

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Aerospaziale

Tesi di Laurea

**Ottimizzazione di Traiettorie Interplanetarie
con Manovre Impulsive**



Relatore
Prof. Giovanni MENGALI

Candidato
Andrea CARUSO

GIUGNO 2016

Alla mia famiglia

The universe is a pretty big place. If it's just us, seems like an awful waste of space.

Carl Sagan, Contact

Abstract

In questa Tesi viene presentato un procedimento di ottimizzazione di traiettorie interplanetarie di veicoli spaziali nel caso di alcune missioni spaziali.

Viene mostrato un modello che, a partire da un set di parametri che definiscono univocamente la traiettoria del veicolo, permette di calcolare la variazione totale di velocità ottenuta dalla sonda che è legata al consumo di propellente necessario a eseguire tutte le manovre della missione spaziale. La sonda può eseguire manovre impulsive e può sfruttare l'azione gravitazionale dei pianeti del Sistema Solare per effettuare manovre di fionda gravitazionale.

Il problema di ottimizzazione viene risolto utilizzando l'Algoritmo Genetico e MultiStart di MATLAB.

Vengono affrontati problemi bidimensionali e tridimensionali che fanno uso delle effemeridi planetarie. I risultati sono comparati con le soluzioni ottime già note in letteratura.

Indice

Abstract	i
1 Introduzione	1
1.1 Il Problema di Ottimizzazione di Traiettorie Interplanetarie	10
1.2 Come è strutturato questo Documento	14
2 Formulazione del Problema e Obiettivi dello Studio	15
3 Modello della Traiettoria	21
3.1 Legge di Gravitazione Universale: il Problema degli n-Corpi	21
3.1.1 Modello dei due corpi	22
3.1.2 La Sfera d'Influenza	23
3.2 Modello della Traiettoria di Trasferimento	25
3.3 Modello senza Effemeridi Planetarie	26
3.4 Modello Tridimensionale con Effemeridi Planetarie	28
3.4.1 Effemeridi Planetarie	30
3.4.2 Problema di Keplero	36
3.4.3 Problema di Lambert	38
3.4.4 Manovra di Fionda Gravitazionale	40
3.4.5 Procedura di Calcolo della Variazione Totale di Velocità	46
4 Algoritmi di Ottimizzazione	47
4.1 Algoritmo Genetico	48
4.2 MultiStart	50
4.3 Constrained Nonlinear Optimization Algorithms (fmincon)	50
4.4 Pattern Search	53
5 Risultati del Problema di Ottimizzazione	55
5.1 Manovra di Hohmann	56

5.2	Trasferimento con tre impulsi	57
5.3	Trasferimento Biellittico	59
5.4	Trasferimento con Variazione del Piano Orbitale	60
5.5	Missione Terra-Marte	62
5.6	Missione Terra-Giove	66
5.7	Missione Terra-Saturno	72
6	Conclusioni	79
	Elenco delle Figure	84
	Elenco delle Tabelle	86

Capitolo 1

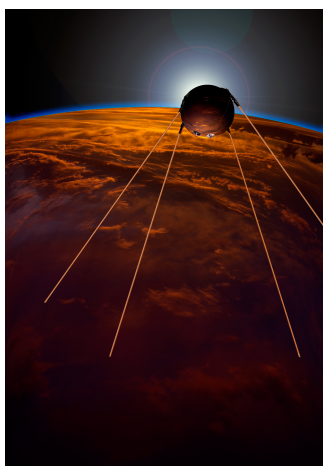
Introduzione

L'Universo: l'uomo è sempre stato affascinato dai misteri che ci nasconde, per questo motivo è stato uno dei principali oggetti di studio fin dall'antichità. Presso molti popoli gli astronomi acquisirono conoscenze sorprendenti considerando il livello tecnologico raggiunto dall'umanità a quel tempo e nel corso dei secoli grandi scienziati e filosofi come Copernico, Galilei, Keplero, Newton, Einstein hanno favorito, grazie ai loro studi, una crescita esponenziale delle nostre conoscenze permettendo di ottenere una visione sempre più ricca del nostro Universo.

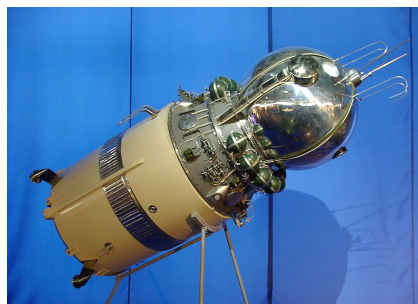
L'uomo però non si è limitato ad osservare il cielo stellato dalla Terra: il continuo sviluppo tecnologico che ha caratterizzato l'ultimo secolo della storia umana ci ha permesso di raggiungere lo spazio per mezzo di satelliti e sonde.

Nel corso del ventesimo secolo, partendo dagli studi condotti dai padri della missilistica come Konstantin Tsiolkovsky, Robert Goddard, Hermann Oberth e Reinhold Tiling, fu avviata la realizzazione di razzi sempre più potenti che resero possibile l'inizio dell'esplorazione spaziale: il 4 ottobre 1957, il veicolo russo Sputnik1 (figura 1.1(a)) fu il primo satellite artificiale ad essere lanciato in un'orbita bassa attorno alla Terra. Esso era solo un piccolo satellite di 58 cm di diametro con a bordo pochi sistemi. L'Unione Sovietica, in competizione con gli Stati Uniti nella corsa allo spazio, dopo pochi anni, il 12 Aprile 1961, riuscì anche a portare il primo uomo nello spazio, Yuri Gagarin, a bordo del veicolo spaziale Vostok 1 (figura 1.1(b)). Il 20 Luglio 1969 la missione americana Apollo11 fu la prima a portare l'essere umano sulla superficie di un altro corpo celeste, la Luna.

Da allora la corsa allo spazio non si è arrestata, anzi la sete di conoscenza dell'uomo e talvolta anche interessi di tipo economico hanno spinto l'industria spaziale (e anche altri campi scientifici) verso una crescita senza precedenti. Oggi-giorno numerosissimi satelliti orbitano attorno alla Terra fornendo dati scientifici, oppure sono usati per effettuare previsioni meteorologiche, per la navigazione e le telecomunicazioni, e diverse stazioni spaziali sono state immesse in orbita. L'e-



(a) Sputnik 1.



(b) Vostok.

Figura 1.1: Rappresentazione artistica del veicolo Sputnik 1 in orbita (a). Modello del Vostok con il suo stadio superiore, esposizione "Russia in Space", Frankfurt Airport's (b).

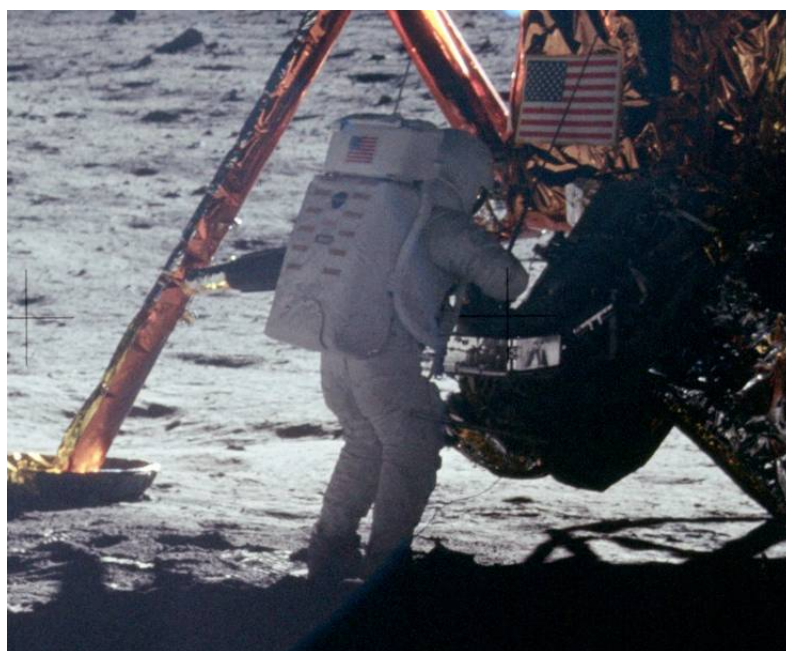
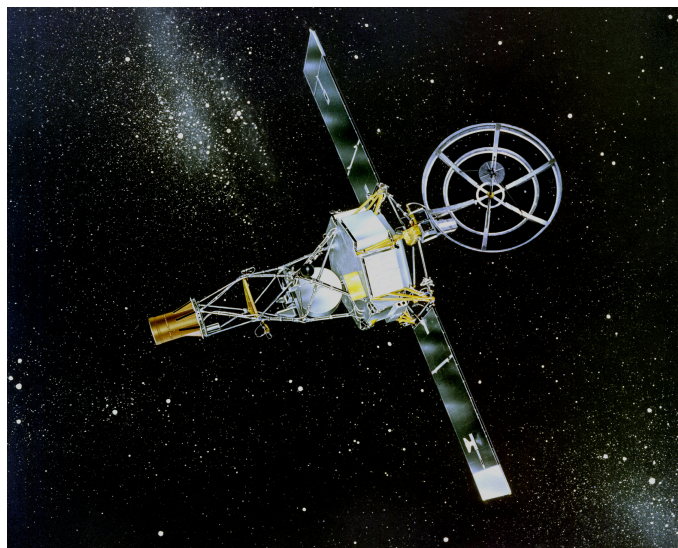


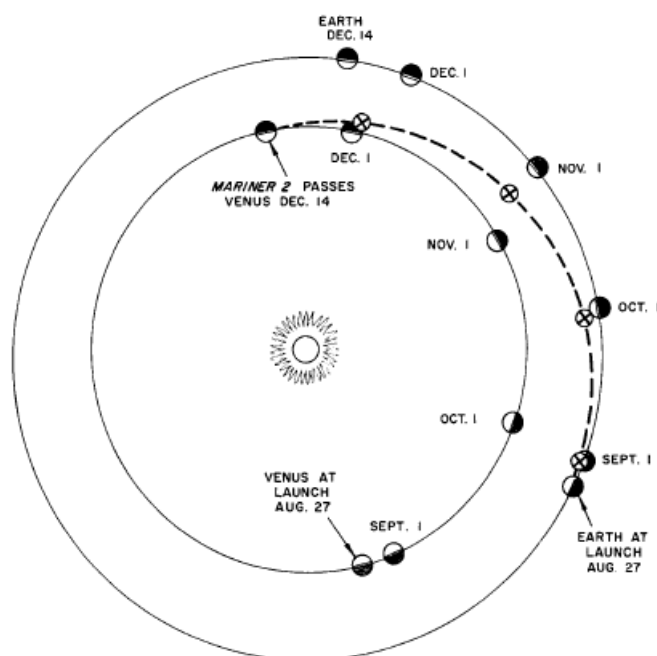
Figura 1.2: Neil Armstrong vicino al modulo di atterraggio Eagle sulla superficie della Luna.

splorazione spaziale ha coinvolto anche gli altri pianeti del sistema solare verso cui sono state inviate sonde robotizzate in grado di raccogliere dati scientifici di varia natura. Il 14 dicembre 1962 la sonda Mariner 2, rappresentata in figura

1.3(a), fu la prima ad effettuare un sorvolo ravvicinato con un pianeta, passando a 34.773 chilometri dalla superficie di Venere. La figura 1.3(b) mostra la traiettoria seguita dal veicolo per raggiungere il pianeta.



(a) Mariner 2.



(b) Traiettoria della sonda Mariner 2.

Figura 1.3: Sonda interplanetaria Mariner 2 (a). Traiettoria eliocentrica della sonda Mariner 2 (b).

Negli anni a seguire sono state condotte diverse missioni spaziali verso altri pianeti. La maggior parte delle missioni riguardarono l'esplorazione di Venere con le missioni Venera, Pioneer Venus, Vega e la Sonda Magellano, e lo studio del pianeta Marte condotto dalle missioni Mariner, Mars, Viking1 e 2, Mars Pathfinder (che portò il primo rover sulla superficie marziana), fino alle più recenti Mars Exploration Rover (che comprendevano i due rover Spirit e Opportunity), Mars Science Laboratory (con il rover Curiosity), Mars Orbiter Mission e MAVEN.

Il raggiungimento dei pianeti esterni e di Mercurio ha invece costituito un'impresa più ardua da compiere a causa dei limiti imposti dalle tecnologie attuali. Con i sistemi propulsivi chimici odierni la massa di propellente necessaria al completamento di una data missione verso uno di questi pianeti costituisce una grande porzione della massa totale iniziale del veicolo, quindi per trasportare veicoli spaziali di elevata massa sarebbe necessario l'uso di enormi quantità di propellente. Lanciare veicoli con una massa così elevata richiederebbe l'uso di lanciatori molto potenti o potrebbe non essere possibile usando i lanciatori disponibili oggi. Infatti riducendo la quantità di propellente necessaria si otterrebbe un veicolo spaziale più leggero con la possibilità di usare lanciatori meno costosi oppure di immettere il veicolo in un'orbita con una velocità di eccesso iperbolico più elevata, altrimenti si potrebbe lanciare un payload con una massa maggiore.

Possibili soluzioni a questo problema sono l'uso di propulsori elettrici (che sono caratterizzati da impulsi specifici maggiori rispetto ai propulsori chimici permettendo di ridurre la quantità di propellente necessaria per una missione spaziale) oppure l'utilizzo di manovre orbitali note come *Fionde Gravitazionali*, chiamate anche *Gravity Assists Manoeuvres* o *fly-by*.

La manovra di Fionda Gravitazionale fu una scoperta del tutto inaspettata, nata dal lavoro del matematico statunitense Michael Minovitch durante i suoi studi al Jet Propulsion Laboratory sul *problema ristretto dei tre corpi* agli inizi degli anni Sessanta [1]. In quegli anni si credeva che la traiettoria ottima per raggiungere gli altri corpi celesti fosse la traiettoria di Hohmann, tuttavia l'elevata energia richiesta per un trasferimento verso la maggior parte dei pianeti del Sistema Solare con una manovra di Hohmann rendeva impossibile il loro raggiungimento utilizzando propulsori chimici. Nel 1961 Minovitch introdusse il *metodo delle coniche raccordate*: egli suddivise lo studio della determinazione della traiettoria Terra-Marte-Terra in tre *problemi dei due corpi*, cioè quando il veicolo si trovava all'interno di una certa regione dello spazio intorno a un dato pianeta, detta *sfera d'influenza*, esso si considerava soggetto solo all'azione gravitazionale del pianeta, mentre all'esterno di tale regione si ipotizzava che il veicolo fosse soggetto solo alla forza di attrazione del Sole. Minovitch scoprì che l'energia orbitale di un veicolo rispetto al Sole varia in seguito al sorvolo ravvicinato di un pianeta

di una quantità pari a

$$\Delta E = \mathbf{V}_p \cdot (\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1)$$

dove \mathbf{V}_p , \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 rappresentano rispettivamente la velocità del pianeta, la velocità del veicolo in ingresso alla sfera d'influenza e la velocità del veicolo in uscita dalla sfera d'influenza rispetto a un sistema di riferimento eliocentrico. Pertanto il campo gravitazionale di un pianeta poteva essere sfruttato per variare la velocità eliocentrica di un veicolo spaziale, e quindi la sua orbita, senza consumare propellente, permettendo di raggiungere in questo modo quei pianeti che si riteneva non potessero essere direttamente esplorati.

La prima sonda ad utilizzare una fionda gravitazionale fu la Mariner 10. Lanciata il 3 Novembre 1973, effettuò un fly-by di Venere nel febbraio 1974 per poi sfruttare 2 fionde gravitazionali con Mercurio e infine immettersi in un'orbita attorno a Mercurio stesso il 16 Marzo 1975. In figura 1.4 è mostrata la traiettoria della sonda Mariner 10 fino al primo fly-by con Mercurio avvenuto il 29 marzo 1974.

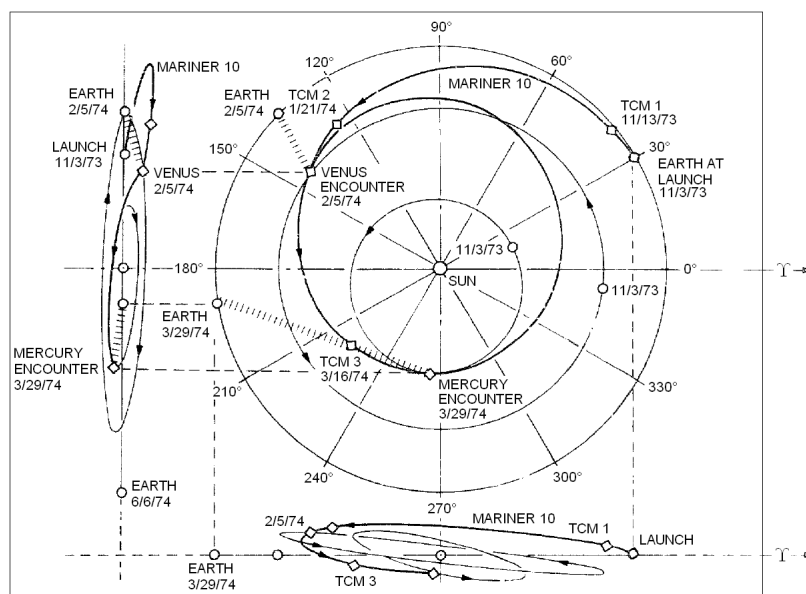
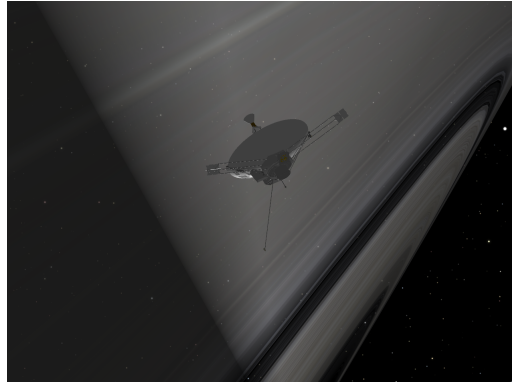


Figura 1.4: Traiettoria della sonda Mariner10: dal lancio, avvenuto il 3 Novembre 1973, al primo fly-by di Mercurio il 29 Marzo 1974.

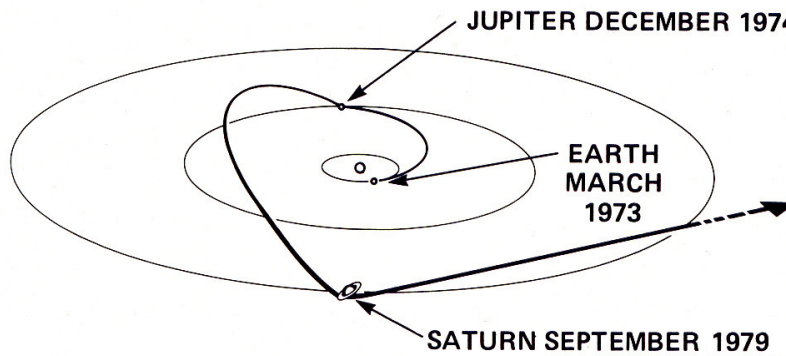
Molte altre missioni hanno sfruttato le manovre di fionda gravitazionale.

Pioneer 11 [2] è stata una sonda della NASA lanciata nel 1973 con lo scopo di studiare la fascia di asteroidi, i pianeti Giove e Saturno, il vento solare e i raggi cosmici. La sonda fu immessa direttamente su un'orbita verso Giove raggiungendo la distanza minima dal pianeta il 2 Dicembre 1974. La forza gravitazionale di

Giove fu utilizzata per variare l'orbita del veicolo e dirigerlo verso Saturno, come rappresentato in figura 1.5(b).



(a) Pioneer 11.

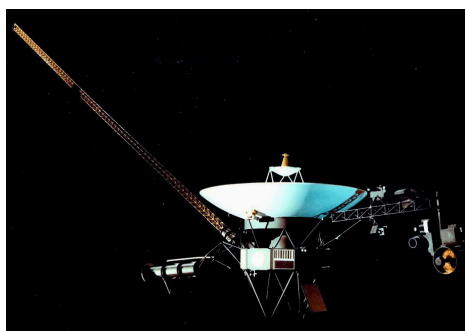


(b) Pioneer 11: traiettoria.

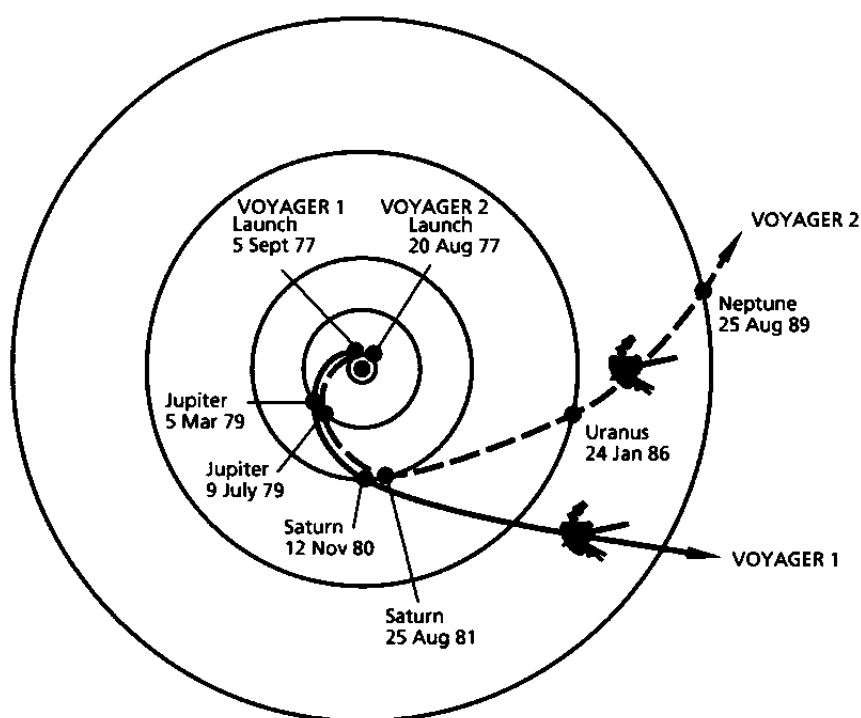
Figura 1.5: Pioneer 11 e gli anelli di Saturno (rappresentazione artistica) (a). Traiettoria della sonda Pioneer 11 (b).

Le missioni Voyager comprendevano il lancio di due sonde (la Voyager 1 e la Voyager 2) per studiare i pianeti del sistema solare esterno e qualcuna delle loro lune. Voyager 2 [3] è attualmente l'unico veicolo ad aver sorvolato Urano e Nettuno mentre Voyager 1 [4] è la prima sonda ad aver raggiunto lo spazio interstellare e ad aver raggiunto la più grande distanza dalla Terra fino ad oggi. Le traiettorie e i fly-by eseguiti dalle due sonde sono riportate in figura 1.6(b).

Ulysses [5] è stata una missione che ha visto la collaborazione di NASA ed ESA. Il principale scopo di questa missione era lo studio dei poli del Sole: per far ciò era necessario che l'orbita del veicolo subisse una variazione di inclinazione rispetto al piano dell'eclittica. Lanciata nell'ottobre 1990, Ulysses effettuò una



(a) Voyager.



(b) Traiettorie delle sonde Voyager 1 e 2.

Figura 1.6: Sonda Voyager (a). Traiettorie delle sonde Voyager 1 e Voyager 2 (b).

manovra di fionda gravitazionale con Giove nel 1992 che permise una variazione di inclinazione del piano orbitale di circa 80° , mostrata in figura 1.7, permettendo per la prima volta di osservare i poli solari.

La sonda Galileo [6], la cui missione era lo studio del sistema gioviano, utilizzò, per raggiungere la sua destinazione, un fly-by di Venere e due della Terra. Giunse su Giove il 7 dicembre 1995 dopo 6 anni dal lancio. La sonda effettuò anche fly-by di Europa ed Io.

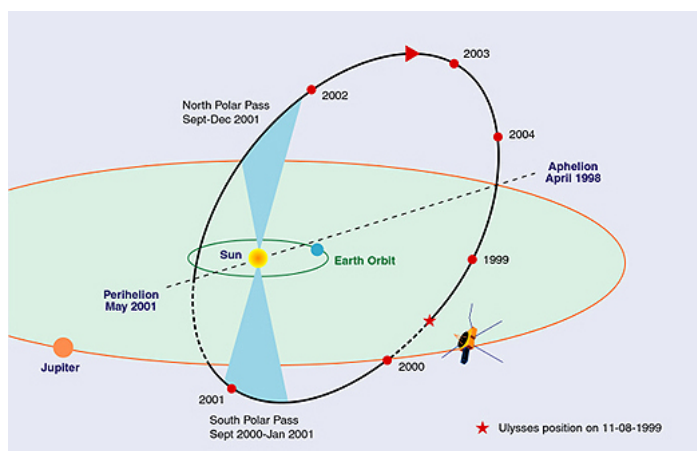


Figura 1.7: Traiettoria della missione Ulysses.

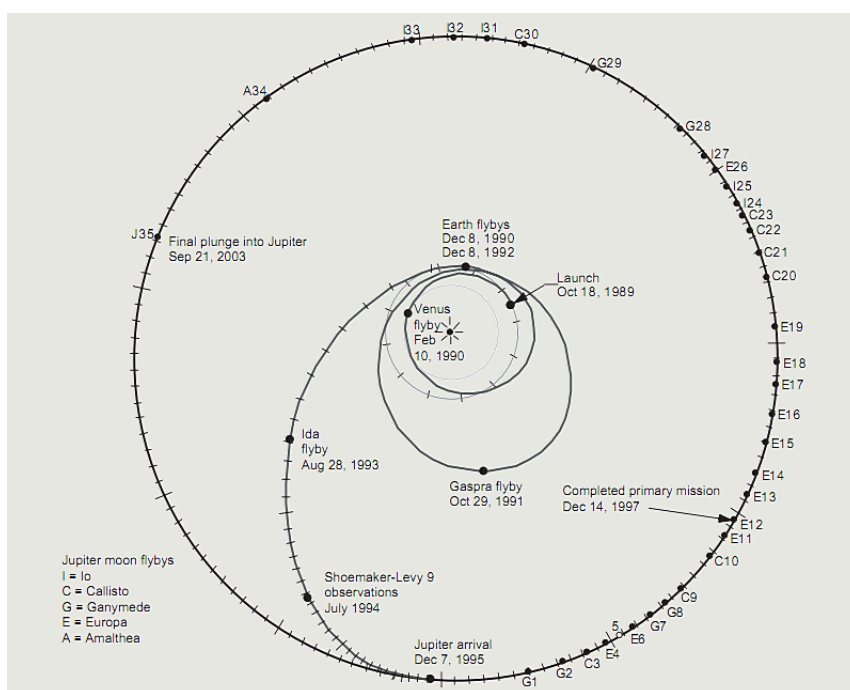


Figura 1.8: Traiettoria della sonda Galileo e principali eventi della missione.

Cassini-Huygens [7] fu invece una missione condotta da NASA, ESA e ASI che prevedeva lo studio di Saturno, dei suoi anelli e dei suoi satelliti. Questo veicolo era composto da un orbiter (Cassini) e da un lander (Huygens) che atterrò sul suolo di Titano. La traiettoria interplanetaria della sonda Cassini prevedeva due fly-by di Venere, uno della Terra e infine un fly-by di Giove per poi essere inserita in un'orbita attorno a Saturno nel luglio 2004. La sonda effettuò inoltre molteplici

sorvoli sulle principali lune del pianeta (Titano, Encelado, Teti, Iperione, Dione, Rea, Giapeto).

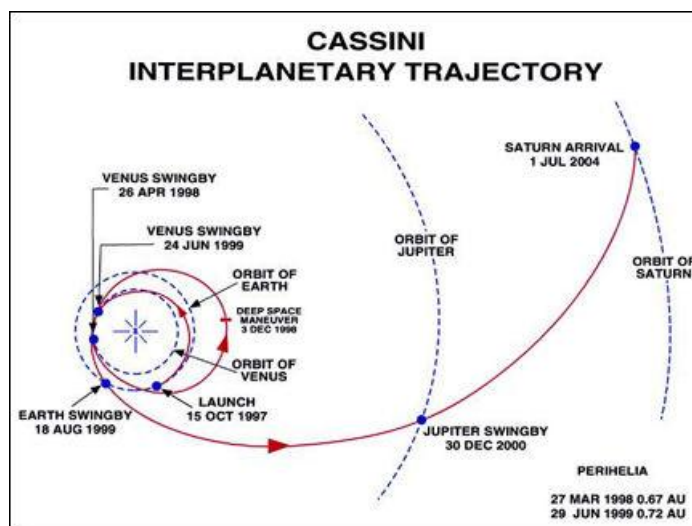


Figura 1.9: Traiettoria del veicolo spaziale Cassini-Huygens.

Nell'Agosto del 2004, dopo 35 anni dalla missione Mariner 10, una nuova sonda, la Messenger [8], fu inviata su Mercurio per studiarne la superficie e il campo magnetico. La traiettoria del veicolo è riportata in figura 1.10 e prevedeva un fly-by della Terra, due di Venere e tre di Mercurio prima dell'inserimento in orbita il 28 marzo 2011.

Anche nelle missioni interplanetarie più recenti le manovre di fionda gravitazionale sono state utilizzate per ridurre il costo della missione.

Nel Gennaio 2006 è stata lanciata la sonda spaziale New Horizons [9]: la sua missione prevede lo studio di Plutone, del suo satellite Caronte e della fascia di Kuiper. New Horizons è stata inserita in un'orbita diretta verso Giove. In seguito ha effettuato un fly-by di Giove e poi un fly-by di Plutone.

L'obiettivo della missione ESA Rosetta [10] è quello di studiare la cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, rilasciando sulla sua superficie un lander, Philae. La complessa traiettoria utilizzata per raggiungere la cometa e tutta la serie di fly-by effettuati sono rappresentate in figura 1.11.

L'interesse per le missioni interplanetarie è ancora evidente se si considerano le numerose missioni appena avviate e quelle previste per i prossimi anni: la missione BepiColombo per l'esplorazione di Mercurio, la sonda russa Venera-D per lo studio di Venere, ESA Aurora Exploration Programme per l'esplorazione dei corpi del Sistema Solare (tra cui la missione ExoMars lanciata il 14 Marzo 2016),

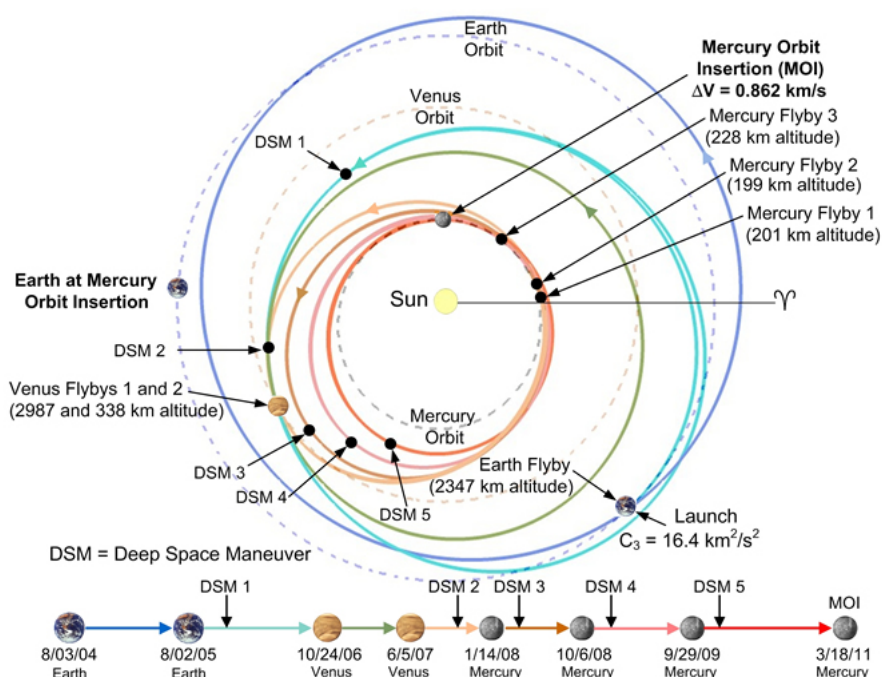


Figura 1.10: Traiettoria della sonda Messenger.

la missione NASA Juno (la cui traiettoria è raffigurata in figura 1.12) che è attualmente diretta verso Giove (l'arrivo è previsto per il 4 luglio 2016), la missione JUICE per lo studio delle lune ghiacciate di Giove (Ganimede, Europa e Callisto) e la Titan Saturn System Mission che avrebbe come fine lo studio di Saturno e delle sue lune Titano ed Encelado.

1.1 Il Problema di Ottimizzazione di Traiettorie Interplanetarie

Come spiegato in precedenza, la riduzione della quantità di propellente necessario per il completamento di una missione spaziale consentirebbe il lancio di un carico utile di massa superiore o l'uso di un lanciatore più piccolo e meno costoso. La quantità di propellente consumata per eseguire le varie manovre durante una missione è legata alla variazione totale di velocità del veicolo spaziale.

La ricerca di una traiettoria di trasferimento interplanetaria che permetta la riduzione del propellente necessario comporta quindi dei notevoli benefici.

Esistono diversi metodi per determinare la traiettoria ottima. Questi sono divisi in due gruppi, come spiegato da Conway [11]: *Metodi Indiretti*, che uti-

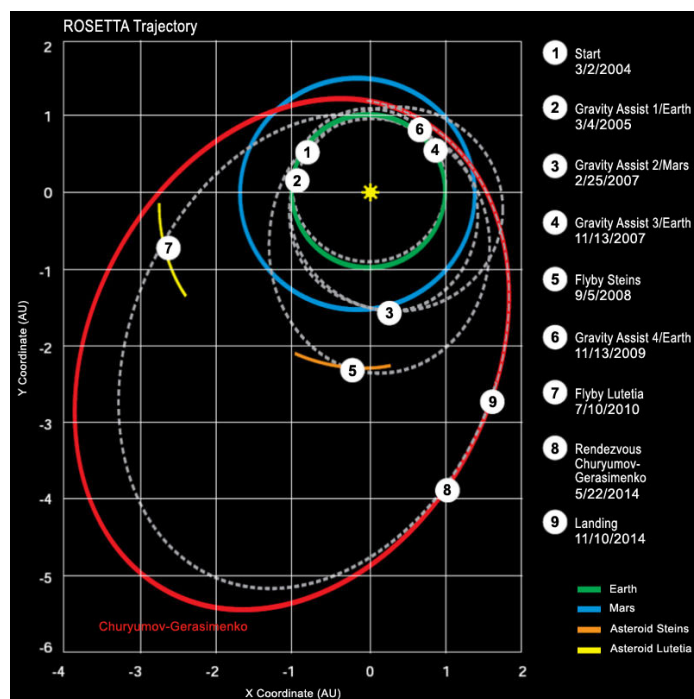


Figura 1.11: Traiettoria della sonda Rosetta.

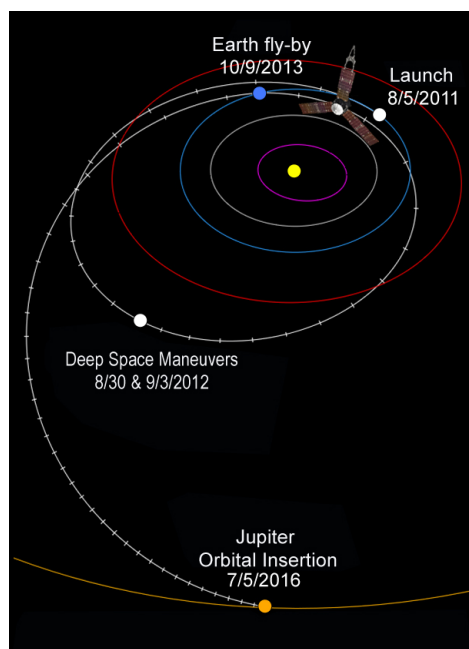


Figura 1.12: Traiettoria interplanetaria della sonda Juno.

lizzano le condizioni analitiche necessarie dal calcolo delle variazioni, e *Metodi Diretti*, che convertono un problema di ottimizzazione continuo in un problema di ottimizzazione parametrico e non necessitano del calcolo delle derivate.

In questo lavoro saranno utilizzati metodi diretti e in particolare la soluzione ottimale sarà determinata utilizzando *algoritmi evolutivi*: esistono diversi tipi di algoritmi evolutivi, il più utilizzato è l'*Algoritmo Genetico* (GA). L'algoritmo genetico è un *Metodo di Ottimizzazione Globale* che basa il suo funzionamento sulla teoria dell'evoluzione di Darwin e che utilizza tecniche ispirate all'evoluzione naturale quali la selezione, la mutazione e il crossover. Molti studi si sono concentrati sull'ottimizzazione di traiettorie interplanetarie utilizzando algoritmi evolutivi.

Kim and Spencer [12] hanno usato l'algoritmo genetico per la determinazione della traiettoria ottima per effettuare una manovra di rendez-vous in cui un veicolo intercettore, la cui orbita iniziale è nota, deve effettuare un trasferimento al fine di raggiungere un veicolo bersaglio in modo tale che alla fine della manovra i due veicoli abbiano velocità relativa nulla. In questo studio sono stati considerati solo trasferimenti tra orbite complanari e circolari e i risultati sono stati comparati alle soluzioni analitiche del *trasferimento di Hohmann* e del *trasferimento biellittico*.

Abdelkhalik e Mortari [13] hanno sviluppato una nuova formulazione rispetto a quella utilizzata da Kim e Spencer che può essere utilizzata anche per orbite non complanari. In questa formulazione può essere utilizzato un numero generico di manovre.

Bessette e Spencer [14] hanno provato a determinare una traiettoria dalla Terra a Giove il cui Δv totale fosse inferiore rispetto a quello di un trasferimento di Hohmann, introducendo l'uso di un singolo fly-by con Venere o con la Terra. Perciò l'intero trasferimento è stato diviso in 2 traiettorie con 3 manovre impulsive. Nella determinazione delle traiettorie ottimali si è tenuto in considerazione anche il tempo di volo (quindi potrebbe essere considerato un problema di ottimizzazione multi-obiettivo). Gli algoritmi utilizzati per risolvere il problema sono stati *Differential Evolution* (DE) e *Particle Swarm Optimization* (PSO).

Aaron D. Olds, Craig A. Kluever e Michael L. Cupples [15] hanno testato la capacità dell'algoritmo Differential Evolution nel determinare soluzioni ottimali applicandolo a missioni di trasferimento interplanetario molto complesse (Galileo e Cassini) e hanno studiato l'effetto sulla soluzione della variazione dei parametri che caratterizzano questo algoritmo.

Sentinella e Casalino [16] hanno utilizzato un algoritmo ibrido che esegue tre diversi metodi di ottimizzazione in parallelo: Algoritmo Genetico, Differential Evolution e Particle Swarm Optimization. Questo metodo è stato testato sulla

missione Cassini fissando la sequenza di pianeti utilizzati per effettuare le fionde gravitazionali (Venere-Venere-Terra-Giove), considerando la possibilità di eseguire una manovra impulsiva (detta *deep space manoeuvre*, DSM) in ogni *leg*, che è il tratto della traiettoria compreso tra due pianeti successivi.

Gli Algoritmi Evolutivi, a causa della loro natura stocastica, non garantiscono che la soluzione trovata possa essere determinata anche nelle successive esecuzioni dell'algoritmo e non vi è garanzia riguardo l'ottimalità del risultato trovato: questi algoritmi non utilizzano condizioni necessarie per l'ottimalità come avviene nei metodi deterministici basati sul calcolo delle variazioni [11], quindi non è possibile sapere se la soluzione trovata sia effettivamente un minimo globale o un minimo locale. M. Vasile, E. Minisci e M. Locatelli [17] hanno testato diversi algoritmi di ottimizzazione globale (GA, PSO, DE, MultiStart e Monotonic Basin Hopping) al fine di determinare il set delle soluzioni ϵ -ottimali, cioè l'insieme delle soluzioni nel dominio della funzione a una distanza ϵ dal minimo globale noto. Sono stati presi in considerazione quattro problemi di prova: un trasferimento diretto dalla Terra verso l'asteroide Apophis, un trasferimento Terra-Marte con un unico fly-by di Venere e una missione Terra-Saturno (con la sequenza di pianeti fissata) con e senza manovre impulsive. Il *success rate* di ogni algoritmo è stato calcolato effettuando più prove su ogni problema.

Abdelkhalik e Gad [18,19] hanno sviluppato due diversi metodi (*Hidden Genes Genetic Algorithm* e *Dynamic-Size Multiple Populations Genetic Algorithm*) in grado di determinare autonomamente i pianeti con cui effettuare manovre di fionda gravitazionale e il numero di DSMs da eseguire su ogni *leg*. In questi metodi il GA è usato in combinazione con un algoritmo di ottimizzazione locale al fine di trovare il minimo locale più vicino alla soluzione determinata dal GA.

Un altro metodo utilizzato nel problema di ottimizzazione di traiettorie interplanetarie con manovre di fionde gravitazionali è la tecnica di *Space Pruning*. Ceriotti [20] e Izzo, Becerra, Myatt, Nasuto e Bishop [21] hanno usato questo metodo per ridurre il dominio su cui cercare la soluzione al fine di rimuovere quelle parti che non forniscono soluzioni fisicamente ammissibili. In questo modo lo spazio di ricerca è ridotto e la soluzione ottimale può essere trovata più facilmente.

I lavori presentati in precedenza riguardano l'ottimizzazione di trasferimenti interplanetari che utilizzano manovre impulsive. Tuttavia questi metodi sono stati utilizzati anche per risolvere problemi di ottimizzazione di traiettorie interplanetarie di veicoli spaziali che utilizzano sistemi propulsivi che forniscono una spinta continua. Englander, Conway e Williams [22] hanno studiato problemi di ottimizzazione di traiettorie a bassa spinta come le missioni Jupiter Icy Moons Orbiter e BepiColombo. Poiché il problema presenta sia variabili intere che reali,

gli autori hanno utilizzato un algoritmo costituito da due *loop*, uno interno all'altro: il *loop esterno* viene utilizzato per determinare la parte intera del vettore soluzione (per esempio la sequenza di pianeti), mentre il *loop interno* calcola il set ottimale di parametri reali (come la data di partenza, data di arrivo, le componenti e i tempi di applicazione delle manovre impulsive) per ogni sequenza di pianeti.

1.2 Come è strutturato questo Documento

Il resto del documento è strutturato come segue:

- il Capitolo 2 definisce gli obiettivi di questo studio;
- il Capitolo 3 descrive il modello utilizzato per calcolare la variazione totale di velocità ottenuta dal veicolo in una missione spaziale;
- il Capitolo 4 illustra gli algoritmi utilizzati per determinare la soluzione del problema di ottimizzazione;
- il Capitolo 5 mostra i risultati ottenuti applicando gli algoritmi di ottimizzazione ad alcune missioni di prova;
- il Capitolo 6 trae le conclusioni per il presente lavoro.

Capitolo 2

Formulazione del Problema e Obiettivi dello Studio

L'obiettivo di questa tesi consiste nel determinare traiettorie interplanetarie da un dato pianeta di partenza verso un pianeta obiettivo minimizzando il consumo di propellente richiesto per effettuare tutte le manovre necessarie per portare a termine la missione. La sonda può eseguire, durante il suo viaggio verso la sua destinazione, un certo numero di manovre di fionda gravitazionale e può anche utilizzare manovre impulsive sugli archi di traiettoria.

Si può dimostrare che il propellente richiesto dalla sonda per eseguire le manovre è correlato alla variazione di velocità ottenuta dal veicolo in seguito all'applicazione delle manovre stesse durante il corso del trasferimento.

Prendendo in considerazione un razzo di massa m , soggetto a forze esterne di risultante \mathbf{F} e indicando con \dot{m} la portata di massa di propellente espulso dal veicolo, l'equazione di continuità per il razzo può essere espressa mediante la relazione (2.1)

$$\frac{dm}{dt} = -\dot{m} \quad (2.1)$$

e, se indichiamo con \mathbf{v} il vettore velocità del razzo, l'equazione di bilancio della quantità di moto può essere scritta come

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{T} \quad (2.2)$$

dove \mathbf{T} è la spinta fornita dal sistema propulsivo che dipende dalla portata di massa del propellente e dalla velocità efficace di scarico \mathbf{c}

$$\mathbf{T} = -\dot{m}\mathbf{c} \quad (2.3)$$

Combinando le equazioni (2.1), (2.2) e (2.3), si ottiene la seguente relazione

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{\mathbf{c}}{m} \frac{dm}{dt}$$

che, integrata su un intervallo di tempo finito $\Delta t = t_f - t_0$, permette di ottenere la variazione di velocità $\Delta \mathbf{v}$ ottenuta dal veicolo

$$\Delta \mathbf{v} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\mathbf{F}}{m} dt + \int_{m_0}^{m_f} \frac{\mathbf{c}}{m} dm \quad (2.4)$$

dove m_0 è la massa iniziale del razzo mentre m_f è la massa al tempo t_f . Nel caso in cui la spinta sia fornita impulsivamente e le altre forze esterne agenti sul veicolo non siano impulsive, il primo termine al secondo membro tende a zero e, proiettando l'equazione 2.4 lungo la direzione del vettore velocità, viene ottenuta la seguente relazione

$$\Delta v = c \ln \frac{m_0}{m_f} \quad (2.5)$$

che è nota come *equazione di Tsiolkovsky*. Dall'equazione 2.5 è possibile derivare una relazione che lega la variazione di velocità Δv alla massa di propellente m_{prop} necessaria per una manovra

$$\frac{m_{prop}}{m_0} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{c}}$$

Perciò, la variazione di velocità Δv ottenuta in seguito all'applicazione di una manovra impulsiva fornisce un'indicazione del costo di quella manovra. Sommando tutte le variazioni di velocità delle manovre effettuate in un intero trasferimento, è possibile determinare il costo dell'intera missione spaziale.

Per determinare la traiettoria ottima in termini di minima variazione di velocità è necessario esprimere il Δv totale come una funzione f di alcuni parametri che definiscono univocamente la traiettoria del veicolo spaziale e poi trovare l'insieme ottimo di parametri che descrivono la traiettoria col minimo Δv . Indicando con \mathbf{x} il vettore contenente i parametri (che sono le variabili indipendenti della funzione) il problema di ottimizzazione può essere formulato come

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

Ogni variabile può assumere valori appartenenti a un certo intervallo, oppure può essere vincolata a rispettare certe equazioni o disegualianze. La soluzione viene

percio' cercata all'interno di una regione denominata *Spazio delle Soluzioni* o *Dominio della funzione*.

In figura 2.1 è riportato un esempio di una possibile traiettoria di trasferimento di un veicolo spaziale: quest'ultimo può sfruttare l'azione della forza di gravità dei pianeti del Sistema Solare per effettuare manovre di fionda gravitazionale. L'intera traiettoria è divisa in tratti, detti *leg*, che sono compresi tra un pianeta e il successivo. Su ogni leg il veicolo può eseguire un certo numero di rivoluzioni attorno al Sole prima di procedere alla manovra di fionda gravitazionale successiva e può anche effettuare manovre impulsive dette *Deep Space Manoeuvres* (DSM).

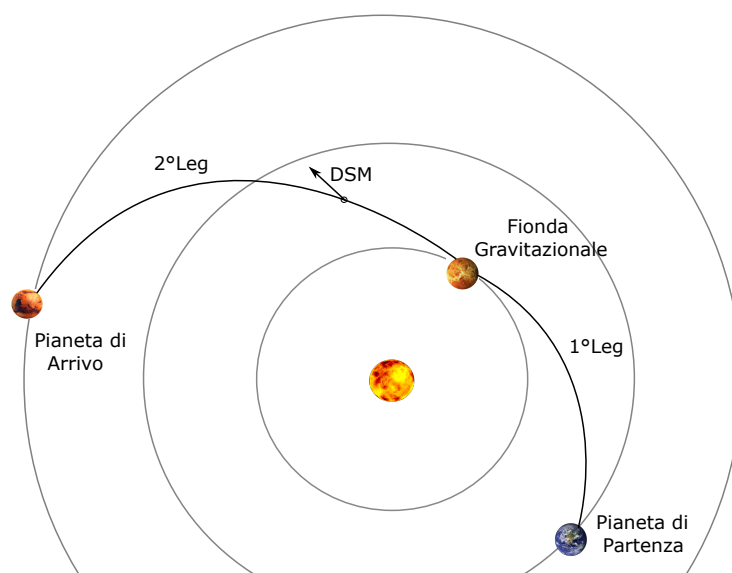


Figura 2.1: Rappresentazione di una traiettoria di trasferimento con manovre di fionda gravitazionale e DSMs.

La variazione di velocità totale Δv di una missione spaziale è in generale funzione delle seguenti variabili indipendenti

- la data di lancio;
- la data di arrivo sul pianeta di destinazione della missione;
- il tempo di volo su ogni leg della traiettoria (eccetto l'ultimo);
- le tre componenti che definiscono il vettore variazione di velocità dell'impulso di partenza (solo se ci sono altre manovre effettuate sul primo leg, in

caso contrario infatti l'impulso di partenza può essere determinato in seguito alla risoluzione di un problema di Lambert una volta note le posizioni del pianeta di partenza e del pianeta successivo e il tempo di volo sul primo arco di traiettoria, e pertanto la manovra iniziale diventa una variabile dipendente);

- le tre componenti del vettore variazione di velocità di ogni manovra impulsiva (eccetto l'ultima manovra di ogni leg che viene invece calcolata in seguito alla risoluzione di un problema di Lambert per la determinazione dell'ultimo tratto di orbita tra l'ultima DSM e il successivo pianeta);
- l'istante di applicazione di ogni DSM;
- la sequenza di pianeti utilizzati per effettuare le manovre di fionda gravitazionale;
- il piano su cui viene effettuata ogni manovra di fionda gravitazionale;
- la distanza minima raggiunta dal veicolo spaziale lungo l'orbita iperbolica durante una manovra di fionda gravitazionale;
- il numero di rivoluzioni complete attorno al Sole prima di giungere alla posizione finale in un problema di Lambert.

In base al problema analizzato non tutte le variabili precedentemente definite sono indipendenti: alcune potrebbero infatti essere definite a priori, inoltre, in base al numero di pianeti utilizzati per le manovre di fionda gravitazionale e in base al numero di manovre impulsive effettuate in ogni leg, il numero di variabili indipendenti del problema cambia.

Al fine di calcolare la variazione totale di velocità è necessario calcolare prima altre variabili dipendenti a partire dai parametri indipendenti del problema. Per questo motivo è stato sviluppato un modello per il calcolo del Δv totale di una missione basato sul lavoro di Gad e Abdelkhalik [19] che sarà mostrato nella sezione 3.2.

Il problema di ottimizzazione è stato risolto utilizzando il *Global Optimization Toolbox* di MATLAB: in particolare gli algoritmi di ottimizzazione utilizzati sono stati l'Algoritmo Genetico [23] e MultiStart [24]. Poichè il risultato ottenuto con l'Algoritmo Genetico potrebbe non essere né un minimo globale né un minimo locale, la soluzione del GA è utilizzata come punto di partenza per un algoritmo di ottimizzazione locale: *fmincon* [25] o *Pattern Search* [26].

Tali algoritmi sono stati utilizzati per risolvere alcuni problemi di ottimizzazione di trasferimenti interplanetari le cui soluzioni sono già note in letteratura per verificare la capacità di determinarne la soluzione.

Capitolo 3

Modello della Traiettoria

In questo capitolo viene descritto il modello utilizzato per ricavare la traiettoria interplanetaria di un veicolo spaziale durante il suo viaggio da un pianeta di partenza (solitamente la Terra) verso un pianeta di arrivo o altri corpi celesti.

Durante il trasferimento interplanetario il veicolo è soggetto all'azione dell'attrazione gravitazionale di molti corpi del sistema solare ed il suo moto potrebbe essere influenzato anche da altre forze di perturbazione. Tuttavia, un modello semplificato, detto *metodo delle coniche raccordate*, è sufficiente per ottenere una soluzione approssimata del problema di ottimizzazione per eseguire uno studio preliminare nelle prime fasi di una missione spaziale.

3.1 Legge di Gravitazione Universale: il Problema degli n-Corpi

Consideriamo un sistema di n corpi e assumiamo che essi possano essere considerati come masse puntiformi: se ipotizziamo che ogni corpo sia soggetto solamente all'attrazione gravitazionale esercitata dagli altri corpi (quindi trascuriamo tutti gli altri tipi di forze non gravitazionali), introducendo un sistema di riferimento inerziale, secondo la *Legge di Gravitazione Universale* di Newton il generico corpo j esercita una forza di attrazione sul corpo i , che agisce lungo la linea congiungente i due punti di massa, che è pari a

$$\mathbf{F}_{j \rightarrow i} = -G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ji}$$

dove m_i e m_j sono rispettivamente le masse del corpo i e del corpo j , \mathbf{r}_{ji} è il vettore che connette il corpo j al corpo i e $G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$ è la costante di gravitazione universale.

Allora la forza risultante agente su m_i dovuta alla forza di attrazione gravitazionale esercitata dagli altri $n - 1$ corpi è

$$\mathbf{F} = -Gm_i \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij} = m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \quad \text{con} \quad j \neq i$$

dove $\ddot{\mathbf{r}}_i$ è l'accelerazione della massa i .

3.1.1 Modello dei due corpi

Focalizzando l'attenzione sullo studio di un veicolo spaziale in orbita attorno ad un pianeta, indicando con m_1 la massa del pianeta e con m_2 la massa del veicolo, l'equazione del moto del veicolo rispetto al pianeta può essere ottenuta come spiegato in [27]

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = -G \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} - \sum_{j=3}^n Gm_j \left(\frac{\mathbf{r}_{j2}}{r_{j2}^3} - \frac{\mathbf{r}_{j1}}{r_{j1}^3} \right) \quad (3.1)$$

dove il primo termine a secondo membro rappresenta la forza applicata dal pianeta sul veicolo mentre il secondo termine rappresenta l'attrazione gravitazionale esercitata dagli altri $n - 2$ corpi.

Per un veicolo spaziale che orbita in un'orbita bassa attorno alla Terra, l'attrazione gravitazionale terrestre è molto più intensa rispetto a quella esercitata dal Sole e dagli altri pianeti. Dunque, quando si studia il moto di un satellite attorno ad un pianeta, è una buona approssimazione utilizzare il cosiddetto *modello dei due corpi*, cioè si suppone che il veicolo sia soggetto solo alla forza di gravità del pianeta mentre le altre forze gravitazionali possono essere trascurate. In questo caso il moto della sonda è detto *kepleriano* e l'equazione del moto relativo può essere scritta come

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

dove $\ddot{\mathbf{r}}$ e \mathbf{r} sono il vettore accelerazione e posizione del veicolo spaziale rispetto al baricentro del pianeta e $\mu = Gm_1$ è chiamato *parametro gravitazionale*. Nella tabella 3.1 sono mostrati i parametri gravitazionali del Sole e dei vari pianeti del Sistema Solare.

La soluzione dell'equazione precedente rappresenta l'equazione della traiettoria, che in forma polare può essere scritta come

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}$$

dove a è il semiasse maggiore dell'orbita, e è l'eccentricità orbitale e ν è l'anomalia

Corpo Celeste	μ [km ³ /s ²]
Sole	132,712,439,935
Mercurio	22,032
Venere	324,858
Terra	398,600
Marte	42,828
Giove	126,711,995
Saturno	37,939,519
Urano	5,780,158
Nettuno	6,871,307
Plutone	830

Tabella 3.1: Parametri gravitazionali del Sole e dei pianeti del Sistema Solare.

vera. La formula precedente corrisponde all'equazione di una conica con uno dei due fuochi coincidente con il baricentro del pianeta.

3.1.2 La Sfera d'Influenza

Nel caso si prendano in considerazione tre corpi ($n = 3$), per esempio un veicolo di massa m_s esposto alla forza gravitazionale di altri due corpi di massa m_1 e m_2 , con

$$m_s \ll m_1, m_2$$

dall'equazione 3.1 possono essere ottenute le seguenti relazioni

$$\ddot{\mathbf{r}}_{1s} + G \frac{m_1 + m_s}{r_{1s}^3} \mathbf{r}_{1s} = Gm_2 \left(\frac{\mathbf{r}_{2s} - \mathbf{r}_{1s}}{r_{12}^3} - \frac{\mathbf{r}_{2s}}{r_{2s}^3} \right) \quad (3.2)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{2s} + G \frac{m_2 + m_s}{r_{2s}^3} \mathbf{r}_{2s} = Gm_1 \left(\frac{\mathbf{r}_{1s} - \mathbf{r}_{2s}}{r_{12}^3} - \frac{\mathbf{r}_{1s}}{r_{1s}^3} \right) \quad (3.3)$$

dove $\ddot{\mathbf{r}}_{1s}$ e $\ddot{\mathbf{r}}_{2s}$ sono le accelerazioni relative della sonda rispetto ai due corpi di massa m_1 e m_2 , mentre gli altri vettori sono quelli rappresentati in figura 3.1. Queste equazioni descrivono il moto relativo della navicella rispetto ai due corpi. I termini a secondo membro rappresentano l'accelerazione di disturbo dovuta alla presenza del terzo corpo.

Per semplificare il problema di determinazione della traiettoria della sonda, viene introdotto il concetto di *sfera d'influenza* (SOI). La sfera d'influenza delimita la regione dello spazio in cui la forza di attrazione di uno dei due corpi sul veicolo spaziale è trascurabile rispetto all'altra, quindi all'interno di questa regione il moto del veicolo può essere considerato kepleriano. Se il corpo di massa m_1 è l'attrattore principale e l'altro corpo di massa m_2 è considerato il pianeta di disturbo, il bordo della sfera d'influenza del primo corpo può essere calcolato

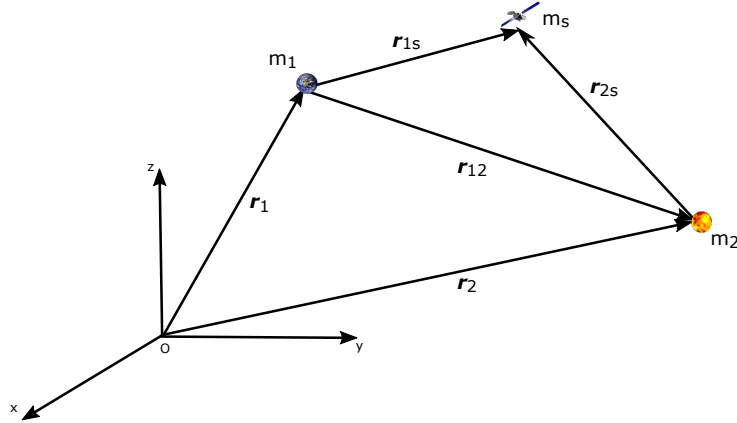


Figura 3.1: Un veicolo spaziale soggetto alla forza gravitazionale di altri due corpi.

usando la seguente espressione

$$\frac{a_{1d}}{a_{1s}} = \frac{a_{2d}}{a_{2s}}$$

dove

$$\begin{aligned} a_{1s} &= -G \frac{m_1 + m_s}{r_{1s}^3} \mathbf{r}_{1s} \\ a_{2s} &= -G \frac{m_2 + m_s}{r_{2s}^3} \mathbf{r}_{2s} \\ a_{1d} &= Gm_2 \left(\frac{\mathbf{r}_{2s} - \mathbf{r}_{1s}}{r_{12}^3} - \frac{\mathbf{r}_{2s}}{r_{2s}^3} \right) \\ a_{2d} &= Gm_1 \left(\frac{\mathbf{r}_{1s} - \mathbf{r}_{2s}}{r_{12}^3} - \frac{\mathbf{r}_{1s}}{r_{1s}^3} \right) \end{aligned}$$

cioè il raggio di questa regione è tale che il rapporto tra i moduli dell'accelerazione di disturbo e la corrispondente accelerazione di attrazione primaria è uguale nelle due equazioni (3.2) e (3.3).

Ipotizzando che il veicolo sia sufficientemente vicino alla massa m_1 e indicando con m_s la massa del veicolo spaziale, che si suppone essere molto minore della massa degli altri due corpi (che per esempio potrebbero essere il Sole o un qualsiasi pianeta del Sistema Solare), il valore del raggio della sfera d'influenza può essere calcolato approssimativamente con la seguente formula

$$r_{1s} \cong r_{12} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{\frac{2}{5}}$$

assumendo che sia $m_1 < m_2$.

I raggi della sfera d'influenza dei pianeti del Sistema Solare sono riportati in tabella 3.2: in questo caso m_1 è la massa del pianeta mentre m_2 è la massa del Sole. Osservando i dati riportati in tabella è possibile notare che la distanza media

Pianeta	Raggio del Pianeta [km]	Distanza dal Sole [A.U.]	Raggio SOI [km]
Mercurio	2,439.7	0.387099	112,500
Venere	6,051.8	0.723322	616,400
Terra	6,378.1	1.000000	924,600
Marte	3,397	1.523691	577,400
Giove	71,492	5.202803	48,223,000
Saturno	60,268	9.538843	54,432,000
Urano	25,559	19.181951	51,792,000
Nettuno	24,764	30.057779	86,668,000
Plutone	1,195	39.481687	3,130,000

Tabella 3.2: Raggio, distanza media dal Sole e raggio della sfera d'influenza dei pianeti del Sistema Solare.

dei pianeti dal Sole è molto maggiore del raggio della sfera d'influenza. Quindi, quando consideriamo la fase eliocentrica di un trasferimento interplanetario, è una buona approssimazione considerare la SOI di un pianeta come un punto concentrato nel baricentro del pianeta stesso. Invece il raggio medio dei pianeti è molto minore del raggio della SOI quindi, durante un fly-by di un pianeta, si può ipotizzare che l'ingresso nella sfera d'influenza avvenga a una distanza infinita dal baricentro del pianeta.

3.2 Modello della Traiettoria di Trasferimento

Al fine di determinare la traiettoria preliminare ottima per una data missione da un pianeta di partenza a un pianeta di arrivo, obiettivo della missione spaziale, è necessario calcolare la variazione totale di velocità Δv_{tot} associata ad un certo insieme di variabili indipendenti che definiscono univocamente la traiettoria di trasferimento della sonda spaziale.

Per calcolare il Δv_{tot} , prima è necessario ricavare altre grandezze partendo dalle variabili di disegno. Queste quantità dipendono dal particolare problema studiato e dal modo in cui è modellato il problema.

Di seguito viene introdotto un semplice modello: lo studio dell'intera traiettoria è diviso in una serie di *problemi dei due corpi*. Se il veicolo spaziale si trova all'interno della sfera di influenza di un certo pianeta, allora si ipotizza che sia soggetto solo all'attrazione gravitazionale di quel corpo celeste, mentre durante la fase interplanetaria il veicolo è soggetto soltanto alla forza di attrazione del

Sole. Come spiegato precedentemente, quando si analizza un problema dei due corpi si trova che la traiettoria del veicolo è una conica, quindi tutta la traiettoria di trasferimento può essere pensata come composta da archi di conica. Questo procedimento è chiamato *metodo delle coniche raccordate*.

Durante il suo viaggio verso il pianeta di arrivo, il veicolo spaziale può eseguire un certo numero di manovre di *Fionda Gravitazionale*, sorvoli ravvicinati dei pianeti usati per variare la velocità del veicolo rispetto al Sole; ogni fionda gravitazionale è considerata una manovra istantanea, per cui la posizione della sonda non cambia durante la manovra.

Lungo la traiettoria di trasferimento da un pianeta al successivo, la sonda può anche eseguire una serie di *Deep Space Manoeuvres* (DSM) che sono manovre impulsive (quindi anch'esse sono considerate istantanee) eseguite per modificare i parametri orbitali della traiettoria della sonda.

In questo studio sono stati utilizzati due modelli di complessità crescente. Inizialmente è stato utilizzato un modello che non tiene in considerazione le effemeridi dei pianeti: in esso semplicemente si analizza il trasferimento tra un'orbita di partenza e un'orbita di arrivo. Il secondo modello fa uso delle effemeridi planetarie, quindi le posizioni dei pianeti sono considerate funzioni del tempo e si prende anche in considerazione la possibilità di effettuare variazioni del piano orbitale: quindi si tratta di un modello tridimensionale in cui le orbite dei pianeti sono considerate non complanari. Nelle sezioni seguenti questi due modelli verranno analizzati e descritti in dettaglio.

3.3 Modello senza Effemeridi Planetarie

In questo modello semplificato non viene considerata la variazione della posizione dei pianeti con il tempo, quindi in questo caso il problema di ottimizzazione consiste nella determinazione della traiettoria di trasferimento ottimale da un'orbita iniziale nota ad un'orbita finale di destinazione. Le orbite iniziale e finale sono fissate una volta assegnati i parametri orbitali: il semiasse maggiore a , l'eccentricità e , l'inclinazione dell'orbita i , l'ascensione retta del nodo ascendente Ω e l'argomento del pericentro ω . Le posizioni iniziale e finale del veicolo che si muove lungo l'orbita di trasferimento sono definiti attraverso l'anomalia vera iniziale e finale, ν_i e ν_f , sull'orbita iniziale e finale.

La sonda può effettuare manovre impulsive (DSMs) ma le manovre di fionda gravitazionale non vengono considerate in questo caso. Un esempio di trasferimento orbitale è mostrato in figura 3.2.

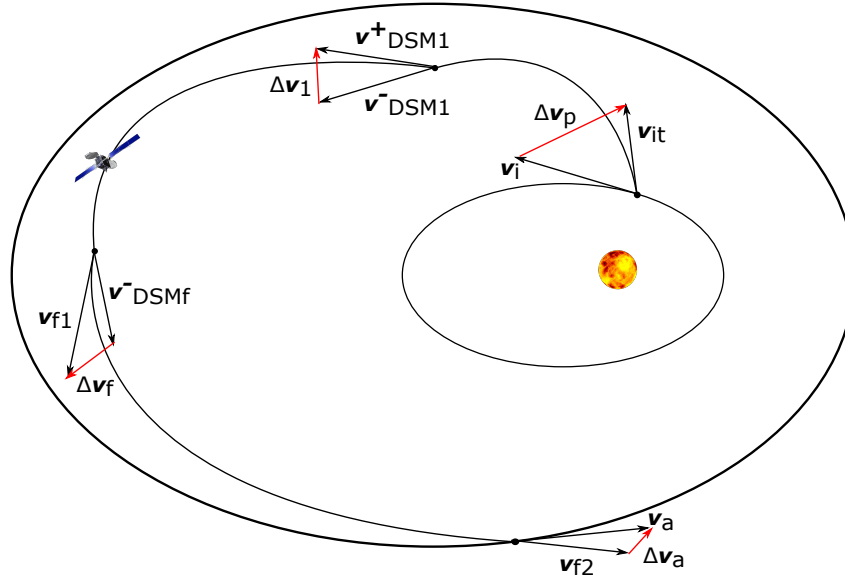


Figura 3.2: Rappresentazione di un trasferimento tra orbite complanari con manovre impulsive.

Ogni manovra impulsiva è definita mediante le sue tre componenti Δv_x , Δv_y and Δv_z e dall'istante di applicazione t_{DSM} che può essere espresso come

$$t_{\text{DSM}} = eT_f$$

dove T_f è il tempo totale di trasferimento, $e \in [0, 1]$ è la frazione del tempo di volo in cui viene applicata la manovra.

Per calcolare la variazione di velocità totale, deve essere utilizzata la seguente procedura: partendo dall'orbita iniziale di cui si conoscono i parametri orbitali, nota v_i , si possono determinare la posizione e la velocità iniziali del veicolo spaziale e applicando l'impulso di partenza Δv_p si può calcolare la velocità iniziale sul primo tratto dell'orbita di trasferimento: note dunque posizione e velocità, è possibile ricavare i parametri orbitali di questo primo tratto di orbita.

Nota la posizione iniziale del veicolo e il tempo di applicazione della successiva manovra impulsiva, è possibile determinare il vettore \mathbf{r}_{DSM} in cui la DSM viene eseguita risolvendo un *problema di Keplero*. La soluzione del problema di Keplero consente anche di determinare il vettore velocità $\mathbf{v}_{\text{DSM}}^-$ prima dell'applicazione della manovra impulsiva. Il vettore velocità all'inizio della seconda orbita di trasferimento può essere calcolato aggiungendo il vettore variazione di velocità $\Delta \mathbf{v}$, dovuto alla manovra impulsiva, a $\mathbf{v}_{\text{DSM}}^-$. Conoscendo la nuova posizione e

velocità iniziali, si calcolano i parametri orbitali della seconda orbita di trasferimento. Questa procedura si applica per tutte le DSM tranne l'ultima: infatti la variazione di velocità dovuta all'ultima manovra impulsiva, Δv_f , non è una variabile indipendente ma può essere determinata dopo la risoluzione di un *problema di Lambert*. Calcolata la posizione della sonda spaziale al momento dell'applicazione dell'ultima manovra impulsiva e assegnata la posizione finale e il tempo di trasferimento su quest'ultimo tratto della traiettoria, il problema di Lambert permette di determinare l'orbita che collega i due vettori posizione. Gli algoritmi utilizzati per risolvere il problema di Keplero e di Lambert sono riportati nella sezione successiva.

In seguito alla risoluzione del problema di Lambert possono essere calcolati i vettori velocità \mathbf{V}_{f1} e \mathbf{V}_{f2} all'inizio e al termine di quest'ultimo tratto di orbita di trasferimento e utilizzati per la determinazione del modulo dell'ultima manovra impulsiva Δv_f e della variazione di velocità Δv_a che permette di inserire il veicolo sull'orbita di arrivo

$$\Delta v_f = \|\mathbf{V}_{f1} - \mathbf{v}_{f\text{DSM}}^-\|$$

$$\Delta v_a = \|\mathbf{v}_a - \mathbf{V}_{f2}\|$$

dove $\mathbf{v}_{f\text{DSM}}^-$ è il vettore velocità prima dell'applicazione dell'ultima DSM e \mathbf{v}_a è la velocità finale della sonda sull'orbita di arrivo.

La variazione di velocità totale Δv_{tot} dell'intero trasferimento può essere infine calcolata come

$$\Delta v_{tot} = \Delta v_p + \sum_{j=1}^{n_{\text{DSM}}-1} \Delta v_j + \Delta v_f + \Delta v_a$$

dove n_{DSM} è il numero totale di manovre impulsive eseguite.

Questo modello può essere utilizzato non solo per studiare traiettorie interplanetarie ma anche per trasferimenti tra due orbite aventi qualsiasi corpo celeste come corpo di attrazione primario (ad esempio qualunque pianeta del Sistema Solare).

3.4 Modello Tridimensionale con Effemeridi Planetarie

Assegnata una certa missione da un pianeta di partenza ad un pianeta di destinazione, si stabiliscono degli intervalli temporali all'interno dei quali devono avvenire il lancio e l'arrivo sul pianeta obiettivo della missione. Gli istanti di tempo t_{0jd} e t_{ajd} in cui avvengono il lancio e l'arrivo sono espressi in termini di

Data Giuliana Modificata 2000 (mjd2000), cioè i valori indicati rappresentano i giorni trascorsi da una certa data di riferimento, 1 Gennaio 2000.

Poi, fissato il numero massimo l di manovre di fionda gravitazionale che il veicolo spaziale può effettuare, l'intera traiettoria viene divisa in $n = l + 1$ tratti. Ogni tratto della traiettoria che connette due pianeti successivi è chiamato *leg*.

La sequenza di pianeti con cui vengono effettuate le manovre di fionda gravitazionale è indicata dal vettore *SeqPlanet* dove ogni elemento indica uno dei pianeti del Sistema Solare e può assumere valori interi da 1 a 9. Il numero di manovre di fionda gravitazionale potrebbe però essere inferiore a l : in questi casi una o più componenti del vettore *SeqPlanet* potrebbe assumere il valore 10 che indica che quel fly-by non viene effettuato. La corrispondenza tra i pianeti e i valori inseriti nel vettore è riportata nella tabella 3.3.

Pianeta	<i>SeqPlanet</i> value
Mercurio	1
Venere	2
Terra	3
Marte	4
Giove	5
Saturno	6
Urano	7
Nettuno	8
Plutone	9
No Fly-By	10

Tabella 3.3: Corrispondenza tra i pianeti del Sistema Solare e i valori inseriti nel vettore *SeqPlanet*.

In ogni leg possono essere effettuate un numero massimo n_{DSM} di *Deep Space Manoeuvres*. Ognuna di queste manovre impulsive è definita dalle tre componenti del vettore $\Delta \mathbf{v}_{\text{DSM}_{ij}}$ e dall'istante di tempo, e quindi dalla posizione, in cui viene effettuata. Viene allora introdotta la matrice E la cui generica componente ij rappresenta la frazione del tempo di volo dell' i -esimo leg in cui viene applicata la j -esima manovra impulsiva di quel leg

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots \\ e_{21} & e_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

con

$$e_{ij} T_i = t_{\text{DSM}_{ij}} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, n_{\text{DSM}}$$

dove T_i rappresenta il tempo di volo dell' i -esimo leg, $t_{\text{DSM}_{ij}}$ il tempo di applicazione della manovra ij . Nel caso in cui una manovra non viene eseguita l'elemento

corrispondente nella matrice E è zero. Inoltre, per ogni elemento della matrice, deve essere rispettata la seguente condizione

$$e_{i,j} < e_{i,j+1} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \forall j = 1, \dots, n_{\text{DSM}} - 1$$

L'immagine 3.3 mostra un esempio di traiettoria di trasferimento interplanetario con manovre di fionda gravitazionale e manovre impulsive.

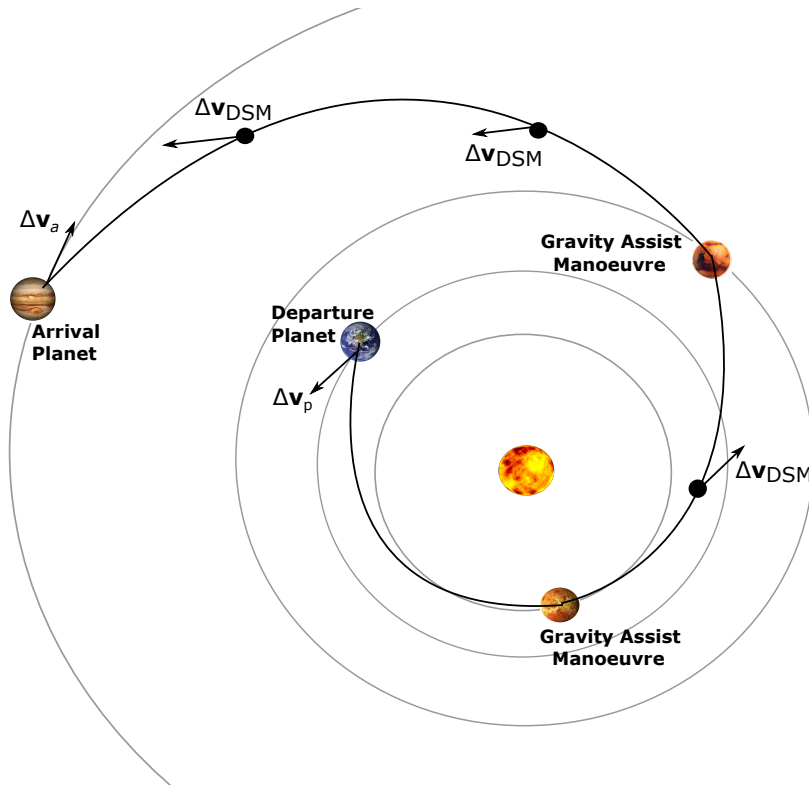


Figura 3.3: Trasferimento interplanetario con manovre di fionda gravitazionale e DSMs.

3.4.1 Effemeridi Planetarie

A partire dalle date di lancio e arrivo e dalle date in cui avvengono le manovre di fionda gravitazionale è possibile risalire alla posizione e alla velocità dei pianeti in quegli istanti di tempo usando le effemeridi astronomiche. Due diversi modelli di effemeridi sono stati messi a confronto in questo studio: le *Jet Propulsion Laboratory Development Ephemeris* (JPL DE) e un modello semplificato, le *effemeridi analitiche*.

Il modello JPL DE può essere usato tramite la *function* di MATLAB *planetEphemeris* [28]: essa permette di ottenere i vettori posizione e velocità di un corpo celeste rispetto a un altro corpo astronomico al variare del tempo (espresso in Data Giuliana). I corpi celesti e i punti di riferimento inclusi in questo modello sono il Sole, tutti i pianeti del Sistema Solare (incluso Plutone), il baricentro del Sistema Solare e il baricentro Terra-Luna. Inoltre è possibile specificare il particolare modello da usare: in questo lavoro è stato preso in considerazione il modello JPL DE421 [29]. Le effemeridi sono calcolate rispetto all'*International Celestial Reference Frame* [30].

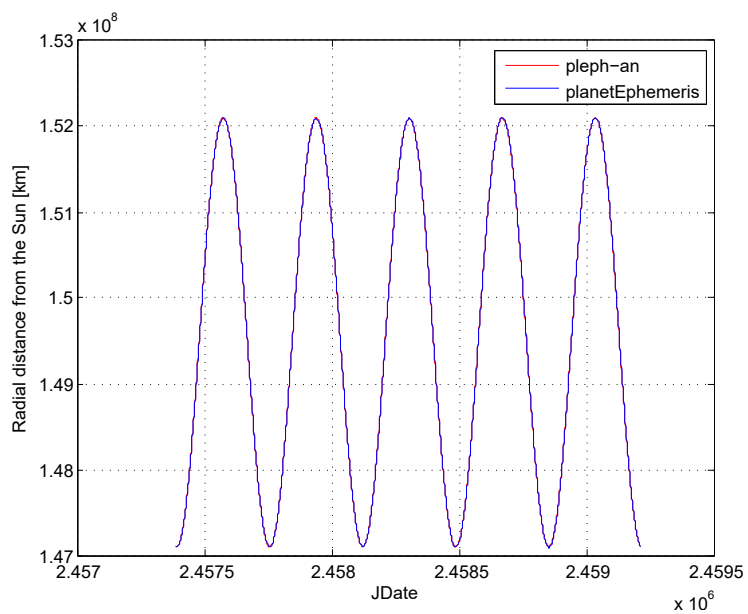
Le effemeridi analitiche richiedono invece tempi di calcolo inferiori rispetto alle effemeridi sviluppate dal JPL, tuttavia sono meno accurate, in particolar modo per i pianeti esterni. Le effemeridi analitiche utilizzate in questo studio sono parte del *ESA Advanced Concepts Team's Space Mechanics Toolbox* [31]. Questo modello permette di determinare i parametri orbitali di uno dei pianeti del Sistema Solare a una certa data, espressa in mjd2000; noti i parametri orbitali si determinano le tre componenti del vettore posizione e del vettore velocità del pianeta espresse rispetto al sistema di riferimento eclittico J2000: questo sistema di riferimento utilizza come piano fondamentale il piano dell'eclittica della Terra (l'epoca utilizzata è la J2000), l'asse x punta verso l'equinozio di primavera, l'asse z punta verso nord in direzione ortogonale al piano dell'eclittica e l'asse y è tale da completare il sistema di riferimento destrorso. In questo modello i vari parametri orbitali sono espressi mediante polinomi che approssimano i valori reali in un certo intervallo di tempo. Indicando, ad esempio, con e l'eccentricità dell'orbita, la variazione nel tempo di e può essere espressa come

$$e = e_0 + \dot{e}t + \ddot{e}t^2 + \dots$$

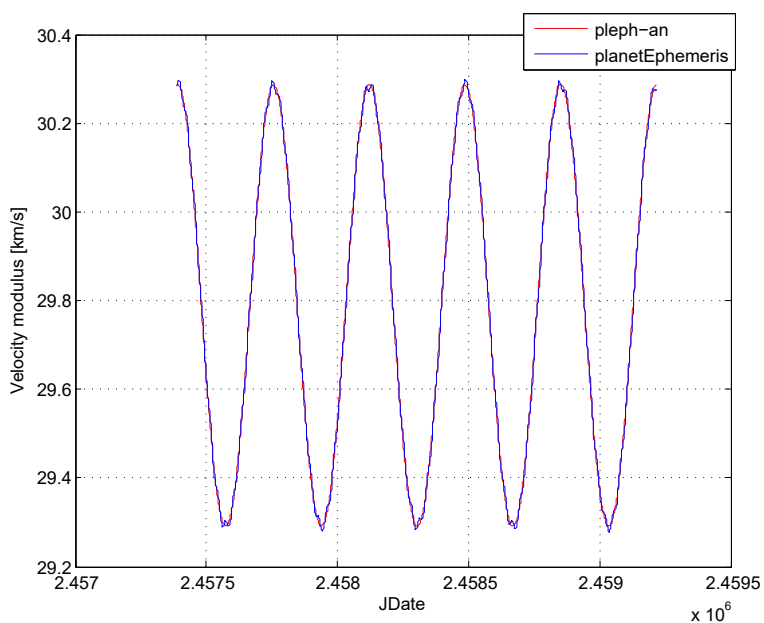
dove i valori di e_0 , \dot{e} and \ddot{e} possono essere trovati nella *function* di MATLAB *pleph-an* [31], mentre t è il tempo espresso in secoli dal 1900. La stessa equazione viene usata anche per esprimere la variazione nel tempo del semiasse maggiore a , dell'inclinazione i , dell'ascensione retta del nodo ascendente Ω , dell'argomento del pericentro ω e dell'anomalia media M che è poi convertita in anomalia eccentrica E risolvendo l'*equazione di Keplero*. Una volta noti i parametri orbitali del pianeta in un certo istante di tempo è poi possibile ricavare i vettori posizione e velocità in quell'istante.

Le immagini seguenti mostrano un esempio delle differenze che si ottengono usando i due diversi modelli. Nelle figure 3.4(a), 3.4(b), 3.5(a) e 3.5(b) sono mostrate la distanza dal Sole e il modulo della velocità della Terra, nel corso di cinque anni, e di Saturno per un periodo di trenta anni (che corrisponde circa al periodo di rivoluzione del pianeta) a partire dalla data giuliana 2457388.5 (1

Gennaio 2016).

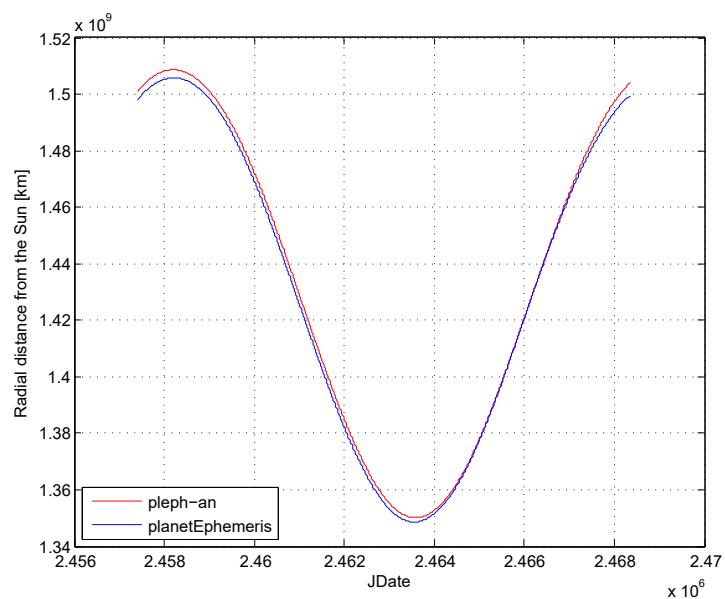


(a) Distanza Terra-Sole.

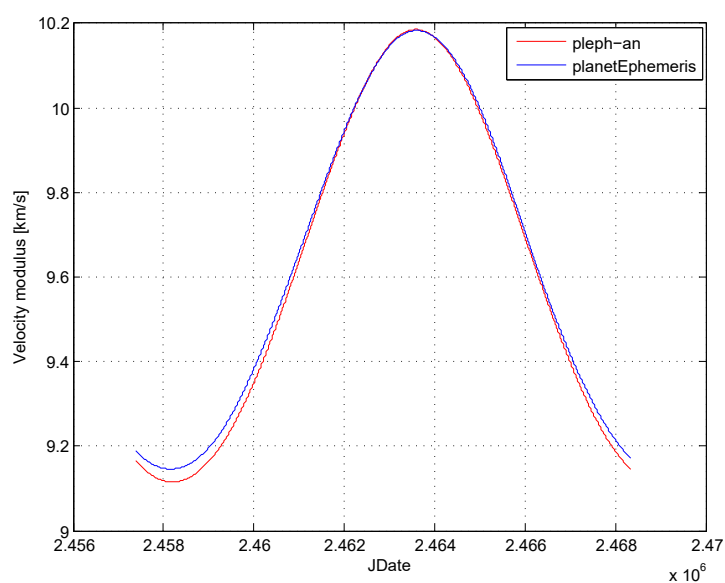


(b) Modulo della velocità della Terra.

Figura 3.4: Confronto tra JPL DE421 e effemeridi analitiche per la Terra.



(a) Distanza Saturno-Sole.

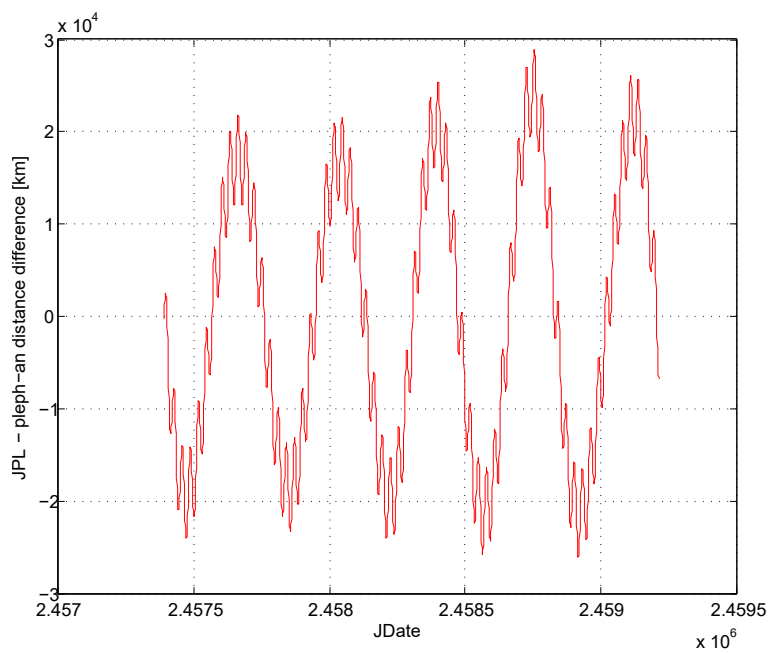


(b) Modulo della velocità di Saturno.

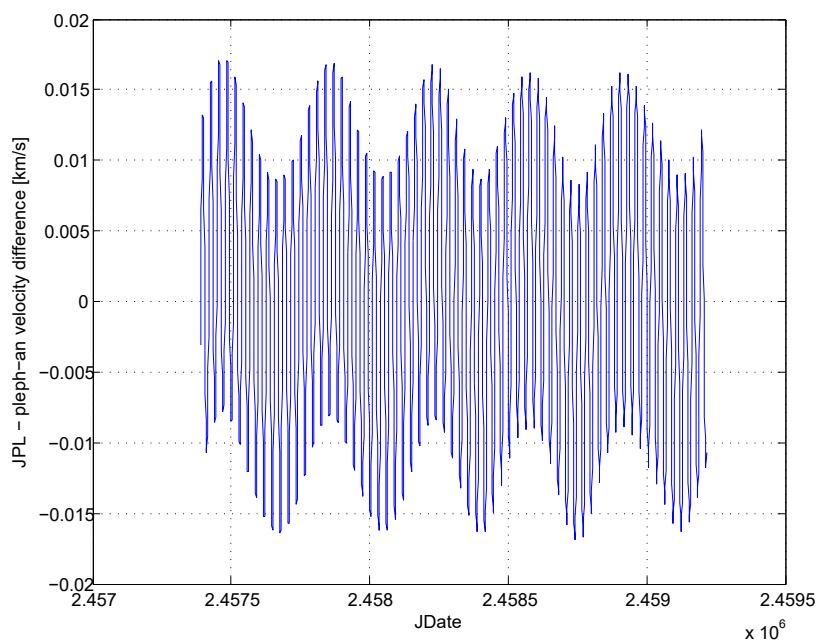
Figura 3.5: Confronto tra JPL DE421 e effemeridi analitiche per Saturno.

Le differenze di posizione e velocità ottenute usando i due modelli sono riportate nelle figure 3.6(a), 3.6(b), 3.7(a) and 3.7(b).

Le figure mostrano che il modulo del vettore posizione della Terra calcolato

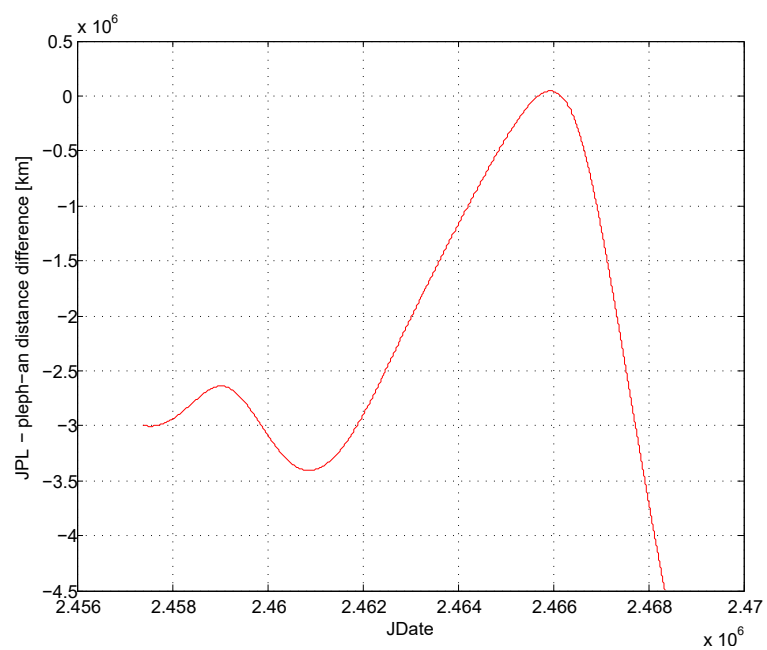


(a) Differenza di posizione.

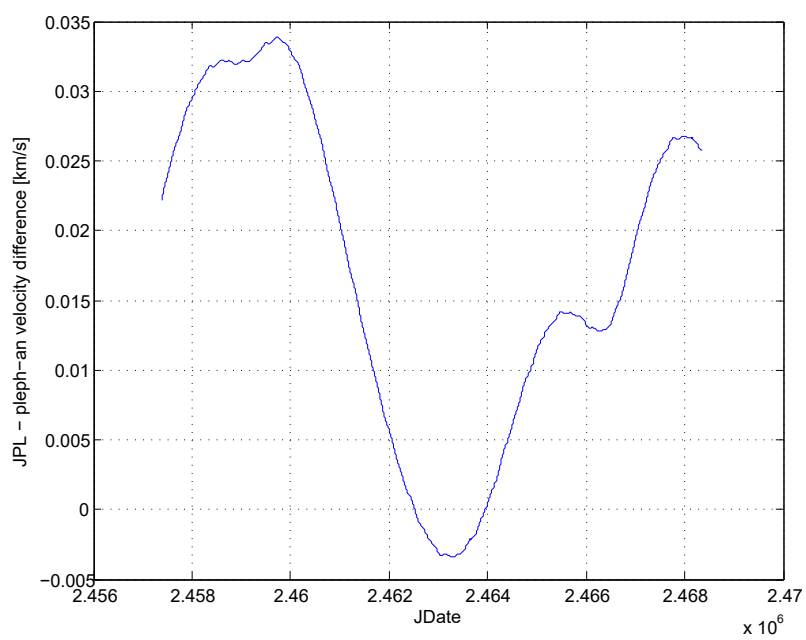


(b) Differenza di velocità.

Figura 3.6: Differenze tra JPL DE421 e effemeridi analitiche nel caso della Terra.



(a) Differenza di posizione.



(b) Differenza di velocità.

Figura 3.7: Differenze tra JPL DE421 e effemeridi analitiche nel caso di Saturno.

con le effemeridi analitiche differisce da quello determinando usando le effemeridi del JPL al massimo di 3×10^4 km, mentre nel caso del modulo della velocità della Terra la differenza massima è inferiore a 0.02 km/s. Nel caso di Saturno invece l'errore è più grande: per quanto riguarda il modulo del vettore posizione la differenza massima è circa 4×10^6 km, per il modulo della velocità 0.035 km/s.

Nonostante la precisione sia inferiore, le effemeridi analitiche consentono di determinare posizione e velocità dei pianeti in tempi inferiori a quelli richiesti dal modello JPL DE421: ad esempio il tempo necessario a calcolare la posizione e velocità della Terra nel caso precedente è stato di soli 0.2 secondi contro i 181 secondi richiesti dal modello del JPL (le due *function* di MATLAB sono state eseguite 1828 volte). Pertanto, essendo questo solo un problema di ottimizzazione preliminare della traiettoria di trasferimento di una missione spaziale, nel resto dello studio verranno utilizzate le effemeridi analitiche.

3.4.2 Problema di Keplero

Come discusso precedentemente, su ogni leg il veicolo spaziale può effettuare un certo numero di manovre impulsive (DSMs). Assegnato l'istante di tempo in cui le manovre vengono eseguite, è possibile calcolare gli intervalli di tempo tra una manovra e quella successiva. Inoltre, nota la posizione del veicolo all'inizio di un certo leg (che può essere la posizione del pianeta di partenza o uno dei pianeti con cui si effettua una manovra di fionda gravitazionale, che viene determinata tramite le effemeridi) è possibile determinare le posizioni in cui avvengono le DSMs risolvendo una serie di *problemi di Keplero*. Quindi, note la posizione e la velocità del veicolo all'inizio di un leg e noto l'istante di tempo in cui la prima manovra impulsiva viene eseguita, risolvendo numericamente l'equazione di Keplero è possibile trovare la posizione del veicolo e la sua velocità immediatamente prima dell'applicazione della manovra. Sommando vettorialmente questa velocità con il vettore variazione di velocità $\Delta \mathbf{v}_{\text{DSM}_{ij}}$, si ottiene la nuova velocità della sonda (mentre la posizione è rimasta invariata perchè la manovra è considerata impulsiva e quindi istantanea). Allora nota la nuova posizione e velocità iniziale del veicolo è possibile andare a determinare il nuovo tratto di orbita. In seguito, conoscendo il tempo di applicazione delle DSM successive si risolve nuovamente l'equazione di Keplero per determinare i tratti successivi dell'orbita di trasferimento. Si può notare però che i vettori variazione di velocità $\Delta \mathbf{v}_{\text{ind}_{ij}}$ sono variabili indipendenti del problema di ottimizzazione eccetto l'ultimo, che invece deve essere calcolato risolvendo un problema di Lambert, come descritto nella sezione successiva.

La soluzione di un problema di Keplero può essere determinata utilizzando delle relazioni che sono valide solo per un particolare tipo di orbita (ellittica,

parabolica o iperbolica). Tuttavia non è possibile conoscere in anticipo quale sarà il tipo di conica che descrive l'orbita del veicolo in seguito all'applicazione di una manovra impulsiva. Quindi è necessaria una trattazione generale valida per qualunque tipo di conica. Tale trattazione è nota come *formulazione universale* e viene descritta in dettaglio in [32].

Dunque, al fine di risolvere il problema di ottimizzazione, è stata utilizzata una routine che impiega la formulazione universale [33].

Indicando con \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 i vettori posizione e velocità del veicolo a un certo istante di tempo t_0 (che potrebbe essere la data in cui la sonda si trova all'inizio di un leg o il tempo di applicazione di una DSM) e con Δt l'intervallo di tempo che intercorre tra l'istante di riferimento t_0 e l'istante $t_{\text{DSM}_{ij}}$ in cui viene eseguita la manovra successiva, l'equazione di Keplero viene risolta usando il metodo di Newton che, applicato a questo problema, permette di ottenere il seguente algoritmo iterativo

$$\chi_{n+1} = \chi_n + \frac{\sqrt{\mu}\Delta t - \chi_n^3 C_3 - \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{\sqrt{\mu}} \chi_n^2 C_2 - r_0 \chi_n (1 - \psi C_3)}{\chi_n^2 C_2 + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{\sqrt{\mu}} \chi_n (1 - \psi C_3) + r_0 (1 - \psi C_2)} \quad (3.4)$$

dove r_0 è il modulo del vettore posizione del veicolo, χ è la *variabile di Sundman* [32] e ψ è definita come

$$\psi = \alpha \chi^2$$

con

$$\alpha = \frac{1}{a} = -\frac{v_0^2}{\mu} + \frac{2}{r_0}$$

dove a è il semiasse maggiore dell'orbita e v_0 è il modulo del vettore velocità della sonda spaziale. C_2 e C_3 sono funzioni di ψ e sono definite dalle seguenti relazioni

$$C_2 = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{\psi}}{\psi} & \text{se } \psi > 10^{-6} \\ \frac{1}{2} & \text{se } |\psi| < 10^{-6} \\ \frac{1 - \cosh \sqrt{-\psi}}{\psi} & \text{se } \psi < -10^{-6} \end{cases}$$

$$C_3 = \begin{cases} \frac{\sqrt{\psi} - \sin \sqrt{\psi}}{\sqrt{\psi^3}} & \text{se } \psi > 10^{-6} \\ \frac{1}{6} & \text{se } |\psi| < 10^{-6} \\ \frac{\sinh \sqrt{-\psi} - \sqrt{-\psi}}{\sqrt{-\psi^3}} & \text{se } \psi < -10^{-6} \end{cases}$$

Il valore iniziale da assegnare alla variabile di Sundman χ_0 per il metodo di Newton può essere determinato come segue

$$\chi_0 = \begin{cases} \sqrt{\mu} \Delta t \alpha & \text{se } \alpha > 10^{-6} \\ 2\sqrt{p} \cot \left(2 \arctan \left(\sqrt[3]{\tan \left(\frac{1}{2} a \cot \left(3 \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} \Delta t \right) \right)} \right) \right) & \text{se } |\alpha| < 10^{-6} \\ \text{sgn}(\Delta t) \sqrt{-a} \ln \left(\frac{-2\mu\alpha\Delta t}{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + \text{sgn}(\Delta t) \sqrt{-\mu a (1 - r_0 \alpha)}} \right) & \text{se } \alpha < -10^{-6} \end{cases}$$

dove p è il semilato retto dell'orbita. Una volta risolta l'equazione (3.4) e determinato il valore di χ , i vettori posizione e velocità \mathbf{r} e \mathbf{v} al tempo t_{DSM} (quando viene eseguita la manovra impulsiva) possono essere determinati come combinazione lineare di \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= F\mathbf{r}_0 + G\mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v} &= \dot{F}\mathbf{r}_0 + \dot{G}\mathbf{v}_0\end{aligned}$$

dove F , G , \dot{F} e \dot{G} sono noti come *Coefficienti di Lagrange* e possono essere espressi in funzione di χ usando le seguenti formule

$$\begin{aligned}F &= 1 - \frac{\chi^2 C_2}{r_0} \\ G &= \Delta t - \frac{\chi^3 C_3}{\sqrt{\mu}} \\ \dot{F} &= \frac{\chi(\psi C_3 - 1)\sqrt{\mu}}{rr_0} \\ \dot{G} &= 1 - \frac{\chi^2 C_2}{r}\end{aligned}$$

dove

$$r = \chi^2 C_2 + \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{\sqrt{\mu}} \chi (1 - \psi C_3) + r_0 (1 - \psi C_2)$$

3.4.3 Problema di Lambert

L'ultima manovra impulsiva eseguita su ogni leg non è una variabile indipendente e può essere ottenuta attraverso la risoluzione di un *problema di Lambert*. Infatti noto l'istante di tempo, e quindi la posizione $\mathbf{r}_{f\text{DSM}}$, in cui viene applicata l'ultima manovra e la posizione del pianeta successivo \mathbf{r}_p (che potrebbe essere il pianeta di arrivo o uno dei pianeti usati per effettuare una manovra di fionda gravitazionale) e conoscendo il tempo di volo su quest'ultimo tratto del leg, attraverso la risoluzione del problema di Lambert è possibile determinare l'orbita che connette i due vettori posizione in quell'intervallo di tempo (un esempio è mostrato in figura 3.8). Successivamente si possono determinare le velocità \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 che la sonda assume agli estremi di quest'ultimo tratto del leg. Infine si può calcolare il modulo Δv_f della variazione di velocità dovuta all'ultima manovra impulsiva del leg come segue

$$\Delta v_f = \|\mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_{\text{DSM}}^-\| \quad (3.5)$$

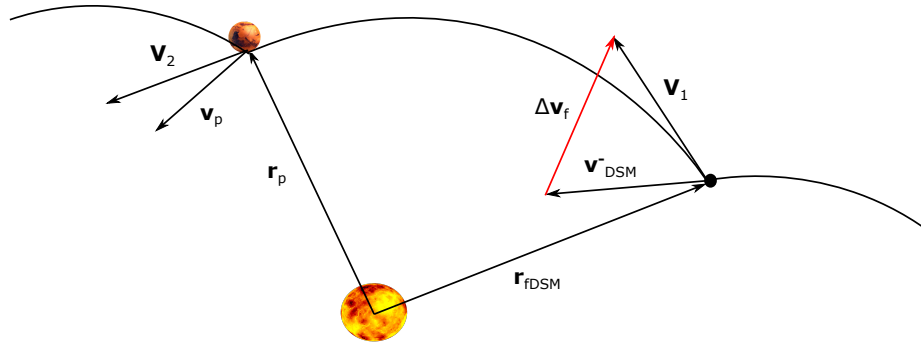


Figura 3.8: Ultimo tratto di un leg determinato tramite la risoluzione di un problema di Lambert.

Nel caso particolare in cui nessuna manovra viene eseguita in un leg, è possibile determinare la traiettoria del veicolo risolvendo un problema di Lambert con le posizioni agli estremi coincidenti con le posizioni di due pianeti successivi. Nel caso in cui il veicolo non utilizzi DSMs nel primo leg, la manovra impulsiva di partenza (che, in generale, è una variabile indipendente del problema di ottimizzazione) diventa un parametro dipendente che può essere ottenuto sempre risolvendo un problema di Lambert per la determinazione dell'orbita che connette la posizione del pianeta di partenza e il vettore posizione del pianeta successivo (che potrebbe essere il pianeta di arrivo se l'intera traiettoria è composta da un solo leg) in un intervallo di tempo uguale al tempo di volo sul primo leg.

Uno dei parametri da assegnare al fine di risolvere un problema di Lambert è la direzione di volo sull'orbita che è legata alla scelta dell'angolo al centro $\Delta\nu$ spazzato dal veicolo. Per esempio, se la direzione di volo scelta è antioraria e le posizioni iniziale e finale r_0 e r_f del veicolo spaziale sono quelle riportate nella figura 3.9 a sinistra, l'angolo al centro sarà quello minore di π , mentre nel caso illustrato nella figura a destra l'angolo sarà maggiore di π .

La routine utilizzata per questo studio [34] usa due risolutori separati: il primo è stato sviluppato da Izzo [31] e nel caso in cui questa *function* non riesca a determinare la soluzione viene eseguito un'altro algoritmo sviluppato da Lancaster e Blanchard [35] con alcune modifiche introdotte da Gooding [36].

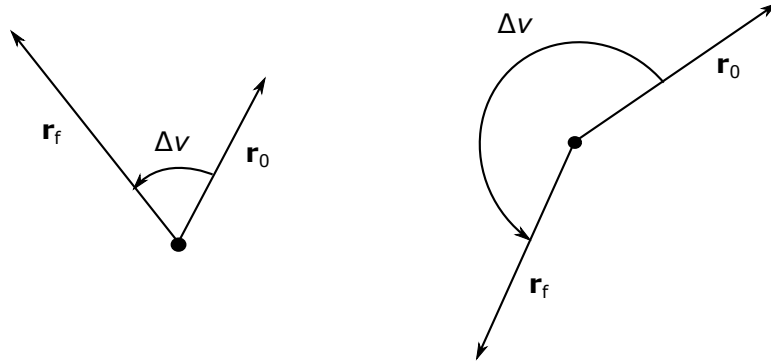


Figura 3.9: Angolo al centro $\Delta\nu$ spazzato da un veicolo in un problema di Lambert.

Queste *function* permettono anche di considerare casi in cui il veicolo, prima di giungere alla posizione finale, compia un certo numero m di rivoluzioni attorno al Sole. Tuttavia in questo caso il problema di Lambert potrebbe non avere una soluzione se il tempo di volo non è sufficientemente elevato. Se durante la procedura di ottimizzazione viene selezionato un set di parametri indipendenti per cui il problema di Lambert non ha soluzione, allora viene assegnato al Δv_{tot} della missione un valore arbitrario molto elevato, in modo tale che quella soluzione venga scartata dall'algoritmo di ottimizzazione.

3.4.4 Manovra di Fionda Gravitazionale

Una manovra di Fionda Gravitazionale consiste nel sorvolo di un corpo celeste che permette di sfruttare la gravità del corpo stesso per variare la direzione del vettore velocità relativa del veicolo rispetto al corpo celeste. In questo modo varia la velocità eliocentrica del veicolo, e quindi anche la sua orbita, senza che sia necessario consumare propellente. I fly-by sono considerati come manovre istantanee in questo studio, quindi la posizione del veicolo rispetto al Sole non cambia durante l'esecuzione della manovra ed è uguale alla posizione del pianeta che si sta utilizzando per eseguire il fly-by.

Come spiegato nei paragrafi precedenti, il raggio della sfera d'influenza è molto maggiore del raggio del pianeta, quindi è ragionevole assumere che l'ingresso del veicolo nella SOI del pianeta avvenga a una distanza infinita dal baricentro del pianeta stesso. Invece il raggio della sfera d'influenza è molto minore della distanza media tra pianeta e Sole, quindi è una buona approssimazione considerare la SOI come un punto concentrato nel baricentro del pianeta nelle fasi di

trasferimento interplanetario. Allora la velocità relativa del veicolo rispetto al pianeta può essere calcolata come

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_{sc} - \mathbf{v}_p$$

dove \mathbf{v}_{sc} è la velocità eliocentrica del veicolo spaziale, \mathbf{v}_p è la velocità del pianeta rispetto al Sole e si può osservare che, in base alle ipotesi precedentemente introdotte, la velocità relativa del veicolo è pari alla velocità di eccesso iperbolico v_{∞_i} .

All'interno della sfera d'influenza il veicolo è soggetto solo alla forza di gravità del pianeta, quindi si può assumere che il suo moto sia kepleriano: la traiettoria della sonda rispetto al pianeta è una iperbole con semiasse maggiore pari a

$$a_h = -\frac{\mu_p}{v_{\infty_i}^2}$$

dove μ_p è il parametro gravitazionale del pianeta. Inoltre, per la legge di conservazione dell'energia meccanica specifica, il modulo della velocità relativa in ingresso alla sfera d'influenza è uguale al modulo della velocità relativa all'uscita della SOI

$$v_{\infty_i} = v_{\infty_e}$$

invece il vettore velocità relativa, in seguito alla manovra, viene ruotato di un angolo δ come mostrato in figura 3.10.

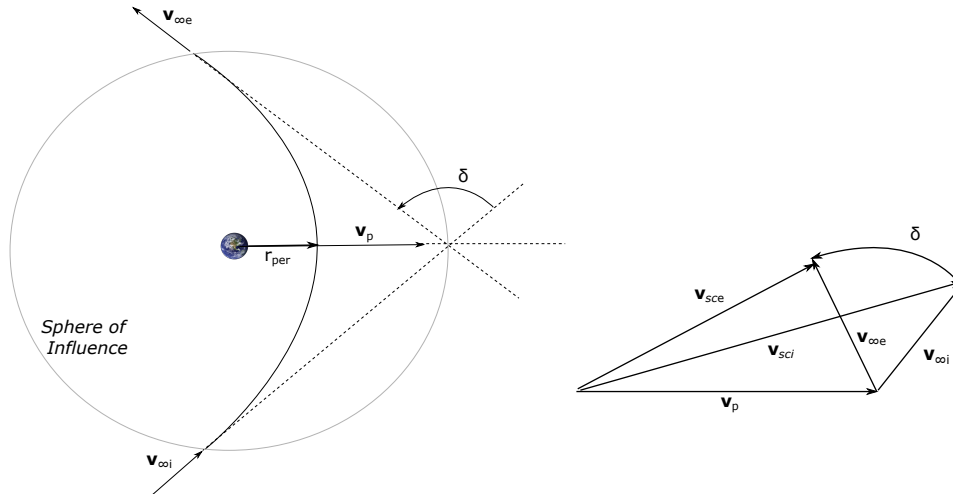


Figura 3.10: Manovra di Fionda Gravitazionale.

L'angolo δ può essere legato all'eccentricità e_h dell'iperbole usando la relazione

$$\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) = \frac{1}{e_h}$$

come spiegato in [27]. Ricordando che il raggio di pericentro dell'iperbole può essere espresso come

$$r_{per_h} = a_h (1 - e_h)$$

l'angolo di svolta δ può essere scritto come

$$\delta = 2 \arcsin \left(\frac{1}{1 + r_{per_h} \frac{v_{\infty_i}^2}{\mu_p}} \right) \quad (3.6)$$

È importante notare che l'angolo di svolta è limitato dal minimo valore che può assumere il raggio di pericentro dell'orbita iperbolica, $r_{per_{min}}$. I valori del minimo raggio di pericentro mostrati in tabella 3.4 sono stati presi da [31] o sono stati posti pari a $1.1R_p$, dove R_p rappresenta il valore del raggio del pianeta. Al fine di determinare il vettore velocità di eccesso iperbolico in uscita dalla

Planet	$r_{per_{min}}$ [km]
Mercurio	2683.7
Venere	6351.8
Terra	6778.1
Marte	3736.7
Giove	671492.0
Saturno	66294.8
Urano	28114.9
Nettuno	27240.4
Plutone	1314.5

Tabella 3.4: Valori minimi del raggio di pericentro $r_{per_{min}}$ dell'orbita iperbolica durante una manovra di fionda gravitazionale di un pianeta.

sfera d'influenza del pianeta viene introdotto un sistema di riferimento *locale* come descritto da Gad e Abdelkhalik [19]. Il versore $\hat{\mathbf{k}}$ del sistema di riferimento locale è definito come

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{v}_{\infty_i}}{v_{\infty_i}}$$

e il piano su cui avviene la manovra di fionda gravitazionale è il piano $\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{i}}$. Quindi il vettore velocità relativa del veicolo rispetto al sistema di riferimento locale in uscita dalla sfera d'influenza è

$$[\mathbf{v}_{\infty_e}]_l = v_{\infty_i} [\sin \delta \quad 0 \quad \cos \delta]$$

In seguito è possibile calcolare la velocità di eccesso iperbolico rispetto al sistema di riferimento eliocentrico inerziale effettuando una *trasformazione di coordinate*. Indicando con $\hat{\mathbf{I}}$, $\hat{\mathbf{J}}$ e $\hat{\mathbf{K}}$ i versori del sistema inerziale, si definisce con i l'angolo di inclinazione tra il piano normale a \mathbf{v}_{∞_i} e il piano $\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{J}}$

$$i = \arccos (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{K}})$$

Introducendo il versore $\hat{\gamma}$ della linea di intersezione tra il piano $\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{J}}$ e il piano normale a \mathbf{v}_{∞_i}

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\mathbf{K}} \times \hat{\mathbf{k}}}{\|\hat{\mathbf{K}} \times \hat{\mathbf{k}}\|}$$

è possibile definire l'angolo Ω tra il versore $\hat{\mathbf{I}}$ e $\hat{\gamma}$

$$\Omega = \begin{cases} \arccos(\hat{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{I}}) & \text{se } \hat{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{J}} > 0 \\ 2\pi - \arccos(\hat{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{I}}) & \text{se } \hat{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{J}} < 0 \end{cases}$$

Infine si definisce l'angolo η : esso rappresenta l'angolo tra $\hat{\gamma}$ e il versore $\hat{\mathbf{i}}$ della terna di riferimento locale. Quest'angolo è una delle variabili indipendenti del problema di ottimizzazione e permette di definire univocamente, insieme agli angoli introdotti precedentemente (figura 3.11), il piano su cui avviene la manovra di fionda gravitazionale. La trasformazione di coordinate può essere effettuata

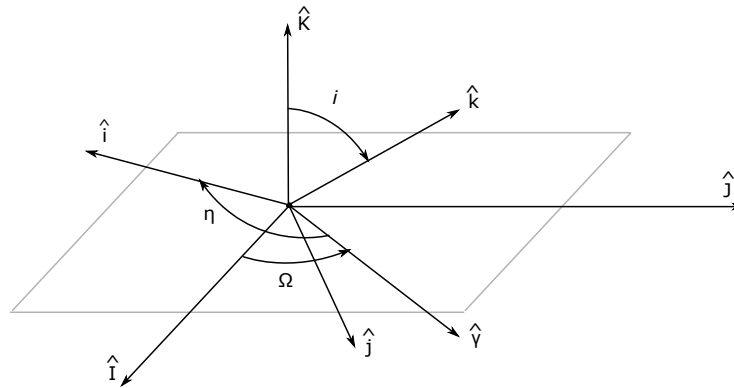


Figura 3.11: Angoli di rotazione usati per la trasformazione di coordinate.

combinando tre successive rotazioni: la prima attorno al versore $\hat{\mathbf{k}}$ di un angolo $-\eta$ fino a far coincidere i versori $\hat{\mathbf{i}}$ e $\hat{\gamma}$, una seconda rotazione attorno al nuovo versore $\hat{\mathbf{i}}$ di un angolo $-i$ cosicché il versore $\hat{\mathbf{k}}$ vada a sovrapporsi al versore $\hat{\mathbf{K}}$ del sistema di riferimento eliocentrico, e infine una rotazione attorno al versore $\hat{\mathbf{k}}$, ottenuto dalla rotazione precedente, di un angolo $-\Omega$ in modo tale che i sistemi di riferimento locale e eliocentrico coincidano. L'intera rotazione può essere descritta usando la seguente matrice di trasformazione

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_z(-\Omega) \mathbb{T}_x(-i) \mathbb{T}_z(-\eta)$$

dove

$$\begin{aligned}\mathbb{T}_z(-\Omega) &= \begin{bmatrix} \cos(-\Omega) & \sin(-\Omega) & 0 \\ -\sin(-\Omega) & \cos(-\Omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbb{T}_x(-i) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-i) & \sin(-i) \\ 0 & -\sin(-i) & \cos(-i) \end{bmatrix} \\ \mathbb{T}_z(-\eta) &= \begin{bmatrix} \cos(-\eta) & \sin(-\eta) & 0 \\ -\sin(-\eta) & \cos(-\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

che permette di determinare le componenti della velocità relativa del veicolo rispetto al pianeta proiettate lungo gli assi del sistema di riferimento eliocentrico in uscita dalla sfera di influenza

$$\mathbf{v}_{\infty_e} = \mathbb{T} [\mathbf{v}_{\infty_e}]_l$$

Una volta calcolata la velocità \mathbf{v}_{∞_e} , sommando quest'ultima al vettore velocità del pianeta è possibile ottenere la velocità assoluta del veicolo nel sistema eliocentrico con cui è poi possibile determinare la nuova orbita del veicolo spaziale.

La procedura descritta in precedenza permette di calcolare la velocità del veicolo in seguito alla manovra di fionda gravitazionale nel caso di *non-powered fly-bys*, cioè quando solo la forza di gravità del pianeta viene utilizzata per ruotare il vettore velocità relativa della sonda. Tuttavia durante un incontro iperbolico potrebbe essere sfruttata una combinazione della forza gravitazionale e di manovre impulsive come descritto da Ceriotti [20].

In questo lavoro non sono presi in esame quei casi in cui all'interno della SOI di un pianeta vengono effettuate manovre propulsive, ma queste possono essere eseguite immediatamente all'esterno della sfera d'influenza quando il fly-by è seguito da un leg in cui non viene effettuata alcuna manovra impulsiva come spiegato in [19]. In questi casi si parla di *powered fly-by*. Quando non ci sono DSMs in un leg, la velocità eliocentrica assoluta del veicolo in uscita dalla sfera d'influenza \mathbf{v}_{sc_e} può essere calcolata risolvendo un problema di Lambert: infatti se i tempi in cui le manovre di fionda gravitazionale vengono effettuate sono noti, allora la posizione del veicolo spaziale all'inizio e alla fine del leg sono determinati per mezzo delle effemeridi e l'intervallo di tempo che intercorre tra le date in cui la sonda occupa le due posizioni può essere calcolato. Perciò la velocità relativa all'uscita della SOI del pianeta deve essere uguale a

$$(\mathbf{v}_{\infty_e})_{req} = (\mathbf{v}_{sc_e})_{req} - \mathbf{v}_p$$

Al fine di minimizzare il Δv richiesto da un powered fly-by, si impone che il piano su cui avviene la manovra di fionda gravitazionale sia quello che contiene i vettori velocità \mathbf{v}_{∞_i} e $(\mathbf{v}_{\infty_e})_{req}$. Per ottenere questa velocità relativa all'uscita dalla sfera d'influenza, l'angolo di svolta deve essere pari a

$$\delta_{req} = \arccos \left(\frac{\mathbf{v}_{\infty_i} \cdot (\mathbf{v}_{\infty_e})_{req}}{\|\mathbf{v}_{\infty_i}\| \|\mathbf{v}_{\infty_e})_{req}\|} \right)$$

Tuttavia l'angolo di svolta richiesto δ_{req} potrebbe essere maggiore del valore massimo che l'angolo di svolta può assumere

$$\delta_{max} = 2 \arcsin \left(\frac{\mu_p}{\mu_p + r_{permin} v_{\infty_i}^2} \right)$$

dove r_{permin} è il valore minimo del raggio di pericentro indicato in tabella 3.4.

Quindi in base al valore di δ_{req} la velocità relativa del veicolo rispetto al sistema di riferimento locale all'uscita della sfera di influenza di un pianeta (figura 3.12) è

$$[\mathbf{v}_{\infty_e}]_l = \begin{cases} v_{\infty_i} [\sin \delta_{req} & 0 & \cos \delta_{req}] & \text{se } \delta_{req} \leq \delta_{max} \\ v_{\infty_i} [\sin \delta_{max} & 0 & \cos \delta_{max}] & \text{se } \delta_{req} > \delta_{max} \end{cases}$$

Infine, dopo aver determinato le componenti di $(\mathbf{v}_{\infty_e})_{req}$ rispetto al sistema di

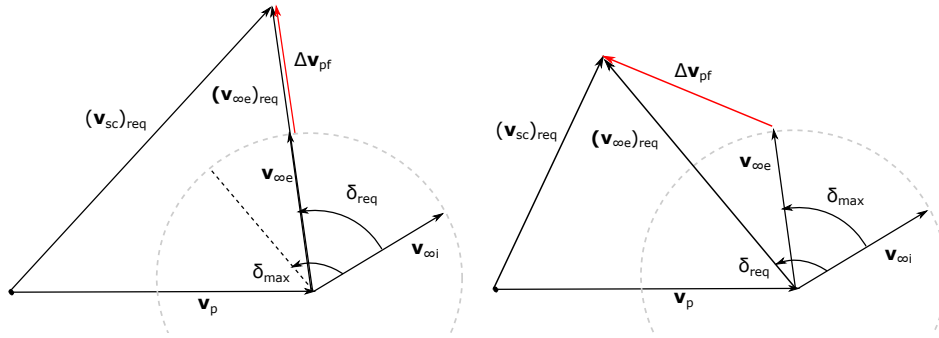


Figura 3.12: Calcolo della variazione di velocità nel caso di powered fly-by.

riferimento locale, è possibile trovare il modulo della manovra impulsiva necessaria a ottenere la velocità eliocentrica richiesta $(\mathbf{v}_{sc_e})_{req}$ all'uscita della SOI del pianeta

$$\Delta v_{pf} = \|(\mathbf{v}_{\infty_e})_{req} - \mathbf{v}_{\infty_e}\| \quad (3.7)$$

3.4.5 Procedura di Calcolo della Variazione Totale di Velocità

La variazione totale di velocità Δv_{tot} ottenuta da un veicolo nell'intera missione spaziale può essere calcolata come descritto di seguito.

Nota la data di partenza del veicolo spaziale t_{0jd} , usando le effemeridi è possibile determinare la sua posizione iniziale \mathbf{r}_0 e la velocità \mathbf{v}_{p0} . Se nel primo leg non vengono eseguite DSMs allora l'impulso di partenza $\Delta \mathbf{v}_p$ è il risultato di un problema di Lambert, in caso contrario è una variabile indipendente del problema. Sommando $\Delta \mathbf{v}_p$ a \mathbf{v}_{p0} , si trova la velocità \mathbf{v}_0 del veicolo all'inizio del primo leg.

Tutte le manovre impulsive $\Delta \mathbf{v}_{DSMij}$, eccetto l'ultima, di ogni leg sono variabili indipendenti. La posizione di tutte le DSMs viene determinata seguendo la procedura descritta precedentemente risolvendo l'equazione di Keplero. L'intensità dell'ultima manovra impulsiva di ogni leg viene calcolata usando l'equazione (3.5) dopo la risoluzione del problema di Lambert.

Per quanto riguarda le manovre di fionda gravitazionale, se nel leg seguito dal fly-by sono eseguite DSMs allora il fly-by è considerato non-powered, altrimenti si ha un powered fly-by con una manovra impulsiva richiesta che può essere determinata, come discusso nella sezione precedente, usando l'equazione (3.7). Risolvendo il problema di Lambert sull'ultimo tratto di ogni leg si ottiene anche la velocità finale su ogni leg \mathbf{V}_2 . Questa viene usata per il calcolo della velocità relativa del veicolo all'ingresso della sfera d'influenza di un pianeta

$$\mathbf{v}_{\infty_i} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{v}_p$$

o per il calcolo dell'impulso finale di arrivo sull'ultimo leg

$$\Delta v_a = \|\mathbf{V}_2 - \mathbf{v}_{ap}\|$$

dove \mathbf{v}_p è il vettore velocità del pianeta utilizzato per effettuare una manovra di fionda gravitazionale e \mathbf{v}_{ap} è il vettore velocità del pianeta di arrivo.

Allora la variazione totale di velocità Δv_{tot} del veicolo spaziale può essere calcolata usando l'equazione (3.8)

$$\Delta v_{tot} = \Delta v_p + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_{DSM}} \Delta v_{DSMij} + \sum_{i=1}^n \Delta v_{f_i} + \sum_{i=1}^l \Delta v_{pfi} + \Delta v_a \quad (3.8)$$

Capitolo 4

Algoritmi di Ottimizzazione

In questo capitolo vengono mostrati quali sono gli algoritmi utilizzati per risolvere il problema di ottimizzazione e ricercare la traiettoria di trasferimento ottima di un data missione spaziale.

Come descritto nei capitoli precedenti, la variazione di velocità totale Δv_{tot} di una missione può essere espressa come una funzione f di un insieme di variabili indipendenti \mathbf{x} . Ogni variabile indipendente può assumere solo valori appartenenti a un certo intervallo e in generale è soggetta a certe equazioni di vincolo. Il compito dell'algoritmo di ottimizzazione è di trovare il minimo *globale* della funzione f , cioè determinare la traiettoria con il valore più basso possibile della variazione totale di velocità Δv_{tot} ottenuta dal veicolo. Tuttavia questa funzione contiene un numero molto elevato di minimi *locali*, quindi al fine di trovare la soluzione è necessario utilizzare un *Algoritmo di Ottimizzazione Globale*.

In questo lavoro è stato utilizzato l'*Algoritmo Genetico* [23] presente nel *Global Optimization Toolbox* di MATLAB. In molti casi questo algoritmo è in grado di avvicinarsi al minimo globale della funzione: il risultato trovato con un Algoritmo Genetico (GA) non è né un minimo globale né un minimo locale, perciò la soluzione del GA è usata come punto di partenza per un metodo di *Ottimizzazione Locale*. Per questa seconda analisi gli algoritmi usati sono *fmincon* [25] e *Pattern Search* [26].

Per alcuni problemi più complessi l'Algoritmo Genetico non è in grado di "avvicinarsi" alla soluzione ottima: infatti in questi casi l'algoritmo trova soluzioni con valori del Δv_{tot} molto più alti di quello corrispondente alla soluzione ottima. Per questi casi è stato utilizzato un altro algoritmo di ottimizzazione, *MultiStart* [24], che è in grado di determinare soluzioni migliori.

Tutti gli algoritmi di ottimizzazione usati in questo studio sono descritti nelle sezioni successive.

4.1 Algoritmo Genetico

L'Algoritmo Genetico è un metodo di ottimizzazione globale che basa il suo funzionamento sulla teoria dell'evoluzione di Darwin. Fu inventato da John Holland negli anni Sessanta: il suo funzionamento generale consiste nella generazione di una *popolazione* random, cioè un insieme di vettori le cui componenti sono le variabili indipendenti del problema. Applicando alla popolazione i principi della selezione naturale per un certo numero di *generazioni* è possibile determinare la soluzione ottima del problema in questione.

In questo caso l'obiettivo del GA è quello di trovare la traiettoria del veicolo spaziale che permette di portare a termine una certa missione con la minima variazione totale di velocità Δv_{tot}

$$\min_x f(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

dove il vettore delle variabili indipendenti \mathbf{x} deve soddisfare le condizioni (4.2)

$$\begin{cases} lb_i < x_i < ub_i & \forall i = 1, \dots, n_{var} \\ \mathbb{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \end{cases} \quad (4.2)$$

dove n_{var} è il numero di variabili indipendenti del problema. Quindi ogni componente del vettore \mathbf{x} può assumere solo valori appartenenti all'intervallo $[lb_i, ub_i]$ e alcune delle variabili potrebbero anche essere soggette a vincoli di ineguaglianza lineare: \mathbb{A} è la matrice che contiene i coefficienti del sistema lineare, \mathbf{b} è il vettore che contiene i termini noti. Alcune delle componenti del vettore \mathbf{x} potrebbero anche assumere solo valori interi.

La terminologia usata negli Algoritmi Genetici si basa su quella usata in Biologia. Come spiegato prima infatti un insieme di vettori soluzione \mathbf{x} è chiamato *popolazione* mentre ogni singolo vettore è detto *individuo*. Ogni componente del vettore \mathbf{x} , cioè ogni variabile indipendente del problema, è detta *gene*.

Per prima cosa il GA genera la popolazione iniziale: in questo lavoro la funzione usata per creare la popolazione di partenza è @gacreationuniform che genera una popolazione random con distribuzione uniforme. Possono essere specificati anche gli intervalli iniziali (InitialPopulationRange) all'interno dei quali generare gli individui della popolazione iniziale: in questo caso gli intervalli iniziali sono stati posti uguali agli intervalli del problema $[lb, ub]$ per accrescere la *diversità* della popolazione iniziale. Quando sono presenti vincoli di ineguaglianza lineare viene invece usata la funzione @gacreationlinearfeasible che genera la popolazione

iniziale in modo tale da soddisfare gli intervalli e le altre condizioni di vincolo del problema. Infine si può specificare anche la dimensione della popolazione, cioè il numero di individui che la compone: in base alla complessità del problema la dimensione della popolazione può essere variata cercando di ottenere un buon compromesso tra tempi di calcolo e capacità di determinare la soluzione ottima.

Per ogni individuo della popolazione si calcola il valore della funzione di fitness f (fitness score). Questo viene poi scalato da una *scaling function*: la funzione di default usata è @fitscalingrank che scala il valore della funzione in base al rank di ogni individuo. Il rank è la posizione di un individuo nel vettore contenente i valori della funzione calcolati per ogni individuo ordinati dal minore al maggiore. Il fitness score di un individuo con rank pari a r viene scalato di una quantità proporzionale a $1/\sqrt{r}$ [37].

In seguito i migliori individui, in termini di valore di fitness, sono usati come genitori per la creazione della popolazione della generazione successiva.

Alcuni degli individui, quelli con valore di fitness più basso, passano direttamente alla generazione successiva senza subire modifiche: questi sono chiamati individui di *élite*. Il resto della popolazione viene generata selezionando i genitori e applicando loro gli operatori di *crossover* e *mutation*.

La *Selection function* di default dell'Algoritmo Genetico di MATLAB è Stochastic uniform (@selectionstochunif): questa consiste nel generare una linea in cui ogni genitore corrisponde a una sezione della linea stessa di lunghezza proporzionale al suo valore scalato. L'algoritmo si muove lungo la linea eseguendo passi di uguale dimensione. Ad ogni passo viene selezionato un genitore in base alla sezione della linea su cui si trova. Il primo passo è un numero random minore della dimensione dei passi successivi [37].

La frazione della popolazione della nuova generazione generata attraverso il crossover è specificata impostando il valore di *crossover fraction*: in questo studio viene utilizzato un valore di 0.8 perchè usando valori più alti si osserva che l'algoritmo tende rapidamente a convergere verso un minimo locale poichè la maggior parte della popolazione viene generata combinando i geni della popolazione iniziale, invece usando valori più bassi il valore di fitness decresce molto lentamente.

La *mutation function* di default nei casi in cui il problema presenta intervalli e condizioni di vincolo da rispettare è Adaptive Feasible (@mutationadaptfeasible): questa introduce delle variazioni random nei genitori selezionati generando dei vettori, con direzione e modulo che rispettano i vincoli, al fine di garantire la diversità nella popolazione.

Per quanto riguarda il crossover, esso crea i nuovi individui combinando i

vettori di due genitori selezionati. Quando non sono presenti vincoli lineari viene utilizzata la funzione `@crossover_scattered`: questa crea un vettore random i cui elementi possono assumere solo valori pari a 0 o 1, poi seleziona i geni dal primo genitore se la componente del vettore è 1 o dal secondo genitore se è uno 0 e combina i geni per formare il nuovo individuo [37]. Se invece sono presenti condizioni di vincolo lineari la funzione di crossover utilizzata è `@crossover_intermediate` che genera i nuovi individui usando la seguente formula

$$child = parent1 + rand * Ratio * (parent2 - parent1)$$

dove `Ratio` può essere uno scalare o un vettore riga di lunghezza uguale al numero di variabili, `rand` è una *function* di MATLAB che genera numeri random distribuiti uniformemente nell'intervallo $(0, 1)$ e `parent1` e `parent2` sono i genitori selezionati.

Quindi la nuova popolazione sostituisce la precedente e tutti gli step descritti in precedenza vengono ripetuti fino a quando viene raggiunto un numero massimo di generazioni o fino a quando non viene soddisfatto un altro criterio di arresto dell'algoritmo, come mostrato in figura 4.1.

4.2 MultiStart

MultiStart è un algoritmo che permette di determinare molteplici minimi locali. Per prima cosa l'algoritmo genera un insieme random di punti di partenza contenuti all'interno del dominio definito dagli intervalli del problema. Se il problema considerato presenta anche condizioni di vincolo come quelle espresse dalle (4.2) e queste condizioni non vengono rispettate dai punti generati, quei punti non sono utilizzati dall'algoritmo di ottimizzazione. In seguito MultiStart esegue un algoritmo di minimizzazione locale (ad esempio `fmincon`) utilizzando come punti di partenza quelli generati precedentemente che soddisfano tutti i vincoli. Una volta determinati tutti i minimi locali, l'algoritmo li riordina in base al valore di fitness dal più basso al più alto.

4.3 Constrained Nonlinear Optimization Algorithms (`fmincon`)

`fmincon` è un algoritmo di ottimizzazione locale che, partendo da un punto iniziale x_0 (che potrebbe essere la soluzione determinata dall'Algoritmo Genetico o uno dei punti random generati da MultiStart), tenta di determinare il punto di minimo della funzione f che soddisfi le condizioni (4.2). `fmincon` può utilizzare diversi

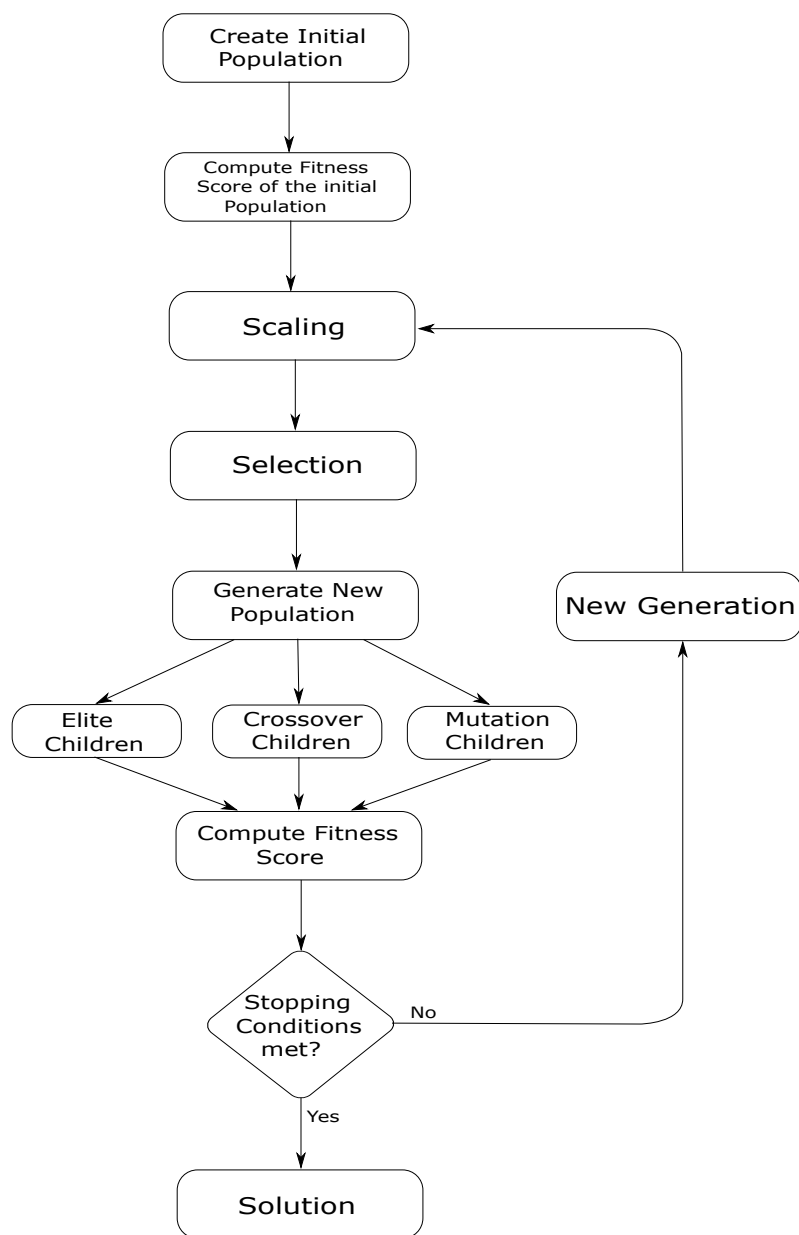


Figura 4.1: Struttura dell'Algoritmo Genetico.

metodi per ottenere la soluzione ottima: in questo studio sono stati presi in considerazione solo “interior-point” e “sqp”. Per quanto riguarda invece le altre opzioni dell'algoritmo sono stati utilizzati tutti i valori di default.

Gli algoritmi interior-point e sqp sono descritti in maniera dettagliata in [38] e [39].

Il metodo *interior-point* riduce il problema originale

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$$

con \mathbf{x} soggetto alle condizioni di vincolo

$$h(\mathbf{x}) = 0 \quad e \quad g(\mathbf{x}) \leq 0$$

a un problema approssimato

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f_{\mu}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f(\mathbf{x}, \mathbf{s}) - \mu \sum_i \ln(s_i) \quad (4.3)$$

con $\mu > 0$ e tutte le $s_i > 0$, dove \mathbf{x} deve soddisfare

$$h(\mathbf{x}) = 0 \quad e \quad g(\mathbf{x}) + \mathbf{s} = 0$$

che è più semplice da risolvere del problema iniziale.

Quindi interior-point risolve il problema di minimizzazione attraverso la risoluzione di una serie di problemi approssimati (4.3). Se μ tende a zero, il minimo di f_{μ} si avvicina al minimo di f . Per risolvere il problema approssimato questo algoritmo usa, ad ogni iterazione, un *direct step* che tenta di risolvere le equazioni di *Karush-Kuhn-Tucker*, note anche come condizioni KKT,

$$\nabla f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x}) + \sum_j y_j \nabla h_j(\mathbf{x}) = 0$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall i$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall j$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$\lambda_i g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall i$$

linearizzando la funzione Lagrangiana della funzione approssimata, dove la Lagrangiana di una funzione f è definita come

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_j y_j h_j(\mathbf{x})$$

dove i λ_i e y_j sono i moltiplicatori di Lagrange. Si ottiene un sistema di equazioni che, una volta risolto, permette di determinare il passo dell'algoritmo $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s})$. Se il tentativo di risoluzione con un *direct step* fallisce, l'algoritmo usa un *Conjugate Gradient step* che invece tenta di risolvere il problema minimizzando un'approssimazione quadratica del problema approssimato in una *trust region*, come descritto in [38].

Ad ogni iterazione l'algoritmo decresce una *merit function*: se un certo passo del procedimento non riduce il valore della funzione quel passo viene scartato e l'algoritmo ne tenta uno nuovo.

L'algoritmo SQP, *Sequential Quadratic Programming*, consiste nella risoluzione di una serie di sottoproblemi, *Quadratic Programming Problem*, basati su un'approssimazione quadratica della Lagrangiana della funzione f da minimizzare e linearizzando le equazioni di vincolo non lineari. Un problema di programmazione quadratica può essere formulato come segue

$$\begin{aligned} \min_{d \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} d^T \mathbb{H}_k d + \nabla f(\mathbf{x}_k)^T d \\ \nabla h_j(\mathbf{x}_k)^T d + h_j(\mathbf{x}_k) &= 0 \quad \forall j \\ \nabla g_i(\mathbf{x}_k)^T d + g_i(\mathbf{x}_k) &\leq 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

La soluzione d_k viene usata per determinare l'iterazione successiva $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, dove il parametro α_k può essere determinato usando una procedura (line search) che permetta di ottenere una riduzione sufficiente di una *merit function*. \mathbb{H}_k rappresenta un'approssimazione della matrice Hessiana della funzione Lagrangiana che può essere ottenuta utilizzando il *metodo di Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (metodo BFGS).

4.4 Pattern Search

fmincon è un metodo pensato per problemi in cui la funzione da minimizzare sia continua e abbia derivate prime continue. In alcune regioni del dominio di definizione della funzione queste condizioni potrebbero non essere rispettate, per questo motivo i risultati ottenuti con fmincon vengono confrontati con quelli ottenuti utilizzando un altro algoritmo di ottimizzazione, Pattern Search. Questo metodo di ottimizzazione non richiede la conoscenza del gradiente della funzione e può quindi essere usato anche per problemi in cui la funzione da minimizzare non sia continua o differenziabile. L'algoritmo è descritto in [26] e [39]. Esso necessita di un punto di partenza e in seguito, ad ogni iterazione, genera delle direzioni attorno al punto e sceglie un passo lungo tali direzioni dove andare a valutare la funzione. Se viene trovato un punto in cui il valore della funzione è minore rispetto a quello attuale, questo viene preso nell'iterazione successiva come nuovo punto centrale e la dimensione del passo viene aumentata. Nel caso in cui invece nessuno dei punti abbia un valore inferiore al punto centrale, questo viene mantenuto per l'iterazione successiva mentre il passo viene ridotto. La

procedura è ripetuta fino a quando la lunghezza del passo raggiunge un valore inferiore a una certa tolleranza.

In questo metodo è possibile andare a specificare gli intervalli per tutte le variabili indipendenti del problema e anche altre condizioni di vincolo che la soluzione deve soddisfare.

Capitolo 5

Risultati del Problema di Ottimizzazione

In questo capitolo vengono riportati i risultati ottenuti applicando gli algoritmi precedentemente descritti ad alcuni problemi di ottimizzazione della traiettoria di trasferimento di un veicolo per una data missione spaziale al fine di ottenere la minima variazione totale di velocità Δv_{tot} .

I problemi considerati hanno soluzione già nota in modo tale da poter confrontare i risultati ottenuti.

Per ognuna delle missioni spaziali esaminate viene definito il dominio all'interno del quale la soluzione viene cercata. La dimensione della popolazione e il numero di generazioni necessarie per trovare la soluzione ottima del problema in esame vengono scelti in modo tale da riuscire a determinare la soluzione cercando di ridurre il più possibile i tempi di calcolo; tuttavia popolazioni o generazioni troppo piccole riducono la probabilità di determinare la soluzione (o potrebbero non essere sufficienti a trovare la soluzione).

Per quanto riguarda il *crossover fraction* viene utilizzato un valore di 0.8, poichè, come spiegato nel capitolo precedente, usando valori più alti l'algoritmo tende rapidamente a convergere verso un minimo locale, mentre usando valori più bassi il valore di fitness decresce molto lentamente.

Si osservi che per la risoluzione degli ultimi tre problemi proposti (missione Terra-Marte, Terra-Giove e Terra-Saturno) è stato utilizzato un metodo che si basa sul procedimento sviluppato da Gad e Abdelkhalik [19]. Per ognuna di queste missioni viene fissato un numero massimo di manovre di fionda gravitazionale e manovre impulsive (DSMs) che il veicolo spaziale può eseguire, tuttavia la soluzione ottima potrebbe richiedere un numero inferiore di queste manovre. Al variare del numero di manovre di fionda gravitazionale e DSMs effettuate, cambia il numero di parametri indipendenti da ottimizzare e quindi varia la dimensione del vettore contenente le incognite del problema. L'Algoritmo Genetico però può gestire solo problemi in cui il vettore abbia dimensione fissata. Per questo motivo

si fissa la dimensione del vettore soluzione (e quindi il numero totale di variabili da ottimizzare) pari alla dimensione massima che può avere, che si ha quando tutti i fly-by e le DSMs sono eseguite. Se poi il numero di manovre è inferiore al numero massimo ammissibile, cosa che accade se una o più delle componenti del vettore *SeqPlanet* assume il valore 10 o se la matrice E contiene elementi nulli, in tal caso parte del vettore soluzione è costituito da geni *inattivi*, cioè quei parametri non sono variabili del problema.

5.1 Manovra di Hohmann

Il primo problema considerato è il trasferimento da un'orbita circolare attorno a Marte di raggio 8000 km a un'orbita circolare, sempre attorno a Marte, di raggio 15000 km. Le due orbite sono complanari.

Poichè le orbite sono circolari, per motivi di simmetria è stato imposto che l'anomalia vera ν_i del veicolo alla partenza sia zero. È stato inoltre imposto che nessuna manovra intermedia nel leg venisse eseguita, quindi il veicolo può effettuare solo una manovra alla partenza e una manovra finale per immettersi nell'orbita di destinazione.

Le incognite del problema sono l'anomalia vera ν_f del veicolo al momento dell'applicazione dell'impulso di arrivo, il tempo di volo sull'orbita di trasferimento T_f e il numero di rivoluzioni m attorno a Marte prima di giungere alla posizione finale sull'orbita di arrivo.

Questo problema è già stato oggetto di studio in [13]: come è noto, per un trasferimento a due impulsi tra orbite circolari e complanari la manovra ottima è la manovra di Hohmann, in cui le due manovre impulsive vengono eseguite in direzione parallela ai vettori velocità iniziale e finale e sono applicati al pericentro e apocentro dell'orbita di trasferimento.

Per risolvere il problema della determinazione della traiettoria ottima di trasferimento è stato usato l'Algoritmo Genetico con una popolazione composta da 100 individui per 150 generazioni. La soluzione del GA potrebbe non essere quella ottima, quindi vengono utilizzati in seguito gli algoritmi *fmincon* e *Pattern Search* descritti nel capitolo precedente.

Il modello utilizzato per il calcolo del Δv_{tot} è quello riportato nel paragrafo 3.3.

La soluzione è stata determinata in pochi secondi ed è riportata in tabella 5.1. L'orbita di trasferimento è rappresentata in figura 5.1 e si può osservare che coincide con un trasferimento di Hohmann.

Variabili di Disegno	Soluzione
ν_f	3.14159 rad
T_f	5.2 h
m	0
Δv_{tot}	0.6091 km/s

Tabella 5.1: Risultati del problema di trasferimento tra due orbite circolari e complanari attorno a Marte.

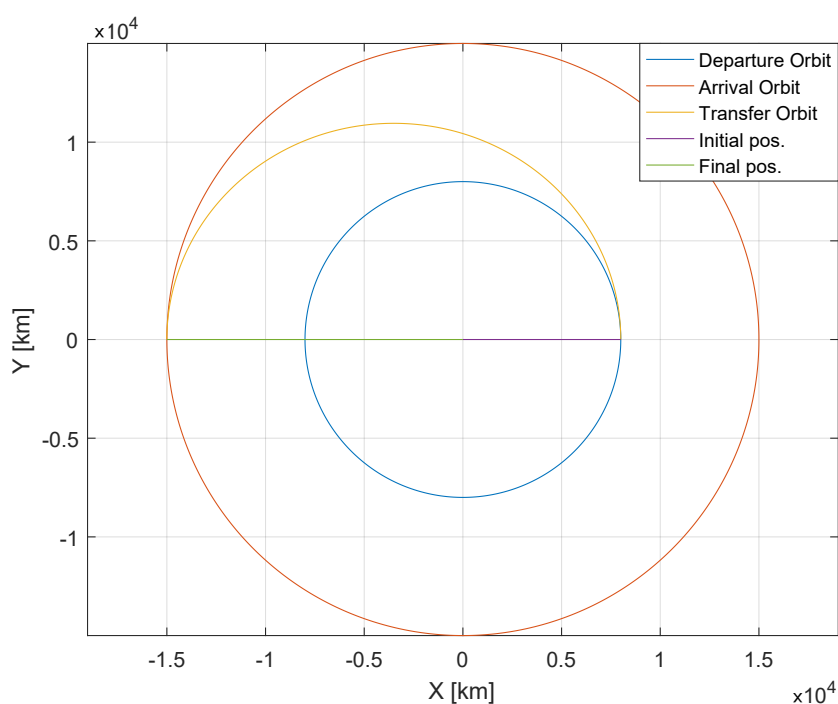


Figura 5.1: Traiettoria di trasferimento ottima tra due orbite circolari e complanari attorno a Marte.

5.2 Trasferimento con tre impulsi

Viene adesso presentato un problema bidimensionale di ottimizzazione della traiettoria di trasferimento da un'orbita circolare terrestre di 7000 km a un'orbita circolare di raggio 42164 km (sempre attorno alla Terra). Questo problema è stato affrontato da Abdelkhalik e Mortari in [13].

Tre variazioni di velocità impulsive possono essere applicate al veicolo spaziale: la manovra impulsiva di partenza, una manovra intermedia e una manovra finale per l'inserimento del veicolo nell'orbita di destinazione.

Le variabili da ottimizzare per questo problema sono l'anomalia finale del

veicolo sull'orbita di arrivo ν_f , il tempo di trasferimento totale T_f , la frazione e del tempo di volo in cui la manovra intermedia viene eseguita e le due componenti del vettore variazione di velocità della manovra impulsiva di partenza.

Per ognuna delle variabili di disegno vengono assegnati degli intervalli (tabella 5.2) che vanno a definire il dominio della funzione in cui cercare la soluzione al problema di ottimizzazione. Il modello utilizzato anche per questo caso è quello

Variabili di Disegno	lb	ub
ν_f [rad]	0	2π
T_f [giorni]	0	10
E	0	1
$\Delta v_{px}, \Delta v_{py}$ [km/s]	-5	5

Tabella 5.2: Intervalli [lb , ub] per le variabili di disegno del problema di trasferimento con tre impulsi.

descritto in 3.3.

Come nel caso precedente, il problema di ottimizzazione è stato risolto utilizzando l'Algoritmo Genetico e, in seguito, `fmincon` e `Pattern Search` per cercare il minimo più vicino alla soluzione del GA. Per quanto riguarda le opzioni del GA è stata utilizzata una popolazione di 300 individui per un totale di 400 generazioni. La determinazione della soluzione ottima richiede pochi minuti ed è riportata in tabella 5.3. L'orbita di trasferimento ottima è rappresentata in figura 5.2.

Variabili di Disegno	Soluzione
ν_f	4.90261 rad
T_f	5.781 ore
E	0.07850
Δv_{px}	-4.11×10^{-10} km/s
Δv_{py}	1.9×10^{-10} km/s
Δv_{tot}	3.7707 km/s

Tabella 5.3: Risultati del problema di trasferimento con tre manovre impulsive tra due orbite circolari e complanari attorno alla Terra.

Si osservi nella tabella 5.3 che la variazione di velocità iniziale Δv_p del veicolo è praticamente nulla: ciò significa che la prima orbita di trasferimento coincide con l'orbita di partenza. La manovra intermedia è la prima manovra effettiva eseguita che immette la sonda sull'orbita di trasferimento. Come si può osservare dalla figura 5.2 il trasferimento così ottenuto è un trasferimento di Hohmann.

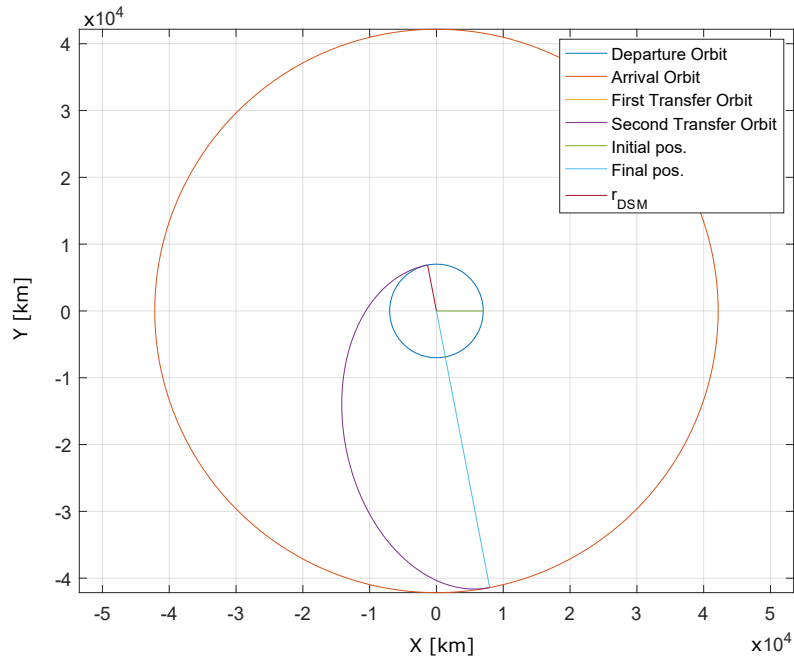


Figura 5.2: Traiettoria di trasferimento con tre impulsi tra due orbite circolari e complanari attorno alla Terra.

5.3 Trasferimento Biellittico

In questo caso si cerca di determinare la traiettoria di trasferimento ottima da un'orbita circolare di partenza attorno alla Terra di raggio $r_i = 7000$ km a un'orbita circolare di arrivo di $r_f = 140000$ km, cioè 20 volte il raggio dell'orbita di partenza.

Anche in questo problema, essendo le orbite iniziale e finale circolari, si impone che l'anomalia vera ν_i alla partenza sia zero. Il veicolo può eseguire tre manovre impulsive: le manovre di partenza e arrivo e un'altra manovra impulsiva intermedia lungo la traiettoria di trasferimento.

Le incognite di questo problema sono quindi l'anomalia vera ν_f all'istante di applicazione della manovra impulsiva di arrivo, il tempo di volo totale sulla traiettoria di trasferimento T_f , la frazione e del tempo di volo totale in cui viene applicata la manovra intermedia e le due componenti del vettore variazione di velocità $(\Delta v_{px}, \Delta v_{py})$ dovute alla manovra di partenza.

Nel caso di trasferimento tra due orbite circolari e complanari la manovra ottima è quella di Hohmann se si impone che il trasferimento sia bi-impulsivo; se invece, come nel caso presentato in questo problema, si impone che gli impulsi

siano tre, la manovra di trasferimento ottima potrebbe essere quella biellittica se il rapporto tra i raggi delle orbite di arrivo e partenza r_f/r_i è maggiore di 15.58 e se il raggio r_{DSM} (cioè il modulo della posizione in cui viene effettuata la manovra intermedia) è maggiore di r_f .

In questo problema il rapporto r_f/r_i è pari a 20, quindi se il tempo di trasferimento T_f è sufficientemente lungo da permettere che r_{DSM} sia maggiore di r_f allora la traiettoria di trasferimento ottima è quella biellittica.

Per risolvere il problema è stata usata una popolazione di 300 individui per 400 generazioni per l'Algoritmo Genetico. La soluzione è stata usata come punto di partenza per gli algoritmi fmincon e Pattern Search. Ogni variabile può assumere valori compresi nell'intervallo $[lb, ub]$: i valori di lb e ub sono riportati in tabella 5.4. La soluzione (che ha richiesto solo qualche minuto per essere determinata) è

Variabili di Disegno	lb	ub
ν_f [rad]	0	2π
T_f [giorni]	0	10
E	0	1
$\Delta v_{px}, \Delta v_{py}$ [km/s]	-5	5

Tabella 5.4: Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento biellittico.

riportata in tabella 5.5 e l'orbita di trasferimento è raffigurata in figura 5.3. La soluzione determinata coincide con una manovra biellittica.

Variabili di Disegno	Soluzione
ν_f	5.2×10^{-9} rad
T_f	10 giorni
E	0.37521
Δv_{px}	-0.0135 km/s
Δv_{py}	3.0099 km/s
Δv_{tot}	3.9546 km/s

Tabella 5.5: Soluzione del problema di trasferimento tra due orbite circolari e complanari attorno alla Terra.

5.4 Trasferimento con Variazione del Piano Orbitale

Questo problema, discusso in [13], considera un trasferimento di un veicolo che inizialmente si trova su un'orbita circolare terrestre di raggio 6671.53 km e con un'inclinazione di 28.5 deg. Il veicolo deve essere trasferito su un'orbita circolare terrestre di raggio 26558.56 km e inclinazione nulla. Il veicolo può eseguire solo due manovre impulsive.

In questo caso la manovra di trasferimento ottima è quella nota come *manovra di Hohmann generalizzata*, in cui la prima variazione di velocità causa solo una

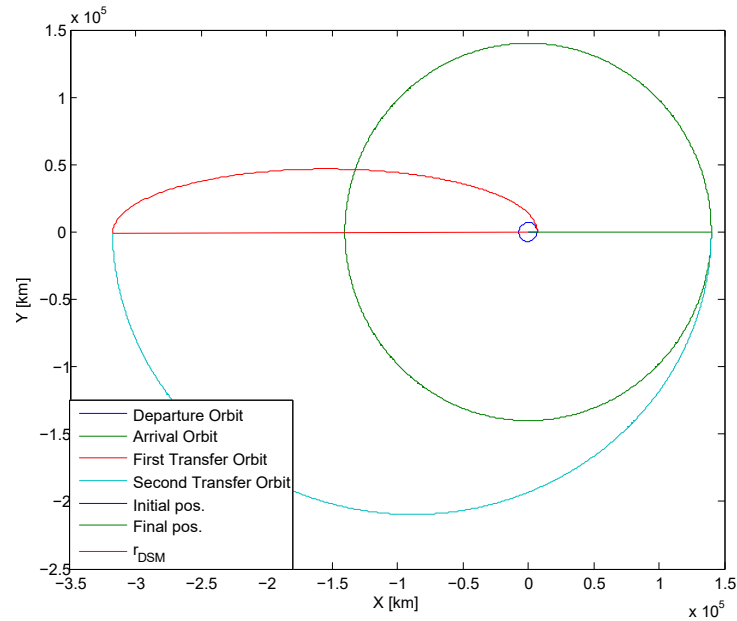


Figura 5.3: Traiettorie di trasferimento biellittiche tra due orbite circolari e complanari attorno alla Terra.

leggera variazione del piano orbitale mentre la maggior parte del cambiamento di piano avviene con la seconda manovra, quando il veicolo si trova più lontano dal baricentro della Terra.

Le variabili da ottimizzare in questo problema sono l'anomalia vera all'istante di applicazione della manovra impulsiva di partenza, ν_i , l'anomalia vera all'istante di applicazione della manovra impulsiva finale, ν_f , e il tempo totale di volo T_f . Gli intervalli $[lb, ub]$ per i tre parametri sono riportati in tabella 5.6. Per

Variabili di Disegno	lb	ub
ν_i [rad]	0	2π
ν_f [rad]	0	2π
T_f [giorni]	0	10

Tabella 5.6: Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento con variazione dell'inclinazione del piano orbitale.

la risoluzione del problema è stato usato l'Algoritmo Genetico (con una popolazione di 100 individui per 200 generazioni) e fmincon e Pattern Search. La soluzione è riportata in tabella 5.7 e il disegno della traiettoria è rappresentato in figura 5.4. La soluzione è la stessa determinata da Abdelkhalik e Mortari in [13].

Variabili di Disegno	Soluzione
ν_f	3.14385 rad
ν_f	6.28288 rad
T_f	2.957 h
Δv_{tot}	4.05898 km/s

Tabella 5.7: Soluzione del problema di trasferimento tra due orbite circolari non complanari attorno alla Terra.

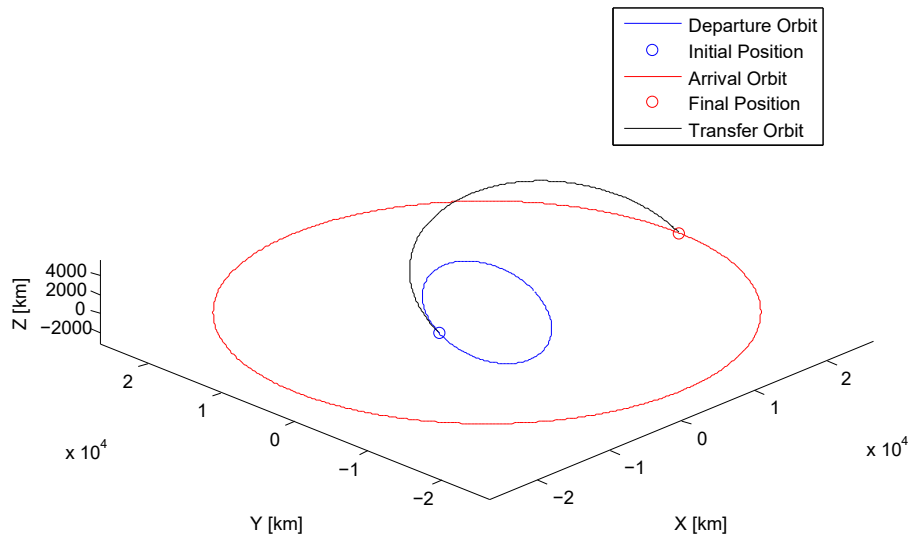


Figura 5.4: Traiettoria di trasferimento tra due orbite terrestri circolari non complanari.

5.5 Missione Terra-Marte

In questo caso si affronta il problema di ottimizzazione della traiettoria interplanetaria di un veicolo spaziale per una missione Terra-Marte. Per la risoluzione del problema si utilizza il modello descritto in 3.4. Il problema viene studiato dividendolo in due sottoproblemi come proposto da Gad e Abdelkhalik in [19]: innanzi tutto viene ottimizzata la traiettoria del veicolo imponendo che esso possa sfruttare solo manovre di fionda gravitazionale e non possa eseguire DSMs. Nella seconda parte, il problema di ottimizzazione viene affrontato ipotizzando che il veicolo possa effettuare sia manovre di fionda gravitazionale che DSMs, fissando la sequenza ottima di pianeti determinata nel primo sottoproblema e imponendo intervalli più stretti attorno alla soluzione del problema senza DSMs, nel tentativo di determinare una soluzione migliore di quella precedente.

Fissati dunque i pianeti di partenza (Terra) e arrivo (Marte), si impone che

il numero di DSM in ogni leg sia zero ($n_{\text{DSM}} = 0$): quindi, in questo caso, la matrice E è formata da elementi nulli e l'impulso di partenza Δv_p è una variabile dipendente. Si impone poi che il veicolo possa effettuare al massimo una sola manovra di fionda gravitazionale.

Dunque le variabili da ottimizzare per questo problema sono la data di lancio t_{0jd} , la data di arrivo su Marte t_{ajd} , il pianeta da utilizzare per la manovra di fionda gravitazionale $SeqPlanet$, il tempo di volo sul primo leg T_1 e il numero di rivoluzioni attorno al Sole in ogni leg, m_1 e m_2 .

Per ognuna delle variabili sono fissati degli intervalli $[lb, ub]$ riportati in tabella 5.8.

Variabili di Disegno	lb	ub
t_{0jd} [mjd2000]	1613	1643
t_{ajd} [mjd2000]	1916	2008
T_1 [giorni]	40	300
m_1, m_2	0	1
$SeqPlanet$	1	10

Tabella 5.8: Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Marte.

L'Algoritmo Genetico è stato utilizzato per determinare la soluzione ottima imponendo una popolazione di 500 individui per 300 generazioni: la soluzione del GA viene poi usata come punto di partenza per gli algoritmi di ottimizzazione locale, fmincon e Pattern Search. L'algoritmo richiede circa 150 secondi per determinare il set di parametri ottimale. La soluzione, riportata in tabella 5.9, ha un costo totale di 10.7788 km/s. La traiettoria ottenuta è rappresentata in

Variabili di Disegno	Soluzione
t_{0jd}	1617.7809 (5 Giugno 2004 18:44:35)
Δv_p	4.6130 km/s
T_1	167.6997 giorni
m_1	0
$SeqPlanet$	2 (Venere)
Data Fly-By	20 Novembre 2004 11:32:09
Δv_{pf}	1.91×10^{-7} km/s
m_2	0
t_{ajd}	1959.8521 (13 Maggio 2005 20:26:58)
Δv_a	6.1657 km/s
Δv_{tot}	10.7788 km/s

Tabella 5.9: Soluzione del problema di trasferimento Terra-Marte senza DSMs.

figura 5.5 e prevede un fly-by di Venere. La variazione di velocità Δv_{pf} richiesta all'uscita dalla sfera d'influenza di Venere è circa zero quindi si tratta di un non-

powered fly-by. Le variazioni di velocità impulsiva alla partenza e all'arrivo, Δv_p e Δv_a , sono invece riportate nella tabella 5.9.

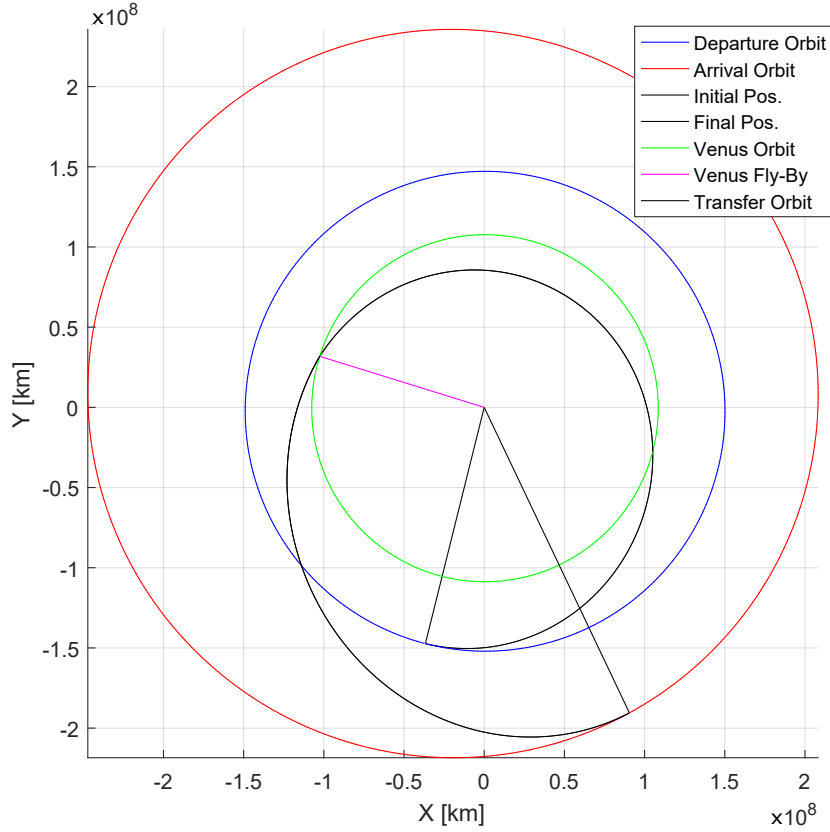


Figura 5.5: Traiettoria di trasferimento Terra-Marte con un fly-by di Venere.

Nella seconda parte del procedimento di ottimizzazione viene affrontato il problema nel caso in cui siano presenti anche DSMs. Come spiegato precedentemente si fissa il pianeta sfruttato per l'incontro iperbolico, cioè Venere, il numero di rivoluzioni m e si impone che il veicolo spaziale possa eseguire al massimo due manovre impulsive su ogni leg ($n_{\text{DSM}} = 2$).

Le incognite sono dunque la data di partenza t_{0jd} , la data di arrivo t_{ajd} , la variazione di velocità alla partenza Δv_p , il tempo di volo sul primo leg T_1 , le quattro componenti della matrice E , le tre componenti di ognuna delle manovre indipendenti $\Delta \mathbf{v}$ eseguite sui due leg (in questo caso il veicolo può eseguire al massimo due DSMs su ogni leg, quindi solo una manovra per leg è una variabile indipendente), il raggio di pericentro r_{per} (adimensionalizzato con il raggio del pianeta) dell'orbita iperbolica descritta dal veicolo durante la manovra di fionda gravitazionale, l'angolo η che definisce il piano su cui avviene la manovra di fionda

gravitazionale. Le variabili da ottimizzare sono dunque 18. Per ognuna delle variabili sono stabiliti gli intervalli $[lb, ub]$ (tabella 5.10): per quanto riguarda t_{0jd} , t_{ajd} e T_1 i valori possono variare entro intervalli di dieci giorni attorno alla soluzione determinata nella prima fase di ottimizzazione senza DSMs.

Variabili di Disegno	lb	ub
t_{0jd} [mjd2000]	1612	1622
t_{ajd} [mjd2000]	1954	1964
T_1 [giorni]	162	172
$\Delta v_{p_{x,y,z}}$ [km/s]	-5	5
e_{ij}	0	1
$\Delta v_{DSM_{x,y,z}}$ [km/s]	-5	5
$r_{per_{ad}}$	1.1	10
η	0	2π

Tabella 5.10: Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Marte con DSMs.

In questo caso la soluzione è soggetta anche a vincoli di ineguaglianza lineare, infatti gli elementi della matrice E devono soddisfare le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} e_{11} &\leq e_{12} \\ e_{21} &\leq e_{22} \end{aligned}$$

L'Algoritmo Genetico necessita di una popolazione di 100 individui e 500 generazioni per determinare la soluzione ottima che è riportata in tabella 5.11 e in figura 5.6. Si osservi che la soluzione ottima prevede una sola DSM nel primo leg

Variabili di Disegno	Soluzione
t_{0jd}	1612.008 (31 Maggio 2004 00:11:34)
Δv_p	4.3633 km/s
T_1	169.8758 giorni
e_{11}	0
e_{12}	0.5798
Data 1° DSM	6 Settembre 2004 11:54:34
Δv_{DSM_1}	0.3273 km/s
Data Fly-By	16 Novembre 2004 21:12:40
r_{per}	13633.8 km
η	0.201 rad
Δv_{pf}	0 km/s
e_{21}	0
e_{22}	0.0063
Data 2° DSM	18 Novembre 2004 00:28:19
Δv_{DSM_2}	2.71×10^{-7} km/s
t_{ajd}	1962.216 (16 Maggio 2005 05:11:30)
Δv_a	5.9929 km/s
Δv_{tot}	10.6835 km/s

Tabella 5.11: Soluzione del problema di trasferimento Terra-Marte con DSMs.

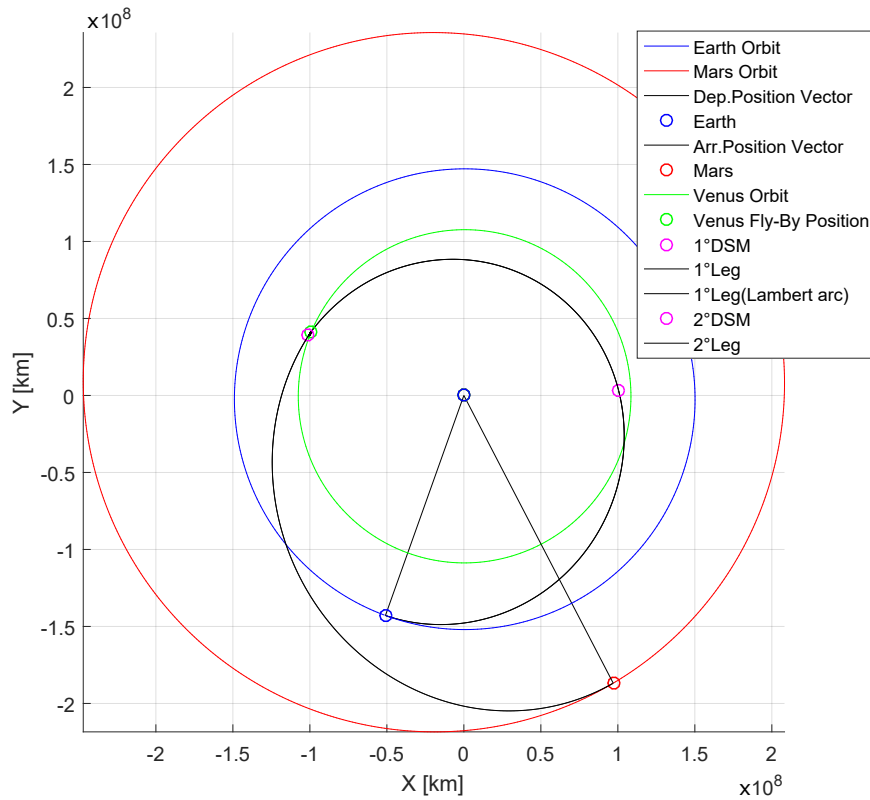


Figura 5.6: Traiettoria di trasferimento Terra-Marte con un fly-by di Venere e DSMs.

con un Δv pari a 0.3273 km/s mentre la variazione di velocità dovuta alla manovra impulsiva eseguita sul secondo leg ha un valore trascurabile. Quindi, introducendo la possibilità di effettuare anche *deep space manoeuvres* è stata ottenuta una soluzione con un Δv_{tot} di 10.6835 km/s, inferiore al valore ottenuto in precedenza.

5.6 Missione Terra-Giove

In questo paragrafo si presenta il problema di ottimizzazione nel caso di una missione Terra-Giove al fine di trovare la traiettoria di trasferimento interplanetario con la minima variazione di velocità totale. Anche questo problema è stato affrontato in [19].

Anche in questo caso il problema è suddiviso in due parti. Inizialmente si cerca la traiettoria ottima nel caso con nessuna DSM e imponendo un numero massimo di manovre di fionda gravitazionale pari a 2, quindi al massimo la traiettoria

sarà formata da tre leg. Le incognite del problema sono nove: data di partenza t_{0jd} , data di arrivo sul pianeta di destinazione t_{ajd} , i pianeti usati per sfruttare le manovre di fionda gravitazionale (cioè le due componenti del vettore $SeqPlanet$), i tempi di volo dei primi due leg T_1 e T_2 e il numero di rivoluzioni di ogni leg (le tre componenti del vettore m). Si osservi che le componenti di $SeqPlanet$ e m possono assumere solo valori interi.

Gli intervalli per ognuna delle variabili da ottimizzare sono riportati in tabella 5.12.

Variabili di Disegno	lb	ub
t_{0jd} [mjd2000]	6088	6118
t_{ajd} [mjd2000]	7914	8035
T_1 [giorni]	80	800
T_2 [giorni]	80	800
$SeqPlanet_{1,2}$	1	10
m_1, m_2, m_3	0	1

Tabella 5.12: Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Giove senza DSMs.

L'Algoritmo Genetico non riesce a determinare la soluzione di questo problema. Sono state utilizzate varie tecniche al fine di aumentare la diversità della popolazione ed evitare che l'algoritmo convergesse rapidamente verso minimi locali caratterizzati da valori del Δv_{tot} superiori a quelli determinati in [19]. Il primo tentativo è stato quello di eseguire l'algoritmo utilizzando valori bassi della frazione di crossover; un'altro tentativo è stato quello di sostituire, ogni certo numero di generazioni, la metà peggiore della popolazione (in termini di valore di fitness) con una nuova popolazione generata in modo random. È stato testato anche il metodo *SVD-based Genetic Algorithm* proposto in [40]. Un'altra tecnica utilizzata è stata quella di ripetere l'Algoritmo Genetico più volte andando a imporre un valore molto elevato alla funzione di fitness in un intorno del minimo trovato nell'iterazione precedente. Nessuna di queste tecniche né altri algoritmi di ottimizzazione globale (come Simulated Annealing [41] e MultiStart) sono stati in grado di determinare la soluzione ottima.

Per risolvere il problema si può utilizzare un metodo come quello descritto in [22] in cui si utilizza un algoritmo costituito da un loop esterno che ottimizza la parte intera del vettore soluzione (cioè le due componenti di $SeqPlanet$ e le tre componenti di m) e un loop interno che invece ottimizza le restanti variabili (t_{0jd} , t_{ajd} , T_1 e T_2). Si potrebbe ad esempio usare l'Algoritmo Genetico come metodo di ottimizzazione per le variabili intere e un altro Algoritmo Genetico o MultiStart per l'ottimizzazione della parte reale della soluzione.

Poichè il numero di tutte le possibili combinazioni di parametri interi non è molto elevato (in questo caso 800 combinazioni totali) si può più semplicemente andare a determinare il set ottimo di variabili reali per ognuna delle possibili combinazioni dei pianeti e del numero di rivoluzioni.

Quindi per ogni insieme di variabili intere viene eseguito un Algoritmo Genetico: le variabili da ottimizzare si riducono dunque a 4. Inizialmente vengono usate popolazioni e generazioni piccole per andare ad individuare le sequenze di pianeti migliori: una popolazione di 100 individui per 50 generazioni è sufficiente a determinare la sequenza di pianeti ottima in circa 1.5 ore; sono state utilizzate anche popolazioni più grandi fino a un massimo di 250 individui per 200 generazioni che richiede un tempo di calcolo totale di circa 12 ore. Le prime quattro sequenze migliori di pianeti da utilizzare per le manovre di fionda gravitazionale e il numero di rivoluzioni di ogni leg sono riportate in tabella 5.13. Fissata la

	<i>SeqPlanet</i>	<i>m</i>
1°	Venere-Terra	[1, 1, 0]
2°	Terra-Marte	[0, 0, 0]
3°	Terra-Marte	[1, 1, 0]
4°	Terra-Terra	[1, 1, 0]

Tabella 5.13: Valori ottimi delle componenti di *SeqPlanet* e *m*.

sequenza ottima di pianeti e del numero di rivoluzioni attorno al sole per ogni leg (Venere-Terra, [1,1,0]), l'Algoritmo Genetico è stato eseguito più volte per determinare i valori ottimi delle variabili reali. La soluzione migliore ottenuta usando questo metodo è riportata in tabella 5.14 e l'immagine 5.7 raffigura la traiettoria ottima.

Variabili di Disegno	Soluzione
t_{0jd}	6088.397 (1 Settembre 2016 09:31:25)
Δv_p	3.4727 km/s
T_1	368.8718 giorni
m_1	1
Data Fly-By di Venere	5 Settembre 2017 06:26:49
Δv_{pf1}	3.67×10^{-5} km/s
T_2	570.0580 giorni
m_2	1
Data Fly-By della Terra	29 Marzo 2019 07:50:24
Δv_{pf2}	0.3350 km/s
m_3	0
t_{ajd}	7934.173 (21 Settembre 2021 04:09:11)
Δv_a	6.1880 km/s
Δv_{tot}	9.9957 km/s

Tabella 5.14: Soluzione del problema di trasferimento Terra-Giove senza DSMs.

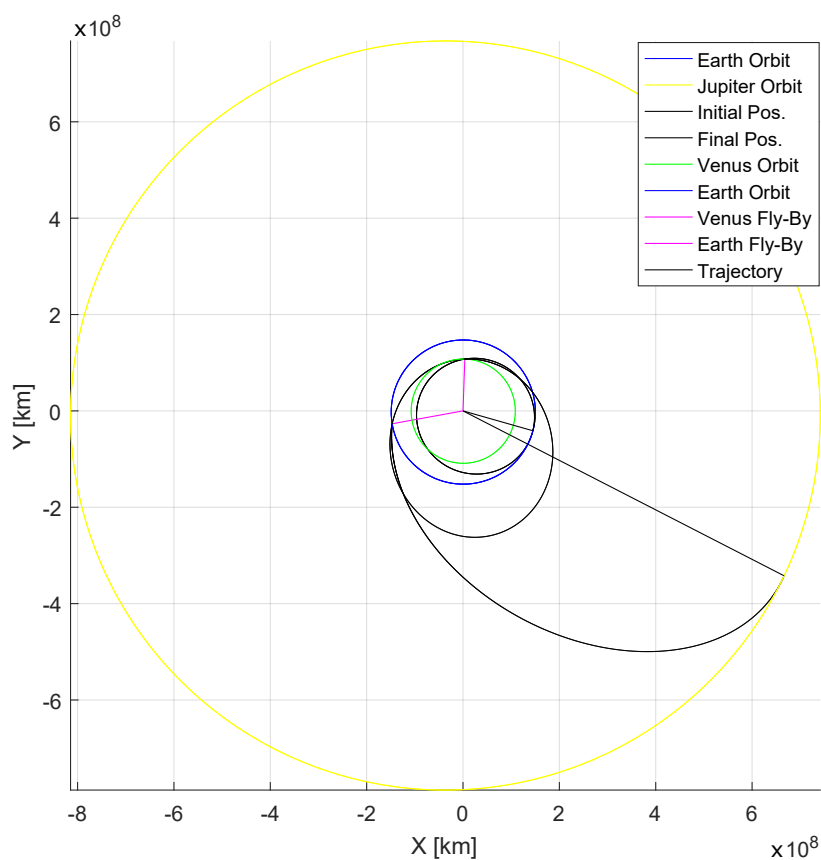


Figura 5.7: Traiettoria di trasferimento Terra-Giove con fly-by di Venere e Terra.

Si osservi che in questa missione il veicolo spaziale deve effettuare, sui primi due leg, un'intera rivoluzione attorno al sole prima di passare al fly-by del pianeta successivo. In uscita dalla sfera d'influenza di Venere, in seguito alla prima manovra di fionda gravitazionale, la variazione di velocità richiesta può essere trascurata, pertanto si tratta di un non-powered fly-by.

Nella seconda parte del procedimento si cerca la soluzione del problema completo che considera sia manovre di fionda gravitazionale che DSMs. In particolare si fissa la sequenza di pianeti e numero di rivoluzioni precedentemente determinati e si impone un numero massimo di DSM per leg pari a due.

Le variabili da ottimizzare sono in questo caso 26. Per le date di lancio e arrivo su Giove e per i tempi di volo sui primi due leg sono fissati intervalli più stretti dei precedenti attorno alla soluzione del problema senza DSMs. Gli altri

intervalli sono mostrati in tabella 5.15. La matrice E in questo problema ha

Variabili di Disegno	lb	ub
t_{0jd} [mjd2000]	6078	6098
t_{ajd} [mjd2000]	7924	7944
T_1 [giorni]	364	374
T_2 [giorni]	565	575
$\Delta v_{p_{x,y,z}}$ [km/s]	-5	5
e_{ij}	0	1
$\Delta v_{DSM_{x,y,z}}$ [km/s]	-5	5
$r_{per_{ad1}}, r_{per_{ad2}}$	1.1	10
η_1, η_2	0	2π

Tabella 5.15: Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Giove con DSMs.

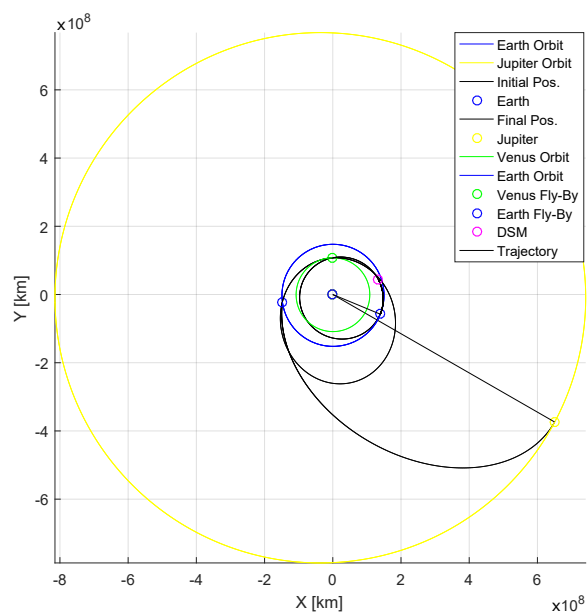
dimensioni 3×2 e le sue componenti devono rispettare le seguenti relazioni di vincolo

$$\begin{aligned} e_{11} &\leq e_{12} \\ e_{21} &\leq e_{22} \\ e_{31} &\leq e_{32} \end{aligned}$$

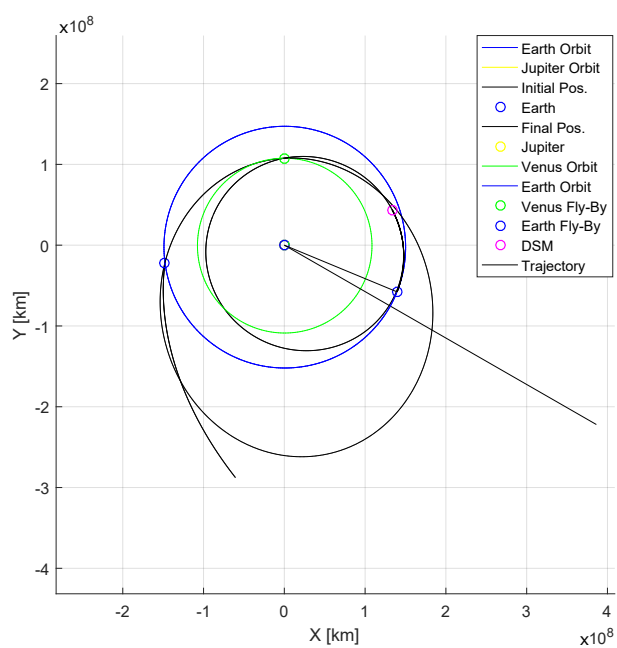
Per questo problema l'algoritmo di ottimizzazione MultiStart è in grado di determinare soluzioni migliori dell'Algoritmo Genetico. È stato utilizzato un numero di 500 o 1000 punti di partenza per l'algoritmo di ottimizzazione locale. Il tempo di calcolo richiesto dall'algoritmo è di circa 20 minuti. La migliore soluzione determinata con MultiStart è riportata in tabella 5.16: la traiettoria di trasferimento e la posizione delle DSMs sono rappresentate in figura 5.8(a) e 5.8(b).

Variabili di Disegno	Soluzione
t_{0jd}	6085.954 (29 Agosto 2016 22:53:35)
Δv_p	3.1604 km/s
T_1	373.2178 giorni
e_{11}	0
e_{12}	0.1197
Data DSM	13 Ottobre 2016 14:51:28
Δv_{DSM}	0.3147 km/s
Data Fly-By di Venere	7 Settembre 2017 04:07:12
Δv_{pf1}	2.03×10^{-5} km/s
T_2	567.6479 giorni
e_{21}, e_{22}	0
Data Fly-By della Terra	28 Marzo 2019 19:40:12
Δv_{pf2}	0.3338 km/s
e_{31}, e_{32}	0
t_{ajd}	7934.265 (21 Settembre 2021 06:21:37)
Δv_a	6.1808 km/s
Δv_{tot}	9.9898 km/s

Tabella 5.16: Soluzione del problema di trasferimento Terra-Giove con DSMs.



(a) Traiettoria di trasferimento.



(b) Ingrandimento.

Figura 5.8: Traiettoria di trasferimento Terra-Giove con fly-bys di Venere e Terra e DSMs.

Si può dunque osservare che la soluzione ottima è costituita da una sola DSM nel primo leg con una variazione di velocità di 0.3147 km/s, un non-powered fly-by con Venere (il Δv_{pf} richiesto è infatti trascurabile) e un powered fly-by con la Terra (in cui il veicolo deve eseguire una manovra con un Δv_{pf} di 0.3338 km/s).

5.7 Missione Terra-Saturno

Viene adesso affrontato il problema di ottimizzazione della traiettoria interplanetaria per una missione Terra-Saturno.

Anche in questo caso il problema viene inizialmente affrontato considerando solo la possibilità di utilizzare manovre di fionda gravitazionale. Viene imposto che non possano essere effettuate DSMs e che il numero di rivoluzioni complete del veicolo in ogni leg prima di effettuare la manovra di fionda gravitazionale successiva sia zero (m è pari a zero per ogni leg). Viene inoltre imposto che il numero di manovre di fionda gravitazionale sia quattro.

Le incognite del problema sono 10, quattro intere (le 4 componenti del vettore *SeqPlanet*) e sei reali, la data di lancio t_{0jd} , la data di arrivo su Saturno t_{ajd} e i tempi di volo sui quattro leg.

Come nel problema precedente, per prima cosa si va a determinare la sequenza ottima di pianeti da utilizzare per effettuare le manovre di fionda gravitazionale andando a eseguire un Algoritmo Genetico per ogni possibile combinazione dei parametri interi (cioè per ogni possibile combinazione di pianeti). Per quanto riguarda i pianeti che possono essere utilizzati per effettuare le manovre di fionda gravitazionale, vengono presi in considerazione solo Venere, la Terra, Marte e Giove. Quindi tutte le possibili sequenze sono 256.

Gli intervalli per i parametri di disegno sono indicati in tabella 5.17. La po-

Variabili di Disegno	lb	ub
t_{0jd} [mjd2000]	-791	-761
t_{ajd} [mjd2000]	2557	2737
T_1 [giorni]	40	1000
T_2 [giorni]	40	1000
T_3 [giorni]	40	1000
T_4 [giorni]	40	1000
$SeqPlanet_{1,2,3,4}$	2	5

Tabella 5.17: Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Saturno senza DSMs.

polazione minima utilizzata è stata di 200 individui per 500 generazioni ed ha

richiesto circa 24 ore per determinare la sequenza di pianeti migliore. Il problema è stato studiato anche con popolazioni più grandi fino a un massimo di 750 individui per 500 generazioni (richiedendo tempi di calcolo maggiori, fino a circa 68 ore). Le migliori sequenze di pianeti sono riportate in tabella 5.18. Si va poi

	<i>SeqPlanet</i>
1°	Venere-Venere-Terra-Giove
2°	Terra-Venere-Terra-Giove
3°	Terra-Venere-Venere-Terra
4°	Terra-Terra-Marte-Marte

Tabella 5.18: Valori ottimi delle componenti di *SeqPlanet*.

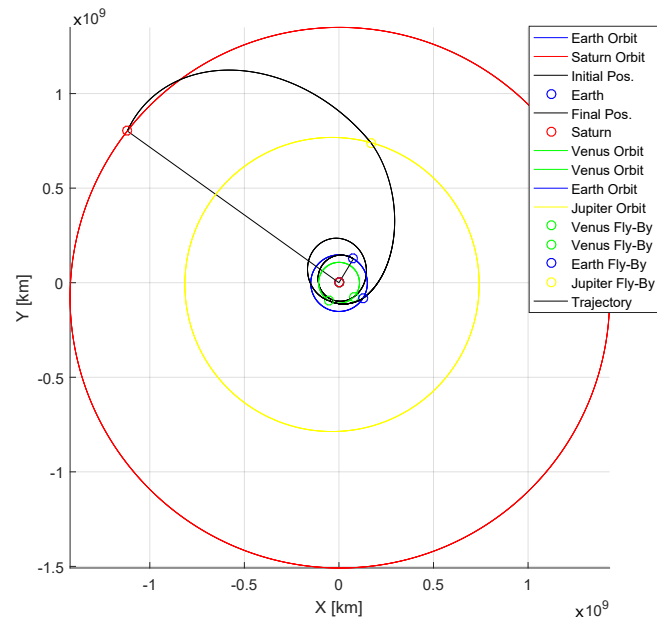
a determinare l'insieme ottimo di parametri reali fissando la sequenza di pianeti pari a quella migliore ottenuta in precedenza. Utilizzando una popolazione di 750 individui per 500 generazioni la soluzione migliore trovata è quella riportata in tabella 5.19 e la corrispondente traiettoria è rappresentata in figura 5.9(a) e 5.9(b).

Variabili di Disegno	Soluzione
t_{0jd}	-767.452 (24 Novembre 1997 13:09:48)
Δv_p	3.9116 km/s
T_1	177.6831 giorni
Data Fly-By di Venere	21 Maggio 1998 05:33:23
Δv_{pf1}	2.3923 km/s
T_2	402.4206 giorni
Data Fly-By di Venere	27 Giugno 1999 15:39:00
Δv_{pf2}	0.0068 km/s
T_3	53.1423 giorni
Data Fly-By della Terra	19 Agosto 1999 19:03:55
Δv_{pf3}	1.13×10^{-9} km/s
T_4	596.5914 giorni
Data Fly-By di Giove	7 Aprile 2001 09:15:29
Δv_{pf4}	3×10^{-5} km/s
t_{ajd}	2736.855 (29 Giugno 2007 20:31:22)
Δv_a	4.2266 km/s
Δv_{tot}	10.5375 km/s

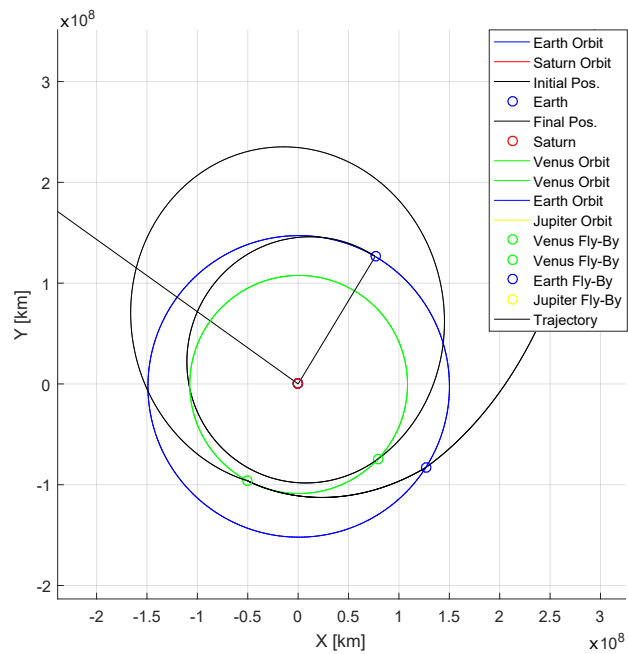
Tabella 5.19: Soluzione del problema di trasferimento Terra-Saturno senza DSMs.

Si osservi che la data di arrivo su Saturno è molto diversa rispetto alla soluzione determinata in [19] ma il Δv_{tot} trovato è minore: la traiettoria trovata da Gad e Abdelkhalik ha un costo totale di 10.685 km/s e la data di arrivo su Saturno è il 12 Gennaio 2007.

Determinata la soluzione della prima parte del problema, si fissa la sequenza di pianeti ottima (Venere-Venere-Terra-Giove) e si considera il caso in cui il veicolo possa effettuare anche una DSM in ogni leg. Le incognite del problema e



(a) Traiettoria di trasferimento.



(b) Ingrandimento.

Figura 5.9: Traiettoria di trasferimento Terra-Saturno con 4 fly-bys senza DSMs.

i relativi intervalli di definizione sono riportati in tabella 5.20. Anche in questo

Variabili di Disegno	lb	ub
t_{0jd} [mjd2000]	-791	-761
t_{ajd} [mjd2000]	2600	2750
T_1 [giorni]	160	190
T_2 [giorni]	390	430
T_3 [giorni]	40	60
T_4 [giorni]	580	610
$\Delta v_{p_{x,y,z}}$ [km/s]	-5	5
e_{ij}	0	1
$r_{per_{ad1}}$	1.05	5
$r_{per_{ad2}}$	1.05	5
$r_{per_{ad3}}$	1.06	5
$r_{per_{ad4}}$	9.4	100
$\eta_{1,2,3,4}$	0	2π

Tabella 5.20: Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Saturno con DSMs.

caso MultiStart è in grado di determinare soluzioni migliori rispetto all'Algoritmo Genetico. MultiStart è stato eseguito utilizzando 1000 o 10000 punti di partenza per l'algoritmo di ottimizzazione locale. Nel caso con 10000 punti l'algoritmo necessita di tempi di calcolo di circa 25 ore. La soluzione migliore che questo metodo è riuscito a determinare è quella riportata in tabella 5.21 in cui si è imposto che negli ultimi tre leg non vi fossero DSMs.

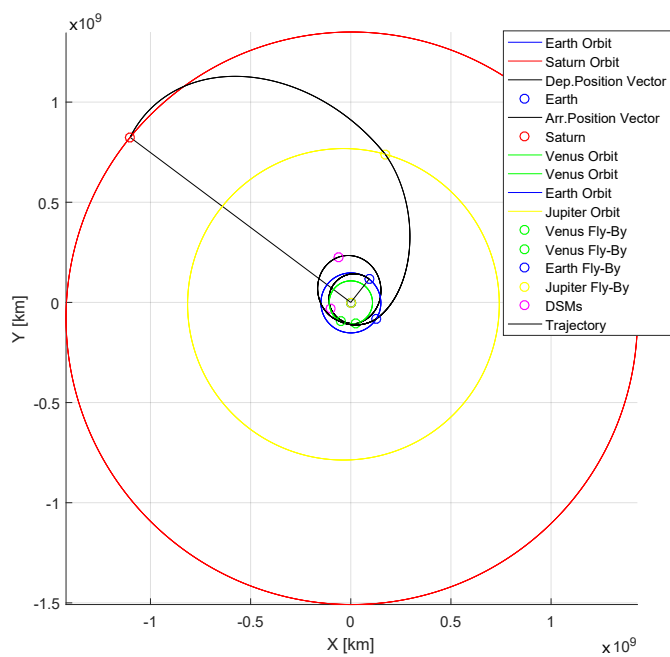
Precedentemente era stato studiato anche il caso generale con DSM su ogni leg: la traiettoria determinata era caratterizzata da un Δv_{tot} di 8.4174 km/s.

La traiettoria ottima trovata è rappresentata in figura 5.10(a) e 5.10(b).

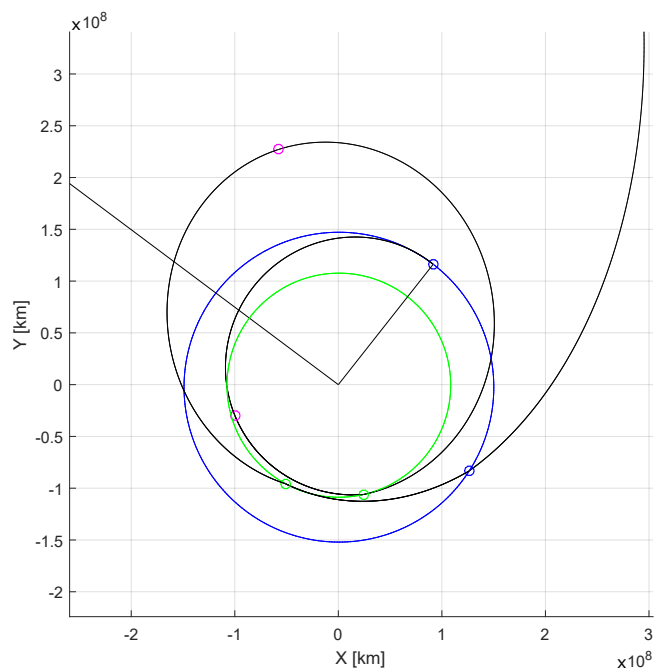
Confrontando i risultati con [19], si osserva che le date in cui le manovre di fionda gravitazionale vengono effettuate coincidono con quelle determinate in questo lavoro. Le date in cui le DSMs vengono eseguite differiscono invece di circa 10 giorni: nello studio di Gad e Abdelkhalik la prima manovra viene eseguita il 25 Marzo 1998 ed il modulo del vettore variazione di velocità è 0.449 km/s, la seconda manovra è invece eseguita giorno 11 Dicembre 1998 ed ha un modulo di 0.396 km/s. La traiettoria determinata in [19] ha un costo totale di 8.385 km/s, leggermente inferiore a quello determinato in questo studio.

Variabili di Disegno	Soluzione
t_{0jd}	-778.4 (13 Novembre 1997 14:24:00)
Δv_p	3.2834 km/s
T_1	167 giorni
e_1	0.7251
Data 1° DSM	14 Marzo 1998 16:27:45
Δv_{DSM_1}	0.4689 km/s
Data Fly-By di Venere	29 Aprile 1998 14:24:00
Δv_{pf1}	0 km/s
T_2	423.6313 giorni
e_2	0.5612
Data 2° DSM	23 Dicembre 1998 07:50:21
Δv_{DSM_2}	0.4052 km/s
Data Fly-By di Venere	27 Giugno 1999 05:33:00
Δv_{pf2}	1.92×10^{-6} km/s
T_3	53.3718 giorni
Data Fly-By della Terra	19 Agosto 1999 14:28:24
Δv_{pf3}	3.55×10^{-6} km/s
T_4	588.4026 giorni
Data Fly-By di Giove	30 Marzo 2001 00:08:11
Δv_{pf4}	2.35×10^{-4} km/s
t_{ajd}	2638.9764 (23 Marzo 2007 23:26:04)
Δv_a	4.2512 km/s
Δv_{tot}	8.4089 km/s

Tabella 5.21: Soluzione del problema di trasferimento Terra-Saturno senza DSMs.



(a) Traiettoria di trasferimento.



(b) Ingrandimento.

Figura 5.10: Traiettoria di trasferimento Terra-Saturno con 4 fly-bys e DSMs.

Capitolo 6

Conclusioni

In questa tesi è stato studiato il problema di ottimizzazione di traiettorie di trasferimento di un veicolo spaziale da una certa orbita di partenza nota a un'orbita di destinazione obiettivo della missione utilizzando manovre impulsive. Sono state studiate missioni che prevedevano trasferimenti tra orbite aventi come corpo di attrazione primario lo stesso corpo celeste (ad esempio trasferimenti tra orbite attorno alla Terra) e missioni interplanetarie per il trasferimento del veicolo da un pianeta di partenza verso un pianeta di destinazione finale. In quest'ultimo caso il veicolo poteva eseguire un certo numero di manovre impulsive e poteva sfruttare la forza di gravità dei pianeti del Sistema Solare per effettuare manovre di fionda gravitazionale.

Sviluppato un modello in grado di determinare il costo totale di una missione in termini di variazione totale di velocità Δv_{tot} , sono stati utilizzati algoritmi di ottimizzazione globale (Algoritmo Genetico, MultiStart) per determinare il set di parametri che descrivono univocamente la traiettoria ottima di trasferimento del veicolo. L'Algoritmo Genetico determina una soluzione che teoricamente si colloca nell'intorno del minimo globale: il risultato del GA viene quindi utilizzato come punto iniziale di algoritmi di minimizzazione locale (fmincon e Pattern Search) che sono in grado di trovare il minimo locale più vicino alla soluzione dell'Algoritmo Genetico.

Nel caso di missioni molto semplici con un basso numero di variabili da ottimizzare il solo Algoritmo Genetico è stato in grado di determinare la soluzione ottima. Per le missioni interplanetarie invece il problema è stato suddiviso in due parti: inizialmente si determina la soluzione ottima nel caso di trasferimento senza l'utilizzo di manovre impulsive intermedie lungo i leg (DSMs) e, in seguito, fissata la sequenza di pianeti per le manovre di fionda gravitazionale, determinata nella

prima parte del problema, si risolve il problema di ottimizzazione considerando anche l'utilizzo di DSMs.

Per le missioni più complesse che prevedevano 2 o più manovre di fionda gravitazionale, l'Algoritmo Genetico non è stato in grado di determinare la soluzione ottima. In questi casi per prima cosa è stata determinata la sequenza ottima di pianeti per le manovre di fionda gravitazionale (e per le altre variabili intere): per ogni combinazione di variabili intere è stato eseguito un Algoritmo Genetico che andasse a trovare il set ottimo dei parametri reali.

I metodi descritti sono stati in grado di trovare soluzioni ottime molto vicine e in certi casi migliori di quelle disponibili in letteratura.

Bibliografia

- [1] Minovitch, M. A., “The invention that opened the solar system to exploration,” *Planetary and Space Science*, Vol. 58, March 2010, pp. 885–892. doi: 10.1016/j.pss.2010.01.008.
- [2] “Pioneer11,” <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1973-019A>.
- [3] “Voyager2,” <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1977-076A>.
- [4] “Voyager1,” <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1977-084A>.
- [5] “Ulysses,” <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1990-090B>.
- [6] “Galileo,” <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=1989-084B>.
- [7] “Cassini-Huygens,” http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Cassini-Huygens/The_mission.
- [8] “Messenger,” <http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraftDisplay.do?id=2004-030A>.
- [9] “New Horizons,” http://www.nasa.gov/mission_pages/newhorizons/main/index.html.
- [10] “Rosetta,” http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Rosetta/The_long_trek.
- [11] Conway, B. A., “A Survey of Methods Available for the Numerical Optimization of Continuous Dynamic Systems,” *Journal of Optimization*

- Theory and Applications*, Vol. 152, September 2011, pp. 271–306. doi: 10.1007/s10957-011-9918-z.
- [12] Kim, Y. H. and Spencer, D. B., “Optimal Spacecraft Rendezvous Using Genetic Algorithms,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 39, No. 6, November-December 2002, pp. 859–865.
- [13] Abdelkhalik, O. and Mortari, D., “N-Impulse Orbit Transfer Using Genetic Algorithms,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 44, No. 2, March-April 2007, pp. 456–459. doi: 10.2514/1.24701.
- [14] Bessette, C. R. and Spencer, D. B., “Identifying Optimal Interplanetary Trajectories through a Genetic Approach,” AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, AIAA, Keystone, Colorado, August 21-24 2006, AIAA Paper 2006-6306.
- [15] Olds, A. D., Kluever, C. A., and Cupples, M. L., “Interplanetary Mission Design Using Differential Evolution,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 44, No. 5, September-October 2007, pp. 1060–1070. doi: 10.2514/1.27242.
- [16] Sentinella, M. R. and Casalino, L., “Hybrid Evolutionary Algorithm for the Optimization of Interplanetary Trajectories,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 46, No. 2, March-April 2009, pp. 365–371. doi: 10.2514/1.38440.
- [17] Vasile, M., Minisci, E., and Locatelli, M., “Analysis of Some Global Optimization Algorithms for Space Trajectory Design,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 47, No. 2, March-April 2010, pp. 334–344. doi: 10.2514/1.45742.
- [18] Abdelkhalik, O. and Gad, A., “Dynamic-Size Multiple Populations Genetic Algorithm for Multigravity-Assist Trajectories Optimization,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 35, No. 2, March-April 2012, pp. 520–528. doi: 10.2514/1.54330.
- [19] Gad, A. and Abdelkhalik, O., “Hidden Genes Genetic Algorithm for Multi-Gravity-Assist Trajectories Optimization,” *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 48, No. 4, July-August 2011, pp. 629–641. doi: 10.2514/1.52642.
- [20] Ceriotti, M., *Global optimisation of multiple gravity assist trajectories*, 2010, PhD thesis, University of Glasgow.

- [21] Izzo, D., Becerra, V., Myatt, D., Nasuto, S., and Bishop, J., "Search space pruning and global optimisation of multiple gravity assist spacecraft trajectories," *Journal of Global Optimization*, Vol. 38, November 2006, pp. 283–296. doi: 10.1007/s10898-006-9106-0.
- [22] Englander, J. A., Conway, B. A., and Williams, T., "Automated Interplanetary Trajectory Planning," AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, AIAA, Minneapolis, Minnesota, August 13-16 2012, AIAA Paper 2012-4517.
- [23] "GeneticAlgorithm," <http://it.mathworks.com/help/gads/ga.html>.
- [24] "MultiStart," <http://it.mathworks.com/help/gads/how-globalsearch-and-multistart-work.html?searchHighlight=how%20multistart%20workl>.
- [25] "fmincon," <http://it.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html?searchHighlight=Fmincon>.
- [26] "PatternSearch," <http://it.mathworks.com/help/gads/patternsearch.html>.
- [27] Mengali, G. and Quarta, A., *Fondamenti di Meccanica del Volo Spaziale*, Pisa University Press, 2013.
- [28] "Matlab planetEphemeris," <http://it.mathworks.com/help/aerotbx/ug/planetephemeris.html>.
- [29] Folkner, W. M., Williams, J. G., and Boggs, D. H., "The Planetary and Lunar Ephemeris DE 421," *Interplanetary Network Progress Report*, Vol. 178, August 2009, pp. 1–34.
- [30] "International Celestial Reference Frame (ICRF)," <http://www.iers.org/IERS/EN/DataProducts/ICRF/ICRF/icrf.html;jsessionid=F55FD7E798E1C90CA9108426A6EF905F.live21>.
- [31] "ESA ACT Global Trajectory Optimisation Problems Database," <http://www.esa.int/gsp/ACT/inf/projects/gtop/gtop.html>.
- [32] Battin, R., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1999.
- [33] "Analytic Two Body Propagator (Kepler Universal Variables) by Darin Koblick," <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/>

- 35566-vectorized-analytic-two-body-propagator-kepler-universal-variables-/content/keplerUniversal.m.
- [34] “Robust solver for Lambert’s orbital-boundary value problem by Rody Oldenhuis,” <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/26348-robust-solver-for-lambert-s-orbital-boundary-value-problem>.
- [35] Lancaster, E. and Blanchard, R., “A unified form of Lambert’s theorem,” NASA TN D-5368, 1969.
- [36] Gooding, R. H., “A procedure for the solution of Lambert’s orbital boundary-value problem,” *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 48, No. 2, 1990, pp. 145–165.
- [37] “Matlab Genetic Algorithm Options,” <http://it.mathworks.com/help/gads/genetic-algorithm-options.html#f14223>.
- [38] “Constrained-Nonlinear-Optimization-Algorithms,” <http://it.mathworks.com/help/optim/ug/constrained-nonlinear-optimization-algorithms.html>.
- [39] Nocedal, J. and Wright, S. J., *Numerical Optimization*, Springer Science+Business Media, LLC., 2006.
- [40] DeLucia, A., DiPenta, M., Oliveto, R., and Panichella, A., “Estimating the Evolution Direction of Populations to Improve Genetic Algorithms,” *Genetic and Evolutionary Computation Conference*, Philadelphia, Pennsylvania, USA, July 7-11 2012, ACM 978-1-4503-1177-9/12/07.
- [41] “Matlab Simulated Annealing,” <http://it.mathworks.com/help/gads/simulannealbnd.html>.

Elenco delle figure

1.1	Rappresentazione artistica del veicolo Sputnik 1 in orbita (a). Modello del Vostok con il suo stadio superiore, esposizione "Russia in Space", Frankfurt Airport's (b).	2
1.2	Neil Armstrong vicino al modulo di atterraggio Eagle sulla superficie della Luna.	2
1.3	Sonda interplanetaria Mariner 2 (a). Traiettoria eliocentrica della sonda Mariner 2 (b).	3
1.4	Traiettoria della sonda Mariner10: dal lancio, avvenuto il 3 Novembre 1973, al primo fly-by di Mercurio il 29 Marzo 1974.	5
1.5	Pioneer 11 e gli anelli di Saturno (rappresentazione artistica) (a). Traiettoria della sonda Pioneer 11 (b).	6
1.6	Sonda Voyager (a). Traiettorie delle sonde Voyager 1 e Voyager 2 (b).	7
1.7	Traiettoria della missione Ulysses.	8
1.8	Traiettoria della sonda Galileo e principali eventi della missione.	8
1.9	Traiettoria del veicolo spaziale Cassini-Huygens.	9
1.10	Traiettoria della sonda Messenger.	10
1.11	Traiettoria della sonda Rosetta.	11
1.12	Traiettoria interplanetaria della sonda Juno.	11
2.1	Rappresentazione di una traiettoria di trasferimento con manovre di fionda gravitazionale e DSMs.	17
3.1	Un veicolo spaziale soggetto alla forza gravitazionale di altri due corpi.	24
3.2	Rappresentazione di un trasferimento tra orbite complanari con manovre impulsive.	27
3.3	Trasferimento interplanetario con manovre di fionda gravitazionale e DSMs.	30

3.4	Confronto tra JPL DE421 e effemeridi analitiche per la Terra. . . .	32
3.5	Confronto tra JPL DE421 e effemeridi analitiche per Saturno. . . .	33
3.6	Differenze tra JPL DE421 e effemeridi analitiche nel caso della Terra.	34
3.7	Differenze tra JPL DE421 e effemeridi analitiche nel caso di Saturno.	35
3.8	Ultimo tratto di un leg determinato tramite la risoluzione di un problema di Lambert.	39
3.9	Angolo al centro $\Delta\nu$ spazzato da un veicolo in un problema di Lambert.	40
3.10	Manovra di Fionda Gravitazionale.	41
3.11	Angoli di rotazione usati per la trasformazione di coordinate. . . .	43
3.12	Calcolo della variazione di velocità nel caso di powered fly-by. . . .	45
4.1	Struttura dell'Algoritmo Genetico.	51
5.1	Traiettoria di trasferimento ottima tra due orbite circolari e com- planari attorno a Marte.	57
5.2	Traiettoria di trasferimento con tre impulsi tra due orbite circolari e complanari attorno alla Terra.	59
5.3	Traiettoria di trasferimento biellittica tra due orbite circolari e complanari attorno alla Terra.	61
5.4	Traiettoria di trasferimento tra due orbite terrestri circolari non complanari.	62
5.5	Traiettoria di trasferimento Terra-Marte con un fly-by di Venere. .	64
5.6	Traiettoria di trasferimento Terra-Marte con un fly-by di Venere e DSMs.	66
5.7	Traiettoria di trasferimento Terra-Giove con fly-by di Venere e Terra.	69
5.8	Traiettoria di trasferimento Terra-Giove con fly-bys di Venere e Terra e DSMs.	71
5.9	Traiettoria di trasferimento Terra-Saturno con 4 fly-bys senza DSMs.	74
5.10	Traiettoria di trasferimento Terra-Saturno con 4 fly-bys e DSMs. .	77

Elenco delle tabelle

3.1	Parametri gravitazionali del Sole e dei pianeti del Sistema Solare.	23
3.2	Raggio, distanza media dal Sole e raggio della sfera d'influenza dei pianeti del Sistema Solare.	25
3.3	Corrispondenza tra i pianeti del Sistema Solare e i valori inseriti nel vettore <i>SeqPlanet</i>	29
3.4	Valori minimi del raggio di pericentro $r_{per\ min}$ dell'orbita iperbolica durante una manovra di fionda gravitazionale di un pianeta.	42
5.1	Risultati del problema di trasferimento tra due orbite circolari e complanari attorno a Marte.	57
5.2	Intervalli $[lb, ub]$ per le variabili di disegno del problema di trasferimento con tre impulsi.	58
5.3	Risultati del problema di trasferimento con tre manovre impulsive tra due orbite circolari e complanari attorno alla Terra.	58
5.4	Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento biellittico.	60
5.5	Soluzione del problema di trasferimento tra due orbite circolari e complanari attorno alla Terra.	60
5.6	Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento con variazione dell'inclinazione del piano orbitale.	61
5.7	Soluzione del problema di trasferimento tra due orbite circolari non complanari attorno alla Terra.	62
5.8	Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Marte.	63
5.9	Soluzione del problema di trasferimento Terra-Marte senza DSMs.	63
5.10	Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Marte con DSMs.	65
5.11	Soluzione del problema di trasferimento Terra-Marte con DSMs.	65

5.12	Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Giove senza DSMs.	67
5.13	Valori ottimi delle componenti di <i>SeqPlanet</i> e m	68
5.14	Soluzione del problema di trasferimento Terra-Giove senza DSMs.	68
5.15	Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Giove con DSMs.	70
5.16	Soluzione del problema di trasferimento Terra-Giove con DSMs.	70
5.17	Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Saturno senza DSMs.	72
5.18	Valori ottimi delle componenti di <i>SeqPlanet</i>	73
5.19	Soluzione del problema di trasferimento Terra-Saturno senza DSMs.	73
5.20	Valori di lb e ub per le variabili di disegno del problema di trasferimento Terra-Saturno con DSMs.	75
5.21	Soluzione del problema di trasferimento Terra-Saturno senza DSMs.	76