occupate, soggette al rischio che le loro competenze siano rese obsolete dai cambiamenti. Perciò l'apprendimento permanente è diventato una necessità per tutti i cittadini, i quali hanno bisogno di sviluppare capacità e competenze in tutto l'arco della vita, non solo per una soddisfazione personale, ma soprattutto per partecipare attivamente nella società e per affrontare con successo il mondo del lavoro in costante evoluzione. Per tali motivi, il Consiglio Europeo di Lisbona ha concluso che un quadro di riferimento europeo avrebbe dovuto definire le nuove competenze di base per poter assicurare un apprendimento permanente nell'individuo, in modo da essere una risposta europea all'emarginazione ed esclusione dovute alla globalizzazione.

A seguito di questa necessità, alla fine del 2006, nella Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio² viene adottato un quadro europeo relativo alle competenze chiave per l'apprendimento permanente. Esso individua e definisce per la prima volta le seguenti competenze considerate cruciali per la realizzazione e lo sviluppo personale, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale, l'occupazione e che ogni cittadino europeo dovrà disporre per adattarsi al meglio al mondo reale:

- comunicazione nella madre lingua,
- comunicazione nelle lingue straniere,
- competenza matematica e competenza di base in scienze e tecnologia,
- competenza digitale,
- imparare ad imparare,
- competenze sociali e civiche,
- spirito di iniziativa ed imprenditorialità,

¹ Testo consultabile all'indirizzo: http://www.europarl.europa.eu/summits/lis1_it.htm

² Testo consultabile all'indirizzo: <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/?uri=URISERV:c11090>

- consapevolezza ed espressione culturale.

È opportuno sottolineare che queste competenze sono considerate tutte ugualmente importanti, poiché ciascuna contribuisce ad una vita positiva nella società. Ai fini del nostro lavoro, riportiamo solo la definizione di competenza matematica presente nel documento:

*“La **competenza matematica** è l’abilità di sviluppare ed applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l’accento è posto sugli aspetti del processo e dell’attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità ad usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, carte).”*

Il lavoro della Comunità Europea per definire un quadro comune degli Stati membri relativamente agli obiettivi dell’istruzione, e più in generale della formazione permanente, prosegue negli anni successivi. Per far questo, un aspetto spesso sottovalutato, ma cruciale è la definizione di un lessico comune. Si arriva così, nella Raccomandazione³ del Parlamento Europeo e del Consiglio del 23 aprile 2008 a definire conoscenze, abilità e competenze, delineando anche le differenze tra i 3 costrutti:

- *Conoscenze*: indicano il risultato dell’assimilazione di informazioni attraverso l’apprendimento. Le conoscenze sono l’insieme di fatti, principi, teorie e pratiche, relative ad un settore di studio o di lavoro; le conoscenze sono descritte come teoriche e/o pratiche.
- *Abilità*: indicano le capacità di applicare conoscenze e di usare know-how per portare a termine compiti e risolvere problemi; le abilità sono descritte come cognitive (uso del pensiero logico, intuitivo e creativo) e pratiche (che implicano l’abilità manuale e l’uso di metodi, materiali e strumenti).
- *Competenze*: indicano la comprovata capacità di usare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e personale; le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia.

Le competenze sono dunque definite come una combinazione di conoscenze, abilità e attitudini appropriate al contesto. È proprio questa adattabilità al contesto è l’aspetto che le rende da una parte particolarmente importanti, dall’altra molto difficili da costruire e anche da valutare⁴.

In tutti i testi sopra citati si auspica che gli Stati membri sviluppino un’offerta formativa, in cui l’obiettivo dell’educazione sia quello di concorrere alla formazione del buon cittadino, che sappia abitare il mondo in maniera consapevole e con capacità critica; ovvero identità abituata a cercare soluzioni a problemi collegati alla vita reale, che sia in grado di impiegare tutte le proprie conoscenze acquisite in ambiti disciplinari diversi, metterle in relazione tra loro, integrarle per sviluppare strategie efficaci al fine di padroneggiare situazioni nuove e complesse.

³ Testo consultabile all’indirizzo: <http://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/?uri=URISERV:c11104>

⁴ Non è un caso che gli sforzi attuali, nazionali e a livello di Comunità Europea siano attualmente rivolti allo sviluppo di un quadro comune per la certificazione delle competenze.

In questa prospettiva, la scuola non ha più il compito di trasmettere solo un patrimonio di saperi, ma è chiamata a promuovere l'acquisizione di conoscenze ed abilità, oltre che di motivazioni, che mettano gli studenti in grado di far fronte alle esigenze di un apprendimento continuo, che caratterizzerà la loro vita futura.

L'impegno a far conseguire tali competenze a tutti i cittadini europei di qualsiasi età non implica, da parte degli Stati aderenti all'Unione Europea, l'adozione di un sistema scolastico uniformato. Al contrario, in tutti i documenti si sottolinea come sia opportuno preservare le differenti culture ed i vari metodi di insegnamento, orientati tuttavia verso le stesse finalità.

In questo quadro di riferimento, il percorso all'interno di quello che è l'obbligo scolastico⁵ in Italia deve essere indirizzato all'acquisizione di saperi e competenze riguardo a quattro assi culturali: asse dei linguaggi, asse matematico, asse scientifico-tecnologico, asse storico-culturale. Tali assi costituiscono le fondamenta per la costruzione di percorsi di apprendimento orientati verso l'acquisizione delle otto competenze chiave, ai fini di preparare i giovani alla vita futura e di consolidare e di accrescere saperi e competenze nel processo di apprendimento permanente.

L'asse matematico, che è quello che ci interessa, è così definito:

“L'asse matematico ha l'obiettivo di far acquisire allo studente saperi e competenze che lo pongono nelle condizioni di possedere una corretta capacità di giudizio e di sapersi orientare consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo.

La competenza matematica, che non si esaurisce nel sapere disciplinare e neppure riguarda soltanto gli ambiti operativi di riferimento, consiste nell'abilità di individuare ed applicare le procedure che consentono di esprimere ed affrontare situazioni problematiche attraverso linguaggi formalizzati.

La competenza matematica comporta la capacità e la disponibilità ad usare modelli matematici di pensiero (dialettico ed algoritmico) e di rappresentazioni grafica e simbolica (formule, modelli, costrutti, grafici, carte), la capacità di comprendere ed esprimere adeguatamente informazioni qualitative e quantitative, di esplorare situazioni problematiche, di porsi e risolvere problemi, di progettare e costruire modelli di situazioni reali. Finalità dell'asse matematico è l'acquisizione al termine dell'obbligo scolastico di istruzione delle abilità necessarie per applicare i principi ed i processi matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica e sul lavoro, nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui in molteplici contesti di indagine e di decisione.”

In questo quadro si è lavorato per sviluppare le nuove linee di indirizzo per l'insegnamento. Il risultato sono stati i seguenti documenti che coprono tutto il percorso scolastico dall'infanzia alla fine della scuola secondaria di secondo grado, e tutti gli indirizzi di scuola:

⁵ L'obbligo scolastico stabilisce che è obbligatoria l'istruzione impartita per almeno 10 anni: l'adempimento dell'obbligo di istruzione è finalizzato al conseguimento di un titolo di studio di scuola secondaria superiore o di una qualifica professionale di durata almeno triennale entro il 18° anno di età. Diverso è l'obbligo formativo, ossia il diritto/dovere dei giovani che hanno assolto l'obbligo scolastico, di frequentare attività formative fino all'età di 18 anni.

- “Indicazioni per il curricolo per la scuola dell’infanzia e per il primo ciclo dell’istruzione⁶” (2007),
- “Indicazioni Nazionali per i percorsi liceali⁷” (2010),
- “Linee Guida per Istituti Tecnici⁸” (2010),
- “Linee Guida per gli Istituti Professionali⁹” (2010),
- “Indicazioni Nazionali per il curricolo per la scuola dell’infanzia e per il primo ciclo di istruzione¹⁰” (2012).

Per quanto riguarda la matematica, tutti questi documenti prendono spunto dai lavori di una Commissione dell’Unione Matematica Italiana, coordinata dal prof. Arzarello e costituita da docenti universitari e della scuola, insediata nel luglio 2000 proprio con il fine di definire un curricolo in verticale di matematica, identificando un corpus di conoscenze e abilità fondamentali, necessarie a tutti coloro che entrano nell’attuale società – la cosiddetta “matematica per il cittadino” – da acquisire secondo una scansione organica articolata nei successivi livelli scolastici.

Vengono prodotti tre volumi (Matematica2001, Matematica2004, Matematica2005¹¹) il cui punto di partenza, piuttosto esplicito sugli obiettivi che l’educazione matematica nel suo complesso si dovrebbe porre, è il seguente:

“L’educazione matematica deve contribuire, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenze del cittadino, al cui raggiungimento concorre l’educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni d’incertezza. La conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per l’acquisizione di una corretta capacità di giudizio. In particolare, l’insegnamento della matematica deve avviare gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l’allievo, all’uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l’interpretazione del reale e non deve costituire unicamente un bagaglio astratto di nozioni.”

I documenti prodotti dalla Commissione descrivono un curricolo di matematica che non si limita solo a considerazioni riguardo ai contenuti essenziali e specifici della matematica, ma fa riferimenti espliciti e descrive indicazioni metodologiche per lo sviluppo di competenze trasversali (quali la capacità di descrivere i processi messi in atto, di argomentare e di affrontare razionalmente situazioni nuove). L’aspetto più marcato è la sottolineatura del passaggio da un approccio fortemente riproduttivo (tipico della tradizionale educazione matematica a livello di scuola di base), caratterizzato dalla richiesta di risolvere enormi quantità di esercizi ripetitivi, ad uno produttivo, caratterizzato dalla richiesta di affrontare problemi nuovi e di assumersi la responsabilità dei propri processi decisionali.

⁶ http://www.indire.it/indicazioni/templates/monitoraggio/dir_310707.pdf

⁷ http://nuovilicei.indire.it/content/index.php?action=lettura&id_m=7782&id_cnt=10497

⁸ <http://nuovitecnici.indire.it>

⁹ <http://nuoviprofessionali.indire.it>

¹⁰ <http://www.indicazioninazionali.it/J/>

¹¹ Disponibili tra i materiali UMI-CIIM al seguente url: <http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/>

In questo processo di definizione dei quadri di riferimento educativi, che ha coinvolto diversi Paesi nel mondo (noi abbiamo sottolineato il percorso comune dei Paesi della Comunità Europea), un ruolo importante è assunto dalle rilevazioni nazionali (INVALSI) e internazionali (OCSE-PISA e IEA TIMSS) per la valutazione esterna.

Nel nostro lavoro ci focalizzeremo sulla rilevazione OCSE-PISA perché da una parte è quella il cui framework ha decisamente influenzato gli sviluppi che abbiamo fin qui raccontato, dall'altra perché esplicitamente si interessa alla valutazione dei livelli di competenza alla fine dell'obbligo, con problemi cosiddetti "in contesto reale".

Capitolo 2

L'indagine OCSE-PISA e la valutazione della competenza matematica

2.1. Finalità generali

Nel 2000, l'OCSE (acronimo di Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico) ha promosso il programma per la valutazione internazionale dell'allievo, PISA, una rilevazione rivolta agli studenti quindicenni (età che corrisponde alla fine dell'obbligo scolastico in molti paesi partecipanti), per verificare in che modo essi siano preparati a vivere nella società, affrontandone quindi problemi quotidiani, con quanto appreso a scuola. Ciò che PISA intende misurare non sono tanto le conoscenze e le abilità maturate dagli alunni in relazione ad un preciso curriculum scolastico, quanto le competenze, ovvero le capacità degli studenti di utilizzare abilità e conoscenze, sviluppate a scuola ma anche nel corso dell'esperienza di vita individuale, in situazioni e contesti simili a quelli che si possono incontrare nella realtà di ogni giorno.

L'indagine ha come base un quadro di riferimento definito a livello internazionale, in cui sono presentati gli obiettivi ed in particolare si pone l'accento sul significato di *literacy*, ovvero la capacità di attingere a ciò che si è acquisito e di applicarlo a situazioni e contesti di vita reale, nonché la padronanza nell'analizzare, ragionare e comunicare efficacemente nell'ambito del processo di individuazione, interpretazione e soluzione dei problemi in una varietà di situazioni. In italiano, la *literacy* è stata tradotta con il termine competenza, che include una componente di "sapere" una di "saper fare" e una di saper adattare i propri saperi diversi contesti. In particolare, PISA mira ad approfondire le competenze nell'ambito della lettura, della matematica, delle scienze naturali e alcune competenze trasversali, quali il problem solving. Inoltre, nel framework, vengono indicati i contenuti, le conoscenze e le abilità che si intendono verificare e la distribuzione del numero di quesiti per ciascuna area di contenuto.

Nei documenti ufficiali¹², sono esplicitati i seguenti obiettivi principali dell'indagine:

- verificare le capacità degli studenti di applicare conoscenze ed abilità in domini chiave e di analizzare, riflettere e comunicare in maniera efficace nel momento in cui identificano, interpretano e risolvono problemi;
- valutare la rilevanza rispetto all'apprendimento permanente: vengono indagate caratteristiche degli studenti quali la motivazione ad apprendere, la percezione di sé e le strategie di apprendimento;
- mettere a punto indicatori relativi al rendimento scolastico degli studenti quindicenni comparabili a livello internazionale;
- individuare le caratteristiche dei sistemi scolastici dei paesi che hanno ottenuto i risultati migliori, in modo da trarre indicazioni relative all'efficacia delle politiche nazionali scolastiche;

¹²Consultabili al seguente url: <http://www.invalsi.it/invalsi/ric.php?page=ocseall>

- fornire con regolarità dati sui risultati dei sistemi di istruzione, con una certa regolarità, in modo da consentire un monitoraggio che ne segua gli sviluppi nel tempo.

Quest'ultimo è uno dei punti di forza della rilevazione, infatti i risultati ottenuti servono per acquisire consapevolezza delle caratteristiche dell'insegnamento, per intervenire sui processi di apprendimento degli allievi, per accertare obiettivi formativi prefissati e per monitorare gli effetti di eventuali modifiche sui curricula nazionali. Le prove esterne sono da considerarsi come uno strumento aggiuntivo in mano agli stati partecipanti per valutare le competenze necessarie allo sviluppo del cittadino adulto.

La periodicità della rilevazione è triennale. Ad ogni edizione, si valutano tutti e tre gli ambiti di contenuto (matematica, scienze, lettura), ma se ne approfondisce uno a rotazione, in modo da avere una panoramica dettagliata dei risultati e la possibilità di fare studi comparativi ed evolutivi ogni nove anni, con aggiornamenti intermedi ogni tre. Proprio per questo motivo, i quesiti delle prove OCSE-PISA sono essenzialmente non pubblici: vengono ri-utilizzati per fare comparazioni delle capacità della popolazione sul quesito a distanza di anni. Solo alcuni quesiti sono resi pubblici a titolo di esempio, e sono quelli che vengono utilizzati nelle ricerche esterne, come ad esempio il presente lavoro di tesi.

La sequenza del focus sulle discipline della prima rilevazione ad oggi è la seguente:

- Focus su lettura 2000 e 2009 (prossimo focus su lettura 2018),
- Focus su matematica 2003, 2012 (prossimo focus su matematica: 2021);
- Focus su scienze 2006, 2015 (prossimo focus su scienze 2024).

L'indagine avviene attraverso prove scritte strutturate, ovvero formate da una o più domande, che possono essere chiuse a scelta multipla semplice o connessa, aperte a risposta chiusa univoca o a risposta breve, aperte a risposta articolata. Le domande a risposte aperte, che permettono valutazioni sui processi e non solo sui prodotti.

I quesiti delle prove OCSE-PISA caratterizzati da uno stimolo visivo (diagramma, grafico, immagine) e sono composti da molteplici domande dette item del quesito ad esso riferiti;

Ogni prova PISA è affiancata da una griglia di valutazione per la correzione delle risposte, la quale definisce i criteri per l'attribuzione del punteggio ad ogni risposta.

OCSE-PISA organizza i livelli di competenza in sei fasce: la popolazione di riferimento è suddivisa all'interno di queste sei fasce. A seguito dei punteggi che scaturiscono dall'applicazione della griglia di correzione la fascia 6 è quella di eccellenza, mentre – per quanto riguarda la matematica – sotto il livello 2 si parla di *analfabetismo matematico*.

Riportiamo le definizioni dei 6 livelli di competenza matematica:

- **Livello 6:** gli studenti che si collocano al sesto livello sono in grado di concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni basate sulla propria analisi e modellizzazione di situazioni problematiche e complesse. Essi sono in grado di collegare fra loro differenti fonti d'informazione e rappresentazioni passando dall'una all'altra in maniera flessibile. A questo livello, gli studenti sono capaci di pensare e ragionare in modo matematicamente avanzato. Essi sono inoltre in grado di applicare tali capacità di scoperta e di comprensione contestualmente alla padronanza di operazioni e di relazioni matematiche di tipo

simbolico e formale in modo da sviluppare nuovi approcci e nuove strategie nell'affrontare situazioni inedite. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di esporre e di comunicare con precisione le proprie azioni e riflessioni collegando i risultati raggiunti, le interpretazioni e le argomentazioni alla situazione nuova che si trovano ad affrontare.

- **Livello 5:** gli studenti che si collocano al quinto livello sono in grado di sviluppare modelli di situazioni complesse e di servirsene, di identificare vincoli e di precisare le assunzioni fatte. Essi sono inoltre in grado di selezionare, comparare e valutare strategie appropriate per risolvere problemi complessi legati a tali modelli. A questo livello, inoltre, gli studenti sono capaci di sviluppare strategie, utilizzando abilità logiche e di ragionamento ampie e ben sviluppate, appropriate rappresentazioni, strutture simboliche e formali e capacità di analisi approfondita delle situazioni considerate. Essi sono anche capaci di riflettere sulle proprie azioni e di esporre e comunicare le proprie interpretazioni e i propri ragionamenti.
- **Livello 4:** gli studenti che si collocano al quarto livello sono in grado di servirsi in modo efficace di modelli dati applicandoli a situazioni concrete complesse anche tenendo conto di vincoli che richiedano di formulare assunzioni. Essi sono in grado, inoltre, di selezionare e di integrare fra loro rappresentazioni differenti, anche di tipo simbolico, e di metterle in relazione diretta con aspetti di vita reale. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di utilizzare abilità ben sviluppate e di ragionare in maniera flessibile, con una certa capacità di scoperta, limitatamente ai contesti considerati. Essi riescono a formulare e comunicare spiegazioni e argomentazioni basandosi sulle proprie interpretazioni, argomentazioni e azioni.
- **Livello 3:** gli studenti che si collocano al terzo Livello sono in grado di eseguire procedure chiaramente definite, comprese quelle che richiedono decisioni in sequenza. Essi sono in grado, inoltre, di selezionare e applicare semplici strategie per la risoluzione dei problemi. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di interpretare e di utilizzare rappresentazioni basate su informazioni provenienti da fonti differenti e di ragionare direttamente a partire da esse. Essi riescono a elaborare brevi comunicazioni per esporre le proprie interpretazioni, i propri risultati e i propri ragionamenti.
- **Livello 2:** gli studenti che si collocano al secondo livello sono in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedano non più di un'inferenza diretta. Essi sono in grado, inoltre, di trarre informazioni pertinenti da un'unica fonte e di utilizzare un'unica modalità di rappresentazione. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di servirsi di elementari algoritmi, formule, procedimenti o convenzioni. Essi sono capaci di ragionamenti diretti e di un'interpretazione letterale dei risultati.
- **Livello 1:** gli studenti che si collocano al primo livello sono in grado di rispondere a domande che riguardino contesti loro familiari, nelle quali siano fornite tutte le informazioni pertinenti e sia chiaramente definito il quesito. Essi sono in grado, inoltre, di individuare informazioni e di mettere in atto procedimenti di routine all'interno di situazioni esplicitamente definite e seguendo precise indicazioni. Questi studenti sono anche capaci di compiere azioni ovvie che procedano direttamente dallo stimolo fornito.

Oltre al livello di competenza degli studenti quindicenni, per come emerge dalla capacità di affrontare i quesiti proposti, l'indagine OCSE-PISA raccoglie anche informazioni di contesto attraverso una serie di questionari rivolti a:

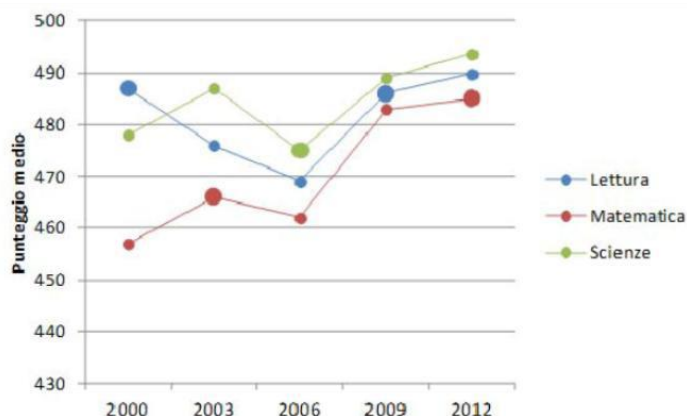
- studenti – *Questionario Studente*, nel quale si raccolgono informazioni sulla provenienza, la carriera scolastica e la familiarità con la tecnologia del ragazzo;
- dirigenti scolastici – *Questionario Scuola* nel quale sono richieste informazioni sui quindicenni dell'istituto, sull'esercizio dell'autonomia scolastica, sul corpo docente, l'organizzazione, le risorse e le strategie didattiche utilizzate;
- insegnanti – *Questionario Insegnante* focalizzato sul percorso di studio degli insegnanti, l'aggiornamento e lo sviluppo professionale, le convinzioni e gli atteggiamenti, il livello di collaborazione coi colleghi e coi genitori, ed infine sulla didattica;
- genitori, novità dell'edizione 2009, – *Questionario Genitori* che indaga sul contesto familiare, sugli atteggiamenti e sui comportamenti nei confronti dell'istruzione in generale e sulla disciplina di rilevazione.

I questionari rivestono una notevole importanza per l'OCSE, poiché permettono di effettuare analisi dei risultati di competenza in relazione a fattori socio-economici, culturali e ambientali.

Sottolineamo nuovamente che nonostante lo scopo non sia quello di misurare l'acquisizione dei contenuti dei curricoli, tuttavia PISA ha finito per stimolare un cambiamento dei curricoli scolastici dei paesi, orientandoli maggiormente sulla capacità degli studenti di utilizzare le conoscenze in contesti diversi.

2.2. I risultati degli studenti italiani nella rilevazione OCSE-PISA

L'Italia ha partecipato all'indagine OCSE-PISA, fin dal suo esordio del 2000. Il grafico seguente mostra l'andamento dei risultati per anno di rilevazione e per ambito degli studenti del nostro Paese.



Dalla lettura del grafico emergono immediatamente tre aspetti significativi per quanto riguarda l'andamento in matematica: c'è stato tendenzialmente un miglioramento negli anni (frutto evidente anche dell'attenzione maggiore su queste prove, e anche della connessione tra prove e curricoli sviluppati); la matematica rimane comunque sempre

l'ambito in cui gli studenti italiani fanno più fatica; il livello medio (per dire la verità di tutti e tre gli ambiti) è inferiore al livello medio dei Paesi OCSE: i punteggi infatti sono normalizzati rispetto alla media dei Paesi OCSE a cui è attribuito il valore di 500 punti.

Alcune peculiarità preoccupanti e ricorrenti dei dati italiani, che emergono invece dall'analisi più fine dei risultati sono:

- Il divario di risultati tra aree geografiche. Divario attenuatosi negli ultimi anni, anche grazie a specifici piani di formazione finanziati dalla Comunità Europea, ma che comunque persiste;
- Il divario di risultati tra tipologie di scuole superiori. In questo caso la prima reazione è quella di considerare *naturale* tale divario. Il punto è che OCSE-PISA intenderebbe testare le competenze che dovrebbero essere assicurate ad ogni cittadino, indipendentemente dalle scelte e dalle inclinazioni. È evidente un aspetto di criticità forte se alla fine dell'obbligo scolastico certi percorsi educativi non garantiscono l'acquisizione di tali competenze, ritenute indispensabili per il cittadino attivo;
- La percentuale di omissioni nei quesiti a risposta aperta, con richiesta di spiegazione o argomentazione, nettamente superiore alla media dei Paesi OCSE. Tale percentuale evidenzia le difficoltà dei nostri studenti quindicenni nella competenza argomentativa.

2.3. La rilevazione PISA 2012

Come detto nel paragrafo precedente, l'edizione 2012 delle prove OCSE-PISA si è focalizzato sull'ambito matematico, e per questo sono di particolare interesse per noi.

Il campione italiano era composto da 1194 scuole secondarie di secondo grado (su un totale di 11634 scuole di questo tipo in Italia) rappresentative di tutto il Paese, per un totale di 31073 studenti coinvolti. Molteplici sono state le novità dell'edizione 2012: dal punto di vista organizzativo, la prova è stata somministrata anche in versione computerizzata, e, per la prima volta, è stata oggetto di indagine anche la literacy finanziaria. Ma la novità più rilevante riguarda la rivisitazione del quadro di riferimento ed in particolare l'aggiornamento della definizione di competenza matematica, ridefinita come segue:

“La capacità di una persona di formulare, utilizzare ed interpretare la matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo.”

Il linguaggio utilizzato nella definizione è incentrato su un coinvolgimento attivo con la matematica ed è inteso a comprendere la formulazione di un ragionamento matematico e all'utilizzo di concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per descrivere, spiegare e prevedere determinati fenomeni. Il riferimento a *“svariati contesti”* non è casuale, ma è alla base dell'idea di competenza e della struttura dei quesiti dell'OCSE-PISA: essere competenti in matematica significa saper affrontare le sfide in varie situazioni quotidiane,

chiamando in causa la matematica. L'attenzione al contesto reale si riflette anche nel riferimento all'utilizzo di strumenti quali righello, calcolatrice, foglio di calcolo.

Riportiamo la definizione di competenza matematica dell'edizione del 2003.

“La literacy matematica è la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modo che rispondano alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione.”

Nella versione 2012, l'enfasi è sui tre processi: formulare, utilizzare ed interpretare, che si presume gli studenti dovranno attivare per risolvere i quesiti proposti, e che vengono ampiamente descritti all'interno del quadro teorico

- La *formulazione* in matematica include il capire quali sono le occasioni in cui applicare ed usare la matematica, ovvero la capacità di rendersi conto del fatto che è possibile applicare la matematica per comprendere o risolvere un particolare problema. Inoltre include la capacità di prendere una situazione come si presenta e trasformarla in una forma gestibile in modo matematico, creando strutture e rappresentazioni matematiche, identificando le variabili e formulando ipotesi semplificative che aiutino a risolvere il problema.
- L'*utilizzo* della matematica prevede l'applicazione del ragionamento matematico e l'utilizzo di concetti, procedimenti, fatti e strumenti matematici per arrivare ad una soluzione matematica. Comprende l'esecuzione di calcoli, la manipolazione di espressioni ed equazioni algebriche o di altri modelli matematici, l'analisi delle informazioni in forma matematica a partire da diagrammi e grafici matematici, lo sviluppo di descrizioni e spiegazioni matematiche e l'utilizzo di strumenti matematici per giungere alla soluzione dei problemi.
- L'*interpretazione* matematica prevede la riflessione su soluzioni o risultati matematici e la conseguente interpretazione nel contesto del problema. Implica la valutazione di soluzione o ragionamenti matematici in relazione al contesto del problema per comprendere se i risultati siano ragionevoli e sensati nella situazione data.

I tre processi appena esposti sono fondamentali nei soggetti attivi abituati a destreggiarsi in situazioni non familiari e sono alla base del *ciclo della matematizzazione*: esso consiste in una serie di passaggi che permettono di trasformare il problema situato in un contesto reale in un problema matematico, attraverso l'eliminazione progressiva degli elementi della realtà.

Una volta risolto il problema matematico all'interno del contesto matematico, è necessario un ritorno alla realtà, con la verifica del significato della soluzione e della plausibilità della stessa.

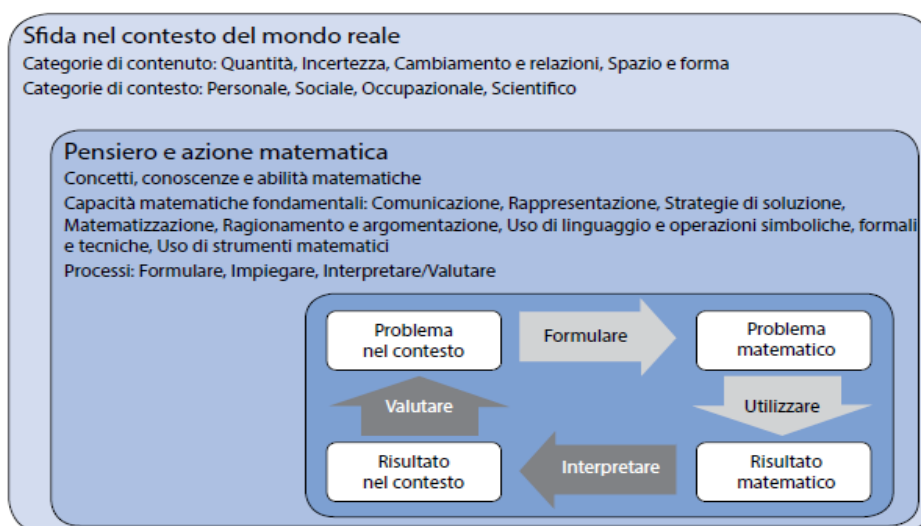
Gli item di PISA comprendono solo alcuni passi del ciclo, infatti spesso le rappresentazioni matematiche, come grafici o equazioni, sono fornite, pronte per essere manipolate per rispondere a domande o trarne conclusioni.

Ai fini della rilevazione della competenza matematica, ciascun quesito è collocato in un contesto il più realistico possibile, tale da riflettere la molteplicità delle situazioni in cui è possibile risolvere un problema quotidiano attraverso l'uso della matematica; inoltre è composto da un testo iniziale e da altre informazioni in forma di tabelle, grafici,

diagrammi a cui seguono una serie di item ad esso riferiti. Si tratta quindi di prove più articolate, diverse da quelle che gli studenti sono abituati a svolgere durante la loro carriera scolastica e richiedono loro varie prestazioni. Ogni domanda viene inizialmente catalogata in base a tre aspetti:

- i **processi matematici** (formulare, utilizzare, interpretare) che descrivono ciò che fanno gli studenti per collegare il contesto del problema alla matematica e quindi risolverlo, e le capacità soggiacenti a tali processi;
- il **contenuto matematico**: cambiamento e relazioni, spazio e forma, quantità, incertezza e dati;
- i **contesti** nei quali sono inseriti gli item: personale, occupazionale, sociale, scientifico.

Possiamo riassumere quanto esposto fin ora con l'immagine che descrive il ciclo di modellizzazione, i processi e i contenuti matematici coinvolti:



Grazie alla periodicità della rilevazione è possibile affermare che dal 2003 al 2012 è significativamente diminuita (del 7%) la percentuale di studenti italiani che hanno ottenuto punteggi al di sotto del livello 2, mentre è aumentata (del 2,9%) quella di coloro che hanno totalizzato punteggi a livello 5 o 6. Gli alunni hanno avuto una buona performance nella valutazione riguardante la loro capacità di interpretare, applicare e valutare risultati matematici, al contrario in quella di formulare situazioni in modo matematico. Gli ambiti di contenuto in cui l'incremento di punteggio è più elevato, rispetto alle edizioni precedenti, sono "Incertezza e Dati" e "Cambiamento e Relazioni".

Dall'indagine, è nuovamente emerso il problema delle pari opportunità educative in termini di provenienza geografica, che in termini di provenienza scolastica. Nonostante sia diminuito il divario tra Nord e Sud, rispetto al 2003, il Mezzogiorno ottiene sempre risultati al di sotto della media, come mostrano le seguenti tabelle.

NORD-OVEST	NORD-EST	CENTRO	SUD	ISOLE
508	516	493	469	447

LICEI	ISTITUTI TECNICI	PROFESSIONALI
527	492	413

2.4. Da OCSE-PISA alla nostra ricerca

Molte ed interessanti sono le informazioni che riusciamo ad ottenere dall'indagine OCSE-PISA, tuttavia i dati quantitativi non permettono di andare in profondità rispetto alle specifiche difficoltà incontrate dagli studenti durante lo svolgimento della prova.

Questo lavoro nasce quindi con l'intento di sviluppare una indagine qualitativa volta ad interpretare queste difficoltà: esaminare, partendo dai quesiti della prova OCSE-PISA, quali siano i processi messi in atto e le problematicità degli studenti italiani quindicenni di fronte a quesiti che mettono in gioco la valutazione delle loro.

A tal fine abbiamo raccolto i quesiti OCSE-PISA pubblici, ne abbiamo selezionati alcuni che ci son parsi particolarmente interessanti (vedi capitolo sulla definizione dei compiti) e, successivamente, abbiamo raccolto la disponibilità di scuole secondarie di secondo grado delle diverse tipologie (Licei, Professionali e Tecnici) a partecipare alla nostra indagine. Il campione è evidentemente di convenienza, ma d'altra parte la nostra finalità non è di indurre conclusioni di natura statistica, ma far emergere considerazioni di natura qualitativa.

La collaborazione richiesta per il nostro studio ha previsto diversi gradi di coinvolgimento da parte dei ragazzi e insegnanti:

1. possibilità a distribuire una prova basata su 3 o 4 quesiti OCSE-PISA nelle classi seconde dell'istituto. La prova è stata pensata della durata di 60 minuti;
2. disponibilità di interviste singole con alcuni studenti che hanno partecipato alla prova;
3. disponibilità di interviste con gli insegnanti.

La risposta che abbiamo avuto dalle scuole contattate è stata abbastanza positiva e siamo riusciti ad ottenere un campione di 196 allievi, provenienti da 10 classi differenti, provenienti per il 37% da Istituti Tecnici, per il 20% da Istituti Professionale ed infine per il 43% da Licei di indirizzo diversificato (Scientifico per il 9%, Classico per il 23,4%, Linguistico per il 10,6%).

Appendice al capitolo 2

Riportiamo alcune definizioni del quadro di riferimento OCSE-PISA, così come da documento ufficiale dello stesso.

- **Comunicazione:** la literacy matematica richiede comunicazione. Lo studente percepisce l'esistenza di una sfida ed è stimolato a riconoscere e comprendere una situazione problematica. La lettura, la decodifica e l'interpretazione di affermazioni, domande, compiti o oggetti permettono allo studente di costruirsi un modello mentale della situazione e questo rappresenta un passaggio fondamentale per la comprensione, chiarificazione e formulazione di un problema. Durante il processo di risoluzione, potrebbe presentarsi la necessità di riassumere e presentare i risultati intermedi. Successivamente, una volta trovata la soluzione, la persona che ha risolto il problema potrebbe dover presentare la soluzione fornendo una spiegazione o una giustificazione.
- **Matematizzazione:** la literacy matematica può prevedere la trasformazione di un problema definito nel mondo reale in una forma strettamente matematica (che può includere strutturazione, concettualizzazione, formulazione di ipotesi e/o creazione di un modello) o l'interpretazione o valutazione di un risultato o un modello matematico in funzione del problema iniziale. Il termine matematizzazione viene utilizzato per descrivere le attività matematiche fondamentali messe in gioco.
- **Rappresentazione:** molto spesso, la literacy matematica implica rappresentazioni di oggetti e situazioni di natura matematica. Questo può consistere nel selezionare, interpretare, traslare e utilizzare diverse rappresentazioni per riuscire a farsi un'idea della situazione, a interagire con il problema o a presentare il proprio lavoro. Il termine rappresentazione può fare riferimento a grafici, tabelle, diagrammi, figure, equazioni, formule e materiali tangibili.
- **Ragionamento e argomentazione:** una delle abilità matematiche richieste nei vari passaggi e nelle attività connesse alla literacy matematica è denominata ragionamento e argomentazione. Questa competenza implica processi mentali basati sulla logica che permettono di analizzare e collegare gli elementi di un problema in modo tale da poterne trarre delle conclusioni, verificare una giustificazione data o fornire una giustificazione per affermazioni o soluzioni al problema.
- **Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:** la literacy matematica richiede spesso di elaborare strategie per risolvere i problemi in forma matematica. E questo implica una serie di processi di controllo critico che orientano lo studente nel riconoscere, formulare e risolvere i problemi in maniera efficace. Tale competenza permette agli studenti di selezionare o elaborare un piano o una strategia per utilizzare la matematica nella risoluzione dei problemi posti in un compito e/o inseriti in un contesto e di metterli in atto. Questa capacità matematica può essere richiesta in qualsiasi passaggio del processo di risoluzione del problema.
- **Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni:** la literacy matematica richiede l'utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni. Questo consiste nel comprendere, interpretare, manipolare e utilizzare espressioni simboliche in un contesto matematico (incluse espressioni e operazioni aritmetiche) retto da regole e convenzioni matematiche. Implica inoltre la comprensione e l'utilizzo di costrutti formali basati su definizioni, regole e sistemi formali, nonché

l'utilizzo di algoritmi con tali entità. I simboli, le regole e i sistemi utilizzati varieranno in funzione dei contenuti matematici specifici necessari per un dato compito al fine di formulare, risolvere o interpretare gli aspetti matematici.

- **Utilizzo di strumenti matematici:** l'ultima competenza matematica che sottende all'utilizzo pratico della literacy matematica è l'utilizzo di strumenti matematici. Gli strumenti matematici comprendono strumenti fisici, come ad es. gli strumenti di misurazione, ma anche calcolatrici e strumenti informatici oggi sempre più disponibili. Questa abilità implica la conoscenza e la capacità di utilizzo di determinati strumenti di supporto all'attività matematica nonché la consapevolezza delle limitazioni di tali strumenti. Gli strumenti matematici possono altresì rivestire un ruolo importante nella comunicazione dei risultati. Nelle precedenti indagini PISA l'uso di simili strumenti durante le prove scritte era ammesso solo in misura assai ridotta. La componente informatizzata opzionale della rilevazione PISA 2012 per la matematica offrirà agli studenti maggiori opportunità di utilizzare strumenti matematici e permetterà di inserire osservazioni sul modo in cui tali strumenti vengono utilizzati durante la prova.

Capitolo 3

La costruzione della prova d'indagine

3.1. La costruzione della prova: le scelte e le motivazioni

Il primo passo per la costruzione della prova è stato quello di decidere, tra i quesiti pubblici rilasciati della prova OCSE-PISA, quanti e quali somministrare alla luce dei nostri obiettivi.

Per quanto riguarda il numero di quesiti, pensando di concedere agli studenti 60 minuti (anche per non pesare troppo sul regolare svolgimento delle lezioni), abbiamo deciso di non andare oltre ai 4 quesiti per prova. Su questa scelta hanno pesato considerazioni sia riguardo alla tipologia dei quesiti (con testi spesso “complessi” e comunque da leggere attentamente, e che rappresentano dei veri e propri problemi per gli studenti, e non ripetizioni di esercizi già visti) che al nostro obiettivo di dare tempo per pensare.

Ci siamo limitati a definire un massimale per il numero di quesiti, non fissandolo a priori, in quanto – come vedremo – i quesiti si differenziano molto, ed in particolare possono essere composti da un numero di item diversi.

A seguito del vincolo che ci siamo dati, per testare più quesiti e per farlo anche all'interno della stessa classe senza richiedere tempo aggiuntivo all'insegnante, abbiamo deciso di sviluppare due prove distinte, da distribuire in ogni classe suddividendola all'incirca in due gruppi (ovvero ogni ragazzo partecipante ha fatto solo una delle due prove).

Per quanto riguarda la scelta dei quesiti per la composizione delle due prove, hanno influito, oltre ad un'analisi a priori sulla potenzialità del quesito di far emergere processi matematici o difficoltà significative (analisi che presenteremo in questo capitolo), la volontà di differenziare rispetto agli ambiti, le competenze e i processi coinvolti secondo la classificazione proposta da OCSE-PISA.

Il risultato di questo processo di scelta ha portato alla definizione di due prove, rispettivamente di 4 e 3 quesiti. Abbiamo cercato di equilibrare le due prove per complessità e numero di sotto-domande, ma soprattutto – visto che l'indagine non aveva nessun interesse valutativo e comparativo – in modo che in ognuna di esse venissero testati i tre processi definiti dal quadro di riferimento OCSE-PISA.

Le due prove costruite sono formate dai seguenti quesiti, di cui utilizziamo il nome assegnato da OCSE-PISA, per poterli richiamare con maggiore facilità in fase di commento.

- Prova 1: “Macchia di Petrolio”, “Classifiche”, “Noleggio DVD”, “Garage”.
- Prova 2: “Gelateria”, “Apparecchi Difettosi”, “Velocità di Flusso”.

In questa fase abbiamo utilizzato i testi originali delle prove rilasciate, mentre, come vedremo in seguito, durante le interviste saranno proposte delle variazioni ai quesiti, mirate alla verifica delle ipotesi interpretative emerse sulla base dei dati raccolti in questo stadio.

Nei prossimi paragrafi riportiamo il testo dei sette quesiti scelti; ambiti, competenze e processi di riferimento per come dichiarati dall'indagine OCSE-PISA; le motivazioni della nostra scelta; e l'analisi a priori che abbiamo fatto delle possibili problematiche degli alunni nell'affrontarli.

3.2. La costruzione della prova: le due prove, i quesiti e le descrizioni

3.2.1. La prova 1

Quesito 1.1: MACCHIA DI PETROLIO

Una petroliera ha urtato una roccia in alto mare che ha squarciato il serbatoio del petrolio. La petroliera si trovava a circa 65 km da terra. Dopo qualche giorno il petrolio si è allargato, come si può vedere nella cartina qui sotto.



Item 1:

Utilizzando la scala della cartina, stima la superficie (area) della macchia di petrolio in chilometri quadrati (km²).

Risposta: km²

Scrivi qui sotto la strategia utilizzata

.....
.....
.....

Descrizione e analisi a priori del quesito “Macchia di Petrolio”

Il quesito “Macchia di petrolio” è composto da un solo item, che – secondo la classificazione proposta da OCSE-PISA – investe l’ambito di contenuto matematico “spazio e forma”, la categoria di contesto “scientifico”, ed infine la categoria di processo “utilizzare”. È richiesto di stimare un’area *irregolare* su una cartina: è fornita la scala usata nella cartina.

La convinzione, supportata dai dati delle rilevazioni nazionali, è che la stima, ovvero la determinazione di misure approssimate, non sia un argomento tradizionalmente particolarmente curato nel contesto italiano dell’insegnamento della matematica, e più in generale delle scienze. Infatti, come testimoniato anche dai risultati degli studenti italiani nelle prove nazionali, come INVALSI, tali domande creano grosse difficoltà; pertanto è prevedibile una percentuale di risposte al quesito non corrette alta.

Il quesito è stato selezionato dunque per raccogliere elementi al fine di: investigare le principali problematicità degli alunni nell’affrontare questioni di questo tipo, in cui si chiede di stimare l’estensione di una figura irregolare; raccogliere i diversi procedimenti eventualmente utilizzati per stimare l’estensione di una superficie irregolare; vedere se e quanto per domande di questo tipo, senza una *risposta esatta*, gli studenti attivano processi di controllo.

Il lessico utilizzato sembra accessibile a ragazzi quindicenni e anche la conoscenza enciclopedica in gioco (il tipo di situazione descritta) dovrebbe non creare particolari difficoltà.

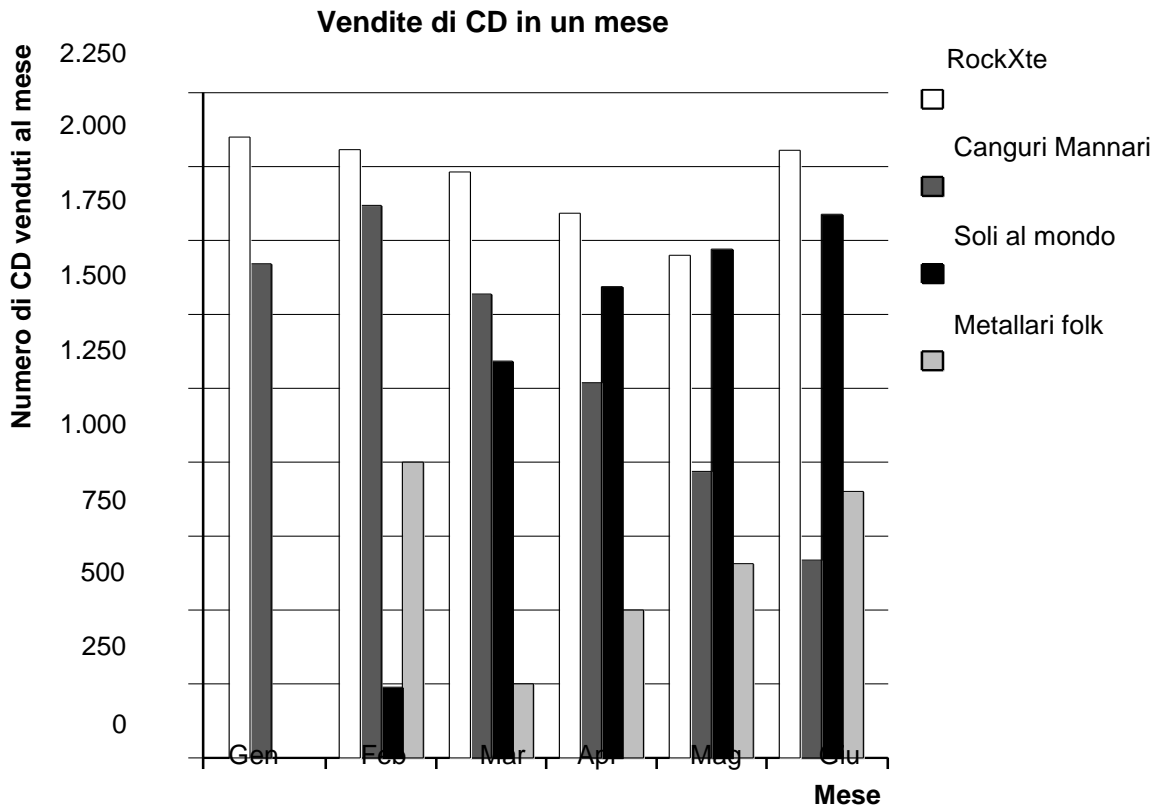
Possiamo però intravedere due tipi di difficoltà. Una, legata alla specifica domanda del quesito, è il fatto che non si dia la possibilità di passare attraverso il conteggio per arrivare ad una risposta: la figura infatti non è quadrettata. L’altra, più generale e legata all’approccio ai problemi di matematica, può essere rappresentato dalla presenza del dato della distanza della petroliera da terra (65 km): ci immaginiamo che la gestione di tale informazione possa creare difficoltà. Infatti il contratto-didattico¹³ alunno-insegnante *impone* che vengano utilizzati tutti i dati forniti dal problema.

¹³ Il contratto didattico è un costrutto introdotto da Brosseau (1986) che definisce in questo modo l’insieme dei comportamenti dell’insegnante che sono attesi dall’allievo e l’insieme dei comportamenti dell’allievo che sono attesi dall’insegnante. Brosseau mostra come questi comportamenti attesi influenzino tantissimo le decisioni di allievi (ed insegnanti) in contesto matematico.

Una difficoltà generale per i nostri studenti, e comune a tutti i quesiti OCSE-PISA, è quella relativa alla gestione (e comprensione) della figura che è parte fondamentale del testo del problema, e non solo un *abbellimento ornamentale*. La ricerca in didattica (Ferrari, 2004) ha mostrato come spesso l'atteggiamento degli studenti di fronte a problemi con immagini sia quello di ignorare o comunque sottovalutare rispetto al testo scritto, il contenuto informativo delle immagini, che appunto sono considerate elemento decorativo. Nello specifico tra l'altro, lo stimolo grafico è anche di difficile consultazione: non è infatti assolutamente immediato stabilire quale sia la distanza tra la petroliera e la terra (il testo appare ambiguo in questo senso).

Quesito 1.2: CLASSIFICHE

A gennaio è uscito il nuovo CD dei gruppi *RockXte* e *Canguri Mannari*, seguito a febbraio dal CD dei gruppi *Soli al mondo* e *Metallari folk*. Il seguente grafico illustra le vendite dei CD di questi gruppi da gennaio a giugno.



Item 1:

Quanti CD ha venduto il gruppo *Metallari folk* ad aprile?

- A 250
- B 500
- C 1.000
- D 1.270

Item 2:

In quale mese il gruppo *Soli al mondo* ha venduto per la prima volta più CD del gruppo *Canguri Mannari*?

- A Nessun mese
- B Marzo
- C Aprile

D Maggio

Item 3:

I gruppi emergenti di successo ricevono un premio se il CD raggiunge le 10.000 copie vendute. I *RockXte* e i *Canguri Mannari* sono gruppi emergenti.

A quale o quali di questi gruppi viene assegnato il premio a fine giugno?

- A Solo ai *RockXte*
- B Solo ai *Canguri Mannari*
- C A tutti e due
- D A nessuno dei due

Item 4:

Il CD dei Soli al mondo è uscito a febbraio. In base al grafico, in media, quanti CD al mese hanno venduto approssimativamente i Soli al mondo da febbraio a giugno?

- A 1.120 CD
- B 1.350 CD
- C 1.600 CD
- D 1.840 CD

Item 5:

Il manager dei *Canguri Mannari* è preoccupato perché il numero dei CD venduti dal gruppo è diminuito da febbraio a giugno.

Quale sarà il volume di vendite stimato del gruppo per il mese di luglio, se continua la stessa tendenza negativa?

- A 70 CD
- B 370 CD
- C 670 CD
- D 1.340 CD

Descrizione e analisi a priori del quesito “Classifiche”

Gli item relativi al quesito “Classifiche”, di difficoltà crescente, sono classificati -secondo la classificazione proposta da OCSE-PISA- nell’ambito di contenuto “incertezza e dati”, nella categoria di contesto “sociale” e di processo “interpretare”.

È richiesto di estrapolare delle informazioni da un grafico a colonne per rispondere ad alcune domande inizialmente di lettura ed interpretazione dei dati forniti dal grafico (item 1, 2, 3), la manipolazione di dati ottenuti dal grafico (item 4), la previsione in base ai dati estrapolati dal grafico (item 5).

Il lessico utilizzato appare accessibile a ragazzi quindicenni, ma almeno il testo iniziale non risulta essenziale per rispondere (nel grafico infatti sono riportati il significato delle ascisse e delle ordinate): pertanto riteniamo che, almeno per i primi 3 item, il peso di eventuali difficoltà legate alle competenze linguistiche o all’atteggiamento di fronte al testo sia molto più basso che in altri quesiti. Diverso il discorso per gli item 4 e 5, in cui i dati del grafico vanno utilizzati in base alle richieste specifiche racchiuse nel testo degli item stessi.

Il collegamento al contesto è molto blando, o meglio riteniamo non sia un fattore che facilita la comprensione delle richieste. Si chiede infatti principalmente di lavorare coi dati forniti da un istogramma, che potrebbe essere completamente decontestualizzato. In poche parole la nostra ipotesi è che probabilmente i risultati non cambierebbero molto se invece che mesi e numero di CD fossero usate altre le variabili (o variabili astratte come x e y).

Come ci suggeriscono i risultati delle prove nazionali, gli studenti mostrano di avere una discreta riuscita nella lettura dei dati essenziali di grafici di questo tipo, meno nell’elaborare informazioni più complesse, o che richiedono confronti. Per questo ci aspettiamo una alta percentuale di risposte corrette da parte del nostro campione ai primi 3 item, e una percentuale significativamente più bassa per gli ultimi 2 item.

I dati e le rappresentazioni grafiche giocano un ruolo importante in tutti i mezzi di comunicazione (come ad esempio i media) ed in altri aspetti della nostra società: essendo la lettura di grafici e la loro interpretazione una delle competenze sicuramente più di uso quotidiano, abbiamo quindi ritenuto importante investigare su capacità e difficoltà degli studenti su questo tipo di quesito.

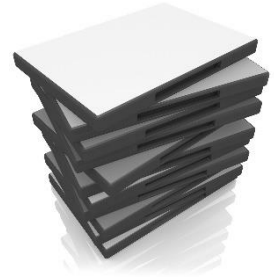
Appare inoltre interessante il fatto che il quesito “Classifiche” coinvolga, nei suoi item, una vasta gamma di competenze legate all’interpretazione e uso di rappresentazioni grafiche: dalla semplice lettura di un *dato diretto*, all’elaborazione più complessa dei dati raccolti nel grafico, all’utilizzo dei dati per avanzare previsioni in base a trend riconosciuti.

Quesito 1.3: NOLEGGIO DI DVD

Gina lavora in un negozio che noleggia DVD e giochi per il computer.

In questo negozio la tessera annuale costa 10 zed.

Il prezzo per il noleggio dei DVD ai tesserati è più basso del prezzo praticato ai non tesserati, come si può vedere nella tabella qui sotto:



Prezzo per il noleggio di un DVD ai non-tesserati	Prezzo per il noleggio di un DVD ai tesserati
3,20 zed	2,50 zed

Item 1:

Marco lo scorso anno si era tesserato presso il negozio che noleggia i DVD.

E, sempre durante lo scorso anno, ha speso 52,50 zed in totale, incluso il costo della tessera.

Quanto avrebbe speso Marco se non avesse avuto la tessera e avesse noleggiato lo stesso numero di DVD?

Numero di zed:

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....
.....
.....

Item 2:

Qual è il numero minimo di DVD che un tesserato deve noleggiare per coprire il costo della tessera?

Numero di DVD:.....

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....
.....

Descrizione e analisi a priori del quesito “Noleggio di DVD”

Gli item relativi al quesito “Noleggio di DVD” investono l’ambito di contenuto matematico “quantità” ed il contesto “personale”, secondo la classificazione proposta da OCSE-PISA. La categoria di processo invece è differente a seconda degli item: il primo è classificato nella tipologia “applicare” e si chiede di calcolare e confrontare prezzi, mentre il secondo è catalogato nel processo “formulare”, poiché si richiede una modellizzazione matematica della situazione reale.

Il quesito, molto articolato, sembra comportare la necessità di comprendere e ben gestire un numero elevato di informazioni, fornite sia dal testo che dalla tabella: è facile ipotizzare che alcuni dati possano essere tralasciati dagli alunni.

Una difficoltà può scaturire da una scarsa conoscenza enciclopedia (Zan, 2006) relativa al particolare contesto e, in particolare, ad una scarsa consuetudine con l’utilizzo di tessere per il noleggio ed il loro funzionamento (probabilmente già nel 2012, ma sicuramente nel 2016, i ragazzi hanno più consuetudine con la visione di film tramite internet).

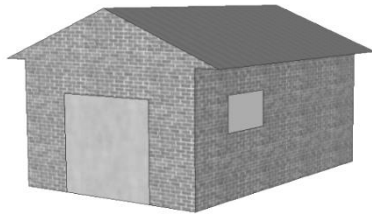
Abbiamo ritenuto opportuno investigare su quali siano le principali difficoltà, tra cui ipotizziamo, oltre ad una scarsa conoscenza enciclopedica, una lettura superficiale del testo, una parziale comprensione della domanda ed anche la mancata rilettura della risposta matematica nel contesto reale, ovvero la carenza dell’ultimo passo del ciclo della matematizzazione.

Un altro aspetto interessante è legato a vedere come i ragazzi descriveranno i passaggi fatti, nella seconda parte dell’item 2: è abbastanza facile infatti prevedere che alcuni possano trovare la risposta attraverso calcoli mentali, e che poi non riescano a ricostruirli o comunque a descriverli in passaggi matematici lineari.

Quesito 1.4: GARAGE

La gamma “base” di un costruttore di garage comprende modelli che hanno solo una finestra e una porta.

Giorgio sceglie il seguente modello dalla gamma “base”. La posizione della finestra e della porta sono illustrate qui sotto.

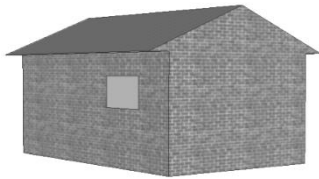


Item 1:

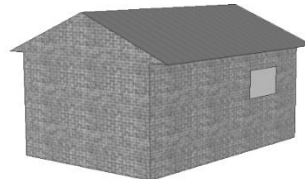
Le illustrazioni qui sotto mostrano diversi modelli “base” visti dal retro. Soltanto una di queste illustrazioni corrisponde al modello scelto da Giorgio, riportato sopra.

Quale modello ha scelto Giorgio? Fai un cerchio intorno ad A, B, C o D.

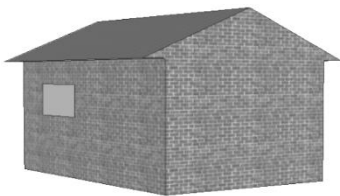
A



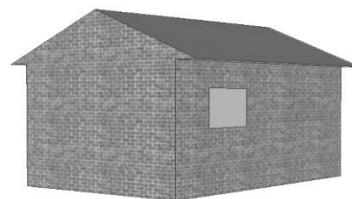
B



C

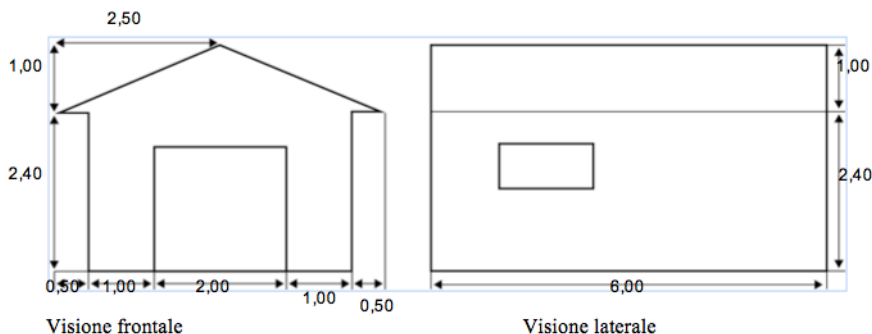


D



Item 2:

Le due piantine qui sotto indicano le dimensioni, in metri, del garage scelto da Giorgio



Il tetto è composto da due parti rettangolari identiche.

Calcola l'area **totale** del tetto.

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....
.....

Item 3:

Giorgio ha intenzione di stendere una soletta di calcestruzzo rettangolare per il suo garage. La soletta sarà più ampia dell'area del pavimento del garage in modo da creare un bordo di calcestruzzo della **stessa** larghezza tutto intorno al garage.

La soletta di calcestruzzo avrà uno spessore di 10 cm.

Giorgio non vuole utilizzare più di 4 metri cubi (m³) di calcestruzzo.

Qual è la larghezza **massima** che può avere il bordo?

- A 40 cm
- B 60 cm
- C 70 cm
- D 80 cm
- E 140 cm

Descrizione e analisi a priori del quesito “Garage”

Gli item relativi al quesito “Garage”, di difficoltà crescente, investono l’ambito di contenuto matematico “spazio e forma” ed il contesto “occupazionale”. La categoria di processo è differente per i vari item: il primo è catalogato in “formulare” e si richiede di riconoscere una figura tridimensionale, mentre i restanti sono classificati in “applicare” e si richiede di utilizzare delle informazioni presenti in un progetto.

Il testo è molto articolato e di non facile comprensione, perché ricco di vocaboli difficili e forse non presenti nel lessico di un quindicenne (come ad esempio calcestruzzo, gamma base, soletta): anche se la conoscenza del loro significato può apparire superflua ad un lettore esperto, appare piuttosto probabile che possa invece influenzi l’approccio al problema, portandone fino all’abbandono.

Inoltre, il quesito comporta la necessità di gestire un numero considerevole di informazioni fornite sia dal testo che dalle immagini. Abbiamo già osservato come può apparire complessa, per i ragazzi italiani, la risoluzione di esercizi i cui dati sono presenti in figura, a cui dobbiamo aggiungere nel caso specifico una scarsa abitudine (e conoscenza) degli studenti alla lettura di piantine. Tuttavia, anche se tale attività non è proposta in tutti gli indirizzi della scuola italiana, riteniamo che chiunque dovrebbe essere in grado di interpretare e risolvere un problema in cui si usano diverse forme di rappresentazioni.

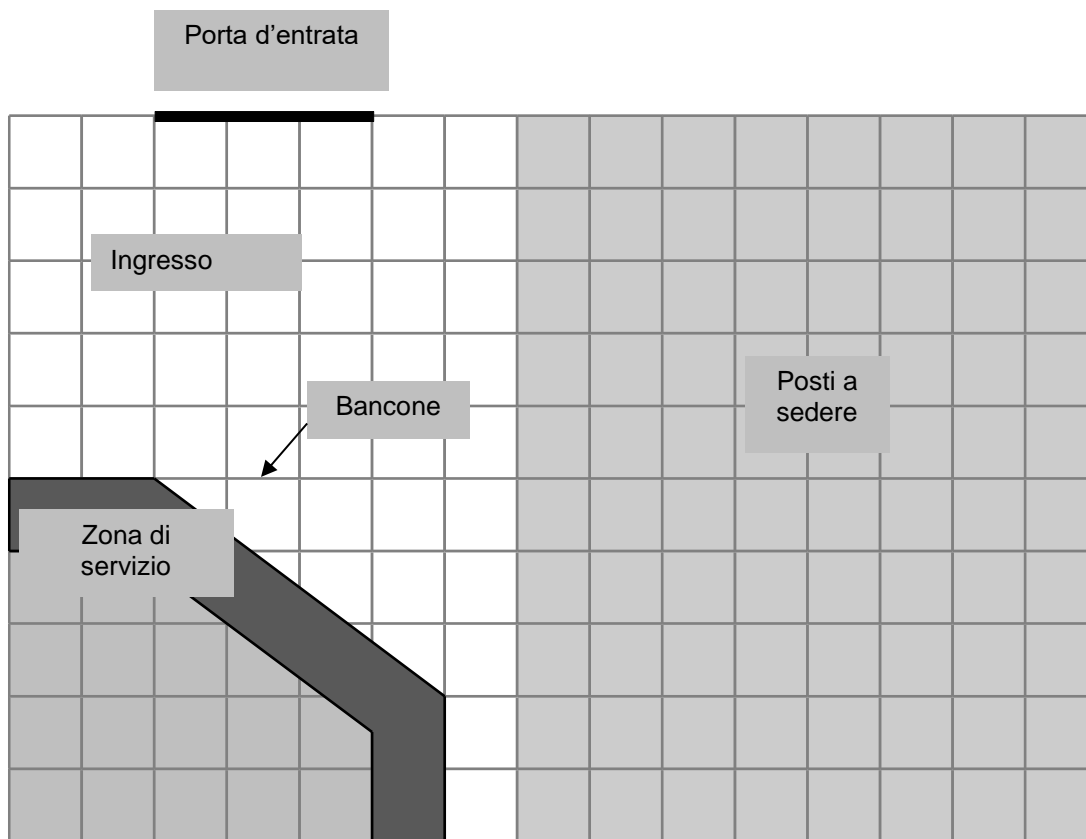
Abbiamo quindi ritenuto interessante investigare su capacità e difficoltà degli studenti in una situazione apparentemente nuova.

3.2.2. La prova 2

Quesito 2.1: GELATERIA

Ecco la piantina della gelateria di Maria. Maria sta ristrutturando il locale.

La zona di servizio è circondata da un bancone.



Nota: ogni quadrato sulla griglia rappresenta 0,5 metri x 0,5 metri.

Item 1:

Maria vuole applicare una nuova bordatura lungo il bordo esterno del bancone. Qual è la lunghezza totale della bordatura di cui ha bisogno? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

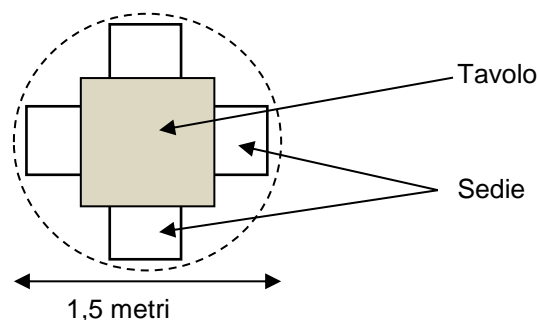
.....
.....
.....
.....
.....

Item 2:

Maria vuole rifare anche il pavimento nel suo locale. Qual è la superficie (area) totale del pavimento del locale, escludendo la zona di servizio e il bancone? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....

Item 3:



Maria vuole mettere nel suo locale dei moduli composti da un tavolo e quattro sedie, come quello illustrato sopra. Il cerchio rappresenta l'area necessaria per ciascun modulo. Per garantire uno spazio sufficiente ai clienti quando sono seduti, ciascun modulo, rappresentato dal cerchio, va collocato rispettando le seguenti condizioni:

- ciascun modulo va collocato ad almeno 0,5 metri dai muri.
- ciascun modulo va collocato ad almeno 0,5 metri dagli altri moduli.

Qual è il numero massimo di moduli che Maria può collocare nella zona in grigio del suo locale destinata ai posti a sedere?

Numero di moduli:

Descrizione e analisi a priori del quesito “Gelateria”

Gli item relativi al quesito “Gelateria” investono l’ambito di contenuto matematico “spazio e forma”, di contesto “professionale” e la categoria di processo è “utilizzare”, secondo la classificazione proposta da OCSE-PISA.

È richiesto di calcolare il perimetro e l’area di figure non stereotipate, scomponendole in figure elementari (item 1 e 2) e di contare il numero di cerchi (moduli) che è possibile inserire in un poligono rispettando alcune condizioni (item3).

Le difficoltà appaiono essere diversificate. La prima, legata all’obiettivo dell’item, è quella di calcolare misure senza poter applicare un’unica formula (come nel calcolo di misure di figure note), ma dovendo appunto eventualmente pensare l’oggetto da misurare come unione di figure note.

La seconda è relativa alla comprensione del testo, l'aspetto che appare più complesso è quello di capire cosa il quesito chiede di misurare: capire cosa corrisponde alla bordatura (item 1), gestire il "escludendo la zona di servizio e il bancone" (item 2).

La terza, specifica dell'item 3, è il fatto di doversi cimentare in una richiesta di massimizzazione, e quindi di procedere in astratto oppure di riuscire a controllare, dopo aver verificato anche empiricamente che nello spazio entrano N tavoli, che non possono entrarne $N+1$. D'altra parte questa terza difficoltà può non emergere dalle risposte del questionario scritto. Per questo, nel item 3 è molto più interessante il processo del prodotto: si potrebbe dare la risposta giusta senza fare nessun tipo di controllo sulla massimizzazione, o facendo controlli non sufficientemente (dal punto di vista matematico) adeguati.

La convinzione, supportata dai risultati delle prove nazionali come INVALSI, è che gli studenti incontrino molte problematiche in questo tipo di quesiti, in cui il calcolo delle misure non sia immediatamente collegato all'applicazione di una formula (e quindi già a partire dalle richieste dell'item 1). Nel contesto italiano, gli studenti mostrano difficoltà nel riconoscere le figure geometriche in schemi non familiari e posizioni non standard, ed è ben noto in didattica come queste difficoltà siano fortemente influenzate dalle immagini nei libri di testo e dalle pratiche didattiche. Si pensi, ad esempio, alla tendenza a dare dei nomi legati alla forma e alla posizione dell'oggetto anche nelle formule di calcolo di perimetro e area. L'area del rettangolo è base per altezza ed il perimetro è due volte la somma tra base e altezza: tipicamente la base è il lato più lungo, su cui *poggia* la figura appunto messa in una posizione stereotipata.

Il testo appare utilizzare un lessico accessibile a ragazzi ed anche la conoscenza enciclopedica del tipo di situazione non dovrebbe creare difficoltà. Nonostante ciò appare essere un testo complesso, come abbiamo discusso precedentemente: in particolare un testo che richiede di coordinare diverse informazioni per capire cosa chiede la domanda. L'ipotesi è che ci possano essere molti errori, non legati a calcoli matematici errati, ma a misure di cose diverse rispetto a ciò che è richiesto.

Una difficoltà che abbiamo già commentato per altri quesiti (e, come detto nei capitoli precedenti, comune a tanti quesiti OCSE-PISA proprio per la loro struttura di base) è la gestione delle informazioni legate all'immagine, che in questo caso sono cruciali per rispondere. Lo stimolo grafico e la legenda appaiono anch'essi piuttosto complessi da consultare: il riquadro denominato "Bancone" potrebbe essere interpretato come una reale componente del locale, mentre l'uso dei colori bianco e grigio per distinguere la zona dei posti a sedere sembra segnare un muro di divisione tra i due ambienti. Tuttavia la contestualizzazione nel mondo reale dovrebbe in parte supplire a tali ambiguità.

Abbiamo quindi ritenuto interessante investigare proprio su questi aspetti, in particolare sull'analisi delle cause delle risposte errate, e sull'approccio al problema di massimizzazione (item 3).

Quesito 2.2: APPARECCHI DIFETTOSI

L'Azienda Elettrix fabbrica due tipi di apparecchi elettronici: lettori audio e video. Al termine della produzione giornaliera, i lettori vengono testati e quelli difettosi vengono scartati e mandati in riparazione.

La seguente tabella indica il numero medio giornaliero di lettori di ciascun tipo fabbricati e la percentuale media giornaliera di lettori difettosi.

Tipo di lettore	Numero medio giornaliero di lettori fabbricati	Percentuale media giornaliera di lettori difettosi
Lettori video	2.000	5%
Lettori audio	6.000	3%

Item 1:

Ecco tre affermazioni sulla produzione giornaliera dell'*Azienda Elettrix*. Queste affermazioni sono corrette?

Fai un cerchio intorno a "Sì" o a "No" per ciascuna affermazione.

Affermazione	Questa affermazione è corretta?
Un terzo dei lettori prodotti giornalmente sono lettori video.	Sì / No
In ogni lotto di 100 lettori video fabbricati, esattamente 5 sono difettosi.	Sì / No
Se un lettore audio viene scelto a caso nella produzione giornaliera per essere testato, la probabilità che abbia bisogno di essere riparato è di 0,03.	Sì / No

Item 2:

Uno dei collaudatori afferma quanto segue: “In media, i lettori video mandati giornalmente in riparazione sono di più rispetto ai lettori audio mandati giornalmente in riparazione”.

Decidi se l’affermazione del collaudatore è corretta oppure no. **Fornisci una argomentazione matematica** per giustificare la tua risposta

.....
.....
.....
.....

Item 3:

Anche l’Azienda Tronic fabbrica lettori audio e video. Al termine della produzione giornaliera, i lettori dell’Azienda Tronic vengono testati e quelli difettosi vengono scartati e mandati in riparazione.

Le seguenti tabelle confrontano il numero medio giornaliero di lettori di ciascun tipo fabbricati e la percentuale media giornaliera di lettori difettosi per le due aziende.

Azienda	Numero medio giornaliero di lettori <u>video</u> fabbricati	Percentuale media giornaliera di lettori difettosi
<i>Azienda Elettrix</i>	2.000	5%
<i>Azienda Tronic</i>	7.000	4%

Azienda	Numero medio giornaliero di lettori <u>audio</u> fabbricati	Percentuale media giornaliera di lettori difettosi
<i>Azienda Elettrix</i>	6.000	3%
<i>Azienda Tronic</i>	1.000	2%

Quale delle due aziende, *Azienda Elettrix* o *Azienda Tronic*, ha la percentuale totale più bassa di lettori difettosi? **Scrivi i calcoli** utilizzando i dati delle tabelle qui sopra.

.....
.....

Descrizione e analisi a priori del quesito “APPARECCHI DIFETTOSI”

Gli item relativi al quesito “Apparecchi difettosi”, di difficoltà crescente, investono l’ambito di contenuto matematico “incertezza e dati”, si inseriscono nel contesto “occupazionale”, e sono legati al processo “formulare”, secondo la classificazione proposta da OCSE-PISA.

Il quesito richiede di valutare la verità di affermazioni legate alla lettura di una tabella sulle percentuali (item 1 e 2), con (solo item 2) richiesta di portare “un’argomentazione matematica” al giudizio di verità/falsità portato. Si chiede infine (item 3) l’interpretazione di due tabelle sulle percentuali (item 3).

Il quesito appare quindi da un lato molto interessante in quanto mette in gioco diversi aspetti: conoscenze legate al contenuto “percentuali”, lettura di tabelle, e argomentazione; dall’altro molto complesso, perché mette in gioco aspetti tutti notoriamente particolarmente ostici per i nostri studenti.

Sulle percentuali permangono difficoltà in tutto il percorso scolastico (e anche in quello universitario), come testimoniato dai risultati dei quesiti INVALSI concernenti questo argomento. Ad esempio, il seguente quesito (della prova 2012 di livello 10, ovvero per studenti di seconda secondaria di secondo grado, quali i nostri):

D25. Per l’acquisto di un computer sono stati spesi 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l’IVA, pari al 20% del costo base. Quanto è stato pagato di IVA?

Risposta: euro

Ha avuto una percentuale di risposte corrette del 12,2%.

Per quanto riguarda la lettura di tabelle, il quesito sembra comportare la necessità di comprendere e ben gestire un numero elevato di informazioni, fornite da più tabelle: è quindi ipotizzabile che alcuni dati possano essere mal interpretati.

Infine, come già scritto, ancor più sono le difficoltà nell’argomentare. Tra l’altro in questo caso si aggiunge anche la richiesta esplicita di farlo *matematicamente*.

Inoltre, il quesito è, a nostro avviso, ambiguo, ci sono infatti degli impliciti tra valore assoluto e valore percentuale nelle affermazioni delle quali valutare la verità (in particolar modo in quella del secondo item in cui si dice di calcolare in media il numero di lettori audio e video mandati in riparazione).

Il riferimento al contesto è in realtà molto blando ed un approccio basato solo sul calcolo della percentuale allontana la possibilità di calare il problema nel contesto reale.

Poiché il calcolo della percentuale è una delle competenze più di uso quotidiano e dovrebbe costituire una buona parte della matematica per il cittadino, abbiamo ritenuto interessante investigare su capacità e difficoltà degli studenti su questo argomento.

Quesito 2.3: VELOCITÀ DI FLUSSO

Le infusioni intravenose (o flebo) servono per somministrare fluidi e medicinali ai pazienti.



Le infermiere devono calcolare la velocità di flusso, D , di un'infusione in gocce al minuto.

Per questo utilizzano una formula $D = \frac{dv}{60n}$ dove

d è il ritmo di flusso misurato in gocce al millilitro (ml)

v è il volume in ml dell'infusione

n è la durata dell'infusione in numero di ore.

Item 1:

Qual è la velocità di flusso, D , di un'infusione, in gocce al minuto, se il ritmo di flusso, d , è di 6 gocce al ml, il volume, v , è di 500 ml e la durata dell'infusione, n , è di 5 ore?

Velocità di flusso in gocce al minuto:

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....
.....
.....

Item 2:

Un'infermiera vuole raddoppiare la durata di un'infusione.

Descrivi con precisione come cambia D se n viene **raddoppiato** ma d e v non cambiano.

.....
.....
.....
.....
.....

Item 3:

Le infermiere devono anche calcolare il volume, v , dell'infusione in funzione della velocità di flusso, D .

Un'infusione con una velocità di flusso di 50 gocce al minuto deve essere somministrata a un paziente per 3 ore. Per questa infusione il ritmo di flusso è di 25 gocce al millilitro.

Qual è il volume dell'infusione in ml?

Volume dell'infusione: ml

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....
.....

Descrizione e analisi a priori del quesito “VELOCITÀ DI FLUSSO”

Gli item relativi al quesito “Velocità di flusso”, di difficoltà crescente, investono l’ambito di contenuto “cambiamento e relazioni”, il contesto “professionale” e la categoria di processo “utilizzare”, secondo la classificazione proposta da OCSE-PISA.

E' richiesto di sostituire in una formula alcune variabili con valori numerici assegnati, identificando il valore ottenuto (item 1), di spiegare l’effetto prodotto sul valore del risultato quando si raddoppia una variabile in una formula sapendo che tutte le altre rimangono inalterate (item 2), ed infine di invertire una equazione avendo due variabili con valori numerici assegnati: il quesito appare quindi interessante per la molteplicità di competenze richiesto nel calcolo algebrico (ed in particolare delle equazioni).

Il quesito appare, a priori, nascondere diverse insidie, a partire da quelle linguistiche. Il testo, in tutti gli item, è ricco di vocaboli *difficili* (come ad esempio flebo, ritmo di flusso) che potrebbero non appartenere al lessico di un quindicenne. Anche se la conoscenza del significato delle parole può apparire, ad un lettore esperto, irrilevante o non necessaria, poiché le relazioni sono tutte descritte dalla formula, appare probabile che invece influenzi l’approccio al problema degli studenti e che possa spaventarli.

Anche dal punto di vista dei contenuti specificatamente matematici le difficoltà non sono poche. Intanto la gestione di formule, ed in particolare formule inverse, è sicuramente problematica per molti studenti, come mostrato anche in questo caso dai risultati nelle prove INVALSI. Il quesito seguente (sempre del livello 10 che è quello che ci interessa), inserito nella prova del 2014, ha ottenuto una percentuale di risposte corrette del 17% sul campione nazionale:

D13. La grandezza y è inversamente proporzionale al quadrato della grandezza x e, per $x = 2$, si ha $y = 4$.

Quindi, se $x = 8$, y è uguale a

- A. $\frac{1}{4}$
- B. 4
- C. 16
- D. $\frac{1}{16}$

Difficoltà che aumentano con l'avanzare degli item: nell'item 2 il doversi confrontare con casi non numerici (come nell'item 1), che sicuramente risultano più facili, e con la richiesta di spiegare "con precisione". Ed infine, nell'item 3, il dover gestire i due aspetti di cui sopra, combinati con il confronto con un testo, molto articolato.

Inoltre l'eventuale approccio basato solo sulla manipolazione algebrica della formula allontana la possibilità di calare il problema nel contesto reale.

Abbiamo ritenuto quindi interessante investigare su problematicità, ipotizzabile in una mancanza di controlli numerici, e su processi di chi risponde correttamente.

Capitolo 4

L'analisi dei protocolli della prova

4.1. La somministrazione della prova: le modalità

Dopo aver definito le due prove -una composta dai quattro quesiti “Macchia di Petrolio”, “Classifiche”, “Noleggio DVD”, “Garage” e l’altra dai tre quesiti “Gelateria”, “apparecchi Difettosi” e “Velocità di Flusso” -, abbiamo somministrato le stesse in alcune classi seconde delle scuole delle quali abbiamo raccolto la disponibilità. Ricordiamo che il campione finale, scaturito dalla disponibilità dei dirigenti scolastici ed in particolare dai professori, è suddiviso nel seguente modo: per il 37% da Istituti Tecnici, per il 20% da Istituti Professionali ed infine per il 43% da Licei di indirizzo diversificato (Scientifico per il 9%, Classico per il 23,4%, Linguistico per il 10,6%).

Le due prove costruite sono state somministrate alla presenza dell’insegnante della classe in orario scolastico e sono stati assegnati agli studenti 60 minuti per svolgerle. In linea con quanto permesso anche nelle prove ufficiali, abbiamo consentito l’uso di strumenti matematici, in particolare della calcolatrice e del righello. Durante lo svolgimento sono stati forniti, se richiesto, chiarimenti sul testo. Questo è un aspetto che differenzia la nostra raccolta dalla rilevazione PISA, nelle quali il somministratore non può comunicare nulla agli studenti: la scelta è stata fatta perché a noi interessava registrare subito le problematiche legate alla comprensione del testo, che ipotizziamo essere una delle principali cause di difficoltà.

Dopo aver somministrato la prova, e raccolto i protocolli, abbiamo analizzato le risposte degli alunni. Tale analisi ha guidato la progettazione, l’organizzazione e lo sviluppo della seconda parte della nostra indagine, ed è il focus del presente capitolo.

In questo capitolo infatti discutiamo, quesito per quesito, l’analisi dei protocolli raccolti. Per facilitare la lettura, riporteremo nuovamente il testo originale dei quesiti somministrati. Prima dell’analisi qualitativa sviluppata, riporteremo per ogni quesito, i dati percentuali relativi alla semplice “correttezza-incorrettezza-omissione” della risposta, spiegando, nei casi che lo necessitano, quando abbiamo considerato corretta una risposta ad un dato quesito. In alcuni casi, di domande con risposta articolata (ad esempio richiesta di spiegazione) useremo anche la categoria “parzialmente corretta”, specificando anche in questo caso il criterio valutativo adottato.

4.2. Risultati e analisi dei protocolli della prima prova

4.2.1 Risultati e analisi del quesito 1.1: Macchia di Petrolio

Quesito 1.1: Macchia di Petrolio

Una petroliera ha urtato una roccia in alto mare che ha squarciato il serbatoio del petrolio. La petroliera si trovava a circa 65 km da terra. Dopo qualche giorno il petrolio si è allargato, come si può vedere nella cartina qui sotto.



Item 1:

Utilizzando la scala della cartina, stima la superficie (area) della macchia di petrolio in chilometri quadrati (km^2).

Risposta: km^2

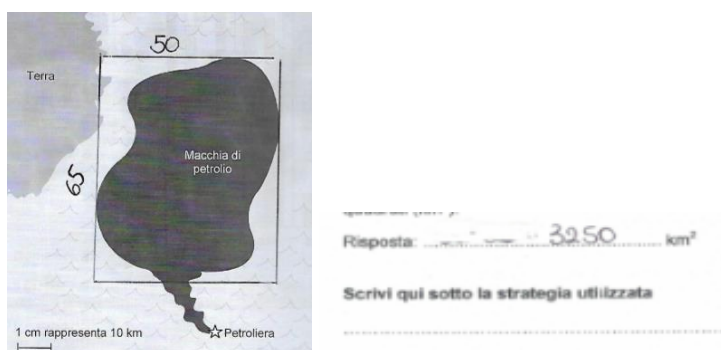
Scrivi qui sotto la strategia utilizzata

.....
.....

I dati quantitativi relativi al nostro campione, suddivisi anche per tipologia di Istituto, sono riassunti nella seguente tabella:

Tipologia di Scuola	Risp. Corretta	Risp. Parzialmente Corretta	Risp. Omessa	Risp. Errata
Licei	32.56%	20.93 %	25,58%	20.93%
Tecnici	20.83%	8.33 %	45.83 %	25%
Professionali	0 %	0 %	75 %	25%
Tot.	22,89%	13,25%	22,89%	40,96%

La risposta è stata considerata corretta anche a chi l'ha fornita senza descrivere poi a parole la strategia risolutiva, come mostra il protocollo seguente (la percentuale di omissioni della sola parte del quesito in cui si chiede di scrivere la strategia risolutiva è molto più alta di quella relativa alla risposta numerica al quesito):



La risposta è stata considerata parzialmente corretta nei casi in cui è stato usato un procedimento corretto, ma non è stata fatta la conversione dell'unità di misura, ovvero i cm^2 non sono stati trasformati in km^2 come richiesto dal testo.

L'alta percentuale di risposte sbagliate od omesse conferma quanto ipotizzato nell'analisi a priori, ovvero che gli alunni incontrano grandi difficoltà nella stima di aree di superfici *non regolari*.

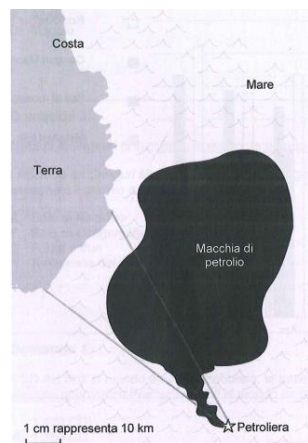
Per quanto riguarda la differenza tra i vari tipi di scuola, appare significativo il dato degli Istituti Professionali: nessuna risposta corretta o parzialmente corretta, con ben tre studenti su quattro che rinunciano a scrivere qualsiasi cosa. È particolarmente interessante che questo accada in un quesito che in realtà richiede meno prerequisiti di altri, ma che appare evidentemente estraneo a questi studenti. L'impressione è che le convinzioni possano giocare un ruolo forte in questa tipologia di studenti: in particolare la scarsa auto-stima in matematica, e la convinzione di poter essere in grado in matematica ed eventualmente solo di cimentarsi su cose già viste. Molti protocolli sottolineano esplicitamente come giustificazione all'omissione, il fatto che sia richiesto un argomento non trattato in classe, seppur crediamo che il significato di stima in qualche modo faccia parte del bagaglio di esperienza di studenti quindicenni:

Non abbiamo fatto la stima

Figura 1. Non abbiamo fatto la stima

Oltre a questo aspetto, il quesito, e soprattutto l'interpretazione della figura e del suo rapporto con il testo, è risultata, come avevamo previsto in sede di analisi a priori difficile. Durante lo svolgimento della prova, in tutte le classi, a più riprese, sono stati chiesti suggerimenti o delucidazioni rispetto a questi aspetti. Molte ad esempio sono state le domande su quale fosse la distanza tra la terra e la petroliera, evidenziata da una stella. Sorprendenti sono state quelle poste dagli alunni che hanno svolto correttamente il quesito: hanno mostrato perplessità sulla soluzione fornita e chiesto se la strategia per stimare l'estensione della macchia con un rettangolo fosse corretta. Questo aspetto è stato approfondito durante le interviste singole.

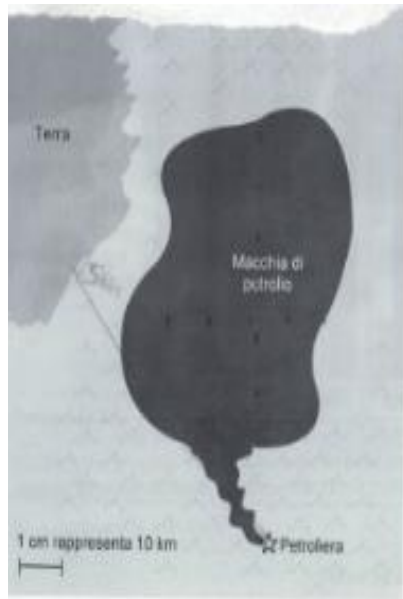
Analizzando i protocolli di chi ha fornito una risposta, emerge, come previsto, che parecchi siano coloro che hanno cercato di calcolare la distanza terra-petroliera, dato non necessario per rispondere al quesito:



Non è chiaro, dai dati raccolti, se questo approccio dipenda da una cattiva comprensione della domanda, o dalla convinzione che l'informazione sia necessaria per la risposta al quesito originario. Il risolvere questo dubbio è stato quindi messo tra gli obiettivi della seconda parte della nostra ricerca.

Il fatto che in diversi protocolli, l'informazione 65 km entra fortemente in gioco non desta stupore: fin dalla scuola primaria, i nostri studenti sono abituati a lavorare con esercizi in cui vengono utilizzati tutti i dati forniti dal testo, si consolida quindi la convinzione che per risolvere un problema si debbano utilizzare tutti e soli i dati presenti nel testo. In questo caso invece il dato poteva essere usato (come unità di misura in base alla quale stimare altre misure lineari), ma anche ignorato usando la scala fornita nel grafico. Su questo può aver influito anche l'attenzione maggiore ai dati contenuti nel testo rispetto a quelli contenuti nella figura. Non sono pochi infatti gli studenti, anche tra quelli che attivano una procedura sensata per stimare l'estensione della macchia di petrolio, che scelgono come scala quella rappresentata da 65 km (la distanza petroliera-terra), piuttosto che la scala 1 cm -10 km inserita in figura (è importante sottolineare che gli studenti potevano usare il righello).

C'è chi esplicita l'aver usato la lunghezza 65 km come termine di paragone:



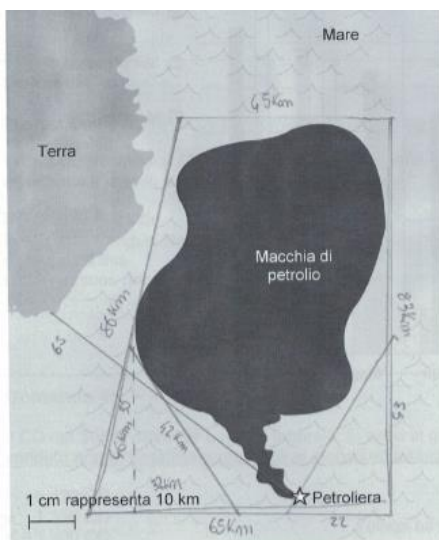
Scrivi qui sotto la strategia utilizzata

Sapendo che la distanza dalla petroliera alla terra è 65 km ed è simile alla distanza dalla petroliera alla fine della macchia di petrolio *

*petroliera alla fine della macchia di petrolio ho moltiplicato ~~65~~ 65 per 50 che mi sembrava approssimativamente la larghezza della macchia dato il fatto che 1 cm corrisponde a 10 km

Figura 2. Sapendo che la distanza dalla petroliera alla terra è 65 km ed è simile alla distanza dalla petroliera alla fine della macchia di petrolio, ho moltiplicato 65 per 50 che mi sembrava approssimativamente la larghezza della macchia dato il fatto che 1 cm corrisponde a 10 km.

E chi invece, pur di utilizzare il 65 km come misura esatta e non come metro di paragone, costruisce una figura di approssimazione per eccesso più complessa del gettonatissimo rettangolo:

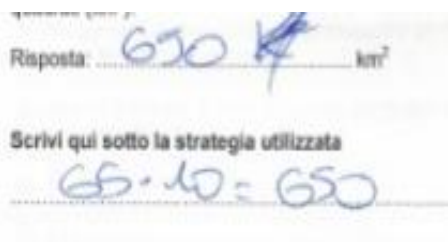
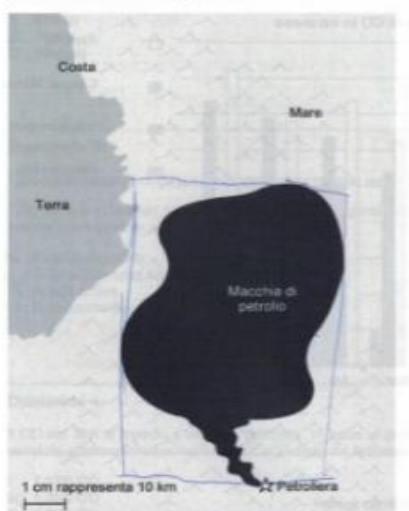


Scrivi qui sotto la strategia utilizzata

Area trapezio: $(65 + 65) \cdot 86 = 4565 \text{ km}^2$. A quest'area toglgo l'area del triangolo a sinistra: $A = \frac{65 \cdot 21}{2} = 682,5 \text{ km}^2$. Quindi $4565 - 682,5 = 3882,5 \text{ km}^2$.
 Dall'ultima area sottraigo il triangolo a destra: $A = \frac{65 \cdot 22}{2} = 717,5 \text{ km}^2$.
 Quindi $3882,5 - 717,5 = 3165 \text{ km}^2$

Come prevedibile, in diversi protocolli, per stimare l'area della macchia di petrolio, l'approccio seguito è quello di costruire un rettangolo attorno alla macchia. Molti però

sono gli studenti che, a questo punto, per calcolare l'area, utilizzano gli unici dati forniti dal testo e nella figura, moltiplicando 65 e 10, come se fossero le misure dei lati del rettangolo evidenziato.



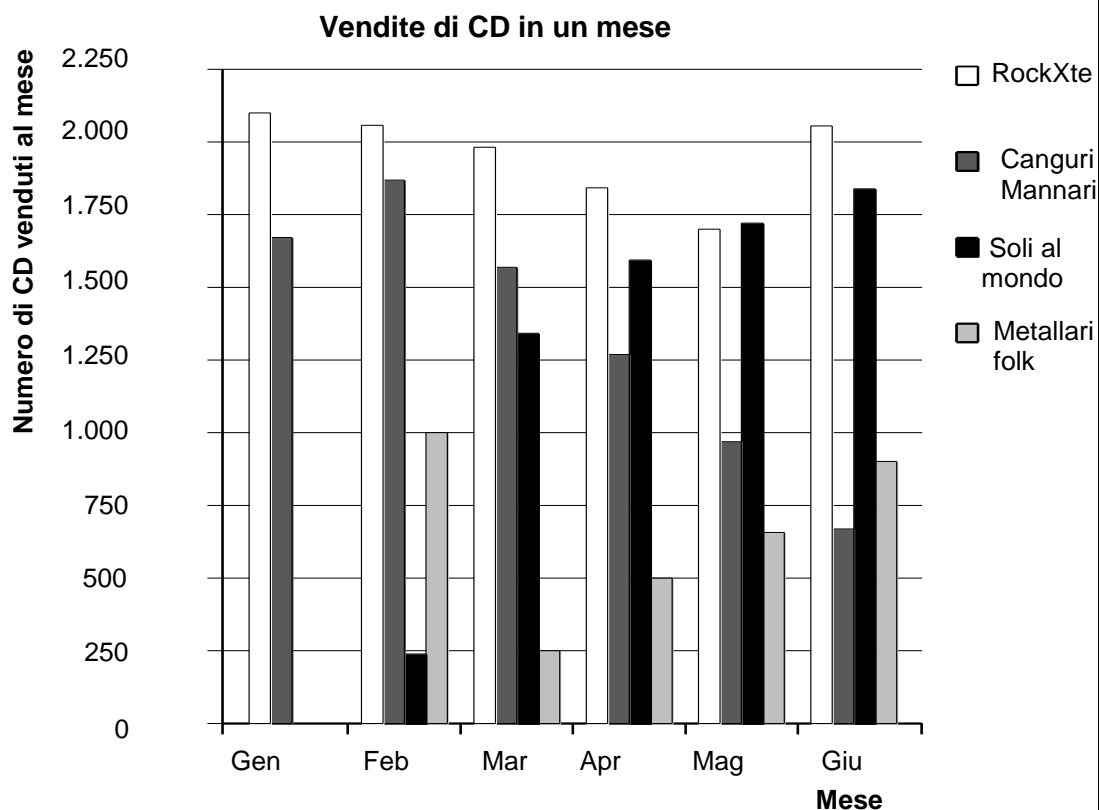
La nostra ipotesi è che tale approccio sia in linea con l'approccio tradizionale ai problemi di matematica, suggerito anche da diversi libri di testo del primo ciclo, per "dati" ed "operazioni": trovare i dati esplicitati nel testo e capire l'operazione corretta da fare (in questo particolare caso, la richiesta di calcolare un'area suggerisce il prodotto).

Cercare di acquisire ulteriori elementi su questo approccio, che abbiamo ipotizzato essere dettato in gran parte dalla convinzione che i dati necessari per rispondere ad un quesito siano (debbano essere) tutti e solo quelli presenti nel testo, è stato uno degli obiettivi per la seconda parte della ricerca, nella quale abbiamo intervistato gli allievi (e che sarà discussa nel prossimo capitolo).

4.2.2. Risultati e analisi del quesito 1.2: Classifiche

Quesito 1.2: Classifiche

A gennaio è uscito il nuovo CD dei gruppi *RockXte* e *Canguri Mannari*, seguito a febbraio dal CD dei gruppi *Soli al mondo* e *Metallari folk*. Il seguente grafico illustra le vendite dei CD di questi gruppi da gennaio a giugno.



Item 1:

Quanti CD ha venduto il gruppo *Metallari folk* ad aprile?

- A 250
- B 500
- C 1.000
- D 1.270

Item 2:

In quale mese il gruppo *Soli al mondo* ha venduto per la prima volta più CD del gruppo *Canguri Mannari*?

- A Nessun mese

- B Marzo
- C Aprile
- D Maggio

Item 3:

I gruppi emergenti di successo ricevono un premio se il CD raggiunge le 10.000 copie vendute. I *RockXte* e i *Canguri Mannari* sono gruppi emergenti.

A quale o quali di questi gruppi viene assegnato il premio a fine giugno?

- A Solo ai *RockXte*
- B Solo ai *Canguri Mannari*
- C A tutti e due
- D A nessuno dei due

Item 4:

Il CD dei Soli al mondo è uscito a febbraio. In base al grafico, in media, quanti CD al mese hanno venduto approssimativamente i Soli al mondo da febbraio a giugno?

- A 1.120 CD
- B 1.350 CD
- C 1.600 CD
- D 1.840 CD

Item 5:

Il manager dei *Canguri Mannari* è preoccupato perché il numero dei CD venduti dal gruppo è diminuito da febbraio a giugno.

Quale sarà il volume di vendite stimato del gruppo per il mese di luglio, se continua la stessa tendenza negativa?

- A 70 CD
- B 370 CD
- C 670 CD
- D 1.340 CD

I dati quantitativi relativi al nostro campione, suddivisi anche per tipologia di Istituto, sono riassunti nelle seguenti tabelle:

Item	Item 1		Item 2		Item 3	
	Corretta	Errata	Corretta	Errata	Corretta	Errata
Licei	100%	0%	97,50%	2,50%	97,50%	2,50%
Istituti Tecnici	100%	0%	100%	0%	96%	4%
Professionali	100%	0%	100%	0%	76,47%	23,53%
Tot.	100%	0%	98,78%	1,2%	82,92%	12,19%

Item	Item 4			Item 5		
	Corretta	Errata	Omessa	Corretta	Errata	Omessa
Licei	85%	12,50%	2,50%	70%	27,50%	2,50%
Istituti Tecnici	84%	12%	4%	64%	28%	8%
Professionali	76,47%	11,76%	11,76%	64,71%	17,65%	17,65%
Tot.	82,92%	12,19%	4,87%	67,07%	25,60%	7,31%

L'alta percentuale di risposte corrette sicuramente in parte dipende dal fatto che il quesito sia a scelta multipla, ma suggerisce anche che gli studenti italiani non hanno particolari difficoltà nella lettura diretta ed interpretazione di un istogramma: d'altra parte questo tipo di quesito, all'interno dei quesiti usati nelle rilevazioni OCSE-PISA, è forse tra quelli più simili a quelli proposti nella scuola italiana.

L'alta percentuale di risposte corrette all'item quattro mostra che i quindicenni italiani hanno buone competenze nel decodificare ed interpretare rappresentazioni grafiche, ma anche di saper comprendere e gestire determinati argomenti matematici, quali il calcolo della media.

Come ci suggeriscono i dati in tabella, l'item cinque è risultato leggermente più difficile rispetto agli altri quattro. Questo non sorprende (il livello di difficoltà, come abbiamo già scritto, è tra l'altro volutamente crescente all'interno di un singolo quesito OCSE-PISA) e testimonia che ci sia maggiore competenza e abitudine nel leggere grafici, che nel fare previsioni a partire dai dati contenuti in un grafico. È anche vero che nell'item cinque

entra in gioco pesantemente la comprensione del testo: ad esempio, durante lo svolgimento della prova, alcuni studenti abbiano chiesto informazioni sul significato di “volume di vendite”. Che questa espressione abbia creato delle difficoltà emerge anche da alcuni protocolli, nei quali i sostantivi “volume” e “vendite” siano cerchiati, sottolineati o accompagnati da un punto interrogativo.

Il manager dei *Canguri Mannari* è preoccupato perché il numero dei CD venduti dal gruppo è diminuito da febbraio a giugno.

Quale sarà il volume di vendite stimato del gruppo per il mese di luglio, se continua la stessa tendenza negativa?

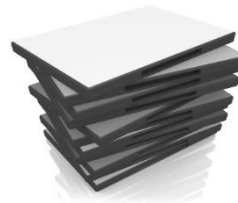
È probabile che la difficoltà linguistica sia legata all’uso del termine “volume”, che gli alunni conoscono nel significato matematico di “estensione di un solido”, ma non con il significato di “quantità complessiva di cose dello stesso genere (non misurabile nel senso dell’estensione spaziale)” come ad esempio *volume di vendite* o *volume di affari*. Non sorprendono tali problematicità, poiché difficoltà di questo tipo sono state messe in rilievo negli studi didattici della matematica per studenti più piccoli: ad esempio nella gestione del sostantivo “somma” nella sua accezione di quantità e non di risultato dell’addizione di due numeri (ad esempio “la somma di denaro è 10 euro”).

4.2.3. Risultati e analisi del quesito 1.3: Noleggio di DVD

Quesito 1.3: Noleggio di DVD

Gina lavora in un negozio che noleggia DVD e giochi per il computer.

In questo negozio la tessera annuale costa 10 zed.



Il prezzo per il noleggio dei DVD ai tesserati è più basso del prezzo praticato ai non tesserati, come si può vedere nella tabella qui sotto:

Prezzo per il noleggio di un DVD ai non-tesserati	Prezzo per il noleggio di un DVD ai tesserati
3,20 zed	2,50 zed

Item 1:

Marco lo scorso anno si era tesserato presso il negozio che noleggia i DVD.

E, sempre durante lo scorso anno, ha speso 52,50 zed in totale, incluso il costo della tessera.

Quanto avrebbe speso Marco se non avesse avuto la tessera e avesse noleggiato lo stesso numero di DVD? Numero di zed:

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....

Item 2:

Qual è il numero minimo di DVD che un tesserato deve noleggiare per coprire il costo della tessera? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....

Numero di DVD:

I dati quantitativi relativi al nostro campione, suddivisi anche per tipologia di Istituto, sono riassunti nelle seguenti tabelle:

Item 1	Risp. Corretta	Risp. Omessa	Risp. Errata
Licei	82.93%	0%	17.07%
Tecnici	56%	16 %	28%
Professionali	37.5%	37.5 %	25%
Tot.	65,85%	12.2%	21,95%

Item 2	Risp. Corretta	Risp. Omessa	Risp. Errata
Licei	32.56%	9.30%	58.14%
Tecnici	0%	36 %	64%
Professionali	0%	62.5 %	37.5%
Tot.	16,66%	55,95%	27,38%

Dai dati quantitativi, appare evidente la differente difficoltà dei due item della domanda. In particolare, è significativo il fatto che negli Istituti Tecnici e Professionali non ci siano risposte corrette al secondo item, laddove nel primo item c'erano state comunque diverse risposte corrette; d'altra parte anche nei licei, solo uno studente su tre dà la risposta corretta.

Per il secondo item, la risposta è stata considerata errata a coloro che non hanno riletto la risposta nel contesto reale, fornendo come risposta il risultato decimale non intero di un'operazione o la soluzione di un'equazione.

Nel primo item, nella maggior parte dei casi di risposte non corrette, gli studenti hanno trascurato il dato 10 zed, ovvero non hanno tolto il costo della tessera dalla spesa complessiva, come mostra il seguente

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

$$52,50 : 2,50 = 21$$

$$21 \cdot 3,20 = 67,2 \text{ zed}$$

o addirittura hanno nuovamente aggiunto il costo della tessera anche ai non tesserati.

$$52,50 - 10 = 42,50$$

$$42,50 : 2,50 = 17$$

$$(17 \times 3,20) + 10 = 64,4$$

Tuttavia dall'analisi dei protocolli non emerge se ciò sia dovuto ad una mancata comprensione del testo, dalla difficoltà nel gestire una molteplicità di dati o da difficoltà relative ad una scarsa conoscenza enciclopedica. Avere più informazioni in tal senso è dunque diventato un obiettivo della seconda parte della nostra ricerca.

In tutti gli altri casi di risposta errata, gli alunni hanno manipolato i dati forniti anche in maniera piuttosto originale e difficile da interpretare, come mostrano i seguenti esempi:

Numero di zed 83,2

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

$$3,20 - 2,50 = 0,7 \quad 83,50 + 0,07$$

Numero di 42,50

Scrivi qui i passaggi che fai per arrivare alla risposta

$$52,50 - 10$$

Le risposte ottenute a questo item, ed in particolare alla richiesta di esplicitare i passaggi, evidenziano come molti studenti prediligano utilizzare un linguaggio quotidiano e perciò *discorsivo* per descrivere i passaggi fatti, piuttosto che quello matematico. C'è chi ha usato uno stile essenziale e chi invece, come nel protocollo seguente, spiega, passo per passo, i passaggi eseguiti.

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

Ho tolto il costo di 10 zed dal numero totale, ho diviso il totale per 2,50 e ho trovato quanti CD avevo preso. Poi li ho moltiplicati per 3,20.

Figura 3. Ho tolto il costo di 10 zed dal numero totale, ho diviso il totale per 2,50 e ho trovato quanti CD avevo preso. Poi li ho moltiplicati per 3,20.

Proprio dall'analisi dei protocolli *discorsivi*, emergono anche problematiche di tipo linguistico legate a risposte scorrette: a conferma di quello che emerge da diversi studi in didattica della matematica sulle correlazioni tra difficoltà linguistiche e difficoltà matematiche (Ferrari, 2004).

La produzione del seguente protocollo è più conforme ai modi di espressione del linguaggio orale e mostra la criticità nello spiegare la strategia utilizzata e nel descrivere quali passaggi vengono svolti, difficoltà che si riflette nella risposta sbagliata.

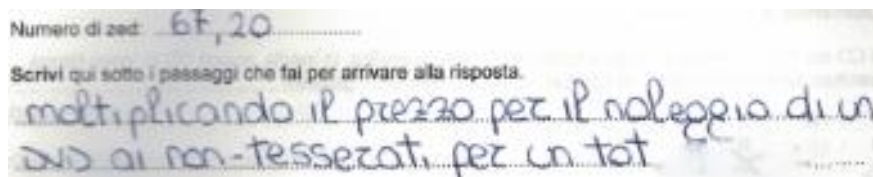


Figura 4. Moltiplicando il prezzo per il noleggio di un DVD ai non-tesserati per un tot.

Come abbiamo già osservato, il secondo quesito ha creato maggiori problematicità in tutti gli indirizzi di scuola. All'interno dei protocolli dei licei sono state fornite essenzialmente due diverse strategie risolutive: una algebrica (modellizzando la situazione con una equazione),

$$1 \cdot 9,20 = x \cdot 10 \rightarrow 14,29$$

Oppure,

$$\begin{aligned} 3,20x &= 2,5x + 10 \\ 0,7x &= 10 \\ x &= 14,28 \end{aligned}$$

Una aritmetica (per prova ed errore),

$$\begin{aligned} 2,5 \cdot 4 = 10 &= \text{risposta} & 0,70 \cdot 14 &= 9,8 \\ 0,70 \cdot 14,3 &= 10,01 &= \text{costo recuperato} \end{aligned}$$

Numero di DVD: 14,3

Dall'analisi delle risposte, il secondo item, ed in particolare la richiesta, è risultato ambiguo, come dichiara una studentessa:

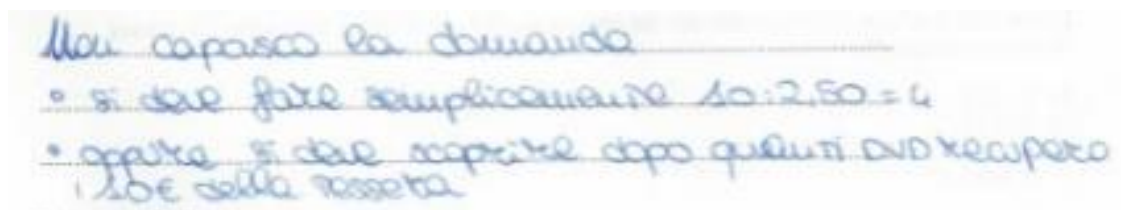
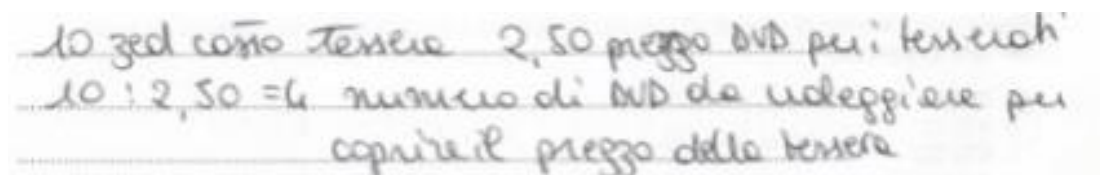


Figura 5. Non capisco la domanda: si deve fare semplicemente $10:2,50=4$, oppure si deve scoprire dopo quanti DVD recupero i 10 euro della tessera.

La principale causa di difficoltà sembra proprio essere stata una scarsa comprensione del testo: la maggior parte degli studenti ha capito di dover calcolare il numero di DVD necessari per spendere 10 zed,



Per confermare la nostra ipotesi sulle difficoltà legate ad aspetti linguistici, abbiamo creato una versione modificata del quesito per la seconda parte di indagine (che presenteremo e discuteremo nel prossimo capitolo), che risolvesse a nostro parere l'ambiguità della richiesta, senza semplificare l'aspetto matematico.

Infine, all'interno dei fascicoli, affiora un fenomeno ben noto in didattica che emerge fin dalla scuola primaria: un uso non corretto del simbolo uguale, visto come collegamento tra i vari calcoli da fare nella risoluzione di un problema, essenzialmente come se fosse il tasto uguale della calcolatrice. Questa accezione dell'uguale dovrebbe risultare anche *visivamente* scorretta per la perdita della proprietà di transitività dell'uguaglianza.

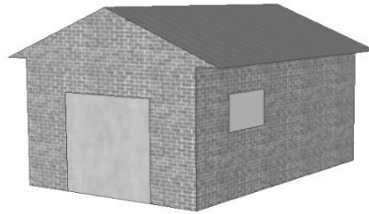

$$62,50 - 10 = 62,50 : 2,50 = 12 \times 3,20 = 86,40$$

4.2.4. Risultati e analisi del quesito 1.4: Garage

Quesito 1.4: Garage

La gamma “base” di un costruttore di garage comprende modelli che hanno solo una finestra e una porta.

Giorgio sceglie il seguente modello dalla gamma “base”. La posizione della finestra e della porta sono illustrate qui sotto.

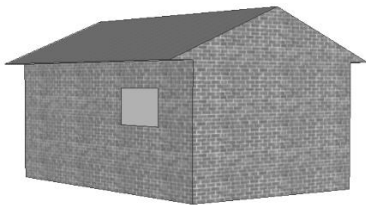


Item 1:

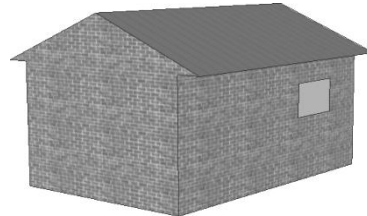
Le illustrazioni qui sotto mostrano diversi modelli “base” visti dal retro. Soltanto una di queste illustrazioni corrisponde al modello scelto da Giorgio, riportato sopra.

Quale modello ha scelto Giorgio? Fai un cerchio intorno ad A, B, C o D.

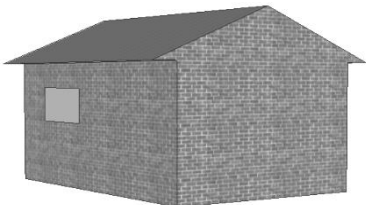
A



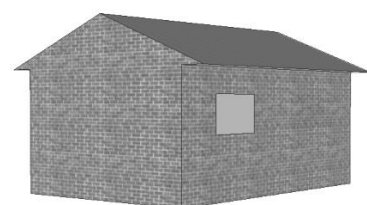
B



C

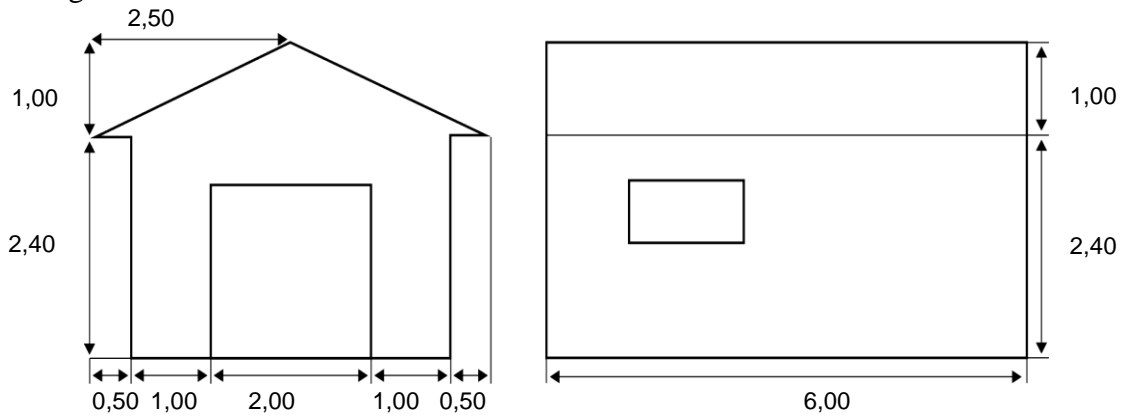


D



Item 2:

Le due piantine qui sotto indicano le dimensioni, in metri, del garage scelto da Giorgio



Visione frontale

Visione laterale

Il tetto è composto da due parti rettangolari identiche.

Calcola l'area **totale** del tetto.

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....

Item 3:

Giorgio ha intenzione di stendere una soletta di calcestruzzo rettangolare per il suo garage. La soletta sarà più ampia dell'area del pavimento del garage in modo da creare un bordo di calcestruzzo della **stessa** larghezza tutto intorno al garage.

La soletta di calcestruzzo avrà uno spessore di 10 cm.

Giorgio non vuole utilizzare più di 4 metri cubi (m^3) di calcestruzzo.

Qual è la larghezza **massima** che può avere il bordo?

- A 40 cm
- B 60 cm
- C 70 cm
- D 80 cm
- E 140 cm

Per quanto riguarda i dati quantitativi, la seguente tabella ne riassume i principali.

Quesito 1	Risp. Corretta	Risp. Errata
Licei	97,56%	2,44%
Tecnici	92,31%	7,69%
Professionali	93,75%	6,25%
Tot.	95,18%	4,8%

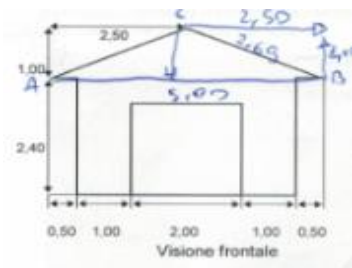
Quesito 2	Risp. Corretta	Risp. Errata	Risp. Omessa
Licei	51,22%	46,34%	2,44%
Tecnici	30,77%	50%	19,23%
Professionali	31,25%	37,5%	31,25%
Tot.	40,96%	45,78%	13,25%

Quesito 3	Risp. A	Risp. B	Risp. C	Risp. D	Risp. E	Risp. Omessa
Licei	48,78%	19,51%	7,32%	2,44%	4,88%	17,07%
Tecnici	30,77%	7,69%	11,54%	7,69%	0%	42,31%
Professionali	37,5%	0%	0%	12,5%	6,25%	43,75%
Tot.	40,96%	12,04%	7,22%	6,02%	3,61%	30,12%

Tabella 1. La risposta corretta è evidenziata in grigio.

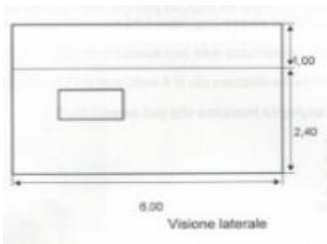
L'alta percentuale di risposte corrette al primo item mostra chiaramente che gli studenti abbiano buone capacità nell'individuare una prospettiva tridimensionale, corrispondente ad un'altra fornita. Al contrario, il secondo item è risultato più complicato rispetto al primo, evidenziando le difficoltà dei ragazzi quindicenni nel leggere ed interpretare delle informazioni da un progetto/figura.

Dall'analisi dei protocolli del secondo item, si evince che la rappresentazione della situazione viene aggirata a favore di una lettura selettiva del testo, alla ricerca di dati numerici da combinare. Infatti, molti ragazzi calcolano l'area del tetto della figura della visione frontale:



$$A_s = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 1}{2} = 2,50 \dots$$

oppure quella della visione laterale,



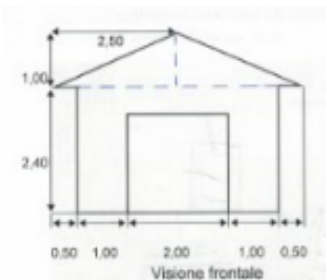
$$\begin{aligned} \text{base} \times \text{altezza} &= 6 \times 1 = 6 \text{ (area di 1 lato del tetto)} \\ 6 + 6 &= 12 \text{ (area totale del tetto)} \end{aligned}$$

Altri invece hanno sommato le aree delle due prospettive ed infine alcuni studenti hanno calcolato il volume del presunto tetto:

$$\begin{aligned} \text{HO FATTO } b \cdot h &= \text{NEL 1° GRAFICO, CIOÈ } 1,00 \cdot 2,50 \\ \leftarrow \text{POI HO MOLTIPLICATO} \times 6 & \text{ CHE È LA BASE TOTALE} \end{aligned}$$

Figura 6. Ho fatto $b \times h$ nel primo grafico, cioè $1,00 \times 2,50$ e poi ho moltiplicato per 6 che è la base totale.

L'impressione che emerge dall'analisi condotta è che alcuni quindicenni non riescono a gestire e combinare assieme le informazioni provenienti dallo stimolo grafico con quelle dal testo. A testimonianza di quanto detto, possiamo osservare la seguente risposta, in cui lo studente costruisce un rettangolo, perché forse il suggerimento cita due parti rettangolari, attorno al tetto della visione frontale e ne calcola l'area.



Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

$$\begin{aligned} b \cdot h & \text{ Ho calcolato l'area di un singolo rettangolo} \\ b \cdot h &= 2,50 \cdot 1,00 = 2,50 \text{ m}^2 \cdot 2 = 5 \text{ m}^2 \rightarrow A \text{ del tetto} \end{aligned}$$

Figura 7. Ho calcolato l'area di un singolo rettangolo $b \times h = 2,50 \times 1,00 \times 2 = 5 \text{ m}^2$ Area del tetto

Dall'esame dei protocolli non affiora se questi errori siano causati da una lettura superficiale, da una difficoltà nell'interpretare informazioni grafiche o siano dovuti all'influenza del modello intuitivo del tetto, visto come parte superiore di una figura. Capire da cosa dipenda questo approccio risolutivo non corretto è dunque diventato un obiettivo della seconda parte della nostra ricerca, per la quale abbiamo modificato l'immagine della visione frontale e proposto nuovamente l'esercizio durante le singole interviste. Vedremo nel capitolo successivo le modifiche apportate e i risultati ottenuti.

Per quanto riguarda l'ultimo item, era prevedibile che avesse una percentuale di risposte non corrette od omesse molto alta; infatti il testo è molto articolato e complesso ed anche un lettore esperto potrebbe incontrare difficoltà nel comprendere la richiesta.

Durante lo svolgimento della prova, in tutte le classi, è stato chiesto il significato di alcune parole, quali soletta di calcestruzzo, ed anche delucidazioni sulla consegna dell'esercizio, confermando le nostre ipotesi nell'analisi a priori, ovvero che il lessico fosse complesso per gli studenti quindicenni. Perciò non sorprende che l'item sia stato abbandonato o che all'interno dei protocolli gli studenti esplicitino il loro disagio, come nel seguente caso:

non capisco il ragionamento

Figura 8. Non capisco il ragionamento

Da quest'ultimo protocollo emergono anche le difficoltà linguistiche dei nostri studenti, infatti possiamo supporre che la studentessa volesse affermare che non capisce la richiesta dell'item e pertanto non riesce a ideare una strategia risolutiva.

La bassa percentuale di risposte omesse sicuramente in parte dipende dal fatto che l'item sia a scelta multipla. Nella maggior parte dei casi la risposta è conseguenza di una manipolazione dei dati forniti dal testo, in linea con il contratto didattico. A testimonianza di quanto detto, riportiamo i seguenti protocolli in cui i quindicenni hanno svolto alcuni conti, prima di scegliere tra le opzioni.

- A 40 cm
- B 60 cm
- C 70 cm
- D 80 cm
- E 140 cm

$$4 \cdot 3 = 12 \quad 12 \cdot 10 = 120 \quad 120 : 2 = 60$$

- A 40 cm
- B 60 cm
- C 70 cm
- D 80 cm
- E 140 cm

$$4 \text{ m}^3 = 400 \text{ cm}^3$$

$$10 \text{ cm}^2 = \text{altezza soletta}$$

$$\frac{400 \text{ cm}^3}{10 \text{ cm}^2} = 40 \text{ cm}$$

4.3. Risultati e analisi dei protocolli della seconda prova

4.3.1. Risultati e analisi del quesito 2.1: Gelateria

Quesito 2.1: Gelateria

Ecco la piantina della gelateria di Maria. Maria sta ristrutturando il locale.
La zona di servizio è circondata da un bancone.

Nota: ogni quadrato sulla griglia rappresenta 0,5 metri x 0,5 metri.

Item 1:
Maria vuole applicare una nuova bordatura lungo il bordo esterno del bancone. Qual è la lunghezza totale della bordatura di cui ha bisogno? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

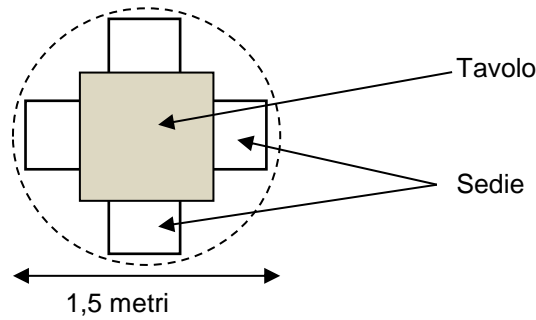
.....
.....
.....

.....
.....
Item 2:

Maria vuole rifare anche il pavimento nel suo locale. Qual è la superficie (area) totale del pavimento del locale, escludendo la zona di servizio e il bancone? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....
.....
.....

Item 3:



Maria vuole mettere nel suo locale dei moduli composti da un tavolo e quattro sedie, come quello illustrato sopra. Il cerchio rappresenta l'area necessaria per ciascun modulo. Per garantire uno spazio sufficiente ai clienti quando sono seduti, ciascun modulo, rappresentato dal cerchio, va collocato rispettando le seguenti condizioni:

- ciascun modulo va collocato ad almeno 0,5 metri dai muri.
- ciascun modulo va collocato ad almeno 0,5 metri dagli altri moduli.

Qual è il numero massimo di moduli che Maria può collocare nella zona in grigio del suo locale destinata ai posti a sedere?

Numero di moduli:

I dati quantitativi relativi al nostro campione, suddivisi anche per tipologia di Istituto, sono riassunti nelle seguenti tabelle.

Item 1	Risp. Corretta	Risp. Errata	Risp. Omessa
Licei	54,17%	35,42%	10,42%
Tecnici	37,50%	41,67 %	20,83%
Professionali	13,33%	26,67 %	60%
Tot.	45,52%	35,63%	21,83%

Item 2	Risp. Corretta	Risp. Errata	Risp. Omessa
Licei	54,17%	35,42%	10,42%
Tecnici	37,50%	41,57%	20,83%
Professionali	13,33%	26,67%	60%
Tot.	45,97%	35,63%	18,39%

Item 3	Risp. Corretta	Risp. Sbagliata	Risp. Omessa
Licei	62,52%	37,50%	0%
Tecnici	64,58%	35,42 %	0%
Professionali	6,67%	80%	13,33%
Tot.	54,02%	43,67%	2,29%

I dati quantitativi offrono uno spunto di riflessione interessante, infatti, soprattutto dai risultati dei primi due item, emergono le difficoltà degli studenti nell'affrontare questo tipo di quesiti. Il dato preoccupante riguarda gli alunni dei professionali, con un alunno su nove circa che risponde correttamente, ma anche nei licei solo la metà degli studenti fornisce una soluzione giusta.

È interessante anche un altro aspetto, riguardante i dati quantitativi relativi alle risposte all'item 3. Emerge come sia l'item che differenzia maggiormente i professionali dalle altre tipologie di scuola che ottengono percentuali di risposta corretta sensibilmente più alti rispetto a quelle ottenute per i primi due item, mentre per il professionale meno del

7% fornisce la risposta corretta. L'item 3 si distingue per la complessità testuale: è un testo lungo, che contiene un sacco di informazioni da tenere sotto controllo contemporaneamente. Questa potrebbe essere una spiegazione della grande differenza di risposte corrette rispetto agli altri due item tra gli studenti del professionale (che in teoria potrebbero essere anche più pronti a prove di realtà di questo tipo) e gli studenti degli altri istituti. L'ipotesi cioè è che entrino in gioco aspetti di competenza linguistica di base che differenziano – anche per atteggiamenti nei confronti del linguaggio e ad esempio di testi lunghi- i due campioni di popolazione (studenti di professionale, studenti di altri istituti).

Nei prime due item la risposta è stata considerata corretta a coloro che hanno utilizzato un procedimento matematico corretto per determinare la misura del bancone, mentre nell'ultimo item la risposta è stata considerata corretta a coloro che hanno fornito il numero corretto di moduli da inserire.

Dall'analisi dei protocolli, possiamo osservare che gli studenti, di fronte ad una figura non stereotipata, spesso non sanno come procedere. Difficoltà nella comprensione della richiesta o difficoltà nell'approcciare figure non riconosciute come standard, fatto sta che il disorientamento rispetto a questo quesito è stato frequente esplicitato nei protocolli.

Figura 9. Non mi riesce perché non so come ragionare.

Come avevamo ipotizzato nell'analisi a priori, la figura è apparsa ambigua e di non facile comprensione, come ci suggerisce il protocollo di uno studente:

Figura 10. Ho ottenuto la lunghezza della bordatura del bancone (il bancone grigio scuro, secondo me). [...] Comunque ritengo che il testo non spieghi in maniera sufficiente che cosa si intenda per "bordatura" e per "lunghezza totale della bordatura esterna"; l'immagine potrebbe non essere capita da tutti.

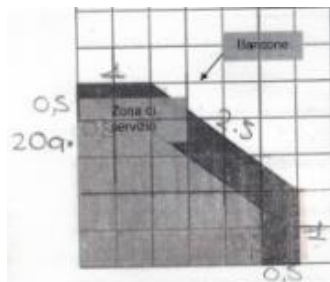
Dal precedente protocollo, si evince dall'affermazione "il bancone grigio scuro secondo me", come lo studente stia interpretando la richiesta, non sia sicuro che quello che deve calcolare è quello che sta calcolando (al di là poi della correttezza dei calcoli). Come commentato nel capitolo precedente, riteniamo tale indecisione fortemente giustificata, da una figura poco chiara e da un uso dei colori poco appropriato.

La mancata spiegazione di cosa si intenda per bordatura, come afferma l'alunno, potrebbe essere la causa di una interpretazione sbagliata: alcuni ragazzi hanno infatti calcolato in alcuni casi la bordatura interna e non quella esterna come voleva il quesito.

$$0,5 \cdot 4 = 2 \text{ m} \quad 0,5 \cdot 3,7 = 1,85 \text{ m}$$

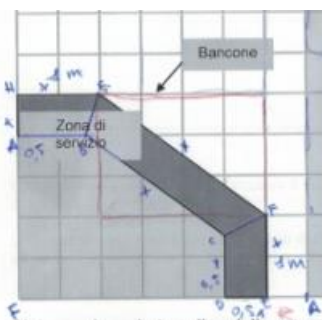
$$2 \text{ m} + 1,85 \text{ m} = 3,85 \text{ m}$$

Altri invece hanno calcolato il perimetro del bancone:



Ho diviso la realtà per il disegno cioè quella nella realtà è uguale 1 nel disegno. Sono andata avanti così per tutto il resto della figura e ho concluso che la lunghezza è: 9 m

Figura 11. Ho diviso la realtà per il disegno cioè quella nella realtà è uguale 1 nel disegno. Sono andata avanti così per tutto il resto della figura e ho concluso che la lunghezza è 9 m .

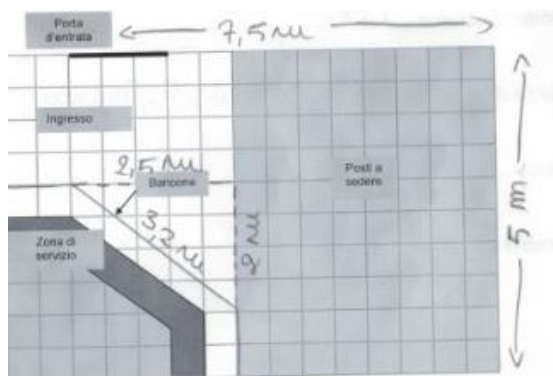


$$1 \text{ quadrato} = 0,9 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$$

$GF = 4,7 \text{ cm}$	$DE = AH = 0,9 \text{ cm}$
$DC = AB = 1,4 \text{ cm}$	$HG = FE = 1,8 \text{ cm}$
$BC = 3,9 \text{ cm}$	

$$4,7 + (1,4 \times 2) + 3,9 + (0,9 \cdot 2) + (1,8 \cdot 2) = 16,8$$

Altri ancora hanno addirittura disegnato una nuova bordatura e di essa calcolato correttamente la misura della lunghezza esterna.



Ho disegnato la nuova bordatura, per poi ricavare un rettangolo grande dal quale ho preso le misure che mi servivano per applicare il Teorema di Pitagora, in questo caso i due cateti. Ho così trovato l'ipotenusa ($3,2 \text{ m}$) che ho poi sommato ai due pezzi rimanenti del quadrato ($3,2 + 2 = 5,2 \text{ m}$).

Questi approcci mostrano chiaramente come le difficoltà non siano legate solo ad aspetti matematici (nell'ultimo protocollo la studentessa mostra buoni processi), ma ad aspetti di interpretazione del testo del quesito nel suo complesso (ovvero inclusa la comprensione dell'immagine). Dal precedente esempio inoltre, possiamo anche osservare come alcuni degli alunni prediligano un linguaggio più discorsivo che matematico alla richiesta di scrivere i passaggi nel primo item. All'interno del protocollo non sono presenti i calcoli per misurare l'ipotenusa ed inoltre la risposta si trova tra parentesi tonde, come se fosse un'informazione secondaria. L'impressione che abbiamo avuto dalla lettura delle risposte, è che i quindicenni tendano a nascondere tutto ciò che riguarda la matematica.

Pertanto, nella seconda parte del nostro lavoro, attraverso le interviste singole, abbiamo voluto verificare questa ipotesi e capire il motivo per cui il linguaggio quotidiano sia preferito a quello matematico.

Come avevamo ipotizzato nell'analisi a priori, la legenda è risultata poco chiara, ed il riquadro "Bancone" è stato scambiato per il bancone del locale, come si può osservare nella seguente risoluzione.

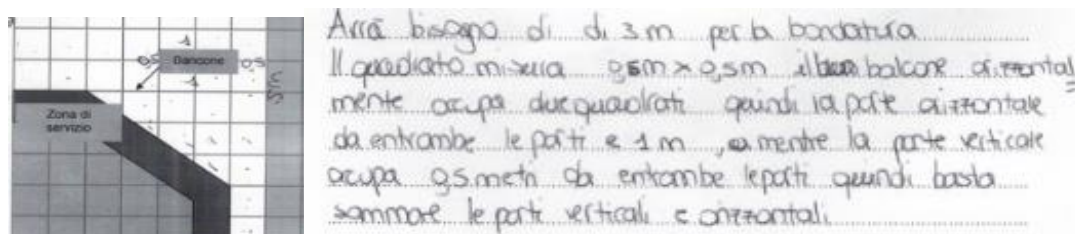


Figura 12. Avrà bisogno di di 3 m per la bordatura. Il quadrato misura 0,5*0,5 il bancone orizzontalmente occupa due quadrati quindi la parte orizzontale da entrambe le parti è 1 m, mentre la parte verticale occupa 0,5 metri da entrambe le parte quindi basta sommare le parti verticali e orizzontali.

Nonostante l'approccio discorsivo come detto sia preponderante, è un approccio discorsivo dal quale si evidenziano scarse competenze linguistiche, così come l'ipotesi di un approccio particolare al comunicare in contesto matematico, senza troppa attenzione ad alcuni aspetti: nel protocollo precedente si possono notare ad esempio errori grammaticali come "e" in luogo di "è" e la completa assenza di punteggiatura. Entrambi questi aspetti sono sottolineati nel già citato lavoro di Ferrari, in sede di analisi a priori.

Obiettivo della seconda parte del nostro lavoro è stato quello di verificare le nostre interpretazioni relative alle difficoltà degli studenti. In particolare abbiamo cercato di riformulare il testo (immagine compresa), per eliminare gli elementi che, a nostro avviso, rappresentano possibili ambiguità, senza semplificare l'aspetto matematico del quesito stesso. Vedremo nel capitolo successivo la modifica proposta durante le interviste.

In molti fascicoli, in particolare degli Istituti Tecnici e Professionali, gli studenti hanno risposto all'item misurando la lunghezza del bancone con il righello (approccio interessante visto che, come scritto, potevano usare il righello durante la prova. Interessante sarebbe anche sapere se si sono fatti problemi di scala):

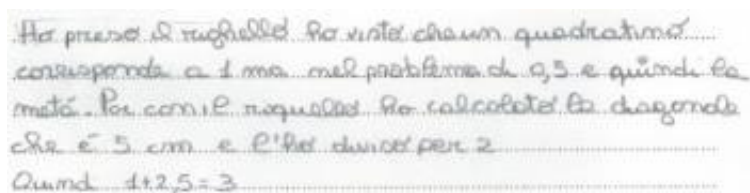


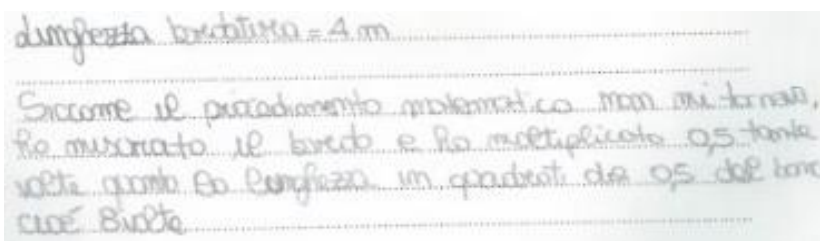
Figura 13. Ho preso il righello ho visto che un quadratino corrisponde a 1 ma nel problema di 0,5 e quindi la metà. Poi con il righello ho calcolato la diagonale che è 5 cm e l'ho divisa per 2. Quindi $1+2,5=3$.

Oppure hanno calcolato il numero di quadratini che formano la lunghezza esterna. Nel seguente protocollo, lo studente ha osservato che in tutto sono necessari nove quadratini per ricoprire la bordatura, due in orizzontale, due in verticale e cinque in obliquo, arrivando così alla risposta 4,5 metri,


$$0,5 \cdot 9 \text{ (numero dei quadrati)} = 4,5$$

Figura 14. $0,5 \cdot 9 = 4,5$

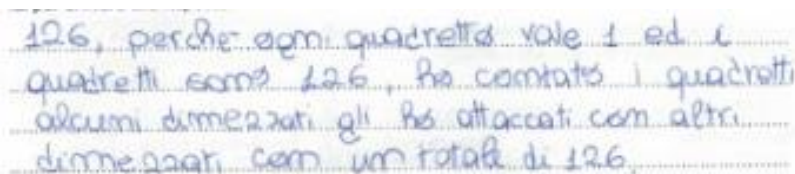
Mentre nel seguente caso la studentessa ha calcolato approssimativamente otto quadratini.



lunghezza bancone = 4 m
Siccome il procedimento matematico non mi tornava, ho misurato il bordo e ho moltiplicato 0,5 tante volte quanto la lunghezza in quadrati da 0,5 del bancone cioè 8 volte.

Figura 5. Siccome il procedimento matematico non mi tornava, ho misurato il bordo e ho moltiplicato 0,5 tante volte quanto la lunghezza in quadrati da 0,5 del bancone cioè 8 volte.

Come possiamo osservare dalla tabella, le percentuali di risposta per il primo e secondo item sono identiche. Ciò non sorprende, poiché per rispondere ai due item sono necessarie le stesse abilità e competenze. Anche nel secondo item, nella maggior parte dei protocolli, soprattutto degli istituti tecnici e professionali, sono state sommate le aree dei quadratini, a titolo di esempio riportiamo la seguente risposta.



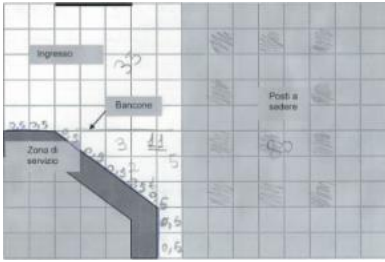
126, perché ogni quadretto vale 1 ed i quadretti sono 126, ho contato i quadretti alcuni dimezzati gli ho attaccati con altri dimezzati con un totale di 126.

Figura 15. 126, perché ogni quadretto vale 1 ed i quadretti sono 126, ho contato i quadretti alcuni dimezzati gli ho attaccati con altri dimezzati per un totale di 126.

Indipendentemente dagli errori grammaticali e matematici (l'area dei quadratini infatti non è 1 m^2), è interessante osservare come gli studenti procedono calcolando il numero di quadratini, “attaccandoli con altri”, come afferma la nostra ragazza, senza però riflettere che la risposta fornita è un'area approssimata.

La percentuale di risposte corrette nell'ultimo item, nei Licei e negli Istituti Tecnici, è significativamente maggiore rispetto a quella degli Istituti Professionali, come già osservato precedentemente. Come avevamo ipotizzato nell'analisi a priori, riteniamo che molti studenti siano stati devianti a causa dell'uso dei due colori per distinguere i posti a sedere dalle altre zone della gelateria: hanno infatti ipotizzato che ci fosse un muro di divisione tra le due regioni, aggiungendo così una ulteriore limitazione nella disposizione dei tavoli. È però importante sottolineare che “la conoscenza delle cose del mondo”, avrebbe dovuto suggerire come risolvere l'esercizio, invece appare che la rappresentazione della situazione viene trascurata a favore di una lettura selettiva dei dati forniti dal testo. Nella seconda parte della nostra ricerca, abbiamo modificato la piantina del locale, per verificare se l'uso dei colori è la causa dell'ambiguità supposta. Vedremo la nuova proposta nel capitolo successivo.

Infine, emergono anche le problematiche legate alla gestione delle informazioni provenienti da figure: conformemente agli studi in didattica in cui gli alunni tendono a sottovalutare il contenuto informativo delle immagini, molti degli studenti hanno supposto che i moduli occupassero un quadrato, come mostra il seguente protocollo.



4.3.2. Risultati e analisi del quesito 2.2: Apparecchi Difettosi

Quesito 2.2: Apparecchi Difettosi

L'Azienda Elettrix fabbrica due tipi di apparecchi elettronici: lettori audio e video. Al termine della produzione giornaliera, i lettori vengono testati e quelli difettosi vengono scartati e mandati in riparazione.

La seguente tabella indica il numero medio giornaliero di lettori di ciascun tipo fabbricati e la percentuale media giornaliera di lettori difettosi.

Tipo di lettore	Numero medio giornaliero di lettori fabbricati	Percentuale media giornaliera di lettori difettosi
Lettori video	2.000	5%
Lettori audio	6.000	3%

Item 1:

Ecco tre affermazioni sulla produzione giornaliera dell'*Azienda Elettrix*. Queste affermazioni sono corrette?

Fai un cerchio intorno a "Sì" o a "No" per ciascuna affermazione.

Affermazione	Questa affermazione è corretta?
Un terzo dei lettori prodotti giornalmente sono lettori video.	Sì / No
In ogni lotto di 100 lettori video fabbricati, esattamente 5 sono difettosi.	Sì / No
Se un lettore audio viene scelto a caso nella produzione giornaliera per essere testato, la probabilità che abbia bisogno di essere riparato è di 0,03.	Sì / No

Item 2:

Uno dei collaudatori afferma quanto segue: “In media, i lettori video mandati giornalmente in riparazione sono di più rispetto ai lettori audio mandati giornalmente in riparazione.

Decidi se l’affermazione del collaudatore è corretta oppure no. **Fornisci un’argomentazione matematica** per giustificare la tua risposta

.....
.....
.....

Item 3:

Anche l’Azienda Tronic fabbrica lettori audio e video. Al termine della produzione giornaliera, i lettori dell’Azienda Tronic vengono testati e quelli difettosi vengono scartati e mandati in riparazione.

Le seguenti tabelle confrontano il numero medio giornaliero di lettori di ciascun tipo fabbricati e la percentuale media giornaliera di lettori difettosi per le due aziende.

Azienda	Numero medio giornaliero di lettori <u>video</u> fabbricati	Percentuale media giornaliera di lettori difettosi
<i>Azienda Elettrix</i>	2.000	5%
<i>Azienda Tronic</i>	7.000	4%

Azienda	Numero medio giornaliero di lettori <u>audio</u> fabbricati	Percentuale media giornaliera di lettori difettosi
<i>Azienda Elettrix</i>	6.000	3%
<i>Azienda Tronic</i>	1.000	2%

Quale delle due aziende, *Azienda Elettrix* o *Azienda Tronic*, ha la percentuale totale più bassa di lettori difettosi? **Scrivi i calcoli** utilizzando i dati delle tabelle qui sopra.

.....
.....
.....
.....

I dati quantitativi relativi al nostro campione, suddivisi anche per tipologia di Istituto, sono riassunti nelle seguenti tabelle.

Item 1	1a		1b		1c	
	Sì	No	Sì	No	Sì	No
Licei	21,28%	78,72%	57,45%	42,55%	89,36%	10,64%
Istituti Tecnici	58,33%	41,67%	50%	50%	62,50%	37,50%
Professionali	60%	40%	66,67%	33,33%	60%	40%
Tot.	38,37%	61,62%	56,97%	43,02%	76,74%	23,25%

Tabella 2. Scelte (in percentuale) del campione riguardanti l'item 1.

Item 2	Risp. Corretta	Risp. Errata	Risp. Omessa
Licei	74,47%	25,53%	0%
Istituti Tecnici	46,15%	30,77%	23,08%
Professionali	41,18%	35,29%	23,53%
Tot.	60,91%	28,73%	10,34%

Tabella 3. Risultati (in percentuale) del nostro campione all'item 2.

Item 3	Risp. Corretta	Risp. Errata	Risp. Omessa
Licei	38,30%	48,94%	12,77%
Istituti Tecnici	37,04, %	29,63%	33,33%
Professionali	20%	33,33%	46,67%
Tot.	34,88%	40,96%	24,41%

Tabella 4. Risultati (in percentuale) del nostro campione all'item3.

Nel secondo e terzo item la risposta è stata considerata corretta a chi ha fornito una spiegazione adeguata, sia di tipo matematico calcolando le percentuali sia comparando i rapporti tra le percentuali ed i valori assoluti.

I dati quantitativi, riassunti nelle tabelle, offrono spunti interessanti di riflessione. L'assenza di risposte omesse nel primo item dipende ovviamente dalla possibilità di scegliere una risposta chiusa, senza doverla giustificare. Questo è un grosso limite dal punto di vista valutativo: le risposte corrette degli studenti possono essere conseguenze di ragionamenti o conoscenze non corrette o viceversa possono esserci delle risposte sbagliate che non derivano da una scarsa conoscenza dell'argomento proposto. Quest'ultimo è proprio il caso di uno studente, che calcola correttamente a quanto corrisponde un terzo dei prodotti, ma sceglie la risposta sbagliata, a causa di un errore di conto.



Sicuramente qualcuno potrà obiettare che comunque è sbagliato, ma è evidente che il fatto in sé non è informativo, né di per sé interessante dal punto di vista didattico. Utilizzando le parole di Domingo Paola¹⁴, è *significativo capire il ragionamento che sta dietro ad ogni risposta, in quanto ci possono essere più strategie risolutive dietro di essa*. Per tal motivo, durante le interviste, abbiamo chiesto ai quindicenni di argomentare la loro scelta.

Il primo item ha una particolarità: esistono solo due possibilità, dunque lo studente che scegliesse casualmente la risposta avrebbe il 50% di possibilità di ottenere la risposta giusta. Per questo i risultati al primo item sono particolarmente significativi quando il numero di risposte scorrette supera il 50%: significa che le conoscenze acquisite, in un certo senso, sono *controproducenti* e, dunque, probabilmente ispiratrici di misconcezioni. È il caso delle risposte relative alla seconda affermazione contenuta nel primo item, il fatto che la percentuale 5% su un numero assoluto X venga letta dalla maggior parte degli studenti come equivalente a dire che per ogni lotto di 100 lettori video fabbricati, esattamente 5 sono difettosi, è da un lato preoccupante, dall'altro interessante dal punto di vista della riflessione didattica. La parte preoccupante è aggravata dal fatto che questa risposta accomuna tutti i tipi di scuola: in un certo senso confermando la scarsa correlazione delle difficoltà con il fatto di aver affrontato più o meno bene le percentuali.

Un fenomeno prevedibile è invece quello della crescita di omissioni laddove si chieda di argomentare (come nel caso del secondo item) o dove ci sia un testo particolarmente complesso: in questo caso le differenze tra i tipi di scuola sono netti e significativi, anche didatticamente.

Sorprende invece l'alta percentuale di risposte corrette all'ultima affermazione del primo item, poiché, come è noto dai risultati delle prove nazionali, la probabilità è un argomento ostico per gli studenti. Inoltre, il dato ottenuto è in contraddizione con alcuni commenti trovati all'interno dei protocolli, in cui si afferma che tale argomento non è stato svolto alle superiori.

¹⁴ Paola, D.: (2005) Possibili conseguenze didattiche dell'uso dei test strutturati per la valutazione delle competenze matematiche: i casi delle prove PISA e INVALSI Progetto Alice, Vol. VI, n. 18, 493 - 518. http://www.matematica.it/paola/miei_articoli.htm

Possiamo osservare che la percentuale di risposte corrette al secondo item è significativamente bassa negli Istituti Tecnici e Professionali. Dall'analisi dei fascicoli emerge che molti degli studenti di queste scuole esplicitano difficoltà legate a ricordare come si calcola la percentuale, mostrando ancora una volta un approccio alla matematica di tipo algoritmico, nel quale è necessario ricordarsi formule piuttosto che significati.

Non mi ricordo come si fa il calcolo della percentuale

Figura 16. Non mi ricordo come si fa il calcolo della percentuale.

Questo approccio appare ancora più evidente forse nel seguente protocollo nel quale il calcolo della percentuale è ottenuto attraverso due divisioni (emerge che lo studente sembra ricordarsi che deve combinare in qualche modo i numeri):

L'affermazione è sbagliata perché il 3% di 6000 è 20
 mentre il 5% di 2000 è 10 quindi i lettori video
 in riparazione sono di più dei lettori audio
 $6000 : 100 = 60$ $60 \times 3 = 20$
 $2000 : 100 = 20$ $20 \times 5 = 10$

Figura 17. L'affermazione è sbagliata perché il 3% di 6000 è 20, mentre il 5% di 2000 è 10. Quindi i lettori video in riparazione sono di più dei lettori audio. $6000:100=60$, $60 \times 3=20$, $2000:100=20$, $20 \times 5=10$.

È interessante osservare che nel calcolo del 5% di 2000, lo studente fa anche un errore di calcolo. Questo introduce un altro problema ricorrente all'interno dei protocolli: quello della grande quantità di errori nei calcoli elementari.

In alcuni casi, gli studenti fanno ragionamenti di tipo proporzionale, come possiamo osservare nei due esempi successivi.

$6000 : 3 = 1000 \cdot x$
 $x = 1$

Domanda 2: ✓

Uno dei collaudatori afferma quanto segue:
 "In media, i lettori video mandati giornalmente in riparazione sono di più rispetto ai lettori audio mandati giornalmente in riparazione."
 Decidi se l'affermazione del collaudatore è corretta oppure no. Fornisci un'argomentazione matematica per giustificare la tua risposta.

I lettori video sono 1000 e quelli collaudati male sono il 5%
 se portiamo i lettori audio a 1000 (invece che 6000)
 si ottiene una percentuale di apparecchi difettosi pari al 1%
 Quindi l'ipotesi del collaudatore è corretta.

Figura 18. I lettori video sono 2000 e quelli collaudati male sono il 5%. Se portiamo anche i lettori audio a 1000 (invece che a 6000) si ottiene una percentuale di apparecchi difettosi pari all'1%. Quindi l'ipotesi del collaudatore è corretta.

~~L'~~ affermazione ~~è~~ è corretta:
 Lettori video = $2000 : 5 = 8000 : x \rightarrow 20$ lettori
 Lettori audio = $6000 : 3 = 8000 : x \rightarrow 4$ lettori

Figura 19. L'affermazione è corretta. Lettori video $2000:5=8000:x \rightarrow 20$ lettori. Lettori audio $6000:3=8000:x \rightarrow 4$ lettori.

In alcuni protocolli, gli alunni si limitano a confrontare i dati delle percentuali presenti in tabella, come mostra il seguente.

Sì perché i lettori video sono il 5% mentre quelli audio sono il 3%.

Figura 20. Sì perché i lettori video sono il 5% mentre quelli audio sono il 3%.

Approccio che ovviamente è problematico, e che entra in crisi nell'item successivo, in cui si chiede di passare al confronto tra percentuali al confronto assoluto.

Diverso invece è l'approccio di chi non fa un calcolo preciso, ma efficacemente, compara i rapporti tra le percentuali ed i valori assoluti, ovvero osserva che la percentuale dei lettori video difettosi è del 5% che è quasi due volte la percentuale dei lettori audio difettosi, ma l'azienda produce 6000 lettori audio, che corrisponde a tre volte il numero dei lettori video.

Assolutamente no dato che ogni 2000 lettori video il 5% sono
 da riparare invece i lettori audio anche se la percentuale dei
 lettori è più bassa, la produzione di essi è nettamente maggiore
~~però (il triplo) quindi per ogni 2000 lettori video~~

Figura 21. Assolutamente no dato che ogni 2000 lettori video il 5% sono da riparare invece i lettori audio anche se la percentuale dei lettori è più bassa, la produzione di essi è nettamente maggiore (il triplo).

Infine, tra chi risponde senza calcolare esplicitamente la percentuale, c'è chi prova ad argomentare *retoricamente*, dando l'idea di fare un bilancio meno accurato di quello contenuto nel protocollo precedente (e sicuramente non esplicitandolo).

L'affermazione di uno dei collaudatori è
 perché di lettori video ne producono
 di meno e la percentuale che sono
 difettosi è più alta rispetto ai lettori audio
 che ne vengono prodotti di più però la
 percentuale è più bassa.

Figura 22. L'affermazione di uno dei collaudatori è vera perché di lettori video ne producono di meno e la percentuale che siano difettosi è più alta rispetto ai lettori audio che ne vengono prodotti di più però la percentuale è più bassa."

Secondo me è giusto perché i lettori video prodotti sono di meno ed essendoci più lettori difettosi vuol dire che i lettori video fabbricati male sono di più.

Figura 23. Secondo me è giusto perché i lettori video prodotti sono di meno ed essendoci più lettori difettosi vuol dire che i lettori video fabbricati male sono di più.

Queste argomentazioni *retoriche* segnalano anche delle difficoltà, ma ci appaiono come un segnale importante: gli studenti che le propongono sembrano aggrapparsi ad una conoscenza intuitiva del concetto di percentuale. Segnale importante perché effettivamente è improbabile che uno studente quindicenne non abbia mai sentito parlare di percentuale fuori dal contesto scolastico, ma non è detto (come nei protocolli di chi dichiara di non aver affrontato l'argomento a scuola) che provino ad usare le loro conoscenze extra-scolastiche nell'affrontare un problema di matematica.

Come ci si poteva aspettare la terza domanda è risultata particolarmente difficile: anche per i licei, sono molti coloro che hanno risposto correttamente al secondo item e poi hanno sbagliato il terzo item od omesso la risposta.

Uno degli errori più frequenti è il sommare i dati forniti dalle due tabelle, come possiamo osservare dai seguenti protocolli. Capire il motivo di tale convinzione è stato l'obiettivo della nostra ricerca.

La ~~lettura~~ perché sul totale di lettori prodotti il 8% rappresenta 480 lettori, invece la Lettrix produce ben 600 lettori guasti.

$$\text{LETTRIX} = 5 + 3 = 8\%$$

$$\text{TRONIC} = 4 + 2 = 6\%$$

L'AZIENDA TRONIC HA LA PERCENTUALE DI LETTORI DIFETTOSI PIÙ BASSA.

la percentuale più bassa è quella dell'azienda TRONIC in quanto su 8000 prodotti il 6% viene segnalato mentre l'altra su 8000 prodotti l'8% viene segnalato

4.3.3. Risultati e analisi del quesito 2.3: Velocità di Flusso

Quesito 2.3: Velocità di Flusso

Le infusioni intravenose (o flebo) servono per somministrare fluidi e medicinali ai pazienti.



Le infermiere devono calcolare la velocità di flusso, D , di un'infusione in gocce al minuto.

Per questo utilizzano una formula $D = \frac{dv}{60n}$ dove

d è il ritmo di flusso misurato in gocce al millilitro (ml)

v è il volume in ml dell'infusione

n è la durata dell'infusione in numero di ore.

Item 1:

Qual è la velocità di flusso, D , di un'infusione, in gocce al minuto, se il ritmo di flusso, d , è di 6 gocce al ml, il volume, v , è di 500 ml e la durata dell'infusione, n , è di 5 ore?

Velocità di flusso in gocce al minuto:

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....
.....

Item 2:

Un'infermiera vuole raddoppiare la durata di un'infusione.

Descrivi con precisione come cambia D se n viene **raddoppiato** ma d e v non cambiano.

.....
.....
.....

Item 3:

Le infermiere devono anche calcolare il volume, v , dell'infusione in funzione della velocità di flusso, D .

Un'infusione con una velocità di flusso di 50 gocce al minuto deve essere somministrata a un paziente per 3 ore. Per questa infusione il ritmo di flusso è di 25 gocce al millilitro.

Qual è il volume dell'infusione in ml?

Volume dell'infusione: ml

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....

I dati quantitativi relativi al nostro campione, suddivisi anche per tipologia di Istituto, sono riassunti nelle seguenti tabelle.

Item 1	Risp. Corretta	Risp. Errata	Risp. Omessa
Licei	84,74%	6,52%	8,70%
Tecnici	79,17%	8,33%	12,50%
Professionali	66,67%	6,67%	26,67%
Tot.	80%	7,05%	12,94%

Item 2	Risp. Corretta	Risp. Parzialmente Giusta	Risp. Errata	Risp. Omessa
Licei	34,78%	45,65%	8,70%	10,87%
Tecnici	16,67%	29,17%	29,17%	25%
Professionali	6,67%	46,67%	33,33%	13,33%
Tot.	24,7%	40%	15,3%	20%

Item 3	Risp. Corretta	Risp. Errata	Risp. Omessa
Licei	60,87%	17,39%	21,74%
Tecnici	25%	33,33%	41,67%
Professionali	6,67%	40%	53,33%
Tot.	41,17%	25,88%	32,94%

Emerge come la richiesta contenuta nel primo item sia piuttosto accessibile in tutte le tipologie di scuola, ottenendo più di due terzi di risposte corrette anche negli Istituti Professionali. D'altra parte si tratta di una sostituzione di numeri (dati tra l'altro con le unità di misura giuste, ovvero senza necessità di conversione) in una formula, per il calcolo diretto del valore della variabile D : non c'è nemmeno quindi bisogno di manipolare la formula. Questo comunque testimonia, anche per l'analisi delle difficoltà negli item successivi, come la formula nel suo complesso sia chiara (ad esempio che dv significhi il prodotto tra il valore di d e quello di v).

È interessante sottolineare come il testo iniziale del quesito sia completamente superfluo dal punto di vista matematico per approcciare gli item, e dunque anche chi ne avesse omesso la lettura, o avesse avuto difficoltà nella comprensione, può aver dato la risposta giusta. Questo è importante sottolinearlo, in quanto il testo è complesso, e si è rivelato tale anche durante lo svolgimento della prova: ad esempio molti hanno chiesto il significato di parole, quali infusioni intravenose.

Un fenomeno prevedibile è quello relativo alla crescita delle omissioni o delle risposte sbagliate al terzo item: in questo caso le differenze tra i Licei e gli Istituti Tecnici e Professionali sono evidenti e significative. Il dato ottenuto per Tecnici e Professionali nel terzo item è in linea coi risultati ottenuti in quesiti della prova INVALSI, in cui si chiede il calcolo della percentuale (vedi analisi a priori nel capitolo 3).

Per quanto riguarda il fenomeno delle omissioni, significativi sono anche i dati relativi al secondo item. C'è infatti una percentuale relativamente bassa di omissioni per una domanda a risposta aperta, in cui non si chiede di fornire un numero, ma di "descrivere come cambia" una variabile. L'impressione, supportata poi dall'analisi dei protocolli, è che molti non abbiano capito questo, e invece abbiano pensato di dover usare i dati precedenti per calcolare di nuovo il valore della variabile in un caso specifico. Interessante tra l'altro che la percentuale di omissioni sia sensibilmente maggiore negli Istituti Tecnici che nei Licei e negli Istituti Professionali: l'ipotesi è che in questo caso, l'omissione, seppur legata ad una "difficoltà matematica", possa anche testimoniare una buona comprensione della richiesta.

Dall'analisi dei protocolli emerge che la principale causa di errore al primo item è la gestione del dato 60, già presente nella formula: alcuni alunni lo hanno trascurato ai fini dell'esercizio, come mostrano il seguente.

$$D = \frac{6500}{5} = \frac{3000}{5} = 600$$

Tuttavia, dai fascicoli non appare se ciò sia dovuto ad una difficoltà nel manipolare i dati o sia causa di una lettura superficiale: sarà quindi nostro scopo far emergere le vere motivazioni nella fase successiva di indagine.

La maggior parte delle risposte corrette al secondo item si può suddividere in due tipologie: c'è chi ha fatto considerazioni qualitative sulle variabili,

Descrivi con precisione come cambia D se n viene raddoppiato ma d e v non cambiano.

$$D = \frac{d \cdot V}{250h} \quad D = \frac{d \cdot V}{120h}$$

SE RADDOPPIAMO LA DURATA DELL'INFUSIONE E d E V RIMANGONO INVARIATI, LA VELOCITÀ DI FLUSSO SI DIMIZZA.

Figura 24. Se raddoppiamo la durata dell'infusione e d e v rimangono invariati, la velocità di flusso si dimezza.

e chi invece ha utilizzato i dati dell'item precedente ed ha confrontato il risultato con quello del primo item. La cosa interessante è che questo in alcuni casi potrebbe essere legato, come detto precedentemente, ad una scarsa comprensione della richiesta; in altri invece è una strategia per arrivare alla risposta generale, come nel caso del protocollo seguente:

Descrivi con precisione come cambia D se n viene raddoppiato ma d e v non cambiano.

$$\frac{6 \cdot 500}{60 \cdot 10} = 5 \text{ gocce/min}$$

Se si raddoppia il tempo la velocità si dimezza, sono inversamente proporzionali.

Figura 25. Se si raddoppia il tempo la velocità si dimezza, sono inversamente proporzionali.

La risposta al secondo item è stata considerata parzialmente corretta a coloro che hanno raddoppiato la durata dell'infusione, ma non hanno descritto che la velocità di flusso si dimezza: ovvero a quei protocolli in bilico tra incompletezza della risposta e scarsa comprensione della richiesta (ovvero di dover descrivere una relazione di proporzionalità inversa tra le due variabili), come il seguente:

$$D = \frac{500 \cdot 6}{60 \cdot 10} = D = 5$$

Nonostante l'incertezza sull'interpretazione dei protocolli come quello appena mostrato, una considerazione che possiamo fare è chiedersi cosa sarebbe successo se il secondo item fosse stato proposto senza la richiesta del primo item: sarebbe stata più chiara la richiesta a chi l'ha letta in continuità con quella del primo item? E per quelli che invece hanno usato la strategia numerica per ricavare la proporzionalità inversa generale tra le due variabili, avrebbero proceduto nello stesso modo assegnando magari numeri scelti da loro? Nella seconda parte del nostro lavoro abbiamo quindi proposto ai ragazzi intervistati una versione del quesito priva del primo item.

Molte sono le difficoltà incontrate dagli alunni nel descrivere la relazione tra le due variabili: alcuni di loro hanno esplicitato la convinzione che se n raddoppia, anche D deve raddoppiare.

Descrivi con precisione come cambia D se n viene raddoppiato ma d e v non cambiano.

~~Q~~ viene raddoppiato quindi bisogna trovare il doppio

Figura 26. Viene raddoppiato, quindi bisogna trovare il doppio.

Oltre a ciò sono emerse problematiche legate al significato di doppio di n , talvolta tradotto in linguaggio matematico come il quadrato di una certa quantità, come mostrano i seguenti protocolli:

Figura 27. Si mette alla seconda la n

Come potevamo prevedere, l'ultimo item ha ottenuto una alta percentuale di risposte errate od omesse, in particolar modo negli Istituti Tecnici e Professionali.

Dall'analisi dei fascicoli emergono le problematiche degli alunni nel determinare la formula inversa di quella assegnata dal testo, come mostra il seguente protocollo in cui semplicemente D e v si scambiano di posizione:

È interessante esaminare i due seguenti protocolli, in cui gli studenti dichiarano di non ricordare come trovare la formula inversa o di avere un lapsus, a testimonianza del fatto che molti ragazzi ritengono che la matematica sia solo un insieme di regole da imparare a memoria e da saper utilizzare al momento più opportuno.

Figura 28. Non ricordo come fare la formula inversa.

e fai per arrivare alla risposta.

NON RIESCO A SOSTITUIRE LA x (LAPSUS)

$$\frac{50}{60 \cdot 3} = \frac{25 \cdot x}{60 \cdot 3}$$

Figura 29. Non riesco a sostituire la x (lapsus).

In molti protocolli di risposta errata, affiora come alcuni quindicenni, invece di determinare la formula inversa, combinano i dati numerici presenti nell'item, in linea con il contratto didattico.

Infine, all'interno delle risposte, uno studente ha risolto correttamente l'item e ha fatto la "riprova" del risultato ottenuto, mostrando buoni processi di controllo.

The image shows a student's handwritten work on lined paper. The first line contains the equation $50 = \frac{25 \cdot x}{60 \cdot 3}$ followed by the solution $x = 360$ and the word "perché". The second line shows the same equation $50 = \frac{25 \cdot x}{60 \cdot 3}$ followed by a crossed-out calculation $50 \cdot 180 = 9.000$. The third line shows the verification calculation $9.000 : 25 = 360$ followed by a handwritten note in Italian: "(poi ho fatto la riprova, facendo tutto al contrario di come ho fatto ora, per essere sicuro che tutto tornasse)."

$$50 = \frac{25 \cdot x}{60 \cdot 3} \quad x = 360, \text{ perché}$$
$$50 = \frac{25 \cdot x}{60 \cdot 3} \quad \cancel{50 \cdot 180 = 9.000}$$
$$9.000 : 25 = 360 \quad (\text{poi ho fatto la riprova, facendo tutto al contrario di come ho fatto ora, per essere sicuro che tutto tornasse}).$$

Figura 30. (poi ho fatto la riprova, facendo tutto al contrario di come ho fatto ora, per essere sicuro che tutto tornasse).

4.4. Le opinioni dei docenti

Durante questa fase del nostro lavoro, abbiamo anche raccolto le opinioni dei docenti delle classi coinvolte circa le difficoltà che gli studenti avrebbero, secondo loro, potuto incontrare di fronte a questa tipologia di quesiti.

Quello che ci ha colpito maggiormente è la considerazione praticamente unanime secondo la quale gli alunni “*non sono abituati a risolvere questo tipo di prove*”, ovvero problemi contestualizzati. L’aspetto significativo è che queste competenze sono, come abbiamo visto nel capitolo 1, tra i principali obiettivi educativi da raggiungere alla fine dell’obbligo di istruzione per l’asse matematico.

Alcuni insegnanti attribuiscono il mancato raggiungimento degli obiettivi alla mancanza di tempo e di strumenti per avviare il cambiamento prefissato dai documenti ministeriali. D’altra parte, almeno nei Licei Scientifici, anche la prova di maturità ha cominciato a virare (con alterne fortune e diverse problematiche sulla realizzazione dei quesiti prodotti) verso la direzione di problemi contestualizzati. Questo aspetto emerge chiaramente dalle interviste¹⁵ con i docenti del Liceo Scientifico, a dimostrazione ancora una volta del fatto che la valutazione rappresenta spesso la spinta verso i cambiamenti didattici:

I: “Quali potrebbero essere le difficoltà dei suoi studenti?”

Ls: “Non sono abituati a risolvere problemi contestualizzati. Abbiamo poco tempo a disposizione per trattare tutti gli argomenti. In seconda il programma arriva fino alla parabola e queste tipologie di esercizio vengono tralasciate. Da quest’anno cerchiamo di proporre qualche quesito più contestualizzato in vista della maturità, ma gli esercizi sui libri sono pochi ed è difficile reperirli.”

I: “Come mai solo da quest’anno?”

Ls: “Per molto tempo abbiamo trascurato questo aspetto, poi nella prova di maturità dello scorso anno è apparso un problema contestualizzato.”

I: “In realtà le Indicazioni Nazionali per i Licei risalgono al 2010 ed è espressamente spiegato.”

Ls: “Sì è vero. Allora che ci diano degli strumenti adeguati! Non è che dall’oggi al domani possiamo cambiare metodo di insegnamento.”

La mancanza di strumenti è legata anche alla difficoltà per l’insegnante nel reperire problemi di questo tipo. In particolare, nei libri di testo sembra difficile trovare problemi di questo tipo.

I: “Quali potrebbero essere le difficoltà dei suoi studenti?”

Ll: “Sono poco abituati a ragionare su esercizi di questo tipo. Ogni tanto propongo problemi contestualizzati che sono sul libro, ma sono veramente molto pochi.”

¹⁵ Utilizzeremo la seguente legenda. I: per indicare l’intervistatore, Ls: insegnante di Liceo Scientifico, Ll: insegnante di Liceo Linguistico, Pr: insegnante di Istituto Professionale (non siamo riusciti ad intervistare insegnanti degli Istituti Tecnici coinvolti).

Un solo professore (di Liceo Classico) ha dichiarato di insegnare matematica attraverso applicazioni alla realtà, ma ha anche voluto sottolineare come questo abbia attirato nei suoi confronti molte critiche da parte di alunni e genitori. Questo a sottolineare anche le difficoltà al contorno che ci possono essere proponendo quello che sicuramente è un cambiamento di prospettiva rispetto all'insegnamento tradizionalmente impartito in contesto matematico.

I: "Quali potrebbero essere le difficoltà dei suoi studenti?"

*Lc: "Penso e spero che i miei studenti non abbiano difficoltà a risolvere queste prove. Io presento sempre esempi reali. Giusto ieri ho presentato loro il problema di posizionare tre lampioni in modo da illuminare la città in tre parti uguali. In questo modo siamo arrivati a trarre alcune proprietà e osservazioni interessanti. Questo modo di insegnare richiede sforzi maggiori nell'insegnante perché deve documentarsi, creare problemi adeguati per attirare l'interesse degli studenti. A loro volta i ragazzi devono abituarsi a ragionare e molto spesso non sono abituati a farlo. Io il libro di testo non lo apro mai, che senso ha proporre esercizi tutti uguali? Questo modo di procedere è soggetto a critiche da parte dei genitori e degli alunni che **preferirebbero di gran lunga trovare nel compito l'ennesimo esercizio uguale a quelli del libro.***

Inoltre è naturale che nasca il confronto coi colleghi da parte dei genitori. I colleghi preferiscono un approccio basato sulla riproduzione, però poi non bisogna rimanere sorpresi se all'esame di stato troviamo problemi contestualizzati: le Indicazioni Nazionali parlano chiaro.

Possiamo quindi ipotizzare che una delle cause dei bassi risultati nelle prove OCSE-PISA sia da attribuire ad una modalità di insegnamento della matematica ancora ancorata ad incentivare il pensiero riproduttivo, proponendo uno schema di insegnamento basato sull'esempio (ti faccio vedere come si fa e prova a fare la stessa cosa) ed infine il compito chiede un procedimento noto. Questo approccio sembra essere quello preferito anche negli Istituti Tecnici e Professionali.

I: "Quali potrebbero essere le difficoltà dei suoi studenti?"

Pr: "Non ti aspettare grandi risultati. Qui non siamo allo scientifico e i ragazzi sono poco abituati a ragionare. Appena proponi qualcosa di diverso o quesiti del genere staccano il cervello. Trovano già difficoltà a risolvere da soli gli esercizi che vengono svolti in classe."

È interessante osservare come si sottolinei la debolezza dei ragazzi non solo sull'aspetto della conoscenza dei contenuti, ma anche rispetto all'abitudine al ragionamento. Anche qui il primo commento che viene da fare è "proviamo ad abituarceli", è un obiettivo importante e appunto di cittadinanza, dunque indipendente dalle scelte di vita e scolastiche dell'individuo: appare essere un obiettivo veramente di base dell'obbligo scolastico e non esclusivo dei percorsi matematici *più forti*.

Infine, durante le interviste i professori hanno reclamato la necessità di corsi di aggiornamento per essere formati adeguatamente e di non essere lasciati soli nell'affrontare i cambiamenti descritti. Una tale rivoluzione culturale non può avvenire nel breve tempo e non può essere fronteggiata solo dagli insegnanti, poiché bisogna rivoluzionare il metodo di insegnamento fin dalla scuola primaria. Gli strumenti a cui

fanno riferimento i docenti non sono le prove INVALSI (viste più come punto di arrivo che di partenza per avviare i cambiamenti), piuttosto metodologie di insegnamento coerenti con la matematica contestualizzata.

4.5. Riflessioni conclusive a seguito della prima fase dell'indagine

Dall'analisi dei protocolli emergono varie osservazioni che riguardano le problematiche che gli studenti incontrano nell'affrontare questo tipo di prove. Dapprima, si ha spesso la sensazione che i ragazzi leggano in modo superficiale i quesiti proposti, senza porre l'attenzione su ciò che viene richiesto loro, ma prediligano più una lettura selettiva (come ad esempio nel primo item del quesito "Noleggio di DVD"). A volte invece appare che gli studenti forniscano una soluzione senza tener conto dei suggerimenti forniti dal testo (come ad esempio nel secondo item del quesito "Garage"), o in modo del tutto incoerente o fantasioso (come ad esempio nel terzo item del quesito "Velocità di Flusso", in cui gli studenti inventano calcoli, che prescindono dalla formula assegnata).

Talvolta l'impressione è che gli studenti abbiano una scarsa abitudine a riflettere sul risultato ottenuto (come ad esempio nel secondo item del quesito "Noleggio di DVD"): usando le parole di D'Amore¹⁶ sembra che per i nostri quindicenni *«risolvere un problema coincide con il trovare le operazioni più adatte, si tratta cioè di interpretare aritmeticamente il testo, passando dalla sua formulazione in lingua naturale all'espressione aritmetica che porta dai dati al risultato. Una volta seguito questo passaggio, il testo non serve più e l'attenzione del risolutore si concentra sulla esecuzione dell'operazione che porta a un risultato che è automaticamente interpretato come la risposta del problema»*.

Inoltre, la percezione è che molti alunni prediligano adoperare i dati forniti dal testo, piuttosto che dalle immagini, considerate come un elemento secondario (come ad esempio nel quesito "Macchia di Petrolio") o che preferiscano utilizzare un linguaggio più *discorsivo* che quello matematico.

Tuttavia riteniamo che molte difficoltà siano causate da una scarsa conoscenza dell'argomento proposto (come ad esempio nel quesito "Apparecchi Difettosi"), o dalla convinzione che in matematica ci si possa cimentare solo su argomenti già trattati (come ad esempio nel quesito "Macchia di Petrolio"). Un'ulteriore difficoltà deriva dal non riuscire a riconoscere la matematica appresa a scuola all'interno dei quesiti contestualizzati, ovvero una carenza in quello che l'indagine PISA riconosce come il processo di matematizzazione (come ad esempio, il non saper individuare il teorema di Pitagora nel quesito "Gelateria").

Crediamo anche che altri tipi di problematicità siano legati ad aspetti linguistici, ad una scarsa comprensione del testo della domanda o ad una errata interpretazione del testo (come ad esempio nel caso dei quesiti "Garage" e "Noleggio di DVD").

¹⁶ D'Amore B., Martini B., Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard. Consultabili all'url:
http://www.digitaldocet.it/allegati/damore/problemi/318_DAmore_Martini_contratto_didattico_italiano.pdf

Secondo il parere dei docenti, le difficoltà sono dovute al fatto che gli studenti italiani hanno avuto una scarsa abitudine ad affrontare situazioni nuove come quelle proposte sia dai quesiti OCSE PISA sia dai quesiti INVALSI, sin dalla scuola primaria, testimoniando il fatto che, a distanza di anni dall'emanazione delle Linee Guida, sia molto lento il processo di cambiamento dell'insegnamento della matematica, ancora ancorato a promuovere il pensiero riproduttivo.

Per cercare di comprendere a pieno le cause delle difficoltà che sono emerse ed in particolare di confermare o confutare le nostre ipotesi, fatte in questa fase del nostro lavoro, abbiamo condotto una serie di interviste ai ragazzi che hanno partecipato alla prova.

Capitolo 5

Le interviste

5.1. Le interviste: la modalità

Nel capitolo precedente sono state analizzate le risposte degli studenti coinvolti nella nostra indagine nell'affrontare le due tipologie di prove sviluppate, formate, come già detto, dai quesiti rilasciati dall'indagine OCSE-PISA 2012. Per cercare di comprendere meglio le difficoltà che sono emerse, ed in particolare di confermare o meno le ipotesi fatte sulla base della prima analisi, sono state condotte delle interviste orali che hanno coinvolto singolarmente allievi di tutte le classi partecipanti alla nostra ricerca.

Le interviste sono state audio-registrate e condotte in orario scolastico nei locali delle diverse scuole partecipanti. Abbiamo raccolto un totale di 71 interviste, equi-distribuite tra i due gruppi di ragazzi identificati dalla tipologia di prova sostenuta nella prima fase.

Il numero di interviste raccolte è sicuramente molto ampio e superiore anche a quello che avevamo prospettato all'inizio. Nonostante ciò è a nostro avviso importante sottolineare come alcuni ragazzi non abbiano dato la disponibilità a partecipare. Questa mancata disponibilità può essere interpretata in molti modi diversi, a partire dal disinteresse, ma la nostra interpretazione – anche alla luce delle interviste raccolte – è che il fattore principale sia di natura affettiva: la nostra convinzione è che l'insuccesso, la delusione e le difficoltà in matematica siano per molti di questi studenti (in particolare appunto nel gruppo di studenti con forti difficoltà) non solo fonte di stress, ma anche di frustrazione. Sembra quasi che il confrontarsi con la matematica sia visto come una certificazione di “non essere adeguati”: per evitare questa sensazione, si preferisce non confrontarsi con la matematica, e può diventare insopportabile farlo, di fronte ad (*giudicati* da) una persona estranea.

All'inizio di ogni intervista, abbiamo chiesto ad ogni studente di leggere il testo di ogni quesito (nella sua forma originale o riformulata per verificare meglio alcune ipotesi avanzate dopo la prima fase dell'indagine), di esprimere con le proprie parole quella che secondo lui/lei era la richiesta del quesito e di esplicitare parole o parti del quesito che riteneva poco chiari.

Poiché l'obiettivo era quello di raccogliere il maggior numero di informazioni, abbiamo cercato di mantenere atteggiamenti e comportamenti verbali il più distaccati possibile, in modo da evitare di influenzare i ragazzi.

Da questo punto di vista, un primo risultato evidente del lavoro di tesi, è stata l'evoluzione nella capacità di condurle, ma anche nell'organizzazione delle stesse, con il passare del tempo. Ad esempio, una prima conclusione a cui siamo arrivati dopo le prime interviste, è quella che fosse importante partire con i quesiti risolti correttamente dagli alunni, per mettere in crisi una implicatura¹⁷ ricorrente, che incideva su tutto il resto dell'intervista. Ciò a cui facciamo riferimento è la convinzione di molti studenti che il fatto che fosse

¹⁷ Implicatura è un termine introdotto da Ferrari (2004) per denotare quelle conclusioni non legate ad un ragionamento puramente deduttivo. Tipicamente sono conclusioni basate sul senso che la persona dà a certi messaggi, piuttosto che sul significato letterale del messaggio. Senso che viene dato in base al contesto e alle esperienze pregresse in quell contesto.

loro riproposto un quesito significasse non averlo risolto in maniera corretta durante la prova:

Intervistatore: “Ciao. Potresti leggere il quesito e dirmi, con tue parole, cosa ti viene chiesto?”

Il ragazzo legge la domanda ad alta voce e rimane in silenzio per qualche minuto.

Intervistatore: “Cosa stai pensando? Stai rileggendo la domanda?”

Alunno: “No, stavo cercando l’errore.”

Intervistatore: “Quale errore?”

Alunno: “L’errore che ho fatto qui.” (indica il foglio)

Intervistatore: “Ma io non ti ho chiesto di cercare l’errore, ma di leggere la domanda e dirmi cosa ti viene chiesto.”

Alunno: “Sì, lo so. Però se me lo chiedi significa che da qualche parte ho sbagliato. Se era giusto non me lo facevi rifare.”

Intervistatore: “Perché?”

Alunno: “Così fanno i professori!”

Nei prossimi paragrafi discuteremo, quesito per quesito, quanto emerso dalle interviste (riportando, con la stessa modalità grafica usata ora, pezzi integrali delle interviste con gli studenti), la nostra interpretazione a riguardo con particolare attenzione alle domande aperte e alle ipotesi sviluppate nella prima fase della ricerca.

Quando riporteremo stralci di intervista, useremo la seguente notazione: con I indicheremo l’intervistatore; mentre con Ls, Lc, Ll, It, Pr indicheremo un alunno rispettivamente di un Liceo Scientifico, di un Liceo Classico, di un Liceo Linguistico, di un Istituto Tecnico, di un Istituto Professionale. Queste abbreviazioni, nel caso degli allievi, saranno seguite da un numero identificativo progressivo che permetterà di riconoscere volendo tutte le citazioni di uno stesso allievo.

5.2. Le interviste agli studenti della prima prova

5.2.1. Analisi delle interviste del quesito 1.1: Macchia di Petrolio

A seguito dell'analisi dei protocolli relativi a "Macchia di Petrolio", abbiamo ipotizzato che gli studenti avessero difficoltà nell'individuare i dati necessari per la risoluzione del quesito e che ritenessero che fossero tutti presenti nel testo: tale impressione è stata confermata anche durante le interviste condotte. Infatti, abbiamo chiesto agli intervistati di evidenziare le informazioni necessarie allo svolgimento del quesito ed è emerso che molti di loro sono estremamente convinti dell'utilità di ogni dato presente nel testo, al contrario spesso non viene attribuita significatività ai dati, anche numerici, presenti in figura, come testimonia la seguente intervista.

I: "Potresti evidenziare i dati che sono necessari per risolvere il quesito?"

Pr1: "Sicuramente 65 lo devo usare... poi basta."

I: 10 km invece?"

Pr1: "No, non credo sia importante."

Nonostante l'informazione della distanza petroliera-terra sia non necessaria per approssimare l'intero quesito, molti degli alunni hanno tentato di capire sia come impiegarla (poiché la macchia di petrolio non arriva fino alla terra), sia come tracciarla sull'immagine: ciò è stata una delle cause dell'abbandono del quesito durante lo svolgimento della prova.

Lc1: "Non capisco come disegnare la distanza sulla figura... ci sono tante distanze, non capisco quale devo prendere. Poi non capisco, perché ci dia l'informazione della distanza...la macchia non arriva fino alla terra [...] Anche in classe non ho capito e sono andata avanti."

La presenza del dato 65 km, corrispondente alla distanza petroliera-terra, ha indirizzato molti studenti ad utilizzarlo come misura di una delle due dimensioni del rettangolo, quasi sempre costruito per stimare l'area della macchia del petrolio, e come scala per valutare l'altra lunghezza, al posto della scala inserita in figura.

Pr1: "Bisogna prendere l'altezza da qui a qui? Questo è 65 km da qui a qui? (indica la lunghezza della macchia) mi serve la larghezza, non lo so quanto è...non c'è scritto?... sarà 30 km... 65×30 devo fare..."

Come avevamo supposto nel capitolo precedente, molti degli studenti hanno avuto un approccio al quesito per *dati ed operazioni*, ovvero hanno identificato 65 e 10 come dati da utilizzare e li hanno combinati insieme attraverso il prodotto, perché suggerito dal calcolo dell'area, come afferma l'alunna nella seguente intervista.

Pr2: "Devo calcolare l'area della macchina... Faccio $65 \times 10 = 650$ "

I: "Mi potresti spiegare meglio quale ragionamento hai seguito per arrivare a questa risposta?"

Pr2: "Sì... ho 65 (nel testo) e 10 qui in figura, devo calcolare l'area... faccio la formula dell'area 65×10 ."

I: "Qual è il grado di sicurezza della tua risposta?"

Pr2: "Sono sicura."

In questa fase, è emersa un'altra implicatura ricorrente, ovvero che per risolvere un problema, bisogna utilizzare tutti e soli i dati numerici presenti nel testo. Tale idea sembra essere incoraggiata da una pratica didattica e da libri di testo, che propongono *falsi* problemi. Questa convinzione sembra guidare gli studenti ad utilizzare i due dati, 65 e 10, come misure dei lati del rettangolo attorno alla macchia.

Lc1: "Devo calcolare l'area... io ho fatto un rettangolo che approssima questa figura, perché mi serve una stima dell'area... devo fare base per altezza, questi lati sono 65 e 10... devo fare $65 \times 10 = 650$ "

I: "Come hai capito che i due lati hanno quelle misure?"

Lc1: "Sono gli unici che il testo mi fornisce."

Inoltre, essa sembra la causa per cui gli studenti cercassero conferma circa la correttezza della loro risposta durante lo svolgimento della prova: dalle interviste è emerso che molti di loro si sentono a disagio ed in difetto perché vorrebbero usufruire di tutti i dati, come possiamo osservare dalla seguente intervista.

Ll1: "Ho costruito un rettangolo attorno alla macchia e ho misurato i lati col righello... poi ho fatto base per altezza... ma non sono sicura."

I: "Da cosa deriva la tua insicurezza?"

*Ll1: "Perché **non ho usato 65.**"*

Come in molte altre interviste, gli studenti erano perplessi ed insicuri sulla correttezza della loro soluzione (tra l'altro corretta) e per tal motivo non hanno fornito la spiegazione della strategia utilizzata durante lo svolgimento della prova.

It1: "Ho misurato i lati del triangolo e ho fatto base per altezza."

I: "Come mai non lo hai scritto qui sotto?"

It1: "Non pensavo fosse giusto e non lo ho scritto. Non ero sicura, non si fanno mai."

It2: "Io ho costruito un rettangolo attorno alla macchia e ho lasciato fuori questo pezzettino... Poi con il righello ho visto quante sono le misure e ho usato la formula dell'area del rettangolo."

I: "Come mai non lo hai scritto in classe?"

It2: "Mi sembrava poco matematico, non preciso... pensavo ci fosse una spiegazione più precisa."

Da questo ultimo esempio di intervista, possiamo notare come gli studenti abbiano una visione della matematica come una disciplina esatta e rigida. Un'altra motivazione della mancata spiegazione della strategia utilizzata all'interno dei fascicoli è dovuta al fatto che gli alunni hanno ritenuto la costruzione grafica una giustificazione sufficiente.

Per far cadere questa implicatura, abbiamo chiesto se tutti i dati fossero utili: molti dei ragazzi, soprattutto dei Licei e dei Tecnici, hanno focalizzato l'attenzione sulla figura, ed in particolare sulla macchia, giungendo anche alla soluzione del quesito, ribadendo l'abitudine a risolvere esercizi i cui dati sono tutti da adoperare.

I: "Ritieni che il dato 65 sia utile per la risoluzione del quesito?"

Lc2: "Penso di sì, se lo hanno messo penso di doverlo usare... È stato messo per deviarci?"

I: "Prova a pensarci se può essere più o meno utile." Silenzio

Lc2: "Forse non è utile... nella figura c'è 1cm corrisponde a 10km, potrei usare il righello per misurare i lati." [...]

I: "Qual è il grado di sicurezza circa il tuo modo di procedere?"

Lc2: "Sono abbastanza sicura [...] in classe ho fatto 65×10 perché pensavo di dover utilizzare tutti i dati."

I: "Come mai?"

Lc2: "Perché generalmente un esercizio fornisce tutte le informazioni essenziali per la risoluzione."

Durante le interviste condotte con studenti dell'Istituto Professionale, sono emerse con maggiore forza le difficoltà legate alla comprensione del testo. In particolar modo è emersa una carenza di dizionario: molti studenti non sono a conoscenza del significato del verbo stimare, o quantomeno lo interpretano come "calcolare esattamente" in questo particolare contesto; interpretazione forse forzata da convinzioni legate al fare matematica. In molti casi è stata la causa esplicita dell'abbandono del tentativo di risoluzione del quesito. Come possiamo constatare dal seguente dialogo, gli alunni ritengono di dover calcolare un'area esatta.

I: "Ciao. Potresti leggere la domanda e dirmi con tue parole cosa ti viene chiesto?"

Pr3: "Devo stimare l'area della macchia di petrolio...Noi in classe non abbiamo mai fatto l'area di questa figura. Non so quale formula applicare."

I: "Cosa significa stimare?"

Silenzio, l'alunno non risponde.

Pr3: " Devo calcolare l'area."

I: "Ma in modo preciso o approssimato?"

Pr3: "Preciso"

Dopo che abbiamo spiegato all'alunno che deve calcolare l'area in maniera approssimata, è riuscito, sotto la nostra guida, ad intraprendere la strada corretta.

Un altro fenomeno che abbiamo potuto confermare in questa fase è quello che molti studenti siano convinti di poter essere in grado di affrontare un quesito di matematica solo se fa riferimento a cose già viste in classe, ovvero hanno fiducia nelle loro capacità riproduttive in matematica, ma nessuna in quelle produttive. Molti ragazzi hanno infatti dichiarato di non aver svolto in classe la stima o le scale e pertanto di non poter rispondere al quesito. Possiamo osservare dalla seguente intervista, come la scarsa autostima e di conseguenza la poca sicurezza nelle proprie potenzialità, limita gli studenti nella risoluzione.

I: "Prova a leggere il testo e a dirmi con tue parole cosa ti chiede."

It3: "Questo non l'ho fatto perché non abbiamo fatto la stima."

I: "Ci proviamo ugualmente?"

L'alunno riflette sul quesito confrontandosi con l'intervistatore e riesce a fare considerazioni interessanti e giuste. [...]

It3: "In classe non ragiono tanto, con una persona dietro mi sento più sicuro. A me la sicurezza vuol dire tanto."

Poiché riteniamo che il dato fornito dal testo sia un elemento di distrazione per gli alunni, abbiamo creato una nuova versione del quesito, in cui abbiamo eliminato l'informazione sulla distanza petroliera-terra. In questa nuova formulazione, gli studenti intervistati hanno prestato maggiore attenzione al dato presente nell'immagine ed alcuni di loro hanno riflettuto sull'utilizzo della scala fornita, come se la vedessero per la prima volta (a testimonianza degli studi citati nell'analisi a priori).

Ls1: "Devo calcolare questo qui... In che senso 1cm corrisponde a 10km? Devo usare il righello? Lo prendo..."

Ll2: "Devo stimare l'area... Che figura è...forse con rettangolo... Mi dice che 1cm sono 10km... Dove sono i quadratini? Non so da dove partire... Se divido tutta la figura in quadratini potrei misurare l'area dei quadrati che prendono la figura." [...]

I: "Qual è il tuo grado di sicurezza sul tuo modo di procedere?"

Ll2: "Penso sia giusto... il testo mi dice di usare i centimetri."

Ovviamente questo non sempre si è verificato, spesso gli studenti hanno combinato i dati, come ad esempio 10 e il 2 dei chilometri quadrati (sempre a causa dell'approccio per dati ed operazioni), oppure hanno concluso che mancassero i dati.

Pr4: "Secondo me mancano i dati, perché non dice niente sulla macchia."

I: "Leggi bene il testo."

Pr4: "Non lo so come farlo."

I: "Potremmo usare questa scala?"

Pr4: "In che modo? Se faccio tanti segmenti di un centimetro attorno alla macchia... però ti mancano altri dati per calcolare l'area."

Dalle analisi condotte possiamo quindi constatare come gli alunni partecipanti ritengano tutti i dati forniti dal testo elementi necessari al fine di risolvere un quesito, convinzione maturata a causa di esperienze simili durante la carriera scolastica, ma anche che essi siano reperibili solo all'interno del testo. Queste osservazioni mostrano l'importanza, dal punto di vista didattico, di lavorare sia sul calcolo di area non regolari, ma anche su *veri problemi e non su esercizi*, dove tutti e soli i dati numerici sono necessari per trovare la soluzione.

5.2.2. Analisi delle interviste del quesito 1.2: Classifiche

Nell'analisi dei protocolli del quesito "Classifiche", abbiamo ipotizzato che gli studenti avessero consuetudine a cimentarsi in prove dove è richiesta la lettura e l'interpretazione dei dati forniti in un istogramma. Durante le interviste abbiamo constatato che l'alta percentuale di risposte corrette non dipende dal fatto che il quesito sia a scelta multipla, ma dal fatto che gli alunni hanno buone competenze nella lettura di grafici. Gli intervistati hanno dichiarato di avere acquisito tali competenze nella scuola secondaria di primo grado, come possiamo comprendere dalla seguente intervista:

I: "Da cosa dipende, a tuo parere, il fatto che avete risposto quasi tutti correttamente?"

Lc1: "Almeno io, alle medie, ho fatto tantissimi esercizi così e questo è tipo quelli che ho fatto. Poi non è difficile, basta guardare la figura e si capisce."

Per alcuni studenti invece la buona riuscita è dovuta alla preparazione, svolta a scuola, per affrontare la prova INVALSI: infatti, nello stesso periodo in cui abbiamo somministrato la nostra prova, i quindicenni hanno dovuto affrontare la prova nazionale.

I: "Da cosa dipende, a tuo parere, il fatto che avete risposto quasi tutti correttamente?"

It1: "Abbiamo fatto qualche esercizio per l'INVALSI e tra quelli c'erano alcuni tipo questo."

Alcuni alunni invece non sono riusciti a motivare adeguatamente il loro successo.

I: "Da cosa dipende, a tuo parere, il fatto che avete risposto quasi tutti correttamente?"

It2: "Non lo so... a me non sembra difficile, basta vedere sul grafico le informazioni."

In questa fase abbiamo confermato la nostra ipotesi sull'item cinque, ovvero che la principale causa di errore fosse legata alla scarsa comprensione della domanda, ed in particolare, alla presenza della parola *volume*: essendo in un contesto matematico, gli studenti interpretano tale vocabolo con il significato di estensione di un solido.

Da questo esempio emerge anche che gli alunni hanno la convinzione che un problema di matematica sia da risolvere univocamente attraverso conti (in questo caso con il calcolo di un volume) e non attraverso considerazioni qualitative.

Pr1: "Qui non capisco cosa significa la domanda... cioè... cosa significa volume di vendite? Come faccio a calcolare il volume?"

I: "Prova a leggere bene la domanda."

Pr1: "Mi chiede qual è il volume di vendite, ma non so di cosa calcolarlo."

Tuttavia, anche chi ha avuto una comprensione parziale del testo è riuscito a rispondere correttamente, come già avevamo supposto in sede di analisi dei protocolli:

III: “Non ho ben capito qui, non ho capito volume di vendite, però poi andando avanti ho letto tendenza negativa e allora ho disegnato una retta sul grafico che toccasse tutte le colonne dei Canguri Mannari e ho visto che se ci fosse stata la colonna di luglio si sarebbero toccati circa a 370”

I: “Qual è il tuo grado di sicurezza?”

III: “Penso sia giusto perché c'è scritto tendenza negativa, ma non capisco volume di vendita.”

Possiamo perciò affermare che gli studenti del nostro campione hanno buone competenze nella lettura dei grafici. In particolar modo possiamo anche osservare che tali competenze siano abbastanza stabili una volta acquisite, come nel caso della studentessa che attribuisce il suo successo all'insegnamento avuto alla scuola secondaria di primo grado. Inoltre la difficoltà nell'ultime item è legata non ad aspetti matematici, ma ad aspetti di comprensione del testo.

5.2.3. Analisi delle interviste del quesito 1.3: Noleggio di DVD

Dall'analisi dei protocolli, condotte nel capitolo precedente, è emerso che i principali errori nel primo item del quesito "Noleggio di DVD" sono legati alla gestione del dato relativo al costo della tessera, pertanto abbiamo voluto indagare da cosa essi dipendessero.

Durante le interviste abbiamo osservato che gli studenti prestano una maggiore attenzione ai dati forniti in tabella e meno a quelli forniti dal testo ad una prima lettura, di conseguenza hanno solo una comprensione parziale di ciò che viene chiesto loro. Infatti, dopo esser stati invitati a rileggere la domanda, gli alunni pongono una attenzione maggiore che li aiuta a comprendere meglio la richiesta e a fornire la soluzione corretta, come possiamo osservare dal seguente dialogo.

Ls1: "Devo calcolare quanto spende Marco senza la tessera. faccio $52,50:2,50$ e trovo quanti DVD ha noleggiato e il risultato lo moltiplico per $3,20$, posso usare la calcolatrice?"

I: "Prova a rileggere nuovamente il testo." [...]

Ls1: "Ho sbagliato. Devo fare $52,50-10$ [...]"

I "Cosa ti ha fatto cambiare idea?"

Ls1: "Mi sono scordato che c'è anche il 10."

I: "Sei più o meno sicuro della tua risposta?"

Ls1: "Sono sicuro adesso, perché prima avevo dimenticato il 10, non l'avevo visto."

I ragazzi infatti leggono la domanda una prima volta in maniera superficiale, non facendo attenzione a tutti i dati forniti, al contrario, con una lettura più attenta, si accorgono dell'errore commesso. La lettura superficiale del testo è la causa anche di coloro che hanno aggiunto nuovamente il costo della tessera, come mostrato nel capitolo precedente, infatti durante l'intervista singola hanno risolto correttamente l'item.

Di natura diversa sono le problematicità emerse nel secondo item del quesito: indipendentemente dall'attenzione che lo studente pone nel leggere la domanda, le interviste hanno confermato quanto ipotizzato nell'analisi dei protocolli, ovvero che le difficoltà incontrate sono legate ad aspetti linguistici. Questo tipo di problema si è verificato perché il testo si presta ad una duplice interpretazione e la rilettura dell'intera domanda non ha permesso agli intervistati di comprendere meglio o di interpretarla in modo corretto, come possiamo osservare in questi pezzi di intervista.

I: "Potresti leggere ora la seconda domanda e dirmi, con tue parole, cosa ti viene chiesto?"

Lc1: "Mi viene chiesto di dire quanti dvd servono per coprire 10 zed."

I: "Cosa significa coprire 10 zed?"

Lc1: "Dire quanti dvd servono per spendere 10 zed."

I: "Prova a rileggere la domanda." [...]

Lc1: "Secondo me, poi magari sbaglio, significa fare il conto di quanti dvd al prezzo di un tesserato possono raggiungere 10 zed."

I: "Potresti leggere ora la seconda domanda e dirmi, con tue parole, cosa ti viene chiesto?"

Ll1: "La tessera ha un costo ed i dvd un altro. Devo prendere almeno 4 dvd per coprire il costo della tessera."

I: "Cosa significa coprire il costo della tessera? Prova a rileggere il testo." [...]

Ll1: "Riprenderci i soldi che ho speso per la tessera. Io capisco che con un calcolo devo coprire il costo della tessera."

I: "Potresti leggere ora la seconda domanda e dirmi, con tue parole, cosa ti viene chiesto?"

Pr1: "Quanti dvd devo comprare nel rientrare nella tessera. Ad esempio se ne compro 3 ci rimetto 2,50."

I: "Prova a rileggere la domanda."

Pr1: "Sì, una volta che hai la tessera quanti dvd devi prendere in modo da rientrarci. Ad esempio se una azienda che ha 50.000 euro di costi per produrre, quanto prodotto deve produrre per rientrarci?"

Da questi esempi appare chiaramente che la frase "coprire il costo della tessera" si presta ad una doppia interpretazione: gli studenti ritengono di dover contare il numero di dvd necessari per spendere 10 zed se si è tesserati, invece di contare il numero di dvd necessari per riprendere il costo della tessera. Grazie alle interviste, abbiamo potuto confermare la nostra ipotesi, ovvero che i ragazzi concentrano la propria attenzione sul verbo coprire, sul sostantivo tessera e cercano di combinare i dati insieme, senza rappresentarsi la situazione descritta, poiché forse non abituati a farlo. Per tal motivo, dopo averli invitati a rileggere il testo, è stato chiesto agli alunni di immaginarsi la situazione descritta e di riflettere su una possibile interpretazione della domanda del secondo item. In alcuni casi, la contestualizzazione nel mondo reale ha portato sulla buona strada il risolutore.

I: "Prova ad immaginare la situazione descritta dal testo. Potrebbe avere un diverso significato la domanda?" [...]

Lc1: "Vedere quando può trovare beneficio dal farsi un abbonamento? Tipo sopra con 17 dvd spende di meno con la tessera... Provo con 16?" [...]

I: "Cosa ti ha fatto cambiare idea?"

Lc1: "Ho immaginato la situazione e ho guardato anche la domanda uno e ho capito..."

I: "Prova ad immaginare la situazione descritta dal testo. Potrebbe avere un diverso significato la domanda?" Silenzio

LlI: "No, non penso."

I: "Mi spiegheresti il funzionamento della tessera?"

LlI: "Comprando la tessera ho diritto ad uno sconto. Se non sei tesserato e compri quattro dvd spendi... 12,8 zed, mentre se sei tesserato 10 zed.... Più 10 zed della tessera iniziale.

Ah ho capito! Così risparmio 9 zed circa. Devo trovare il numero di dvd per cui diventa più caro non fare la tessera. [...]"

I: "Sei più o meno sicuro della tua risposta?"

LlI: "Ho sbagliato in maniera eclatante in classe, sono sicuro adesso. Non avevo pensato a come funzionava il noleggio."

I: "Prova a rileggere il testo, potrebbe avere un altro significato? Prova ad immaginarti la situazione."

ItI: "Non saprei... Devo capire quando ho una agevolazione?" (l'alunna cerca conferma)

I: "Prova a pensarci."

ItI: "Considerando che è un problema reale forse farei il conto di quando ho l'agevolazione, più che fare 10 diviso 4. Posso usare la calcolatrice?" [...] (l'alunna procede per tentativi)

I: "Qual è il grado di sicurezza sul tuo modo di procedere?"

ItI: "Non lo so, penso sia giusto adesso. [...] Però io non ci sarei mai arrivata."

Tuttavia, non tutti gli intervistati sono riusciti a cogliere il vero significato della domanda, a causa di una carente conoscenza enciclopedica. Un numero considerevole di studenti ha dichiarato di non avere dimestichezza con il noleggio di dvd, a causa della facile reperibilità di film sul web.

I: "Potresti spiegarmi come funziona il noleggio in questo negozio?"

PrI: "Compri la tessera e nei 10 zed hai compreso quattro dvd, cominci a pagare i dvd dal quinto."

I: "Hai mai noleggiato un dvd?"

PrI: "No, mai. Li scarico"

Osserviamo infatti che per comprendere un testo non basta conoscere il significato delle parole presenti. La comprensione del testo presuppone sempre in chi legge una certa conoscenza delle cose del mondo, necessaria per riconoscere gli impliciti presenti: si tratta della conoscenza enciclopedica, che richiama nella memoria del lettore situazioni già vissute in passato. In effetti, come possiamo osservare dalle interviste riportate, alcuni dei ragazzi, che non sono riusciti ad immaginarsi la situazione, hanno dichiarato di non aver

mai avuto esperienze simili. La conoscenza enciclopedica è quindi importante ai fini della risoluzione dei quesiti ambientati in un contesto reale, ed inoltre fornisce una certa sicurezza al risolutore. A testimonianza di quanto detto, riportiamo uno stralcio di intervista ad uno studente, che nella prima fase del nostro lavoro ha svolto correttamente l'item.

I: "Potresti leggere il testo e dirmi con tue parole cosa ti viene chiesto?"

L12: "Ah sì, me lo ricordo, questo l'ho fatto giusto sono sicuro!"

I: "Come mai sei così sicuro?"

L12: "Perché ho una tessera simile...ho fatto varie prove e con 15 veniva di meno."

(Lo studente ha fatto vari tentativi in classe e ha osservato che con 15 DVD la spesa da abbonato, con il costo della tessera, è inferiore a quella di chi non è abbonato)

A seguito dell'analisi dei protocolli, abbiamo modificato il secondo item del quesito, per cercare di identificarne l'ambiguità: poiché riteniamo che essa sia da ricercare principalmente nel verbo "coprire", abbiamo inserito due quesiti ed abbiamo utilizzato il verbo "convenire". Riteniamo infatti che tale verbo richiami subito l'idea di risparmiare e di spendere meno e che tale formulazione non si presti ad una duplice interpretazione. Supponiamo inoltre che la nuova proposta sia accessibile anche a coloro che non hanno una conoscenza enciclopedica. Riportiamo sotto il testo modificato.

NOLEGGIO DI DVD

Gina lavora in un negozio che noleggia DVD e giochi per il computer.

In questo negozio la tessera annuale costa 10 zed.

Il prezzo per il noleggio dei DVD ai tesserati è più basso del prezzo praticato ai non tesserati, come si può vedere nella tabella qui sotto:

Prezzo per il noleggio di un DVD ai non-tesserati	Prezzo per il noleggio di un DVD ai tesserati
3,20 zed	2,50 zed

Item 1:

Marco lo scorso anno si era tesserato presso il negozio che noleggia i DVD.

E, sempre durante lo scorso anno, ha speso 52,50 zed in totale, incluso il costo della tessera.

Quanto avrebbe speso Marco se non avesse avuto la tessera e avesse noleggiato lo stesso numero di DVD?

Numero di zed:

.....
.....

Item 2:

Se una persona sa di noleggiare in un anno 5 DVD risparmia a fare la tessera o spende di più?

.....
.....

Item 3:

Qual è il numero minimo di DVD, che una persona deve noleggiare in un anno, affinché sia conveniente fare la tessera?

.....
.....

Abbiamo proposto il quesito modificato durante le interviste in ogni tipologia di scuola e tutti i ragazzi hanno risolto correttamente i due nuovi item proposti. Molti di loro, che non erano riusciti ad immaginarsi la situazione, hanno osservato la similitudine tra i due item, quello “vecchio” della prima versione e quello “nuovo” della modifica, mostrando che le difficoltà non sono di natura matematica, ma legate ad aspetti linguistici. Inoltre, gli intervistati hanno dichiarato che l’uso della parola conveniente ha permesso loro di capire meglio il significato dell’item, come possiamo notare dai seguenti pezzi di intervista.

Lc2: “[...] Significa quanto ci guadagno per coprire quel costo lì al posto di non farla... cioè... quanti dvd servono per riprendere quei 10 euro... A primo impatto sembra che dica quanti dvd servono per arrivare a 10 euro, invece dovrebbe essere il numero minimo per riprendere i 10 euro, quando gli conviene.”

I: “Da cosa ti è stato suggerito?”

Lc2: “La domanda quando è conveniente.”

I: “Qual è il tuo grado di sicurezza circa l’equivalenza delle due domande?”

Lc2: “Sono sicura che siano uguali come senso.”

Da questo esempio, possiamo anche dedurre come, attraverso l’uso della parola euro, al posto di zed, la studentessa si stia immedesimando nella soluzione descritta.

[...] Ls2: *“Sì, certo queste due domande hanno lo stesso significato. Ho sbagliato prima. Avevo capito di dire quanti dvd devo comprare per arrivare a 10 che è il costo della tessera. Invece significa quando diventa utile prendere la tessera. Bisognava capire bene il significato di coprire il costo della tessera.”*

I: *“Come lo hai capito?”*

Ls2: *“Da conveniente, ho capito che dovevo vedere se mi conveniva prendere la tessera o no.”*

lo studente ha risolto correttamente il nuovo quesito modificato. [...]

It2: *“Ah forse anche qui (vecchia versione), se so che ne prendo tanti (di dvd) mi conviene fare la tessera, altrimenti no. Ma quanti tanti? Devo fare come prima.”*

It3: *“Sono simili, anzi sono uguali. Quanto sono i dvd per ripagare il costo... devi confrontare se non avessi avuto la tessera. Questa domanda (la versione modificata) è più ampliata e spiega meglio. Ho cambiato idea perché ho capito che devi vedere quale conviene.”*

Alcuni ragazzi invece sono rimasti convinti e sicuri del fatto che la richiesta delle due domande fosse ben diversa, come emerge da questo pezzo di intervista.

Ls3: *“Come significato è diverso perché non chiede (nella prima domanda) quanti DVD servono affinché sia conveniente prendere la tessera, ma chiede quanti DVD servono per coprire il costo della tessera. Vedi qui (indica il testo) c'è scritto coprire e si intende se la tessera l'ho pagata 10, mi chiede di spendere 10 zed con 2,50 zed e non con 3,20.”*

[...] Pr2: *“Secondo me (le domande) chiedono due cose diverse. Rimango dello stesso pensiero perché qui (la vecchia versione) è il minimo per coprire 10 zed, contare quanti servono (di dvd) per arrivare a quella cifra, invece qui è dire se conviene aver fatto la tessera ad inizio anno.”*

I: *“Qual è il grado di sicurezza sul tuo modo di procedere.”*

Pr2: *“Sono sicura, basta leggere il testo, si capisce. Non mi sembra difficile questo esercizio.”*

[...] Pr3: *“Per me non sono uguali.”*

I: *“Come mai?”*

Pr3: "Non cambio idea, il fatto è che dice quanto devo coprire non è che dice se conviene di meno o di più."

Appare, dalle interviste, che l'abitudine a risolvere esercizi prestando attenzione solo ai dati numerici e cercando qualche parola chiave che suggerisca come combinarli, conferisca una certa sicurezza agli studenti nella soluzione fornita, inibendo ogni capacità di analisi a posteriori circa l'equivalenza delle due formulazioni del quesito.

Pertanto dall'analisi dei protocolli e dalle interviste evidenzia che alcune delle difficoltà sono legate alla comprensione del testo e ad aspetti linguistici, comprensibile in questo caso data l'ambiguità della domanda. Inoltre emerge che l'influenza della conoscenza delle cose del mondo guida l'allievo alla risoluzione dell'item.

Queste interviste evidenziano l'importanza, dal punto di vista didattico, di interpretazioni fini delle cause di errore in questo tipo di prove. Nello specifico, l'insegnante che volesse intervenire dovrebbe lavorare sull'interpretazione di testi matematici.

5.2.4. Analisi delle interviste del quesito 1.4: Garage

A seguito dell'analisi dei protocolli del quesito "Garage", abbiamo ipotizzato che la principale causa di errore fosse legata alla comprensione ed all'interpretazione dell'immagine fornita; pertanto in questa seconda parte del nostro lavoro, abbiamo cercato di verificare la nostra ipotesi.

Osservando i quindicenni nella risoluzione del secondo item, abbiamo inizialmente notato che, durante la lettura del testo, essi focalizzano l'attenzione più sulla figura, in cui sono presenti i dati numerici, che ai suggerimenti forniti, quasi omettendo la lettura della didascalia "visione frontale/laterale" o della forma del tetto. D'altronde questo tipo di atteggiamento è già stato evidenziato nell'analisi del quesito "Noleggio di DVD". Indipendentemente dall'attenzione con cui gli studenti affrontano l'item, dalle interviste è emerso che, come già ipotizzato, le difficoltà riguardano l'errata comprensione della figura: ad una prima lettura, gli studenti ritengono di dover calcolare l'area del tetto della visione frontale,

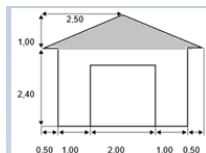
I: "Potresti leggere il testo e dirmi, con tue parole, cosa ti sta chiedendo?"

Lc1: "Devo calcolare l'area del tetto. [...] Devo calcolare l'area di questo (indica il triangolo) e uso la formula dell'area del triangolo."

I: "Prova a rileggere la domanda. Potresti indicarmi il tetto del garage?"

Silenzio

Lc1: "Questo è il tetto. Quale altro potrebbe essere? Questa è la porta e questo è il tetto."



I: "Potresti leggere il testo e dirmi, con tue parole, cosa ti sta chiedendo?"

Ls1: "Devo calcolare l'area del tetto. Lo faccio?" [...] "La base è 1+2+1+1, l'altezza 1... misura 2,5"

I: "Come mai ritieni che quello sia il tetto?"

Ls1: "In una casa, la parte triangolare rappresenta il tetto."

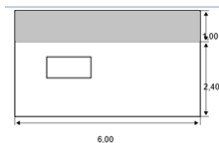
Oppure della visione laterale,

I: "Potresti leggere il testo e dirmi, con tue parole, cosa ti sta chiedendo?"

It1: "Calcolare l'area del tetto. (Legge il testo nuovamente) Devo fare $6 \times 1 \times 2$."

I: "Provi a spiegarmi cosa hai fatto?"

It1: "Il tetto è composto da due parti rettangolari... Calcolo l'area di questo (indica il rettangolo in alto nella visione laterale) che è 6 e poi moltiplico per 2."



Da questi esempi, appare come gli alunni siano guidati dal modello intuitivo del tetto, visto come parte superiore in un disegno, che conferisce loro una certa sicurezza: infatti, gli intervistati rimangono meravigliati alla richiesta di indicare il tetto, come se fosse una domanda sciocca. Non sempre la rilettura del testo ha permesso di cogliere la richiesta del testo, anzi, in molti casi ha deviato gli studenti verso interpretazioni fantasiose. A titolo d'esempio, riportiamo qualche stralcio di intervista.

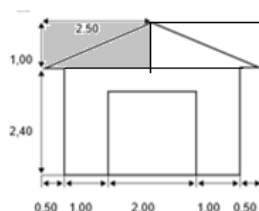
Pr1: "Faccio base per altezza e trovo l'area."

I: "Prova a rileggere il testo con più attenzione."

Pr1: "...due parti rettangolari..."

Lo studente costruisce un rettangolo attorno al triangolo della visione frontale e lo divide a metà.

Pr1: "Questo rettangolo e questo rettangolo...sì sono uguali... ho capito devo calcolare l'area di questi due."



Pr2: "Devo calcolare l'area del tetto." Lo studente procede nel calcolare l'area della parte triangolare della visione frontale.

I: "Prova a rileggere il testo." [...]

Pr2: "Ho sbagliato" Lo studente procede a calcolare l'area della parte rettangolare superiore della visione laterale.

I: "Cosa ti ha fatto cambiare idea?"

Pr2: "Rilegendolo ho visto che il tetto deve essere un rettangolo."

Pr3: "Devo calcolare l'area del tetto." Lo studente procede nel calcolare l'area della parte triangolare della visione frontale.

I: "Prova a rileggere il testo." [...]

Pr3: *“Siccome la casa è disegnata in questo modo pensavo di dover calcolare questo... Non capisco il ragionamento, non capisco quali sono le due parti rettangolari identiche. Dove sono?”*

I: *“Prova a pensare a cosa corrispondono nel garage.”*

Silenzio

Pr3: *“No, non lo so.”*

I: *“Prova a leggere nuovamente il testo.”*

Lc1: *“Giusto, ci sono due parti del tetto, una davanti che è questa (sempre indicando la visione frontale) ed una dietro che non si vede.”*

I: *“Qual è il tuo grado di sicurezza?”*

Lc1: *“Alto, secondo me è giusto. Avevo dimenticato di aggiungere il dietro.”*

Infine c'è chi ritiene di dover sommare le aree dei due presunti tetti.

It2: *“Devo calcolare l'area. (della visione frontale) Allora... $5 \cdot 1/2$, posso usare la calcolatrice?” [...]*

I: *“Prova a rileggere tutta la domanda.” [...]*

It2: *“Devo aggiungere anche questo?”* La studentessa ritiene di dover aggiungere l'area del rettangolo della parte superiore della visione laterale.

I: *“Prova a pensare.”*

It2: *“Sì, dice che è composto da due parti.”*

I: *“Qual è il tuo grado di sicurezza?”*

It2: *“Non sono molto sicura.”*

I: *“Come mai?”*

La studentessa non riesce ad esprimere le sue perplessità.

It2: *“bo...non lo so... Allora perché hanno messo questa? (intende la visione frontale) Non capisco.”*

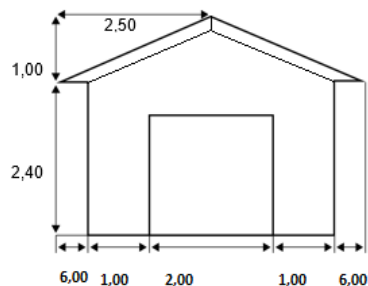
Durante le interviste, come nell'ultimo esempio, molti studenti, in particolar modo dell'Istituto Tecnico e dei Professionali, hanno mostrato difficoltà ad esprimere i propri dubbi o concetti e molto spesso hanno concluso l'intervista con semplici *“non lo so”*, *“non saprei”*. Questo è stato per noi un limite perché non siamo riusciti a cogliere a pieno quali fossero gli elementi difficoltà degli alunni, ma ci suggerisce anche le loro problematicità nell'esprimersi e nell'argomentare.

In questa fase del nostro lavoro, non siamo riusciti a cogliere a pieno il vero motivo delle principali difficoltà degli studenti, perciò ritenendo che esse fossero dovute alla gestione dei dati forniti dalle due immagini e dal testo, abbiamo creato una nuova versione del quesito, in cui apparisse una sola figura, che potesse racchiudere sia la visione frontale che laterale. Le prime interviste sono quindi servite per imbastire le altre interviste.

Riportiamo la nuova versione del secondo item.

Item 2:

La piantina qui sotto indicano le dimensioni, in metri, del garage scelto da Giorgio



Il tetto è composto da due parti rettangolari identiche.

Calcola l'area **totale** del tetto.

Questa nuova proposta di quesito in realtà ha evidenziato le stesse problematiche, che già abbiamo notato nelle interviste precedenti, ovvero che il modello intuitivo guida maggiormente gli studenti e che essi sono più attenti ai dati numerici che ai suggerimenti forniti dal testo. I ragazzi hanno cercato di calcolare, con scarso successo, l'area delle due strisce inserite attraverso l'uso dell'area del trapezio e spesso non sono riusciti a cogliere il suggerimento della forma rettangolare. Vediamo a titolo di esempio due interviste con studenti del professionale.

I: "Potresti leggere il testo e dirmi, con tue parole, cosa ti sta chiedendo?"

Pr3: "Devo calcolare l'area del tetto."

I: "Potresti indicarmi quale è il tetto del garage?"

La ragazza indica le due strisce oblique.

Pr3: "Devo calcolare l'area di questi... sono trapezi... mi manca la base"

I: "Leggi bene il testo. Sei sempre convinta che siano due trapezi?" [...]

Pr3: "Sì. Sono due trapezi... mancano le misure"

La studentessa disegna un triangolo retto per calcolare la "base minore" del trapezio.

I: "Questo lato lo posso calcolare... come è la formula dell'area?"

I: "Potresti leggere il testo e dirmi, con tue parole, cosa ti sta chiedendo?"

Pr4: "L'area del tetto."

I: "Potresti indicarmi quale è il tetto del garage?"

Il ragazzo indica le due strisce oblique.

Pr4: "Devo calcolare l'area dei trapezi."

I: *“Leggi di nuovo il testo.”*

Pr4: *“Sono rettangoli? Ma... come fanno ad essere rettangoli?”*

Abbiamo avuto quindi la sensazione che questa modifica fosse stata fallimentare, ma a seguito di un colloquio con una ragazza, che frequenta il liceo linguistico e che aveva svolto correttamente il quesito durante la prima fase del nostro lavoro, abbiamo riflettuto sul fatto che una possibile causa di errore potesse derivare da una mancanza di collegamento tra l'immagine tridimensionale e la piantina fornita nel secondo item: la nostra ipotesi è che gli studenti non abbiano una visione d'insieme di tutto il quesito (immagini comprese). Riportiamo dunque lo stralcio di intervista avuto con la studentessa.

III: *“Allora... Devo calcolare l'area del tetto del garage, allora... (gira il foglio e guarda l'immagine tridimensionale) Devo calcolare l'area del tetto, che è questa parte qui e la parte dietro che non si vede... mi serve questa misura e questa (la studentessa indica sempre la figura tridimensionale) che corrispondono a questo lato e questo lato (indica la visione laterale e frontale). Questo lo trovo con Pitagora, questo è 6 [...]*

I: *“Qual è il tuo grado di sicurezza?”*

III: *“Sono sicura. Poi sono abituata a leggere questi disegni.”*

I: *“Come mai? Fate esercizi di questo genere in classe?”*

III: *“No, mai. Ma a casa con i miei genitori sto costruendo una casa.”*

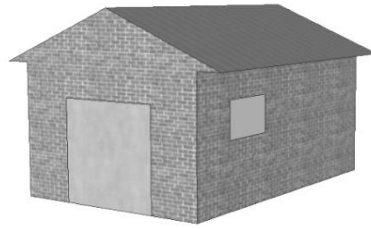
Indipendentemente dalla conoscenza enciclopedica che possiede la ragazza, di cui abbiamo già parlato nel paragrafo precedente, il fatto che la studentessa avesse ragionato sull'immagine tridimensionale ci ha suggerito di modificare il quesito unendo le immagini in un'unica pagina. In effetti, durante le interviste precedenti, i quindicenni non avevano mai riflettuto sull'immagine tridimensionale del garage, come se la avessero omessa, ma solo univocamente sul secondo item: come abbiamo osservato precedentemente, anche attraverso domande stimolo come quella di indicare il tetto del garage, tutti hanno indicato quello che loro ritenevano essere una possibile soluzione nella visione frontale o laterale. L'impressione che abbiamo avuto è che i quindicenni non riuscissero a vedere l'item nella sua più completa generalità, come se il quesito fosse composto da tre richieste una indipendente dall'altra.

Riportiamo qui sotto il nuovo quesito che abbiamo proposto durante le interviste successive.

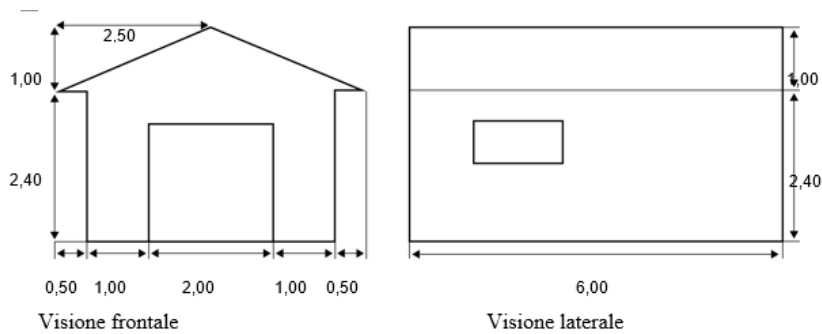
GARAGE

La gamma “base” di un costruttore di garage comprende modelli che hanno solo una finestra e una porta.

Giorgio sceglie il seguente modello dalla gamma “base”. La posizione della finestra e della porta sono illustrate qui sotto.



Le due piantine qui sotto indicano le dimensioni, in metri, del garage scelto da Giorgio.



Il tetto è composto da due parti rettangolari identiche.

Calcola l'area **totale** del tetto.

Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....

Grazie alla nuova proposta, molti degli intervistati sono riusciti ad intraprendere una strategia risolutiva corretta, attraverso qualche suggerimento, dichiarando di non aver compreso l'item durante lo svolgimento della prova e di non aver capito che le due piantine si riferissero al disegno tridimensionale del garage. Riportiamo a titolo di esempio qualche intervista.

I: "Potresti leggere il testo e dirmi, con tue parole, cosa ti sta chiedendo?"

Lc1: "È come prima."

I: "Mi potresti indicare il tetto del garage?" l'alunno indica il tetto sull'immagine tridimensionale

Lc1: "Quindi ho sbagliato...Ad occhio uno vede questo (visione frontale) e si immagina la casa davanti... Questo misura 6 e questo invece lo devo calcolare."

I: "Qual è il grado di scurezza della tua risposta?"

Lc1: "Ora è giusto, non avevo pensato di guardare questa casa" intende l'immagine del garage

I: "Potresti leggere il testo e dirmi, con tue parole, cosa ti sta chiedendo?"

It3: "Devo calcolare l'area del tetto che è fatto da due parti rettangolari."

I: "Proviamo a farlo?"

It3: "Allora... Non ci sono i dati." Indica il garage "tridimensionale"

I: "Rileggi il testo meglio."

It3: "Che significa che questa è la visione frontale e laterale? Così è visto da davanti e così di lato no? Questo lato non so quanto misura."

I: "Pensaci un attimo come potresti trovarlo." Silenzio

It3: "Forse con il teorema di Pitagora, ma ora non me lo ricordo." dopo aver avuto il suggerimento lo studente calcola l'area

I: "Ti senti più o meno sicuro sul tuo modo di procedere rispetto a prima?"

It3: "Sono sicuro, perché prima cercavo le due parti rettangolari e non le trovavo, ora con la figura (tridimensionale) si capisce di più quali sono. Magari ripasso il teorema di Pitagora." Ride

Pr4: "Qui devo calcolare l'area totale." Silenzio

I: "Cosa stai pensando?"

Pr4: "Sto cercando le parti rettangolari identiche, ma non so dove."

I: "Mi potresti indicare il tetto del garage?"

Pr4: "Questo... Ah quindi sono questi due i rettangoli? Uno è questo è l'altro è dietro? ... sì... Ah quindi così lo vedo di lato, quindi questo corrisponde a questo nella visione laterale... devo fare $6 \times 1 \times 2$."

I: "Quindi mi stai dicendo che questo lato (sul disegno tridimensionale) misura 1?"

Pr4: "Sì se lo guardi di lato è questo..."

I: "E se lo guardi da davanti?"

Pr4: "... è questo? (nella visione frontale) Non lo so... secondo me è giusto come ho fatto."

I: "Potresti leggere il testo e dirmi, con tue parole, cosa ti sta chiedendo?"

Ll2: "Allora, devo calcolare l'area totale... Non mi ricordo la formula dell'area del parallelogramma."

I: "Perché hai bisogno della formula del parallelogramma?"

Ll2: "Questo è un parallelogramma" (indica il tetto del garage)

I: "Leggi bene il testo fino in fondo." [...]

Ll2: *“Sono rettangoli? Ah sì sono messi storti...” [...]*

I: *“Ti senti più o meno sicuro sul tuo modo di procedere rispetto a prima?”*

Ll2: *“Sì sì sono sicuro che sia giusto ora. In classe ho visto il disegno e ho calcolato l'area del triangolo, non ci avevo pensato a guardare la figura.”*

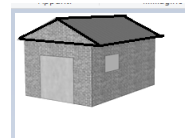
Anche in questa seconda fase, il modello intuitivo di casa sembra guidare lo studente nella risoluzione dell'item: egli ritiene il tetto come formato anche dalla soffitta.

It4: *“Devo calcolare l'area del tetto... Non mi ricordo la formula.”*

I: *“Quale formula?”*

It4: *“La formula di questo.”* Indica il parallelepipedo a base triangolare

I: *“Leggi nuovamente il testo e indicami qual è il tetto.”*



It4: *“Questo è il tetto.”* indica sempre il parallelepipedo

I: *“Come mai? Come lo hai capito?”*

It4: *“In una casa, il tetto è tutta la parte sopra, ci sono questi due (le parti rettangolari) e tutto quello sotto. Però ora non mi ricordo come è la formula.”*

I: *“Leggi il tetto bene, come è fatto il tetto?”*

It4: *“È solo la parte sopra? Sì è vero, sotto è il sotto-tetto.”*

Indipendentemente dalla correttezza della soluzione fornita, questi esempi ci mostrano come gli studenti, in questa seconda fase, riflettano sia sulle piantine fornite, ma anche sull'immagine tridimensionale, mostrando talvolta di avere buone competenze nel gestire più informazioni. Inoltre, viene confermata la nostra ipotesi che gli alunni ritengano il quesito come formato da tre item differenti l'uno indipendente dall'altro.

Infine, durante le interviste, i quindicenni hanno dichiarato di non comprendere il testo dell'ultimo item a causa di una mancata conoscenza di alcune parole (quali calcestruzzo) sia di non capire la richiesta. Riportiamo uno dei commenti più frequenti durante il colloquio con gli alunni che avevano svolto questo item durante la prima fase del nostro lavoro.

I: *“Potresti leggere il testo e dirmi, con tue parole, cosa ti sta chiedendo?”*

It5: *“Non capisco proprio cosa devo fare... cosa vuol dire calcestruzzo?”*

I: *“Ritieni che sia importante per risolvere l'esercizio?”*

It5: *“Non lo so, anche se cancello questa parola non riesco a capire cosa devo fare...”*

Porto i metri in centimetri? ... Non so cosa devo fare.”

Oltre ad una mancanza di conoscenza del dizionario, ovvero della conoscenza di alcuni termini presenti nel testo, possiamo affermare che, nel comprendere il testo, i ragazzi hanno avuto difficoltà, tra l'altro comprensibile, data la complessità della formulazione.

5.3. Le interviste agli studenti della seconda prova

5.3.1. Analisi delle interviste del quesito 2.1: Gelateria

A seguito dell'analisi dei protocolli scritti relativi a "Gelateria", abbiamo ipotizzato che una delle difficoltà dei nostri studenti non fosse legata ad aspetti puramente matematici, ma ad aspetti di interpretazione del testo nel suo complesso (testo e figura). Tale impressione è stata confermata durante le interviste, infatti molti alunni hanno dichiarato di non riuscire ad individuare il bordo esterno del bancone in figura. In alcuni casi, la "zona di servizio" è stata confusa con l'intero bancone ed il "bancone" con la sua bordatura.

Lc1: "Io penso di dover calcolare questa lunghezza, ma sinceramente non ne sono sicuro, non capisco bene quale sia la bordatura esterna del bancone."

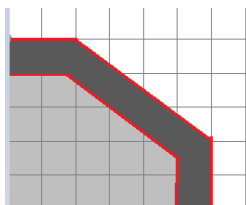
I: "Come mai?"

Lc1: "Perché se questo nero è tutto il bancone, per bordatura esterna si intende tutto il bordo e quindi il perimetro o la parte verso la porta? Cioè esterno rispetto a chi? Alla porta?"



L'aspetto che ci pare interessante è che al netto di queste interpretazioni *errate*, alcuni degli intervistati hanno calcolato correttamente le misure di ciò che scorrettamente avevano individuato essere l'oggetto di attenzione:

It1: "Devo calcolare la lunghezza della bordatura, che è questa. Devo fare due volte il teorema di Pitagora e aggiungere questi pezzi." indica il perimetro del bancone



Questa osservazione mostra l'importanza, dal punto di vista didattico, di interpretazioni fini delle cause di errore in questo tipo di prove. Nello specifico, l'insegnante che volesse intervenire dovrebbe lavorare sull'interpretazione di testi matematici, e non sul calcolo di misure di figure *non convenzionali*.

D'altra parte la scarsa attenzione al testo si riflette anche nel mancato controllo sull'interpretazione del testo. Molti studenti, come detto, si sono convinti che il bancone

fosse in realtà la bordatura e hanno risposto calcolando (correttamente) l'area del bancone.

Ora questo dal punto di vista matematico è sicuramente più complesso che calcolare la lunghezza della bordatura, d'altra parte è interessante che nessuno di loro non si soffermi sul fatto che il quesito chiede di calcolare una lunghezza. Ancor più preoccupante che anche in caso di riflessione indotta su questo aspetto, il controllo non fa mettere in discussione l'interpretazione originaria:

It2: "Devo calcolare l'area di questo."

I: "Leggi attentamente il testo." [...]

It2: "Sì, devo calcolare l'area di questo... non so come fare, che figura è?"

I: "Ti chiede una lunghezza o un'area?"

It2: "Una lunghezza. Non so come calcolare l'area della parte in obliquo."

Il tentativo di calcolare l'area è stato uno degli errori più frequenti in quasi tutte le interviste e spesso gli studenti, appositamente stimolati, non sono riusciti ad esplicitare la differenza tra lunghezza ed area.

Pr1: "Devo calcolare l'area..."

I: "L'area o la lunghezza?" Silenzio

Pr1: "Non lo so."

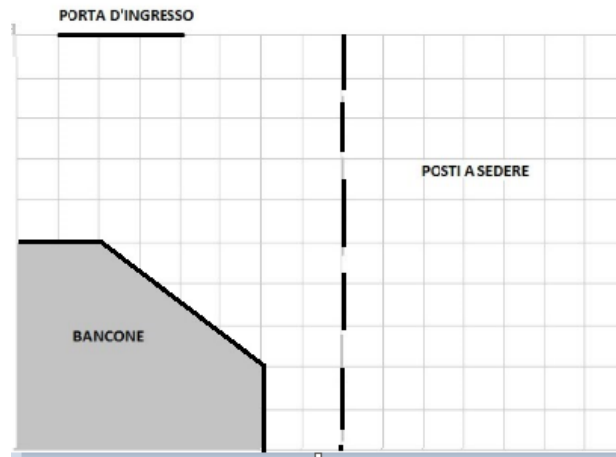
I: "Qual è la differenza tra l'area e la lunghezza?"

Silenzio

Per eliminare le ambiguità analizzate, abbiamo creato una versione modificata del quesito in cui abbiamo modificato l'immagine (e di conseguenza il testo) senza modificare l'aspetto matematico richiesto. Nella versione alternativa, riteniamo che lo studente individui con maggior facilità sia la bordatura del bancone sia la zona riservata ai posti a sedere.

GELATERIA

Ecco la piantina della gelateria di Maria. Maria sta ristrutturando il locale.



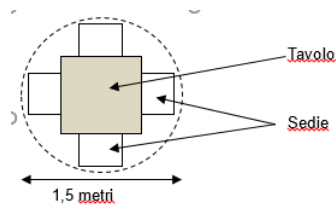
Nota: ogni quadrato sulla griglia rappresenta 0,5 metri x 0,5 metri.

Item 1:

Maria vuole applicare una nuova bordatura lungo il bancone. Qual è la lunghezza totale della bordatura di cui ha bisogno? Scrivi qui sotto i passaggi che fai per arrivare alla risposta.

.....
.....
.....

Item 2:



Maria vuole mettere nel suo locale dei moduli composti da un tavolo e quattro sedie, come quello illustrato sopra. Il cerchio rappresenta l'area necessaria per ciascun modulo. Per garantire uno spazio sufficiente ai clienti quando sono seduti, ciascun modulo, rappresentato dal cerchio, va collocato rispettando le seguenti condizioni:

- ciascun modulo va collocato ad almeno 0,5 metri dai muri.
- ciascun modulo va collocato ad almeno 0,5 metri dagli altri moduli.

Qual è il numero massimo di moduli che Maria può collocare nella zona destinata ai posti a sedere?

Numero di moduli:

Con questa nuova versione tutti gli intervistati hanno identificato quale fosse la misura da calcolare. Tuttavia, non avendo modificato l'aspetto matematico, i vari approcci per la risoluzione dell'item non sono stati differenti da quelli trovati nei protocolli. Possiamo però segnalare alcuni atteggiamenti che non erano emersi dall'analisi dei protocolli. In primo luogo nessuno studente che ha utilizzato il righello per misurare la lunghezza si è posto il problema della scala usata.

L11: "Io ho fatto così: ho visto che un quadratino è lungo 0.9 circa, che in realtà è 0.5 in figura, quindi ho misurato tutto col righello e ho riportato tutto come se fosse 0.5"

I: "Ma qual è l'unità di misura?"

L11: "Centimetri, anzi no metri, c'è scritto qui."

Altri hanno contato da quanti quadretti poteva essere formata la parte in diagonale del bancone, senza preoccuparsi che fosse una misura approssimata.

Pr2: "Allora devo misurare questa linea nera. Queste due misurano 1 ciascuna... Qui disegno delle lineette lunghe come un pezzetto di quadratino, sono 4 pezzi. Faccio $4 \times 0,5$ ed è 2...è lunga quattro metri."

I: "Ma è una misura precisa o approssimata?"

Pr2: "Penso precisa."

I buoni solutori invece hanno dichiarato di essere riusciti a risolvere correttamente il quesito grazie alla preparazione fornita alla scuola secondaria di primo grado in vista della prova INVALSI in sede d'esame di stato.

I: "Quale pensi che sia il motivo della buona riuscita tua e dei tuoi compagni?"

Lc2: "Io personalmente ho fatto tanti esercizi così alle medie per prepararmi all'INVALSI. Avevo un libro con tutti gli esercizi dei vari anni e molti erano così. Magari i miei compagni che non sono riusciti a vedere il triangolo rettangolo non si ricordavano l'esercizio... sono passati due anni. Forse se ci fossero stati trattenuti i lati sarebbero riusciti a capire che bisognava usare Pitagora."

Anche in questa circostanza, emerge la convinzione che essere bravi in matematica sia legato all'avere una buona memoria. Inoltre emerge, anche da altre interviste, che i quindicenni ritengono di avere poca dimestichezza a riconoscere figure in posizioni non standard o nascoste. Certo avremmo potuto trattenere i cateti del triangolo rettangolo, come suggerisce la studentessa, ma ciò avrebbe semplificato l'aspetto matematico di indagine. La buona riuscita sembra dovuta anche alla pratica di un rompicapo cinese, in voga in questo periodo.

I: *“Quale pensi che sia il motivo della buona riuscita tua e dei tuoi compagni?”*
It3: *“Non lo so a me non è sembrato difficile... poi a volte facciamo dei giochi così.”*
I: *“Quali?”*
It3: *“Tangram.”*
I: *“Ah. E in cosa consiste?”*
It3: *“Devi scomporre e ricomporre un quadrato.”*

Nell'analisi dei protocolli avevamo anche supposto che la principale causa di difficoltà nell'ultimo item fosse da attribuire ad un testo lungo con tante informazioni (fornite sia dal testo che dall'immagine) da tenere sotto controllo contemporaneamente. Ciò è emerso anche durante le interviste, infatti spesso gli studenti hanno letto più volte l'item per appuntare sulla piantina del locale le varie richieste.

Osservando gli alunni nella risoluzione dell'item, emerge chiaramente come essi tendono a considerare le immagini, nello specifico i moduli, come un elemento decorativo e pertanto spesso l'informazione sulla lunghezza del diametro è stata trascurata, in tutti gli indirizzi di scuola. Solo alla richiesta di leggere il testo gli studenti riescono a cogliere il dato.

Pr3: *“Devo contare quanti tavoli posso inserire qui. Allora deve essere lontano dal muro di 0,5 cioè un quadretto... aspetta che leggo di nuovo... devono essere lontani sempre di un quadretto... quanto sono grandi i tavoli? Un quadratino?”*
I: *“Leggi bene il testo.” [...]*
I: *“Parti dall'inizio.” [...]*
Pr3: *“Ah sono di 1,5... sono in tutto 4.”*
I: *“Qual è il grado della tua sicurezza?”*
Pr3: *“Alto... è giusto. [...] All'inizio non avevo proprio visto che è lungo 1,5 non lo so perché.”*

Ls1: *“Allora qui deve essere lontano dal muro, qui dentro devo mettere i tavoli...”*
Silenzio
I: *“A cosa stai pensando?”*
Ls1: *“Non so come mettere i tavoli.”*
I: *“Prova a rileggere il testo con più attenzione.” L'alunno inserisce i 4 moduli correttamente.”*
I: *“Sono sicuro. Mi sono bloccato perché non avevo letto bene il testo, poi dopo che ho riletto ho capito tutto.”*

In molte circostanze gli studenti hanno disposto solo due o tre moduli, senza chiedersi se quello fosse il numero massimo, mostrando di non fare nessun tipo di controllo sulla massimizzazione.

Ls2: *“Allora qui metto una linea per indicare che oltre non posso mettere i tavoli (Sta riportando in figura le limitazioni imposte dal testo). Ne posso mettere 3.”*

I: *“Quello è il numero massimo?”*

Ls2: *“Non lo so. Ho visto che ne posso mettere tre.”*

I: *“Ti chiede di trovare il numero massimo. Hai provato a vedere se ne puoi mettere altri?”*

Ls2: *“No.”*

L'uso del colore grigio per evidenziare la zona riservata ai “posti a sedere” è stata la causa della bassa percentuale di risposte corrette nei professionali al terzo item: molti degli studenti infatti ha ipotizzato che ci fosse un muro di separazione tra le due zone del locale, aggiungendo così una ulteriore limitazione della zona in cui inserire i moduli.

Pr5: *“Allora... devono essere lontani 0,5 dal muro.”* La studentessa disegna un rettangolo nella zona in grigio dei posti a sedere.

I: *“Come mai hai fatto un rettangolo?”*

Pr5: *“Per facilitarmi. Dice che deve essere distante 0,5 dal muro e l'ho segnato in figura.”*

I: *“Dove si trovano i muri?”*

Pr5: *“Su questi quattro lati.”*

I: *“Mi stai dicendo quindi che qui c'è un muro?”*

Pr5: *“Io ho capito così, mi pare che ci sia il muro che divide.”*

Dopo aver chiesto loro di immaginarsi la situazione ed in particolare la gelateria, tutti gli studenti hanno capito l'errore commesso, facendo talvolta anche considerazioni sull'errore compiuto in classe.

I: *“Prova ad immaginarti il locale e a pensare dove possono essere i muri.”* Silenzio

Pr5: *“No qui il muro non c'è.”*

I: *“Come mai?”*

Pr5: *“Se c'è il muro c'è anche la porta che non c'è qui. Poi se c'è il muro come fai a sederti?”* Ride

I: *“Prova ad immaginarti la situazione e a pensare dove sono i muri.”*

Ll2: *“Giusto qui il muro non c'è. In classe non avevo pensato ad immaginarmi la situazione. Non ci avevo proprio pensato.”*

Anche in questo caso si evince come spesso gli studenti prediligano una lettura selettiva del testo piuttosto che rappresentarsi la situazione richiesta. Inoltre ci suggerisce che

questo tipo di attività, in cui bisogna immaginarsi la situazione, non siano consuete nella scuola italiana.

Nella nuova versione proposta, abbiamo evidenziato la zona dei posti a sedere con una linea nera tratteggiata e tutti gli intervistati hanno risposto correttamente, cogliendo così in pieno quale fosse la causa di difficoltà dei nostri studenti. Pertanto possiamo affermare che spesso la poca chiarezza delle immagini fornite può deviare i nostri alunni verso strade sbagliate, non mettendo in risalto le buone competenze matematiche che possiedono.

5.3.2. Analisi delle interviste del quesito 2.2: Apparecchi Difettosi

Nell'analisi a priori dei protocolli del quesito "Apparecchi Difettosi" abbiamo sottolineato le possibili difficoltà del quesito rispetto al contenuto matematico messo in gioco: 'la percentuale', notoriamente ostico a gran parte degli studenti italiani a cavallo tra la scuola secondaria di primo grado e quella secondaria di secondo grado. Queste difficoltà hanno avuto parziale conferma nell'analisi dei protocolli raccolti nella prima fase e nelle interviste abbiamo cercato di far emergere cosa in particolare crea difficoltà ai ragazzi.

Abbiamo cercato prima di raccogliere considerazioni esplicite e dirette da parte dei ragazzi sulle loro difficoltà (cosa che mette in gioco una certa capacità di riflessione metacognitiva), e successivamente di far emergere le difficoltà da domande mirate a partire da quelle sul quesito.

Come era forse prevedibile, le considerazioni esplicite sono state veramente molto poche: d'altra parte la riflessione metacognitiva comporta di per sé anche una certa conoscenza dell'argomento, ed in questo caso abbiamo potuto osservare, durante tutto il corso delle interviste rispetto a questo quesito, una molto scarsa conoscenza dell'argomento. Questo primo dato è, a nostro parere, preoccupante nell'ottica di quella formazione alla cittadinanza attiva della quale abbiamo parlato nel capitolo iniziale di questo lavoro, e che è la fonte ispiratrice di tutti i documenti (comunitari e nazionali) di programmazione educativa riguardante in particolare la matematica. Il calcolo della percentuale è infatti una delle competenze matematiche più presenti nella vita quotidiana.

Come detto quindi, in molte circostanze i ragazzi intervistati non sono riusciti a spiegare direttamente i loro dubbi e le loro convinzioni sull'argomento: pertanto abbiamo dovuto indagare attraverso le loro risposte ai quesiti di matematica posti.

It1: "Io non ho mai capito nulla sulle percentuali. Anche quando siamo in classe non capisco che vuol dire aggiungi il 5% o quello è il 5%."

L'aspetto interessante che mette in gioco il quesito "apparecchi difettosi" è quello dell'interpretazione delle percentuali: in particolare, cosa significhi che in media il 5% di 2000 apparecchi risulti difettoso. Quello che emerge dalle interviste, è che, anche gli studenti che possiedono delle conoscenze sulle percentuali, procedono in automatico a fare il conto che la percentuale suggerisce. Così si spiega il dato molto basso (anche nei licei) di risposte corrette all'item 1b che chiede se dire che in media il 5% di 2000 lettori video risulta difettoso implica che in ogni lotto di 100 lettori fabbricati, **esattamente 5**

sono difettosi. Ancora più interessante il fatto che dalle interviste questa risulta una delle risposte su cui gli studenti si sentono più sicuri.

Ls1: "Qui ho messo vero perché devo calcolare il 5% di 100 che fa 5."

I: "Prova a rileggere bene la domanda." [...]

Ls1: "Sì, devo fare 5 per 100 diviso 100."

I: "Qual è il grado di sicurezza del tuo modo di procedere?"

Ls1: "Per me è giusto, basta calcolare la percentuale."

Ls2: "Questa è vera perché il 5% di 100 corrisponde a 5."

I: "Qual è il tuo grado di sicurezza?"

Ls2: "Sì... sono sicura."

In questi casi abbiamo cercato di testare la loro ferma convinzione, cambiando il contesto del quesito e scegliendo un contesto probabilmente più familiare a quindicenni, come ad esempio la vendita di biglietti per un concerto o una partita di calcio. Abbiamo inoltre a questo punto, esplicitamente diretto la loro attenzione sul vocabolo esattamente. Il risultato è stato interessante: dei dubbi si sono innestati, e non solo per l'insistenza della persona esterna a sottolineare "esattamente", ma si è creato un conflitto -talvolta esplicito- tra l'interpretazione della situazione *reale* (che porta a dire che non è vero che esattamente 5 biglietti non sono venduti in ogni partita) e la *conoscenza* matematica (che porta a fare un calcolo che ha come risultato 5):

I: "Proviamo a cambiare la domanda. Sappiamo che in media in uno stadio con 100 posto non vengono venduti il 5% di biglietti. Questo significa in ogni partita di calcio di 100 biglietti, esattamente 5 non sono venduti?"

Ls1: "Sempre il 5%?"

I: "Sì."

Ls1: "Sì è vero. 5 biglietti non sono venduti."

I: "Cioè mi stai dicendo che in ogni partita esattamente 5 biglietti non vengono venduti?"

Ls1: "Sì [...] però forse no perché non è che sempre 5 biglietti non vengono venduti. A volte di più altre di meno..."

I: "Proviamo a rileggere la domanda iniziale."

Ls1: "Anche qui c'è esattamente. Non lo so, è falso? Però se calcoli la percentuale viene 5. Non capisco."

I: "Cosa non capisci?"

Ls1: "Perché io ho messo vero all'inizio, ora con esattamente non so che fare."

I: *“Proviamo a cambiare la domanda. Sappiamo che in media in uno stadio con 100 posto non vengono venduti il 5% di biglietti. Questo significa in ogni partita di calcio di 100 biglietti, esattamente 5 non sono venduti?” [...]*

Ls2: *“Faccio 5 per 100 diviso 100 che fa 5.”*

I: *“Quindi è vero o falso?”*

Ls2: *“Vero.”*

I: *“Esattamente 5 non sono venduti.” Silenzio*

Ls2: *“Non lo so... direi di no, però il 5% di 100 è 5.”*

Durante le interviste, molti quindicenni hanno dichiarato di aver risposto al terzo punto del primo item (dire, in seguito alle informazioni in tabella, se è vero o falso che “Se un lettore audio viene scelto a caso nella produzione giornaliera per essere testato, la probabilità che abbia bisogno di essere riparato è di 0,03”) solo perché il testo forniva due possibilità, ma di non conoscere l’argomento richiesto o perché possiedono vaghi ricordi di quanto fatto nella scuola secondaria di primo grado o perché non hanno mai trattato l’argomento.

I: *“Mi potresti spiegare quali ragionamenti hai utilizzato per rispondere a queste domande?” [...]*

Lc1: *“Ad essere sincero, non ho usato nessun ragionamento. Sono andato a senso, perché io non ho mai fatto la probabilità, non so come calcolarla.”*

I: *“Mi potresti spiegare quali ragionamenti hai utilizzato per rispondere a queste domande?” [...]*

It1: *“Io qui ho tirato a caso. La probabilità l’ho fatta alle medie, non me la ricordo.”*

Queste interviste, rappresentative di molte altre, sono significative per due aspetti. Da una parte sottolineano una volta ancora come gli item a risposta chiusa possono dare informazioni molto parziali, perché incentivano a rispondere a prescindere dalla conoscenza dell’argomento, e dalla sicurezza sulla risposta. Non è un caso dunque che, nonostante come abbiamo scritto, emerga come percentuali e probabilità siano spesso argomenti completamente assenti nel bagaglio di molti dei quindicenni che hanno partecipato alla nostra indagine, la percentuale di omissioni al primo item del quesito, tutto a risposta chiusa, è dello 0%.

Dall’altra evidenziano proprio il fatto che gli argomenti “percentuali” e soprattutto “probabilità” siano probabilmente ancora delle cenerentole nei programmi effettivi svolti in classe, nonostante se ne parli e si fissino obiettivi di apprendimento specifici su questi argomenti sia nelle Indicazioni del primo ciclo che nelle Indicazioni (e Linee Guida) del secondo. Interessante che, i pochi che hanno risposto correttamente all’item 1c, esplicitando nelle interviste di controllare l’argomento e il processo per arrivare alla risposta corretta, attribuiscono il loro successo al fatto di aver svolto l’argomento alla scuola secondaria di primo.

Nel secondo item – nel quale si richiede di dire se è vero o falso che “In media, i lettori video mandati giornalmente in riparazione sono di più rispetto ai lettori audio mandati giornalmente in riparazione”, e di giustificare matematicamente la risposta – un aspetto di possibili difficoltà è di natura *linguistica*: nella terza colonna della tabella è indicata la percentuale media di apparecchi difettosi, e il richiamo alla media nella domanda può far pensare che i dati da confrontare siano proprio quelli nella colonna corrispondente. In realtà la domanda fa riferimento al numero assoluto di lettori, visto che non si parla di percentuale. Questo aspetto ha tratto in inganno diversi studenti che hanno appunto confrontato i dati percentuali. Interessanti le reazioni dei ragazzi quando è stato chiesto loro di calcolare il numero assoluto medio di lettori mandati in riparazione:

Pr2: “L’affermazione per me è vera perché la percentuale dei lettori video è più alta dei lettori audio.”

I: “Come lo hai capito?”

Pr2: “Dalla tabella, 5 è maggiore di 3.”

I: “Tu ti ricordi come si calcola la percentuale?”

Pr2: “Sì.”

I: “Proviamo a calcolare la percentuale.” [...]

Pr2: “Viene una 100 e l’altra 180... L’affermazione è falsa? Prima è venuta vera [...] Pensavo che fosse uguale [...] forse è giusta la seconda perché vengono i numeri precisi.”

Questa difficoltà da una parte era preventivamente a priori, dall’altra mostra come il dato della risposta scorretta vada interpretato: emerge infatti come il problema principale sia proprio la gestione (complessa in questo quesito) del termine ‘medio’. Termine che è decisivo, forse inconsapevolmente, anche per chi risponde bene al secondo item: permette di fare il calcolo del numero assoluto, laddove nel primo item portava ad un errore. Infatti non è vero che esattamente 5 lettori ogni 100 sono difettosi, ma è vero che in media 5 lettori ogni 100 sono difettosi. È sicuramente un aspetto importante da comprendere rispetto al significato di percentuale, ma siamo sicuri che chi risponde bene controlli questo aspetto?

Mentre, specifiche difficoltà su aspetti ancor più di base (meno profondi) emergono dalle interviste agli studenti che hanno omesso la risposta a questo secondo item. Molti di loro hanno giustificato l’omissione con il fatto che non ricordassero come si deve calcolare la percentuale:

Pr1: “Questo non l’ho fatto perché non mi ricordavo proprio come si calcola la percentuale. Mi ricordo che bisogna fare per 100 ma non mi ricordo dove. Anche quello dopo non l’ho fatto per lo stesso motivo.”

Ancora una volta emerge una visione della matematica come un insieme di regole da ricordare e da applicare riconoscendo la *giusta* regola per la specifica occasione. Se non si ricorda è inutile sforzarsi, perché non c’è niente da fare.

Nell’ultimo item si tornava nuovamente ad una richiesta di confrontare percentuali (medie), ma dovendo calcolare la percentuale totale media di lettori difettosi a partire

dalle singole percentuali medie di lettori difettosi nel caso di lettori video e audio. Come era prevedibile, incuranti del numero assoluto diverso tra lettori audio e lettori video, molti studenti hanno sommato i dati percentuali.

It2: "Io ho sommato la percentuale dell'azienda Elettrix e quella dell'azienda Tronic. Ho visto che 8 è più grande di 6."

L1: "Io ho visto che il totale è sempre 8000, allora ho fatto l'8% di 8000 e il 6% di 8000. Viene 640 e 480. L'azienda Tronic ha la percentuale più bassa."

Lc2: "Ho calcolato l'8% di 8000 e il 6% di 6000 e ho confrontato i due risultati ottenuti."

Abbiamo pertanto chiesto agli studenti di calcolare la percentuale prima dei video fabbricati e poi dei lettori audio, creando negli studenti un conflitto su come procedere.

I: "Bene, proviamo a calcolare la percentuale dei lettori video e poi quella dei lettori audio?"

L1: "Devo fare il 5% di 2000, il 4% di 7000 [...] Se sommo tutto e viene 280 e 200... allora è il contrario."

I: "Come mai?" (silenzio)

L1: "Sinceramente non lo so dove sia l'errore. L'unico motivo che mi fa scegliere il secondo modo è solo perché lei mi ha fatto intraprendere questa strada."

I: "Proviamo a calcolare la percentuale dei lettori video e poi quella dei lettori audio?"

Lc2: "sì. [...] Viene diverse. Io ci avevo pensato a farlo separati, però poi ho visto che il totale era 8000 per tutte e due le aziende e pensavo che non cambiasse il risultato... che fosse solo un modo più veloce per risolvere. ho imparato che è sbagliato."

Dalle interviste condotte, emerge come gli studenti italiani abbiano diverse difficoltà rispetto all'argomento 'percentuale', e che tali difficoltà siano di natura essenzialmente diversa: ci sono aspetti di fondo, sul significato del dato percentuale, e ci sono aspetti computazionali sul calcolo delle percentuali, e dell'aritmetica tra percentuali.

5.3.3. Analisi delle interviste del quesito 2.3: Velocità di Flusso

Nell'analisi dei protocolli del quesito "Velocità di Flusso", abbiamo osservato come la comprensione del testo non sia del tutto necessaria ai fini della risoluzione degli item successivi: ciò è stato confermato durante le interviste, anche da coloro che hanno svolto correttamente il quesito, come possiamo notare dalle parole della seguente studentessa:

It1: "Oddio questo non sono sicura di averlo fatto bene."

I: "Come mai?"

It1: "Non ho capito bene, ho sostituito... mi sembrava l'unica cosa da fare."

I: "Prova a leggere questa domanda e dimmi con tue parole cosa ti chiede."

Silenzio

Pr1: "Devo mettere qui (indica la formula) questi numeri."

I: "Sì. Cosa ti chiede il testo? Provi a spiegarmi?"

Silenzio

Pr1: "Non lo so...basta sostituire le lettere con i numeri, ci sono le lettere i numeri accanto."

Infatti, osservando i quindicenni nella risoluzione del primo item, abbiamo notato che essi leggono superficialmente il significato delle variabili, focalizzando l'attenzione sulla formula e sui dati numerici. Inoltre, nell'analisi dei protocolli, è emerso che spesso i ragazzi omettono il dato 60 presente nella formula assegnata: dalle interviste condotte possiamo affermare che ciò dipende in parte dalla poca attenzione con cui gli alunni si approcciano al testo (come abbiamo osservato nel quesito "Noleggio di DVD"), ma soprattutto dalla difficoltà nel gestire sia dati numerici che variabili. Gli studenti, soprattutto del Professionale, hanno mostrato le loro problematiche nell'usare tale dato, perché non presente nel testo dell'item e pertanto lo hanno eliminato nella formula assegnata.

Pr1: "Per trovare la D devo mettere qui i numeri... faccio $6 \times 500/5$."

I: "Prova a rileggere bene la formula data."

Pr1: "Sì devo farlo così."

I: "Ma il 60 perché non lo hai utilizzato?"

Pr1: "Devo usarlo? Qui non c'è." (Indica il primo item)

Talvolta invece hanno avuto difficoltà nel comprendere la formula, ed in particolare che tra 60 e n ci fosse come operazione il prodotto.

I: "Prova a leggere questa domanda e dimmi con tue parole cosa ti chiede."

Silenzio

Pr2: *“Non capisco qui.”*

I: *“Dove?”*

Pr2: *“Qui nella formula il 60.”*

I: *“Cosa non capisci?”*

Pr2: *“Tra il 60 e la n ... cosa c'è? Cosa devo fare?”*

I: *“Mi stai chiedendo che operazione c'è tra il 60 e la n?”*

Pr2: *“Sì. Cosa devo fare?”*

I: *“Secondo te che operazione c'è?”*

Pr2: *“Il per ma non sono sicuro.”*

I: *“Sì. Hai ragione.”*

Pr2: *“Allora devo fare $6 \times 500 / 60 \times 5$ ”*

I: *“Qual è il grado di sicurezza del tuo modo di procedere?”*

Pr2: *“Sono sicuro.”*

I: *“Cosa è cambiato rispetto a quando eri in classe?”*

Pr2: *“Quando abbiamo fatto la verifica non sapevo come usare il 60 e allora l'ho tolto.”*

Osserviamo che nell'ultimo esempio abbiamo scritto volontariamente la formula senza l'uso delle parentesi, perché questo è stato l'ordine con cui lo studente ha digitato i numeri sulla calcolatrice. Durante le interviste è emerso che spesso gli studenti adoperano in maniera non corretta la calcolatrice ed inoltre la utilizzano anche per eseguire i calcoli più semplici.

Nella prima parte del nostro lavoro abbiamo osservato come un'alta percentuale di studenti abbia utilizzato i dati del primo item per rispondere al secondo (in cui si chiedeva di descrivere come cambiava la variabile D al raddoppiare della variabile n), pertanto abbiamo cercato di investigarne il motivo. Gli alunni infatti non hanno compreso di dover descrivere come cambia una variabile, ma pensano di dover usare i dati precedenti per calcolare di nuovo il valore della variabile in un caso specifici. Ovvero credono di trovarsi di fronte a due identiche tipologie di item, i cui dati sono da ricercare nell'item precedente, perciò il verbo “descrivere” viene considerato come sinonimo di “calcolare”. A testimonianza di ciò riportiamo la seguente intervista, dopo che abbiamo chiesto allo studente di spiegare, con sue parole, la richiesta dell'item.

Pr2: *“Devo prendere 5 e lo raddoppio...10... poi faccio come prima... $D=5$ ”*

I: *“Quanto sei sicuro sulla correttezza del tuo modo di procedere?”*

Pr2: *“Tanto, è come prima.”*

I: *“Come mai hai usato i dati dell'esercizio precedente? Come lo hai capito?”*

Pr2: *“Perché quando fai un esercizio tutti i punti sono collegati.”*

I: *“Prova a leggere questa domanda e dimmi con tue parole cosa ti chiede.”*
 Lc: *“Devo dire come cambia D se n raddoppia. [...] n adesso è 5 [...] D è 10.”*
 I: *“Leggi di nuovo il testo. Qual è il tuo grado di sicurezza sulla soluzione fornita?”*
 Lc: *“È uguale a questo, penso sia giusto.”*
 I: *“Come mai hai utilizzato i dati forniti nell’esercizio precedente?”*
 Lc: *“Perché è in relazione a quello precedente visto che si è fatto prima.”*
 I: *“Come hai capito che dovevi usare quei dati? Cosa ti chiede il testo?”* Silenzio
 Lc: *“Ah giusto... Devo mettere qui sotto un due... quindi dimezza.”*

In questa seconda fase del nostro lavoro, abbiamo proposto una nuova versione del quesito, in cui abbiamo eliminato il primo item, per vedere come gli intervistati si sarebbero comportati di fronte alla mancanza di dati numerici. La maggior parte degli studenti, soprattutto dei licei, è riuscita a capire il significato della domanda e a fare considerazioni qualitative, più o meno giuste: c’è chi ha osservato che le due grandezze sono inversamente proporzionali, chi invece ha osservato che se la durata dell’infusione raddoppia, anche la velocità deve raddoppiare. Durante le interviste, è emerso che la buona riuscita è dovuta al fatto che gli alunni dei Licei sono abituati a fare considerazioni di questo genere, attività svolta soprattutto durante le ore di fisica. Molti di loro sono stati indotti ad utilizzare i dati dell’item precedente, perché abituati a risolvere esercizi tutti uguali in classe, come possiamo notare anche dalla seguente intervista:

I: *“Prova a leggere questa domanda e dimmi con tue parole cosa ti chiede.”*
 Ls1: *“Devo descrivere come cambia la variabile... sono inversamente proporzionali, se n dimezza D raddoppia.”*
 I: *“Ti senti più o meno sicuro sul tuo modo di procedere rispetto a prima?”*
 Ls1: *“Si sono sicuro. Pensavo che fossero due esercizi uguali, perché di solito i punti (dell’esercizio) prima servono per i punti successivi e sono tutti uguali.”*
 I: *“Cosa ti ha fatto cambiare idea?”*
 Ls1: *“Ho riflettuto sul significato di descrivere, in classe pensavo che fosse lo stesso esercizio ma con i dati nascosti.”*

Coloro che durante lo svolgimento della prova hanno utilizzato una strategia numerica per ricavare la proporzionalità, hanno mantenuto lo stesso approccio durante la risoluzione del quesito modificato, come testimonia il seguente stralcio di intervista:

Lc2: *“Devo dire come cambia la D... (ci pensa un po’) ...Il professore ci dice sempre di fare degli esempi se non riusciamo...Posso provare con dei numeri a caso? [...] diventa sempre la metà.”*

Tuttavia, lo stesso successo non è avvenuto con gli alunni del Professionale e degli Istituti Tecnici. Laddove avevano raddoppiato la durata dell’infusione, ma non avevano descritto con precisione la proporzionalità inversa, in questa fase hanno ritenuto la domanda priva di senso o concluso che mancassero i dati nel quesito.

Pr3: *“In che senso raddoppia? Cosa raddoppia?”* Silenzio *“Mancano i numeri?”*

It2: *“Non capisco... come non cambiano d e v... dove non cambiano?”*

Come avevamo ipotizzato nell'analisi dei protocolli, anche dalle interviste è emerso che, la grande difficoltà nell'ultimo item, è quella di dover determinare la formula inversa: i ragazzi procedono per tentativi, aggrappandosi a qualche ricordo. A nessuno degli intervistati è venuto in mente che se qualcosa non si ricorda si può ricavare con il ragionamento, a testimonianza del fatto che la matematica è vista come un insieme di regole e di formule a cui attingere al momento più opportuno.

Lc2: *“Qui ho capito cosa devo fare, devo trovare la v... Devo fare la formula inversa, ma non so come... $D \times d / 60 \times n$? no... forse $D \times d \times 6 \times n$?”* (La ragazza cerca conferma nell'intervistatore) *Non me lo ricordo come si fa...*

I: *“Prova a riflettere.”*

Silenzio

Lc2: *“No non lo so come si fa. Non l'ho mai capito come si fa.”*

Ll1: *“Dovevo trovare la formula inversa, ma non ho mai capito il metodo per spostare da sopra a sotto e chi va da un lato o dall'altro.”*

I: *“Prova a rifletterci.”* silenzio

Ll1: *“Forse questo va sotto e questo va sopra? $D \times 60 \times n / v$ ”*

I: *“Qual è il grado di sicurezza del tuo modo di procedere?”*

Ll1: *“Non sono sicura, sono andata a senso.”*

Ben diverse sono invece le problematicità degli studenti del Professionale, infatti molti di loro non sanno quale formula utilizzare per risolvere l'item, come afferma il seguente studente.

It3: *“Ho capito che devo trovare la v, ma non so come fare, perché non ho la formula come prima.”*

Intervistatore: *“Pensi che non puoi trovarla in qualche modo?”*

It3: *“Bo...come faccio?”*

In alcuni casi invece gli alunni legano insieme i dati del problema in vari modi e decidono il risultato corretto in base a ciò che sembra più loro familiare: appare chiaro dalla seguente intervista che essi non siano per niente coscienti di ciò che stanno facendo, non sanno motivare cosa stanno facendo e non sono nemmeno convinti che sia la strada giusta.

Pr4: *“Devo fare $25 \times 50 / 2$... no... $50 \times 3 / 2$... è 75”*

I: *“Come mai hai cambiato idea?”*

Pr4: *“Non lo so... è venuto un numero strano”*

I: *“Quanto sei sicuro della tua risposta?”*

Pr4: *“bo...era giusto quella di prima?”*

Oltre alle difficoltà esposte, è opportuno sottolineare le buone competenze di calcolo algebrico (in particolare delle equazioni) degli studenti liceali emerse durante le interviste. Inoltre, dopo aver proposto la versione modificata, hanno mostrato anche buone conoscenze nel descrivere grandezze di tipo proporzionale.

5.4. Aspetti emotivi

Quando si parla di difficoltà in matematica è necessario tenere presente gli atteggiamenti e le emozioni che essa suscita in tutti coloro che devono confrontarsi con essa. Infatti, raramente le problematiche di uno studente sono dovute solo a carenze di conoscenze o di studio, ma possono dipendere anche da atteggiamenti negativi (come la mancanza di interesse, di determinazione e di fiducia nelle proprie capacità) o da emozioni negative (quali ansia, noia e paura).

Pur essendo consapevoli che questo tipo di problematiche sono assai importanti quando si analizzano le difficoltà degli alunni, abbiamo preferito non approfondire queste tematiche, focalizzando l'attenzione solo su difficoltà relative ai singoli quesiti proposti.

Nonostante il nostro obiettivo non fosse quello di esplorare nel dettaglio gli aspetti emotivi, durante le interviste sono emerse anche ansie, paure e frustrazioni dei ragazzi di fronte alla matematica. Ciò ci ha permesso di comprendere alcuni atteggiamenti degli alunni durante lo svolgimento della prova: dopo aver dato una lettura al testo dei quesiti, hanno consegnato dopo circa una decina di minuti. Inizialmente avevamo interpretato questi comportamenti come svogliatezza, e quasi una mancanza di rispetto al nostro lavoro, provando anche rabbia e fastidio. A seguito dei colloqui abbiamo cambiato opinione, provando anche imbarazzo per aver mal interpretato la situazione: è emerso infatti piuttosto chiaramente come in molti casi giochino un ruolo cruciale le emozioni, e i comportamenti di cui sopra siano *difensivi*, mirati a preservare l'autostima e a non provare emozioni negative forti. Riportiamo uno stralcio di intervista con uno studente, che ci ha permesso di modificare la nostra opinione:

I: *“Ciao potresti leggere il testo e dirmi cosa ti viene chiesto?”*

Pr1: *“[...] Ci ho provato in classe, ma non ho capito cosa devo fare. Tutte le volte che provo a fare un esercizio di matematica non so cosa fare... **mi sento scemo**... non so da dove partire... se non mi riesce è inutile stare a guardare il foglio.”*

Talvolta durante le interviste, spesso gli alunni si sono demoralizzati alla prima sconfitta o mal riuscita, provando senso di frustrazione e odio:

[...] Pr2: *“Partiamo dal presupposto che sono dura a matematica. Devo calcolare l’area della macchia di petrolio, ma non so farlo. Ho capito cosa mi chiede ma non so farlo.”*

I: *“Proviamo a farlo insieme. Prova a rileggere il testo e pensaci un attimo.”*

Silenzio

Pr2: *“Io odio la matematica... perché ci torturi con queste cose?”*

In molte situazioni, i ragazzi smettono (o meglio non iniziano) di ragionare perché non si ritengono all’altezza di affrontare problemi matematici su argomenti non svolti (come abbiamo osservato nel paragrafo sull’analisi di “Macchia di Petrolio”). Talvolta invece, non appena il quesito non è più riconosciuto in ambito matematico, ma in un ambito reale, o viene descritto in maniera narrativa i quindicenni riescono ad intraprendere una strategia corretta, come nel seguente caso.

It1: *“Io ti avverto, io non sono bravo a matematica.”*

I: *“Non ti preoccupare, proviamo a leggere il testo.” [...]*

L’alunno deve cimentarsi nel quesito “Noleggio di DVD”

It1: *“Faccio 52,50-2,50?”*

I: *“Leggi bene il testo e prova a dirmi cosa ti chiede.”*

It1: *“te l’ho detto che non sono bravo, non capisco.”*

I: *“Allora, facciamo finta che ad inizio anno hai comprato una tessera, al costo di 10 euro, che ti permette di pagare ogni DVD solo 2,50 euro, invece che 3,20. Oggi vai al negozio e spendi 52,50 euro dove però è inserito il costo della tessera che già hai pagato.”*

It1: *“Allora oggi ho speso 42,50 euro.”*

I: *“Ok. Se tu non avessi avuto la tessera avresti pagato 3,20 euro ciascun dvd. Quanto avresti pagato senza l’agevolazione della tessera?”*

It1: *“...Io aggiungerei 2,50 euro fino a che non arrivo a 42,50 [...] sono 17, poi faccio per 3,20.”*

Un altro aspetto molto interessante che è emerso, riguarda l’autostima nelle proprie capacità, infatti, alcuni studenti hanno dichiarato di non riuscire a cimentarsi in problemi di matematica, se non in compagnia di una persona “esperta in materia”, poiché non hanno fiducia nelle proprie potenzialità, riportiamo due interviste (una delle quali già presente nell’analisi del quesito “Macchia di Petrolio”).

I: *“Prova a leggermi il testo e a dirmi con tue parole cose abbiamo fatto.”*

It4: *“Io non mi ci sono nemmeno messa a leggerli questo.”*

I: *“Come mai?”*

It4: *“Io matematica non la capisco, anche se ci provo so che non ci riesco, veramente, ti faccio perdere tempo... il voto più alto che prendo è 4”*

I: "Prova a leggere il testo e a dirmi con tue parole cosa ti chiede."

It3: "Questo non l'ho fatto perché non abbiamo fatto la stima."

I: "Ci proviamo ugualmente?"

L'alunno riflette sul quesito confrontandosi con l'intervistatore e riesce a fare considerazioni interessanti e giuste. [...]

It3: "In classe non ragiono tanto, con una persona dietro mi sento più sicuro. A me la sicurezza vuol dire tanto."

Alcuni studenti controllano le loro insicurezze utilizzando il linguaggio discorsivo piuttosto che quello matematico per fornire la soluzione. Essi ritengono che in questo modo possono controllare tutte le loro azioni per arrivare alla risposta.

Lc1: "Io preferisco scrivere tutto il discorso che faccio, così quando lo rileggo so bene cosa ho fatto o se mi blocco rileggo tutto. Mi sento più sicura. Anche nelle dimostrazioni dei teoremi non faccio mai la tabella per indicare quali sono gli elementi congruenti dei triangoli."

Lc2: "Io preferisco spiegare a parole tutti i passaggi sia per essere più sicuro, ma anche perché ritengo che se qualcuno legge il mio compito possa capire e seguirmi nel ragionamento. [...] Il linguaggio quotidiano e matematico sono ugualmente importanti, è questione di gusto secondo me e di sicurezza. A me piace spiegare quello che penso."

Infine, uno stato emotivo ricorrente tra i nostri studenti è quello legato all'ansia: molti di loro non sono riusciti a svolgere i quesiti da soli in classe, perché sopraffatti dall'ansia, mentre durante le interviste sono riusciti a portarli a termine senza essere stimolati. L'ansia sembra ostacolare le capacità dei nostri ragazzi (in particolare delle ragazze) e molto spesso provano frustrazione a causa del giudizio dell'insegnante, come hanno dichiarato le seguenti due studentesse.

La studentessa deve cimentarsi nel quesito "Gelateria".

I: "Ciao. Potresti leggere il testo e dirmi con tue parole cosa ti viene richiesto?"

III: "Sì, allora devo calcolare la bordatura esterna.... Questi due lati misura 1 cm ciascuno... questo in obliquo invece... potrei usare il teorema di Pitagora."

È alquanto improbabile che la studentessa abbia avuto suggerimento sul modo di procedere, perché è stata intervistata appena ha consegnato la prova.

I: "Perché non lo hai fatto in classe e hai consegnato?"

III: "Perché io quando vedo un esercizio mi blocco, anche alla verifica mi viene il vuoto, mi prende l'ansia e non so fare più niente. Adesso siamo sole e non è una interrogazione, mi senti più tranquilla."

I: “Anche prima non era una verifica, lo abbiamo detto alla consegna.”

III: “Sì lo so, ma la prof ci guardava, avevo l’ansia.”

La studentessa deve cimentarsi nel quesito “Macchia di Petrolio” che in classe non ha svolto.

Dopo alcune considerazioni giunge alla soluzione del problema.

I: “Cosa è cambiato rispetto a quando eri in classe?”

It5: “In classe non riesco a ragionare, mi agito e poi mi viene l’ansia. Anche quando sono all’interrogazione non so qualcosa e l’insegnante mi continua a chiedere la stessa cosa, ma io non la so, tutti mi guardano e mi sento a disagio, non può cambiare argomento o mandarmi a posto?”

Sebbene il nostro intento non sia quello di approfondire questi aspetti e ancor meno di dare soluzioni o indicazioni di come gestire gli stati d’ansia degli alunni, riteniamo che tutti gli stati d’animo descritti hanno ripercussione nel breve tempo (come ad esempio i risultati scolastici in matematica), ma soprattutto nel lungo termine, perché non favoriscono l’acquisizione di competenze utili per affrontare la vita, precludendosi anche settori lavorativi.

Capitolo 6

Conclusioni

Come abbiamo scritto nell'introduzione, il nostro lavoro aveva l'obiettivo di studiare le difficoltà degli studenti di fronte alle tipologie di quesiti che OCSE-PISA usa per la valutazione della competenza matematica. In particolare facendo emergere, anche tramite interviste, i processi messi in atto dagli allievi nell'affrontare tali quesiti.

I dati quantitativi raccolti, seppur non significativi da un punto di vista statistico, sembrano confermare le grosse difficoltà degli studenti nell'affrontare i quesiti OCSE-PISA. Le percentuali di risposte sbagliate significativamente alte indipendentemente dai diversi contenuti messi in gioco nei quesiti che abbiamo utilizzato, evidenziano come le difficoltà non siano specifiche di un particolare contenuto, e sembrano suggerire che la tipologia di quesito – in particolare: la presenza di immagini e tabelle che servono per la risoluzione, i testi lunghi, un certo tipo di contestualizzazione – gioca un ruolo in queste difficoltà.

Altra conferma che traiamo dai nostri dati è quella del problema di pari opportunità educative, ed in particolare della mancata garanzia dell'assolvimento degli obiettivi previsti dall'obbligo scolastico. I risultati molto differenziati tra tipologie di scuola infatti, certamente hanno una spiegazione nel fatto che spesso chi si iscrive agli Istituti Professionali proviene da un percorso scolastico ricco di insidie e difficoltà in tutti gli ambiti, ed in particolare in quello matematico. D'altra parte, se i quesiti che abbiamo proposto mettono in gioco le conoscenze e le competenze minime inclusi negli obiettivi dell'assolvimento dell'obbligo scolastico, dovrebbero far parte del bagaglio culturale di ogni studente che assolve l'obbligo scolastico, indipendentemente dal percorso sviluppato. Delle due l'una: o i quesiti OCSE-PISA non sono effettivamente quesiti legati agli obiettivi formativi minimi che tutti dovrebbero raggiungere, o il sistema educativo non garantisce il raggiungimento di tali obiettivi ad una percentuale ampia di studenti e, ciò che è più grave, lo fa in misura diversa relativamente al percorso formativo scelto dallo studente.

La prima conclusione da queste riflessioni è che sembra grave far finta di niente. L'impressione è che si può ripensare sia agli obiettivi minimi (ripensandoli, volendo anche riducendoli o cambiandoli), sia agli strumenti di valutazione del raggiungimento di tali obiettivi minimi, ma fatto questo, si dovrebbe garantire il raggiungimento degli obiettivi – che si chiamano minimi per questo – a tutta la popolazione studentesca (o quantomeno alla stragrande maggioranza di essa).

Questa conclusione però non dipende da ciò che abbiamo raccolto in questo lavoro: come detto, infatti, i nostri dati quantitativi confermano dati già noti. L'originalità della nostra indagine sta nell'attenzione ai processi che portano a determinate risposte. Attenzione ai processi che in particolare è propria della fase dell'indagine in cui sono state fatte interviste, ma che è stata curata anche durante la raccolta e analisi dei protocolli scritti, attraverso l'ascolto delle loro domande di chiarimento durante le prove e attraverso le tracce scritte dei processi al di là della scelta della risposta.

Dalla nostra indagine emerge come alcune difficoltà siano da attribuire ad una scarsa (spesso assente) conoscenza dell'argomento proposto nelle prove, quali ad esempio la percentuale, la probabilità e la stima di aree *non regolari*. Ciò è emerso sia durante la somministrazione della prova, sia durante le interviste singole, in cui i quindicenni hanno dichiarato o di non conoscere bene l'argomento, o di non averlo approfondito a scuola o di averlo affrontato, ma di non ricordarlo più. Quanto detto evidenzia come tali argomenti siano ancora poco trattati nella scuola italiana, nonostante se ne parli e si fissino obiettivi di apprendimento specifici sia nelle Indicazioni del primo ciclo, che in quelle del secondo ciclo.

Oltre a ciò si evidenziano molte problematiche legate non strettamente ad aspetti puramente matematici, ma ad aspetti legati alla comprensione del testo, della domanda e dell'immagine fornita. Si pensi infatti, come mostrato in sede di analisi dei protocolli e delle interviste relative al quesito "Gelateria", come spesso molti alunni abbiano calcolato correttamente le misure di ciò che scorrettamente avevano individuato essere l'oggetto di interesse nella figura, attraverso strategie molto più complesse di quella richiesta.

Talvolta invece il testo del quesito è apparso fortemente ambiguo e nel nostro lavoro abbiamo voluto evidenziare che, oltre alle difficoltà nelle competenze linguistiche dei quindicenni, in alcuni casi sarebbe più opportuno riformulare il testo del quesito stesso. Si pensi infatti come, nel caso del quesito "Noleggio di DVD", la riformulazione del testo, senza semplificare l'aspetto matematico, abbia permesso a tutti gli intervistati di capire il vero significato del secondo item e di conseguenza di svolgerlo correttamente. In altri casi invece abbiamo mostrato che le immagini proposte appaiono anch'esse ambigue: ricordiamo, a titolo d'esempio, come a seguito delle modifiche riportate nell'immagine del quesito "Gelateria", gli studenti hanno capito in quale modo disporre i moduli all'interno del locale.

Raccogliendo le opinioni dei docenti delle classi coinvolte, abbiamo potuto constatare che essi sono consapevoli delle difficoltà dei propri alunni nell'approcciare problemi contestualizzati, perché "*non abituati a svolgere quesiti di questo tipo*". Dalle interviste con professori ed alunni emerge chiaramente come sia attuata ancora una modalità di insegnamento della matematica, che incentiva il pensiero riproduttivo a discapito di quello produttivo, proponendo schemi di insegnamento basati sull'esempio e sull'addestramento (ti faccio vedere come si fa e fallo tante volte) ed infine nel compito si trova l'ennesimo esercizio uguale ai precedenti. È evidente che questo approccio lascia disarmati gli studenti di fronte a situazioni e problemi nuovi, come i quesiti proposti dall'indagine OCSE-PISA, da cui i bassi risultati. Inoltre questa modalità di insegnamento non incentiva l'abitudine al ragionamento, ma consolida negli studenti l'idea che la matematica sia un insieme di regole da dover ricordare e a cui attingere al momento più opportuno. Tale idea è stata fortemente ribadita sia durante lo svolgimento della prova, sia durante le interviste. Infatti, non è mai accaduto che uno studente, di fronte ad un item di cui sapeva di aver appreso il procedimento risolutivo, abbia cercato di ricavarlo o di arrivare alla soluzione con un proprio ragionamento. Anzi, in molti casi, come nell'ultimo item del quesito "Velocità di Flusso", i quindicenni hanno proceduto per tentativi nel determinare la formula inversa, in altri invece, come nel caso del calcolo della percentuale, non hanno nemmeno riflettuto in quale modo poter procedere e sono passati ad altri quesiti.

Questa idea di matematica sembra giocare un ruolo fondamentale anche sull'autostima degli studenti; emerge infatti come essi abbiano più fiducia nelle loro capacità riproduttive che su quelle produttive. Ricordiamo, a titolo d'esempio, come molti dei quindicenni non si siano cimentati nel quesito "Macchia di Petrolio", perché l'argomento richiesto non fa riferimento a cose già viste in classe.

Nel nostro lavoro, abbiamo potuto constatare come anche le emozioni giocano un ruolo cruciale durante lo svolgimento della prova e sono alla base di molte risposte omesse o sbagliate. Infatti, come abbiamo osservato dalle interviste, molti protocolli consegnati in bianco derivano da comportamenti difensivi, mirati a preservare l'autostima e a non provare emozioni negative, quali umiliazione e frustrazione.

Infine, in molti casi gli stati d'animo, quali ansia e paura di sbagliare, sembrano inibire le capacità degli studenti; al contrario, in situazioni di tranquillità e senza essere giudicati, essi mostrano buoni processi e buone competenze matematiche.

Bibliografia

- [1] *Quadri di riferimento PISA 2012: Quadro di riferimento per la Matematica.*
- [2] *Pisa 2012: Informazione statistica regionale sulle competenze degli studenti italiani.*
- [3] *Rapporto nazionale-Pisa 2012.*
- [4] D'Amore B., Martini B. (1997), *Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard.*
- [5] D'Amore B. (2014), *La didattica della matematica: strumenti per capire e per intervenire. Prefazione e atti del convegno nazionale omonimo, Tricase (LE).*
- [6] Ferrari P.L. (2004), *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica.*
- [7] Paola D. (2005), *Possibili conseguenze didattiche dell'uso dei test strutturati per la valutazione delle competenze matematiche: i casi delle prove PISA e INVALSI.*
- [8] Pozio S. (2010), *La risoluzione di prove di competenza matematica. Analisi dei risultati italiani nell'indagine OCSE-PISA 2003.*
- [9] Ricci R. (2008), *La valutazione della competenza matematica sulla base dei dati OCSE-PISA.*
- [10] Tomasi L. (2015), *Le competenze matematiche nelle prove INVALSI e OCSE PISA per la scuola secondaria di II grado.*
- [11] Zan R. (2006), *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.*

Sitografia

<http://www.oecd.org/pisa/>

<http://www.invalsi.it>

http://www.europarl.europa.eu/summits/lis1_it.htm

<http://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/?uri=URISERV:c11090>

<http://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/?uri=URISERV:c11104>

http://www.indire.it/indicazioni/templates/monitoraggio/dir_310707.pdf

http://nuovilicei.indire.it/content/index.php?action=lettura&id_m=7782&id_cnt=10497

<http://nuovitecnici.indire.it>

<http://nuoviprofessionali.indire.it>

<http://www.indicazioninazionali.it/J/>

<http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/>

http://www.matematica.it/paola/miei_articoli.htm

<http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/818%20Atti%20Tricase%20e%20Prefazione.pdf>