



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

Stime di Smoothing-Strichartz per NLS ed applicazioni

15 luglio 2016

Relatore
Prof. **Vladimir Georgiev**

Controrelatore
Prof. **Carlo Luigi Berselli**

Candidato

**Matteo
Di Nunno**

ANNO ACCADEMICO 2015/2016

Indice

1	Richiami ed elementi preliminari	2
1.1	Spazi di Lorentz	5
1.2	Interpolazione	6
2	Stime del risolvente	8
2.1	Il LAP per il laplaciano perturbato	9
3	Stime di Strichartz	15
3.1	Il caso libero	16
3.2	Il caso perturbato	20
4	Un'applicazione: l'inflazione dell'energia	25
4.1	Impostazione teorica	25
4.2	Le simulazioni	26
4.3	Conclusioni	39
	Bibliografia	40

Elenco delle figure

3.1	Segmento chiuso AB delle coppie Schrödinger-ammissibili.	22
4.1	Andamento della norma H^1	32
4.2	Andamento della norma H^2	32
4.3	Andamento della norma H^3	33
4.4	Andamento della norma H^4	33
4.5	Andamento della norma H^{-1}	34
4.6	Andamento della norma $H^{-3/2}$	34
4.7	Andamento della norma L^2 perturbata.	35
4.8	Andamento della norma H^1 perturbata.	35
4.9	Andamento della norma H^2 perturbata.	36
4.10	Andamento della norma H^3 perturbata.	36
4.11	Andamento della norma H^4 perturbata.	37
4.12	Andamento della norma H^{-1} perturbata.	37
4.13	Andamento della norma $H^{-3/2}$ perturbata.	38

Introduzione

Capitolo 1

Richiami ed elementi preliminari

DA qui in poi, se non specificato diversamente, E starà ad indicare uno spazio vettoriale normato.

fred **Teorema 1.1** (dell'alternativa di Fredholm ^{prez} [Bre11]). Sia $T \in \mathcal{K}(E)$. Allora

1. $\ker(I - T)$ ha dimensione finita,
2. $R(I - T)$ è chiuso ed inoltre $R(I - T) = \ker(I - T)^\perp$,
3. $\ker(I - T) = \{0\} \iff R(I - T) = E$,
4. $\dim \ker(I - T) = \dim N(I - T^*)$.

pr_1 **Proposizione 1.1.** Sia $K_1 : H \rightarrow H$ un operatore compatto da uno spazio di Hilbert in se stesso.

1. Se $K_2 : H \rightarrow H$ è un operatore limitato allora $K_1 \cdot K_2$ è compatto.
2. L'aggiunto K_1^* è compatto.

Definizione 1.1 (Insieme risolvente e Spettro). Sia $T \in \mathcal{L}(E)$. L'insieme risolvente è definito come:

$$\rho(T) \doteq \{\lambda \in \mathbb{R} \mid (T - \lambda I) \text{ è biunivoco da } E \text{ in se stesso}\}. \quad (1.1) \quad \text{rho}_1$$

Invece lo spettro dell'operatore T è definito come il complementare dell'insieme risolvente ossia

$$\sigma(T) \doteq \mathbb{R} \setminus \rho(T). \quad (1.2) \quad \text{sigma}_1$$

Osserviamo che per un corollario del Teorema della mappa aperta

$$\lambda \in \rho(T) \implies (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

Il prossimo teorema è una versione L^p di quello di Ascoli-Arzelà e lo useremo per capire quando una famiglia di funzioni in $L^p(\Omega)$ ha chiusura compatta in $L^p(\Omega)$ ¹.

Teorema 1.2 (di Kolmogorov-Riesz-Fréchet ^{prez} [Bre11]). Sia \mathcal{F} un insieme limitato in $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < +\infty$. Supponiamo che

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p} = 0 \text{ uniformemente in } f \in \mathcal{F}$$

ossia $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\|\tau_h f - f\|_{L^p} < \varepsilon \forall f \in \mathcal{F}$ e $\forall h \in \mathbb{R}^n$ con $|h| < \delta$. Allora la chiusura di $\mathcal{F}|_{\Omega}$ in $L^p(\Omega)$ è compatta per ogni insieme misurabile $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di misura finita.

Teorema 1.3 (Disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev). Sia $0 < \alpha < n$. Allora

$$\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} \star f \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad (1.3) \quad \boxed{\text{hls}}$$

dove p e q sono tali che

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p} \quad q \neq +\infty \quad q \neq \frac{n}{\alpha}. \quad (1.4) \quad \boxed{\text{hls_cond}}$$

Osservazione 1.1. Osserviamo che i casi esclusi sono

$$q \neq \frac{n}{\alpha} \implies p \neq 1 \quad q \neq +\infty \implies 1 - \frac{1}{p} \neq \frac{n}{\alpha}.$$

Osservazione 1.2. E' facile vedere che la condizione (necessaria) sugli indici è conseguenza del comportamento dei riscaldamenti se fatti in norma. Supponiamo di prendere $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ² e consideriamo $f_\lambda(x) \doteq f(\lambda x)$. Notiamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|^\alpha} \star f_\lambda(x) &= \int \frac{f(\lambda y)}{|x-y|^\alpha} dy = \int \frac{f(\lambda y)}{|x-\lambda \frac{y}{\lambda}|^\alpha} dy = (\tilde{y} = \lambda y) = \int \frac{f(\tilde{y})}{|x-\frac{\tilde{y}}{\lambda}|^\alpha} \lambda^n = \\ &= \int \frac{\lambda^{\alpha-n}}{|\lambda x - \tilde{y}|^\alpha} f(\tilde{y}) d\tilde{y} = \lambda^{\alpha-n} \left(\frac{1}{|x|^\alpha} \star f \right) (\lambda x). \end{aligned}$$

Adesso

$$\lambda^{\alpha-n} \lambda^{-\frac{n}{q}} \left\| \frac{1}{|x|^\alpha} \star f \right\|_{L^q} = \left\| \frac{1}{|x|^\alpha} \star f_\lambda \right\|_{L^q} \lesssim \|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p}$$

¹Quello di Ascoli-Arzelà ci da un criterio analogo, ma per famiglie di funzioni in $\mathcal{C}(K)$ dove K è compatto.

²Questo spazio va bene proprio perchè è denso in tutti gli L^p .

e moltiplicando tutto per $\lambda^{\frac{n}{p}}$ otteniamo la seguente stima

$$\lambda^{\alpha - n - \frac{n}{q} + \frac{n}{p}} \lesssim \frac{\|f\|_{L^p}}{\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} \star f \right\|_{L^q}} \quad \forall \lambda > 0$$

che diventa la (1.3) a patto che

$$\alpha - n - \frac{n}{q} + \frac{n}{p} = 0 \iff \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{q}.$$

tt **Teorema 1.4** (del TT^*). Consideriamo l'operatore $T: H \rightarrow X$ dove H ed X sono rispettivamente uno spazio di Hilbert e uno di Banach e sia definito l'operatore aggiunto $T^*: X' \rightarrow H$ dove

$$(T^* x', h)_H = \langle x', Th \rangle_{X', X}.$$

Allora le seguenti relazioni di appartenenza sono equivalenti:

1. $T \in \mathcal{L}(H, X)$;
2. $T^* \in \mathcal{L}(X', H)$;
3. $TT^* \in \mathcal{L}(X', X)$.

Dimostrazione. Vediamo come le relazioni di appartenenza si implicano reciprocamente.

(1. \rightarrow 2.) Sfruttando la caratterizzazione delle norme derivante dal teorema di Hahn-Banach possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \|T^* x'\|_H &= \sup_{\substack{h \in H \\ \|h\|=1}} (T^* x', h)_H = \sup_{\substack{h \in H \\ \|h\|=1}} \langle x', Th \rangle_{X', X} \leq \sup_{\substack{h \in H \\ \|h\|=1}} \|x'\|_{X'} \|Th\|_X \leq \\ &\leq \sup_{\|h\|=1} \|h\|_H \|x'\|_{X'} \|T\| = \|T\| \|x'\|_{X'}. \end{aligned}$$

(2. \rightarrow 1.) Procedendo come per l'altra implicazione notiamo che

$$\|Th\|_X = \sup_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\|=1}} \langle x', Th \rangle_{X', X} = \sup_{\substack{x' \in X' \\ \|x'\|=1}} (T^* x', h)_H \leq \sup_{\|x'\|=1} \|h\| \|T^*\| \|x'\|_{X'} \leq \|T^*\| \|h\|.$$

(1. + 2. \rightarrow 3.) è ovvia.

(3. \rightarrow 2.) Con il solito procedimento si mostra che

$$\|T^* x'\|_H^2 = (T^* x', T^* x')_H = \langle TT^* x', x' \rangle_{X', X} \leq \|x'\|_{X'} \|TT^*\| \|x'\|_X = \|TT^*\| \|x'\|_X^2$$

e questo conclude la dimostrazione. \square

Un altro strumento utile deriva dal poter applicare il teorema di Riesz-Thorin alle seguenti stime:

$$\left\| e^{it\Delta} f \right\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2} \quad \left\| e^{it\Delta} f \right\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^1} \quad (1.5) \quad \boxed{\text{estre}}$$

dove nell'ultima si ha $C = \tilde{C} t^{-n/2}$. Queste stime sono, in un certo senso, dei casi limite o estremi se vogliamo. Ci sarà utile a un certo punto sfruttare una loro generalizzazione.

stdig **Teorema 1.5.** Sia $1 \leq q \leq 2$. Allora vale la seguente stima:

$$\left\| e^{it\Delta} f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{t^{n/2(1-2/p)}} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \quad (1.6) \quad \boxed{\text{disp_gen}}$$

Dimostrazione. Abbiamo già le due stime che abbiamo richiamato e possiamo applicare il teorema di interpolazione di Riesz - Thorin. Dobbiamo cercare un esponente p tale che

$$\frac{1}{p} = \frac{\vartheta}{2} + \frac{1-\vartheta}{\infty} \iff \vartheta = \frac{2}{p}.$$

Una volta fissato p , di conseguenza risulta fissato ϑ e poi q . Quindi que appurare è la costante:

$$\left(\frac{C}{t^{n/2}} \right)^{1-\vartheta} = \frac{C}{t^{n/2(1-2/p)}}.$$

□

1.1 Spazi di Lorentz

Adesso diamo alcune definizioni riguardanti una generalizzazione degli spazi di Lebesgue ossia gli spazi di Lorentz.

Definizione 1.2 (Funzione di distribuzione). *Sia f una funzione misurabile su (X, μ) spazio misurabile. La funzione di distribuzione di f , definita su $[0, +\infty)$ è*

$$d_f(\alpha) \doteq \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}). \quad (1.7)$$

Definizione 1.3 (Riarrangiamento decrescente). *Sia (X, μ) uno spazio misurabile ed $f : \mathcal{C} \rightarrow X$. Il riarrangiamento decrescente di f , definito su $[0, +\infty)$ è definito come*

$$f^*(t) \doteq \inf\{s > 0 : d_f(s) \leq t\}. \quad (1.8)$$

Definizione 1.4 (Spazio di Lorentz). *Sia f una funzione misurabile su (X, μ) e $0 < p, q \leq +\infty$. Sia*

$$\|f\|_{L^{p,q}} \doteq \begin{cases} \left[\int_0^{+\infty} (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} & q < +\infty \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & q = +\infty. \end{cases} \quad (1.9)$$

L'insieme delle funzioni tali che $\|f\|_{L^{p,q}} < +\infty$ è lo spazio di Lorentz $L^{p,q}(X, \mu)$. Notiamo che $L^{p,p} = L^p$ per ogni $p \in (0, +\infty]$ e che $L^{p,\infty} = L^p_w$ ossia sono gli L^p deboli.

lor1 **Osservazione 1.3.** Ai fini operativi osserviamo che la semi-norma con cui abbiamo definito gli spazi di Lorentz possiede le seguenti scritte equivalenti:

$$\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \|t^{1/p-1/q} f^*\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = p^{1/q} \|t\mu\{|f| \geq t\}^{1/p}\|_{L^q(\mathbb{R}^+, dt/t)}. \quad (1.10)$$

Proposizione 1.2 (Disuguaglianze di Young e O' Neil per gli spazi di Lorentz). Siano $1 < p, q, r < +\infty$ ed $0 < s_1, s_2 \leq +\infty$. Allora

$$\|f \star g\|_{L^{r,s}} \lesssim \|f\|_{L^{p,s_1}} \|g\|_{L^{q,s_2}} \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1 \quad \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s}. \quad (1.11) \quad \text{young_lpq}$$

Inoltre per $0 < p, q, r \leq +\infty$ ed $0 < s_1, s_2 \leq +\infty$ si ha

$$\|fg\|_{L^{r,s}} \lesssim \|f\|_{L^{p,s_1}} \|g\|_{L^{q,s_2}} \iff \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \quad \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{s}. \quad (1.12) \quad \text{holder_lpq}$$

1.2 Interpolazione

Teorema 1.6 (Riesz-Thorin). Supponiamo di avere T operatore lineare che agisce con continuità:

$$\begin{cases} T : L^{p_0}(d\mu) \longrightarrow L^{q_0}(d\nu) \\ T : L^{p_1}(d\mu) \longrightarrow L^{q_1}(d\nu) \end{cases} \quad (1.13)$$

Allora T è un operatore continuo da L^{p_ϑ} a L^{q_ϑ} con p_ϑ e q_ϑ tali che

$$\frac{1}{p_\vartheta} = \frac{\vartheta}{p_0} + \frac{1-\vartheta}{p_1} \quad \frac{1}{q_\vartheta} = \frac{\vartheta}{q_0} + \frac{1-\vartheta}{q_1}. \quad (1.14)$$

Equivalentemente abbiamo che se valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{cases} \|Tf\|_{L^{p_1}} \leq C_1 \|f\|_{L^{q_1}} \\ \|Tf\|_{L^{p_0}} \leq C_0 \|f\|_{L^{q_0}} \end{cases} \quad (1.15)$$

allora

$$\|Tf\|_{L^{p_\vartheta}} \leq C_\vartheta \|f\|_{L^{q_\vartheta}} \quad C_\vartheta = C_0^\vartheta C_1^{1-\vartheta} \quad 0 < \vartheta < 1. \quad (1.16)$$

inter_re

Definizione 1.5 (Spazi di interpolazione reale). Siano A_0 e A_1 spazi di Banach³ e siano $\vartheta \in (0, 1)$ e $q \in [1, +\infty]$. Definiamo gli spazi di interpolazione reale $(A_0, A_1)_{\vartheta, q}$ attraverso la norma

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\vartheta, q}} \doteq \left(\int_0^{+\infty} \left[t^{-\vartheta} K(t, a) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \quad (1.17)$$

dove

$$K(t, a) = \inf_{a=a_0+a_1} \|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}.$$

A questo punto, da [KT97], prendiamo alcune definizioni che saranno essenziali per poter parlare di stime di Strichartz.

Definizione 1.6 (Norma $L_t^q L_x^r$). Data una funzione f misurabile definiamo la sua norma rispetto alla variabile spaziale e a quella temporale come

$$\|f\|_{L_t^q L_x^r} \doteq \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|_{L_x^r}^q dt \right)^{1/q}. \quad (1.18)$$

Definizione 1.7 (Coppia ammissibile). La coppia di esponenti (q, r) è detta σ -ammissibile se:

1. $q, r \geq 2$,
2. $(q, r, \sigma) \neq (2, \infty, 1)$,
3. $1/q + \sigma/r \leq \sigma/2$.

Inoltre, quando $\sigma > 1$ il punto $P = (2, 2\sigma/\sigma - 1)$ è detto "sharp" σ -ammissibile.

³Li assumeremo sempre contenuti in uno spazio di Banach A più grande.

Capitolo 2

Stime del risolvente

IN questa sezione ci interesseremo ad un determinato tipo di stime per la soluzione dell'equazione di Schrödinger perturbata. Il tutto è espresso nel seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) + V(x)u(t, x) = 0 \\ u(0, x) = f(x) \end{cases} \quad (2.1) \quad \text{pb_c}$$

dove $x \in \mathbb{R}^3$ e il potenziale $V(x)$ lo ipotizziamo tale che

$$\begin{cases} |V(x)| \leq C & 0 < |x| \leq 1 \\ |V(x)| \leq C|x|^{-\alpha-\varepsilon} & |x| > 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

ossia di tipo "short range". Al momento siamo interessati a delle stime che coinvolgono il risolvente perturbato ossia

$$R_V(\lambda^2 \pm i\varepsilon) \doteq (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta + V)^{-1} \quad (2.3) \quad \text{rv}$$

dove $z = \lambda^2 \pm i\varepsilon \in \rho(-\Delta + V)$. Nel caso del risolvente libero sappiamo che, applicando il calcolo spettrale, le soluzioni sono esprimibili in termini del propagatore cioè $u(t, x) = \mathcal{U}_0(t)f$ il quale, a sua volta, come mostrato in ([RS75]), assume la formulazione esplicita seguente

$$\mathcal{U}_0(t)f \doteq \int_0^{+\infty} e^{i\lambda t} [R_0(\lambda^2 + i0) - R_0(\lambda^2 - i0)] f d\lambda. \quad (2.4)$$

Inoltre, il fatto di essere in \mathbb{R}^3 ci dà la possibilità di esprimere il risolvente libero attraverso una sua formulazione integrale esplicita

$$R_0(\lambda^2 \pm i0) \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{\mp i\varepsilon \lambda |x-y|} \frac{f(y)}{|x-y|} dy. \quad (2.5)$$

Si noti il fatto che avere questa scrittura esplicita ci permette di poter scrivere

$$\|R_V(\lambda^2 \pm i\varepsilon)\| = \|R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon)V\|$$

e questo sarà utile nei calcoli che seguiranno. Inoltre è importante osservare che $R_0(\lambda^2 \pm i0)$ ed $R_V(\lambda^2 \pm i0)$ sono scritte formali che stanno ad indicare che il limite di cui sopra esiste ed è ben definito. Dimostrare questo significa dimostrare il cosiddetto *Limiting Absortion Principle* (LAP da [Agm75]) e noi lo faremo, nel caso perturbato, per ottenere le nostre stime di partenza.

Per farlo useremo degli spazi di Lebesgue pesati dove la norma è definita come

$$\|f\|_{L_a^2} = \|\langle x \rangle^a f\|_{L^2} \text{ ed } \langle x \rangle^2 = 1 + |x|^2.$$

2.1 Il LAP per il laplaciano perturbato

Dimostrare la validità del limiting absorption principle è un'operazione delicata dato che, passando al limite, un elemento z dell'insieme risolvete, dove il risolvete è ben definito ed invertibile, tende ad un elemento dello spettro dell'operatore $-\Delta + V$. Per passi successivi arriveremo a dimostrare la limitatezza e la compattezza dell'operatore e quindi, in definitiva, l'esistenza del limite stesso.

Proposizione 2.1. Il risolvete dell'operatore di Laplace libero composto con l'operatore di moltiplicazione V è un operatore limitato da $L_{-3/2-\delta}^2(\mathbb{R}^3)$ in se stesso ossia

$$(\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1}V \in \mathcal{B}(L_{-3/2-\delta}^2, L_{-3/2-\delta}^2). \quad (2.6) \quad \boxed{\text{lim1}}$$

Dimostrazione. Supponiamo $\varepsilon > 0$ fissato. Si ha

$$\|R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon)Vf\|_{L_{-a}^2} = \|\langle x \rangle^{-a}R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon)Vf\|_{L^2} \lesssim \|\langle x \rangle^{-a}\|_{L^m} \|R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon)Vf\|_{L^p}$$

dove dobbiamo imporre che

$$am > 3 \iff m > 3/a \quad (2.7) \quad \boxed{\text{cond}_1}$$

affinchè il primo dei due fattori a destra risulti finito e che, posto $m^+ = 3/2 + \delta$, si abbia

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} \iff p = \frac{2m^+}{m^+ - 2} \quad (2.8)$$

affinchè valga la disuguaglianza di Hölder.

A questo punto per il secondo fattore si ha

$$\|R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon)Vf\|_{L^p} \simeq \left\| \frac{1}{|x|} \star Vf \right\|_{L^p} \lesssim \left\| \frac{1}{|x|} \right\|_{L^{3,\infty}} \|Vf\|_{L^q}$$

dove l'ultima stima è stata ottenuta usando la ^{h1s}(1.3) modificata per gli spazi di Lorentz $L^{p,q}$. Nel nostro caso le ^{h1s cond}(1.4) diventano

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{3} + \frac{1}{q} \iff q = \frac{3p}{2p+3}.$$

Adesso

$$\begin{aligned} \|Vf\|_{L^q} &\simeq \|\langle x \rangle^{-\alpha-\varepsilon} f\|_{L^q} = \|\langle x \rangle^{-\alpha-\varepsilon} \langle x \rangle^{3/2+\delta} \langle x \rangle^{-3/2-\delta} f\|_{L^q} = \\ &= \|\langle x \rangle^{3/2+\delta-\alpha-\varepsilon} \langle x \rangle^{-3/2-\delta} f\|_{L^q} \lesssim \\ &\lesssim \|\langle x \rangle^{3/2+\delta-\alpha-\varepsilon}\|_{L^r} \|\langle x \rangle^{-3/2-\delta} f\|_{L^2} \end{aligned}$$

dove le condizioni da porre ora sono

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r} \quad r \left(\frac{3}{2} + \delta - \alpha - \varepsilon \right) > 3.$$

Quindi abbiamo trovato che vale la seguente stima:

$$\|R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon)Vf\|_{L^2_{-3/2-\delta}} \lesssim \|f\|_{L^2_{-3/2-\delta}} \quad (2.9) \quad \boxed{A1}$$

e questo conclude la dimostrazione. \square

Il prossimo risultato, invece, ci darà un'informazione sulla limitatezza del risolvente libero.

Proposizione 2.2. Il risolvente dell'operatore di Laplace libero è un operatore limitato da $L^2_{-3/2-\delta}(\mathbb{R}^3)$ in $L^2_{-1/2-\delta}(\mathbb{R}^3)$ ossia

$$(\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1} \in \mathcal{B}(L^2_{-3/2-\delta}, L^2_{-1/2-\delta}) \quad (2.10) \quad \boxed{\text{lim2}}$$

Dimostrazione. Fissato $\lambda > 0$ dobbiamo dimostare la validità di una stima del tipo

$$\|R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon)f\|_{L^2_a} \lesssim C\|f\|_{L^2_b}.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \|R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon)f\|_{L^2_a} &= \|\langle x \rangle^{-a} (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1} f\|_{L^2} = \left\| \langle x \rangle^{-a} \frac{1}{|x|} \star f \right\|_{L^2} \lesssim \\ &\lesssim \|\langle x \rangle^{-a}\|_{L^p} \left\| \frac{1}{|x|} \star f \right\|_{L^q} \end{aligned}$$

dove dobbiamo imporre che $ap > 3$ affinché il primo fattore a sinistra sia una quantità finita e che

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

per far si che valga H ölder. Adesso applicando la ^{h1s}(1.3) troviamo che

$$\left\| \frac{1}{|x|} \star f \right\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^r} \iff 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{3} + \frac{1}{r}.$$

Ponendo $r = 1$ troviamo

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{4}{3} \iff q = 3$$

e andando a ritroso abbiamo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{3} \iff p = 6 \implies 6a > 3 \iff a > \frac{1}{2}.$$

Infine

$$\|f\|_{L^1} = \|\langle x \rangle^b \langle x \rangle^{-b} f\|_{L^1} \lesssim \|\langle x \rangle^b\|_{L^2} \|\langle x \rangle^{-b} f\|_{L^2}$$

e da qui deduciamo che $2b > 3$ ossia $b > 3/2$. In definitiva abbiamo la seguente stima:

$$\|R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon)f\|_{L^2_{-1/2-\delta}} \lesssim \|f\|_{L^2_{-3/2-\delta}}. \quad (2.11) \quad \boxed{A2}$$

□

A cosa sono finalizzate queste stime? Le useremo per arrivare a delle affermazioni sulla compattezza dell'operatore $R_V(\lambda^2 \pm i\varepsilon)$. Intanto osserviamo il prossimo calcolo, che ci mostra il legame tra i vari operatori coinvolti.

$$\begin{aligned} \lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta + V &= (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta) + (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)(\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1}V = \\ &= (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta) [I + (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1}V] \end{aligned}$$

e quindi si ricava che

$$(\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta + V)^{-1} = [I + (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1}V]^{-1} (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1}. \quad (2.12) \quad \boxed{A2.1}$$

cpt_v **Proposizione 2.3.** L'operatore $(\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1}V : L^2_{-3/2-\delta} \longrightarrow L^2_{-3/2-\delta}$ è compatto.

Dimostrazione. Poniamo

$$(\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1}V = (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1}V \langle x \rangle^\varepsilon \langle x \rangle^{-\varepsilon} \doteq K \langle x \rangle^{-\varepsilon}$$

dove adesso sappiamo che il nostro K è limitato. Osseviamo che

$$\langle x \rangle^{-\varepsilon} = \langle x \rangle^{-\varepsilon} I_{\{|x|>R\}} + \langle x \rangle^{-\varepsilon} I_{\{|x|\leq R\}}$$

asintoticamente, per $R \rightarrow +\infty$, è tale che

$$\langle x \rangle^{-\varepsilon} \simeq \langle x \rangle^{-\varepsilon} I_{\{|x|\leq R\}}$$

in particolare se $\{f_n\}_n$ è una successione di funzioni in H allora

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I_{\{|x|>R\}} \langle x \rangle^{-\varepsilon} f_n = 0$$

e di conseguenza il nostro operatore di partenza si comporterà come

$$(\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1} V \langle x \rangle^\varepsilon I_{\{|x|\leq R\}}.$$

A questo punto osserviamo che $V \langle x \rangle^\varepsilon$ è limitato e che presa una successione $\{f_n\}_n \in H$ tale che $\|f_n\|_H \leq C$ ed $\Omega = \{|x| \leq R\}$ si ha

$$\|\nabla (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1} I_{\{|x|\leq R\}} f_n\|_{L^2} \leq C$$

grazie al fatto che, visto che Ω lo si è preso limitato, si ha l'immersione compatta di $H^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$. Infine, grazie al teorema di Ascoli-Arzelà, si ha la compattezza dell'operatore preso in considerazione. \square

Una conseguenza immediata della proposizione (2.3) è il prossimo teorema.

Teorema 2.1. Sia $z = \lambda^2 \pm i\varepsilon$. Allora λ non è autovalore generalizzato (o risonanza) per l'operatore $R_V(\lambda^2 \pm i\varepsilon)$.

Dimostrazione. Posto T l'operatore $(\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1} V$ possiamo applicare il teorema (1.1) ad $I - T$. Nella (2.12) abbiamo quindi il primo fattore limitato e il secondo compatto; quindi possiamo applicare la (1.1) e si ha la tesi. \square

Osservazione 2.1. Osserviamo che è grazie all'ipotesi per cui $0 \in \ker(I - T^*)$ che possiamo affermare l'esistenza di $(I - T)^{-1}$.

Siamo ora interessati alla ricerca di stime del tipo di (2.9) e (2.11) che però coinvolgano λ . Questo ci permetterà, in seguito, di poter usare una tecnica dovuta a [Kat66] in grado di collegare in maniera abbastanza diretta le stime del risolvente con quelle di Strichartz.

Da qui in poi, se non diversamente espresso, supporremo $\lambda > 0$ fissato. Un modo interessante con cui poter proseguire sarebbe quello di sfruttare la decomposizione radiale dell'operatore di Laplace. Questo, di conseguenza, ci permetterebbe di decomporre $L^2(\mathbb{R}^3) = L^2(r^2 dr, (0, +\infty)) \otimes L^2(\mathbb{S}^2)$. Questo sarebbe comodo se avessimo supposto f radiale, ma tale ipotesi renderebbe piuttosto restrittive le nostre ipotesi di lavoro, mentre noi vogliamo cercare di conservare un certo grado di generalità.

Proviamo un'altra strada. Consideriamo $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$; di conseguenza ci scriviamo $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x'}^2$, dove $x' = (x_2, x_3)$. Ci scriviamo f come

$$f(x_1, x') = \int e^{ix_1 \xi'} \hat{f}(x_1, \xi') d\xi'. \quad (2.13) \quad \boxed{\text{four}_f}$$

Adesso grazie alle proprietà di cui gode la trasformata di Fourier

$$(\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1} f = u \iff \hat{u}(x_1, \xi') = \hat{f} (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta)^{-1}$$

dove ricordiamo che $\widehat{\Delta u} = -|\xi'|^2 \hat{u}$. Quindi otteniamo

$$(\lambda \pm i\varepsilon - \partial_{x_1}^2 + |\xi'|^2) \hat{u} = \hat{f}$$

e ponendo $\mu^2(\xi') = \lambda^2 + |\xi'|^2$ il tutto si scrive come

$$(\mu^2(\xi') \pm i\varepsilon - \partial_{x_1}^2) \hat{u} = \hat{f}. \quad (2.14)$$

Poichè ξ' è fissato, in pratica questi calcoli ci hanno permesso di ricondurci al caso per $n = 1$. A questo punto si ha che

$$\begin{aligned} \|\hat{u}(x_1, \xi')\|_{L_{x_1}^\infty} &= \sup_{x_1 \in \mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{\mp i\varepsilon|x_1 - \xi'| \mu(\xi')} \frac{\hat{f}(x_1, \xi')}{2i\mu(\xi')} d\xi' \right| \leq \\ &\leq \frac{C}{|\mu|} \int_{\mathbb{R}} \left| e^{\mp i\varepsilon|x_1 - \xi'| \mu(\xi')} \frac{\hat{f}(x_1, \xi')}{2i\mu(\xi')} \right| d\xi' \leq \frac{C}{|\mu|} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x_1, \xi')| d\xi' = \\ &= \frac{C}{|\mu|} \|\hat{f}\|_{L_{x_1}^1} \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\|\langle x_1 \rangle^{-1/2-\delta} \hat{u}\|_{L_{x_1}^2}^2 \lesssim \|\hat{u}\|_{L_{x_1}^\infty}^2 \lesssim \frac{C}{\mu^2} \|\hat{f}\|_{L^1}^2 \lesssim \frac{C}{\mu^2} \|\langle x \rangle^{1/2+\delta} \hat{f}\|_{L_{x_1}^2}^2.$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo applicato Hölder. Quindi la stima che siamo riusciti ad ottenere è la seguente:

$$\|\langle x_1 \rangle^{-1/2-\delta} \hat{u}\|_{L_{x_1}^2}^2 \lesssim \frac{C}{\mu^2} \|\langle x \rangle^{1/2+\delta} \hat{f}\|_{L_{x_1}^2}^2. \quad (2.15) \quad \boxed{\text{A6}}$$

La ^{A6}(2.15) ci da il legame tra \hat{u} ed \hat{f} in spazi L^2 pesati Proviamo ad ottenere qualcosa di simile per u ed f . Prima di procedere osserviamo che

$$\langle x \rangle^{-1/2-\delta} \lesssim \langle x_1 \rangle^{-1/2-\delta} \quad (2.16) \quad \boxed{\text{A7.1}}$$

$$\langle x_1 \rangle^{1/2+\delta} \lesssim \langle x \rangle^{1/2+\delta}. \quad (2.17) \quad \boxed{\text{A7.2}}$$

Dalla ^{A6}(2.15), integrando in ξ' si ha

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} |\langle x_1 \rangle^{-1/2-\delta} \hat{u}|^2 dx_1 d\xi' \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{C}{\lambda^2 + |\xi'|^2} \int_0^{+\infty} |\langle x_1 \rangle^{1/2+\delta} \hat{f}|^2 dx_1 d\xi'$$

e per Plancherel si ottiene

$$C \underbrace{\iint \langle x_1 \rangle^{-1/2-\delta} |u|^2 dx_1 d\xi'}_A \leq \frac{C}{\lambda^2} \underbrace{\iint \langle x_1 \rangle^{1/2+\delta} |f|^2 dx_1 d\xi'}_B.$$

Adesso per la ^{A7.1}(2.16) si ha

$$\|\langle x \rangle^{-1/2-\delta} u\|_{L^2}^2 \leq A \quad (2.18)$$

mentre grazie alla ^{A7.2}(2.17) troviamo

$$B \leq \frac{C}{\lambda^2} \|\langle x \rangle^{1/2+\delta} f\|_{L^2}^2. \quad (2.19)$$

In definitiva ^{A6}(2.15) implica

$$\|\langle x \rangle^{-1/2-\delta} u\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\lambda^2} \|\langle x \rangle^{1/2+\delta} f\|_{L^2}^2. \quad (2.20) \quad \boxed{\text{A8}}$$

Questa stima ci permette di dire che, presi $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, si ha

$$\left\| \langle x \rangle^{-1/2-\delta} [R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon_1) - R_0(\lambda^2 \pm i\varepsilon_2)] V \right\|_{L^2} \lesssim \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^\theta}{\lambda} \left\| \langle x \rangle^{1/2+\delta} f \right\|_{L^2} \quad (2.21) \quad \boxed{\text{vart}}$$

così da dare un senso al limite con $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$.

Capitolo 3

Stime di Strichartz

IN questo capitolo tratteremo finalmente le stime di Strichartz per l'operatore di Schrödinger perturbato; sarà anche interessante vedere il legame che c'è tra quest'ultime e quelle del risolvete con cui abbiamo avuto a che fare fino ad ora. Per farlo seguiremo un'idea di [\[Kat66\]](#) successivamente modificata e sviluppata da [\[Burg1\]](#).

In genere il procedimento che si applica per provare queste stime è composto di due passi. Come prima cosa si cercano delle stime $L^p - L^q$ dall'espressione esplicita della soluzione fondamentale¹ e, successivamente, si cercano le stime vere e proprie attraverso qualche opportuno argomento di analisi funzionale. In situazioni molto più complesse, questo tipo di procedura può risultare non applicabile, ma questo non esclude a priori che le stime di Strichartz non siano ancora valide.

Proprio per evidenziare non solo l'utilità, ma anche la praticità di tale idea, cominciamo col vedere qual è il procedimento classico con cui si arriva alle stime di Strichartz nel caso del risolvete libero.

Premettiamo un risultato noto come lemma di Christ-Kiselev, preso da [\[CK01\]](#), che ha importanti applicazioni nella ricerca di stime di tipo Strichartz e, più in generale, nello studio di equazioni alle derivate parziali dispersive.

Teorema 3.1 (Lemma di Christ-Kiselev). Supponiamo $p < q$ e consideriamo $T : L^p(\mathbb{R}) \rightarrow L^q(\mathbb{R})$ definito come

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x, y) f(y) dy$$

dove $K \in L^1_{loc}$. Definiamo

$$T^* f(x) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \int_{y < s} K(x, y) f(y) dy \right| \quad (3.1)$$

¹Ossia, come vedremo nel caso non perturbato, delle stime dispersive per il propagatore libero.

e posta $\|T\|_{L^p \rightarrow L^q}$ come norma dell'operatore da L^p ad L^q , si ha che

$$\|T^* f\|_{L^p} \leq (1 - 2^{-(1/p-1/q)})^{-1} \|T\|_{L^p \rightarrow L^q} \|f\|_{L^q} \quad (3.2)$$

per ogni f a supporto limitato.

Osservazione 3.1. Questo risultato ci permette di affermare che, nel caso più generale, quando abbiamo un operatore T che opera da uno spazio di Banach ad uno di Hilbert, il cui aggiunto è di tipo integrale su tutto \mathbb{R} , possiamo sostituirlo con un altro che abbia come dominio di integrazione una filtrazione di \mathbb{R} ossia un intervallo $[0, t]$ con t fissato. In particolare, l'estremo sinistro di integrazione può essere preso come $t_0 = 0$ perchè nulla ci vieta di poter sostituire f con $f \chi_{\{y>0\}}$. Nella pratica questo ci permetterà di rendere lecite operazioni su operatori del tipo TT^* .

3.1 Il caso libero

Nel caso in cui il potenziale non è perturbato, ci troviamo a dover indagare sulla regolarità delle soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0 \\ u(0, x) = \varphi(x) \end{cases} \quad (3.3) \quad \boxed{\text{sch1}}$$

dove per i nostri scopi possiamo supporre $\varphi \in L^2$. Sappiamo che c'è conservazione della massa ossia $\|u(t, x)\|_{L_x^2} = \|\varphi(x)\|_{L_x^2}$ e che posto $u(t, x) = e^{it\Delta}\varphi$ vale la seguente stima

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L_t^\infty L_x^2} \lesssim \|\varphi\|_{L_x^2}. \quad (3.4) \quad \boxed{\text{st_inf}}$$

L'obiettivo è proprio ottenere una generalizzazione di queste stime a priori.

libe1

Teorema 3.2 (Stime di Strichartz - Caso libero). Sia φ il dato iniziale del problema sch1 (3.3) e supponiamo $n \geq 3$. Allora per ogni $(p, q) \in [1, +\infty) \times [1, +\infty)$ si ha che

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|\varphi\|_{L_x^2} \iff \frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}, \quad p \geq 2 \quad (3.5) \quad \boxed{\text{stri1}}$$

ossia la coppia (p, q) è σ -ammissibile con $\sigma = n/2$.

Osservazione 3.2. Notiamo che la stima st_inf (3.4) ossia con $(p, q) = (\infty, 2)$ rientra tra quelle di Strichartz come uno degli estremi ammissibili.

Cerchiamo di capire perchè è condizione necessaria che valgano le due ipotesi sugli esponenti.

L'ipotesi che

$$\frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2} \quad (3.6)$$

deriva dal richiedere l'invarianza per riscaldamenti parabolici delle soluzioni di (5.3) ossia per riscaldate del tipo $u_\lambda(t, x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$ e che ciò nonostante le stime dovranno mantenersi vere; se adesso prendiamo $\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$ con $\lambda > 0$ notiamo che $\forall x \in \mathbb{R}^n$ si deve avere

$$\|\varphi_\lambda(x)\|_{L^2} = \left(\int |\varphi(\lambda x)|^2 dx \right)^{1/2} = (\lambda x \doteq y) = \left(\int |\varphi(x)| \frac{dy}{\lambda^n} \right)^{1/2} = \lambda^{-n/2} \|\varphi(x)\|_{L^2}.$$

A questo punto dire che (5.5) deve valere anche per le riscaldate paraboliche significa che

$$\|e^{it\Delta} \varphi_\lambda\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|\varphi_\lambda\|_{L_x^2}$$

ma il termine a sinistra può essere riscritto come

$$\|e^{it\Delta} \varphi_\lambda\|_{L_t^p L_x^q} = \|u(\lambda^2 t, \lambda x)\|_{L_t^p L_x^q} = \lambda^{-2/p} \lambda^{-n/q} \|e^{it\Delta} \varphi\|_{L_t^p L_x^q}$$

e quello a destra come

$$\|\varphi_{1a}\|_{L_x^2} = \|\varphi(\lambda x)\|_{L_x^2} = \lambda^{-n/2} \|\varphi\|_{L_x^2}.$$

Quindi otteniamo

$$\lambda^{-2/p} \lambda^{-n/q} \|e^{it\Delta} \varphi\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \lambda^{-n/2} \|\varphi\|_{L_x^2}$$

e da qui si deduce la necessità della prima ipotesi sugli esponenti.

Per quanto riguarda la seconda ipotesi, ossia che $p \geq 2$, essa è conseguenza della seguente proposizione.

Proposizione 3.1. Siano X e Y spazi di Banach e supponiamo di avere l'operatore $T : L^p(\mathbb{R}, X) \rightarrow L^q(\mathbb{R}, Y)$. Supponiamo che T sia invariante per traslazioni ossia che $T(\tau_h f) = \tau_h(Tf)$ e che $T \in \mathcal{L}(L^p, L^q)$. Allora $q \geq p$.

Dimostrazione. Sia $C = \|T\|_{\mathcal{L}(L^p, L^q)}$. Supponiamo che questa costante esista e che sia la migliore costante possibile per cui

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p} \quad \forall f.$$

Se vale per tutte le f deve valere anche per le traslate $f + \tau_h f$ e quindi si dovrà avere

$$\|T(f + \tau_h f)\|_{L^q} \leq C \|f + \tau_h f\|_{L^p}.$$

Ma osserviamo che per $h \rightarrow +\infty$ si ha che

$$\|f + \tau_h f\|_{L^p} \rightarrow 2^{1/p} \|f\|_{L^p}$$

visto che i due supporti diventano sostanzialmente disgiunti. Inoltre

$$\|T(f + \tau_h f)\|_{L^q} = \|Tf + \tau_h(Tf)\|_{L^q} \longrightarrow 2^{1/q} \|Tf\|_{L^q}$$

e di conseguenza

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C 2^{1/p-1/q} \|f\|_{L^p}.$$

Allora si deve necessariamente avere $2^{1/p-1/q} \geq 1$ perchè se così non fosse avremmo ottenuto una costante migliore di quella di partenza. Questo è assurdo visto che C era per ipotesi la migliore possibile. Quindi

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq 0 \iff q \geq p.$$

□

A questo punto passiamo a dimostrare il teorema [\(3.2\)](#).

Dimostrazione. Prima di tutto dobbiamo porci nelle condizioni per applicare l'argomento del TT^* ossia il teorema [\(1.4\)](#). Nel nostro caso avremo

$$H = L^2(\mathbb{R}^n) \quad X = L_t^p L_x^q \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} T: H &\longrightarrow X \\ h &\longmapsto e^{it\Delta} h \end{aligned}$$

con T operatore lineare e continuo. Inoltre sappiamo che $(L_t^p L_x^q)' = L_t^{p'} L_x^{q'}$ per via dell'identificazione che manda

$$L_t^{p'} L_x^{q'} \ni F \mapsto (G, F)_{L_{t,x}^2}$$

dove $G \in L_t^{p'} L_x^{q'}$. Adesso dobbiamo capire che forma assumerà $T^* : X' \longrightarrow H$. Sappiamo che

$$\langle Th, x' \rangle_{X, X'} = (h, T^* x')_H$$

dove il primo è un prodotto di dualità mentre il secondo è il vero e proprio prodotto scalare dello spazio di Hilbert. Nel nostro caso avremo

$$\langle Th, G \rangle_{L_{t,x}^2} = (h, T^* G)_{L^2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} (Th, G)_{L_{t,x}^2} &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{it\Delta} h \cdot \bar{G}(t, x) dt dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\Delta} h \cdot \bar{G}(t, x) dx \right) dt = \\ &= (\text{ per Plancherel } (f, f)_{L^2} = (\hat{f}, \hat{f})_{L^2} \text{ e quindi passiamo } e^{it\Delta} \text{ a } G) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h \cdot \overline{e^{-it\Delta} G(t, x)} dx \right) dt = (\text{ Fubini }) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \overline{e^{-it\Delta} G(t, x)} dt \right) dx. \end{aligned}$$

Adesso sappiamo che la situazione è la seguente:

$$\begin{array}{ccc} T : L_x^2 & \longrightarrow & L_t^p L_x^q \\ h & \longmapsto & e^{it\Delta} h \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^* : L_t^{p'} L_x^{q'} & \longrightarrow & L_x^2 \\ G(t, x) & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} G(s) ds \end{array} \quad (3.8) \quad \boxed{\text{sit}}$$

e da (5.8) capiamo che

$$TT^*(G) = e^{it\Delta} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} G(s) ds \right) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} G(s) ds. \quad (3.9) \quad \boxed{\text{titi}}$$

Applicare il teorema (7.4) ci consente di vedere che la stima di cui dobbiamo dimostrare la validità assume tre forme del tutto equivalenti ossia

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta} F(s) ds \right\|_{L_x^2} \lesssim \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \quad (3.10)$$

\Leftrightarrow

$$\left\| e^{it\Delta} h \right\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|h\|_{L_x^2} \quad (3.11)$$

\Leftrightarrow

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}. \quad (3.12) \quad \boxed{\text{duh}}$$

E' proprio la (5.12) che dimostreremo facendo uso del teorema (1.5). Vedremo infatti che la (1.6) implica proprio la (5.12).

Iniziamo stimando puntualmente con t fissato:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_x^q} &\leq \int_{\mathbb{R}} \left\| e^{i(t-s)\Delta} F(s) \right\|_{L_x^q} ds \leq \frac{\text{disp_gen}}{(1.6)} \leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{|t-s|^{\beta(q)}} \|F(s)\|_{L_x^{q'}} ds = C \left(\frac{1}{|t|^{\beta(q)}} \star \|F(s)\|_{L_x^{q'}} \right) \end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\beta(q) = \begin{cases} 0 & p = 2 \\ n/2(1 - 2/p) & p > 2 \end{cases}.$$

Questa stima puntuale ci permette di scrivere che

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^p L_x^q} \leq C \left\| \frac{1}{|t|^{\beta(q)}} \star \|F(s)\|_{L_x^{q'}} \right\|_{L_t^{p'}} \leq \frac{\text{hls}}{(1.3)} \leq \|F(s)\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}$$

che vale se $0 \leq \beta(q) < 1$. Allora troviamo che, con $\alpha = 1$ nella (1.3), si ha

$$1 + \frac{1}{p} = \beta(q) + \frac{1}{p'} \implies \frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}.$$

□

Osservazione 3.3. Notiamo che le stime che abbiamo dimostrato nel caso dell'operatore di Schrödinger non perturbato risultano essere valide anche nel caso in cui si lavori in degli spazi di Lorentz. In particolare può essere dimostrato che

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s) ds \right\|_{L_t^p L_x^{q,2}} \leq \|F(s)\|_{L_t^{p'} L_x^{q',2}} \quad (3.13)$$

e questa stima è più raffinata della (3.12).

3.2 Il caso perturbato

Vedremo ora come la strategia adottata nel caso perturbato sia diversa; in particolare cercheremo di evitare di ottenere le stime di Strichartz attraverso quelle dispersive e arrivarci direttamente, ma in un altro modo. Questa possibilità ci è data proprio dal fatto che risultano valide le stime del risolvete in spazi L^2 pesati che abbiamo ottenuto nella sezione precedente.

Gran parte di questa procedura è dovuta a [Kat66] e ci consente di ottenere stime in L^2 per il risolvete di una particolare estensione autoaggiunta dell'operatore perturbato $-\Delta + V$.

Definizione 3.1 (Operatore H -regolare). *Siano X ed Y spazi di Hilbert ed H operatore autoaggiunto con dominio $\mathcal{D}(H) \subset X$, denso in X . Sia $A : X \rightarrow Y$ un operatore chiuso con dominio $\mathcal{D}(A) \subset X$ denso in X e tale che $\mathcal{D}(H) \subseteq \mathcal{D}(A)$. L'operatore A è H -regolare se $\exists C > 0$ tale che*

$$\varepsilon \|A[H - (\lambda \pm i\varepsilon)]^{-1} f\|_Y^2 \leq C \|f\|_X^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.14) \quad \boxed{\text{B1}}$$

Osservazione 3.4. Grazie a [Kat66] sappiamo che se per un operatore A vale la (3.14) ossia è H -regolare allora risulta vera anche la seguente stima:

$$\int_0^{+\infty} \|Ae^{-itH} f\|_Y^2 dt \leq C \|f\|_X^2. \quad (3.15) \quad \boxed{\text{B2}}$$

Quest'ultima è anche motivata dal fatto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|A[H - (\lambda \pm i\varepsilon)]^{-1} f\|_Y^2 d\lambda = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{\mp 2\varepsilon t} \|Ae^{-itH} f\|_Y^2 dt.$$

Il prossimo teorema, dovuto a [Burg1], ci permetterà di avvicinarci al tipo di stime che abbiamo ottenuto fino a questo momento e come vedremo, ci farà passare da un tipo di stime ad un altro.

Teorema 3.3. Sia H operatore autoaggiunto sullo spazio di Hilbert X e sia definito per ogni $\mu \notin \mathbb{R}$ l'operatore risolvente $(H - \mu)^{-1}$. Sia A un operatore chiuso con dominio denso in $\mathcal{D}(H)$ e a valori nello spazio di Hilbert Y . Supponiamo che

$$\Gamma = \sup_{\substack{f \in \mathcal{D}(A^*) \\ \|f\|=1}} \|A(H - \mu)^{-1} A^* f\|_Y < +\infty. \quad (3.16) \quad \boxed{\text{B1.1}}$$

Allora A è H-regolare ed

$$\|A\|_H^2 = \sup_{\substack{f \in X \\ \|f\|=1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \|Ae^{-itH} f\|_Y^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \Gamma^2. \quad (3.17) \quad \boxed{\text{B1.2}}$$

Vedremo presto l'uso che faremo della definizione e del teorema appena esposti.

Il problema di Cauchy ora diventa

$$\begin{cases} i\partial_t u - \Delta u = -Vu \doteq F \\ u(0, x) = f(x) \in L^2 \end{cases} \quad (3.18) \quad \boxed{\text{sch_per}}$$

e questo ci permette, formalmente, di esprimere u come

$$u = (\lambda^2 \pm i\varepsilon - \Delta + V)^{-1} f.$$

Di conseguenza risulta applicabile la stima ^(A8)(2.20) che abbiamo visto nella sezione precedente e che può essere espressa come

$$\|\langle x \rangle^{-1/2-\delta} u \langle x \rangle^{-1/2-\delta}\|_{L^2}^2 \leq \frac{C}{\lambda^2} \|f\|_{L^2}^2. \quad (3.19) \quad \boxed{\text{reg}}$$

Se poniamo $A = \langle x \rangle^{-1/2-\delta}$ nella ^(B1.1)(3.16) (notando che, visto come operatore di moltiplicazione, è autoaggiunto) otteniamo che

$$\Gamma^2 \leq \|\langle x \rangle^{-1/2-\delta} u \langle x \rangle^{-1/2-\delta}\|_{L^2}^2 \leq \overset{\text{reg}}{(3.19)} < +\infty$$

e questo ci sarà utile unitamente alla considerazione che

$$\Gamma^2 \simeq \|Vu\|_{L^2}^2.$$

Osservazione 3.5. Nel caso del problema ai dati iniziali ^(sch_per)(3.18) sappiamo che la soluzione dovrà assumere la seguente forma:

$$u(t, x) = e^{it\Delta} f - i \int_0^t e^{-i\Delta(t-s)} F(s) ds \quad (3.20)$$

e quindi, le stime di Strichartz a cui vogliamo arrivare saranno del tipo

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L_x^2} + \|F\|_{L_t^{\tilde{p}} L_x^{\tilde{q}}} \quad (3.21) \quad \boxed{\text{str0}}$$

con le coppie (p, q) e (\tilde{p}, \tilde{q}) σ -ammissibili per un opportuno σ .²

Teorema 3.4 (Stime di Strichartz - Caso perturbato). Sia f il dato iniziale per il problema di Cauchy ^{sch per} (3.18) e sia $n \geq 3$. Allora per ogni $(p, q) \in [1, +\infty] \times [1, +\infty]$ si ha che

$$\|e^{itH} f\|_{L_t^p L_x^{q,2}} \lesssim \|f\|_{L_t^2 L_x^2} \iff \frac{2}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n}{2}, \quad p \geq 2 \quad (3.22) \quad \boxed{\text{str2}}$$

dove $H = -\Delta + V$ ossia la coppia (p, q) è σ -ammissibile con $\sigma = n/2$.

Osservazione 3.6. Si osservi come, per $n \geq 3$, l'idea alla base della dimostrazione, ossia dimostrare la validità delle stime in due punti estremali e poi estendere quest'ultima per interpolazione tra spazi, sia rappresentabile in maniera univoca a livello grafico.

Qui possiamo vedere il segmento di estremi i punti A e B rispettivamente di coordinate $(1/2, 2n/(n-2))$ e $(0, 1/2)$. Le coppie di coordinate comprese tra quelle di A e B rappresentano proprio quelle ottenibili per interpolazione.

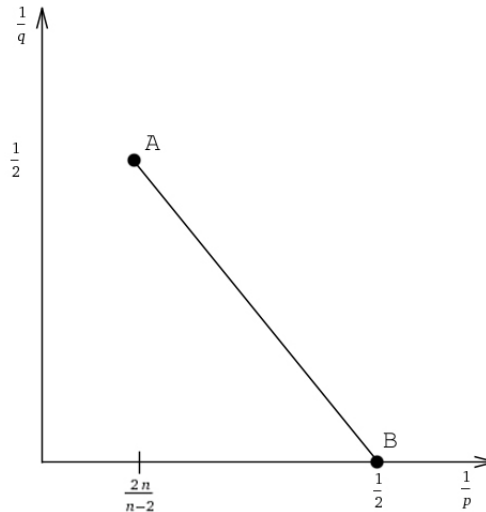


Figura 3.1: Segmento chiuso AB delle coppie Schrödinger-ammissibili.

²Ovviamente questa forma è assunta nel caso si stia in degli spazi di Lebesgue.

Osservazione 3.7. Nella prossima dimostrazione faremo di un'identità per spazi di interpolazione usata da [KT97] e [Fri78]. Essa ci sarà utile nel trattare le stime nel caso estremale. si ha

$$(L_t^2 L_x^{p_0}, L_t^2 L_x^{p_1})_{\vartheta, 2} = L_t^2 L_x^{p, 2} \quad (3.23) \quad \text{endp}$$

con

$$p_0 \neq p_1 \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1}.$$

Noitiamo che questa identità è conseguente alla definizione (1.5).

Dimostrazione. Grazie al teorema (1.4) sappiamo che, similmente a quanto già visto nel caso libero, dimostrare la validità della stima (3.22) equivale a dimostrare che valga

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-i(t-s)\Delta} V u ds \right\|_{L_t^p L_x^{q, 2}} \lesssim \|Vu\|_{L_t^{p'} L_x^{q', 2}}. \quad (3.24) \quad \text{str2_duh}$$

Scegliamo gli esponenti in modo da porci nel caso estremale; quindi poniamo

$$p = 2 \quad q = \frac{2n}{n-2} \quad \tilde{q} = q \quad \tilde{p} = p \quad \tilde{q}' = \frac{2n}{n+2}$$

così da avere

$$\|u\|_{L_t^2 L_x^{2n/(n-2), 2}} \lesssim \|f\|_{L^2} + \|Vu\|_{L_t^2 L_x^{2n/(n+2), 2}}.$$

Adesso

$$\|Vu\|_{L_x^{2n/(n+2), 2}} \lesssim \|V\|_{L^{r, \infty}} \|u\|_{L_x^{2n/(n-2), 2}}$$

con

$$\frac{1}{\tilde{q}'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \iff r = \frac{n}{2} \quad \text{ed} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2}.$$

Questo calcolo è corretto nel caso di potenziale asintoticamente piccolo e noi abbiamo proprio $V \simeq |x|^{-2} \in L^{r, \infty}$. Osserviamo che, per l'osservazione (1.3), possiamo scrivere

$$\|V\|_{L^{r, \infty}} = \||x|^{-2}\|_{L^{r, \infty}} = \left\| t\mu \left\{ \frac{1}{|x|^2} > t \right\}^{1/r} \right\|_{L^\infty}$$

ma

$$\mu \left\{ \frac{1}{|x|^2} > t \right\} = \mu \left\{ x : |x| < \frac{1}{\sqrt{t}} \right\} = C \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)^n$$

e di conseguenza

$$\left\| t\mu \left\{ \frac{1}{|x|^2} > t \right\}^{1/r} \right\|_{L^\infty} = \sup_{t>0} (t^{-n/2})^{1/r} < +\infty \iff \frac{n}{2r} = 1 \iff r = \frac{n}{2}.$$

Adesso stimiamo in t , osservando prima che possiamo sostituire $\|V\|_{L^{r,\infty}}$ con $\|V\|_{L^r}$ grazie al fatto che $L^r = L^{r,r} \subseteq L^{r,\infty}$. Si ha

$$\|Vu\|_{L_t^2 L_x^{2n/(n+2),2}} \lesssim \|V\|_{L_x^{n/2}} \|u\|_{L_t^2 L_x^{2n/(n-2),2}} = \tilde{C} \|u\|_{L_t^2 L_x^{2n/(n-2),2}} \quad (3.25)$$

quindi abbiamo ottenuto che

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{-i(t-s)\Delta} V u ds \right\|_{L_t^p L_x^{2n/(n-2),2}} \lesssim \|Vu\|_{L_t^2 L_x^{2n/(n+2),2}} \lesssim \tilde{C} \|u\|_{L_t^2 L_x^{2n/(n-2),2}} \quad (3.26)$$

e questo dimostra la stima nel caso di esponenti estremali $(p,q)=(2, 2n/(n-2))$; considerando anche la conservazione dell'energia per otteniamo la validità della stima per gli esponenti $(p, q) = (\infty, 2)$. Infine, applicando il teorema di interpolazione di Riesz-Thorin otteniamo la validità delle stime per tutti i punti contenuti nel segmento che ha i due precedenti come punti estremali. \square

Osservazione 3.8. Possiamo osservare l'importanza dell'ipotesi per cui il potenziale $V(x)$ è dato asintoticamente piccolo dal fatto che, in assenza di quest'ultima, la (3.21) ^{stro} sarebbe diventata

$$\|u\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|\langle x \rangle^\gamma f\|_{L_x^2} + \|F\|_{L_t^{\bar{p}} L_x^{\bar{q}}} \quad (3.27)$$

con $\gamma > 1$. Inoltre, in questo caso, dovremmo aggiungere l'ipotesi che il supporto di f sia limitato ossia che esista un $R > 0$ tale che $\text{supp } f \subset \{|x| \leq R\}$.

Capitolo 4

Un'applicazione: l'inflazione dell'energia

4.1 Impostazione teorica

L'obiettivo di questa sezione è provare ad effettuare una simulazione numerica che ci permetta di constatare se e in quali casi si ottiene quella che in letteratura è nota come *inflazione dell'energia*.

Vedremo come, in determinati casi, anche uno strumento potente come le stime di Strichartz fallisce e perde le sue capacità predittive sulla regolarità della soluzione. Questo è dovuto a un fenomeno detto *cattiva positura* del problema di Cauchy. Ma andiamo con ordine dando innanzitutto la definizione ([CCT03], [NB02]) di buona positura del problema di Cauchy.¹

Definizione 4.1. Per ogni $s < 0$ il problema di Cauchy è ben posto in $H^s(\mathbb{T})$ nel senso che l'applicazione che manda il dato iniziale $u(0, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ nella soluzione $u(t, \cdot) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T})$ se è uniformemente continua come applicazione da $H^s(\mathbb{T})$ in se stesso.

Osservazione 4.1. Come possiamo interpretare la cattiva positura alla luce della definizione appena data?

Possiamo dire che per ogni $\rho > 0$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esistono dei dati iniziali $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty$ tali che

$$\|f_1\|_{H^s} \leq \rho \quad \|f_2\|_{H^s} \leq \rho \quad \|f_1 - f_2\|_{H^s} < \delta$$

al tempo $T < \delta$, le cui corrispondenti soluzioni siano tali che

$$\|u_1(T) - u_2(T)\|_{H^s} > \varepsilon.$$

¹Da qui in poi considereremo la variabile spaziale $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

A questo punto vediamo come impostare il problema di Cauchy e di conseguenza la simulazione numerica.

$$\begin{cases} (i\partial_t + P(D))u = \mu u|u|^{p-1} \\ u(0, x) = f(x) \in H^s(\mathbb{T}) \end{cases} \quad x \in \mathbb{T} \quad \mu = \{\pm 1\}. \quad (4.1) \quad \text{purep}$$

dove $P(D) = -\Delta$ oppure sarà una perturbazione del simbolo tale che, passando per la trasformata di Fourier, si possa ottenere il polinomio $p(k) = -k^2$ oppure $p(k) = -k^2 + k$. Poniamo

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k(t) e^{ikx}$$

e, ovviamente, nella simulazione avremo $k \in [-N, N]$ con N scelto da noi opportunamente grande. Siano ora

$$\tilde{u}(t, x) = \sum_{k=-N}^N \hat{u}_k(t) e^{ikx} \quad (4.2)$$

$$\tilde{u}_k(t) = \int_0^{2\pi} \tilde{u}|\tilde{u}|^{p-1} e^{ikx} dx \quad (4.3)$$

così da poter ottenere per i coefficienti di Fourier che soddisfino

$$\begin{cases} i\partial_t \hat{u}_k(t) - k^2 \hat{u}_k(t) = \tilde{u}_k(t) \\ \hat{u}_k(0) = \hat{f}(k) \end{cases} \quad (4.4)$$

Osservazione 4.2. Ricordiamo che presa $u \in H^s$, la sua norma resta definita come

$$\|u\|_{H_x^s} = \sum_{i=0}^s \|\partial_x^i u\|_{L^2}$$

e in particolare, posto $\mathbb{T} = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ essa è esprimibile come

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{T})} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|)^{2s} |\hat{u}(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

4.2 Le simulazioni

In questa sezione andiamo ad implementare la simulazione numerica; cominciamo con lo scriverci

$$u := u^I + iu^{II} = \begin{pmatrix} u^I \\ u^{II} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$i\partial_t u := i\partial_t u^I - \partial_t u^{II} = \begin{pmatrix} -\partial_t u^{II} \\ \partial_t u^I \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Questo ci permette ora di riscrivere il problema [\(4.1\)](#) come

$$\begin{pmatrix} -\partial_t u^{II} + \partial_{xx} u^I \\ \partial_t u^I + \partial_{xx} u^{II} \end{pmatrix} = \left(\sqrt{(u^I)^2 + (u^{II})^2} \right)^{p-1} \begin{pmatrix} u^I \\ u^{II} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Inoltre poniamo

$$u^I(0, x) = f^I(x) \doteq \sum_{k=1}^N f^I(k) \sin kx \quad (4.8)$$

$$u^{II}(0, x) = f^{II}(x) \doteq \sum_{k=1}^N f^{II}(k) \sin kx. \quad (4.9)$$

A questo punto dovremo avere u^I esprimibile come

$$u^i(t, x) = \sum_{k=1}^N u^I(t, k) \sin kx$$

e di conseguenza

$$\partial_{xx} u^I(t, x) = \sum_{k=1}^N -k^2 u^I(t, k) \sin kx$$

e la stessa cosa vale per $u^{II}(t, x)$. Resta da scrivere, tramite serie che la approssimino, la componente destra della [\(4.1\)](#). Per semplicità supporremo $p = 2$ così da poter scrivere

$$S_{N,2}(t, k) = \sum_{j=1}^N u^I(t, k-j) u^I(t, j) + \sum_{j=1}^N u^{II}(t, k-j) u^{II}(t, j) \quad (4.10)$$

e poter finalmente avere

$$-\partial_t u^{II}(t, k) - k^2 u^I(t, k) = H1(t, k) \quad (4.11)$$

$$-\partial_t u^I(t, k) - k^2 u^{II}(t, k) = H2(t, k) \quad (4.12)$$

con

$$H1(t, k) = \sum_{k=1}^N S_{N,2}(t, k) u^I(t, k) \quad H2(t, k) = \sum_{k=1}^N S_{N,2}(t, k) u^{II}(t, k). \quad (4.13)$$

Vediamo ora il codice distinguendo due casi: tale distinzione sarà dovuta alla presenza o meno di una perturbazione del simbolo. Osserviamo, preliminarmente, che nella nostra simulazione numerica, l'approssimazione di una PDE con una ODE è stata fatta usando i coefficienti di Fourier fino al decimo ordine. Nella prima simulazione il parametro temporale $t \in [0, 10]$.

lst:display

Listing 4.1: Il codice

```
N1 = 10;
S[1, t_] = 0;
S[2, t_] =
  Sum[uI[k1][t]*uI[2 - k1][t] + uII[k1][t]*uII[2 - k1][t],
    {k1, 1, 1}];
S[3, t_] =
  Sum[uI[k1][t]*uI[3 - k1][t] + uII[k1][t]*uII[3 - k1][t],
    {k1, 1, 2}];
S[4, t_] = Sum[uI[k1][t]*uI[4 - k1][t] +
  uII[k1][t]*uII[4 - k1][t], {k1, 1, 3}];
S[5, t_] =
  Sum[uI[k1][t]*uI[5 - k1][t] + uII[k1][t]*uII[5 - k1][t],
    {k1, 1, 4}];
S[6, t_] =
  Sum[uI[k1][t]*uI[6 - k1][t] + uII[k1][t]*uII[6 - k1][t],
    {k1, 1, 5}];
S[7, t_] =
  Sum[uI[k1][t]*uI[7 - k1][t] + uII[k1][t]*uII[7 - k1][t],
    {k1, 1, 6}];
S[8, t_] =
  Sum[uI[k1][t]*uI[8 - k1][t] + uII[k1][t]*uII[8 - k1][t],
    {k1, 1, 7}];
S[9, t_] =
  Sum[uI[k1][t]*uI[9 - k1][t] + uII[k1][t]*uII[9 - k1][t],
    {k1, 1, 8}];
S[10, t_] =
  Sum[uI[k1][t]*uI[10 - k1][t] + uII[k1][t]*uII[10 - k1][t],
    {k1, 1, 9}];

HI[1, t_] = 0; HII[1, t_] = 0;
HI[2, t_] = Sum[S[2 - k2, t]*uI[k2][t], {k2, 1, 1}];
HII[2, t_] = Sum[S[2 - k2, t]*uII[k2][t], {k2, 1, 1}];
HI[3, t_] = Sum[S[3 - k2, t]*uI[k2][t], {k2, 1, 2}];
HII[3, t_] = Sum[S[3 - k2, t]*uII[k2][t], {k2, 1, 2}];
HI[4, t_] = Sum[S[4 - k2, t]*uI[k2][t], {k2, 1, 3}];
HII[4, t_] = Sum[S[4 - k2, t]*uII[k2][t], {k2, 1, 3}];
HI[5, t_] = Sum[S[5 - k2, t]*uI[k2][t], {k2, 1, 4}];
HII[5, t_] = Sum[S[5 - k2, t]*uII[k2][t], {k2, 1, 4}];
HI[6, t_] = Sum[S[6 - k2, t]*uI[k2][t], {k2, 1, 5}];
HII[6, t_] = Sum[S[6 - k2, t]*uII[k2][t], {k2, 1, 5}];
```

```

HI[7, t_] = Sum[S[7 - k2, t]*uI[k2][t], {k2, 1, 6}];
HII[7, t_] = Sum[S[7 - k2, t]*uII[k2][t], {k2, 1, 6}];
HI[8, t_] = Sum[S[8 - k2, t]*uI[k2][t], {k2, 1, 7}];
HII[8, t_] = Sum[S[8 - k2, t]*uII[k2][t], {k2, 1, 7}];
HI[9, t_] = Sum[S[9 - k2, t]*uI[k2][t], {k2, 1, 8}];
HII[9, t_] = Sum[S[9 - k2, t]*uII[k2][t], {k2, 1, 8}];
HI[10, t_] = Sum[S[10 - k2, t]*uI[k2][t], {k2, 1, 9}];
HII[10, t_] = Sum[S[10 - k2, t]*uII[k2][t], {k2, 1, 9}];

s2 = NDSolve[{-uII[1]'[t] - 1^2*uI[1][t] == HI[1, t],
  uI[1]'[t] - 1^2*uII[1][t] ==
  HII[1, t], -uII[2]'[t] - 2^2*uI[2][t] == HI[2, t],
  uI[2]'[t] - 2^2*uII[2][t] ==
  HII[2, t], -uII[3]'[t] - 3^2*uI[3][t] == HI[3, t],
  uI[3]'[t] - 3^2*uII[3][t] == HII[3, t],
  -uII[4]'[t] - 4^2*uI[4][t] == HI[4, t],
  uI[4]'[t] - 4^2*uII[4][t] == HII[4, t],
  -uII[5]'[t] - 5^2*uI[5][t] == HI[5, t],
  uI[5]'[t] - 5^2*uII[5][t] == HII[5, t],
  uI[6]'[t] - 6^2*uII[6][t] ==
  HII[6, t], -uII[6]'[t] - 6^2*uI[6][t] == HI[6, t],
  uI[7]'[t] - 7^2*uII[7][t] ==
  HII[7, t], -uII[7]'[t] - 7^2*uI[7][t] == HI[7, t],
  uI[8]'[t] - 8^2*uII[8][t] ==
  HII[8, t], -uII[8]'[t] - 8^2*uI[8][t] == HI[8, t],
  uI[9]'[t] - 9^2*uII[9][t] ==
  HII[9, t], -uII[9]'[t] - 9^2*uI[9][t] == HI[9, t],
  uI[10]'[t] - 10^2*uII[10][t] ==
  HII[10, t], -uII[10]'[t] - 10^2*uI[10][t] == HI[10, t],
  uI[1][0] == 0.6, uII[1][0] == 0.5, uI[2][0] == 0.5,
  uII[2][0] == 0.5, uI[3][0] == 0.105, uII[3][0] == 0.2,
  uI[4][0] == 0.10, uII[4][0] == 0.25, uI[5][0] == 0.7,
  uII[5][0] == 0.5, uI[6][0] == 0.15, uII[6][0] == 0.4,
  uI[7][0] == 0.15, uII[7][0] == 0.4, uI[8][0] == 0.15,
  uII[8][0] == 0.4, uI[9][0] == 0.15, uII[9][0] == 0.4,
  uI[10][0] == 0.15, uII[10][0] == 0.4},
{uI[1], uII[1], uI[2],
  uII[2], uI[3], uII[3], uI[4], uII[4], uI[5], uII[5],
  uI[6], uII[6], uI[7], uII[7], uI[8], uII[8], uI[9], uII[9],
  uI[10], uII[10]}, {t, 0, 12}]

```

```

SRe[t_] = (uI[1][t])^2 + (uI[2][t])^2 +
  (uI[3][t])^2 + (uI[4][
    t])^2 + (uI[5][t])^2 + (uI[6][t])^2 +
  (uI[7][t])^2 + (uI[8][
    t])^2 + (uI[9][t])^2 + (uI[10][t])^2;
SIm[t_] = (uII[1][t])^2 + (uII[2][t])^2 + (uII[3][t])^2 +
  (uII[4][
    t])^2 + (uII[5][t])^2 + (uII[6][t])^2 + (uII[7][t])^2 +
  (uII[8][
    t])^2 + (uII[9][t])^2 + (uII[10][t])^2;
normal2 = SRe[t] + SIm[t]
Plot[Evaluate[{normal2} /. s2], {t, 0, 10}, PlotRange -> All]

```

```

SIRE[t_] = (uI[1][t])^2 + 2^2*(uI[2][t])^2 + 3^2*(uI[3][t])^2 +
  4^2* (uI[4][t])^2 + 5^2 *(uI[5][t])^2 + 6^2 *(uI[6][t])^2 +
  7^2 *(uI[7][t])^2 + 8^2 *(uI[8][t])^2 + 9^2 *(uI[9][t])^2 +
  10^2 *(uI[10][t])^2;
SIIm[t_] = (uII[1][t])^2 + 2^2*(uII[2][t])^2 + 3^2*(uII[3][t])^2 +
  4^2* (uII[4][t])^2 + 5^2 *(uII[5][t])^2 + 6^2 *(uII[6][t])^2 +
  7^2 *(uII[7][t])^2 + 8^2 *(uII[8][t])^2 + 9^2 *(uII[9][t])^2 +
  10^2 *(uII[10][t])^2;
normal1 = SIRE[t] + SIIm[t];
Plot[Evaluate[normal1 /. s2], {t, 0, 10}, PlotRange -> All]

```

```

norma2 = (uI[1][t])^2 + 2^4*(uI[2][t])^2 + 3^4*(uI[3][t])^2 +
  4^4* (uI[4][t])^2 + 5^4* (uI[5][t])^2 + 6^4* (uI[6][t])^2 +
  7^4* (uI[7][t])^2 + 8^4* (uI[8][t])^2 + 9^4* (uI[9][t])^2 +
  10^4* (uI[10][t])^2 + (uII[1][t])^2 + 2^4*(uII[2][t])^2 +
  3^4*(uII[3][t])^2 + 4^4* (uII[4][t])^2 + 5^4* (uII[5][t])^2 +
  6^4* (uII[6][t])^2 + 7^4* (uII[7][t])^2 + 8^4* (uII[8][t])^2 +
  9^4* (uII[9][t])^2 + 10^4* (uII[10][t])^2;
Plot[Evaluate[norma2 /. s2], {t, 0, 10}, PlotRange -> All]

```

```

norma3 = (uI[1][t])^2 + 2^6*(uI[2][t])^2 + 3^6*(uI[3][t])^2 +
  4^6* (uI[4][t])^2 + 5^6* (uI[5][t])^2 + 6^6* (uI[6][t])^2 +
  7^6* (uI[7][t])^2 + 8^6* (uI[8][t])^2 + 9^6* (uI[9][t])^2 +
  10^6* (uI[10][t])^2 + (uII[1][t])^2 + 2^6*(uII[2][t])^2 +
  3^6*(uII[3][t])^2 + 4^6* (uII[4][t])^2 + 5^6* (uII[5][t])^2 +
  6^6* (uII[6][t])^2 + 7^6* (uII[7][t])^2 + 8^6* (uII[8][t])^2 +
  9^6* (uII[9][t])^2 + 10^6* (uII[10][t])^2;
Plot[Evaluate[norma3 /. s2], {t, 0, 10}, PlotRange -> All]

```

```

norma4 = (uI[1][t])^2 + 2^8*(uI[2][t])^2 + 3^8*(uI[3][t])^2 +

```

```

4^8* (uI[4][t])^2 + 5^8* (uI[5][t])^2 + 6^8* (uI[6][t])^2 +
7^8* (uI[7][t])^2 + 8^8* (uI[8][t])^2 + 9^8* (uI[9][t])^2 +
10^8* (uI[10][t])^2 + (uII[1][t])^2 + 2^8*(uII[2][t])^2 +
3^8*(uII[3][t])^2 + 4^8* (uII[4][t])^2 + 5^8* (uII[5][t])^2 +
6^8* (uII[6][t])^2 + 7^8* (uII[7][t])^2 + 8^8* (uII[8][t])^2 +
9^8* (uII[9][t])^2 + 10^8* (uII[10][t])^2;
Plot[Evaluate[norma4 /. s2], {t, 0, 10}, PlotRange -> All]

```

```

normameno1 = (uI[1][t])^2 + 2^-2*(uI[2][t])^2 + 3^-2*(uI[3][t])^2 +
4^-2* (uI[4][t])^2 + 5^-2* (uI[5][t])^2 + 6^-2* (uI[6][t])^2 +
7^-2* (uI[7][t])^2 + 8^-2* (uI[8][t])^2 + 9^-2* (uI[9][t])^2 +
10^-2* (uI[10][t])^2 + (uII[1][t])^2 + 2^-2*(uII[2][t])^2 +
3^-2*(uII[3][t])^2 + 4^-2* (uII[4][t])^2 + 5^-2* (uII[5][t])^2 +
6^-2* (uII[6][t])^2 + 7^-2* (uII[7][t])^2 + 8^-2* (uII[8][t])^2 +
9^-2* (uII[9][t])^2 + 10^-2* (uII[10][t])^2;
Plot[Evaluate[normameno1 /. s2], {t, 0, 10}, PlotRange -> All]

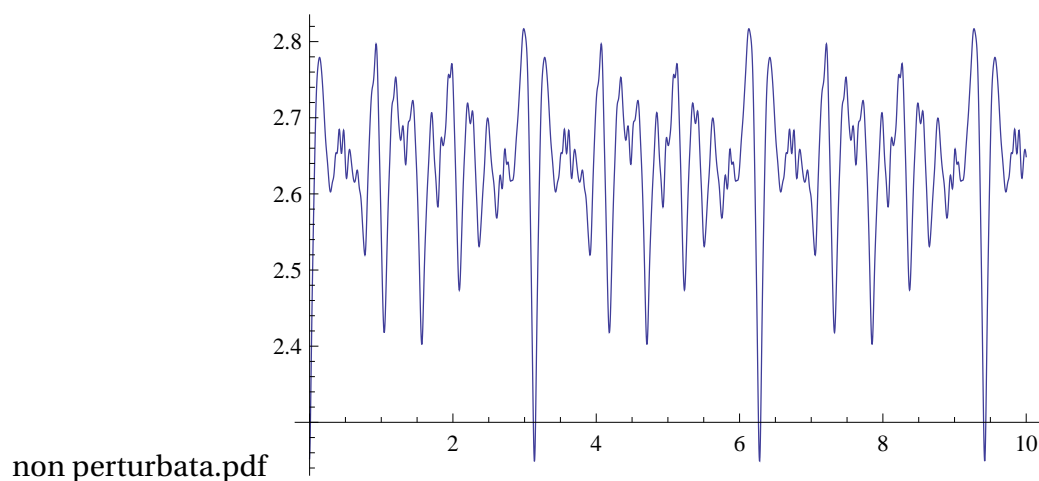
```

```

normamenotremezzi = (uI[1][t])^2 + 2^-3*(uI[2][t])^2 +
3^-3*(uI[3][t])^2 + 4^-3* (uI[4][t])^2 + 5^-3* (uI[5][t])^2 +
6^-3* (uI[6][t])^2 + 7^-3* (uI[7][t])^2 + 8^-3* (uI[8][t])^2 +
9^-3* (uI[9][t])^2 + 10^-3* (uI[10][t])^2 + (uII[1][t])^2 +
2^-3*(uII[2][t])^2 + 3^-3*(uII[3][t])^2 + 4^-3* (uII[4][t])^2 +
5^-3* (uII[5][t])^2 + 6^-3* (uII[6][t])^2 + 7^-3* (uII[7][t])^2 +
8^-3* (uII[8][t])^2 + 9^-3* (uII[9][t])^2 + 10^-3* (uII[10][t])^2;
Plot[Evaluate[normamenotremezzi /. s2], {t, 0, 10}, PlotRange -> All]

```

Qui di seguito riportiamo i grafici ottenuti tramite questo codice.



Andamento della norma L^2 .

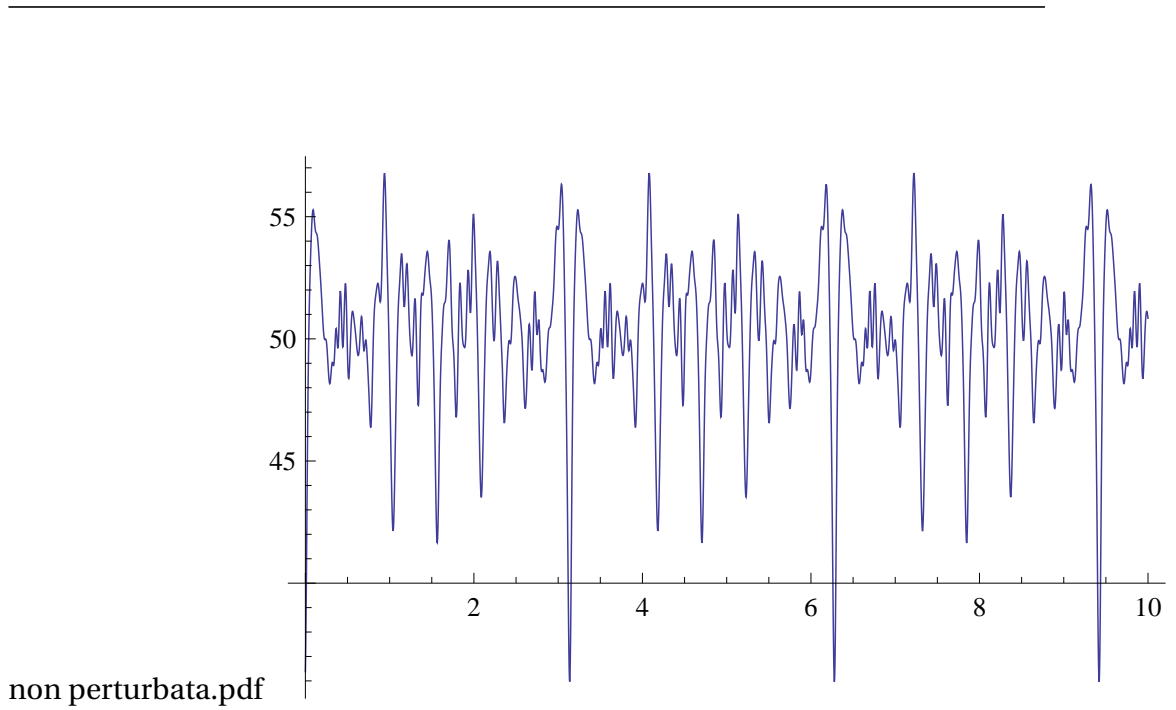


Figura 4.1: Andamento della norma H^1 .

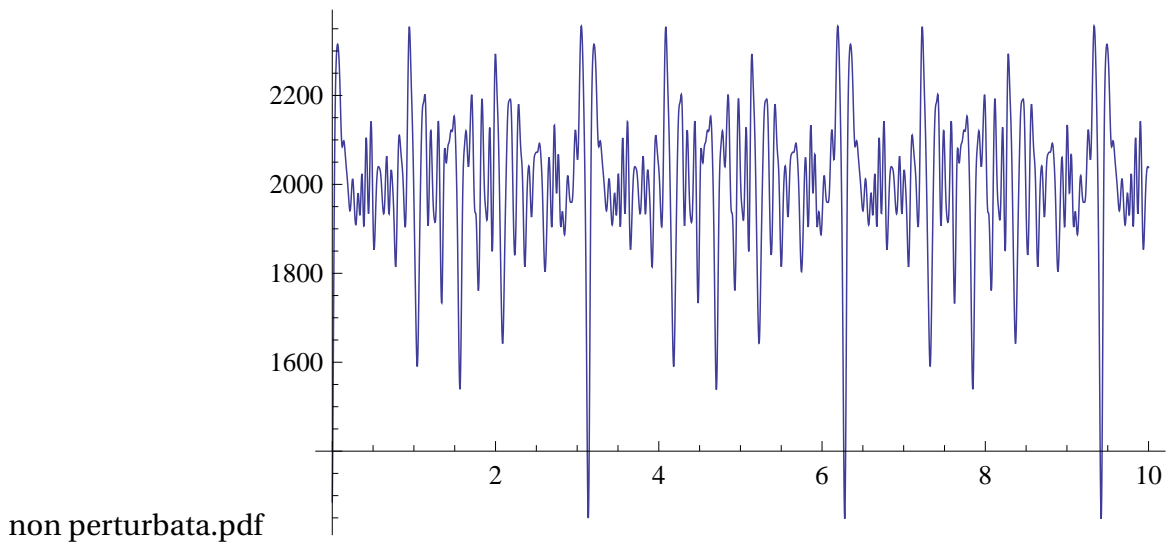


Figura 4.2: Andamento della norma H^2 .

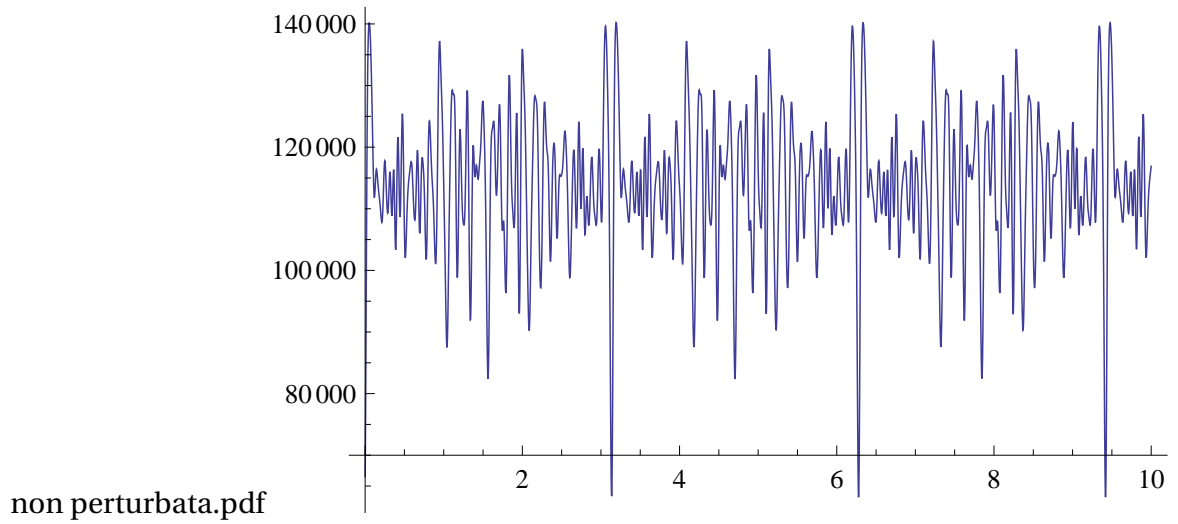


Figura 4.3: Andamento della norma H^3 .

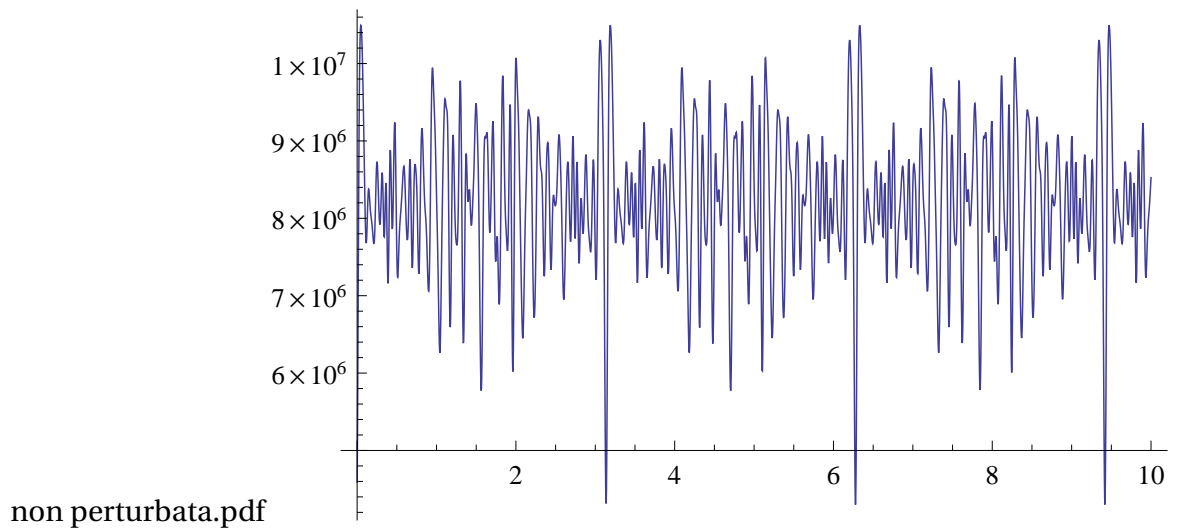


Figura 4.4: Andamento della norma H^4 .

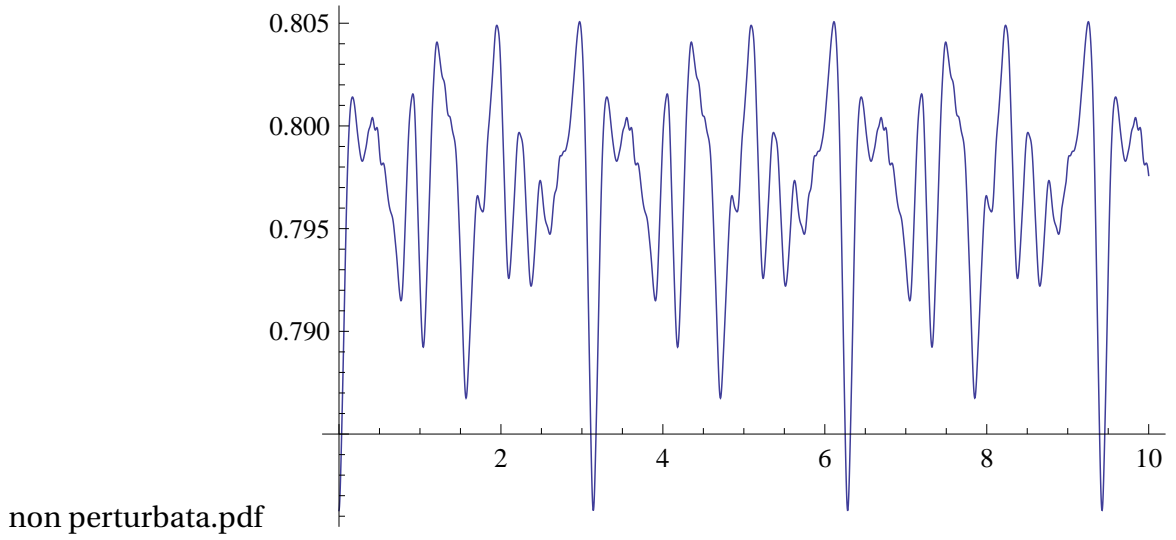


Figura 4.5: Andamento della norma H^{-1} .

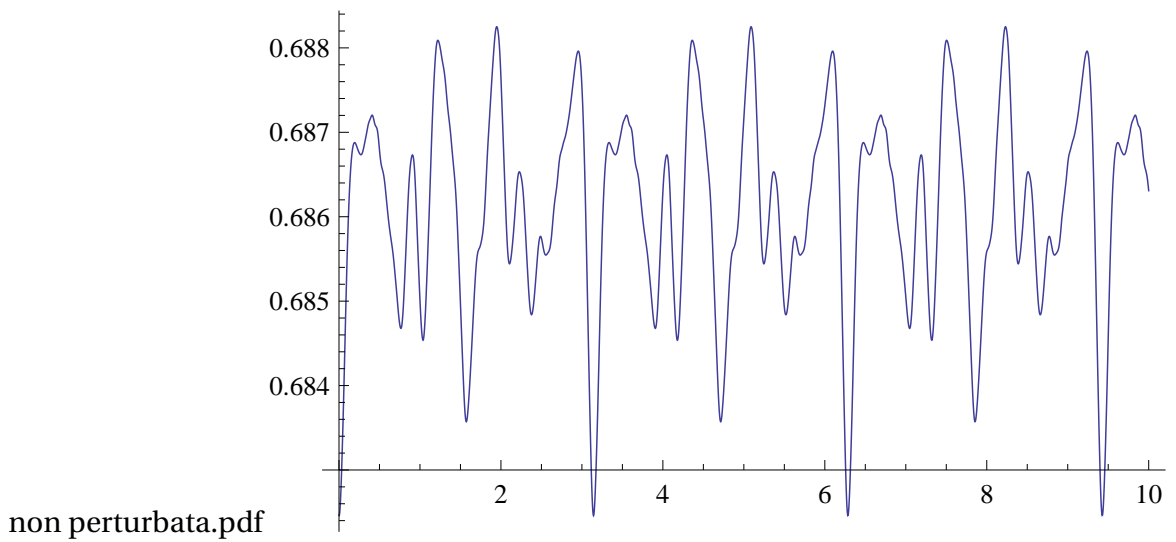


Figura 4.6: Andamento della norma $H^{-3/2}$.

Adesso invece proviamo a inserire una perturbazione sufficientemente piccola del simbolo ponendo nel codice il parametro $a = 0,01$. In questa seconda simulazione avremo $t \in [0, 15]$.

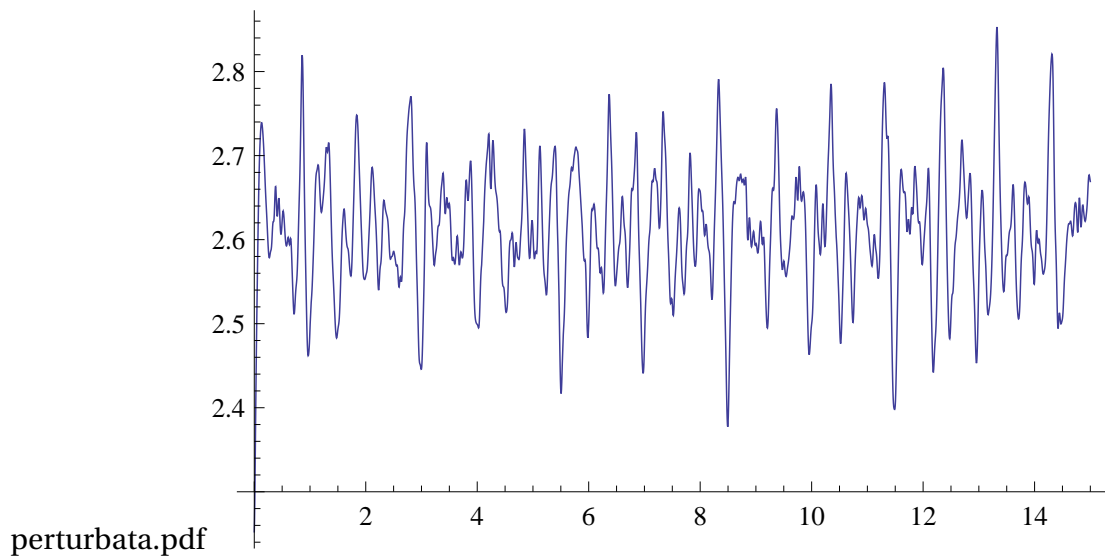


Figura 4.7: Andamento della norma L^2 perturbata.

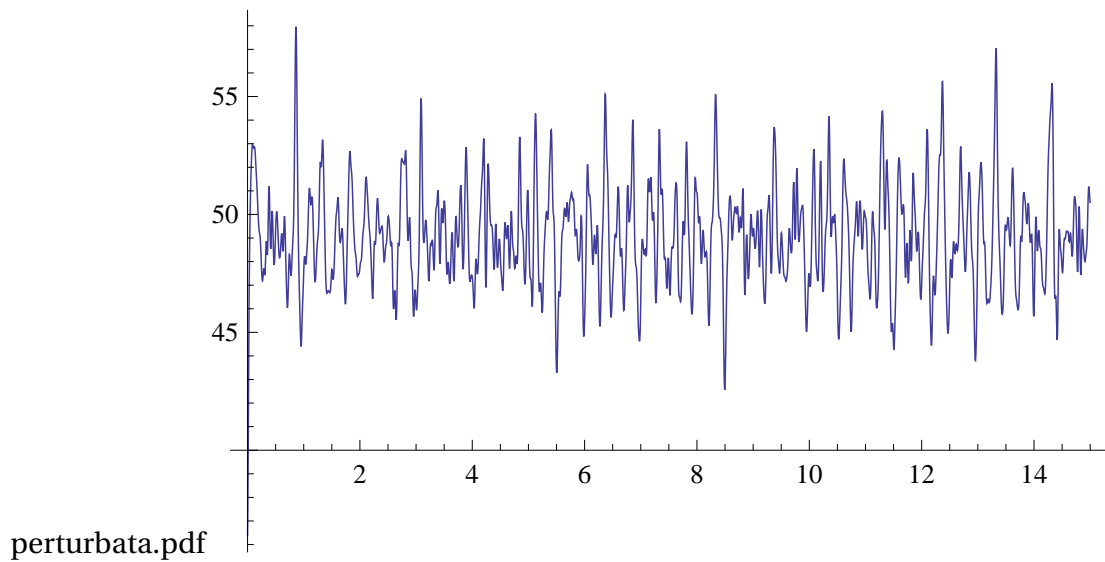


Figura 4.8: Andamento della norma H^1 perturbata.

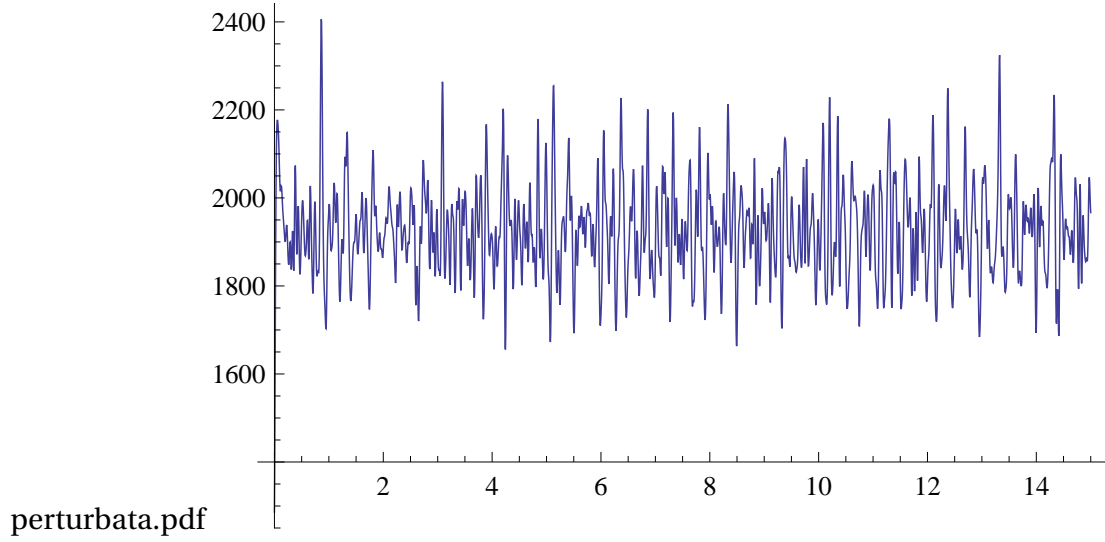


Figura 4.9: Andamento della norma H^2 perturbata.

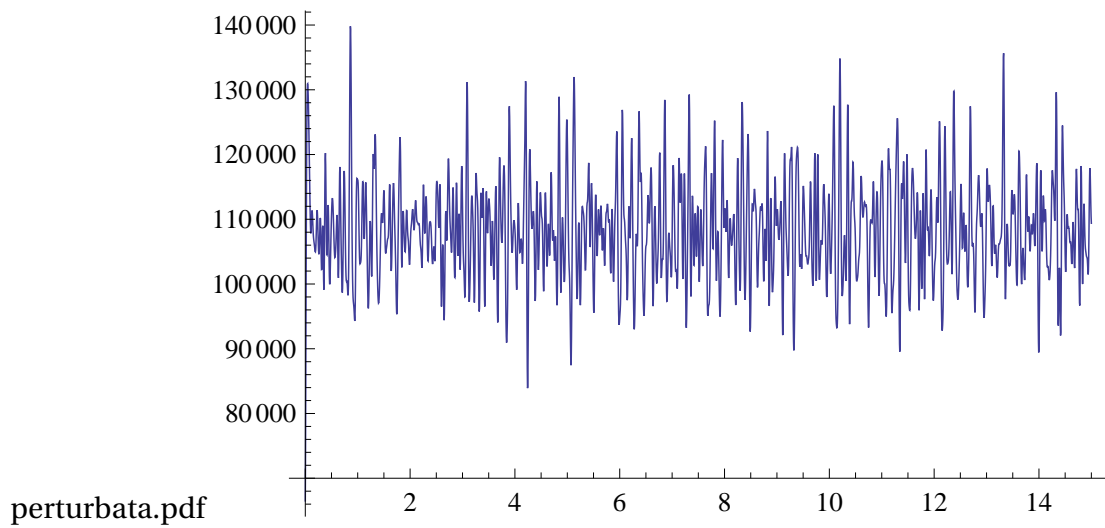


Figura 4.10: Andamento della norma H^3 perturbata.

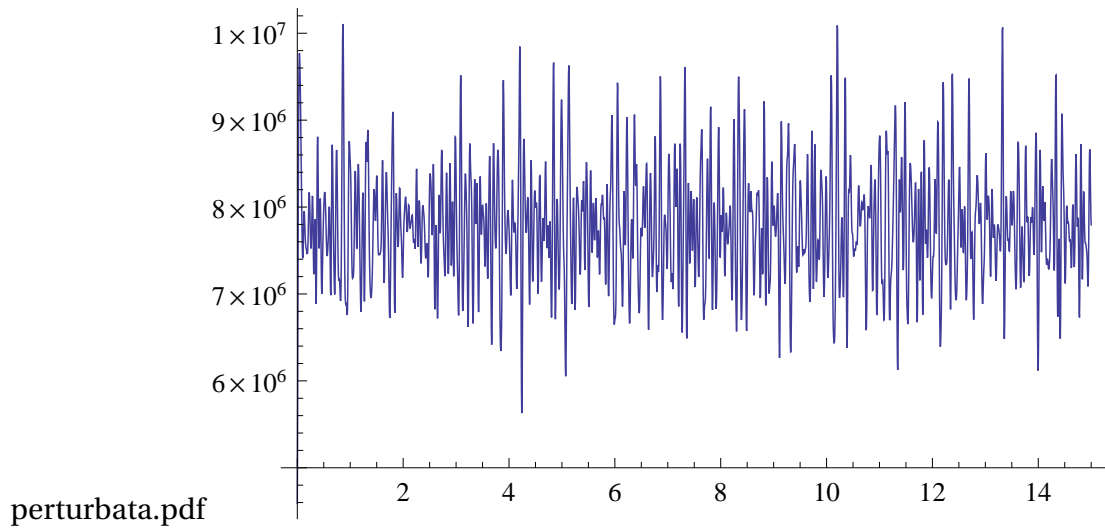


Figura 4.11: Andamento della norma H^4 perturbata.

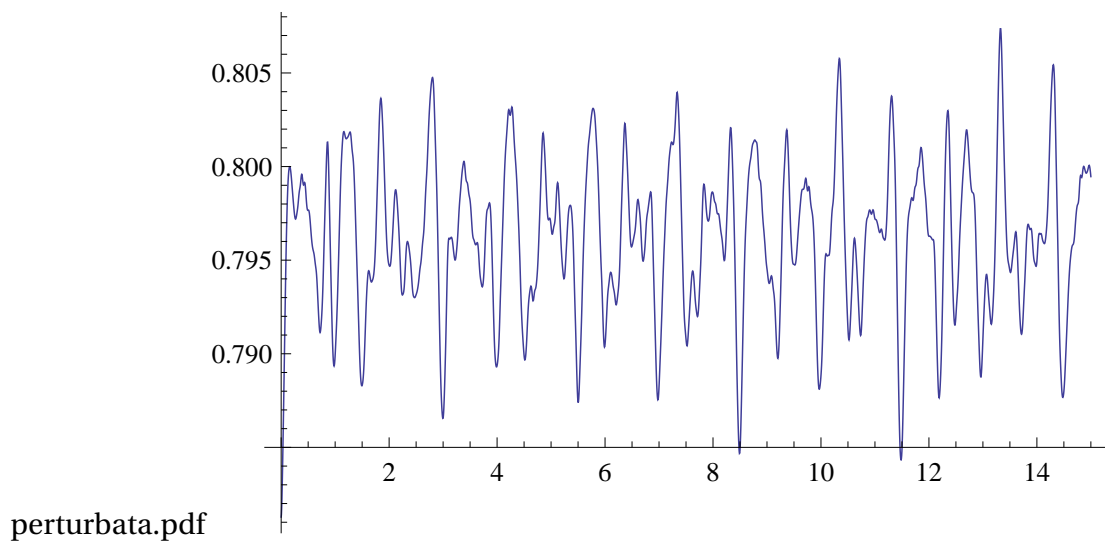


Figura 4.12: Andamento della norma H^{-1} perturbata.

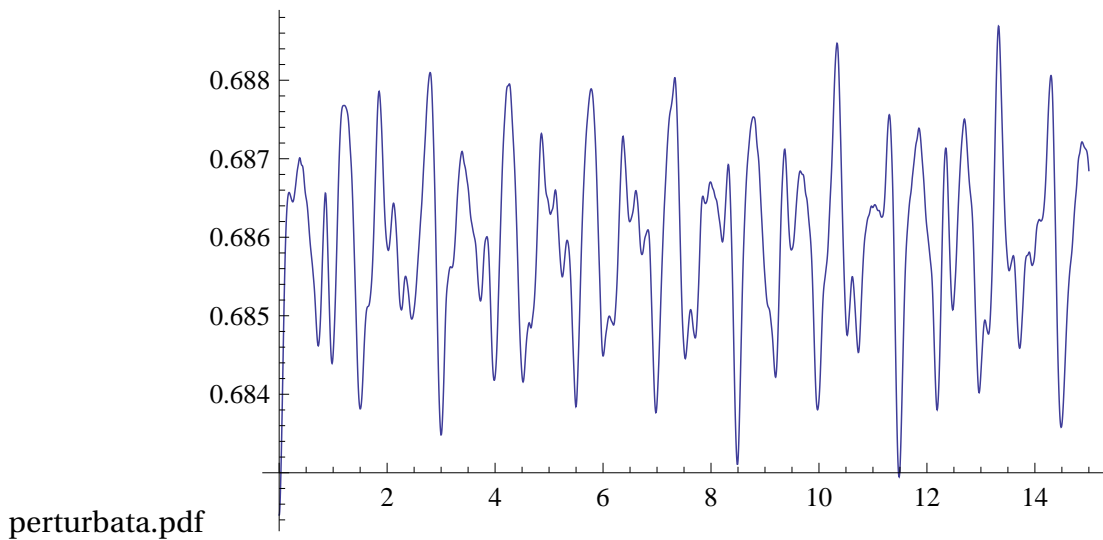


Figura 4.13: Andamento della norma $H^{-3/2}$ perturbata.

4.3 Conclusioni

Cosa riusciamo ad ottenere osservando questi grafici?

In assenza di perturbazioni del simbolo sostanzialmente possiamo osservare due cose: per prima cosa risulta evidente che non si hanno crescite nel tempo con andamento esponenziale per le norme da noi calcolate. In più osserviamo la presenza di un fenomeno quanto meno non previsto in letteratura ossia la comparsa della periodicità. Quindi è possibile supporre la possibilità concreta di poter raffinare la stima dall'altro che si ha delle norme H^s .

Le cose sembrano essere leggermente diverse nel caso in cui siano presenti piccole perturbazioni del simbolo: anche in questo caso non si verifica inflazione dell'energia, ma stavolta non risulta essere presente alcun tipo di periodicità delle norme. Infine limiti di natura tecnica delle macchine da noi usate non ci hanno permesso di effettuare le simulazioni su tempi più lunghi, ma ciò nonostante, si nota la tendenza delle norme a divergere.

Ringraziamenti

Bibliografia

- [Agm75] S. Agmon. Spectral properties of schroedinger operators and scattering theory. 1975.
- [B⁺03] N. Burq et al. Strichartz estimates for the wave and schroedinger equations with the inverse-square potential. 2003.
- [B⁺04] N. Burq et al. Strichartz estimates for the wave and schroedinger equations with potential of critical decay. 2004.
- [BKK07] J. Bourgain, C.E. Kenig, and S. Klainerman. *Mathematical Aspects of Nonlinear Dispersive Equations*. 2007.
- [BL76] J. Bergh and J. Lofstrom. *Interpolation Spaces: an introduction*. 1976.
- [BP08] J. Bourgain and N. Pavlovic. Ill-posedness of the navier stokes equations in a critical space in 3d. 2008.
- [Bre11] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. 2011.
- [Caz03] T. Cazenave. *Semilinear Schroedinger equations*. 2003.
- [CCT03] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao. Instability of the periodic nonlinear schroedinger equation. 2003.
- [CK01] M. Christ and A. Kiselev. Maximal functions associated to filtrations. 2001.
- [DPV05] P. D’Ancona, V. Pierfelice, and N. Visciglia. Some remarks on the schroedinger equation with a potential in $L_t^r L_x^s$. 2005.
- [EO03] D. E. Edmunds and B. Opic. Equivalent quasi-norms on lorentz spaces. 2003.
- [Gra08] L. Grafakos. *Classical Fourier Analysis*. 2008.

-
- [GST07] V. Georgiev, A. Stefanov, and M. Tarulli. Smoothing-strichartz estimates for the schroedinger equation with small magnetic potential. 2007.
- [GV89] J. Ginibre and G. Velo. Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations. 1989.
- [Kat66] T. Kato. Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators. 1966.
- [KT97] M. Keel and T. Tao. Endpoint strichartz estimates. 1997.
- [LP15] F. Linares and G. Ponce. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. 2015.
- [NB02] N. Tzvetkov N. Burq, P. Grd. An instability property of the nonlinear schroedinger equation on s^d . 2002.
- [RS75] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. I. Functional Analysis*. 1975.
- [RS78] M. Reed and B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. 1978.
- [Tri78] H. Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. 1978.