



UNIVERSITA' DI PISA

Dipartimento di Economia e Management

Corso di laurea magistrale in

BANCA, FINANZA AZIENDALE E MERCATI FINANZIARI

Tesi di Laurea

**CUMULATIVE PROSPECT THEORY E SUE
EVOLUZIONI**

Relatore:

Chiar.mo Prof. Riccardo Cambini

Candidato:

Cataldo Danilo Dell'Erba

Anno Accademico 2015-2016

*A Giorgio, fratello,
amico e compagno di vita.*

Introduzione	5
Primo Capitolo	
EVOLUZIONE DELLE SCELTE IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA.	9
1.1 - Definizione Del Problema Di Scelta.	12
1.2 - La Teoria Dell' Utilità Attesa e Della Razionalità.	15
1.3 - Comportamenti in reazione al rischio.	18
1.4 - Limiti della Teoria dell'Utilità Attesa.	22
1.4.1 - Paradosso di Allais.	23
1.4.2 - Paradosso di Ellsberg.	26
1.4.3 - Razionalità Limitata ed Effetti di contestualizzazione.	29
1.5 - Ascesa della Behavioural Economics e lo sviluppo di nuove teorie Non EUT.	31
1.5.1 - Teoria del Prospetto.	33
1.5.2 - Teoria del Prospetto Cumulato.	41
Secondo Capitolo	
FOCUS SULLA CUMULATIVE PROSPECT THEORY (CPT).	
2.1 - Introduzione.	43
2.2 - I Fondamenti della CPT.	45
2.3 - Il modello e i suoi parametri.	48
2.4 - L'esperimeto di Kahneman e Tversky	51
2.5- Teorie a confronto in sintesi.	58
2.6 - Critiche alla CPT.	61
2.6.1 - Paradosso di Wu-Markle.	63
2.6.2 - L'esperimeto di Birnbaum-Bahra.	66

2.7 – Bipolar CPT.	68
Terzo capitolo	
ANALISI EMPIRICA	
3.1 - Il contesto dell'analisi	70
3.1.1 - Obiettivi dell'esperimento	71
3.2 - Struttura dell'esperimento	72
3.2.1 - Questionario	74
3.4 - Analisi dei risultati	76
3.4.1- Allegato (Risultati Interviste)	86
CONCLUSIONI	89
BIBLIOGRAFIA	94
SITOGRAFIA	98

Introduzione

Questo mio percorso intende porre l'accento a una tematica in continua evoluzione, quella delle scelte o decisioni in condizione di incertezza e in modo particolare concentrandomi sull'ultima teoria implementata per tali scelte, la Cumulative Prospect Theory (CPT). In base alla teoria delle decisioni, si evidenzia che queste si classificano in decisioni certe, rischiose e incerte. È facilmente intuibile che quando vi è perfetta conoscenza del futuro, ad ogni azione corrisponde una unica conseguenza (analisi decisionale in condizioni di certezza) pertanto in questi casi il decisore è in grado di determinare a priori gli effetti relativi alla propria scelta, ma generalmente il decisore non è in grado di stabilire esattamente a quale conseguenza condurrà un'azione specie laddove questa, è influenzata da svariati fattori esterni, dalle condizioni del contesto o da altri motivi che rendono incerto l'esito. I concetti di rischio e di incertezza nel mio elaborato saranno utilizzati quasi indifferentemente l'uno dall'altro. È importante però sottolineare come nell'ambito della teoria economica essi abbiano spesso assunto connotati ben distinti. In particolare, nella sua opera del 1920 *Risk, Uncertainty and Profit*, l'economista americano Frank Knight per primo fece riferimento al concetto di "rischio" in relazione ad eventi non certi, ma alle cui possibili realizzazioni è sensato assegnare delle probabilità, mentre accostò il concetto di "incertezza" a eventi talmente imprevedibili per cui non è in alcun modo possibile associare delle probabilità alle loro realizzazioni. Questa è una distinzione però che a poco a poco ha perso di validità. Alcuni autori, quelli che si richiamano alla scuola bayesiana-soggettivista, non accettano la tripartizione delle decisioni in quanto ritengono, non solo possibile, ma anche necessario, per una risoluzione ottimale dei problemi decisionali, procedere all'introduzione di una misura della plausibilità (probabilità soggettiva) dei vari stati di natura facendo così cadere la distinzione tra situazioni di rischio e situazioni di incertezza. Fatta questa premessa e bene quindi sottolineare come le decisioni economiche vengono prese quasi sempre in condizioni di incertezza. Non vi è da sorprendersi quindi che il tipo e il grado di incertezza percepita dall'agente economico ne influenzino in modo cruciale le scelte.

Gli sviluppi fondamentali hanno riguardato l'introduzione sistematica dell'incertezza nei tre seguenti filoni di ricerca; teoria dei giochi, teoria dell'equilibrio economico generale, e teoria delle decisioni. In questo elaborato mi sono concentrato sulle

implicazioni relative a quest'ultimo filone di studi, in particolare nella prima parte della tesi sono andate a sviluppare da un punto di vista quasi storico quello che è ad oggi lo stato dell'arte della materia. Da questo punto di vista quello che emerge è un dualismo fra due tesi economiche quella classica con la sua visione di iper-razionalità e quella sperimentale e comportamentale che attraverso appunto esperimenti sul campo si fa carico di spiegare i comportamenti che spingono i diversi soggetti a determinate scelte o decisioni.

La teoria economica si è sempre interessata al comportamento e alle motivazioni dei consumatori. Si ritiene che la maggior parte delle azioni nei mercati sia governata da comportamenti "razionali", intendendo questo aggettivo nella nozione più ampia e generale di sensato pianificato e coerente. Cosa intendono gli economisti per razionale è già un qualcosa di più specifico, in tal senso chiarificatrici possono essere le parole di H. Simon, "l'uomo razionale nella teoria economica è un massimizzatore che non si accontenterà che del meglio". Benchè questo modello di comportamento del consumatore domini l'analisi economica contemporanea, tra gli economisti vi è però anche una lunga tradizione che ne critica la validità e ha suggerito la ricerca di alternative. Partendo quindi dall'analisi della teoria classica e dallo studio dell'utilità attesa (expected utility EU) e individuando una letteratura economica nella fattispecie piuttosto ampia, dalle prime ipotesi di Daniel Bernoulli, alle teorie di Oskar Morgenstern e John von Neumann, si passa ad analizzare tutta una serie di limiti e di paradossi (Allais, Ellsberg), che inevitabilmente hanno posto le basi per una chiave di lettura diversa.

All'interno della disciplina comincia a diventare importante anche il ruolo della psicologia ed inevitabilmente questo porta ad una evoluzione della teoria dell'utilità attesa e alla nascita della "teoria del prospetto" (1979), ad opera di due psicologi israeliani, Daniel Kahneman e Amos Tversky, che è valsa al primo nel 2002 la vittoria del premio Nobel per l'economia, con la seguente motivazione "per avere integrato contributi della ricerca psicologica nella scienza economica, specialmente per quel che riguarda il giudizio umano e le scelte in condizioni di incertezza". La teoria del prospetto costituisce il prius logico nonché storico del modello trattato, per tale ragione a fine primo capitolo si è cercato di spiegare in modo sintetico il primo modello implementato da Kahneman e Tversky. In tale modello però sono presenti alcuni limiti che di fatto portano gli stessi autori nel 1992 a rivedere la prospect theory e trasformarla in "*Cumulative Prospect Theory*".

L'ultimo stadio riconosciuto dalla comunità scientifica riguardante le teorie sulle scelte in condizioni di incertezza, ad oggi è proprio la teoria del prospetto cumulato CPT, che rappresenta la principale alternativa all'EUT. Nello specifico il modello sarà trattato tecnicamente nel secondo capitolo, dove andremo anche ad analizzare le critiche più recenti che di fatto stanno cercando di portare il modello ad un livello di precisione più alto e in relazione a ciò andremo a vedere gli studi di Wu e Markle e di Birnbaum-Bahra e quella che è di fatto una nuova versione del modello CPT, la Bipolar Cumulative Prospect Theory (BCPT), quest'ultimo modello di fatto risulta essere ad oggi ancora molto sperimentale e poco applicato per via dell'indubbia maggiore complessità. Nel terzo ed ultimo capitolo, infine, ho analizzato empiricamente il modello CPT seguendo i parametri che sono stati individuati da Kahneman e Tversky, ho quindi cercato di riproporre l'esperimento originale avanzando un'indagine su un campione di riferimento, per capire che tipo di atteggiamento le persone hanno di fronte al rischio e cercando poi nella fattispecie di capire se dai risultati riscontrati ci sono differenze con i parametri e le evidenze tratte dai due psicologi israeliani, o più in generale con quelli individuati negli ultimi anni nella letteratura. Ho poi cercato di vedere se gli intervistati, a seconda dell'età e del sesso, agissero in modo diverso in relazione al rischio.

Secondo diversi studiosi si sta avvicinando il tramonto e l'abbandono della teoria dell'utilità attesa così come ipotizzata da Von Neumann e Morgenstern, in favore della più coerente e generale teoria del prospetto cumulato. In realtà così non è, la teoria dell'utilità attesa di Von - Neumann e Morgenstern pur evidenziando come descritto in precedenza grosse problematiche, nonostante la sua inadeguatezza descrittiva, è stata ed è probabilmente ancora, il punto di riferimento per l'analisi delle scelte in condizioni di incertezza. La ragione di ciò è facilmente intuibile, il vantaggio operativo che essa consente, la semplicità logico-formale di rappresentare problemi umani così complessi con una struttura matematica di grande flessibilità e facile applicazione, i buoni risultati applicativi in svariati contesti.

Queste sono le ragioni che hanno portato a divenire l'EUT la teoria principe, e più utilizzata per le decisioni in condizioni di incertezza. Con ciò si vuole chiarire che non esiste una prospettiva migliore dell'altra, né che la BE (Behavioural Economics) rifiuti l'approccio analitico, anche perché in realtà così non è, ma si ritiene che la teoria delle scelte economiche ha davanti a sé grandi opportunità di sviluppo se si riuscirà a trovare una mediazione tra l'approccio tradizionale e quello proposto dalla BE.

1. - EVOLUZIONE DELLE SCELTE IN CONDIZIONI DI INCERTEZZA

Le decisioni e le scelte organizzative degli individui sono sempre state al centro degli interessi di studiosi appartenenti a diverse discipline; numerose sono, infatti, le teorie elaborate e gli studi condotti nel tempo, con diverse prospettive e finalità di indagine. Pur esistendo una vasta letteratura in merito, gli studi teorici ed empirici disponibili non sono, secondo molti studiosi, in grado di descrivere e spiegare il fenomeno decisionale ed organizzativo nella sua completezza¹. Le decisioni o scelte sono classificabili essenzialmente in due tipologie, decisioni in condizioni di certezza, e decisioni in condizioni di incertezza. La distinzione riguarda l'esito della decisione: raramente l'esito è certo, perché di solito non siamo abbastanza informati o perché gli effetti della nostra scelta si manifestano in futuro sotto l'influsso di eventi al di fuori del nostro controllo. Per quanto riguarda il primo caso, sulla teoria delle decisioni in condizioni di certezza, i dati disponibili sono sicuri e la natura dell'esito o stato futuro, è certa e ben nota all'individuo. Questo tipo di modello decisionale, basato molto su principi economici razionali classici, assume che l'agente sceglie usando l'informazione disponibile con coerenza, in modo da operare la scelta ottimale date le alternative disponibili e gli obiettivi prefissati. Inoltre che essi siano dotati di un dato e stabilito ordinamento di preferenze sulle alternative a disposizione secondo i propri gusti, seguendo un criterio di scelta che chiaramente punta alla massimizzazione e ottimizzazione del proprio esito finale. Nel secondo caso invece, sulla teoria delle decisioni in condizioni di incertezza, i dati disponibili non sono da considerarsi sicuri e noti, perché strettamente associati ad eventi futuri di natura aleatoria. Ciò significa che la natura dell'esito, che prende il nome di *stato del mondo*, sarà incerta, e ad esso possiamo al più associare una certa probabilità del loro manifestarsi, come conseguenza della nostra azione. Come già accennato le decisioni in condizioni di incertezza costituiscono di gran lunga le più comuni, a causa delle condizioni naturali di vita. L'incertezza caratterizza spesso le decisioni future, più il futuro è incerto più alto sarà il rischio associato a questo. Quindi il rischio e l'incertezza sono elementi che pervadono i

1. Castello V., (2003), "Processi Decisionali E Apprendimento Organizzativo; Un Approccio Multirazionale". Università degli Studi di Firenze.

mercati finanziari. Un investimento finanziario, generalmente, comporta sempre che colui che lo realizza debba sopportare un certo grado, più o meno ampio, di rischio. In seguito, i concetti di rischio e di incertezza saranno utilizzati quasi indifferentemente l'uno dall'altro. E' importante però sottolineare come nell'ambito della teoria economica essi abbiano spesso assunto connotati ben distinti. In particolare, nella sua opera del 1920 *Risk, Uncertainty and Profit*, l'economista americano Frank Knight per primo fece riferimento al concetto di "rischio" in relazione ad eventi non certi, ma alle cui possibili realizzazioni è sensato assegnare delle probabilità, mentre accostò il concetto di "incertezza" a eventi talmente imprevedibili per cui non è in alcun modo possibile associare delle probabilità alle loro realizzazioni. Questa è una distinzione però che a poco a poco ha perso di validità².

Ora chiarita questa prima differenza tra teorie in condizioni di certezza e quelle in condizioni di incertezza, che sta alla base della teoria delle decisioni, non può non essere segnalato il dualismo che ha caratterizzato tutta la storia della teoria delle decisioni, con due visioni contrapposte: quella che interpreta la decisione economica come *logica della scelta*, e quella che la considera invece come *psicologia della scelta*. Ciascuna di esse porta con se differenti premesse e differenti interpretazioni del metodo sperimentale. Per quanto riguarda la visione logica della scelta, si muove dal presupposto che le decisioni individuali siano razionali e prevalentemente governate dall'interesse, questa è la base su cui si fonda l'economia neoclassica, che viene detta anche per questo la scienza del comportamento razionale.

Il merito di aver fornito alla teoria economica il fondamento formale di una scienza rigorosa è da ascrivere a John von Neumann e Oskar Morgenstern, e al loro epocale *The Theory Of Games and Economic Behavior*³. Con questo volume pubblicato nel 1944 si raggiunge il più alto livello di formalizzazione della teoria dell'utilità e della decisione.

2. Alcuni autori, quelli che si richiamano alla scuola bayesiana-soggettivista, non accettano la tripartizione delle decisioni in quanto ritengono, non solo possibile, ma anche necessario, per una risoluzione ottimale dei problemi decisionali, procedere all'introduzione di una misura della plausibilità (probabilità soggettiva) dei vari stati di natura facendo così cadere la distinzione tra situazioni di rischio e situazioni di incertezza.

3. Von Neumann J.- Morgenstern O., (1944), "*The Theory Of Games and Economics Behavior*", Wiley, New York.

La visione psicologica della scelta, si può senz'altro affermare che sia una visione differente da quella ortodossa, basata dal fatto che le decisioni reali degli uomini comuni che abitano il mondo reale che ci circonda, possano differire in vari modi dalle decisioni degli uomini economici che popolano il mondo ideale della teoria della scelta razionale. Dopotutto non si tratta certo di una constatazione sorprendente, infatti pochi di noi sarebbero disposti a ritenere che i propri simili siano perfettamente razionali. Siamo consapevoli di essere fallibili, di avere limitate capacità di calcolo, limitato accesso alle informazioni, e fattore poi ancor più importante e che nella vita di tutti i giorni proviamo emozioni che condizionano le nostre scelte in modo “poco calcolato”. La *Behavioural Economics*, rimpiazzando l'ipotesi di razionalità sostanziale utilizzata dalla modellistica economica tradizionale, introduce assunzioni maggiormente coerenti con la realtà. Significativo per comprendere l'affermarsi negli ultimi decenni della BE, è l'analisi storica che Laibson e Zeckhauser presentano⁴. Per essi l'apporto della psicologia nel *mainstream economics* inizia il suo declino negli anni '40 per opera della nuova generazione di economisti (guidati da Samuelson ed Hicks) che contribuirono a migliorare sensibilmente la formulazione analitica del comportamento razionale degli agenti economici. Nonostante le prime implausibilità delle ipotesi di perfetta razionalità furono evidenziate già negli anni '50 e '60 (Allais, 1953; Ellsberg, 1961), esse pur riscontrando una notevole notorietà, non risultarono sufficienti per riesaminare l'indirizzo metodologico verso cui si avviava la scienza economica. Negli anni '70, il processo di astrazione analitica si accentua relegando l'apporto della psicologia ad un ruolo sempre più marginale. Importante fu la reputazione che gli economisti classici, (grazie ai successi e allo sviluppo delle economie di quegli anni⁵), godevano a livello scientifico e che contribuì all'ascesa dell'approccio di iper-razionalità economica.

4. Laibson D. – Zeckhauser R., (1998), “Amos Tversky and the Ascent of Behavioral Economics”, Springer, Journal of Risk and Uncertainty.

5. Basti pensare allo sviluppo dei modelli di equilibrio con aspettative razionali Muth (1961), Lucas (1972), Radner (1972) che riuscirono a risolvere alcune incongruenze tra teoria e dati empirici, in particolare in merito a ciò si fa riferimento al modo in cui le aspettative venivano calcolate, ovvero prendendo in considerazione solamente dati passati e attribuendo agli ultimi dati un peso maggiore, le aspettative così formate prendono il nome di aspettative adattive e avevano l'inconvenienza di essere lente ad adeguarsi ai nuovi cambiamenti e inoltre prendendo in considerazione solo informazioni passate si perdevano tante variabili che potevano influire sulle previsioni.

Ma è proprio in questo periodo che le critiche opposte da Tversky e dai suoi molti coautori (in particolare Kahneman) iniziarono a prendere sostanza. Essi rifacendosi alle scienze cognitive cercarono di ricondurre a maggior realismo la rappresentazione dei processi decisionali umani, e fin dai loro primi lavori notarono che il giudizio umano in condizione di incertezza diverge in modo sistematico (e quindi prevedibile) dalle leggi della probabilità assunte dalla teoria economica classica. La nascita quindi della metodologia sperimentale in economia (una branca dell'economia che sottopone a verifica le teorie costruendo degli esperimenti con persone reali; a queste persone vengono sottoposte decisioni da prendere e dal loro comportamento si trovano conferme o smentite alle teorie sottoposte), accompagnati da una serie di sviluppi di teoria delle decisioni, hanno dato origine al filone di ricerca della finanza comportamentale, che ha consentito di studiare i fondamenti assiomatici dei comportamenti 'non-razionali' e quindi di individuare regole decisionali, diverse da quelle seguite da individui razionali, più rispondenti a quelle seguite dagli individui nella realtà.

1.1 - Definizione Del Problema Di Scelta.

Nell'andare a definire il problema di scelta delle decisioni in condizioni di incertezza, possiamo immaginare un soggetto che debba scegliere fra diverse alternative possibili, in relazione ad un evento incerto. L'incertezza consiste nel fatto che, al momento della scelta, il soggetto non ha la possibilità di conoscere il risultato finale dell'evento. Più specificatamente, ipotizziamo che il soggetto possa scegliere tra diversi atti o azioni ognuno dei quali può produrre per lui dei risultati incerti. Ad esempio, potrebbe trattarsi di un risparmiatore che deve decidere come investire i suoi risparmi tra diversi titoli (o tra diverse combinazioni di titoli), non sapendo a priori quali saranno i rendimenti che potrà ottenere da essi.

Ora per semplificare l'analisi, immaginiamo che, sebbene il soggetto non possa sapere con certezza quale risultato si produrrà in concreto, esso conosca l'insieme dei possibili risultati associati a ciascun atto che può scegliere:

indichiamo con il vettore $\{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ gli n possibili risultati associati ad una qualsiasi azione appartenente all'insieme di scelta del soggetto. Ipotizziamo, inoltre, che il soggetto conosca la probabilità con cui ciascun risultato si può realizzare in concreto. Indichiamo con $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ il vettore delle probabilità: data l'azione generica scelta dal soggetto, il risultato W_i (connesso a quell'azione) si produrrà con probabilità p_i , con $i = 1, 2, \dots, n$. Definiamo, adesso, un concetto rilevante per le analisi successive, cioè

quello di lotteria: Data un'azione scelta dal soggetto, la lotteria L ad essa associata è il vettore casuale; $L \equiv \{W_1, W_2, \dots, W_n; p_1, p_2, \dots, p_n\}$ dove W_i è un risultato possibile e p_i è la probabilità che, data l'azione compiuta dal soggetto, quel risultato si verifichi (con $i = 1, 2, \dots, n$ e $\sum_{i=1}^n p_i = 1$). In sostanza, per ogni azione che il soggetto può scegliere, avremo una lotteria ad essa associata. La lotteria riassume l'insieme dei risultati, e le probabilità che essi si realizzino, connessi ad una certa azione che appartiene all'insieme di scelta del soggetto. Questo tipo di lotteria così descritta viene definita come lotteria (semplice), esistono però anche delle lotterie il cui risultato consiste nella partecipazione ad altre lotterie si tratta delle cosiddette lotterie (composte). In generale una lotteria composta può essere rappresentata come segue; Supponiamo K lotterie, L_1, \dots, L_K . Sia Q una lotteria i cui premi sono le lotterie L_1, \dots, L_K . Q assegna L_k con probabilità q_k con $q_k \geq 0$ e $\sum_k q_k = 1$. Ora se p_k^n è la probabilità che L_k assegna al risultato n , la lotteria composta può essere ridotta ad una lotteria semplice che assegna probabilità p_k^n al risultato n . Nel caso di due lotterie, L^a e L^b una lotteria composta su queste due lotterie può essere rappresentata come $aL^a + (1 - a)L^b$, dove $0 \leq a \leq 1$ è la probabilità che si realizzi la lotteria L^a . Il problema di scelta di quest'ultimo, quindi, può essere impostato nei termini di scelta della lotteria che meglio soddisfa le sue preferenze. Individuando la lotteria preferita, infatti, è possibile individuare la scelta migliore del soggetto (quella a cui la lotteria preferita è associata). Ovviamente, a questo punto si tratta di definire un criterio che ci consenta di "ordinare" le lotterie in funzione delle preferenze del soggetto. Un primo modo per ordinare le lotterie per la scelta di quella migliore è quello in base al valore atteso $E[W]$ così calcolato:

$$E[W] = W_1 p_1 + W_2 p_2 + \dots + W_n p_n = \sum_{i=1}^n W_i p_i.$$

Il concetto di valore atteso di una lotteria consente anche di definire cosa si intende per lotteria attuarialmente equa. Una lotteria L si definisce attuarialmente equa (o, più semplicemente, equa) se il suo valore atteso è nullo (ossia $E[W] = 0$), questo però senza considerare alcun prezzo per parteciparvi, ma siccome normalmente così non avviene una L è equa se il pagamento richiesto per accedere alla stessa è uguale al valore atteso della vincita. Indicando con A il pagamento una lotteria equa è quella per cui; $L \rightarrow E[W] = A$.

A primo acchito possiamo dire che se il costo per partecipare alla lotteria è maggiore del suo valore atteso non conviene partecipare alla lotteria si tratta di una lotteria (iniqua), o

viceversa nel caso in cui il costo sia minore del valore atteso della vincita della lotteria, convenga partecipare in quanto lotteria (vantaggiosa). In realtà però il solo valore atteso non basta in generale ad identificare e risolvere il problema delle scelte in condizioni di incertezza, perché non tiene conto di diverse variabili, una su tutte ad esempio l'atteggiamento nei confronti del rischio da parte dei soggetti. Analizzeremo nel dettaglio quali sono i comportamenti in relazione al rischio per ora basta chiarire che il valore atteso per come è concepito è un concetto troppo semplice per definire le scelte del soggetto a tal proposito, immaginiamo le due seguenti lotterie:

$L' = (-900, 300, 900; 1/3, 1/3, 1/3)$ e $L'' = (50, 150; 1/2, 1/2)$. Entrambe le lotterie hanno lo stesso valore atteso, pari a cento ($E[W]=100$), e quindi potremmo essere tentati di affermare che siano tra loro indifferenti per i vari soggetti. In realtà così non è, le due lotterie sono tra loro ben diverse. Nella prima esiste una probabilità positiva di vincere sia una cifra relativamente alta, sia una cifra più contenuta. Al tempo stesso, però, esiste una probabilità non trascurabile di perdere una somma considerevole (-900). Nella seconda lotteria, invece, vi è una probabilità pari al 50% di vincere una cifra positiva più o meno alta, ma comunque relativamente modesta. In altri termini, a parità di valore atteso, L' è molto più rischiosa di L'' ; d'altro canto però L' può consentire al soggetto delle vincite che con L'' non è assolutamente in grado di raggiungere. In virtù di ciò, è lecito aspettarsi che ci siano soggetti che preferiscano L' a L'' , altri soggetti che preferiscono L'' a L' , e altri ancora per cui le due lotterie sono effettivamente equivalenti. Inoltre, sebbene la lotteria L' abbia un valore atteso strettamente positivo, è del tutto probabile che vi siano soggetti non disposti a “giocare” L' , in quanto assolutamente contrari alla possibilità di perdere una cifra pari a 900⁶. Quindi la scelta dipenderà molto dalla propensione al rischio dei diversi soggetti. Il primo a criticare il concetto di valore atteso in tal senso fu Daniel Bernoulli (1738) matematico svizzero che nell'intento di risolvere il paradosso di San Pietroburgo proposto nel 1713 dallo zio Nicholas Bernoulli in una lettera scritta al matematico francese Pierre Rémond de Montmort.

Nella formulazione originale, questo gioco fu attribuito ad un ipotetico casinò di San Pietroburgo, da cui appunto ne deriva il nome del paradosso. Per descrivere il paradosso si supponga di lanciare una moneta con probabilità 1/2 fino a che non esce testa.

6. Note di studio su Economia dei Mercati Finanziari, a cura di Davide Fiaschi e Nicola Meccheri. Dipartimento di economia e Management. Università di Pisa.

La prima volta che esce testa si smette di lanciare la moneta e si determinano i premi nel modo seguente: se esce testa al primo lancio si vince una somma pari a 2 (euro, ad esempio). Se esce testa al secondo lancio si ottiene una somma pari a $2^2 = 4$. Se esce testa al terzo lancio a $2^3 = 8$ e così via. Poiché se necessario la moneta viene lanciata un numero infinito di volte, i lanci sono indipendenti tra loro, il valore atteso di questa lotteria è ;

$$2 \left(\frac{1}{2}\right) + 2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty .$$

In sostanza poiché il valore atteso di questo gioco è infinito, se ci si dovesse basare sul solo valore atteso il soggetto dovrebbe essere disposto a pagare una grande somma di denaro per partecipare a questa lotteria. In realtà, ovviamente, le persone non sono disposte a pagare una grande somma di denaro per partecipare ad un gioco, come quello appena descritto, che da loro una probabilità molto piccola di vincere una grande somma di denaro.

1.2 - La Teoria Dell' Utilità Attesa e Della Razionalità

Per ovviare i problemi connessi al valore atteso si può fare riferimento al concetto di utilità attesa, che rappresenta ancora oggi il concetto più usato dagli economisti per la rappresentazione delle scelte in condizioni di incertezza.

In particolare gli anni '50 del secolo scorso segnano il raggiungimento dei più alti livelli della formalizzazione della teoria dell'utilità e della decisione, con l'uscita del celebre *Theory Of Games and Economic Behavior* di Von Neumann e Morgenstern, che oltre alla nascita della teoria dei giochi di strategia, segna l'inizio di una serie di esperimenti ed ipotesi di utilità attesa.

L'utilità attesa non è altro che una funzione di utilità applicata al caso di eventi incerti, che gode della proprietà di essere il valore atteso, cioè quel valore che assume in media una variabile casuale data una determinata distribuzione di probabilità, delle utilità dei singoli eventi possibili.

A gettare le basi della teoria dell'EUT fu quindi come detto in precedenza Daniel Bernoulli, seppur basata sulla stessa idea però trascorsero ben due secoli prima che Morgenstern e von Neumann (1944), attraverso un processo di assiomatizzazione, riuscissero a trasformare in procedure formali alcune intuizioni circa la decisione

umana e formalizzassero una teoria per l'analisi delle decisioni in condizioni di incertezza⁷.

L'*expected utility theory* (EUT) come modello descrittivo del comportamento economico, presuppone che un soggetto razionale prenda decisioni e poiché le conseguenze di queste sono incerte, la teoria della decisione rappresenta gli oggetti della scelta individuale per mezzo di lotterie, inoltre presuppone che il soggetto nello decidere obbedisca a degli assiomi⁸. In particolare sono quattro gli assiomi definiti dall'EUT:

Completezza; è definita una relazione binaria completa, se comunque scelti due elementi (nel nostro caso lotterie) a e b in X o a si trova nella relazione con b , o b si trova nella relazione con a ($\forall L^a, L^b \in X : L^a \succeq L^b \vee L^b \succeq L^a$). Significa che per ogni coppia di lotterie (L^a, L^b) in X possiamo scrivere ($L^a \succeq L^b$) per indicare che L^a è preferita o equivalente alla lotteria L^b . Naturalmente se $L^a \succeq L^b$ e L^a non è equivalente a L^b , allora la lotteria L^a è strettamente preferita a L^b ($L^a \succ L^b$), infine se $L^a \succeq L^b$ e $L^b \succeq L^a$ necessariamente $L^b \sim L^a$.

Transitività; è definita una relazione binaria transitiva, se e solo se per ogni a, b, c appartenenti ad X se a è in relazione con b e b è in relazione con c allora a è in relazione con c ($\forall L^a, L^b, L^c \in X : L^a \succeq L^b \wedge L^b \succeq L^c \rightarrow L^a \succeq L^c$). Significa che se L^a è preferita a L^b ed L^b viene preferita a L^c allora varrà che L^a sarà preferita a L^c .

Oltre agli assiomi della completezza e della transitività che consentono il rispetto della condizione di ordinalità delle preferenze vi sono due ulteriori assiomi quello della *Continuità* e quello di *Indipendenza*⁹. Il primo ha la funzione di preservare l'ordinalità delle lotterie rispetto a piccoli cambiamenti nella probabilità, esso è poco realistico ma necessario per ragioni puramente matematiche.

7. Dell'Anno R., (2006), "Scelte In Condizioni Di Incertezza", Rivista Di Politica Economica, pp. 217-179.

8. Motterlini M., (2005), Economia cognitiva e sperimentale, Milano, Egea.

9. L'originale formulazione di Von-Neumann e Morgenstern non conteneva questo assioma, ma ne venivano considerati altri che ne implicavano l'esistenza. Non si è seguita infatti per la presentazione degli assiomi la versione originale dell'UVM (1944) ma bensì quella proposta da Jensen N.E. (1967).

Quindi $\forall L^a, L^b, L^c \in X : L^a \succeq L^b \succeq L^c$ allora esisterà una probabilità $\alpha \in [0,1]$ per cui combinando le lotterie a e c, otterremo una lotteria composta che è indifferente in termini di scelta con la lotteria b. Dovrà quindi essere soddisfatta la seguente relazione: $L^b \sim \alpha L^a + (1-\alpha) L^c$.

Il secondo più importante, che poi è stato quello più discusso dalle tesi e ricerche dell'economia sperimentale, permette di mantenere l'ordinalità nelle preferenze tra due lotterie; L^a e L^b rispetto ad una combinazione lineare delle stesse con una terza L^c ($\forall L^a, L^b, L^c \in X$ e $\forall \alpha \in [0,1] \rightarrow L^a \succeq L^b \leftrightarrow \alpha L^a + (1-\alpha) L^c \succeq \alpha L^b + (1-\alpha) L^c$). Proprio questo assioma e la presenza di questa ipotesi che poi permetterà l'esistenza di alcuni paradossi ad es. Allais. Le teorie della non utilità attesa (NEU) infatti rinunciano a questo assioma per formulare teorie delle scelte in condizioni di incertezza con una maggiore capacità descrittiva.

Definiti gli assiomi si può procedere a quella che viene definita **funzione di utilità alla von Neumann - Morgenstern (vN-M)**, questa afferma che le preferenze dei soggetti rispetto a certe azioni, o lotterie che le rappresentano, possono essere rappresentate tramite una funzione che assegna alla generica lotteria L un valore, indicato con $U(L)$ ¹⁰. *In questo modello si applica una funzione di utilità, che assegna un valore numerico (u_n) alla soddisfazione associata ad ogni possibile evento (o lotteria) se questa è ricevuta con certezza, quindi per ogni coppia di lotterie $L^a = (p_1^a, \dots, p_n^a)$ e $L^b = (p_1^b, \dots, p_n^b)$, vale la seguente relazione :*

$$L^a \succeq L^b \leftrightarrow U(L^a) = \sum_{i=1}^n p_i^a u_n \geq U(L^b) = \sum_{i=1}^n p_i^b u_n.$$

Un agente che sceglie in conformità con gli assiomi precedenti - ed è dunque razionale" nel senso di Von Neumann e Morgenstern – massimizza l'utilità attesa EU.

Pertanto la stima della funzione di utilità ci può consentire di rappresentare la scelta di un soggetto posto di fronte a diverse alternative e scelte, tenendo presente che egli si orienterà sull'opzione che gli garantisce la massima soddisfazione (utilità). Come accennato in precedenza, il punto cruciale della teoria è che l'ordinamento dei valori

10. In particolare la funzione $U(L)$ va ad esprimere l'aspettativa dei soggetti sull'utilità che otterranno dall'esito finale della lotteria per tale motivo, in ciò che segue, sarà anche indicata con $E[u(W)]$ (cioè $U(L) \equiv E[u(W)]$), per cui, di qui in avanti, $U(L)$ e $E[u(W)]$ saranno utilizzati indifferentemente per indicare l'utilità attesa della lotteria considerata).

attesi di un insieme di contesti di scelta incerta è spesso diverso dall'ordinamento delle utilità attese delle alternative considerate¹¹. Quindi ad esempio se un giocatore dispone di una somma pari a 100. Può consumare direttamente questa somma, oppure giocarla alla roulette, puntando sul nero. Se trascuriamo per semplicità la possibilità che esca lo 0, in questo caso i due stati di natura sono nero (*A*) o rosso (*B*). Le probabilità sono di $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Se scegliete di non giocare, i vostri consumi saranno indipendenti dal fatto che esca un numero rosso o nero.

Avremo quindi $c_A = 100$ e $c_B = 100$. Se invece scegliete di giocare, i vostri consumi dipenderanno dallo stato di natura. In particolare, avremo $c_A = 200$, perché se esce nero avete vinto e la puntata viene raddoppiata, $c_B = 0$ perché se esce rosso perdete la posta. In questo modo, la scelta di giocare o meno, influenza i livelli di consumo di cui dispone il giocatore. Per stabilire se è meglio giocare alla roulette o non giocare, un consumatore che si comporti nel modo ipotizzato da von Neumann e Morgenstern dovrebbe confrontare i livelli di utilità attesa nei due stati del mondo. Se non giocate l'utilità attesa è pari a 100, mentre se giocate avrete un utilità attesa pari a $\frac{1}{2} u(200) + \frac{1}{2} u(0)$, dunque sarà meglio giocare se $\frac{1}{2} u(200) + \frac{1}{2} u(0) > u(100)$, nel caso contrario sarà meglio non giocare. Chiaramente quindi con il criterio dell'utilità attesa ciò che conta per attribuire un "valore" alla lotteria *L* non è semplicemente il suo valore atteso, ma si deve tener conto anche di come è fatta la funzione (u_n). Come vedremo, è proprio tale funzione, che può differire da soggetto a soggetto, che consentirà di tener conto dell'atteggiamento nei confronti del rischio, nell'ambito del processo con cui vengono valutate e ordinate le varie lotterie.

1.3 – Comportamenti in reazione al rischio

Ogni individuo agisce in maniera differente nei confronti del rischio e quindi si comporta in maniera differente a seconda o meno dell'atteggiamento che ha nei confronti dell'incertezza. Prima di analizzare nel dettaglio le proprietà nonché la forma della funzione (VNM), è utile ai fini delle analisi seguenti andare a definire due concetti

11. Bolino C.A. - Katz M. - Rosen H. – W. Morgan, (2010) *Microeconomia*, ediz.4°, McGraw- Hill, Milano, pp 179-149 462-449.

quello di “equivalente certo” e quello di “ Premio per il rischio”.

Possiamo definire equivalente certo di L il risultato (CE_L) che se ottenuto con certezza, fornisce un'utilità esattamente pari all'utilità di L;

$$u(CE_L) = U(L) \equiv E[u(W)].$$

Il premio per il rischio, invece misura quanto un individuo è disposto a pagare pur di eliminare il rischio della scelta, per ottenere un risultato certo. Quindi data una lotteria L, si definisce premio per il rischio la somma (PR_L) per cui risulta che;

$$u[E(W) - PR_L] = E[u(W)].$$

Considerando congiuntamente le due equazioni avremo che: $u[E(W) - PR_L] = u(CE_L)$, quindi semplificando possiamo riscrivere il tutto come $[E(W) - PR_L] = (CE_L)$, e da qui vedere che $PR_L = E(W) - CE_L$.

Ovvero il premio per il rischio sarà dato dalla differenza tra il valore atteso e l'equivalente certo di L.

Andando ora ad analizzare la funzione (VNM) innanzitutto possiamo dire che essa sia sempre crescente nei risultati:

$$u'(W) = d u(W)/d (W) > 0 \rightarrow u' > 0$$

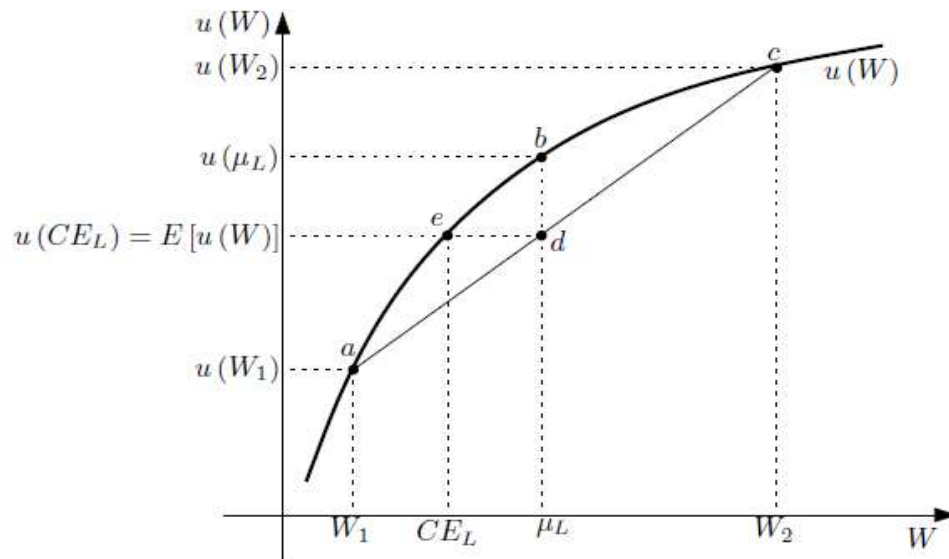
(es. ha guadagni maggiori corrisponde un'utilità più elevata).

Più interessante andare a vedere la curvatura della funzione, dal momento che questa ci va ad analizzare l'atteggiamento nei confronti del rischio.

In funzione di ciò si possono distinguere tre diverse tipologie di atteggiamenti;

- Avversione al rischio (*funzione di utilità concava*), il soggetto preferisce non scommettere, anche nel caso gli sia proposta una scommessa attuarialmente equa. Anche se, in media, una scommessa equa non influisce sul livello di consumo di chi vi partecipa, ma una persona avversa al rischio non scommetterà mai a causa dell'incertezza che qualunque scommessa comporta.

Graficamente avremo questa situazione:



La funzione $u(W)$ esprime l'utilità del soggetto di fronte a pagamenti certi. Questa funzione è crescente poiché $u'(W) > 0$ e concava verso il basso $u''(W) < 0$. La concavità quindi ci dà una indicazione sul grado di avversione al rischio, più concava è la funzione maggiore sarà l'avversione al rischio del soggetto in questione.

- $u(W_1)$ utilità che il soggetto otterrebbe potendo disporre con certezza della somma di denaro W_1 , (punto a).
- $u(W_2)$ utilità che il soggetto otterrebbe potendo disporre con certezza della somma di denaro W_2 , (punto c).
- $u(\mu_L)$, rappresenta invece l'utilità che il soggetto otterrebbe ottenendo una somma certa pari al valore atteso della lotteria L, (punto b).

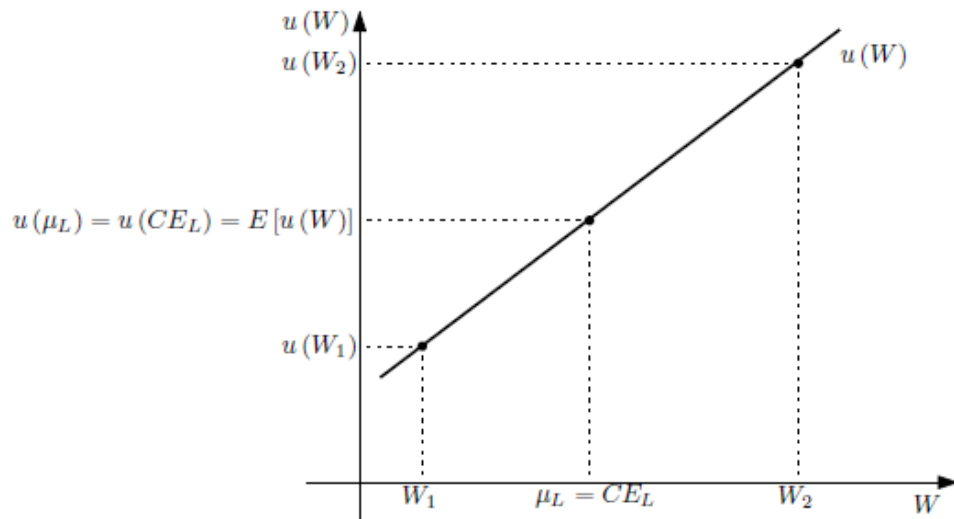
Come si trova il valore (utilità attesa) che il soggetto avverso al rischio attribuisce alla lotteria L? - Bisogna considerare il segmento AC (combinazioni lineari di $u(W_1)$ e $u(W_2)$ il punto combinato dipenderà da p_1 e p_2). Indichiamo quindi con d il punto in corrispondenza nell'asse delle ascisse al valore atteso della lotteria μ_L . L'utilità attesa attribuita dal soggetto avverso al rischio si trova sull'asse delle ordinate proprio in corrispondenza del punto d .

Risulta quindi che $E[u(W)] < u(\mu_L)$, l'utilità attribuita dal soggetto avverso al rischio alla lotteria è minore rispetto all'utilità che avrebbe potendo disporre con

certezza di quella somma pari al valore atteso della lotteria. In sostanza un soggetto avverso al rischio preferirà una somma certa al partecipare ad una lotteria con uguale valore atteso. Sull'asse delle ascisse è inoltre riportato il CE_L .

Avevamo detto in precedenza che $u(CE_L) = E[u(W)] \rightarrow$ (punto e). Risulta quindi che $CE_L < \mu_L$, in virtù di ciò il $PR_L > 0$.

- Neutralità al rischio (*funzione di utilità lineare*), il soggetto è indifferente, perché considera equivalenti tutte le possibilità con lo stesso valore atteso, anche se esse tra loro possano presentarsi con un grado di incertezza diverso. Graficamente avremo questa situazione:

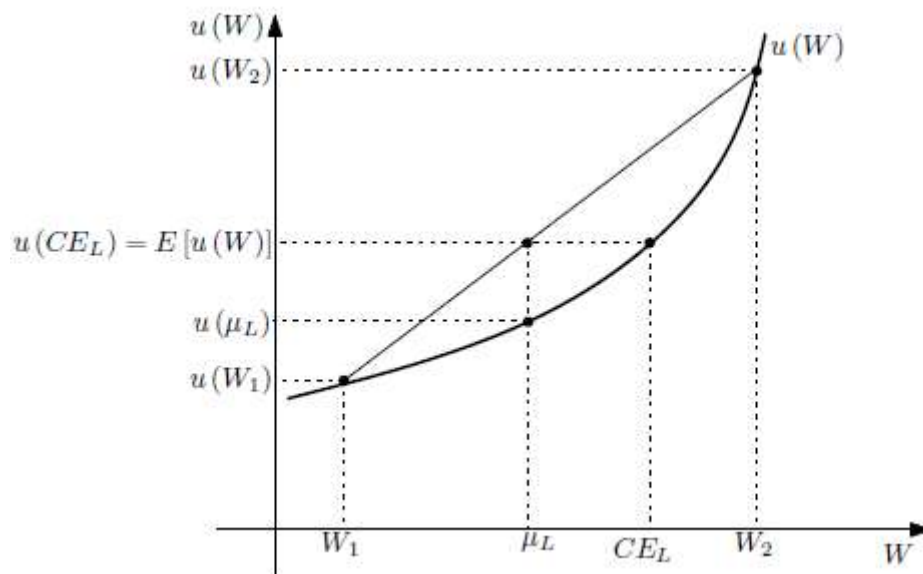


Quindi un soggetto sarà neutrale al rischio ogni qualvolta l'utilità che ottiene da un risultato certo è esattamente uguale all'utilità di una lotteria con lo stesso valore atteso. La funzione $u(W)$ è crescente poiché $u'(W) > 0$ ma non sarà più concava come nel soggetto avverso, ma lineare $u''(W) = 0$. Da quanto detto risulta quindi che $E[u(W)] = u(\mu_L)$, e che l'equivalente certo (CE_L) è esattamente uguale al valore atteso della lotteria $\rightarrow CE_L = \mu_L$, di conseguenza il premio per il rischio (PR_L) = 0.

Il soggetto neutrale al rischio sarà indifferente ad accettare o meno una lotteria equa.

- Propensione al rischio (*funzione di utilità convessa*), il soggetto è amante del rischio, che preferisce una prospettiva incerta con un determinato valore atteso a una certa con lo stesso valore atteso. Una persona con queste caratteristiche

preferisce il gioco d'azzardo alla certezza. Quindi un soggetto si definisce propenso al rischio ogni qualvolta l'utilità che ottiene da un risultato certo è inferiore all'utilità di una lotteria con lo stesso valore atteso. E' il caso opposto a quello con avversione al rischio, la funzione $u(W)$ è crescente poiché $u'(W) > 0$ però convessa verso il basso $u''(W) < 0$.



Risulta quindi che $E[u(W)] > u(\mu_L)$, l'utilità attribuita dal soggetto avverso al rischio alla lotteria è maggiore rispetto all'utilità che avrebbe potendo disporre con certezza di quella somma pari al valore atteso della lotteria. In sostanza un soggetto amante del rischio preferirà giocare per ricevere una somma più elevata, piuttosto di accontentarsi di una somma media certa. Anche qui sull'asse delle ascisse è inoltre riportato il CE_L . Risulta quindi che $CE_L > \mu_L$, conseguentemente il $PR_L < 0$ (negativo). A differenza dell'avversione al rischio dove il soggetto per eliminare il rischio associato a L è disposto a pagare, qui viceversa chiede di essere pagato per privarsi del rischio di L. Tale soggetto accetterà sempre di partecipare a lotterie eque.

1.4 - Limiti della Teoria dell'Utilità Attesa

Attraverso una serie di studi empirici l'economia sperimentale ha affermato che esistono tutta una serie di comportamenti, intesi come scelte umane, realmente

effettuate, che sembrano sistematicamente violare gli assiomi dell'EUT e che inevitabilmente hanno portato ad una chiave di lettura diversa da quella classica. Il tentativo di superare questi limiti ha prodotto una considerevole letteratura avente ad oggetto le teorie della non utilità attesa (NEUT). Analizzeremo ora due paradossi; il paradosso di Allais, che considera le decisioni prese dagli individui in un contesto di rischio e il paradosso di Ellsberg, che considera le decisioni prese in un contesto di ambiguità. La differenza principale fra i due esperimenti è che nell'esperimento di Allais la probabilità di un dato evento è data, cioè siamo in un contesto con probabilità oggettive, mentre l'esperimento di Ellsberg è condotto in un ambiente in cui le probabilità non sono note¹². Il termine "paradosso" a un valore neutro, significa "contrario all'opinione comune", e questo inevitabilmente concorre a determinare una chiave di lettura piuttosto che un'altra. Come nel 1728, la ricerca di una soluzione per il paradosso di San Pietroburgo costituì punto di partenza per la formulazione della teoria dell'utilità attesa di Von-Neumann e Morgenstern (1944), così a partire dal 1953 con il paradosso di Allais¹³ si cominciarono a evidenziare una lunga serie di sistematiche incoerenze della EUT.

1.4.1 - Paradosso di Allais

Una prima sfida quindi, alla teoria dell'utilità attesa (EUT) di Von-Neumann e Morgenstern, fu lanciata dall'economista francese Maurice Allais che riscontrò in diversi esperimenti come la capacità descrittiva dell'EUT, fosse violata.

In totale controtendenza con le tesi economiche di quel tempo, Allais mostra alcuni esperimenti in cui i soggetti, sottoposti a scelte alternative in condizioni di incertezza, violano sistematicamente le assunzioni della teoria dell'utilità attesa. Egli si dichiarava scettico sulla capacità della teoria di descrivere adeguatamente i comportamenti degli esseri umani. Riteneva che la percezione del rischio fosse distorta da numerosi fattori psicologici che il modello di von Neumann e Morgenstern non è in grado di rappresentare. In una dimostrazione pubblica diventata celebre, durante un convegno a

12. P. Coretto, (2002), "Una teoria della decidibilità: entropia e scelte in condizioni di incertezza", *Rivista di Politica Economica*, pp. 67-33

13. ALLAIS M., (1953), "Le comportement de l'homme rationel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école américaine", *Econometrica*, vol. 21, pp. 503-46.

Parigi, Allais riuscì a far compiere scelte anomale ad alcuni dei migliori matematici ed economisti della sua generazione (fra i quali in particolare Leonard Savage).

Gli esperimenti proposti da Allais si basano su due punti caratteristici: in primo luogo si identificano le proprietà della scelta che caratterizzano la funzione di utilità attesa, si tratta della completezza, transitività, continuità, e indipendenza.

In secondo luogo si sottopongono ai soggetti coppie di scelte binarie costruite in modo che qualcuna delle risposte alternative possibili comporti la violazione di almeno uno degli assiomi. Il che è appunto quello che accade in particolare il *paradosso di Allais*, mette in evidenza il limiti dell'assioma di indipendenza. L'economista francese chiese a un certo numero di persone di esprimere la loro preferenza nei confronti di due lotterie costituite da due coppie di alternative incerte. La prima coppia di alternative riferite alla prima lotteria era costituita da (A) un biglietto di una lotteria, con un premio di 2500 milioni di franchi e probabilità di vittoria pari al 33 per cento o un premio di 2400 milioni con probabilità di vittoria del 66 per cento e infine zero con probabilità dell'1 per cento. Mentre la seconda alternativa è (B) un biglietto di una lotteria con premio di 2400 milioni di franchi ricevuti con certezza.

A	B
2500 con probabilità 0.33	2400 con certezza
2400 con probabilità 0.66	
0 con probabilità 0.01	

La seconda coppia analogamente era costituita da (C) 2500 milioni di franchi e probabilità del 33 per cento o zero con probabilità del 67 per cento, e da (D) un biglietto di una lotteria con un premio di 2400 milioni con probabilità del 34 per cento, e zero con probabilità del 66 per cento.

C	D
2500 con probabilità 0.33	2400 con probabilità 0.34
0 con probabilità 0.67	0 con probabilità 0.66

Allais riscontrò che per i 72 intervistati del suo campione, l'82% sceglieva B nella prima coppia di lotterie e l'83% C nella seconda coppia. Tale risultato viola l'assunto di indipendenza della EUT, in base al criterio di utilità attesa queste due preferenze

risulterebbero incompatibili, infatti se la lotteria A è preferita alla lotteria B allora, per lo stesso agente, la lotteria D deve essere preferita a C.

Definendo le utilità $u(n)$, e la funzione di utilità su $u(0) = 0$. La dimostrazione è agevole si ha infatti:

$$\begin{aligned}U(A) &= 0,33u(2500) + 0,66u(2400) \\U(B) &= u(2400) \\U(C) &= 0,33u(2500) \\U(D) &= 0,34u(2400)\end{aligned}$$

Utilizzando la funzione di utilità (VNM) esprimiamo la relazione di preferenza espressa dalla prima coppia di lotterie $B \succ A$, in termini di utilità $U(B) > U(A)$, da cui $u(2400) > 0,33u(2500) + 0,66u(2400)$. Sottraendo $0,66u(2400)$ da entrambi i membri, si ottiene $0,34u(2400) > 0,33u(2500)$ che è il secondo problema di scelta tra le lotterie C e D. Valendo la relazione $U(C) > U(D) \leftrightarrow C \succ D$, risulta quindi che le scelte degli intervistati sono incoerenti in una logica di EUT.

Allais tentò di spiegare il comportamento individuale in termini di effetto *fanning out*¹⁴ delle curve di indifferenza, ovvero le curve di indifferenza (che caratterizzano l'agire degli agenti) rappresentate sul simpleso sono lineari ma non parallele. Invece secondo l'assioma d'indipendenza le curve di indifferenza, rappresentate

graficamente attraverso il diagramma triangolare proposto da Marschak – Machina¹⁵, si dispongono come un fascio di rette parallele e lineari.

Dopo il tentativo di Allais, gran parte dei ricercatori cercarono di modellare l'effetto *fanning out*¹⁶. Questi studi, concentrati tra la fine degli anni '70 ed gli anni '80, sono accomunati dalla modificazione dell'assioma di indipendenza, ed in questa diversa assiomatizzazione l'ipotesi di Allais finiva per emergere come risultato della teoria.

14. Il concetto di *fanning out* è connesso proprio alla violazione dell'assioma di indipendenza, implica curve di indifferenza che sono lineari ma non parallele, in questo modo l'esperimento di Allais non diventa più paradossale.

15. Marschak J.A., (1950), "Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility", *Econometrica*, vol. 18, pp. 111-41.

16. Tra queste proposte ci sono il modello "weighted expected utility" di Chew e MacCrimmon, ed il più noto modello della "non-linear expected utility" dovuto a Machina (1982).

Come Frechette e Thutill (2002) suggeriscono, il modo più semplice per superare sia il paradosso di Allais che molti altri aspetti controversi della teoria dell'utilità attesa, consiste nell'assumere che gli agenti, nella valutazione delle lotterie, associno a ciascun esito delle probabilità soggettivamente pesate.

1.4.2 - Paradosso di Ellsberg

Un' altro dei più evidenti paradossi del modello di von Neumann - Morgenstern risale al 1961, il *paradosso di Ellsberg*, egli evidenziò come fosse violata l'EUT ogni qualvolta gli agenti non conoscessero le probabilità di ogni evento che determinano gli esiti di una lotteria. Al centro del paradosso di Ellsberg è la reazione alla vaghezza o ambiguità definita come una scelta in cui ai payoff attesi non è possibile attribuire una valutazione probabilistica soggettiva¹⁷. Ellsberg utilizzò l'esempio descritto di seguito, in questo paragrafo, per dimostrare che in contesti con ambiguità l'individuo modifica il suo comportamento. I soggetti per essere coerenti con la teoria dell'utilità attesa dovrebbero scegliere l'alternativa che massimizza l'utilità e quindi quella che produce il massimo benessere per l'individuo, in questo caso l'individuo può essere classificato razionale, ma come vedremo e come abbiamo visto con il paradosso di Allais non sempre i consumatori si comportano in questo modo razionale e inevitabilmente sono classificati come irrazionali.

L'esperimento avveniva ponendo gli intervistati davanti alla seguente scelta: data un'urna con 100 palline rosse e 200 palline blu e verdi dove l'esatta proporzione è ignota, viene estratta una pallina, casualmente dall'urna, l'estrazione è legata ad un premio monetario in caso di vincita, e si chiede ai soggetti partecipanti all'esperimento di scegliere fra due problemi, problema X e problema Y;

17. Ellsberg D., (1961), "Risk, ambiguity and the Savage's axioms", *The Quarterly Journal of Economics*, v.75, n.4, pp. 643-669.

Problema X

Alternativa A	Alternativa B
100 € se la pallina estratta è rossa	100 € se la pallina estratta è blu
0 € se la pallina estratta è verde o blu	0 € se la pallina estratta è rossa o verde

Problema Y

Alternativa C	Alternativa D
100 € se la pallina estratta è verde o blu	100 € se la pallina estratta è rossa o verde
0 € se la pallina estratta è rossa	0 € se la pallina estratta è blu

I soggetti a cui è stato sottoposto l'esperimento hanno risposto che preferiscono A rispetto B e preferiscono C rispetto a D. Per vedere se queste scelte sono coerenti con la teoria dell'utilità attesa sviluppiamo la rappresentazione numerica; per il calcolo dell'utilità attesa occorre assegnare le varie probabilità e un individuo con comune razionalità dovrebbe stimare $[p(R)] = 1/3$ se la pallina estratta è rossa e $[p(V)] + [p(B)] = 2/3$ se la pallina estratta non è rossa, quindi $[p(R)] + [p(V)] + [p(B)] = 1$.

Rappresentazione numerica:

$$A \geq B \rightarrow 1/3 u(100) + 2/3 u(0) \geq p(B) u(100) + [1 - p(B)] u(0)$$

$$[1/3 - p(B)] u(100) \geq [1/3 - p(B)] u(0).$$

$$C \geq D \rightarrow 2/3 u(100) + 1/3 u(0) \geq [1 - p(B)] u(100) + p(B) u(0)$$

$$[2/3 - 1 + p(B)] u(100) \geq [-1/3 + p(B)] u(0)$$

$$[1/3 - p(B)] u(100) \leq [1/3 - p(B)] u(0).$$

Attraverso la rappresentazione numerica si evidenzia l'incoerenza tra la teoria e la realtà, per la teoria se un individuo segue l'alternativa A rispetto a B dovrebbe scegliere l'alternativa D rispetto a C. La spiegazione del comportamento studiato da Ellsberg può risiedere oltre alla troppa rigidità dell'assioma di indipendenza ma anche ad un'errata valutazione che si fa sulle probabilità.

Ellsberg solleva il problema anche utilizzando due urne; ciascun'urna contiene biglie rosse e blu, ma la prima è composta da 100 biglie di cui 50 rosse e 50 blu e la seconda invece composta da 100 biglie ma non si conosce la composizione, non si conosce il numero di biglie rosse e blu. Si chiede ai soggetti sottoposti all'esperimento di puntare su un colore e se la biglia estratta dall'urna è del colore scelto si vince 100 €, nel caso contrario non si vince nulla. Considerando l'urna 1 dove la proporzione delle biglie rosse e blu è nota, e si chiede ai soggetti se si preferisce o se si è indifferenti a scommettere su una biglia rossa o blu, la maggior parte risponde che è indifferente. Quindi la probabilità che si associa all'estrazione di una biglia rossa è uguale alla probabilità che si associa all'estrazione di una biglia blu [$p(R1) = p(B1)$]. Considerando invece l'urna 2, con composizione ambigua, e si pone la stessa domanda, ancora una volta i soggetti sono indifferenti [$p(R2) = p(B2)$].

Se, invece, si chiede di indicare se si preferisce l'estrazione di una biglia rossa dell'urna 1 o dall'urna 2, i soggetti non sono più indifferenti, ma preferiscono l'urna 1 [$p(R1) > p(R2)$]; la stessa scelta viene fatta se si estrae una biglia di colore nero [$p(B1) > p(B2)$]. Anche in questo esperimento si evidenzia come l'incertezza e la mancanza di informazioni associate all'evento portano a preferire l'opzione basata su informazioni precise delle probabilità di vincita o perdita.

Ellsberg suddivide in due componenti l'incertezza; quella di tipo oggettivo e quella di tipo soggettivo. Gli individui essendo generalmente caratterizzati da una sostanziale avversione all'incertezza, valutano i due esiti della lotteria equivalenti in termini di rischio ma attribuiscono alla scelta "estrazione biglia dall'urna 2" una componente aggiuntiva di incertezza, per questo nell'intento di minimizzare l'incertezza totale, essi scelgono l'urna 1. Come già accennato le strade percorse da Allais prima e da Ellsberg poi, non si dimostreranno fruttuose, al contrario confineranno il problema in un ambito specialistico molto ristretto, limitandone l'impatto. In ogni caso nel mondo scientifico, sia nell'area della teoria della probabilità che nel mondo della teoria economica della scelta, la portata delle opere di Allais e Ellsberg non fu valutata appropriatamente.

1.4.3 - Razionalità limitata ed Effetti di contestualizzazione.

Nell'impostazione tradizionale, ci si concentra sulla decisione come scelta, considerando come dato secondario la costruzione del "contesto della decisione", e la scoperta delle strategie alternative.

Possiamo riscontrare che grazie ai lavori dell'economista e psicologo Herbert Simon si è costituita una base o comunque spunto di riflessione a quella che è oggi la teoria comportamentale. Attraverso le sue idee sulla *razionalità limitata* nell'analisi delle decisioni umane, Simon critica il modello di utilità attesa perché tale modello presume che il soggetto decisionale possa contemplare, in una visione onnicomprensiva tutto ciò che gli si trova spaziotemporalmente di fronte e quindi valutare l'intera gamma delle alternative a sua disposizione, non solo in quel momento, ma anche nel panorama completo del futuro. In sostanza si va contro la teoria classica di perfetta razionalità dell'individuo e per fare ciò occorre non soltanto condurre la ricerca delle informazioni rilevanti, ma la costruzione di un modello mentale, che manifesti i limiti della razionalità, e che rappresenti il contesto decisionale nel miglior modo possibile.¹⁸ In particolare il concetto di *bounded rationality*¹⁹ è stato proposto da Simon come alternativa per elaborazione di modelli matematici della presa di decisione, partendo dalla considerazione che la razionalità degli individui è condizionata dalle informazioni di cui sono in possesso, dalle limitazioni cognitive proprie della mente umana, e dalla necessità di adottare decisioni in un lasso ristretto di tempo. Tutto ciò comporta l'impossibilità pratica di esercitare una razionalità perfetta, pertanto la maggior parte delle persone per Simon sono solo parzialmente razionali poiché nelle scelte sono guidate dalle loro emozioni²⁰.

18. Simon H.A., (1997), "Models of Bounded Rationality", vol.3, MIT Press, Boston. – disponibile anche una traduzione in italiano come *Scienza Economica e comportamento umano*, Torino, Edizioni di Comunità, (2000).

19. Simon H.A., (1957), "Models of Man", New York, John Wiley e Sons.
- Schilirò D., (2012), "Bounded Rationality: Psychology, economics and financial crisis", MPRA, paper n° 40280.

20. Righini E., (2012), "Behavioural Law and Economics – Problemi di policy, assetti normativi e di vigilanza", FrancoAngeli.

Attraverso le idee di Simon sulla razionalità limitata nell'analisi delle decisioni umane l'attenzione si sposta dalla decisione, alla rappresentazione mentale delle alternative, aprendo così la via a una serie di studi empirici sulla costruzione delle strategie e sulla nascita del dibattito sui limiti cognitivi umani e i processi decisionali in condizioni d'incertezza. Per Simon quindi, occorre fornire una teoria in grado di descrivere come gli agenti economici prendano effettivamente le loro decisioni, affinché la scienza economica possa superare l'abisso che la separa dalla "cosa reale", e così ispirare scelte di politica economica che siano efficaci nel mondo che ci circonda e non nel "mondo delle idee" dell'*homo oeconomicus*.

Quindi a tal proposito il filone di studio aperto da Tversky e Kahneman deve non poco alla critica di Simon, essi ritengono che gli economisti non possano ritenersi soddisfatti della capacità predittiva della teoria dell'utilità, e che per questo occorra porre l'analisi dei processi cognitivi al centro dell'indagine del comportamento economico indicando così la via per la costruzione di nuovi modelli. Secondo la tesi di Tversky e Kahneman la teoria EUT, non tiene affatto in considerazione diversi fenomeni ampiamente documentati, in particolar modo mettono in evidenza come le scelte individuali siano fortemente condizionate dal modo in cui le particolari opzioni di scelta vengono presentate (*framing effects*). A tal proposito, per consentire di capire cosa intendono per framing effects (effetti di conteso), Tversky e Kahneman nel 1981 presentarono un famoso esempio in cui due gruppi di soggetti vengono sottoposti al seguente esperimento:

"Immagina che gli Usa si preparino per contrastare un'improvvisa epidemia asiatica, la quale è stimata causare la morte di 600 persone. Sono proposti due programmi alternativi per contrastare l'epidemia. Assumendo che la stima (affidabile) delle conseguenze dei due programmi siano le seguenti, una volta suddiviso il campione in due gruppi, al gruppo 1 sono presentate le seguenti opzioni:

- Se il programma A è adottato 200 persone saranno salvate.
- Se il programma B è adottato ci sono 1/3 delle probabilità che 600 persone saranno salvate e 2/3 che nessuno si salvi.

Per il gruppo 2, le strategie da scegliere invece sono:

- Se il programma C è adottato, 400 persone moriranno.
- Se il programma D è adottato ci sono 1/3 delle probabilità che nessuno muoia, e 2/3 delle probabilità che 600 persone moriranno.

Seppur le due coppie di opzioni sono stocasticamente equivalenti (la differenza è solamente nell'enfasi che si pone sulle vite salvate o piuttosto sulle persone che moriranno), l'esperimento evidenzia sostanziali differenze nei due gruppi.

Il 72 per cento dei soggetti preferisce il programma A rispetto al B, mentre il suo equivalente stocastico C è preferito rispetto a D solo dal 22 per cento degli intervistati. L'EUT, quindi risulta spesso contraddetta se sottoposta a verifica empirica, palesando carenza descrittiva e scarsa capacità previsiva dei comportamenti umani in svariati contesti. I limiti dell'EUT, evidenziati dall'economia sperimentale, hanno indotto numerosi studiosi a percorrere nuove strade per la rappresentazione del processo decisionale in condizioni d'incertezza. Per ulteriori maggiori dettagli vedere l'indagine di Starmer (2000).

1.5 - Ascesa della Behavioural Economics e lo sviluppo di nuove teorie Non EUT

L'interazione tra economia e psicologia vanta una lunga storia, la complementarità tra l'approccio analitico e quello più propriamente sociale è importante ai fini della comprensione del *homo oeconomicus* e del tentativo di accrescere il realismo descrittivo. La Behavioural Economics (Economica Comportamentale), rimpiazzando l'ipotesi di perfetta razionalità utilizzata dalla modellistica economica tradizionale, introduce assunzioni maggiormente coerenti con la realtà osservata. Infatti un modello prettamente matematico non è in grado di riprodurre tutti i dettagli di una situazione reale. La BE è forza corrosiva e allo stesso tempo rigeneratrice, Rabin²¹ afferma che gli economisti utilizzano ipotesi per descrivere la natura umana delle decisioni che, per la psicologia, risulterebbero palesemente errate. Esse, ad esempio, assumono agenti con preferenze ben definite e stabili nel tempo, congetturano individui che sono perfettamente informati ed elaborano le informazioni immediatamente, suppongono agenti in grado di massimizzare funzioni di utilità attesa e che siano in grado di ordinare le preferenze in maniera ben definita.

21. Rabin M.,(2000), "Risk Aversion and Expected Utility Theory: A Calibration Theorem" , Working Paper , Berkley University of California, Departments of Economics, USA. – "A Perspective on Psychology and Economics", European Economic Review, vol. 46, (2002), pp. 657-85.

Con la stessa forza anche Mullainathan e Thaler²² oppongono critiche di inadeguatezza dell'EUT sintetizzando in tre argomentazioni, le principali deviazioni dei comportamenti umani e dei modelli economici classici;

la *razionalità limitata*, che riflette le limitate capacità degli agenti nella risoluzione dei problemi.

La *forza di volontà*, insufficiente che spiega perché a volte le persone fanno scelte che non sono coerenti con il loro interessi di lungo periodo.

I *comportamenti non perfettamente egoistici*, che permettono di comprendere il perché gli esseri umani siano disposti a rinunciare e sacrificare parte dei propri interessi per aiutare gli *altri*²³.

La BE è uno dei più recenti tentativi per trovare una soluzione efficace per le scienze economiche, per rispondere al meglio alla comprensione del comportamento umano, nonché per riuscire a motivare il perché di una scelta piuttosto che di un'altra. Il valore della BE e quello di mostrare, non solo sperimentalmente, l'inconsistenza delle ipotesi su cui si basa la teoria delle scelte ma, soprattutto, proporre teorie alternative salvaguardando il metodo della ricerca economica. I limiti dell'EUT, evidenziati dall'economia sperimentale, hanno indotto numerosi studiosi a percorrere nuove strade per la rappresentazione del processo decisionale in condizioni di incertezza.

Nel vasto panorama di teorie Non- EUT occorre menzionare la "*Weighted Expected utility*" di Chew e MacCrimmon, (1979) , la "*Prospect Theory*" di Tversky e Kahneman la "*Rank dependent utility*" di Quiggin (1982), "*la Regret Theory*" di Loomes e Sugden (1982) e ancora la "*Non-linear expected utility*" dovuto a Machina (1982), la "*Choquet expected utility*" (Schmeidler, 1989), la "*MaxMin xpected utility*" (Gilboa e Schmeidler, 1989), la "*Quadratic utility theory*" (Chew 1991) e la "*Cumulative Prospect Theory*" (Tversky e Kahneman 1992).

22. Mullainathan S.- Thaler R., (2000), "Behavioral Economics", NBER, Working Paper.

23. La dimensione della beneficenza è indicativa delle preferenze sociali in campo. Negli Stati Uniti, nel 2002, 240,9 miliardi di dollari sono stati donati in beneficenza, con un approssimativa quota del 2 per cento del PIL. Così come le donazioni di tempo, sotto forma di volontariato sono stati notevoli: il 44 per cento degli intervistati di un sondaggio ha riferito che spende del tempo per una organizzazione caritatevole (in media circa 15 ore al mese). Nel complesso, una quota sostanziale del PIL riflette una preoccupazione per gli altri, un risultato qualitativamente coerente con i risultati sperimentali.

- Della Vigna S. (2009), "Psychology and Economics: Evidence from the Field", Journal of Economic Literature, UC Berkeley and NBER.

1.5.1 Teoria del Prospetto

Sicuramente merita attenzione il lavoro di due psicologi israeliani Daniel Kahneman e Amos Tversky che nel 1979 sviluppano un'alternativa descrittiva della teoria dell'utilità attesa di Morgenstern e von Neumann, la “**Teoria del Prospetto**” apparso per la prima volta sulla prestigiosa rivista *Econometrica* nel 1979. Ciò significa che mentre la teoria classica aveva il fine di stabilire le condizioni per cui una decisione possa definirsi razionale, la teoria del prospetto si propone invece di fornire una descrizione di come gli individui agiscono di fronte a una decisione. Attraverso una serie di esperimenti infatti, Kahneman e Tversky dimostrano come le scelte degli esseri umani violassero sistematicamente i principi della razionalità economica.

Nello sviluppo del loro modello, Kahneman e Tversky distinsero, nel processo umano, due fasi di scelta fondamentali. La prima, che nominarono di *Editing*, ed una successiva, che è poi la scelta vera e propria, coincidente con una valutazione (*Evaluation*) delle alternative. La fase di Editing consiste in un'analisi preliminare dei prospetti offerti e spesso matura una rappresentazione semplificata del problema proposto. Essa si compone di diversi momenti.

- *Coding* (codificare), consiste nel confrontare, in termini di guadagno o perdita, i risultati della lotteria in funzione del punto di riferimento prescelto;
- *Combination* (combinazione), consistente nella combinazione delle probabilità associate ad esiti identici;
- *Segregation* (segregazione), ovvero l'isolamento delle componenti rischiose dell'alternativa dalle non rischiose;
- *Cancellation*: l'isolamento mostra come il decisore sostanzialmente ignori gli aspetti comuni alle opzioni di scelta, e porta alla cancellazione degli elementi comuni alle diverse alternative;
- la semplificazione consistente nel semplice arrotondamento dei valori o delle probabilità, o anche l'eliminazione di coppie valori-probabilità altamente improbabili.
- la rilevanza della dominanza, ovvero l'accertamento delle alternative che prevalgono sulle altre e la cancellazione di queste ultime.

Terminata la fase di editing, si passa alla fase di valutazione (*Evaluation*), qui il decisore confronterà diverse prospettive al fine di stimare il valore e di individuare l'alternativa con il valore più alto, che infine viene scelta.

La genesi della teoria, cioè il processo che conduce alla sua scoperta e formulazione, segue una direzione, per così dire, dal *basso verso l'alto*: dalle osservazioni empiriche alla teoria che le spiega. Al contrario, la teoria dell'utilità attesa ha una fondazione assiomatica. Essa si costituisce seguendo un percorso opposto: *dall'alto verso il basso*. Tversky e Kahneman non mancano di sottolineare che entrambe le teorie sono indispensabili: la teoria dell'utilità attesa per caratterizzare il comportamento razionale, e la prospect theory per catturare il comportamento reale, infatti è solo grazie al concetto di comportamento razionale che è possibile individuare le sue violazioni; e quindi analizzare il modo in cui le scelte osservate si discostano (sistematicamente) da quelle razionali. In questo senso, il concetto di razionalità normativa svolge un ruolo euristico, nella misura in cui suggerisce il genere di osservazioni e di esperimenti che, violando la teoria dell'utilità attesa, indicano la strada verso una teoria della scelta empiricamente fondata in grado di accomodarli²⁴. I due autori concentrano, soprattutto la loro tesi su alcuni importanti aspetti psico-economici, in realtà collegati tra loro: uno è relativo al fatto che gli agenti decidono secondo **regole euristiche** (regole del pollice), regole cognitive che semplificano il loro processo decisionale, portandoli di fatto a decidere di fronte a problemi complessi o informazioni incomplete. Il principio che giustifica l'esistenza di euristiche è quello secondo cui il sistema cognitivo umano è un sistema a risorse limitate che, non potendo risolvere problemi tramite processi algoritmici, fa uso di euristiche come efficienti strategie per semplificare decisioni e problemi. In sostanza quindi possiamo definirle come delle *scorciatoie mentali* e approssimative che utilizziamo quando ci troviamo di fronte ad una certa situazione, e queste si mettono in atto in modo inconsapevole e di conseguenza, sono molto difficili da evitare poiché ci accorgiamo di averle usate solo a posteriori. Cioè dopo averle effettivamente applicate ai nostri giudizi. Un esempio banale di euristica è quello di individuare un numero pari o dispari, guardando solo l'ultima cifra a destra. Sebbene le euristiche funzionino correttamente, nella maggior parte delle circostanze quotidiane, in certi casi possono portare a errori. Infatti l'uso di strategie euristiche se da

24. Motterlini M.- Guala F., (2011), "Mente, Mercati, Decisioni. Introduzione all'economia cognitiva e sperimentale", Egea, Milano.

una parte semplifica il processo sottostante al giudizio, dall'altra può provocare distorsioni pervasive o errori sistematici che vengono definiti *bias*²⁵ cognitivi. Gli altri aspetti psicologici possono essere descritti come dei fenomeni osservati da Kahneman e Tversky e sono l'effetto certezza, l'effetto riflesso, l'effetto isolamento e infine l'effetto contesto.

L'effetto *certezza*, consiste nella preferenza degli agenti ad eventi certi piuttosto che a eventi probabili. In genere si osserva come i soggetti preferiscano un guadagno più basso ma certo, anziché un guadagno probabile più elevato.

L'effetto *riflessione*, consiste nella manifestazione esattamente opposta delle preferenze riguardanti eventi positivi e eventi negativi, che non sono considerati allo stesso modo. Gli individui preferiscono eventi positivi di valore minore ma con probabilità maggiore a eventi positivi di valore maggiore ma con probabilità minore, ed in modo esattamente contrario essi preferiscono gli eventi negativi di valore maggiore ma con probabilità minore agli eventi negativi di valore minore ma con probabilità maggiore. Inoltre gli individui preferiscono gli eventi positivi certi a quelli incerti e eventi negativi incerti a quelli certi, quindi il fenomeno si inverte dalla considerazione di eventi positivi alla considerazione di eventi negativi.

L'effetto *isolamento*, consiste invece nella scomposizione e nell'isolamento di ogni alternativa per agevolare il processo di scelta cosicché da concentrarsi solamente su alcuni elementi di un'alternativa e non il suo complesso.

Infine occorre soffermarsi sull'**effetto contesto** (*framing*), il contesto, il punto di partenza o status quo, in cui l'individuo si trova ad operare la scelta, ha un effetto determinante sulla scelta stessa. In particolare il modo in cui viene presentato il problema all'individuo fa sì che i possibili esiti che egli sceglierà possano cambiare, esempio di quanto fin'ora detto, è il problema della malattia asiatica (precedentemente esposto) in cui due diverse formulazioni dello stesso identico problema conducevano a due diverse decisioni da parte della maggioranza degli individui.

25. Queste euristiche specie se applicati in ambito finanziario possono portare a bias molto costosi. Col termine anglosassone *bias* si indica una predisposizione ad un errore di tipo cognitivo. In italiano potremmo tradurlo in "pregiudizio", nel senso di qualcosa che anticipa un giudizio. Esempi di bias in ambito aziendale possono essere: l'eccessivo ottimismo, l'overconfidence o l'illusione di controllo da parte dei manager.

E' quindi nella seconda metà degli anni Settanta, che queste idee trovano una formulazione unitaria e coerente nella cosiddetta prospect theory, un modello della decisione alternativo all'utilità attesa. Secondo UVM, l'utilità attesa della lotteria è pari:

$$EU = \sum_{i=1}^n p_n u_n .$$

La prospect theory invece postula l'esistenza di due funzioni²⁶: la funzione di valore (V) e la funzione di ponderazione delle probabilità (π), tali che il decisore preferisce strettamente X a Y se e solo se: $\pi(p_i) v (\Delta x_i) > \pi(q_i) v (\Delta y_i)$;

dove $\Delta x_i = x_i - x_0$ è il cambiamento associato a una conseguenza x_i rispetto a un dato livello di riferimento x_0 . Quindi $PT = \sum_{i=1}^n \pi(p_n) V(x_i)$.

Prospect theory e teoria dell'utilità attesa si distinguono per tre caratteristiche fondamentali da cui discendono importanti implicazioni:

Primo, nella prospect theory il decisore non è interessato agli stati finali di per sé, ma ai cambiamenti di stato (Δx_i) relativi al livello di riferimento x_0 che rappresenta lo *status quo* ossia il livello se vogliamo di benessere iniziale, si parla di (reference point). L'esito della scelta è quindi codificato in termini di vincita, se superiore al livello di riferimento; e in termini di perdita, se inferiore a esso. La conseguente classificazione in due distinte categorie, perdite e vincite, in relazione al soggettivo posizionamento del *reference point* condiziona radicalmente il modo in cui gli agenti sceglieranno.

Secondo, la funzione-valore V ha la forma di una «S» rispecchiando così la diversa attitudine al rischio nei confronti delle vincite e delle perdite. È quindi rispettivamente concava (avversa al rischio) nell'ambito delle vincite, e convessa (propensa al rischio) nell'ambito delle perdite. In tal senso sarà spiegato di seguito il fenomeno dell'avversione alla perdita.

Terzo, nella teoria dell'utilità attesa l'utilità di ogni esito possibile è ponderata con la sua probabilità. Nella prospect theory il valore di ogni cambiamento di benessere è moltiplicato invece per un «peso di decisione». La funzione di ponderazione π è monotona e crescente, varrà poi $\pi(0) = 0$ e $\pi(1) = 1$; in questo modo sovrastima sistematicamente probabilità molto piccole e sottostima probabilità medie o molto grandi.

26. Per ulteriori approfondimenti:

Kahneman D. – Tversky A., (1979), “Prospect Theory, an analysis of decision under risk”, *Econometrica*, n. 47: 2.

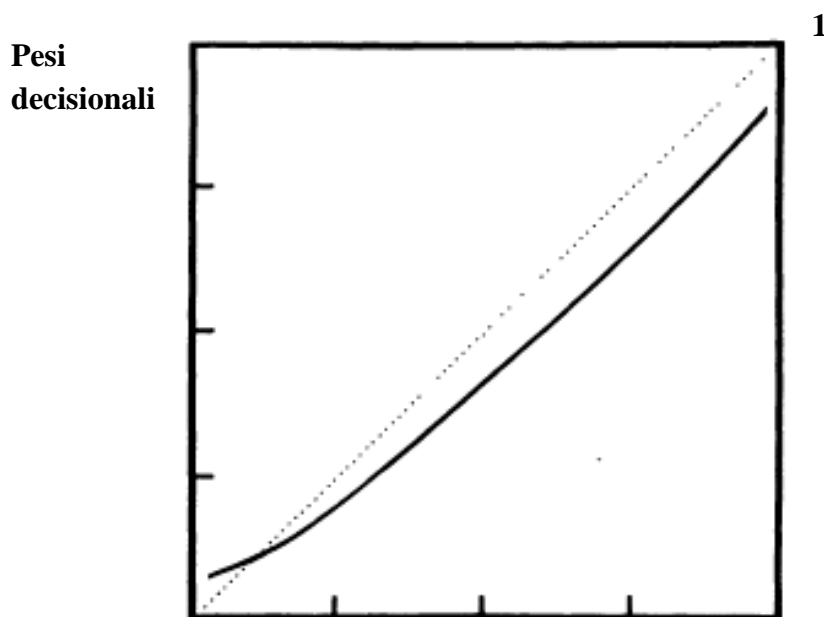
Secondo questa funzione i pesi attribuiti dagli individui alle probabilità di occorrenza di un evento non rispecchiano una funzione lineare. Facciamo un esempio per comprenderla meglio:

Supponiamo che ci sia una possibilità di vincita di 1mln €. Consideriamo inoltre, che vi siano quattro classi di probabilità per ottenerla.

Se lanciamo un dado non truccato, ed esce il numero 1, si passa da 0% di probabilità al 5%. Se esce il numero 2, si passa dal 5% al 10% di probabilità di vincere 1 mln €. Se si ottiene il numero 3, si avrà una probabilità che passa dal 60% al 65%. Ed infine se esce il numero 4, la probabilità di vincita passa dal 95% al 100%. In tutti e quattro i casi, si ha comunque un incremento del 5%. Secondo la teoria di Von Neumann e Morgenstern, in cui le probabilità entrano in modo lineare, dovrebbero essere valutati tutti allo stesso modo questi incrementi di probabilità. Ma riflettendo su i diversi incrementi: il passaggio da 0→5% sta a significare che all'inizio non c'è nessuna possibilità di vincere 1mln €, e ora c'è anche se piccola. Questo ovviamente, ha un impatto diverso rispetto agli altri, 5%→10% e 60%→65%; in questi casi dove la probabilità di vincere era presente, è solo aumentata di poco. Se consideriamo l'ultimo caso, 95%→100%, si passa da una probabilità molto alta di vincere ad una certezza.

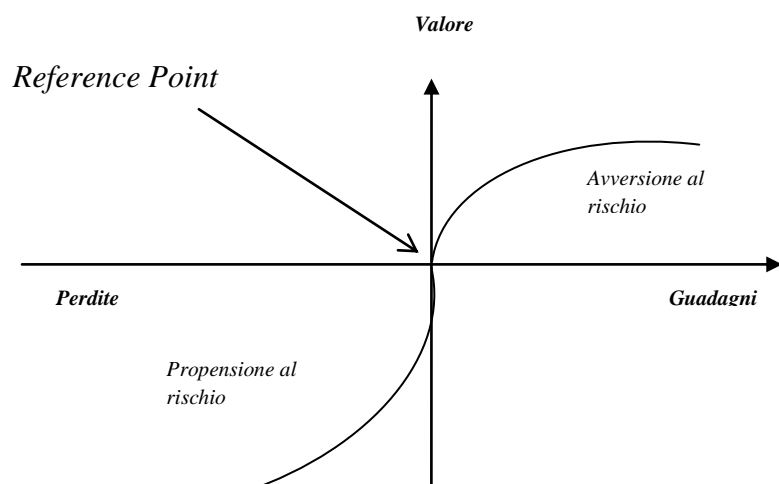
Dunque questi incrementi psicologicamente non hanno lo stesso peso.

Funzione di ponderazione PT.



Nella PT il valore marginale degli esiti decresce all'allontanarsi dal punto di riferimento (diminishing sensitivity). Tversky e Kahneman applicarono anche in questo caso il metodo deduttivo per la formulazione delle loro ipotesi. Essi constatarono che gli individui, in modo sistematico, rivelavano una sensibilità nei confronti delle vincite e delle perdite che decresceva all'allontanarsi da un dato livello di riferimento. In altri termini la variazione di ricchezza rispetto allo status quo è percepita in modo marginalmente decrescente.

Gli aspetti sopra citati determinano quindi una funzione valore dalla caratteristica forma ad *S-shaped* asimmetrica, questo ci porta quindi a spiegare con più precisione un fenomeno molto importante da considerare, che è l'**avversione alle perdite**. Per la maggior parte degli individui la motivazione ad evitare una perdita è superiore alla motivazione a realizzare un guadagno. Tversky e Kahneman stimarono il rapporto tra avversione alle perdite e propensione alle vincite nell'ordine di 2 a 1. Questo principio psicologico generale, che è probabilmente collegato ad una sorta di istinto di sopravvivenza, fa sì che la stessa decisione può dare origine a scelte opposte se gli esiti vengono rappresentati al soggetto come perdite piuttosto che come mancati guadagni. L'avversione alle perdite è la componente della teoria del prospetto che ha riscosso maggiore interesse nella comunità scientifica. La teoria del prospetto, quindi, integra in una formulazione matematica gli aspetti più propriamente psicologici, con il principio fondamentale dell'utilità attesa secondo cui la scelta più razionale è quella che massimizza il prodotto del valore atteso di ogni evento per la sua probabilità, introducendo la funzione valore (*value function*), in cui le probabilità degli eventi possibili viene ponderata attraverso il valore π , che rappresenta il "peso", il valore che ogni esito ha nella valutazione dell'individuo.



Come risulta chiaro anche dal grafico sopra esposto, la value function ha un andamento non lineare: in particolare considerando l'origine come punto di partenza, come status quo, la funzione è concava nella regione dei guadagni e convessa nella regione delle perdite: questo significa che piccole variazioni vicine all'origine, in entrambe le regioni, hanno un impatto maggiore sulla scelta rispetto a grosse variazioni lontane dal punto stesso (*diminishing sensitivity*). Inoltre, la curva ha una pendenza maggiore nella regione del dominio delle perdite proprio per il fenomeno dell'avversione alle perdite degli individui. Questa proprietà è efficacemente resa dall'espressione inglese "*losses loom larger than gains*", le perdite hanno maggior valore dei guadagni, agli occhi del decisore. Le persone infatti reagiscono in modo diverso a situazioni che comportano grandi perdite o grandi guadagni. Secondo la teoria tradizionale, una persona avversa al rischio tra due progetti di cui uno più rischioso ed uno meno, sceglierà il primo solo se ha un rendimento atteso sufficientemente più elevato da compensare la maggiore assunzione di rischio; però, in base agli esperimenti condotti, sembra che questo accada solo se ci si riferisce a progetti con rendimento atteso positivo. Se infatti si suppone che un soggetto si trovi a scegliere tra 1) una perdita sicura di 15000 € o 2) una lotteria con il 75% di probabilità di perdere 20.000 € e il 25% di perdere zero; nel primo caso si ha una perdita certa, nel secondo caso si ha una perdita incerta, di uguale valore atteso. Gli esperimenti mostrano che molti soggetti hanno un'avversione alla perdita e preferiscono la lotteria, che lascia qualche possibilità di perdita nulla. Se il problema fosse presentato sostituendo guadagni alle perdite, qualsiasi individuo avverso al rischio sceglierebbe il guadagno certo a quello incerto. Questo significa che le persone hanno una differente tolleranza al rischio a seconda se si tratti del rischio di una perdita o di un guadagno. Questa avversione verso le perdite spiega perché, per cercare di evitare la perdita, le persone diventino disposte ad assumere maggior rischio e quindi perché persone che sono avverse al rischio nell'area dei guadagni, spesso diventino propense al rischio (o amanti del rischio) nell'area delle perdite. L'avversione alla perdita è il motivo che spinge a continuare a giocare a poker quando si sta perdendo, nella speranza di poter vincere in seguito; oppure che spinge un'azienda a non troncaredo rapidamente un progetto in perdita, anche se si sa che non sarà in grado di guadagnare profitti. L'avversione alla perdita è anche il motivo che spinge a non vendere azioni il cui prezzo sta calando, nella speranza che possano recuperare, e a vendere troppo presto le azioni che guadagnano.

La teoria del prospetto ha avuto un notevole successo, soprattutto in ambito economico,

tanto che uno dei suoi autori, Daniel Kahneman, ha vinto nel 2002 il premio Nobel per l'economia, probabilmente sarebbe andato ad Amos Tversky ma quest'ultimo morì nel 1996, con la seguente motivazione; «*per avere integrato risultati della ricerca psicologica nella scienza economica, specialmente in merito al giudizio umano e alla teoria delle decisioni in condizioni d'incertezza*». La *Prospect theory*, mette in evidenza i limiti di due assiomi su cui si basa la teoria dell'utilità attesa. La transitività, ingrediente fondamentale per l'economista classico (infatti mette in evidenza la razionalità con cui un soggetto prende una decisione) e l'assioma di indipendenza. Abbiamo visto come gli assiomi su cui si fonda L'EUT siano stati messi in discussione dalle nuove teorie che ne evidenziano le debolezze, essenzialmente legate a problemi cognitivi, da qui l'effetto "framing" già analizzato in precedenza. Ci sono però altri aspetti che evidenziano le carenze degli assiomi EUT. Ad esempio l'assioma di transitività può essere sfatato semplicemente chiedendo ad un soggetto in istanti diversi se preferisce x a y e se preferisce y a z . Assumendo che in entrambe i casi, le risposte siano positive, allora, gli si chiedi se egli preferisce x a z . Se la risposta è negativa, si può etichettare il decisore come non razionale, nella fattispecie il "tempo" qui ha modificato la scelta dell'individuo. Un'altra ragione per la violazione della transitività è dovuta alla imprecisata specificazione delle alternative, o dei "confini" tra diverse alternative. Si consideri un esempio molto stupido. Si assuma che x sia un pezzo di cioccolato. Si consideri allora x^I ottenuto togliendo da x una piccola quantità di cioccolato, un microgrammo. Poiché è difficile per un decisore scoprire la differenza tra x e x^I , possiamo certamente assumere che egli sarà indifferente (\sim) tra x e x^I . Ma chiaramente questa situazione può essere iterata ottenendo x^{II} , e così via. Dopo un numero sufficiente di volte $x^{II}, \dots, x^{(n)}$ volte, la differenza tra il pezzo originale e l'ultimo sarà percepita e il decisore preferirà x piuttosto che x all' n -esimo pezzo. Questa è ovviamente una violazione della transitività, perché se $x \sim x^I, x^I \sim x^{II}, \dots, x^{(n-1)} \sim x^{(n)}$ dovrebbe implicare $x \sim x^{(n)}$, e in realtà non è così²⁷ (**Paradosso del Sorite**). La *Prospect theory* è dunque una teoria che si propone di descrivere le scelte reali e non di definire le scelte razionali. Essa deve pertanto tener conto delle violazioni della razionalità quando queste hanno effettivamente luogo. Questa teoria, costituisce un punto di svolta nella genesi dell'economia cognitiva nella misura in cui sistematizza una

27. P. Fioravante, (2010), "Teoria delle Decisioni in condizione di Certezza e Rischio".

mole di evidenza empirica precedentemente accumulata da economisti e psicologi cognitivi, e incorpora alcune idee (quali la ponderazione della probabilità) già formulate da altri. Ma non è un punto di arrivo, anzi per molti versi essa è stata migliorata e superata da modelli della decisione formulati successivamente.

1.5.2 – Teoria del Prospetto Cumulato

L'ultimo stadio, riguardante le teorie sulle scelte in condizioni di incertezza, è la teoria del prospetto cumulato (*Cumulative Prospect theory*), che rappresenta la principale alternativa all'EUT. Per comprendere la CPT è necessario però soffermarsi ancora sulla Prospect Theory che ne costituisce il *prius* logico nonché storico. Dal punto di vista della teoria della decisione, la teoria del prospetto, pur costituendo la base delle teorie NEUT e avendo sicuramente indubbi meriti, presenta però diversi inconvenienti, infatti viola il principio della dominanza stocastica di I ordine, che si applica quando si fa riferimento ad una lotteria, cioè una situazione in cui una determinata distribuzione di probabilità sugli esiti, può essere considerata superiore ad un'altra.

Non garantisce che la somma dei pesi delle probabilità soggettive $\pi(p_i)$ sia uguale a 1. Inoltre i pesi $\pi(p_i)$ risulta inapplicabile per distribuzioni continue. Quanto sin adesso esposto dovrebbe aver chiarito i principali problemi della Prospect Theory nell'ambito delle decisioni in condizione di rischio, anche se difatti la teoria fornisce un buon punto di partenza per la comprensione delle reali preferenze del decisore, ma lascia spazio a successivi sviluppi ed approfondimenti.

Quiggin²⁸ (1982), attraverso la formulazione della *rank-dependent utility* (RDU), riesce a risolvere il problema della violazione della dominanza stocastica pesando ciascun esito della lotteria, in funzione della probabilità associata, e del posizionamento (ranking), che esso possiede con riferimento agli altri possibili esiti della lotteria. Tversky e Kahneman compresero che adottare un sistema di pesi del tipo utilizzato nella RDU, rappresentasse la strategia migliore per preservare il criterio di dominanza stocastica. Così nel 1992 elaborarono ed applicarono la funzione peso non direttamente alle probabilità degli esiti della lotteria, ma alla corrispondente funzione di

28. Quiggin J., (1982), "A theory of Anticipated Utility", vol. 3, Journal of Economic Behavior and Organization, pp.323-43.

*ripartizione*²⁹. Questa modificazione della PT ne modificò quindi la denominazione in *Cumulative prospect theory*. La CPT infatti si potrebbe considerare come la combinazione di due distinti modelli RDU, uno nel dominio delle perdite, l'altro in quello delle vincite. Caratteristica, fondamentale della nuova teoria è l'introduzione di una funzione cumulata collegata alle probabilità. La Cumulative Prospect Theory trattiene, quindi come abbiamo visto, molti degli aspetti fondamentale della Prospect Theory, introducendo, in più, le due funzioni dei pesi che garantiscono un'analitica rappresentazione matematica dei pesi decisionali. L'esigenza di maggior realismo nell'analisi economica del processo decisionale, ha aperto un campo prettamente economico verso altre discipline quali psicologia, filosofia, sociologia per una visione più olistica dell'agente economico. L'economia comportamentale quindi, propone al ricercatore di uscire dal laboratorio per "umanizzarsi", ed è questo il fattore che aiuta a comprendere la fondamentale differenza fra l'EUT e le NEUT.

Oggi secondo diversi studiosi si sta avvicinando il tramonto e l'abbandono della teoria dell'utilità attesa così come ipotizzata da von Neumann e Morgenstern, in favore della più coerente e generale teoria del prospetto cumulato. In realtà così non è, la teoria dell'utilità attesa di von - Neumann e Morgenstern pur evidenziando come descritto in precedenza grosse problematiche, nonostante la sua inadeguatezza descrittiva, è stata ed è probabilmente ancora, il punto di riferimento per l'analisi delle scelte in condizioni di incertezza. La ragione di ciò è facilmente intuibile, il vantaggio operativo che essa consente, la semplicità logico-formale di rappresentare problemi umani così complessi con una struttura matematica di grande flessibilità e facile applicazione, i buoni risultati applicativi in svariati contesti.

Queste sono le ragioni che hanno portato a divenire l'EUT la teoria principe, e più utilizzata per le decisioni in condizioni di incertezza. Con ciò si vuole chiarire che non esiste una prospettiva migliore dell'altra, né che la BE rifiuti l'approccio analitico, anche perché in realtà così non è, ma si ritiene che la teoria delle scelte economiche ha davanti a sé grandi opportunità di sviluppo se si riuscirà a trovare una mediazione tra l'approccio tradizionale e quello proposto dalla BE. In altre parole se si avrà un approccio multidisciplinare, se si guarda con un'ottica di complementarità, la questione è risolta.

29. Risulta in questo modo risolta anche l'inapplicabilità della PT a distribuzioni continue.

2.- FOCUS SULLA CUMULATIVE PROSPECT THEORY (CPT).

2.1 – Introduzione.

In questo e nei prossimi paragrafi si presenterà una versione successiva della Prospect Theory, la *Cumulative Prospect Theory (CPT)* che ad oggi è considerato il modello di riferimento alternativo più importante a quello dell'EUT di Von Neumann e Morgenstern del 1944. Come accennato nel capitolo precedente, caratteristica fondamentale della nuova teoria è l'introduzione di una funzione cumulata collegata alle probabilità. Il modello estende, inoltre, la sua validità a prospetti incerti, oltre che a prospetti rischiosi, con un numero di risultati elevato quanto si vuole. Quindi merito della CPT è di avere conservato la trattabilità matematica e descrittiva della PT originale, allargando il suo campo di applicabilità di prospettive con qualsiasi numero di risultati (un numero infinito o anche esiti continui) e all'incertezza, mentre la PT è stata pensata solo per le prospettive a rischio e con soli due *esiti*³⁰. Prima di dare il via alla presentazione sarà necessario riassumere i punti cardine della Prospect Theory nella sua formulazione classica:

- una funzione valore (V) concava per incrementi positivi, convessa per incrementi negativi, e più ripida per le perdite che per gli utili.
- Una funzione di ponderazione delle probabilità (π) non lineare che sopravvaluti le piccole probabilità e sottovaluti le grandi.

Avevamo detto inoltre che la Prospect theory distingueva il processo di scelta tra due differenti fasi: la fase di Editing, e la valutazione vera e propria (Evaluation). Nella seguente esposizione si farà riferimento a prospetti già sottoposti ad Editing. Si ricorderà come la Prospect Theory utilizzi una funzione (V) determinata su livelli di guadagni e perdite determinati rispetto ad un certo punto di riferimento (reference point)

30. Gonzalez R. – Wu G. (2003) riscontrarono attraverso analisi sperimentali che nel caso di lotterie con tre esiti, vi è una sistematica sottostima del comportamento adottato dagli agenti per la CPT ed una sovrastima se si utilizza la PT (nel caso di lotterie con soli due esiti i risultati di PT e CPT coincidevano). Essi concludono che la PT in alcuni casi particolari, prevede il comportamento degli agenti meglio della CPT.

e come il valore di ogni singolo risultato di una lotteria venga moltiplicato per un peso decisionale e non per la mera probabilità. Lo schema prevede la determinazione di tali pesi decisionali tramite una funzione (π) che esegua una trasformazione monotona delle probabilità originarie.

Il modello presenta delle incertezze, alcune delle quali già indicate nei paragrafi precedenti. La più importante riguarda, certamente, la non certa soddisfazione delle relazioni di dominanza stocastica fra prospetti. In secondo luogo esso non è, almeno immediatamente e direttamente, applicabile a prospetti con un ampio numero di risultati. Tali fenomeni vengono trattati e risolti dalla teoria originaria assumendo rispettivamente che: chiare relazioni di dominanza vengano individuate nella fase di Editing, e normalizzando i pesi decisionali in modo che essi sommino ad uno. Alternativamente, tali problemi potrebbero essere eliminati tramite l'introduzione di una funzione cumulata per i pesi decisionali, cioè una funzione che, piuttosto che trasformare le singole probabilità in pesi, trasformi l'intera distribuzione cumulata, come per primo suggerito da *Quiggin*³¹, per le decisioni in condizione di rischio. La Cumulative Prospect Theory utilizza due diverse funzioni cumulate dei pesi, rispettivamente per guadagni e perdite, ed ha il pregio di estendere pienamente le evidenze della Prospect Theory anche alle decisioni in condizioni di incertezza, e qualunque sia il numero di risultati contemplati da un prospetto, preservandone al contempo gli aspetti fondamentali. In tal modo la teoria riesce a descrivere atteggiamenti verso il rischio molto più variegati. In particolare mentre la PT si fonda sull'assunto che gli individui siano avversi al rischio nella regione dei guadagni e propensi al rischio in quella delle perdite, la CPT rappresenta la tendenza degli individui ad esibire avversione al rischio nelle circostanze in cui i guadagni sono molto probabili e di importo contenuto, e propensi al rischio quando i guadagni sono poco probabili ma di elevato importo, come nel caso delle lotterie. In modo simile, nel dominio delle

31. Abbiamo fatto un accenno nel capitolo precedente al modello Rank Dependent Utility (RDU) che è stata base di studio per Tversky e Kahneman ai fini della creazione della CPT. Inoltre possiamo senza dubbio affermare che il modello riesce a fare proprie le idee dei modelli Non- EUT di Choquet (CEU) di Schmeidler (1986, 1989) e Gilboa (1987) risolvendo alcune imperfezioni all'interno del modello originale.

perdite la teoria descrive i comportamenti dei soggetti che sono avversi al rischio se devono sostenere perdite potenzialmente elevate ma poco probabili, mentre tengono l'atteggiamento opposto nel caso di perdite più basse e relativamente più probabili. Nonostante il crescente interesse per la CPT nella teoria e nella pratica delle critiche sono state recentemente proposte: Levy e Levy (2002); Blavatsky (2005); Birnbaum (2005); Baltussen et al. (2006); Birnbaum e Bahra (2007); Wu e Markle (2008). Analizzeremo in un secondo momento le principali critiche mosse quindi alla CPT.

2.2- I Fondamenti della CPT ³².

Sia S un insieme finito di stati della natura i cui sottoinsiemi sono detti eventi e X un insieme di conseguenze che per semplicità assumeremo di natura monetaria. Si assuma ora che solo uno degli eventi si possa verificare, che l'insieme X contenga il risultato neutro, 0, e che tutti gli altri elementi di X possano essere codificati come guadagni o perdite in base al loro segno, positivo o negativo, rispettivamente.

Un prospetto incerto è una funzione “ f ” definita in S ed avente valore in X che assegna ad ogni stato s di S la conseguenza $f(s) = x$ di X .

Per definire la funzione cumulata sarà necessario, però, riordinare le conseguenze in un ordine crescente. In tal modo un prospetto f rappresenta un insieme di coppie (x_i, A_i) , che matura il risultato x_i se si verifica A_i , e dove $x_i > x_j$ se $i > j$ e dove (A_i) è una partizione di S . Un prospetto è detto strettamente positivo, o positivo, rispettivamente se tutte le sue conseguenze sono positive o non negative. Il concetto di prospetto negativo e strettamente negativo è definito similmente. Tutti gli altri prospetti sono detti misti.

La parte positiva di f , denominata (f^+) si ottiene ponendo $f^+(s) = f(s)$ se $f(s) > 0$ e $f^+(s) = 0$ se $f(s) < 0$. $f^-(s)$ sarà definita similmente. La Cumulative Prospect Theory assegna ad ogni prospetto $f(s)$ un valore $V(f)$ tale che f è preferito a g se $V(f) \geq V(g)$.

Sia W una funzione che assegna per ogni evento $A \subset S$ un valore $W(A)$, con $W(0) = 0$, $W(S) = 1$ e $W(A) \geq W(B)$ se $A \supset B$. Una funzione di questo tipo è detta di capacità.

32. Kahneman D. – Tversky A., (1992), “Advances in prospect theory, cumulative representation of uncertainty”, in *Journal of risk and uncertainty*, n. 5.

Posto che esista una funzione di valore $v(x)$ strettamente crescente, sostanzialmente del tipo già osservato studiando la Prospect Theory, e funzioni di capacità W_+ e W_- , le equazioni fondamentali della Cumulative Prospect Theory per $f = (x_i, A_i)$, $-m \leq i \leq n$, possono così essere scritte:

$$V(f) = V(f_+) + V(f_-) \text{ dove}$$

$$V(f_+) = \sum (\pi_{i+}) v(x_i), \text{ per } i = 0 \rightarrow n \quad \text{e}$$

$$V(f_-) = \sum (\pi_{i-}) v(x_i), \text{ per } i = -m \rightarrow 0 \quad \text{Equazione n°1}$$

con i pesi π così definiti:

$$\pi_{n+} = W_+(A_n), \quad \pi_{-m-} = W_-(A_{-m}),$$

$$\pi_{i+} = W_+(A_i \cup \dots \cup A_n) - W_+(A_{i+1} \cup \dots \cup A_n) \quad 0 \leq i \leq n-1$$

$$\pi_{i-} = W_-(A_{-m} \cup \dots \cup A_i) - W_-(A_{-m} \cup \dots \cup A_{i-1}) \quad -m \leq i \leq -1$$

Ponendo $\pi_i = \pi_{i+}$ se $i \geq 0$ e $\pi_i = \pi_{i-}$ per $i < 0$ allora l'equazione fondamentale si riduce a:

$$V(f) = \sum \pi_i v(x_i). \quad \text{Equazione n°2}$$

Il peso decisionale $\pi_i +$ associato ad un risultato positivo è, quindi, il risultato della differenza fra la capacità degli eventi almeno tanto buoni quanto x_i e la capacità degli eventi strettamente migliori di x_i . Similmente, il peso decisionale $\pi_i -$ associato ad un risultato negativo, sarà la differenza fra le capacità degli eventi almeno tanto negativi quanto x_i e la capacità degli eventi strettamente peggiori di x_i .

Il peso decisionale associato ad un certo risultato, può essere interpretato come contributo marginale al rispettivo evento, definito in termini di capacità W_+ e W_- . Se W è additiva, e quindi una misura di probabilità, allora π_i è semplicemente la probabilità di A_i . Segue chiaramente dalla definizione di π e di W che i pesi, sia per prospetti positivi che per prospetti negativi, sommano ad 1. Per prospetti misti, invece, la somma dei pesi può essere diversa da 1, ciò perché i pesi decisionali per guadagni e perdite sono definiti da diverse funzioni di capacità W .

Se il prospetto $f = (x_i, A_i)$ è collegato ad una distribuzione di probabilità $p(A_i) = p_i$,

esso può allora essere considerato come un semplice prospetto rischioso (x_i, p_i) , ed in questo caso i pesi decisionali sono così definiti:

$$\pi_{n+} = w_+(p_n), \quad \pi_{-m-} = w_-(p-m),$$

$$\pi_{i+} = w_+(p_i + \dots + p_n) - w_+(p_{i+1} + \dots + p_n) \quad 0 \leq i \leq n-1$$

$$\pi_{i-} = w_-(p-m + \dots + p_i) - w_-(p-m + \dots + p_{i-1}) \quad 1-m \leq i \leq 0.$$

In cui w_+ e w_- sono definite nell'intervallo unitario, aventi valore nello stesso, e soddisfacenti le seguenti condizioni:

$$w_+(0) = 0, \quad w_-(0) = 0, \quad w_+(1) = w_-(1) = 1.$$

Si propone adesso, per illustrare il modello, un esempio. Si supponga di lanciare un dado ed osservare il risultato $x = 1, 2, \dots, 6$. Se x sarà pari, allora si riceveranno x dollari, se x sarà dispari allora si dovranno pagare x dollari. Il prospetto probabilistico, ordinato in ordine crescente, è quindi $(-5, -3, -1, 2, 4, 6)$, ognuno con probabilità di verificarsi pari ad $1/6$:

$$f_+ = (0, 1/2; 2, 1/6; 4, 1/6; 6, 1/6) \quad \text{e} \quad f_- = (-5, 1/6; -3, 1/6; -1, 1/6; 0, 1/2)$$

quindi, applicando l'equazione n°1

$$V(f) = V(f_+) + V(f_-) =$$

$$= v(2) [w_+(1/2) - w_+(1/3)] + v(4) [w_+(1/3) - w_+(1/6)] +$$

$$+ v(6) [w_+(1/6) - w_+(0)] + v(-5) [w_-(1/6) - w_-(0)] +$$

$$+ v(-3) [w_-(1/3) - w_-(1/6)] + v(-1) [w_-(1/2) - w_-(1/3)].$$

Il presente modello estende la versione originaria della Prospect Theory sotto diversi punti di vista. Innanzitutto ne consente l'applicazione su ogni prospetto finito e può essere esteso a distribuzioni continue. In più, può essere applicato anche per condizioni di incertezza e non solo di rischio. Un aspetto fondamentale riguarda la possibile diversa definizione di W_+ e W_- e quindi dei pesi positivi e negativi.

La Cumulative Prospect Theory soddisfa, vista la tecnica di determinazione dei pesi ed a differenza della versione originaria, le relazioni di dominanza stocastica fra prospetti, non è, quindi, più necessario individuare i prospetti dominati in fase di Editing. Ciò comporta, però, l'impossibilità della versione Cumulative di spiegare violazioni delle relazioni di dominanza stocastica, talvolta effettivamente riscontrati in contesti non trasparenti.

2.3 - Il Modello e I Suoi Parametri.

Così come per la sua precedente versione, nella Cumulative Prospect Theory avversione e propensione al rischio sono determinati sia dalla funzione di valore $v(x)$, sia dalle capacità $W(A)$ determinanti dei pesi finali.

Si assuma, come per il modello originario, una funzione $v(x)$ concava al di sopra del punto di riferimento, convessa al di sotto, con una pendenza elevata per la regione delle perdite, minore invece per quella dei guadagni. Le prime due condizioni riflettono il principio di sensibilità decrescente: l'impatto di un cambiamento diminuisce con la distanza dal punto di riferimento. L'ultima condizione è, invece, collegata al principio di loss aversion, secondo il quale si trae maggiore disutilità dalla perdita di una somma x rispetto all'utilità che si potrebbe trarre vincendo la stessa somma.

Il principio di diminuzione di sensibilità è valido anche per la determinazione dei pesi. Così come nella funzione $v(x)$ il punto di riferimento funge da limite per distinguere guadagni e perdite. Nella valutazione dell'incertezza si riscontrano due limiti naturali: la certezza e l'impossibilità. La diminishing sensitivity comporta quindi che l'impatto di una data variazione diminuisca man mano che aumenta la sua distanza dal reference point. Ad esempio un cambiamento di probabilità da 0.9 a 1 o da 0 a 0.1 di vincere una certa somma, essendo più vicino ad uno dei due limiti, comporta maggiore impatto rispetto ad un cambiamento di probabilità più distante dai limiti naturali della scala, del tipo da 0.4 a 0.5. Questa intuizione ci prospetta, quindi, una funzione dei pesi concava nei pressi dello 0 e convessa quando ci si approssima ad 1. Per prospetti in condizione di incertezza ciò comporterebbe superadditività vicino alla certezza, e subadditività per eventi difficilmente verificabili (molto improbabili). Ad ogni modo, la funzione non è definita pienamente e presenta dei limiti. Per esempio piccolissime probabilità potrebbero essere sovrastimate o ignorate completamente. Prima di passare all'illustrazione dell'esperimento principale condotto da Kahneman e Tversky, sarebbe interessante studiare le relazioni fra la non linearità delle preferenze e l'andamento

ovvero la forma della funzione dei pesi. A questo proposito si riporta una dimostrazione del common consequence effect in un contesto di incertezza su un esperimento riportato da Kahneman e Tversky.

Quesito 1

f: (25000 \$, se A: ($d < 30$); 25000 \$ se B: ($30 \leq d \leq 35$); 25000 \$ se C: ($d > 35$))
g: (25000 \$, se A: ($d < 30$); 0, se B: ($30 \leq d \leq 35$); 75000 \$ se C: ($d > 35$))

Quesito 2

f': (0, se A:($d < 30$)); 25000 \$ se B: ($30 \leq d \leq 35$); 25000 \$ se C:($d > 35$))
g': (0, se A: ($d < 30$); 0 se B: ($30 \leq d \leq 35$); 75000 \$ se C: ($d > 35$)).

Nei quesiti sopra riportati, si richiede la scelta fra l'opzione f e g e fra l'opzione f' e g', dove il parametro d indica la differenza fra i livelli di chiusura dell'indice Dow-Jones da un giorno all'altro. L'assioma di indipendenza richiederebbe, ovviamente, una risposta del tipo f, f' o g, g'. Kahneman e Tversky osservarono invece la solita inversione. In particolare la maggioranza degli intervistati optarono per l'opzione f nel quesito 1 e per l'opzione g' al quesito 2. In particolare nel quesito 1 il 68 % preferiva f a g e nel quesito 2 il 77 % preferiva g' a f'³³ andando sostanzialmente contro gli assiomi definiti nella teoria classica.

33. Sostanzialmente lo stesso andamento è stato osservato in un secondo studio seguendo la stessa impostazione. Un gruppo di 98 studenti di Stanford ha scelto tra due quesiti con due diverse prospettive e con un parametro di riferimento d che indica il differenziale di punteggio nella prossima partita di football tra Stanford e Berkeley. Nel dettaglio si presentavano le prospettive in questione. Ad esempio, g paga \$ 10 se Stanford non vince, e \$ 30 se vince con uno scarto di 10 punti o meno, e nulla se vince con più di 10 punti. Il dieci per cento dei partecipanti, scelti a caso, sono stati effettivamente pagati secondo una delle le loro scelte. I risultati hanno evidenziato che il 46% dei soggetti, preferisce f e g', ancora una volta in diretta violazione dell'assioma di indipendenza.

Applicando ai risultati sopra riportati le equazioni della Cumulative Prospect Theory otteniamo le seguenti disuguaglianze (in migliaia di dollari):

Quesito 1

$v(25) > v(75) W_+(C) + v(25) [W_+(A \cup C) - W_+(C)]$ visto che **f** è preferito a **g**, cioè:

$$v(25) [1 - W_+(A \cup C) + W_+(C)] > v(75) W_+(C)$$

Quesito 2

$v(75) W_+(C) > v(25) W_+(C \cup B)$ e quindi

$$W_+(S) - W_+(S - B) > W_+(C \cup B) - W_+(C).$$

Quindi, sottrarre B dalla certezza ha più impatto che sottrarre B da $C \cup B$.

Sia $W_+(D) = 1 - W_+(S - D)$, e $w_+(p) = 1 - w_+(1 - p)$, segue chiaramente che la precedente disequazione è equivalente alla subaddittività di W_+ che può essere così definita: $W_+(B) + W_+(D) \geq W_+(B \cup D)$. Per prospetti rischiosi, invece, la disequazione può così essere definita:

$$1 - w_+(1 - q) > w_+(p + q) - w_+(p) \quad \text{oppure}$$

$$w_+(q) + w_+(r) \geq w_+(q + r), \quad q + r < 1.$$

Quindi, l'esempio implicherebbe la subaddittività di W_+ e di w_+ . Altre violazioni dell'EUT implicherebbero, invece, subaddittività per le funzioni dei pesi, per piccole probabilità. Per esempio, si è osservato come la maggioranza degli interpellati preferirebbero la lotteria (20000 \$, 0.02) alla lotteria (30000\$, 0.01) preferendo poi la lotteria (30000 \$, 0.01; 20000 \$, 0.32) alla lotteria (20000 \$, 0.34). Riportando tutto nei termini della presente teoria:

$$w+(0.02) - w+(0.01) \geq w+(0.34) - w+(0.33). \quad \text{cioè}$$

$$w+(p+q) - w+(q) \geq w+(p+q+r) - w+(q+r)$$

con $p + q + r$ sufficientemente piccolo.

Quanto sopra detto dimostra che la funzione $w+$ risulta concava nei pressi dell'origine. Collegando questo ragionamento con le evidenze tratte dal quesito 1 e 2 si può affermare che, nel rispetto del principio di sensibilità decrescente, $w+$ ha un andamento a s invertita, con una maggiore inclinazione quindi, nei pressi dei punti estremi 0 ed 1.

2.4 - L'esperimento di Kahneman e Tversky

Kahneman e Tversky, nel loro lavoro, presentano successivamente un esperimento molto articolato, dal quale trarre informazioni accurate circa l'andamento della funzione dei *pesi*³⁴. L'esperimento fu condotto su studenti senza alcuna particolare competenza in materia di Decision Making. Un computer mostrava un prospetto ed il suo relativo valore atteso. Lo studente era chiamato a scegliere fra una serie di certi equivalenti, listati dalla macchina, e una lotteria. Il certo equivalente era così calcolato tramite media fra il più alto livello rifiutato ed il più basso livello accettato, venendo in tal modo determinato tramite scelta e non tramite diretta definizione da parte del decisore. Ci si concentrò inizialmente solo su prospetti puri a due risultati con probabilità determinate, poi in seconda fase dell'esperimento si sono analizzati anche prospetti misti. Rappresentando i risultati ottenuti in termini d'avversione e propensione al rischio per: risultati positivi e probabilità elevate, risultati positivi e probabilità piccole, risultati negativi e probabilità elevate, risultati negativi e probabilità basse, si evidenziò come il

34. Kahneman D. – Tversky A., (1992), “Abbiamo fatto uno sforzo particolare per ottenere dati di alta qualità. A questa fine, abbiamo reclutato 25 studenti universitari provenienti da Berkeley e Stanford (12 uomini e 13 donne) senza una formazione specifica in teoria delle decisioni. Ogni soggetto ha partecipato tre sessioni di un'ora separati a diversi giorni di distanza. Ogni soggetto è stato pagato \$ 25 per la partecipazione.

100% dei soggetti intervistati fosse propenso al rischio, per valori negativi, e avverso al rischio per i positivi, per $p > 0.5$. In più un'altissima percentuale degli intervistati presentava propensione al rischio per basse probabilità e per valori positivi, e contemporaneamente avversione al rischio per basse probabilità e valori negativi. Sebbene l'andamento generico delle preferenze fosse risultato chiaro, i dati individuali rilevarono rumori e differenze. In particolare, la correlazione fra certi equivalenti determinati dai diversi intervistati su sei diverse lotterie determinò un coefficiente medio dello 0.55. Studi di correlazione, effettuati a seguito di un raggruppamento delle lotterie in quattro diverse classi: alte probabilità di vincita e di perdita e basse probabilità di vincita e di perdita, mostrarono come i soggetti più avversi al rischio per la classe alte probabilità di vincite, tendevano ad essere più propensi al rischio per la classe alte probabilità di perdite. Ugualmente, una più alta propensione al rischio per le basse probabilità di vincita, si accompagnava ad una più alta avversione al rischio per le basse probabilità di perdite. Si riscontrò, inoltre, la tendenza, per soggetti più avversi al rischio per alte probabilità di vincita, ad essere meno propensi al rischio per basse probabilità di vincita. Questo trend, assente per le regioni negative, riflette differenze individuali o nella funzione dei pesi o nella curvatura della funzione $v(x)$, per valori positivi. Correlazioni insignificanti, invece, furono riscontrate fra basse probabilità di vincita ed alte probabilità di perdita e fra alte probabilità di vincita e basse probabilità di perdita. Il modello a quattro classi, già contemplato dalla Prospect Theory, emerge, quindi, come una valida generalizzazione empirica per le scelte in condizione di rischio. Non si riscontrò, comunque, un elevato livello di correlazione fra soggetti, perché valori di utili e perdite variano individualmente. Ciò fa sì che la teoria possa prestare il fianco a critiche, ed autori come Hershey e Shoemaker (1980) hanno nei fatti sottostimato la robustezza del modello a quattro classi.

Posto, comunque, che il punto di partenza fosse il modello a quattro classi, Kahneman e Tversky passarono successivamente ad una descrizione quantitativa dei dati. Per ogni prospetto della forma $(x, p; 0, 1-p)$, sia c/x il rapporto fra il certo equivalente del prospetto ed il risultato x . Si considerino, ora, i valori mediani di c/x in funzione di p , rispettivamente per prospetti positivi e negativi e per valori superiori ed inferiori a $|x| = 200$.

Il grafico I mostra l'andamento di c/x riscontrato per prospetti positivi, e quindi la propensione o l'avversione al rischio per gli utili.

Se i soggetti fossero indifferenti al rischio la curva continua coinciderebbe con la diagonale, se fossero avversi al rischio la curva si troverebbe sotto la diagonale, al di sopra invece, se fossero propensi. Vale invece il contrario per i prospetti negativi. Non si riporta un grafico per i valori negativi, essendo in sostanza simile al grafico I, ma con delle curve meno accentuate.

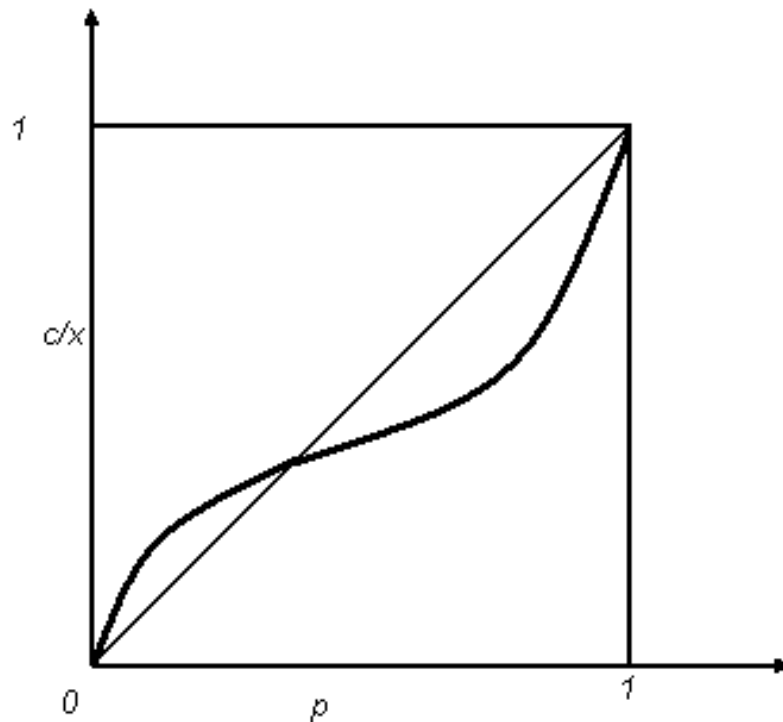


Grafico I- Valori medi di c/x per prospetti positivi

Come detto, Kahneman e Tversky eseguirono un'analisi distinguendo fra prospetti con $|x|$ maggiore o minore di 200, ma, visto che non si rilevò una grande differenza per i due diversi ordini di valori, sia per prospetti positivi sia per prospetti negativi, il grafico I risulta essere una buona approssimazione. Essi assunsero, così, omogeneità delle preferenze, cioè indifferenza fra moltiplicare i risultati di un prospetto per una costante k e moltiplicare per k il suo certo equivalente. Un'esile differenza va però sottolineata per il prospetto positivo dove, pur rimanendo il grafico I una buona approssimazione, vi è da rilevare come il certo equivalente cresca più lentamente rispetto al valore di x . Lo stesso non si può dire per $x < 0$.

Valendo, quindi, l'omogeneità delle preferenze, Kahneman e Tversky ipotizzarono una funzione di valore $v(x)$ del tipo:

$$\begin{aligned} v(x) &= x^\alpha && \text{per } x \geq 0 && \text{equazione 3} \\ v(x) &= -\lambda (-x)^\beta && \text{per } x < 0. \end{aligned}$$

In generale, si può affermare che i dati appena mostrati possano essere approssimati da una funzione di ponderazione (per le probabilità di utili e perdite) di due parti, w_+ , e w_- , di questo tipo:

$$w_+(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} \quad \text{equazione 4}$$

$$w_-(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}},$$

considerando la curva del grafico I come funzione dei pesi positiva, ed una molto simile (solo più liscia) funzione dei pesi negativi, ed assumendo una funzione $v(x)$ lineare. Le funzioni $w_-(p)$ e $w_+(p)$ sopra riportate, presentano degli aspetti interessanti. Esse si basano, infatti, solo sulla stima di un parametro e consentono di rappresentare sia le regioni concave sia quelle convexe, in più, presentano un'ottima approssimazione dei dati raccolti sul campo per un range di probabilità che va da 0.05 a 0.95.

Un'appendice dell'esperimento portato avanti da Kahneman e Tversky fu condotto su prospetti misti. Gli esiti mostrarono come, per ogni uguale probabilità di vincita e di perdita, un prospetto risultasse accettabile solo se il guadagno avesse valore almeno il doppio della perdita. Questa osservazione è compatibile con una funzione di valore $v(x)$ che cambia nettamente la pendenza intorno a 0, con un coefficiente di loss aversion di circa 2.

Lo stesso non si può dire per studi condotti sulle sole regioni positive di $v(x)$, dove si riscontrò, per $p = 0.5$, un sostanziale trade-off fra, ad esempio, il prospetto (50; 120) ed il prospetto (20, 149), ed un trade-off fra il prospetto (100; 300) ed il prospetto (25; 401), indicando, quindi, una curvatura minima di $v(x)$ in quelle regioni.

Benché la stima di tutti i parametri necessari al funzionamento di un modello complesso, quale è quello della Cumulative Prospect Theory, sia problematica, Kahneman e Tversky, al fine di stimare i parametri delle equazioni 3 e 4, utilizzarono dei metodi di regressione non lineare per ogni singolo soggetto testato nel loro esperimento, proponendone successivamente una media.

Così, l'esponente per $v(x)$, sia nella regione degli utili che in quella delle perdite, fu individuato in 0.88, in accordo con l'evidenza di sensibilità decrescente. Il λ fu, invece, stimato in 2.25, indicando una pronunciata loss aversion. I valori medi di γ e δ furono individuati rispettivamente in 0.61 e 0.69. Il grafico II mostra l'andamento delle funzioni dei pesi per valori positivi e negativi in base ai parametri individuati. Inoltre tipicamente il coefficiente di perdita è maggiore del coefficiente di guadagno, $\alpha \geq \beta$, mentre il coefficiente di avversione alla perdita λ , viene in genere assunto 2.25 come già ribadito sopra. La Tabella 2.1 sotto, riporta alcune stime dei parametri α , β , γ e δ presentati nei recenti studi. In tutte le indagini dopo il 1994, i coefficienti α e β delle funzioni di utilità (della funzione valore) sono maggiori dei coefficienti γ e δ della relativa funzioni di ponderazione.

Tabella 2.1: Stima dei parametri CPT proposti in letteratura.

Studi sperimentali	Funzione di utilità		Funzione di ponderazione	
	α	β	γ	δ
Tversky e Kahneman (1992)	0.88	0.88	0.61	0.69
Camerer e Ho (1994)	0.37	-	0.56	-
Tversky e Fox (1995)	0.88	-	0.69	-
Wu e Gonzalez (1996)	0.52	-	0.71	-
Gonzalez e Wu (1999)	0.49	-	0.44	-
Abdellaoui (2000)	0.89	0.92	0.60	0,70
Bleichrodt e Pinto (2000)	0.77	-	0.67	0.55
Kilka e Weber (2001)	0,76-1,00	-	0,30-,51	-
Abdellaoui <i>et al.</i> (2003)	0.91	-	0.76	-

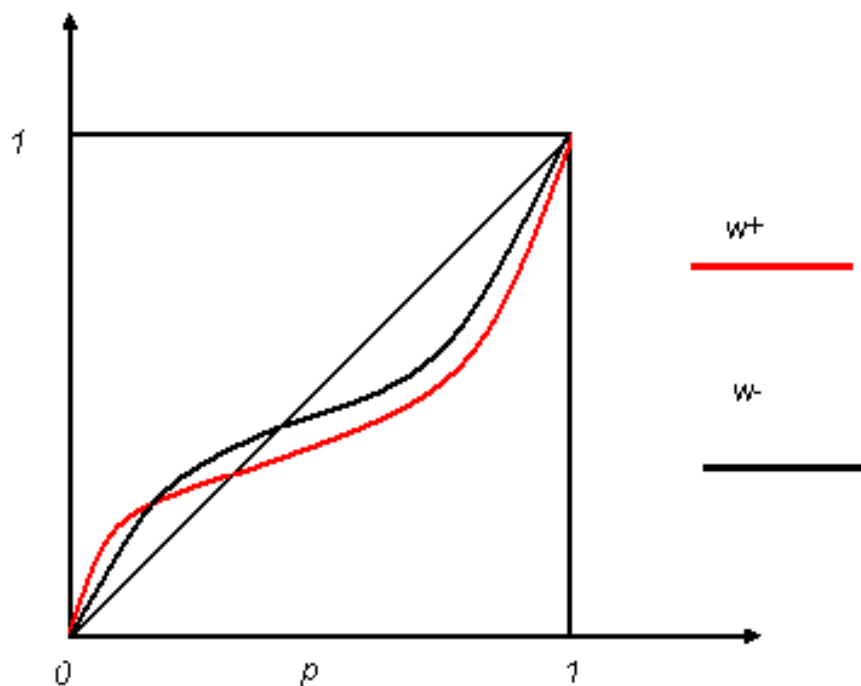


Grafico II- Andamento delle funzioni dei pesi per guadagni e perdite basati sulla stima media di γ e δ .

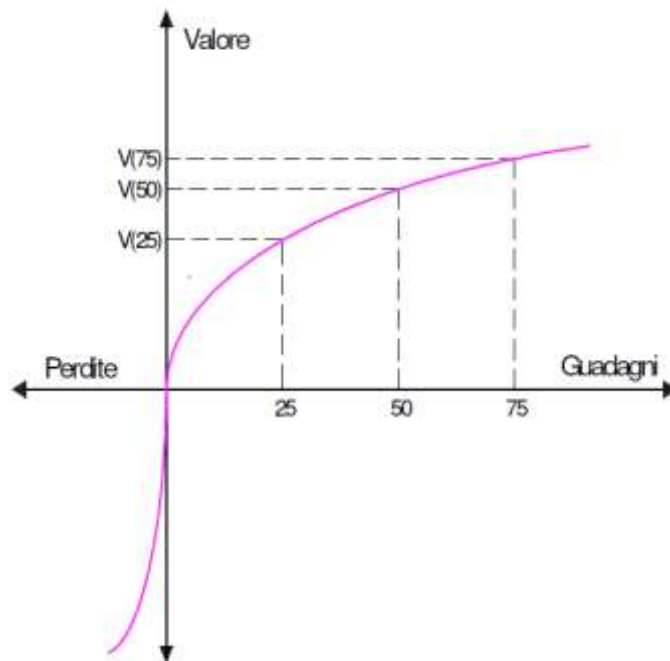
Dal grafico risulta evidente come vi sia una sovrastima delle piccole probabilità ed una sottostima di quelle moderatamente o decisamente elevate. Come conseguenza, si postula una relativa insensibilità alle differenze di probabilità nel range di centro, cioè intorno a probabilità 0.4, 0.5. Si noti pure l'andamento simile delle due funzioni, con una curvatura maggiormente accentuata per $w+$. Ciò implica avversione al rischio per gli utili maggiore della propensione al rischio per le perdite, per probabilità medio alte.

Un ulteriore esperimento chiarificatore è il *seguito*³⁵; fu sottoposto a verifica tramite un esperimento e fu chiesto ad un campione di intervistati se dovesse considerarsi più felice l'individuo A, cui venivano regalati due biglietti di una lotteria vincenti rispettivamente di \$ 50 e \$ 25, o l'individuo B, cui veniva regalato un solo biglietto con una vincita di \$ 75.

Secondo il modello di scelta razionale A e B dovevano essere ugualmente soddisfatti, ma solo il 17% degli intervistati rispose in maniera coerente con questo modello, mentre ben il 65% rispose che il più felice doveva considerarsi indubbiamente l'individuo A.

35. Quest'ultimo può essere applicato anche in chiave PT.

Grafico III- L'effetto positivo di separare i diversi guadagni. Poiché la funzione di valore è concava rispetto ai guadagni, il valore totale di due piccoli guadagni considerati separatamente [$V(25) + V(50)$] è maggiore del valore della loro somma $V(75)$.



Analogamente, la convessità della funzione di valore rispetto alle perdite, fa sì che due perdite considerate congiuntamente sembrino meno pesanti di quando vengono considerate separatamente, e questo non sembra essere sfuggito agli esperti di marketing, che spesso tendono ad accorpare le spese in un'unica soluzione, piuttosto che *suddividerle*³⁶. Così una vasca ad idromassaggio da 2000 \$ sembra molto a buon mercato se il suo costo viene aggiunto a quello di una casa da 150000 \$: una spesa del genere porta l'acquirente tanto a sinistra lungo la parte più piatta della curva che un'aggiunta di \$ 2000 non lo spaventa granché.

36. Vitale I. and Polidori I., (2013), "La Prospect Theory di Tversky e Kahneman", posted in Marketing, <http://www.igorvitale.org/2013/04/01/la-prospect-theory-di-tversky-e-kahneman/>.

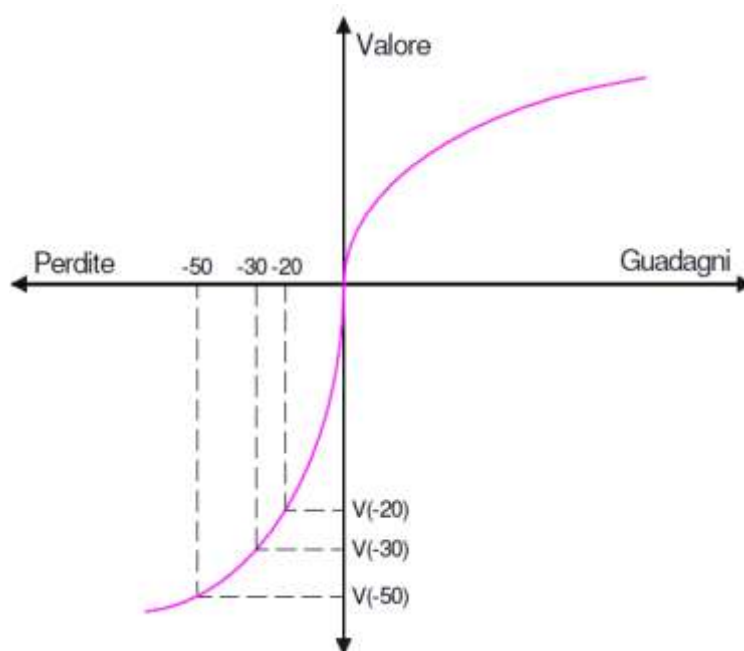


Grafico IV- L'effetto positivo di considerare insieme più perdite. Poiché la funzione di valore è convessa rispetto alle perdite, l'effetto globale di due perdite considerate separatamente $[V(-20) + V(-30)]$ è più sgradevole dell'effetto prodotto dalla loro somma $V(-50)$.

2.5- Teorie a confronto in sintesi.

Riassumendo, punti chiave della Cumulative Prospect Theory risultano i seguenti:

- oggetti della scelta sono prospetti presentati in termini di guadagni e perdite,
- andamento a S della funzione $v(x)$ con cambiamento netto di pendenza intorno all'origine,
- andamento a S invertita per le funzioni dei pesi.

Queste proprietà sembrano soddisfare pienamente le evidenze riscontrate da Kahneman e Tversky nell'esperimento sopra riportato. In più, una buona approssimazione potrebbe portare all'utilizzo di una sola funzione dei pesi per guadagni e perdite. L'altra idea importante CPT è la nozione di distorsione delle probabilità, vale a dire le persone tendono a sovrappesare le piccole probabilità e sottopesare le probabilità medie e grandi. A differenza della PT, che presuppone che le persone sovrappesino le piccole probabilità, indipendentemente dai relativi risultati. Mentre la sovrastima delle piccole

probabilità spiega la popolarità di lotterie ed assicurazioni. La sottostima delle ampie probabilità contribuisce invece a spiegare l'avversione al rischio nelle scelte fra guadagni sicuri e guadagni maggiori ma solo probabili, e la propensione al rischio in scelte fra perdite sicure e perdite maggiori ma solo probabili.

Avversione al rischio e propensione al rischio, rispettivamente per guadagni e perdite, è poi garantita dalla forma della funzione $v(x)$ nelle due regioni. La pronunciata asimmetria della funzione $v(x)$ intorno al punto di riferimento è dovuta alla loss aversion, la quale spiega la riluttanza osservata nell'accettare prospetti misti.

La Cumulative Prospect Theory trattiene, come abbiamo visto, molti degli aspetti fondamentale della Prospect Theory, introducendo, in più, le due funzioni dei pesi che garantiscono un'analitica rappresentazione matematica dei pesi decisionali. Certamente, la sua generalità non lascia spazio all'accuratezza. Gli stessi autori infatti sospettarono che i pesi decisionali potessero essere sensibili alla formulazione dei prospetti, oltre che al numero ed alla distanza fra i probabili risultati. Evidenza suggerisce, infatti, che le curvature delle funzioni dei pesi possano essere più pronunciate per probabili risultati di un prospetto molto distanziati in valore. La presente teoria potrebbe ovviamente essere modificata per contemplare questo tipo di effetto, così come altri non presi in considerazione, ma a costo di una maggiore complessità che potrebbe rendere il modello intrattabile.

In ultima analisi, per tornare allo spirito di quelle che si sono sopra definite non conventional theories, le teorie descrittive del comportamento di scelta non possono che raggiungere lo status di buone approssimazioni. Il decisore che si confronta con un problema di scelta può utilizzare, infatti, una serie amplissima di tecniche di semplificazione e di decisione che non necessariamente conducono all'applicazione di un modello di valutazione pienamente teorizzabile. Da non trascurare sono, inoltre, fenomeni contingenti quali: la formulazione del problema, il contesto, o magari lo stato d'animo del decisore. Entrambi le formulazioni della Prospect Theory si scostano dalla tradizionale assunzione di perfetta razionalità degli agenti economici, propendo dei modelli di natura strettamente descrittivi. La mancata assunzione di perfetta razionalità dell'operatore economico è però censurata da parte del mondo accademico, sul presupposto che nessun comportamento non-razionale potrebbe sopravvivere in un ambiente competitivo.

L'evidenza mostra, però, come l'uomo medio passi la sua intera vita in ambienti competitivi, senza per questo imparare ad applicare, alle decisioni in condizione di rischio, una funzione dei pesi lineare. Inoltre, è da sottolineare come le scelte osservate, sebbene non canonicamente razionali, rispettino un certo ordine, ordine che le due versioni della Prospect Theory hanno tentato di cogliere.

Se si procede quindi a un confronto delle tre teorie ad oggi punti cardini all'interno di quella che è la teoria delle scelte e delle decisioni si vede (come accennato alla fine del primo capitolo) che in realtà le stesse teorie non siano da prendere come studi a se stanti e che non si debba ragionare solo in termini di approccio razionale della scelta piuttosto che di approccio psicologico della scelta, ma le due tesi dovrebbero essere viste in ottica complementare per arrivare a una situazione di scelta ottimale. Nella tabella 2.2 sotto, sono riportate sinteticamente le differenze e i passaggi che hanno contraddistinto le tre tesi fin qui analizzate.

Tabella 2.2: Teorie in sintesi a confronto.

Expected Utility (EUT)	Prospect Theory (PT)	Cumulative Prospect Theory (CPT)
Soggetto perfettamente razionale che sceglie massimizzando l'utilità attesa (expected utility).	Si introduce; - una funzione di valore, definita sulle variazioni di ricchezza rispetto a un punto di riferimento e non rispetto alla ricchezza finale. È concava nella regione dei guadagni e convessa in quella delle perdite. È più ripida nella regione dei guadagni e convessa in quella delle perdite (avversione alle perdite). - una funzione di ponderazione delle probabilità non lineare che assegna un peso al valore di ciascun esito.	La funzione di ponderazione : - utilizza la distribuzione cumulata delle probabilità anziché le probabilità dei singoli esiti; - è differente a seconda che si considerino i guadagni o le perdite.

2.6 – Critiche alla CPT.

Negli ultimi anni la Cumulative Prospect Theory ha ottenuto sempre più spazio nel mondo scientifico e di fatti stata oggetto di numerose ricerche che trovano applicazioni in vari settori: dal mondo degli affari, alla finanza, dal diritto, alla medicina, fino alle scienze politiche (per esempio, Benartzi e Thaler (1995); Barberis et al. (2001); Camerer (2000); Jolls et al. (1998); McNeil et al. (1982); Quattrone e Tversky (1988); Dell'Anno (2005³⁷)). Nonostante il crescente interesse per CPT sia nella teoria che nella pratica sono state recentemente mosse delle critiche più o meno significative: *Levy e Levy (2002)*³⁸; *Blavatsky (2005)*³⁹; *Birnbaum (2005)*⁴⁰; *Baltussen et al. (2006)*⁴¹; *Birnbaum e Bahra (2007)*⁴²; ***Wu e Markle (2008)***⁴³. Così come i paradossi di Allais (1953) e Ellsberg (1961) sono stati volano per lo sviluppo poi delle teorie NEUT (come visto già nel primo capitolo, queste hanno dimostrato che per l'EUT di Von Neumann e Morgenstern (1944) e per la soggettività prevista dall'Utility Theory (SEUT) di Savage (1954) il punto debole era stato individuato nell'assioma di indipendenza), queste nuove critiche vanno di fatto a reindirizzare verso un nuovo e più recente sviluppo della CPT che è la *Bipolar Cumulative Prospect Theory (BCPT)*. Essenzialmente questo nuovo filone di studi ritiene che il punto critico e rilevante contro la CPT sia nella separabilità dei campi di

-
37. Dell'anno R., (2005), "Evasione Fiscale il contributo della Cumulative Prospect theory", Economia Pubblica, Franco Angeli Editore.
 38. Levy, M. and Levy, H., (2002), "Prospect Theory: Much ado about nothing?", Management Science, 48(10), 1334–1349.
 39. Blavatsky, P., (2005), "Back to the St. Petersburg paradox?", Management Science, 51(4), 677–678. Per un ulteriore approfondimento in merito, - Rieger M. O. - Wang M., (2006), "Cumulative prospect theory and the St. Petersburg paradox", Economic Theory, Springer- Verlag.
 40. Birnbaum, M., (2005), "Three new tests of independence that differentiate models of risky decision making", Management Science, 51(9), 1346–1358.
 41. Baltussen, G. - Post, T. and van Vliet, P., (2006), "Violations of cumulative prospect theory in mixed gambles with moderate probabilities", Management Science, 52(8), 1288.
 42. Birnbaum, M. and Bahra, J., (2007), "Gain-loss separability and coalescing in risky decision making", Management Science, 53(6), 1016–1028.
 43. Wu, G. and Markle, A., (2008), "An empirical test of gain-loss separability in prospect theory", Management Science, 54(7), 1322–1335.

guadagno e perdita (GLS), vale a dire la valutazione separata delle perdite e guadagni. Più precisamente, sia $P = (x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)$ una prospettiva con risultati x_i con probabilità p_i , $i = 1, \dots, n$. Indichiamo con P^+ la "parte positiva" di P , cioè la prospettiva ottenuto da P sostituendo tutte le perdite con zero e indichiamo con P^- la "parte negativa" di P , cioè la prospettiva ottenuto da P sostituendo tutti i guadagni con zero. GLS significa che la valutazione di P è ottenuta come somma del valore di P^+ e P^-

$$V(P) = V(P^+) + V(P^-).$$

Da questo tipo di considerazione vengono fuori tutta una serie di limiti che portano di fatto a edificare quelle che sono le pietre miliari dell'evoluzione dei tentativi di modellare il comportamento umano nei confronti del rischio. Ora ci soffermeremo brevemente su alcune questioni tecniche riguardanti questi modelli. Come detto in precedenza, una delle ragioni fondamentali del successo della teoria dell'utilità attesa è la sua relativa semplicità matematica che scaturisce dalla concavità globale della funzione di utilità e dalla linearità applicata alle probabilità degli eventi.

Queste caratteristiche permettono di sfruttare la teoria della dualità nei problemi di massimizzazione dell'utilità attesa; non di meno, la stretta concavità della funzione d'utilità conduce all'unicità della soluzione per tali problemi di estremo vincolato. Inoltre nella PT e nella CPT la forma ad S della funzione valore aumenta notevolmente la difficoltà del problema. A grandi linee, il problema di ottimizzazione deve essere diviso in due parti distinte da analizzare separatamente, una per i guadagni e l'altra per le perdite; sfortunatamente, quando si "ricongiungono" questi due sotto-problemi è possibile imbattersi in questioni di cattiva positura dovuta al fatto che non sempre il bilanciamento delle due parti può essere *effettuato*⁴⁴. Come vedremo ad oggi sono diverse le tesi che cercano di migliorare fin qui lo stato dell'arte in materia, una metodologia recente ma che ha ancor il grosso limite di essere poco comprensibile e di più difficile applicazione e quella suggerita da *He e Zhou*⁴⁵ nel 2011.

44. Del Vigna M., (2012), "Information Asymmetry And Equilibrium Models In Behavioral Finance", These pour l'obtention du titre de Docteur en Mathématiques "Spécialité Mathématiques Appliquées", Università Di Pisa Université Paris-Dauphine Scuola L. Fibonacci Ecole Doctorale De Dauphine Eddimo – Ceremade, pp. 11,12.

45. He X.D. and Zhou X.Y., (2011), "Portfolio choice under cumulative prospect theory: An analytical treatment", *Management Science*, 57(2): 315-331.

I due autori sfruttano una tecnica conosciuta come formulazione tramite quantili. Con una serie di trasformazioni equivalenti, gli autori sono in grado di cambiare il dominio dei problemi da un insieme di variabili aleatorie (le lotterie ammissibili) ad un insieme di inverse di c.d.f. utilizzate per esprimere i quantili.

2.6.1 - Paradosso di Wu-Markle.

Nell'andare ad approfondire la critica principale mossa alla CPT (si parla della separabilità fra guadagni e perdite) ho preferito concentrarmi su un recente studio effettuato da George Wu e Alex B. Markle che nel 2008 ipotizzarono, attraverso un semplice esperimento, come la separazione fra guadagni e perdite nella CPT possa andare in contrasto con l'empirica.

I due si riferiscono al seguente esperimento: 81 partecipanti hanno dato le loro preferenze, come indicato di seguito (leggi $H > L$ "la prospettiva H è preferita alla prospettiva L").

$$H = \begin{pmatrix} 0.50 \text{ chance} \\ \text{at } 4200 \$ \\ 0.50 \text{ chance} \\ \text{at } -3000 \$ \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0.75 \text{ chance} \\ \text{at } 3000 \$ \\ 0.25 \text{ chance} \\ \text{at } -4500 \$ \end{pmatrix} = L$$

[52 %] [48%]

$$H^+ = \begin{pmatrix} 0.50 \text{ chance} \\ \text{at } 4200 \$ \\ 0.50 \text{ chance} \\ \text{at } \$ 0 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0.75 \text{ chance} \\ \text{at } 3000 \$ \\ 0.25 \text{ chance} \\ \text{at } \$ 0 \end{pmatrix} = L^+$$

[15 %] [85%]

$$H^- = \begin{pmatrix} 0.50 \text{ chance} \\ \text{at } \$ 0 \\ 0.50 \text{ chance} \\ \text{at } - 3000 \$ \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} 0.75 \text{ chance} \\ \text{at } \$ 0 \\ 0.25 \text{ chance} \\ \text{at } - 4500 \$ \end{pmatrix} = L^-$$

[37 %] [63%]

Come si vede, H è debolmente preferito a L, ma quando le due prospettive sono raggruppate nelle rispettive parti positive e negative, la maggioranza rilevante preferisce L + ad H + e L - ad H- .

GLS viene violata e CPT non può coprire tale modello di scelta. Nel seguito si farà riferimento a questo esperimento come " paradosso di Wu-Markle ". Nel modello CPT la GLS implica la separazione del dominio dei guadagni dal dominio delle perdite, rispetto a un soggettivo punto di riferimento. Questa separazione dipende dalla caratteristica forma della funzione di utilità a S, più ripida per perdite che per i guadagni, e su due diversi funzioni di ponderazione, che distorcono in modo diverso le probabilità degli utili rispetto a quella delle perdite.

Nel paradosso di Wu-Markle, è mostrato come le persone siano più propense ad accettare il rischio di una perdita piuttosto di dover accettare la speranza di una vittoria e, viceversa, prestano più attenzione rispetto a un possibile guadagno piuttosto che il rischio di una perdita. In altre parole, nella valutazione di una possibile perdita sembra ridursi il rischio se tale rischio viene presentato insieme ad una possibile speranza di guadagno. Per esempio, la valutazione della perdita di \$ 3,000 con una probabilità 0,5 in prospettiva H = (0, 0,5, \$ - 3.000, 0,5) sembra diversa dal valutazione della perdita di pari importo con la stessa probabilità entro la prospettiva L = (\$ 4200, 0,5; \$ - 3.000, 0,5), dove la presenza del possibile guadagno di \$ 4200 ha un ruolo di mitigazione evidente.

Al contrario, la valutazione di un possibile guadagno sembra ridursi nel caso di un rischio di perdita. Pertanto, la valutazione del guadagno di \$ 4200 con probabilità 0.5 in prospettiva P = (\$ 4200, 0.5, 0, 0.5) è differente dalla valutazione di un guadagno dello stesso importo con la stessa probabilità all'interno della prospettiva L = (\$ 4200, 0.5; -3000 \$, 0.5).

Wu e Markle (2008), hanno espresso dubbi sulla separabilità quindi delle perdite e dei guadagni. In poche parole, la separabilità guadagno-perdita (GLS) richiede che le preferenze per i guadagni siano indipendenti delle preferenze per le perdite e, più fortemente, che la valutazione di un gioco d'azzardo mista essere la somma delle valutazioni del guadagno e di perdita di porzioni di quel gioco d'azzardo. I due autori hanno suggerito di utilizzare lo stesso modello, CPT, con una parametrizzazione diversa per le prospettive miste e per le prospettive che coinvolgono solo utili o solo le perdite. Riportiamo le loro conclusioni generali:

*“In the last 50 years, a large body of empirical research has investigated how decision makers choose among risky gambles. Most of these findings can be accommodated by prospect theory. An S-shaped utility function and inverse S-shaped probability weighting function can model the reflection effect, the fourfold pattern of risk preferences, the common-ratio and common-consequence effects, as well as the generalization of these findings from risk to uncertainty. However, the majority of the existing empirical evidence has involved singledomain gambles. The emphasis on these gambles is sensible - they are easy for research participants to understand and can be studied in hypothetical situations as well as played out for real payoffs. The study of single-domain gambles is justified if the understanding gleaned from these investigations extends to the domain of mixed gambles. **Our study indicates that mixed gamble behavior is described well by an S-shaped utility function and an inverse S-shaped probability weighting function. However, gain-loss separability fails, and hence different parameter values are needed for mixed gambles than single-domain gambles.** As a result, findings inferred from studies of single domain gambles may not extend automatically to mixed gambles. Our violations of gain-loss separability appear to be systematic. Although a comprehensive study of gain-loss separability is beyond the scope of this paper, we encourage extensions of our tests to mixed gambles with different structures. Thus, even though future research will surely qualify the account of mixed gambles developed here, we nevertheless see our paper as moving us a step closer toward a fuller understanding of this important and understudied choice domain. In addition, we have proposed cognitive and affective explanations for the violations of gainloss separability but have not provided direct evidence for either explanation. The role that these psychological accounts and others play in the general evaluation of mixed gambles awaits further investigation.”*

Come sottolineato dagli autori il loro studio indica che il comportamento dello scommettitore è diverso in caso di scommessa mista rispetto a quando ci si concentra sul solo dominio delle perdite o delle vincite. Nel primo caso l’atteggiamento è descritto bene da una funzione di utilità a forma di S e una funzione di probabilità di ponderazione a forma di S inversa. Tuttavia considerando la separabilità dei guadagni-perdite il modello CPT non riesce al meglio a descrivere il comportamento degli agenti, e sono necessari, quindi, diversi valori dei parametri per giochi d'azzardo misti rispetto a

scommesse con singolo dominio. A tal riguardo Wu e Markle propongono una generalizzazione della CPT, la Bipolar cumulative prospect theory, BCPT che nel modo più naturale consente la valutazione delle vincite e delle perdite all'interno di una prospettiva mista congiuntamente anziché separatamente.

2.6.2- L'esperimento di Birnbaum-Bahra

Birnbaum e Bahra nel 2007 hanno proposto tutta una serie di esperimenti che riportano sistematiche violazioni di due proprietà comportamentali implicite nella CPT, una è la GLS appena discussa e l'altra è la "coalescenza", così definita come il presupposto che se ci sono due probabilità uguali in due rami di un gioco d'azzardo che conducono alla stessa conseguenza, essi possono essere combinati con l'aggiunta delle loro probabilità. Ad esempio nel gioco a tre rami $A = (\$100, 0.25, \$100, 0.25, ; \$0, 0.5)$ è equivalente al gioco con due rami $A' = (\$100, 0.5, ; \$0, 0.5)$. Birnbaum e Bahra hanno testato violazioni di questa proprietà presentando ai partecipanti le scommesse in termini di un recipiente contenente esattamente 100 marmi di diversi colori. Così secondo coalescenza, $B' = (25 \text{ rosso per vincere } \$100; 75 \text{ bianco per vincere } \$0)$, dovrebbe essere considerata equivalente a $B = (25 \text{ rosso per vincere } \$100; 25 \text{ bianco per vincere } \$0; 50 \text{ bianco per vincere } \$0)$.

In realtà così non è poiché presentando così la scommessa, con questa forma, dal momento che ogni persona che partecipa alla scommessa si chiederà qual è la ragione per cui i primi 25 marmi bianchi non sono stati sommati ai secondi 50 marmi bianchi, è ammissibile che potrà pensare che i marmi differiscono tra loro in qualche modo. In ogni caso si avrà un'ulteriore informazione o dubbio che potrebbe generare errori. I due autori hanno poi usato lo stesso tipo di gioco per andare a testare la violazione della GLS (implicita nella CPT).

Come abbiamo detto ogni gioco d'azzardo "E" è descritto in termini di un recipiente contenente esattamente 100 marmi di diverso colore, da cui si sarebbe estratto a sorte un marmo, e il colore di questo avrebbe determinato il premio.

In basso sarà presentata la percentuale di ogni scelta:

$$\begin{array}{ccc}
F = \left(\begin{array}{l} 25 \text{ black} \\ \text{to win } \$ 100 \\ 25 \text{ white} \\ \text{to win } \$ 0 \\ 50 \text{ pink} \\ \text{to lose } \$ 50 \end{array} \right) & \succ & \left(\begin{array}{l} 50 \text{ blue} \\ \text{to win } \$ 50 \\ 25 \text{ white} \\ \text{to lose } \$ 0 \\ 25 \text{ red} \\ \text{to lose } \$ 100 \end{array} \right) = G \\
[76 \%] & & [48 \%] \\
\\
F^+ = \left(\begin{array}{l} 25 \text{ black} \\ \text{to win } \$ 100 \\ 25 \text{ white} \\ \text{to win } \$ 0 \\ 50 \text{ pink} \\ \text{to win } \$ 0 \end{array} \right) & \succ & \left(\begin{array}{l} 25 \text{ blue} \\ \text{to win } \$ 50 \\ 25 \text{ blue} \\ \text{to win } \$ 50 \\ 50 \text{ white} \\ \text{to win } \$ 0 \end{array} \right) = G^+ \\
[29 \%] & & [71 \%] \\
\\
F^- = \left(\begin{array}{l} 50 \text{ white} \\ \text{to lose } \$ 0 \\ 25 \text{ white} \\ \text{to lose } \$ 0 \\ 25 \text{ red} \\ \text{to lose } \$ 100 \end{array} \right) & \succ & \left(\begin{array}{l} 25 \text{ black} \\ \text{to win } \$ 100 \\ 25 \text{ white} \\ \text{to win } \$ 0 \\ 50 \text{ pink} \\ \text{to lose } \$ 50 \end{array} \right) = G^- \\
[35 \%] & & [65 \%]
\end{array}$$

Come si può vedere F è preferito a G, ma quando le due prospettive sono divise nelle rispettive parti positive e negative (secondo coalescenza) una maggioranza relativa preferisce G+ a F+ e G- a F-. Questa violazione della GLS è chiaramente in contrasto con quanto definito nella CPT⁴⁶.

46. Utilizzando la BCPT con le funzioni di ponderazione bi-polarizzate con parametri $\delta = 0.89$ e $\gamma = 0.74$ $w(p,q) = \frac{p^{0.74} - q^{0.89}}{[p^{0.74} + (1-p)^{0.74}]^{1/0.74} + [q^{0.89} + (1-q)^{0.89}]^{1/0.89} - 1}$; e la funzione valore classica KT con parametri $\lambda = 1.77$, $\alpha = 0.68$ e $\beta = 0.79$ otteniamo; $VbCPT(F) = -11.07 \geq VbCPT(G) = -11.11$
 $VbCPT(F^+) = 6.67 \leq VbCPT(G^+) = 6.71$
 $VbCPT(F^-) = -19.28 \leq VbCPT(G^-) = -18.25$.

Questi risultati sono in accordo con la relazione di preferenza (\succ) sopra esposta e la GLS è coperta.

2.7 – Bipolar CPT.

L'obiettivo di questo nuovo filone di studi è di generalizzare la CPT, attraverso il mantenimento della funzione valore (di utilità), ma sostituendo le due funzioni di ponderazione con una funzione di bi-ponderazione. Questa è una funzione con due argomenti, il primo corrispondente alla probabilità di un guadagno e il secondo per la probabilità di una perdita della stessa entità. La letteratura chiama questo modello Bipolar Cumulative Prospect Theory (BCPT). La BCPT permetterà di valutare congiuntamente gli utili e le perdite all'interno di una lotteria mista. La motivazione di questa generalizzazione sono nel paradosso Wu-Markle, come già detto infatti gli agenti sono più propensi ad accettare il rischio di una perdita piuttosto di dover accettare la speranza di una vittoria e, viceversa, prestano più attenzione rispetto a un possibile guadagno piuttosto che il rischio di una perdita.

Nella BCPT le due funzioni di ponderazione della CPT vengono sostituite con una funzione bi-ponderazione a due variabili. Questa esprime nel primo argomento (cumulato) la probabilità di un guadagno con una maggiore utilità o uguale di un dato livello L e nel secondo argomento (cumulato) la probabilità di una perdita simmetrica non inferiore a $-L$. Il risultato finale è un numero compreso nell'intervallo chiuso $[-1; 1]$, da non pensare come una distorta probabilità ma come "differenza distorta della probabilità di guadagni e probabilità di perdite simmetrici.

Come abbiamo visto una funzione di ponderazione è una funzione strettamente crescente $w: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ soddisfino le condizioni $w(0) = 0$, $w(1) = 1$.

Si definisce la funzione bi-ponderazione una qualsiasi funzione;

$$w(p, q): A \rightarrow [-1; 1] \quad \text{con } A = \{(p, q) \in [0, 1] \times [0, 1] \text{ tali che } p + q \leq 1\}$$

che soddisfa le seguenti condizioni:

- $w(p, q)$ è crescente in p e decrescente in q (bi-monotonicità).
- $w(1,0) = 1$, $w(0,1) = -1$ e $w(0,0) = 0$.

Nella formulazione originaria della CPT di Kahneman e Tversky, la funzione di ponderazione delle probabilità abbiamo visto essere ;

$$w(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

Nella forma Bipolare della Cpt invece, la funzione di ponderazione è;

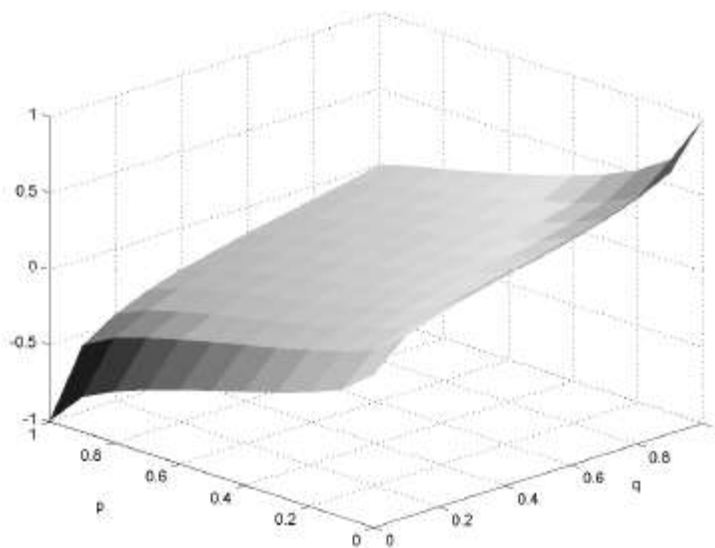
$$w(p,q) = \frac{p^\gamma - q^\delta}{[p^\gamma + (1-p)^\gamma]^{1/\gamma} + [q^\delta + (1-q)^\delta]^{1/\delta} - 1}$$

Una caratteristica tipica della funzione di ponderazione descritta da Tversky e Kahneman (1992) è la forma a S inversa nel piano. Considerando la forma bipolarizzata della funzione di ponderazione e preservando la parametrizzazione originale che stimava $\gamma = 0.61$ e $\delta = 0.69$, si ha;

$$w(p,q) = \frac{p^{0.61} - q^{0.69}}{[p^{0.61} + (1-p)^{0.61}]^{1/0.61} + [q^{0.69} + (1-q)^{0.69}]^{1/0.69} - 1}$$

Sotto nel Grafico V si è plottato, tracciato l'equazione sopra. Come si può vedere la tipica forma inversa S-Shape è generalizzata dal piano allo spazio.

Grafico V- BCPT weighting function



3.- ANALISI EMPIRICA

3.1 - Il contesto dell'analisi.

In questo capitolo, attraverso un esperimento, cercherò di analizzare e descrivere il comportamento degli individui, posti di fronte a una scelta che presuppone un certo grado di incertezza.

L'individuo può trovarsi, in ogni momento nell'arco della giornata, in situazioni che richiedono la necessità di prendere una decisione, ed è raro che ad una decisione sia associata una sola alternativa di scelta. Spesso, ad ogni decisione da prendere si hanno infatti più alternative da valutare, le quali risultano inoltre avere un diverso grado di rischio o incertezza. L'intero terzo capitolo si sviluppa sulla descrizione dell'esperimento volto a indagare, con l'analisi e la descrizione dei risultati empirici ottenuti, il comportamento di un individuo utilizzando come base teorica il modello della "Cumulative Prospect Theory" di Kahneman e Tversky.

Ho cercato di presentare un esperimento molto semplice rispetto a quello iniziale proposto da Kahneman e Tversky, dal quale poi trarre informazioni per capire l'andamento della funzione dei pesi.

3.1.1 - Obiettivi dell'esperimento

Attraverso l'esperimento cercherò di capire, come si comportano gli individui posti davanti a una scelta, e quale atteggiamento assumono (chiaramente con riferimento al mio campione di studio) questi nei confronti del rischio, al presentarsi dei problemi decisionali (preimpostati) nel questionario che ho loro somministrato. In particolare poi cercherò verosimilmente dividendo il campione per sesso e fasce di età di vedere con merito ad ogni categoria se varia o meno il loro comportamento in relazione al rischio (*se risk seeking, o risk aversion*)⁴⁷.

47. Ce da segnalare che nel loro esperimento originale Tversky e Kahneman hanno considerato 4 classi, risk seeking or risk aversion rispettivamente per gains (guadagni) and losses (perdite). Nel mio esperimento come avremo modo di vedere, mi sono concentrato solo su prospetti positivi, considerando solo i guadagni, più avanti spiegherò il motivo.

3.2 - Struttura dell'esperimento

L' esperimento è stato condotto su colleghi della Banca Popolare Sant'Angelo (BPSA) e studenti universitari provenienti da Pisa e Catania (n pari a 23), senza una formazione specifica o con particolare competenza nella teoria delle decisioni, inoltre la partecipazione non dipendeva da nessun criterio di reclutamento specifico. Ho quindi strutturato un questionario dove erano presenti 6 problemi decisionali presentati ad ogni singolo soggetto, e dove ogni problema decisionale a sua volta è strutturato in 6 scelte ordinate in modo decrescente per un totale di 36 domande (vedi questionario pag.74). A ogni intervistato viene chiesto quindi di effettuare delle scelte; le scelte sono individuali, cioè devono esser prese in modo autonomo e inoltre l'esperimento è anonimo, cioè condotto in modo tale che al partecipante non possano essere attribuite le decisioni prese. I diversi soggetti sono chiamati a scegliere fra una serie uguale di somme certe e una lotteria. Nell 'esperimento originale dei due autori, avevamo detto nel capitolo precedente, i certi equivalenti erano calcolati tramite una semplice media fra il livello più alto rifiutato ed il più basso livello *accettato*⁴⁸, venendo in tal modo deciso tramite scelta e non tramite diretta definizione da parte del decisore. Nel rispetto dell'esperimento originale anche io nel mio lavoro, ho calcolato per la stima dei certi equivalenti di ogni singolo intervistato un parametro (c) come media fra la somma certa più alta rifiutata e quella più bassa accettata. Come nell'esperimento di Kahneman e Tversky mi sono concentrato per le lotterie solo su prospetti puri a due risultati con probabilità determinate, assumendo la forma di $(x, p; 0, 1-p)$.

In sostanza quindi ogni intervistato è chiamato a scegliere nei problemi decisionali fra una lotteria con un certo risultato x e con associata una probabilità che quell'evento si verifichi, e 0 con annessa la probabilità complementare, e una somma corrisposta in modo certo che è stata impostata partendo dal valore offerto dalla lotteria (la x) e sottraendo il 20%, di seguito poi ho approssimato le cifre prendendo in considerazione solamente multipli di 5 (vedi questionario pag.74). Dopo aver calcolato il parametro c per ogni singolo individuo per ogni prospetto, seguendo il filo logico che lega il mio esperimento con quello originale, sono andato a calcolare C/x (certo equivalente) ossia il

48. Es: certi equivalenti (300, 400, 500, 600, 700, 800, 900) livello più alto rifiutato 500 , livello più basso accettato 600, il certo equivalente (c) = 550.

rapporto fra il parametro c del prospetto ed il risultato x . In tal merito ho ritenuto prendere in considerazione con riferimento alla totalità degli intervistati il valori mediani di c (anziché la media) per calcolare poi C/x , poichè questo evita il rischio di grossi *sbilanciamenti*⁴⁹, inoltre il tutto è in linea con quanto previsto nell'esperimento originale. Dopo ho rapportato le C/x di ogni prospetto in funzione di p .

Si ricorda infine che come nell'esperimento originale viene assunta una funzione valore di tipo lineare e omogeneità delle preferenze, cioè indifferenza fra moltiplicare i risultati di un prospetto per una costante k e moltiplicare per k il suo certo equivalente. Valendo, quindi, l'omogeneità delle preferenze, Kahneman e Tversky ipotizzarono una funzione di valore $v(x)$ del tipo:

$$v(x) = x^\alpha \quad \text{per } x \geq 0$$

$$v(x) = -\lambda (-x)^\beta \quad \text{per } x < 0.$$

E una funzione di ponderazione (per le probabilità di utili e perdite) di due parti, w_+ , e w_- , di questo tipo:

$$w_+(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$w_-(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}},$$

49. Es: Distribuzione con 5 valori (1,2,3,4,50), questo tipo di distribuzione è chiaramente sbilanciata verso sinistra e se la totalità delle scelte degli individui ricadesse all'interno dei primi 4 termini, utilizzare una media sarebbe uguale ma qualora ci fosse anche una singola scelta verso il valore 50, la media aumenterebbe molto ma non rappresenterebbe la reale intenzione, si tratterebbe di un valore medio distorto, ecco perché è preferibile utilizzare la mediana. Chiaramente questo è un esempio banale che esula dal mio argomento però a mio avviso rende molto chiara l'idea del perché si sia usata questo tipo di operazione piuttosto che l'altra.

Le funzioni $w^-(p)$ e $w^+(p)$ sopra riportate, presentano degli aspetti interessanti. Esse si basano, infatti, solo sulla stima di un parametro e consentono di rappresentare sia le regioni concave sia quelle convesse. Ora nel mio esperimento ho preso in considerazione solo prospetti positivi, ho cioè analizzato solo la parte dei guadagni (gains), poiché sostanzialmente i due tipi di analisi dovrebbero portare a una funzione (w) che graficamente è pressoché uguale, per via del fatto che l'atteggiamento nei confronti del rischio empiricamente, da parte dello stesso intervistato, è diametralmente identico quando si presenta loro uno stesso prospetto "negativo" della forma $(x, 1-p; 0, p)$ e C/x rispetto al prospetto considerato per i guadagni $(x, p; 0, 1-p)$ e C/x .

In sostanza quindi ho usato l'applicativo di Office "Excel" per impostare la funzione (w^+) sopradescritta con il parametro iniziale $\gamma = 0.61$ proposto da Kahneman e Tversky, dopodiché in base ai risultati (C/x) riscontrati nelle interviste, ho poi trovato il mio parametro γ facendo, in modo semplice, la differenza fra le C/x e la corrispondente $w^+(p)$ al quadrato, $(w^+(p) - C/x)^2$ minimizzando la distanza tra i punti trovati, e nella fattispecie il parametro che più rispecchiava l'andamento del mio esperimento è di fatto un $\gamma = 0.65$. In sostanza in linea con quanto definito dagli autori originali del modello. E in media con i parametri elaborati da diversi studiosi negli ultimi vent'anni. Nella tabella sotto si possono vedere i diversi parametri evidenziati in letteratura a partire dal 1992.

Studi sperimentali	Funzione di utilità		Funzione di ponderazione	
	α	β	γ	δ
Tversky e Kahneman (1992)	0.88	0.88	0.61	0.69
Camerer e Ho (1994)	0.37	-	0.56	-
Tversky e Fox (1995)	0.88	-	0.69	-
Wu e Gonzalez (1996)	0.52	-	0.71	-
Gonzalez e Wu (1999)	0.49	-	0.44	-
Abdellaoui (2000)	0.89	0.92	0.60	0,70
Bleichrodt e Pinto (2000)	0.77	-	0.67	0.55
Kilka e Weber (2001)	0,76-1,00	-	0,30-,51	-
Abdellaoui <i>et al.</i> (2003)	0.91	-	0.76	-

Di seguito ora vedremo dapprima la struttura del questionario e dopodiché i risultati che ne sono venuti fuori.

3.2.1 - Questionario

QUESTIONARIO

Con questo semplice questionario anonimo, vi chiederò di scegliere fra sei problemi decisionali ognuno di questo strutturato in modo che tu scelga tra una lotteria con associate delle probabilità di vincere o meno una certa somma di denaro e una somma di denaro certa.

SESSO: M | F

p: (probabilità)

ETA' : 20-30 31-40
 41-50 51-60
 61-70

Lotteria

Denaro certo

- | | | | | |
|----|------------------------------------|--------------------------|-------|--------------------------|
| 1) | 200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9 | <input type="checkbox"/> | 160 € | <input type="checkbox"/> |
| | 200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9 | <input type="checkbox"/> | 135 € | <input type="checkbox"/> |
| | 200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9 | <input type="checkbox"/> | 110 € | <input type="checkbox"/> |
| | 200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9 | <input type="checkbox"/> | 85 € | <input type="checkbox"/> |
| | 200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9 | <input type="checkbox"/> | 60 € | <input type="checkbox"/> |
| | 200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9 | <input type="checkbox"/> | 35 € | <input type="checkbox"/> |
| 2) | 150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8 | <input type="checkbox"/> | 120 € | <input type="checkbox"/> |
| | 150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8 | <input type="checkbox"/> | 100 € | <input type="checkbox"/> |
| | 150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8 | <input type="checkbox"/> | 80 € | <input type="checkbox"/> |
| | 150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8 | <input type="checkbox"/> | 60 € | <input type="checkbox"/> |
| | 150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8 | <input type="checkbox"/> | 40 € | <input type="checkbox"/> |
| | 150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8 | <input type="checkbox"/> | 20 € | <input type="checkbox"/> |
| 3) | 130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6 | <input type="checkbox"/> | 105 € | <input type="checkbox"/> |
| | 130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6 | <input type="checkbox"/> | 85 € | <input type="checkbox"/> |
| | 130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6 | <input type="checkbox"/> | 70 € | <input type="checkbox"/> |
| | 130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6 | <input type="checkbox"/> | 55 € | <input type="checkbox"/> |
| | 130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6 | <input type="checkbox"/> | 35 € | <input type="checkbox"/> |
| | 130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6 | <input type="checkbox"/> | 20 € | <input type="checkbox"/> |

4)	100 € con p 0.6 oppure 0 con p 0.4	<input type="checkbox"/>	80 €	<input type="checkbox"/>
	100 € con p 0.6 oppure 0 con p 0.4	<input type="checkbox"/>	65 €	<input type="checkbox"/>
	100 € con p 0.6 oppure 0 con p 0.4	<input type="checkbox"/>	55 €	<input type="checkbox"/>
	100 € con p 0.6 oppure 0 con p 0.4	<input type="checkbox"/>	40 €	<input type="checkbox"/>
	100 € con p 0.6 oppure 0 con p 0.4	<input type="checkbox"/>	30 €	<input type="checkbox"/>
	100 € con p 0.6 oppure 0 con p 0.4	<input type="checkbox"/>	15 €	<input type="checkbox"/>
5)	80 € con p 0.8 oppure 0 con p 0.2	<input type="checkbox"/>	65 €	<input type="checkbox"/>
	80 € con p 0.8 oppure 0 con p 0.2	<input type="checkbox"/>	55 €	<input type="checkbox"/>
	80 € con p 0.8 oppure 0 con p 0.2	<input type="checkbox"/>	40 €	<input type="checkbox"/>
	80 € con p 0.8 oppure 0 con p 0.2	<input type="checkbox"/>	30 €	<input type="checkbox"/>
	80 € con p 0.8 oppure 0 con p 0.2	<input type="checkbox"/>	20 €	<input type="checkbox"/>
	80 € con p 0.8 oppure 0 con p 0.2	<input type="checkbox"/>	10 €	<input type="checkbox"/>
6)	50 € con p 0.9 oppure 0 con p 0.1	<input type="checkbox"/>	40 €	<input type="checkbox"/>
	50 € con p 0.9 oppure 0 con p 0.1	<input type="checkbox"/>	35 €	<input type="checkbox"/>
	50 € con p 0.9 oppure 0 con p 0.1	<input type="checkbox"/>	30 €	<input type="checkbox"/>
	50 € con p 0.9 oppure 0 con p 0.1	<input type="checkbox"/>	20 €	<input type="checkbox"/>
	50 € con p 0.9 oppure 0 con p 0.1	<input type="checkbox"/>	15 €	<input type="checkbox"/>
	50 € con p 0.9 oppure 0 con p 0.1	<input type="checkbox"/>	10 €	<input type="checkbox"/>

SEGRETEZZA DEI DATI FORNITI CON IL PRESENTE QUESTIONARIO

Si fa presente ai sensi della legge 675/1996 e del successivo D.L.vo 196/2003 che tutte le informazioni raccolte con i questionari saranno utilizzate esclusivamente per scopi di ricerca scientifica (art. 12, c. 1, punto d). I dati raccolti nell'ambito della presente indagine, inoltre, sono tutelati dal segreto statistico e pertanto non possono essere comunicati o esternati se non in forma aggregata, in modo che non se ne possa fare alcun riferimento individuale, e possono essere utilizzati solo per scopi statistici (art. 9 del decreto legislativo 6 settembre 1989, n. 322). I dati raccolti infine verranno resi anonimi, in sede di trattamento informatico, ai sensi dell'art. 1, c. 2 punto i) della legge 675/1996.

3.4 - Analisi dei risultati

Nella formulazione originale si sono rappresentati i risultati ottenuti in termini d'avversione e propensione al rischio per: risultati positivi e probabilità elevate, risultati positivi e probabilità piccole, risultati negativi e probabilità elevate, risultati negativi e probabilità basse. Io in questo caso prenderò in considerazione solo risultati positivi con p che varia da 0.1 a 0.9 nei 6 prospetti presentati, e quello che si è evidenziato e come il \approx il 78 % dei soggetti intervistati fosse avverso al rischio per i positivi, per $p > 0.6$ ⁵⁰. In più un'altissima percentuale degli intervistati presenta propensione al rischio per basse probabilità e per valori positivi. La tabella sotto riporta i risultati degli intervistati e mette in relazione il prospetto offerto con la somma certa c che ogni soggetto è disposto ad accettare per assumersi il rischio della lotteria.

Tabella 3.1- Confronto c con il relativo prospetto per ogni intervistato.

Intervistati	Prospetti					
	(200,0,1 ; 0,0,9)	(150,0,2 ; 0,0,8)	(130,0,4 ; 0,0,6)	(100,0,6 ; 0,0,4)	(80,0,8 ; 0,0,2)	(50,0,9 ; 0,0,1)
	c	c	c	c	c	c
1	35	30	45	60	60	40
2	47,5	50	77,5	60	65	40
3	35	20	20	15	25	37,5
4	47,5	30	27,5	35	47,5	40
5	72,5	70	62,5	47,5	60	40
6	97,5	70	62,5	47,5	35	32,5
7	147,5	90	77,5	80	65	40
8	72,5	50	45	47,5	47,5	37,5
9	72,5	70	95	60	65	40
10	72,5	90	62,5	72,5	65	37,5
11	47,5	30	62,5	47,5	60	40
12	35	20	27,5	35	47,5	37,5
13	35	30	45	47,5	47,5	32,5
14	35	20	27,5	35	35	32,5
15	97,5	90	77,5	72,5	65	40
16	47,5	30	45	47,5	47,5	37,5
17	47,5	50	62,5	47,5	60	40
18	72,5	70	62,5	60	60	37,5
19	35	30	45	47,5	35	32,5
20	35	30	45	35	47,5	40
21	47,5	50	62,5	47,5	47,5	40
22	35	50	62,5	47,5	60	40
23	72,5	50	45	35	47,5	40

50. Di fatto cinque soggetti su 23 sono propensi al rischio. Nell'esperimento di Kahnemann e Tversky si ricorda che il risultato fu che il 100% dei soggetti intervistati fosse propenso al rischio, per valori negativi, e avverso al rischio per i positivi, per $p > 0.5$.

Nella analisi ho cercato di capire l'atteggiamento nei confronti del rischio da parte dei soggetti e nello specifico sono partito cercando di analizzare la situazione in maniera generica considerando la totalità del campione. Poi sono passato ad una ulteriore approfondimento cercando di capire l'atteggiamento al rischio degli intervistati, in base al sesso separando donne e uomini e in ultima fase proseguendo l'analisi e andando a vedere il tutto secondo le diverse fasce di età del campione.

p	C/x
0,1	0,2375 €
0,2	0,333 €
0,4	0,481 €
0,6	0,475 €
0,8	0,594 €
0,9	0,8

$$v(x) = x^\alpha \quad \text{per } x > 0$$

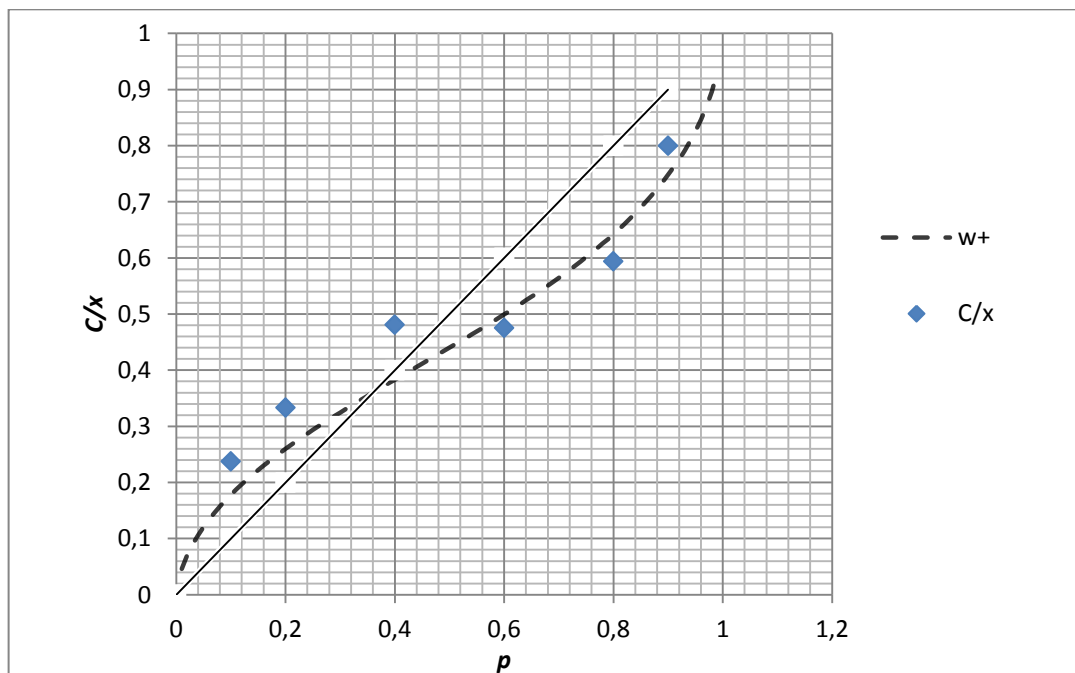
$$v(x) = -\lambda (-x)^\beta \quad \text{per } x < 0$$

$$w^+(p) = \frac{p^\gamma}{(p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$w^-(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{\frac{1}{\delta}}}$$

Come si può osservare sotto dal grafico (3.1), i risultati ottenuti sono in linea generale simili a quelli ottenuti da Kahneman e Tversky nel loro esperimento originale.

GRAFICO 3.1 – Funzione $w^+(p)$ e C/x considerando il campione in modo generico.



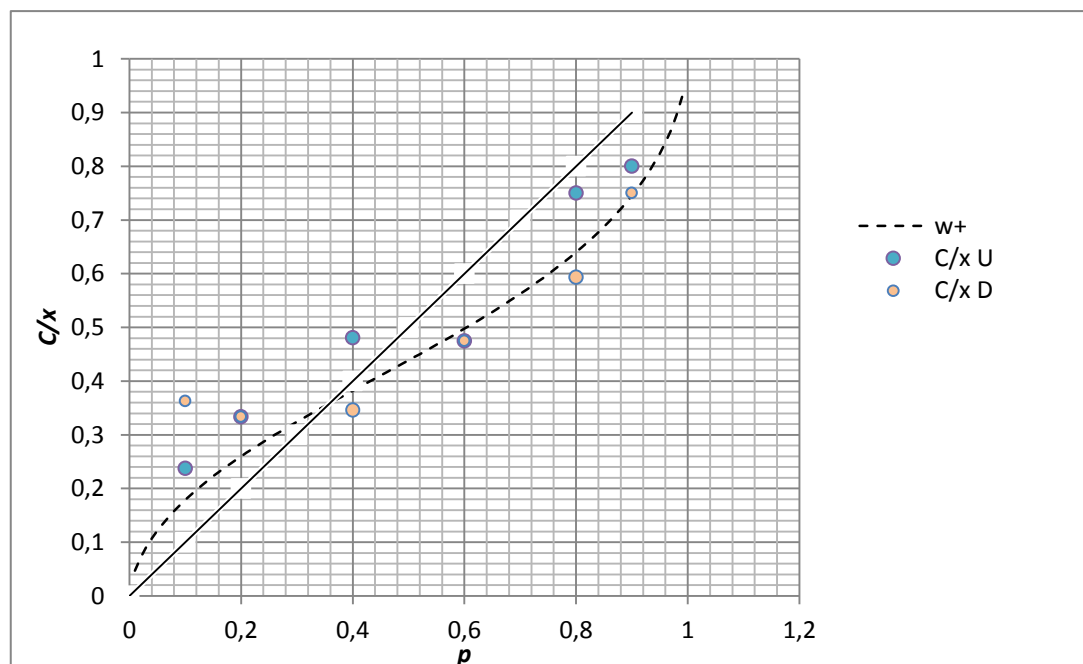
Quello che si può vedere e come gli intervistati in linea con quanto profilato dai due autori israeliani registrino una propensione al rischio per probabilità basse e guadagni positivi, di fatti le C/x per i prospetti con p basso tendono a stare nel grafico sopra la bisettrice, a differenza dei prospetti con p più alto dove si tende a essere più avversi al rischio. Questo è facilmente intuibile se infatti vediamo il valore atteso per i primi due prospetti (200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9) e (150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8) otteniamo rispettivamente 20 € per il primo e 30 € per il secondo prospetto, di fatti però il certo equivalente che viene fuori dalle interviste per questi due prospetti è più alto 47.5 € e 50 €, ciò significa che si è disposti a rischiare di più, rispetto a quanto mediamente si guadagna partecipando alla lotteria. Al crescere della probabilità si registra invece avversione. Questa quindi tende ad aumentare ad es. per p pari a 0.6 vediamo che solo 3 soggetti rimangono propensi al rischio il 13 % sul campione dei 23 soggetti, per il resto del campione si registra un cambio di atteggiamento.

p	C/x U	C/x D
0,1	0,238 €	0,363 €
0,2	0,333333	0,333333
0,4	0,480769	0,346154
0,6	0,475	0,475
0,8	0,75	0,59375
0,9	0,8	0,75

Di fianco invece sono riportati e messi a confronto le C/x rilevate del campione, rispettivamente per Uomini (in azzurro) e Donne (in rosa), questo per vedere se l'atteggiamento al rischio sia più o meno diverso seconda del sesso.

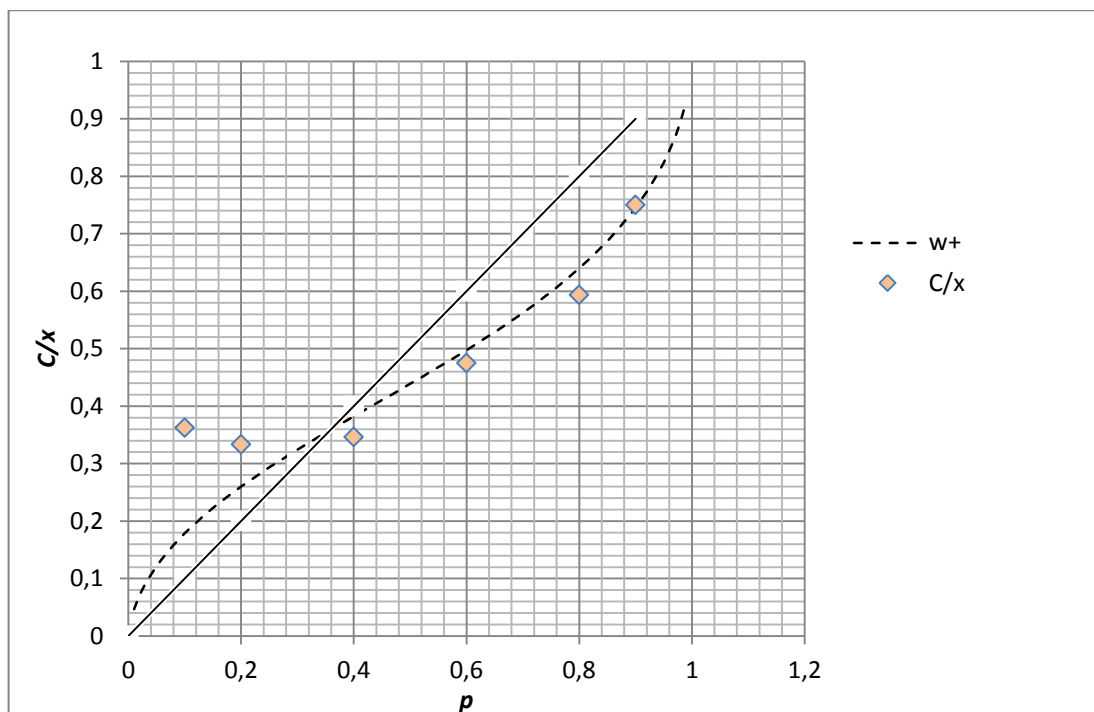
N° Intervistati:	
Uomini	12
Donne	11

GRAFICO 3.2 – Funzione w^+ (p) e C/x considerando il campione con riferimento specifico al sesso.



Quello che è emerso dall'esperimento e che donne e uomini tendono ad avere un profilo di rischio che è leggermente *diverso*⁵¹, difatti le donne tendono rispetto agli uomini ad essere più estreme, ovvero preferiscono rischiare di più per le lotterie con p basso e guadagni positivi più alti, per poi registrare un cambio di atteggiamento in linea con quanto profilato dalla teoria del modello, ma rispetto agli uomini tendono poi a essere maggiormente avverse al rischio all'aumentare della probabilità (vedi grafico 3.2). di seguito per completezza ho riportato anche l'analisi grafica con riferimento alle sole donne prima (grafico 3.3) e agli uomini poi (grafico 3.4).

GRAFICO 3.3 – Funzione w^+ (p) e C/x considerando il campione con riferimento alle donne del campione.

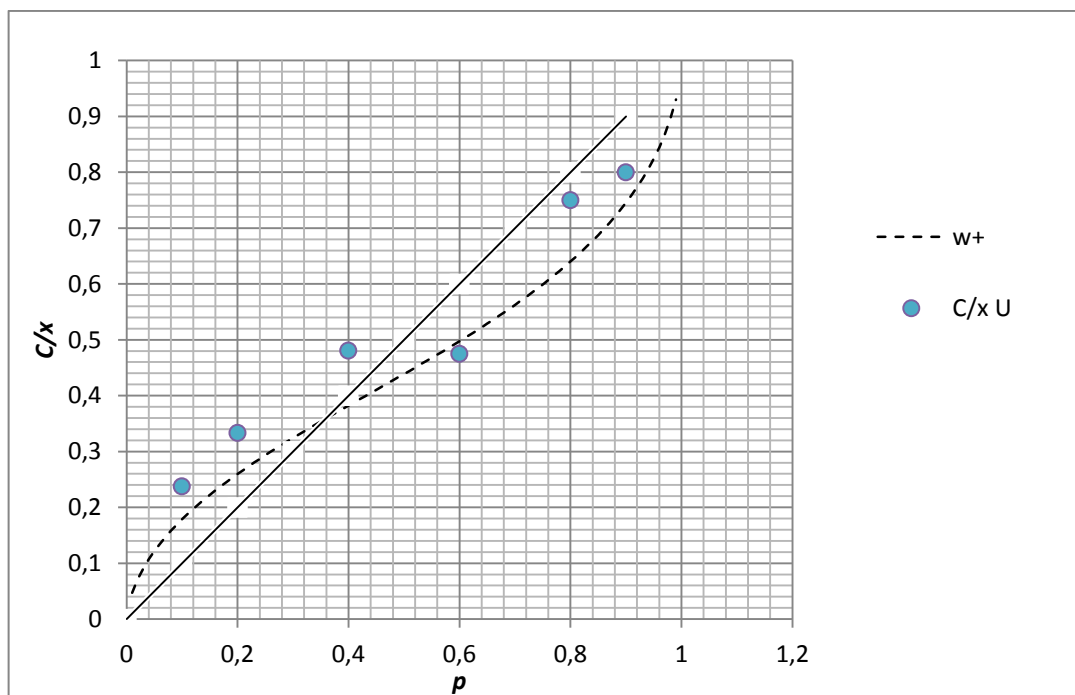


Per i prospetti con p basso gli equivalenti certi calcolati con riferimento alle donne tendono a stare nel grafico sopra la bisettrice, a differenza dei prospetti con p più alto dove si tende a essere più avversi al rischio.

51. chiaramente e bene far notare come per questo tipo di analisi se da un punto di vista generale il campione da me analizzato è sufficiente per avere dei risultati idonei 23 intervistati in totale (nell'esperimento originale si ricorda che il numero dei partecipanti all'esperimento era 25) nello specifico invece questo diventa abbastanza ridotto poiché suddivide il campione in 12 uomini e 11 donne, per rendere il tutto più significativo l'ideale sarebbe stato quello di raddoppiare il numero degli intervistati.

La somma certa che viene fuori dalle interviste per i primi due prospetti, quella per cui si sarebbe disposti a rinunciare alla lotteria è 72.5 € e 50 €, ciò significa che si è disposti a rischiare di più, rispetto a quanto mediamente si guadagna partecipando alla lotteria (avevamo visto prima, che per i due prospetti la media era rispettivamente di 20 e 30 €), in particolare le donne poi rispetto agli uomini hanno un profilo di rischio più alto perché se si guarda al primo prospetto la somma certa accettata dagli uomini è più bassa (47.5 €). Al crescere della probabilità si registra invece avversione. Questa quindi tende ad aumentare ad es. per p pari a 0.4 vediamo che 5 donne su 11 rimangono propense al rischio ovvero circa il 45 %, con p pari a 0.6 solo una donna delle 11 sarebbe propensa al rischio ovvero solo il 9 % preferirebbe partecipare alla lotteria per il resto del campione si registra un cambio di atteggiamento.

GRAFICO 3.4 – Funzione $w^+(p)$ e C/x considerando il campione con riferimento agli uomini del campione.



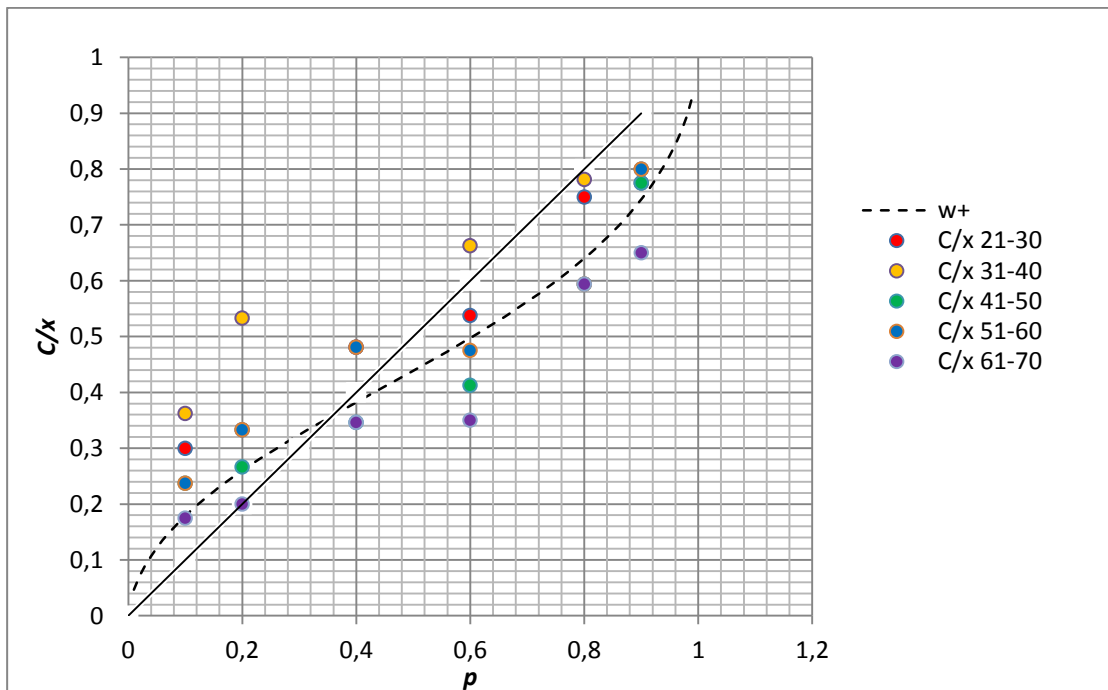
Gli uomini tendono ad avere un profilo di rischio più basso rispetto a quello delle donne la somma certa accettata dagli uomini è 47.5 € inferiore a quella delle donne. Al crescere della probabilità per prospetti positivi ma con gains sempre minori come visto empiricamente si registra una maggiore avversione, però qui a differenza delle donne gli uomini tendono ad essere si avversi per probabilità alte ma un'avversione minore rispetto a quella delle donne. Per p pari a 0.6 vediamo che solo 2 uomini su 13 rimangono propensi al rischio ovvero circa il 15 % del campione maschile preferirebbe

partecipare alla lotteria.

Conclusa questa analisi che fa riferimento al sesso, ho indirizzato il lavoro, come ultima fase dell'esperimento, all'età degli intervistati. Sotto sono riportati e messi a confronto le C/x rilevate del campione, rispettivamente per fasce di età: 21-30, (in rosso); 31-40 (in giallo); 41-50 (in verde); 51-60 (in blu); 61-70 (in viola). Questo per vedere se l'atteggiamento al rischio sia più o meno diverso a seconda dell'età del campione oggetto in analisi.

p	C/x 21-30	C/x 31-40	C/x 41-50	C/x 51-60	C/x 61-70
0,1	0,300 €	0,3625	0,2375	0,2375	0,175
0,2	0,333333	0,533333	0,266667	0,333333	0,2
0,4	0,480769	0,480769	0,346154	0,480769	0,346154
0,6	0,5375	0,6625	0,4125	0,475 €	0,350 €
0,8	0,75	0,78125	0,59375	0,59375	0,59375
0,9	0,8	0,775	0,775	0,8	0,65

GRAFICO 3.5 – Funzione w^+ (p) e C/x considerando il campione con riferimento alle diverse fasce di età.

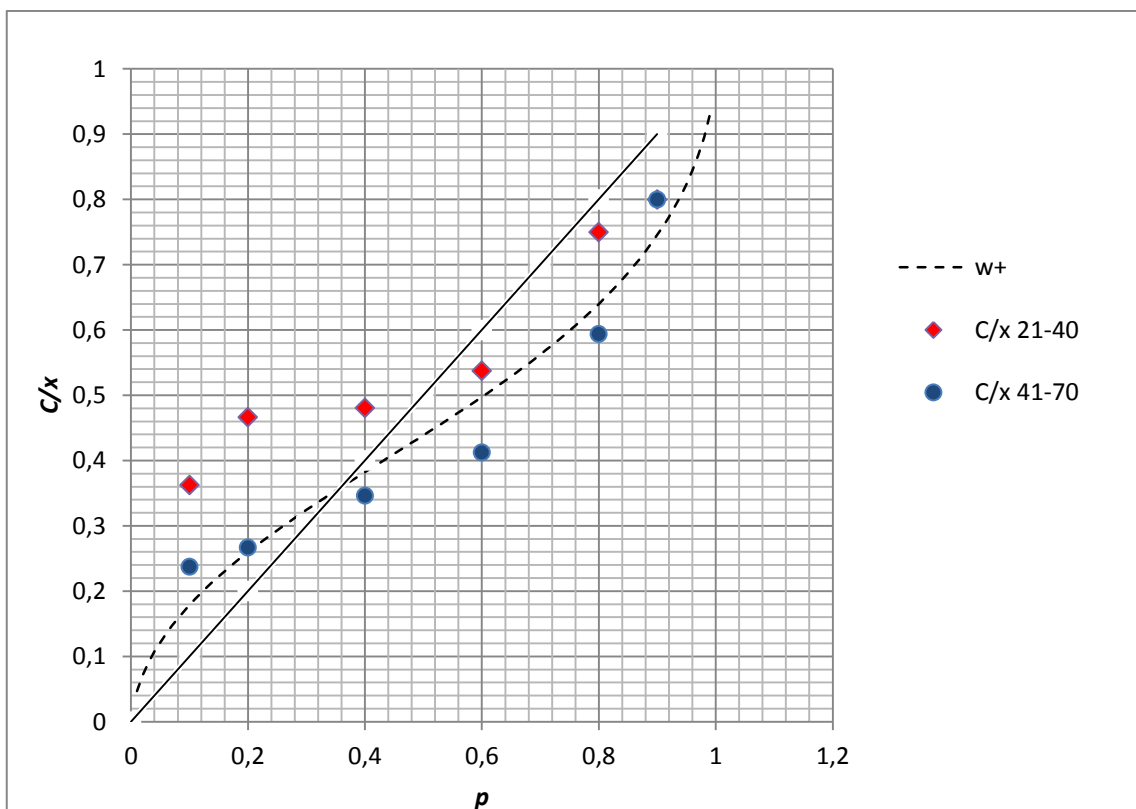


N° Intervistati per fasce di età:

Età	21-30	6
	31-40	4
	41-50	4
	51-60	4
	61-70	5

Quello che è emerso dall'esperimento e che il campione tende ad avere un profilo di rischio differente, se si scompone questo in diverse fasce di età. Difatti se si guarda l'andamento complessivo si può notare come tendenzialmente vi sia un atteggiamento più prudente al crescere dell'età, i giovani intervistati rispetto agli intervistati più anziani tendono ad avere un atteggiamento più aggressivo e a essere più amanti del rischio (vedi grafico 3.5). Di seguito affinché si possa considerare il test più significativo e per una migliore comprensione ho accorpato le cinque categorie in due sole fasce⁵², inoltre per completezza ho riportato anche l'analisi grafica con riferimento alle singole fasce di età.

GRAFICO 3.6 – Funzione $w+$ (p) e C/x considerando il campione con riferimento a due soli gruppi diversi di età.



52. come chiarito in precedenza per questo tipo di analisi il campione da me analizzato è ridotto poiché suddivide il totale degli intervistati (23) in 5 parti, per rendere il tutto più significativo l'ideale sarebbe stato quello di raddoppiare il numero degli intervistati. Per avere allora dei risultati più congrui ho quindi accorpato le prime due categorie, le fasce 21-30 e 31-40 in un'unica, e le restanti tre in un'altra che va da 41 a 70 anni.

Quello che si può vedere e come il campione tende a reagire in maniera differente al rischio. Come ormai noto anche dalle altre analisi si vede che per probabilità basse e prospetti positivi con gains alti si registra propensione al rischio, le C/x per i prospetti con p basso stanno nel grafico sopra la bisettrice, a differenza dei prospetti con p alto dove gli equivalenti certi sono sotto la bisettrice a rappresentazione di una maggiore avversione. Ora nello specifico guardando il grafico 3.6 si vede che gli intervistati più giovani, di età compresa tra 21 e 40 anni tendono ad avere un profilo di rischio costantemente più alto rispetto a quello presentato dai più anziani (età 41-70). In qualunque prospetto presentato i giovani tendevano a rischiare di più. Ora come dimostrato dalla teoria per valori medi di p e al crescere di questa, si registra un cambio di tendenza con una maggiore avversione al rischio, tuttavia questa avversione è meno forte per la parte più giovane del campione rispetto alla parte più anziana e forse per questo più saggia.

Di seguito invece, sono riportate le analisi grafiche separate per ogni singola fascia di età.

GRAFICO 3.7 – Funzione w^+ (p) e C/x considerando il campione con riferimento alla fascia di età 21-30 anni.

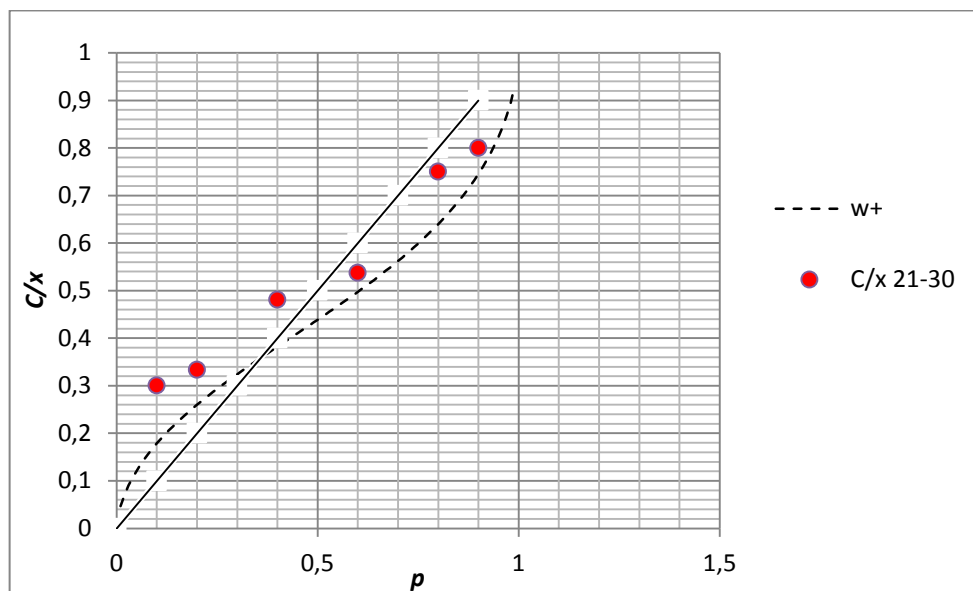


GRAFICO 3.8 – Funzione w_+ (p) e C/x considerando il campione con riferimento alla fascia di età 31-40 anni.

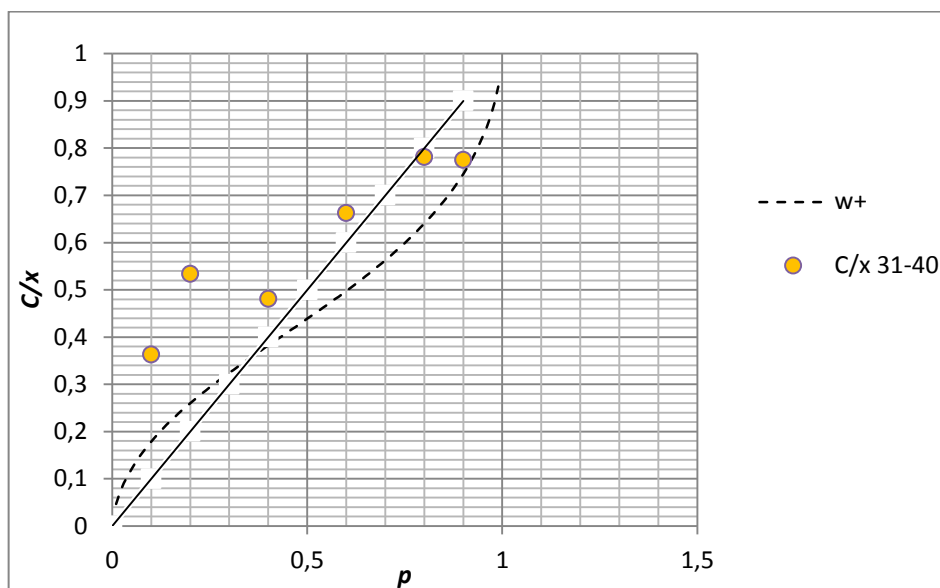


GRAFICO 3.9 – Funzione w_+ (p) e C/x considerando il campione con riferimento alla fascia di età 41-50 anni.

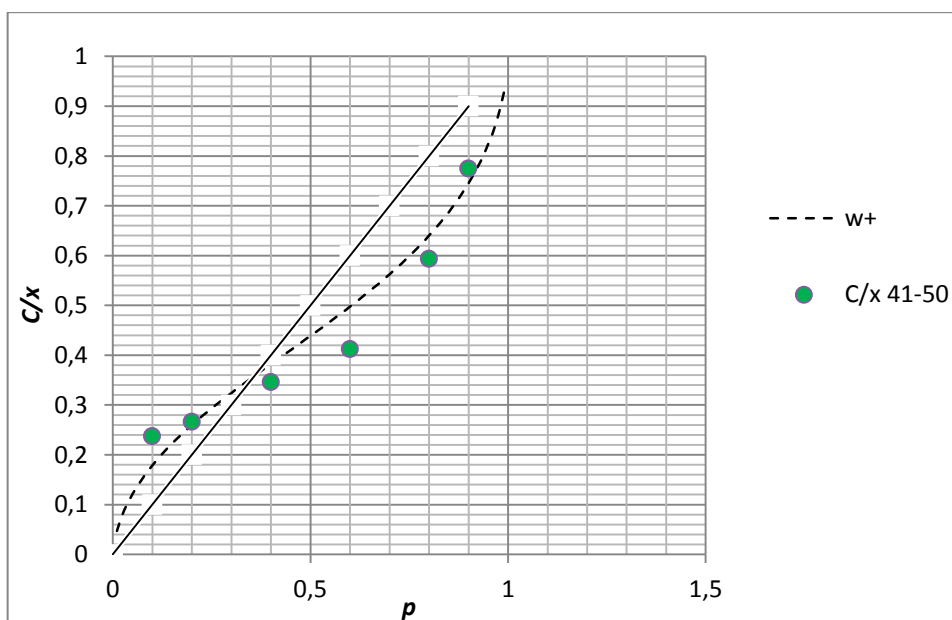


GRAFICO 3.10 – Funzione $w+(p)$ e C/x considerando il campione con riferimento alla fascia di età 51-60 anni.

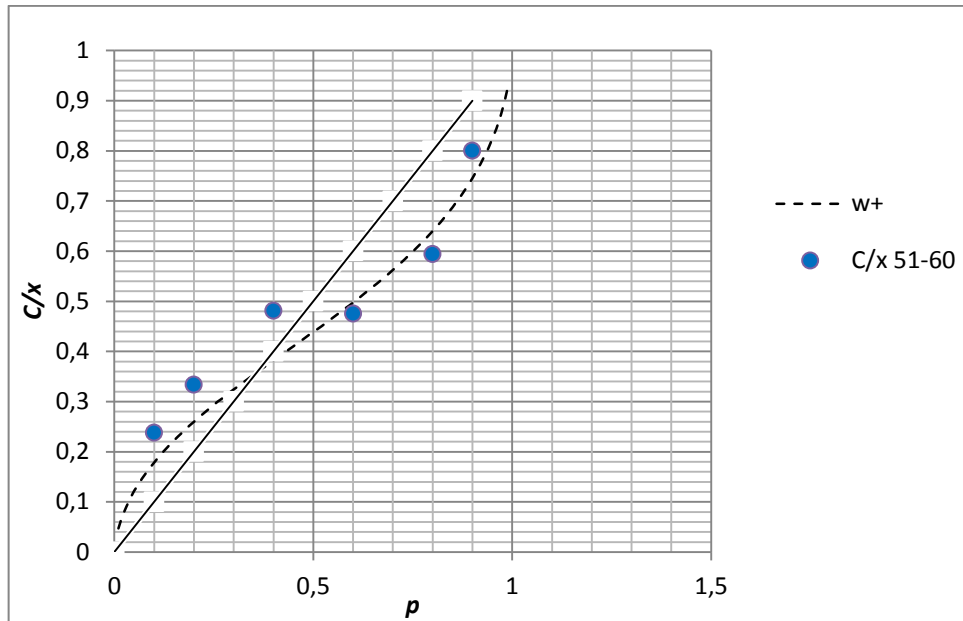
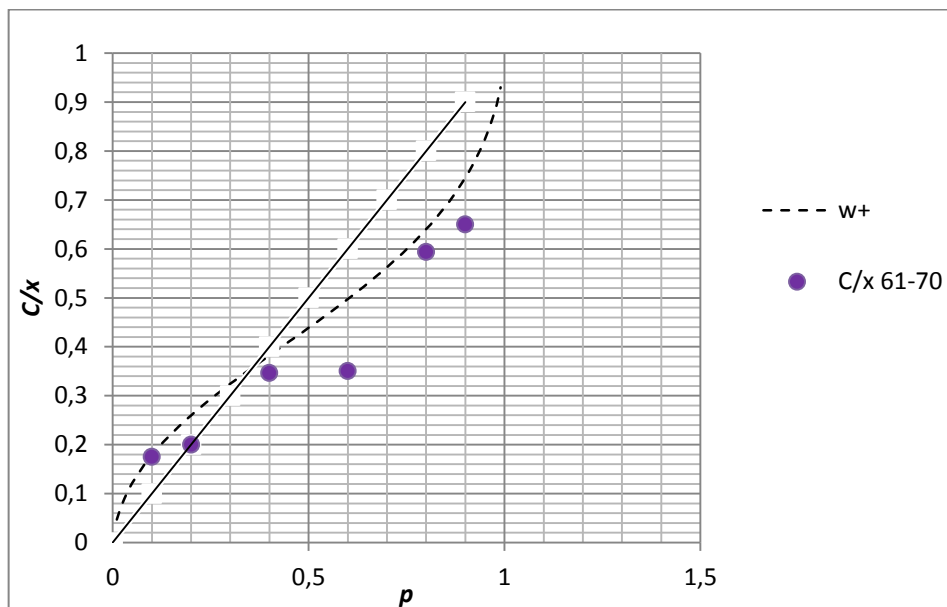


GRAFICO 3.11 – Funzione $w+(p)$ e C/x considerando il campione con riferimento alla fascia di età 61-70 anni.



3.4.1- Allegato (Risultati Interviste)

In allegato ho inserito le schermate dell'applicativo di Office "Excel" utilizzato per ordinare i risultati delle interviste. Nelle prime tre schermate sono riportate, in ordine di recepimento, le 23 interviste e i risultati dei primi tre prospetti, nelle ultime tre schermate invece i risultati degli altri tre.

Lotteria	Denaro certo		Risultati 1. M 21-30	Risultati 2. M 51-60	Risultati 3. F 51-60	Risultati 4. F 51-60	Risultati 5. M 31-40
200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9	160 €		x	x	x	x	x
200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9	135 €		x	x	x	x	x
200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9	110 €		x	x	x	x	x
200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9	85 €		x	x	x	x	x
200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9	60 €		x	x	x	x	x
200 € con p 0.1 oppure 0 con p 0.9	35 €		x	x	x	x	x
C/x	c=		35,00 €	47,50 €	35,00 €	47,50 €	72,50 €
	0,238 €	47,50 €					
150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8	120 €		x	x	x	x	x
150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8	100 €		x	x	x	x	x
150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8	80 €		x	x	x	x	x
150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8	60 €		x	x	x	x	x
150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8	40 €		x	x	x	x	x
150 € con p 0.2 oppure 0 con p 0.8	20 €		x	x	x	x	x
C/x	c=		30,00 €	50,00 €	20,00 €	30,00 €	70,00 €
	0,333 €	50,00 €					
130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6	105 €		x	x	x	x	x
130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6	85 €		x	x	x	x	x
130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6	70 €		x	x	x	x	x
130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6	55 €		x	x	x	x	x
130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6	35 €		x	x	x	x	x
130 € con p 0.4 oppure 0 con p 0.6	20 €		x	x	x	x	x
C/x	c=		45,00 €	77,50 €	20,00 €	27,50 €	62,50 €
	0,481 €	62,50 €					

Risultati 6. F 50-61	Risultati 7. M 21-30	Risultati 8. F 21-30	Risultati 9. F 21-30	Risultati 10. F 31-40	Risultati 11. M 21-30	Risultati 12. M 61-70	Risultati 13. M 61-70	Risultati 14. F 61-70
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
97,50 €	147,50 €	72,50 €	72,50 €	72,50 €	47,50 €	35,00 €	35,00 €	35,00 €
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
70,00 €	90,00 €	50,00 €	70,00 €	90,00 €	30,00 €	20,00 €	30,00 €	20,00 €
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
x	x	x	x	x	x	x	x	x
62,50 €	77,50 €	45,00 €	95,00 €	62,50 €	62,50 €	27,50 €	45,00 €	27,50 €

Risultati 6. F 50-61	Risultati 7. M 21-30	Risultati 8. F 21-30	Risultati 9. F 21-30	Risultati 10. F 31-40	Risultati 11. M 21-30	Risultati 12. M 61-70	Risultati 13. M 61-70	Risultati 14. F 61-70
x	x		x		x		x	
x	x		x	x		x	x	x
x	x		x	x	x		x	x
x		x	x		x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
47,50 €	80,00 €	47,50 €	60,00 €	72,50 €	47,50 €	35,00 €	47,50 €	35,00 €
x	x		x	x		x		x
x	x		x	x	x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
35,00 €	65,00 €	47,50 €	65,00 €	65,00 €	60,00 €	47,50 €	47,50 €	35,00 €
x	x		x	x	x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
x	x		x	x	x		x	x
32,50 €	40,00 €	37,50 €	40,00 €	37,50 €	40,00 €	37,50 €	32,50 €	32,50 €

Risultati 15. M 31-40	Risultati 16. M 41-50	Risultati 17. F 41-50	Risultati 18. F 31-40	Risultati 19. M 61-70	Risultati 20. F 61-70	Risultati 21. M 51-60	Risultati 22. M 21-30	Risultati 23. F 51-60
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
72,50 €	47,50 €	47,50 €	60,00 €	47,50 €	35,00 €	47,50 €	47,50 €	35,00 €
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
65,00 €	47,50 €	60,00 €	60,00 €	35,00 €	47,50 €	47,50 €	60,00 €	47,50 €
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
x		x		x		x		x
40,00 €	37,50 €	40,00 €	37,50 €	32,50 €	40,00 €	40,00 €	40,00 €	40,00 €

CONCLUSIONI

Partendo dai limiti descrittivi della Expected Utility Theory, cioè dalla scarsa capacità dell'EUT di riuscire a predire il comportamento degli agenti che si confrontano con scelte in condizione di incertezza, il presente lavoro, nei primi due capitoli e più in particolare nel primo, ha tentato di individuare ed approfondire lo studio dei punti critici di una teoria per certi versi al tramonto. Per far ciò ci si è serviti dei classici paradossi di Allais, Ellsberg, il paradosso del sortile, oltre che di una serie di altri esempi e casi pratici riportati da Kahneman e Tversky nei loro lavori. Il risultato è stata la presentazione di un susseguirsi di esempi mostranti come effettivamente l'EUT non possa essere considerata una valida teoria per le scelte in condizione di rischio, almeno dal punto di vista descrittivo. Nella prima parte del mio lavoro ho quindi guardato alla letteratura economica classica, basata su presupposti di perfetta razionalità dell'individuo, che sceglie sempre cercando di massimizzare la propria utilità. Tale scelta è prevalentemente governata dall'interesse dell'individuo, rispecchia a pieno le sue preferenze e rispetta sempre in modo coerente determinati vincoli. Essa è in questo senso l'esito di un calcolo razionale.

Quindi la visione dell'economia classica e della razionalità ha un forte carattere normativo, che segue schemi piuttosto precisi e rigidi, visione che è però stata condivisa dalla larga maggioranza degli economisti per quasi un secolo. In questo determinato approccio, il calcolo è qualcosa del tutto separato dall'attività mentale individuale, anzi prescinde dai processi mentali dei singoli individui. In questo senso i due economisti che hanno portato questa tipologia di pensiero ad avere grande successo, sono stati Oskar Morgenstern e John von Neumann, che nonostante la mancanza di una base empirica, hanno formalizzato una teoria delle decisioni umane basata sul comportamento razionale che ebbe pieno successo. Quella classica è però una visione piuttosto lacunosa, che non tiene conto di tantissimi aspetti che sono alla base nella scelta dell'uomo e del suo modo di operare. Aspetti mancanti che sono evidenziati da una branca più moderna dell'economia, la cosiddetta economia cognitiva e sperimentale o *Behavioural Economics* (Economia Comportamentale).

Affermando ciò, non si vuole certamente sminuire la validità normativa dell'EUT, cioè la piena logicità della stessa. I suoi assiomi, infatti, pur lasciando spazio ad eventuali critiche, fanno sostenere, a chiunque li assimili, che lo schema proposto dall'EUT è effettivamente il migliore da seguire per confrontarsi con decisioni in condizioni di incertezza.

A mio avviso però, con gli studi degli “economisti” sperimentali, Amos Tversky e Daniel Kahneman su tutti, si compie un passo in avanti nel capire le scelte intraprese dagli agenti economici. Essi pur essendo di fatto psicologi e non economisti, riescono ad integrare aspetti ed intuizioni prettamente psichiche e sociali con la scienza economica, specialmente nel campo del giudizio e delle decisioni in condizioni di incertezza. Di fatto così rendono più reale le teorie economiche, non trascurando aspetti che sono di una certa rilevanza nella scelta dell'individuo. Con il premio nobel del 2002 a Daniel Kahneman, sarebbe andato forse a Tversky se non fosse scomparso improvvisamente nel 1996, viene sancito questo profondo mutamento nella natura stessa della scienza economica. Questa certo non è una constatazione sorprendente, di fatto pochi di noi sarebbero disposti a ritenere che i propri simili siano perfettamente razionali, che siano lungimiranti o abbiano pieno accesso a tutte le informazioni. Inoltre nella vita di tutti i giorni l'uomo prova emozioni e sentimenti, che influenzano le nostre scelte il nostro pensare e operare, in modo poco calcolato e per nulla razionale. Non che gli economisti neoclassici siano meno consapevoli di ciò, tuttavia però, hanno a lungo ritenuto che le deviazioni dal comportamento razionale fossero rare o comunque del tutto trascurabili per quanto riguarda le predizioni del comportamento degli attori economici. I due, partendo da quanto osservato empiricamente, ideano un semplice modello descrittivo nel tentativo di ricucire lo strappo fra teoria ed evidenza empirica. Volendo riassumere tramite pochi elementi il contenuto innovativo e distintivo della Prospect Theory, si deve senz'altro citare il modello a quattro classi per le attitudini al rischio. Kahneman e Tversky, infatti, assumono che il decisore, confrontandosi con prospetti rischiosi, sia:

- propenso al rischio per basse probabilità di vincita.
- Avverso al rischio per alte probabilità di vincita.
- Avverso al rischio per basse probabilità di perdita.

- Propenso al rischio per alte probabilità di perdita.

Per Stabilire se la Prospect Theory, principalmente nella sua versione *Cumulative*, sia, o no, una valida alternativa all'EUT non si può che analizzare la veridicità del modello a quattro classi. L'evidenza accumulata è ovviamente amplissima. *Camerer*⁵³, per esempio, sostiene che la Cumulative Prospect Theory sia pienamente supportata dall'evidenza e suggerisce un pieno abbandono dell'EUT in suo favore. Altri autori, come abbiamo avuto modo di notare a fine secondo capitolo evidenziano lacune nella teoria. Non si è autorizzati a credere, però, che un qualsiasi modello per le decisioni in condizione di rischio possa, così facilmente, essere invalidato. Come già detto nell'introduzione al presente lavoro, non esistono, studiando questa disciplina, dei singoli contro-esempi in grado di invalidare in toto una teoria. Il problema sembra doversi allora individuare nel tipo di approccio allo studio di questa materia.

La Prospect Theory, intesa come filone, sembra essere certamente una delle tesi più valide, se non la più valida in assoluto. Essa, infatti, pone le basi per la sua costruzione su evidenza empirica ormai completamente assodata, quali i paradossi di Allais, ma, soprattutto, non trascura di considerare una serie comportamenti del decisore non pienamente riconducibili ad un modello matematico. La fase di Editing, in questo senso, immette nel modello una componente individuale per certi versi random che da un lato, canonizza effetti quale l'inversione di preferenze, e dall'altro, fornisce uno "scudo" alla teoria stessa, consentendo di spiegare un largo range di comportamenti. La Cumulative Prospect Theory, abbandonando o comunque ridimensionando, la fase di Editing, ed introducendo dei pesi decisionali definiti tramite una distribuzione cumulata, si propone come modello matematico altamente trattabile e disponibile a successive applicazioni. Perdendo, però, buona parte della sua componente psicologica presta il fianco a critiche, molto più facilmente di quanto la Prospect Theory non facesse. Il trade off sembra, però, necessario. La Prospect Theory non è, nei fatti, un modello maneggevole e pronto a successive applicazioni. La versione Cumulative, invece, è un modello altamente maneggevole, e rimane, ricordando l'evidenza nel Capitolo due, ugualmente il modello che più di ogni altri è in grado di prevedere il comportamento effettivo del Decision

53. Camerer C, (1998), "Bounded Rationality in Individual Decision Making" in *Experimental Economics*, n°. 2.

Maker. Certamente, molto lavoro attende di essere svolto, la teoria descrittiva delle decisioni in condizione di incertezza rimane un campo di studio fortemente aperto ed in continua evoluzione. Gli studi sul campo consentono, costantemente, raccolta di dati che potrebbero portare al continuo miglioramento delle teorie, o allo sviluppo di nuove. Interessante sarebbe vedere come potrà evolversi lo sviluppo empirico della Bipolar Cumulative Prospect theory (BCPT) ancora troppo rilegata alla sua forma natale, e di difficile comprensibilità. Non si può trascurare, però, che queste teorie rappresentano il cuore di buona parte dei modelli economici sviluppati sin adesso. Quindi, si deve giocoforza ricercare un compromesso fra semplicità e maneggevolezza, e completezza. Solo così sarà possibile una pronta applicazione di quanto scoperto a modelli economici già esistenti. Come sostiene *Machina*⁵⁴, infatti: “un buon lavoro è stato fatto nello sviluppo di teorie alternative all’EUT, ma il campo di applicazione rimane ancora poco sviluppato”. Questo ci porta oggi ad asserire che spesso per facilità di calcolo, per semplificazione la teoria classica e in particolare il modello di von Neumann e Morgenstern, prevale ed è tutt’ora punto di riferimento per gli studi in materia. Il vantaggio operativo che essa consente, la semplicità logico-formale di rappresentare problemi umani così complessi con una struttura matematica di grande flessibilità e facile applicazione, i buoni risultati applicativi in svariati contesti hanno rappresentato e rappresentano il punto di riferimento per gli studi del settore. Con ciò concludo affermando e ribadendo che non esiste una prospettiva migliore dell’altra, ma si ritiene che la teoria delle scelte economiche ha davanti a sé grandi opportunità di sviluppo se si riuscirà a trovare una mediazione tra l’approccio tradizionale e quello cognitivo o sperimentale. In altre parole se si avrà un approccio multidisciplinare, se si guarda con un’ottica di complementarietà, la questione è risolta.

54. Machina M., (1944), “discorso pronunciato durante la *conference on foundation of utility risk (FUR VII)* di Oslo”, rinvenibile in *Starmer, op. cit.*

Ringraziamenti

Non basterebbero poche righe per ringraziare tutti coloro che in diversi modi hanno dato supporto alla mia carriera universitaria. Innanzitutto ringrazio vivamente il professore Riccardo Cambini per avermi proposto, con fiducia e con totale rispetto della mia autonomia culturale, un tema caldo come questo, per la gentilezza e la disinteressata disponibilità dimostrata in questi mesi e per aver messo a mia disposizione la sua coscienza critica nell'elaborazione culturale di questo saggio, e la sua infinita pazienza nell'organizzazione tecnica nello svolgimento della tesi.

Altresì mi preme ringraziare Chiara, per essermi stata accanto nei momenti più duri e dalle cui sorprendenti manifestazioni d'affetto ho tratto forza per superare i momenti più difficili. La mia vera ancora di salvezza.

Ed infine la mia famiglia il cui supporto è stato importante affinché oggi potessi raggiungere questo importante obiettivo.

BIBLIOGRAFIA

Allais M., (1953), “*Le comportement de l’homme rationel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l’ecole americaine*”, *Econometrica*, vol. 21, pp. 503–46.

Aliprantis C. D. - S. K. Chakrabarti, (2010), “*Games and Decision Making*”, 2nd edition, Oxford University Press.

Avondo G. - Bodino, (1979), “*La Valutazione Finanziaria; In Condizioni di Certezza e Incertezza*”, Giappichelli Editore, Torino, II Edizione.

Baltussen, G., Post, T., and van Vliet, P., (2006), “*Violations of cumulative prospect theory in mixed gambles with moderate probabilities*”, *Management Science*, 52(8), 1288.

Becker G.S., (1998), “*L’approccio Economico al Comportamento Umano*”, Il Mulino.

Birnbaum, M., (2005), “*Three new tests of independence that differentiate models of risky decision making*”, *Management Science*, 51(9), 1346–1358.

Birnbaum, M. and Bahra, J.,(2007), “*Gain-loss separability and coalescing in risky decision making*”, *Management Science*, 53(6), 1016–1028.

Birnbaum M. H. – Martinez D. N.- Ungemach C. - Stewart N. –Torreblanca E.G. ,(2016.), “*Risky decision making: Testing for violations of transitivity predicted by an editing mechanism*”, The University of Warwick.

Blavatsky, P., (2005), “*Back to the St. Petersburg paradox?*”, *Management Science*, 51(4), 677–678.

Bolino C.A. - Katz M. - Rosen H. – W.Morgan, (2010) “*Microeconomia*”, ediz.4°, McGraw- Hill, Milano, pp 179-149 462-449.

Castello V., (2003), “*Processi Decisionali E Apprendimento Organizzativo; Un Approccio Multirazionale*”, Università degli Studi di Firenze.

Camerer C, (1998), “*Bounded Rationality in Individual Decision Making*” in *Experimental Economics*”, n°. 2.

Cellini R. - L. Lambertini, (1992), “*Una Guida Alla Teoria dei Giochi*”, Clueb, Bologna.

- Coretto P., (2002), *“Una teoria della decidibilità: entropia e scelte in condizioni di incertezza”*, Rivista di Politica Economica.
- Coricelli G.- Diecidue E. – Zaffuto F. D., (2016) *“Aspiration Levels and Preference for Skewness in Choice Under Risk”*, INSEAD, The Business School for the world, Working Paper Series.
- Del Vigna M., (2012), *“Information Asymmetry And Equilibrium Models In Behavioral Finance”*, These pour l'obtention du titre de Docteur en Mathématiques “Spécialité Mathématiques Appliquées”, Università Di Pisa Université Paris-Dauphine Scuola L. Fibonacci Ecole Doctorale De Dauphine Eddimo – Ceremade, pp. 11,12.
- Dell’anno R., (2005), *“Evasione Fiscale il contributo della Cumulative Prospect theory”*, Economia Pubblica, Franco Angeli Editore.
- Dell’Anno R., (2006), *“Scelte in Condizioni di Incertezza”*, Rivista di Politica Economica, pp. 217-179.
- Della Vigna S., (2009), *“Psychology and Economics: Evidence from the Field”*, Journal of Economic Literature, UC Berkeley and NBER.
- Ellsberg D., (1961), *“Risk, ambiguity and the Savage’s axioms”*, The Quarterly Journal of Economics, v.75, n.4, pp. 643-669.
- Fiaschi D.- Meccheri N., *“Note di studio su Economia dei Mercati Finanziari”*, a cura di. Dipartimento di economia e Management. Università di Pisa.
- Filippi F., (2002) *“D. Kahneman: Psicologia e Decisioni”*, Quaderni del Dipartimento di Scienze Economiche, Pisa.
- Fioravante P., (2010), *“Teoria delle Decisioni in condizione di Certezza e Rischio”*, - *“Decisori (razionali) interagenti. Una introduzione alla teoria dei giochi”*, (2006), Plus.
- Fox C. R. - Poldrack R.A., (2010) *“Prospect Theory and the Brain”* Cap 11.
- Ghiani G. and R.Musmanno, (2009), *“Modelli e metodi decisionali in condizioni di incertezza e rischio”*, McGraw-Hill Education.
- Gibbons R., (1994), *“Teoria dei Giochi”*, Il Mulino, Prentice hall International.
- Ingersoll, J. (2008). *“Non-monotonicity of the Tversky-Kahneman probability weighting function: a cautionary note”*. European Financial Management, 14(3), 385–390.

- Kahneman D. – Tversky A., (1979), “*Prospect Theory, an analysis of decision under risk*”, *Econometrica*, n. 47: 2.
- Kahneman D. – Tversky A., (1984), “*Choices, values and frames*”, in *American Psychologist*.
- Kahneman D. – Tversky A., (1992), “*Advances in prospect theory, cumulative representation of uncertainty*”, in *Journal of risk and uncertainty*, n. 5.
- Kellen D., (2013), “*Modeling Gain-Loss Asymmetries in Risky Choice: The Critical*”.
- Khun H. W., (1997), “*Classic in Game Theory*”, Princeton University press Princeton, New Jersey.
- Ludwig A. (2016) “*Modeling Gain-Loss Asymmetries in Risky Choice: The Critical Role of Probability Weighting*”, Department of Psychology, University Freiburg, Engelbergerstr. 4179085 Freiburg im Breisgau, Germany.
- Laibson D. - R.Zeckhauser, (1998), “*Amos Tversky and the Ascent of Behavioral Economics*”, *Journal of Risk and Uncertainty*.
- Levy, M. and Levy, H., (2002), “*Prospect Theory: Much ado about nothing?*”, *Management Science*, 48(10), 1334–1349.
- Machina M., (1994), “*discorso pronunciato durante la conference on foundation of utility risk (FUR VII) di Oslo*”, rinvenibile in Starmer, op. cit.
- Marschak J.A., (1950), “*Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility*”, *Econometrica*, vol. 18, pp. 111-41.
- Motterlini M. - Guala F., (2005), “*Economia Cognitiva e Sperimentale*”, Milano, Egea.
- Motterlini M.- Guala F., (2011), “*Mente, Mercati, Decisioni. Introduzione all'economia cognitiva e sperimentale*”, Egea, Milano.
- Motterlini M. - Piattelli Palmarini M., (2005), “*Tre saggi: Kahneman, Mc.Fadden, Smith*”, il Saggiatore.
- Mullainathan S.- Thaler R., (2000), “*Behavioral Economics*”, NBER, Working Paper.
- Quiggin J., (1982), “*A theory of Anticipated Utility*”, vol. 3, *Journal of Economic Behavior and Organization*, pp.323-43.

- Rabin M.,(2000), “*Risk Aversion and Expected Utility Theory: A Calibration Theorem*” , Working Paper , Berkley University of California, Departments of Economics, USA.
– “*A Perspective on Psychology and Economics*”, European Economic Review, vol. 46, (2002), pp. 657-85.
- Resnick M., (1990), “*Scelte*”, Muzzio Editore, Capp. 1 e 2.
- Righini E., (2012), “*Behavioural Law and Economics – Problemi di policy, assetti normativi e di vigilanza*”, FrancoAngeli.
- Rieger M. and Wang, M. (2006). “*Cumulative prospect theory and the St.Petersburg paradox. Economic Theory*”, 28(3), 665–679.
- Rindone F., (2011), “*The Bipolar Choquet Integral Representation*”, Faculty of Economics University of Catania, Italy.
- Rubaltelli E., (2014), “*Emozioni e Comportamento degli investitori*”, Sistemi Intelligenti, il Mulino.
- Rumiati R. - N. Bonini, (2001), “*Psicologia della decisione*”, Bologna, Il Mulino.
- Schilirò D., (2012), “*Bounded Rationality: Psychology, economics and financial crisis*”, MPRA, paper n° 40280.
- Schotter A., (2002), “*Microeconomia*”, Giappichelli, Cap. 14.
- Simon H.A., (1957), “*Models of Man*”, New York, John Wiley e Sons.
- Simon H.A., (1997), “*Models of Bounded Rationality*”, vol.3 , MIT Press, Boston. – disponibile anche una traduzione in italiano come *Scienza Economica e comportamento umano*, Torino, Edizioni di Comunità, (2000).
- Vitale I. - Polidori I., (2013), “*La Prospect Theory di Tversky e Kahneman*”, posted in Marketing.
- Vercelli A., (1998), “*Incertezza, razionalità e decisioni economiche*”, il Mulino.
- Von Neumann J.- Morgenstern O., (1944), “*The Theory Of Games and Economics Behavr*”, Wiley, New York.
- Wakker P.P., (2010), “*Prospect theory- for risk and ambiguity*”, Cambridge University Press.
- Wu, G. and Markle, A., (2008), “*An empirical test of gain-loss separability inprospect theory*”, Management Science, 54(7), 1322–1335.

Xue Dong He - Xun Yu Zhou, (2010), *“Portfolio Choice Under Cumulative Prospect Theory: An Analytical Treatment”*.

SITOGRAFIA

Vitale I. - Polidori I., [http://www.igorvitale.org/2013/04/01/la-prospect-theory-di-tversky-e Kahneman/](http://www.igorvitale.org/2013/04/01/la-prospect-theory-di-tversky-e-Kahneman/).

<http://www.finanzacomportamentale.it>