

UNIVERSITÀ DI PISA
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali



Corso di laurea magistrale in
FISICA

**Teoria efficace dell'inflazione
con simmetria galileiana**

Relatore
Dr. Enrico Trincherini

Candidato
Enis Belgacem

a.a. 2014-2015

Indice

1	L'inflazione	9
1.1	I problemi del Modello Standard della Cosmologia	9
1.1.1	Il problema dell'orizzonte	10
1.1.2	Il problema della piattezza	10
1.1.3	Il problema delle perturbazioni primordiali	11
1.2	La soluzione dell'inflazione	12
1.2.1	La soluzione al problema dell'orizzonte	12
1.2.2	La soluzione al problema della piattezza	13
1.3	Realizzazione dell'inflazione e slow-roll	14
1.4	La produzione delle perturbazioni	18
1.5	Teoria di campo efficace dell'inflazione	21
1.6	Applicazione all'inflazione slow-roll e spettro scalare	24
1.7	Spettro tensoriale dell'inflazione	30
1.8	Non-gaussianità primordiali	31
1.8.1	Formalismo di Schwinger-Keldysh	33
1.8.2	Il caso di slow-roll	37
1.8.3	Non-gaussianità grandi e instabilità radiativa	38
1.9	Dati osservativi e vincoli sui parametri inflazionari	41
2	Simmetria galileiana	43
2.1	Galileone su spazio-tempo piatto	43
2.1.1	Analisi delle correzioni radiative	44
2.2	Galileone su spazio-tempo curvo	45
2.2.1	Studio delle proprietà di rinormalizzazione	46
2.3	Teorie WBG	47
3	Inflazione WBG	49
3.1	Esistenza del background inflazionario	49

3.1.1	Dominio del potenziale e slow-roll	54
3.1.2	Dominio dei termini cinetici	54
3.2	Perturbazioni	55
3.2.1	Costruzione della teoria efficace nel caso WBG	55
3.2.2	Regime di decoupling e azione per il bosone di Goldstone . . .	62
3.3	Non-gaussianità nel caso WBG con slow-roll	66
3.4	Studio del regime cinetico	73
3.5	Confronto tra i modelli di inflazione	76
4	Conclusioni	79

Introduzione

L'ultimo decennio del XX secolo ha cambiato in modo radicale e, almeno parzialmente, inaspettato la nostra visione dell'Universo.

Nel 1992 il satellite COBE ha misurato per la prima volta le anisotropie nella temperatura della radiazione cosmica di fondo (CMB). Successive misure effettuate con rivelatori posti sulla superficie della Terra o montati su palloni in volo ad alta quota, per finire con quelle ottenute dai satelliti WMAP e Planck, hanno mostrato come queste anisotropie siano compatibili con quelle attese dalla teoria dell'inflazione cosmica. Proposta all'inizio degli anni '80 per risolvere un problema teorico fondamentale della cosmologia standard, il "problema dell'orizzonte", l'inflazione è anche in grado di spiegare perché la geometria delle sezioni spaziali dell'Universo su scala cosmologica è piatta e, soprattutto, fornisce un meccanismo per generare le anisotropie nella CMB che sono alla base della formazione delle strutture su grande scala (LSS) che osserviamo oggi nell'Universo.

Nel 1998 l'osservazione delle supernove di tipo Ia ha portato le due collaborazioni Supernova Cosmology Project e High-Z Supernova Search Team alla straordinaria scoperta che l'espansione attuale dell'Universo è accelerata. Questo implica che la componente oggi dominante della densità di energia nell'Universo è data da una forma di energia oscura, per la quale il rapporto tra pressione e densità risulta inferiore a $-1/3$. Questo risultato è stato successivamente confermato dalle osservazioni sempre più precise delle anisotropie della CMB e di grandi cataloghi di galassie (galaxy survey).

Questi sorprendenti risultati, e la conseguente nuova immagine che abbiamo del Cosmo, lasciano però aperti degli interrogativi fondamentali sulla natura della fisica che, a livello microscopico, può produrre gli effetti osservati sperimentalmente. Se la storia dell'Universo da 10^{-10} secondi, cioè da energie dell'ordine di 1 TeV, a oggi è basata su osservazioni e teorie fisiche accuratamente testate, il Modello Standard delle particelle elementari, la relatività generale (GR) e la fluidodinamica, la fisica dell'epoca precedente, al contrario, è tanto speculativa quanto interessante. In particolare, l'origine microscopica dell'inflazione rimane tuttora un mistero. La più semplice parametrizzazione fenomenologica della dinamica inflazionaria prevede l'e-

sistenza di un campo scalare, detto inflatone, accoppiato alla gravità in presenza di un potenziale. In questo caso il regime di inflazione, in cui lo spaziotempo va incontro a un'espansione accelerata esponenziale, può essere sostenuto, per un periodo di tempo abbastanza lungo, solo se il potenziale dello scalare è sufficientemente piatto, in modo che l'energia potenziale domini per molto tempo su quella cinetica. Questo è il cosiddetto regime di slow-roll, al termine del quale l'energia dell'inflatone è convertita in radiazione nel processo di reheating e l'espansione decelerata ha inizio. Anche nello scenario più semplice appena descritto, l'inflazione di tipo slow-roll con un singolo campo scalare, è comunque possibile avere una moltitudine di modelli diversi, caratterizzati dalla scelta del potenziale dell'inflatone, tutti ugualmente in grado di risolvere il problema dell'orizzonte.

La speranza di poter discriminare tra modelli diversi e, prima ancora, di convincersi che l'inflazione non sia solo un'affascinante ipotesi ma una realtà fisica, è affidata alle caratteristiche delle fluttuazioni quantistiche attorno all'evoluzione classica, in funzione del tempo, del valore di background del campo scalare. Queste fluttuazioni scalari, che dipendono da spazio e tempo, portano a ritardi o anticipi locali del momento in cui l'inflazione finisce: differenti regioni dell'universo terminano il periodo di espansione accelerata in momenti leggermente diversi e, di conseguenza, la successiva evoluzione risulta leggermente modificata. E' questa differenza che produce le fluttuazioni di densità relativa responsabili delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo.

Analogamente alle fluttuazioni dello scalare si possono considerare anche quelle tensoriali. Il loro effetto si manifesta in un contributo all'anisotropia della polarizzazione dei fotoni della CMB e sono quindi molto più difficili da osservare. Al momento, esiste solo un limite superiore all'ampiezza di queste onde gravitazionali primordiali, dato dall'esperimento BICEP2. Una conferma della loro esistenza fornirebbe una prova inconfutabile a sostegno dell'inflazione, perché sono impossibili da spiegare in qualsiasi teoria che non preveda l'esistenza di un regime di espansione accelerata. La natura delle perturbazioni tensoriali è legata alla dinamica della gravità ed è pertanto indipendente dal modello specifico di inflazione ma permetterebbe di determinare in modo univoco la scala di energia associata o, analogamente, il valore del parametro di Hubble durante la fase di espansione inflazionaria.

A oggi, le uniche informazioni accessibili sperimentalmente riguardano le fluttuazioni scalari, che risultano essere Gaussiane e, con ottima approssimazione, invarianti di scala, cioè tali che l'ampiezza della fluttuazione è indipendente dalla sua lunghezza d'onda. La prima, definitiva, conferma di una deviazione dalla perfetta invarianza di scala, descritta dallo spettro di Harrison-Zeldovich, è stata fornita, con una significatività di 5 sigma, dal satellite Planck nel 2014. Entrambe queste caratteristiche sono predette in modo naturale dalla teoria dell'inflazione e sono conseguenza della sola azione quadratica per le perturbazioni scalari attorno a un Universo che si espande con un parametro di Hubble circa costante. Per questa ragione sono indipendenti dal modello specifico. Rappresentano un'evidenza incoraggiante a favore dell'inflazione ma, allo stesso tempo, indicano che siamo ancora agli albori di una verifica sperimentale del paradigma inflazionario.

Solo le deviazioni da uno spettro Gaussiano, al momento ancora compatibili con zero, costituiscono una misura delle interazioni dell'inflatone e, di conseguenza, permettono di accedere alla dinamica microscopica alla base dell'inflazione. Purtroppo, nello scenario più semplice, affinché siano soddisfatte le condizioni di slow-roll, l'inflatone deve avere auto-interazioni molto deboli (il potenziale è molto piatto) e quindi le non-Gaussianità (NG) sono necessariamente troppo piccole per poter essere osservate.

Questa difficoltà costituisce il punto di partenza del presente lavoro di tesi, il cui primo obiettivo è investigare la possibilità di realizzare un modello di inflazione consistente, descritto in termini di una teoria di campo efficace (EFT), capace di generare non-Gaussianità osservabili. Una direzione da esplorare appare naturale: nei modelli slow-roll le interazioni sono solo quelle date dal potenziale ma, in generale, l'azione per uno scalare conterrà anche interazioni derivate. Ci si può dunque chiedere come queste influiscano sulle non-Gaussianità. E' però facile convincersi [1] che avere non-Gaussianità osservabili in questo caso necessariamente implica che infiniti operatori derivativi diventano ugualmente importanti. In generale questo significa che la teoria non è più predittiva; soltanto se tutti questi operatori possono essere risommati l'ampiezza delle NG può essere calcolata in modo consistente. Un esempio in cui questa risommazione è possibile è dato dall'inflazione di Dirac-Born-Infeld (DBI) [2, 3], in cui una simmetria di spaziotempo realizzata non-linearmente

dallo scalare protegge i coefficienti degli operatori leading dell'espansione in derivate dal ricevere correzioni quantistiche grandi.

In questo lavoro vogliamo considerare una simmetria diversa, l'invarianza sotto trasformazioni galileiane $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + b_\mu x^\mu + c$. Questa simmetria è apparsa in vari contesti, che vanno dalle modifiche della gravità alle ampiezze di scattering [4, 5, 6, 7], nel seguito invece verrà usata come guida per costruire una teoria consistente dell'Universo nell'epoca dell'espansione inflazionaria: essa rappresenta infatti l'unica alternativa, nota a oggi, alle simmetrie del tipo DBI per proteggere i coefficienti di operatori higher-derivative (HD) di una teoria di campo efficace dalle correzioni quantistiche. Questo permetterà di calcolare in modo controllato l'ampiezza delle non-Gaussianità in questo scenario.

Nel Capitolo 1 saranno esposte le ragioni che hanno portato all'introduzione del paradigma inflazionario e il modello più semplice della sua realizzazione. Verrà discussa nel dettaglio la capacità dell'inflazione di spiegare la nascita di perturbazioni primordiali di densità su cui la gravità può successivamente agire, dimostrando la proprietà di invarianza di scala per lo spettro delle stesse. Si introdurrà poi il formalismo generale della teoria efficace dell'inflazione, che sarà utile per lo studio delle perturbazioni perchè applicabile a qualsiasi modello. Come vedremo, la grandezza molto limitata delle interazioni nell'inflazione slow-roll e la conseguente debole entità delle non-gaussianità, ci spingono nella direzione di una ricerca di modelli inflazionari con non-gaussianità osservabili, dove le interazioni giocano un ruolo fondamentale. Un'analisi preliminare su questa possibilità mostrerà la necessità di conciliare la richiesta di non-gaussianità grandi con un controllo delle correzioni quantistiche, cosa possibile solo con l'introduzione di una qualche simmetria della teoria che ne protegga i coefficienti.

Nel Capitolo 2 esplicheremo la simmetria alla base della costruzione della teoria di campo efficace galileonica, innanzitutto su spazio-tempo piatto, dove vale un teorema di non-rinormalizzazione per i coefficienti lagrangiani della teoria, i quali non subiscono modificazioni per correzioni radiative. Estendendo la teoria al caso di presenza di gravità con il metodo di accoppiamento minimale, la simmetria ne risulterà esplicitamente rotta già a livello di azione classica, ma vedremo che la scala di energia che descrive tale rottura è ben al di sopra del cut-off ultravioletto della

teoria stessa. Continua a valere un teorema di non-rinormalizzazione, seppure nella forma più debole secondo cui le correzioni quantistiche sono soppresse da una scala di energia ancora più grande di quella di rottura esplicita. Visto che, sebbene la gravità comprometta inevitabilmente la simmetria che era esatta su spazio-tempo piatto, le violazioni sono controllate nel senso prima specificato, introdurremo la classe più generale di teorie di campo che rispettano questa proprietà di rottura debole della simmetria, ammettendo termini che la rompono anche in assenza di gravità ma regolati da una scala di energia molto più grande del cutoff (e pari a quella della rottura esplicita prodotta dalla gravità), le cui correzioni quantistiche sono soppresse da scale ancora maggiori. Si parlerà dunque di “weakly broken galileon invariance” WBG.

Nel Capitolo 3 si discuterà la cosmologia inflazionaria per teorie WBG, individuando due regimi qualitativamente distinti. Mostriamo dapprima che, in effetti, soluzioni inflazionarie esistono davvero, e poi procederemo con lo studio delle fluttuazioni dall’omogeneità e isotropia per mezzo della teoria efficace dell’inflazione studiata nel capitolo 1. In uno dei regimi prima citati lo studio delle non-gaussianità sarà semplificato dall’esistenza di un limite di decoupling tra il grado di libertà scalare e quelli della metrica. Ciò permetterà di valutare le non-gaussianità e scoprire che, sotto opportune condizioni sui coefficienti della teoria iniziale, è possibile renderle abbastanza grandi da essere osservate. L’altro regime risulterà poco interessante dal punto di vista fisico, in quanto le perturbazioni previste sono incompatibili con i vincoli osservativi. Infine si confronteranno le predizioni dei modelli inflazionari cui si è fatto riferimento: slow-roll, inflazione DBI, inflazione WBG.

1 L'inflazione

La cosmologia relativistica standard è una teoria di successo nell'interpretare numerosi fatti osservativi, riassumibili nei cosiddetti quattro pilastri:

- Espansione dell'Universo: l'Universo si espande [8] e la velocità di allontanamento degli oggetti tra loro è proporzionale alla loro distanza (legge di Hubble).
- Esistenza della radiazione cosmica di fondo: si tratta di un segnale nelle microonde che permea l'intero Universo, risultato del decoupling tra materia e radiazione avvenuto circa 380.000 anni dopo il Big Bang [9], quando l'Universo divenne abbastanza freddo da permetterlo.
- Abbondanza degli elementi leggeri: le abbondanze relative dei primi elementi della tavola periodica sono quasi costanti in tutte le regioni dell'Universo e ciò è comprensibile sulla base di un meccanismo cosmologico della loro produzione [10], grazie a reazioni di fusione nucleare nell'Universo primordiale caldo e denso.
- Formazione delle strutture: date le perturbazioni iniziali di densità visibili nelle anisotropie della CMB, il collasso gravitazionale fornisce una buona spiegazione delle galassie e le strutture su grande scala odierne.

1.1 I problemi del Modello Standard della Cosmologia

Nonostante la sua capacità di inserire in un unico quadro coerente osservazioni di diverso tipo, la cosmologia standard richiede una scelta molto precisa delle condizioni iniziali per adeguarsi ai dati dell'Universo attuale e non è capace di dare una ragionevole spiegazione di tali valori, risultando quindi insoddisfacente dal punto di vista concettuale. Ciò è evidenziato da alcuni problemi, la cui soluzione all'interno della teoria standard richiede una scelta accurata delle condizioni iniziali.

1.1.1 Il problema dell'orizzonte

La straordinaria uniformità della temperatura della CMB in tutte le direzioni di osservazione (con fluttuazioni di meno di una parte su 10^5) appare innaturale quando si considerano le dimensioni angolari di regioni connesse causalmente tra loro e le si confrontano con l'intero angolo solido. Dato un osservatore nell'Universo ad un tempo t , i punti con cui può essere venuto in contatto causale hanno una distanza comovente massima da esso, nota come orizzonte di particella, corrispondente a quella percorsa dalla luce dal Big Bang al tempo t in considerazione. Una stima di tale orizzonte [11] può essere ottenuta supponendo per semplicità un Universo dominato dalla materia, ottenendo ad un'epoca caratterizzata da un redshift z che l'orizzonte ha dimensioni comoventi

$$\chi_h(z) = 6000h^{-1}(1+z)^{-\frac{1}{2}}Mpc \quad (1.1)$$

dove si è usata la parametrizzazione standard per il valore attuale della costante di Hubble: $H = 100h \text{ km/s Mpc}^{-1}$. All'epoca del decoupling, dalla quale proviene la CMB, era $1 + z_{dec} \approx 1100$ così che per l'orizzonte era $\chi_h(z_{dec}) \approx 180h^{-1}Mpc$ che, confrontata con la distanza comovente tra noi e la superficie di ultimo scattering dalla quale proviene la CMB e pari a circa $5820h^{-1}Mpc$, restituisce per le dimensioni angolari delle regioni causalmente connesse, in cui ha effettivamente senso una temperatura uniforme, il valore di 1.8° . Dovremmo quindi osservare uniformità solo su questa scala angolare e non in ogni direzione di osservazione come invece si misura.

1.1.2 Il problema della piattezza

Le equazioni di Friedmann-Lemaitre, che riassumiamo di seguito, descrivono l'evoluzione di un Universo omogeneo e isotropo, dove la metrica (detta di Robertson-Walker) può assumere solo tre forme corrispondenti ad un universo aperto, piatto o chiuso:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (1.2)$$

dove $k = -1, 0, +1$ rispettivamente nei tre casi sopra, e l'elemento dinamico è $a(t)$, il fattore di scala, la cui variazione nel tempo descrive l'espansione dell'Universo.

Dette ρ e p densità di energia e pressione omogenee (ma dipendenti dal tempo) le equazioni di Friedmann-Lemaitre [11, 12, 13] dicono

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - kc^2 \quad (1.3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (1.4)$$

e la costante di Hubble $H(t)$ è data da $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. Un modo più semplice di scrivere la prima equazione, evidenziando il legame tra curvatura e contenuto dell'Universo, consiste nell'introdurre $\Omega = \rho/\rho_c$ dove $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$ è detta densità critica, in quanto discrimina tra Universo aperto e chiuso. In particolare si ha $\Omega - 1 = \frac{kc^2}{\dot{a}^2}$. Il problema della piattezza consiste nel fatto che oggi il parametro Ω è molto vicino a 1 ($|\Omega - 1| < 10^{-2}$), cioè l'Universo su grande scala è sostanzialmente piatto, ma poiché la seconda equazione di Friedmann dice che la velocità di espansione diminuisce al passare del tempo, il parametro $|\Omega - 1|$ in passato era ancora più piccolo. Ad esempio si può stimare che al tempo della nucleosintesi ($t \sim 1 \text{ sec}$) doveva essere $|\Omega - 1| < 10^{-16}$, il che costituisce un problema di “fine tuning”.

1.1.3 Il problema delle perturbazioni primordiali

La cosmologia standard non spiega l'origine delle perturbazioni primordiali e delle loro caratteristiche, ma si limita a descriverne l'evoluzione dovuta al collasso gravitazionale. Oltre a questa incompletezza della teoria, risulta altresì difficile spiegare quale meccanismo di instabilità gravitazionale abbia potuto produrre l'energia di legame per strutture molto estese come i clusters di galassie [14]. Tali strutture si estendono su distanze comoventi dell'ordine di 10 Mpc, e quindi devono essersi formate quando l'orizzonte di particella superò tale taglia; una stima del redshift a cui ciò divenne possibile, basata sul dominio prima della radiazione e poi della materia nell'evoluzione dell'Universo, fornisce il limite $z \lesssim 10^6$ che è un'epoca troppo recente perchè possa essere stata disponibile l'energia di legame richiesta per un ammasso di galassie.

1.2 La soluzione dell'inflazione

La radice del problema dell'orizzonte sta nel fatto che, nella cosmologia standard, l'orizzonte di particella per un osservatore a un tempo t assegnato è finito. Infatti, è la finitezza dell'orizzonte ad imporre un limite alle dimensioni delle regioni causalmente connesse, da cui il problema sopra descritto. Dalle equazioni di Friedmann, l'orizzonte comoviente di particella al tempo t , a cui il fattore di scala è $a(t)$, è dato da

$$\chi_h(t) = \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = \int_0^a \frac{da'}{a'} \left[\frac{8\pi G}{3c^2} \rho(a') a'^2 - k \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.5)$$

Nella cosmologia standard a tempi piccoli la componente dominante di energia è data dalla radiazione per cui per $a \rightarrow 0$ è $\rho(a) \propto a^{-4}$ e l'integrale converge. Affinchè l'orizzonte diverga occorre un andamento a potenza del tipo $\rho(a) \propto a^{-\beta}$ con $\beta < 2$. Usando il primo principio della termodinamica (deducibile dalle due equazioni di Friedmann-Lemaitre stesse) nella forma $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$ si vede che la condizione su β si traduce in $\rho + 3p < 0$ o equivalentemente $\ddot{a} > 0$, cioè occorre una fase di espansione accelerata prima del dominio della radiazione: si tratta dell'inflazione. Una componente di energia che soddisfa questa condizione è data da un fluido con equazione di stato $p = -\rho$, che simula una costante cosmologica e produce un aumento esponenziale nel tempo del fattore di scala. L'inflazione [15, 16] può fornire una soluzione ai problemi esposti nella sezione precedente, come mostriamo di seguito.

1.2.1 La soluzione al problema dell'orizzonte

La condizione che elimina il problema dell'orizzonte è che l'orizzonte di particella al tempo di decoupling materia-radiazione sia sensibilmente maggiore della distanza tra un osservatore odierno e la superficie di ultimo scattering. Prendendo in considerazione un'espansione esponenziale con costante di Hubble H , che inizi ad un tempo molto piccolo t_i dopo il Big Bang (oggi stimato in 10^{-34} secondi) e termini a un istante $t_f = \Delta t + t_i$ molto minore del tempo di decoupling t_{dec} , il problema dell'orizzonte è risolto se

$$\int_{t_i}^{t_{dec}} \frac{cdt}{a(t)} > \int_{t_{dec}}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} \quad (1.6)$$

dove t_0 è l'età attuale dell'Universo (13,8 miliardi di anni). Questa espressione si riduce a $e^{H\Delta t} > a(t_f) \frac{t_0}{t_f} \approx \frac{T_f}{T_0} (1 + z_{eq})^{-\frac{1}{2}} \approx 10^{25}$ dove T_f , temperatura alla fine dell'inflazione è stata stimata con la scala di grande unificazione $T_f \approx 10^{14} GeV$, T_0 è la temperatura attuale della CMB $T_0 \approx 10^{-13} GeV$ e $1 + z_{eq} \approx 3200$. Quindi, per risolvere il problema dell'orizzonte è necessario che il numero di e-folds

$$\Delta N \equiv H\Delta t \tag{1.7}$$

sia tale da soddisfare il requisito $\Delta N \gtrsim 60$.

1.2.2 La soluzione al problema della piattezza

L'espansione accelerata dell'inflazione è in grado di stirare lo spazio, come si vede considerando l'equazione $\Omega - 1 = \frac{kc^2}{a^2}$ e notando che qualunque sia il valore iniziale di $|\Omega - 1|$ l'inflazione può renderlo molto piccolo a causa dell'aumento della velocità \dot{a} di espansione. E' questo nuovo valore che nel Modello Standard della Cosmologia veniva considerato una condizione iniziale accuratamente calibrata. Per vedere se è possibile risolvere contemporaneamente al problema dell'orizzonte anche quello della piattezza è utile riscrivere la prima equazione di Friedmann nella forma

$$\Omega^{-1} - 1 = -\frac{3kc^2}{8\pi G\rho a^2} \tag{1.8}$$

L'inflazione con numero di e-folds stimato nel paragrafo precedente avvicina il valore di Ω ad 1, come si vede da

$$\frac{\Omega^{-1}(t_f) - 1}{\Omega^{-1}(t_i) - 1} = e^{-2H\Delta t} \lesssim 10^{-52} \tag{1.9}$$

per cui, qualunque sia il valore iniziale $\Omega^{-1}(t_i) - 1$ dopo l'inflazione il valore di Ω si ritrova molto vicino ad 1 per tanto tempo. D'altra parte il valore attuale di Ω non implica nessun fine tuning su $\Omega^{-1}(t_i) - 1$, come si può stimare

$$\frac{\Omega^{-1}(t_0) - 1}{\Omega^{-1}(t_i) - 1} = \frac{\Omega^{-1}(t_0) - 1}{\Omega^{-1}(t_f) - 1} \frac{\Omega^{-1}(t_f) - 1}{\Omega^{-1}(t_i) - 1} \lesssim 10^{-52} \frac{T_{eq}}{T_0} \left(\frac{T_f}{T_{eq}} \right)^2 \approx 1 \tag{1.10}$$

1.3 Realizzazione dell'inflazione e slow-roll

Come detto prima, una fase di espansione accelerata dell'Universo si realizza quando l'evoluzione è determinata da un fluido che soddisfa la condizione $\rho + 3p < 0$. Una costante cosmologica non è però adeguata in quanto, una volta che è il contributo dominante di energia, rimane tale e quindi l'inflazione non terminerebbe mai; al contrario l'inflazione deve terminare e lo spazio vuoto e freddo lasciato da essa deve essere ripopolato dalla materia e dalla radiazione (processo di reheating [17]). Queste richieste possono essere esaudite da un campo scalare, chiamato genericamente inflatone [18], che soddisfi condizione opportune che vogliamo analizzare. Consideriamo un campo scalare $\varphi(t, \vec{x})$ con \vec{x} coordinate spaziali comoventi, la cui dinamica accoppiata alla gravità è descritta dall'azione

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_{Pl}^2 R + \mathcal{L} \right) = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} M_{Pl}^2 R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right) \quad (1.11)$$

dove $V(\varphi)$ è un potenziale che dovrà avere le proprietà giuste per realizzare l'inflazione e si è usata la convenzione $(-, +, +, +)$ per la metrica. Nella (1.11) è stato inserito esplicitamente il contributo puramente gravitazionale descritto dall'azione di Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} M_{Pl}^2 R$$

dove g è il determinante del tensore metrico $g_{\mu\nu}$, R è lo scalare di Ricci e $M_{Pl} = (8\pi G)^{-\frac{1}{2}}$ è la massa di Planck ridotta (in unità naturali $\hbar = 1$, $c = 1$). In vista dello studio delle condizioni di realizzazione dell'inflazione, consideriamo il tensore energia-impulso del campo scalare, dato da

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\sqrt{-g} \mathcal{L} \right) = g_{\mu\nu} \mathcal{L} - \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \quad (1.12)$$

dove per derivare l'ultima uguaglianza si è usata la proprietà matematica sul determinante del tensore metrico

$$\frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

Supponendo $\varphi = \varphi_0(t)$ indipendente da \vec{x} (per avere omogeneità spaziale) e per una metrica di tipo FRW (assunta sempre piatta a causa della proprietà dell'inflazione cercata di "stirare" lo spazio, descritta nella sezione 1.2.2)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\vec{x}^2 \quad (1.14)$$

si ricavano densità di energia e pressione per il campo scalare, legate all'evoluzione del fattore di scala attraverso le equazioni di Friedmann

$$3M_{Pl}^2 H^2 = \rho = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} + V(\varphi_0) \quad (1.15)$$

$$-M_{Pl}^2 \dot{H} = \frac{\rho + p}{2} = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} \quad (1.16)$$

La condizione di espansione accelerata ottenuta dalla (1.4) è

$$\rho + 3p = 2(\dot{\varphi}_0^2 - V(\varphi_0)) < 0 \quad (1.17)$$

Questo vincolo è sicuramente soddisfatto se l'evoluzione dinamica del campo φ_0 è sufficientemente lenta in modo da avere un termine cinetico trascurabile rispetto al potenziale, cioè

$$\dot{\varphi}_0^2 \ll V(\varphi_0) \quad (1.18)$$

Tale condizione è detta di slow-roll ed implica una espansione quasi-esponenziale come si vede da $\rho \simeq V(\varphi_0) \simeq -p$. Nello studio dell'inflazione si usa definire due parametri adimensionali che esprimono l'entità della deviazione da un'espansione perfettamente esponenziale con parametro di Hubble costante (universo di de Sitter). Essi sono detti parametri di slow-roll e sono dati da

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (1.19)$$

$$\eta \equiv \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} \quad (1.20)$$

Osserviamo che, in termini del numero di e-folds $dN = d \ln a = H dt$ definito in (1.7), si ha

$$\epsilon = -\frac{d \ln H}{dN} \quad (1.21)$$

$$\eta = \frac{d \ln \epsilon}{dN} \quad (1.22)$$

Trascurando la curvatura, il cui contributo è soppresso dall'inflazione, il valore di H previsto dalla prima equazione di Friedmann è

$$H \simeq \frac{1}{M_{Pl}} \sqrt{\frac{V(\varphi_0)}{3}} \quad (1.23)$$

con $V(\varphi_0)$ dipendente debolmente dal tempo in condizioni di slow-roll. Per tradurre la condizione di slow-roll (1.18) in un vincolo sulla forma potenziale della teoria, unico “parametro libero”, occorre analizzare l'equazione del moto per φ ricavata dal principio di minima azione. Poichè ci sarà utile in seguito ricaveremo l'equazione del moto in completa generalità senza supporre che φ dipenda solo dal tempo. La variazione dell'azione (1.11) rispetto ad una variazione $\delta\varphi$ nella configurazione del campo è

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta\varphi \partial_\nu \varphi + \partial_\mu \varphi \partial_\nu \delta\varphi) - V'(\varphi) \delta\varphi \right] = \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} [-g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \delta\varphi - V'(\varphi) \delta\varphi] \end{aligned} \quad (1.24)$$

e, integrando per parti il primo termine si ha

$$\delta S = \int d^4x \left[\partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi) - \sqrt{-g} V'(\varphi) \right] \delta\varphi \quad (1.25)$$

dove $V'(\varphi)$ è la derivata di V rispetto a φ . Poichè vale l'uguaglianza

$$\partial_\nu \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{\alpha\beta} \quad (1.26)$$

si ricava l'equazione del moto cercata, ovvero

$$\partial_\nu \partial^\nu \varphi - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{\alpha\beta} \partial^\nu \varphi - V'(\varphi) = 0 \quad (1.27)$$

Nel caso in cui la metrica sia quella imperturbata di FRW, pur mantenendo disomogeneità spaziali nel campo scalare, ci si riduce a

$$\ddot{\varphi} - \frac{\nabla^2 \varphi}{a^2} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (1.28)$$

Essendo al momento interessati al background inflazionario, ovvero a una soluzione omogenea $\varphi = \varphi_0(t)$, l'equazione del moto diventa

$$\ddot{\varphi}_0 + 3H\dot{\varphi}_0 + V'(\varphi_0) = 0 \quad (1.29)$$

Partendo da condizioni iniziali di slow-roll, queste saranno mantenute durante l'evoluzione solo se $\ddot{\varphi}_0$ è trascurabile rispetto agli altri termini dell'equazione sopra, cioè se $3H\dot{\varphi}_0 \simeq -V'(\varphi_0)$. Utilizzando le equazioni (1.23) e (1.29), la condizione $\ddot{a} > 0$, garantita da $\dot{\varphi}_0^2 \ll V(\varphi_0)$, si traduce nella seguente condizione per il potenziale

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \equiv \epsilon_V \ll 1 \quad (1.30)$$

mentre la trascurabilità di $\ddot{\varphi}_0$ per il mantenimento dello slow-roll, implica una condizione sul parametro η_V specificato come segue

$$\eta_V \equiv M_{Pl}^2 \frac{V''}{V} \quad (1.31)$$

$$|\eta_V| \ll 1 \quad (1.32)$$

Anche il parametro η_V , come nel caso di $\epsilon_V \simeq \epsilon$, è legato ai parametri di slow-roll ϵ e η definiti nelle (1.19) e (1.20) e tale relazione è $\eta_V \simeq 2\epsilon - \frac{1}{2}\eta$. Le condizioni sul potenziale (1.30) e (1.32) si possono dunque riesprimere come condizioni sui parametri di slow-roll, nella forma

$$\epsilon, |\eta| \ll 1 \quad (1.33)$$

L'inflazione termina quando il valore di φ_0 raggiunto è tale che le due condizioni su ϵ_V e η_V non sono più verificate, e il moto passerà da una condizione di forte smorzamento a una di oscillazione sul fondo del potenziale.

1.4 La produzione delle perturbazioni

La proprietà di espansione accelerata dell'inflazione può essere riscritta in un modo più suggestivo dal punto di vista delle sue implicazioni fisiche:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{H^{-1}}{a} \right) < 0 \quad (1.34)$$

ovvero la lunghezza di Hubble comovente diminuisce nel tempo, al contrario di quanto avviene nella cosmologia standard. Questo vuol dire che, data una scala comovente di lunghezza alla quale vogliamo analizzare la possibile formazione di strutture, purchè l'inflazione cominci abbastanza presto, esiste un periodo di tempo durante il quale la scala considerata si trova all'interno della lunghezza di Hubble comovente (che è una stima dell'orizzonte degli eventi, cioè della massima distanza comovente raggiungibile da un segnale emesso all'epoca considerata), consentendo quindi l'azione di un qualche meccanismo causale di creazione di perturbazioni a quella scala. In seguito l'inflazione ha portato la lunghezza di Hubble all'interno della scala considerata e le perturbazioni sono rimaste congelate fino ad un successivo rientro della scala comovente entro l'orizzonte, durante l'evoluzione standard dell'Universo che segue l'inflazione. Senza adottare il paradigma inflazionario, come abbiamo già visto, risulta invece difficile comprendere la formazione di strutture come gli ammassi di galassie perchè la loro scala è contenuta nella lunghezza di Hubble a tempi troppo avanzati per fornire l'energia di legame necessaria.

Il meccanismo capace di produrre le perturbazioni primordiali di densità durante l'inflazione è quello delle fluttuazioni quantistiche del campo responsabile, l'inflatone [18]. Valutiamo allora tali fluttuazioni separando il campo nella sua parte omogenea, che in condizioni di slow-roll produce l'inflazione, e in una fluttuazione disomogenea

$$\varphi(t, \vec{x}) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(t, \vec{x}) \quad (1.35)$$

ma mantenendo inalterata la metrica di tipo FRW. L'equazione del moto per il campo di fluttuazione $\delta\varphi(t, \vec{x})$ è determinata dall'equazione completa (1.28) una volta inserita la decomposizione (1.35) e sfruttata la (1.29), ottenendo

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} - \frac{\nabla^2\delta\varphi}{a^2} = 0 \quad (1.36)$$

che corrisponde all'equazione del moto per la parte quadratica dell'azione per $\delta\varphi$ ottenuta dalla (1.11) cioè

$$S_{\delta\varphi} = \int dt d^3\vec{x} a^3 \frac{1}{2} \left[\delta\dot{\varphi}^2 - \frac{(\vec{\nabla}\delta\varphi)^2}{a^2} \right] \quad (1.37)$$

Passando alle componenti di Fourier $\delta\varphi_{\vec{k}}(t)$ del campo $\delta\varphi(t, \vec{x})$ si ha

$$\delta\ddot{\varphi}_{\vec{k}} + 3H\delta\dot{\varphi}_{\vec{k}} + \frac{k^2}{a^2}\delta\varphi_{\vec{k}} = 0 \quad (1.38)$$

Per risolvere questa equazione differenziale è utile passare al tempo conforme τ definito da $dt = a d\tau$ e porre $\tau = 0$ alla fine dell'inflazione. Indicando con $'$ la derivazione rispetto al tempo conforme, l'equazione (1.38) ha la forma

$$\delta\varphi_{\vec{k}}'' + 2\frac{a'}{a}\delta\varphi_{\vec{k}}' + k^2\delta\varphi_{\vec{k}} = 0 \quad (1.39)$$

Per eliminare il termine con la derivata prima si introduce il campo ausiliario

$$\tilde{\delta\varphi}_{\vec{k}} = a\delta\varphi_{\vec{k}} \quad (1.40)$$

rispetto al quale ci si riduce a

$$\tilde{\delta\varphi}_{\vec{k}}'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right)\tilde{\delta\varphi}_{\vec{k}} = 0 \quad (1.41)$$

Per un'espansione con parametro di Hubble costante, il fattore di scala varia nel

tempo conforme come $a \approx -\frac{1}{H\tau}$, da cui $\frac{a''}{a} = \frac{2}{\tau^2}$ e quindi

$$\tilde{\delta\varphi}_{\vec{k}}'' + \left(k^2 - \frac{2}{\tau^2}\right) \tilde{\delta\varphi}_{\vec{k}} = 0 \quad (1.42)$$

La (1.42) descrive un oscillatore armonico la cui frequenza dipende esplicitamente dal tempo e la soluzione, determinata a meno di una costante, è

$$\tilde{\delta\varphi}_{\vec{k}}(\tau) \propto \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) e^{-ik\tau} \quad (1.43)$$

da cui dividendo per a si ha

$$\delta\varphi_{\vec{k}}(\tau) = \delta\varphi_{\vec{k}}(0)(1 + ik\tau)e^{-ik\tau} \quad (1.44)$$

L'ampiezza $\delta\varphi_{\vec{k}}(0)$ viene scelta una volta quantizzato il campo in modo da soddisfare le regole di commutazione canonica, sapendo che, data la (1.42), a tempi conformi molto negativi (quando la scala di lunghezza comovente $\frac{1}{k}$ è ben dentro l'orizzonte $\frac{H^{-1}}{a} \approx -\tau$) si deve ritrovare la quantizzazione su spazio-tempo di Minkowski. Quantizzando il campo $\delta\varphi_{\vec{k}}(\tau)$ come

$$\hat{\delta\varphi}_{\vec{k}}(\tau) = \delta\varphi_{\vec{k}}(\tau)\hat{a}_{\vec{k}} + \delta\varphi_{\vec{k}}^*(\tau)\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \quad (1.45)$$

la normalizzazione risulta essere

$$\delta\varphi_{\vec{k}}(0) = \frac{iH}{\sqrt{2k^3}} \quad (1.46)$$

Alla fine dell'inflazione ($\tau = 0$) sono dunque presenti fluttuazioni del campo scalare espresse dal seguente spettro di potenza per $\delta\varphi$

$$P_{\delta\varphi}(k) = \langle 0|\delta\varphi_{\vec{k}}\delta\varphi_{\vec{k}}|0\rangle = \frac{H^2}{2k^3} \quad (1.47)$$

La trattazione delle perturbazioni svolta in questo paragrafo ha trascurato completamente le fluttuazioni della metrica in favore di quelle del campo scalare. Questo modo di procedere, oltre a non essere sistematico ed essere accettabile solo come prima approssimazione, non è neppure quello più opportuno per trarre conclusioni

sulle fluttuazioni di densità di materia ed energia effettivamente legate alle anisotropie della radiazione di fondo. A questo scopo, come specificheremo meglio nelle prossime sezioni, esiste una variabile più adeguata rispetto a $\delta\varphi$, nota come perturbazione di curvatura ζ , che racchiude al suo interno tutte le informazioni sulle perturbazioni scalari e, grazie alla sua costanza durante l'evoluzione delle perturbazioni fuori dall'orizzonte, consente di gettare un ponte tra le perturbazioni astratte dell'inflazione e quelle più concrete della radiazione CMB.

1.5 Teoria di campo efficace dell'inflazione

Lo studio delle fluttuazioni attorno al background inflazionario, in un generico modello di inflazione, anche con azione diversa da quella di slow-roll affrontata finora, può essere effettuato in modo sistematico e universale seguendo una impostazione nota come teoria di campo efficace dell'inflazione [19, 20]. Per introdurla cominciamo a decomporre il campo scalare $\varphi(t, \vec{x})$ nella soluzione omogenea di background $\varphi_0(t)$ e nella fluttuazione $\delta\varphi(t, \vec{x})$ come segue

$$\varphi(t, \vec{x}) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(t, \vec{x}) \quad (1.48)$$

Per quanto riguarda la metrica risulta conveniente usare le cosiddette variabili ADM, definite a partire dall'intervallo spazio-temporale come

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \quad (1.49)$$

e, rispetto al caso di metrica FRW, in generale decomporremo $N = 1 + \delta N$ e $N^i = \delta N^i$ (perchè $N^i = 0$ nel caso omogeneo). Per comodità nella manipolazione delle formule scriviamo esplicitamente le matrici del tensore metrico e del tensore metrico inverso:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -N^2 + h_{ij}N^iN^j & h_{ij}N^j \\ h_{ij}N^j & h_{ij} \end{bmatrix} \quad (1.50)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^i}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^iN^j}{N^2} \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

dove h^{ij} è la matrice inversa del tensore metrico tridimensionale h_{ij} . Il principio di relatività generale impone l'invarianza della formulazione delle teorie fisiche sotto diffeomorfismi spazio-temporali, per cui si può scegliere il sistema di coordinate più opportuno per trattare il problema; per lo studio delle fluttuazioni di φ e della metrica useremo la cosiddetta gauge unitaria, cioè sceglieremo il tempo t in modo tale che le fluttuazioni del campo scalare siano nulle

$$\delta\varphi(t, \vec{x}) = 0 \quad (1.52)$$

Questo è sempre possibile, come si può vedere considerando, in un sistema di coordinate iniziali generico, un cambio infinitesimo della coordinata temporale $t \rightarrow t + \xi(t, \vec{x})$; osservando che l'intero $\varphi(t, \vec{x})$ è un campo scalare e la sua parte omogenea trasforma come $\varphi_0(t) \rightarrow \varphi_0(t) - \dot{\varphi}_0(t)\xi(t, \vec{x})$, per la fluttuazione vale di conseguenza la regola di trasformazione

$$\delta\varphi(t, \vec{x}) \rightarrow \delta\varphi(t, \vec{x}) + \dot{\varphi}_0(t)\xi(t, \vec{x}) \quad (1.53)$$

mentre $\delta\varphi(t, \vec{x})$ è ovviamente invariante per diffeomorfismi spaziali. Si può dunque scegliere una $\xi(t, \vec{x})$ in modo che nella nuova coordinata temporale si abbia $\delta\varphi(t, \vec{x}) = 0$. Il grado di libertà scalare, in gauge unitaria, viene acquisito dalla metrica, per cui adesso il gravitone ha tre gradi di libertà e non due, come accade solitamente. La scelta di una coordinata temporale ben precisa in modo da cancellare le fluttuazioni del campo scalare implica una perdita dell'invarianza della teoria sotto diffeomorfismi generici, pur rimanendo intatta quella sotto diffeomorfismi spaziali. Pertanto una generica azione in gauge unitaria può contenere tutti i termini invarianti sotto diffeomorfismi spaziali, come funzioni arbitrarie del tempo, la componente $g^{00} = -\frac{1}{N^2}$ dell'inverso del tensore metrico, la curvatura intrinseca delle ipersuperfici a tempo fissato $R_{ij}^{(3)}$ (tensore di Ricci associato al tensore metrico spaziale h_{ij} , pari a zero nel caso FRW con metrica spaziale piatta) e la curvatura estrinseca K_{ij} (curvatura delle ipersuperfici tridimensionali a tempo fissato viste come varietà immerse nello spazio-tempo quadridimensionale, avente dimensione 1 in massa) data da

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(\partial_t h_{ij} - \hat{\nabla}_i N_j - \hat{\nabla}_j N_i \right) \equiv \frac{1}{N} E_{ij} \quad (1.54)$$

dove $\hat{\nabla}_i$ indica la derivata covariante indotta dalla metrica spaziale h_{ij} . Gli indici possono essere alzati e abbassati per mezzo del tensore spaziale h_{ij} , così da definire $K^i_j = h^{ik}K_{kj}$, $K^{ij} = h^{ik}h^{jl}K_{kl}$, la traccia $K \equiv K^i_i$ (per la metrica FRW è $K_0 = 3H$) e le corrispondenti fluttuazioni rispetto al caso FRW come δK^i_j e $\delta K = K - 3H$. Anche le quantità geometriche come il determinante del tensore metrico e lo scalare di Ricci che compare nell'azione di Einstein-Hilbert possono essere riscritti in funzione delle variabili ADM e della curvatura spaziale. In particolare, si ha $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$ e $R = R^{(3)} + K^{ij}K_{ij} - K^2$ (quest'ultima relazione è nota come equazione di Gauss-Codazzi). E' allora possibile, dato un modello inflazionario, scrivere la corrispondente azione in gauge unitaria, dove sono presenti, oltre ai termini fissati dal background con parametro di Hubble $H(t)$, quelli dipendenti dalle perturbazioni della metrica organizzati in uno sviluppo a seconda dell'ordine nelle fluttuazioni, nella forma appunto di una teoria di campo efficace. La forma generale dell'azione in gauge unitaria può essere parametrizzata nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
S = \int dt d^3\vec{x} N \sqrt{h} & \left[\frac{1}{2} M_{Pl}^2 \left(R^{(3)} + K^{ij} K_{ij} - K^2 \right) + \frac{c(t)}{N^2} - \Lambda(t) + \right. \\
& + \frac{1}{2} M(t)^4 (\delta N)^2 - \hat{M}(t)^3 \delta N \delta K - \frac{1}{2} \bar{M}(t)^2 (\delta K^2 - K^{ij} K_{ij}) + \\
& \left. - \frac{1}{2} \bar{M}'(t)^2 (\delta K^2 + K^{ij} K_{ij}) + \frac{1}{2} \tilde{m}(t) R^{(3)} \delta N + m_1(t) R^{(3)} \delta K + \dots \right] \quad (1.55)
\end{aligned}$$

dove i coefficienti indicati con varianti di $m(t)$ hanno tutti dimensioni di una massa. La dipendenza dal modello specifico di inflazione è contenuta nei coefficienti $M(t)$, $\hat{M}(t)$, $\bar{M}(t)$, $\bar{M}'(t)$, $\tilde{m}(t)$, $m_1(t)$, mentre i coefficienti $c(t)$ e $\Lambda(t)$ sono fissati in modo univoco dal parametro di Hubble $H(t)$ che descrive il background. Per mostrare questo fatto notiamo che gli unici termini lagrangiani dell'azione (1.55) che, all'ordine zero nelle fluttuazioni (cioè quando la metrica è FRW), forniscono un contributo non nullo al tensore energia-impulso dato da

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}) = g_{\mu\nu} \mathcal{L} - 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (1.56)$$

sono proprio quelli di coefficienti $c(t)$ e $\Lambda(t)$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{c(t)}{N^2} - \Lambda(t) = -c(t)g^{00} - \Lambda(t) \quad (1.57)$$

a cui corrispondono, nel caso FRW, una densità di energia

$$\rho = T_{00} = -\mathcal{L}_0 + 2c(t) = c(t) + \Lambda(t) \quad (1.58)$$

e una pressione

$$p = \frac{T_{ii}}{a^2} = \mathcal{L}_0 = c(t) - \Lambda(t) \quad (1.59)$$

dove i è un qualsiasi indice spaziale (non importa quale a causa dell'isotropia della metrica FRW). Le equazioni di Friedmann nella forma $3M_{Pl}^2 H^2 = \rho$ e $-M_{Pl}^2 \dot{H} = \frac{\rho+p}{2}$ permettono di concludere che

$$c(t) = -M_{Pl}^2 \dot{H} \quad (1.60)$$

$$\Lambda(t) = M_{Pl}^2 (3H^2 + \dot{H}) \quad (1.61)$$

1.6 Applicazione all'inflazione slow-roll e spettro scalare

Il caso più semplice in cui vogliamo trattare lo studio delle perturbazioni attraverso la teoria efficace dell'inflazione è quello di slow-roll. Consideriamo quindi la corrispondente azione in gauge unitaria (in cui $\delta\varphi(t, \vec{x}) = 0$), data da

$$S = \int dt d^3\vec{x} \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_{Pl}^2 R - \frac{1}{2} g^{00} \dot{\varphi}_0^2 - V(\varphi_0) \right] \quad (1.62)$$

e, usando variabili ADM e dalle equazioni di Friedmann (1.15) e (1.16), si ha la forma più semplice possibile per una teoria efficace dell'inflazione

$$S = \int dt d^3\vec{x} N \sqrt{h} M_{Pl}^2 \left[\frac{1}{2} R^{(3)} + \frac{1}{2} N^{-2} (E^{ij} E_{ij} - E^2) - N^{-2} \dot{H} - (3H^2 + \dot{H}) \right] \quad (1.63)$$

I coefficienti ottenuti per i termini lagrangiani $c(t)$ e $\Lambda(t)$ confermano le conclusioni generali espresse dalle condizioni (1.60) e (1.61). Ai fini dello studio delle perturbazioni scalari è necessario fare una premessa sul numero di gradi di libertà scalari

fisici, che è del tutto generale e sarà alla base dello studio dell'inflazione anche per i modelli più complessi che introdurremo in seguito. Innanzitutto decomponiamo N_i in una componente longitudinale in trasformata di Fourier (e dunque a rotore nullo nello spazio reale) che possiamo chiamare $\partial_i\psi$ (che dipende quindi da un unico grado di libertà scalare) e una trasversale in trasformata di Fourier (e dunque a divergenza nulla nello spazio reale) che indichiamo con \tilde{N}_i (tale che $\partial_i\tilde{N}_i = 0$) come segue:

$$N_i = \tilde{N}_i + \partial_i\psi \quad (1.64)$$

Per quanto riguarda h_{ij} , separiamolo prima in un multiplo dell'identità $\frac{1}{3}Tr(h)\delta_{ij}$ (che è un grado di libertà scalare) e una parte a traccia nulla $\tilde{h}_{ij} = h_{ij} - \frac{1}{3}Tr(h)\delta_{ij}$ e poi effettuiamo sulla parte a traccia nulla la cosiddetta decomposizione SVT per estrarre il carattere degli ulteriori gradi di libertà scalare, vettoriale e tensoriale) come segue:

$$\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ij}^{\parallel} + \tilde{h}_{ij}^{\perp} + \tilde{h}_{ij}^T \quad (1.65)$$

dove $\tilde{h}_{ij}^{\parallel} = (\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2)\mathcal{H}$ (dipendente dal solo grado di libertà scalare \mathcal{H}), $\tilde{h}_{ij}^{\perp} = \partial_i\mathcal{H}_j - \partial_j\mathcal{H}_i$ con $\partial_i\mathcal{H}_i = 0$ (dipendente dal vettore \mathcal{H}_i) e \tilde{h}_{ij}^T è un tensore trasverso ($\partial_i\tilde{h}_{ij}^T = 0$) e a traccia nulla. Avendo eliminato la perturbazione del campo dell'inflatone con il passaggio in gauge unitaria, abbiamo dunque apparentemente 4 gradi di libertà scalari rimanenti (uno da δN , uno proveniente da δN_i e due da h_{ij}). In realtà uno di questi 4 gradi di libertà può essere eliminato da trasformazioni di gauge spaziali (quella temporale è stata già usata per passare in gauge unitaria) descritte da un solo parametro, della forma

$$x_i \rightarrow x_i + \partial_i\epsilon \quad (1.66)$$

Dei 3 gradi di libertà scalari adesso presenti, le equazioni di Einstein ne eliminano poi altri 2, con il risultato che le perturbazioni scalari sono descrivibili con un solo grado di libertà fisico. Sceglieremo questo come la perturbazione di curvatura definita ponendo, per la parte scalare della metrica spaziale h_{ij} ,

$$h_{ij} = a^2(t)e^{2\zeta}\delta_{ij} \quad (1.67)$$

dove $a(t)$ è il fattore di scala che compare nella metrica FRW, dove si ha evidentemente $\zeta = 0$. Come dimostrato rigorosamente da S. Weinberg [21], l'importanza di ζ risiede nella sua approssimata conservazione durante l'evoluzione super-horizon, così che la perturbazione di curvatura prodotta durante l'inflazione (quando le scale di formazione erano dentro l'orizzonte) rimane inalterata dopo l'uscita dall'orizzonte fino al successivo rientro che avviene quando la fase inflazionaria è ormai terminata da tempo e l'Universo è descritto dalla cosmologia standard, manifestandosi con le concrete fluttuazioni di densità studiate attraverso l'analisi della radiazione CMB. Per determinare le equazioni di vincolo di Einstein che ridurranno i gradi di libertà scalari alla sola ζ , consideriamo l'azione (1.63) le cui variabili dinamiche sono ζ , $N = 1 + \delta N$ e $N_i = \delta N_i$ dove, come al solito, si è usata la decomposizione nel valore di background FRW e la perturbazione. Troveremo, a partire dal principio di minima azione, le equazioni di vincolo per N e N_i che li legano a ζ e ci permetteranno di risostituirli nell'azione (1.63) per scriverla unicamente in funzione della sola perturbazione di curvatura. L'equazione di vincolo per N che ne risulta è data da

$$R^{(3)} - N^{-2}\dot{\varphi}_0^2 - 2V - N^{-2}(E^{ij}E_{ij} - E^2) = 0 \quad (1.68)$$

Per variazioni $N_i \rightarrow N_i + \Delta N_i$ si ha invece

$$\Delta \left(\frac{E^{ij}E_{ij} - E^2}{2} \right) = - (E_i^j - E\delta_i^j) \hat{\nabla}_j \Delta N^i \quad (1.69)$$

$$\Delta E = -h^{ij} \hat{\nabla}_j \Delta N_i \quad (1.70)$$

da cui si ricava che l'equazione di vincolo per N_i è

$$\nabla_j (N^{-1}E_i^j) - \nabla_i (N^{-1}E) = 0 \quad (1.71)$$

Essendo interessati a perturbazioni scalari porremo a 0 la componente trasversale \tilde{N}_i e cercheremo soluzioni della forma $N_i = \partial_i \psi$ per le equazioni di vincolo. Poichè il nostro obiettivo è ricavare l'azione quadratica per ζ , è sufficiente risolvere le equazioni di vincolo per δN e ψ all'ordine lineare in ζ . In vista della sostituzione successiva di δN e ψ in termini di ζ nell'azione, calcoliamo comunque le quantità interessanti fino all'ordine quadratico in ζ (o quando la semplicità delle espressioni

è sufficiente a consentirlo, anche in modo esatto), ricordando che ai fini della soluzione delle equazioni di vincolo è sufficiente troncare le espressioni al primo ordine in ζ . Usando la seguente espressione (esatta ad ogni ordine in ζ) per i simboli di Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} h^{kl} (\partial_j h_{li} + \partial_i h_{lj} - \partial_l h_{ij}) = \delta_i^k \partial_j \zeta + \delta_j^k \partial_i \zeta - \delta_{ij} \partial^k \zeta \quad (1.72)$$

si scrivono le derivate covarianti coinvolte nelle equazioni da risolvere e, in particolare, da

$$\hat{\nabla}_i N_j = \partial_i N_j - \Gamma_{ij}^k N_k \quad (1.73)$$

si ricavano le quantità dipendenti dalla curvatura estrinseca

$$E_{ij} = \frac{\dot{h}_{ij}}{2} - \partial_i \partial_j \psi + \Gamma_{ij}^k \partial_k \psi = a^2 e^{2\zeta} (H + \dot{\zeta}) \delta_{ij} - \partial_i \partial_j \psi + \partial_i \psi \partial_j \zeta + \partial_i \zeta \partial_j \psi - \delta_{ij} \partial^k \zeta \partial_k \psi \quad (1.74)$$

$$E^{ij} = h^{ik} h^{jl} E_{kl} = \frac{e^{-2\zeta}}{a^2} (H + \dot{\zeta}) \delta^{ij} - \frac{e^{-4\zeta}}{a^4} (\partial^i \partial^j \psi - \partial^i \psi \partial^j \zeta - \partial^i \zeta \partial^j \psi + \delta^{ij} \partial^k \zeta \partial_k \psi) \quad (1.75)$$

$$E = 3H + 3\dot{\zeta} - e^{-2\zeta} \frac{\nabla^2 \psi + \partial^i \psi \partial_i \zeta}{a^2} \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned} E^{ij} E_{ij} - E^2 &= -6H^2 - 12H\dot{\zeta} + 4H(1 - 2\zeta) \frac{\nabla^2 \psi}{a^2} + 4H \frac{\partial^i \psi \partial_i \zeta}{a^2} - 6\dot{\zeta}^2 + \\ &+ 4\dot{\zeta} \frac{\nabla^2 \psi}{a^2} + \frac{\partial^i \partial^j \psi \partial_i \partial_j \psi}{a^4} - \frac{(\nabla^2 \psi)^2}{a^4} \end{aligned} \quad (1.77)$$

dove si è posto $\partial^i = \delta^{ij} \partial_j$ (che è quantitativamente uguale a ∂_i).

Sempre usando i simboli di Christoffel e l'espressione della metrica spaziale h_{ij} in termini di ζ si ricava la curvatura intrinseca $R^{(3)}$ come

$$R^{(3)} = h^{ij} R_{ij}^{(3)} = h^{ij} R_{ikj}^{(3)k} = h^{ij} (\partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{ik}^k + \Gamma_{lk}^k \Gamma_{ij}^l - \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^l) \quad (1.78)$$

e usando le (3.130) e (1.72) si ricava

$$R^{(3)} = -\frac{4}{a^2} e^{-2\zeta} \left[\nabla^2 \zeta + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \zeta)^2 \right] \quad (1.79)$$

Con queste sostituzioni l'equazione di vincolo (1.71) diventa

$$-2M_{Pl}^2\partial_i\dot{\zeta} + 2M_{Pl}^2H\partial_i\delta N = 0 \quad (1.80)$$

la cui soluzione è quindi data da

$$\delta N = \frac{\dot{\zeta}}{H} \quad (1.81)$$

Inserendo questo risultato nell'equazione di vincolo per N data dalla (1.68) si trova poi

$$\nabla^2\psi = -\frac{1}{H}\nabla^2\zeta + a^2\epsilon\dot{\zeta} \quad (1.82)$$

Prima di sostituire le equazioni di vincolo, usando le equazioni (1.77), (1.79) e dopo alcune integrazioni per parti, l'azione fino all'ordine quadratico in ζ ha la forma seguente,

$$\begin{aligned} S = \int dt d^3\vec{x} a^3 M_{Pl}^2 & \left[\frac{(\vec{\nabla}\zeta)^2}{a^2} - 2\delta N \frac{\nabla^2\zeta}{a^2} - 3H^2\delta N^2 - \dot{H}\delta N^2 + 6H\dot{\zeta}\delta N \right] + \\ & + \int dt d^3\vec{x} a^3 M_{Pl}^2 \left(-2H\delta N \frac{\nabla^2\psi}{a^2} - 3\dot{\zeta}^2 + 2\dot{\zeta} \frac{\nabla^2\psi}{a^2} \right) \end{aligned} \quad (1.83)$$

Usando le soluzioni delle equazioni di vincolo si giunge alla forma

$$S = \int dt d^3\vec{x} a^3 M_{Pl}^2 \left[\frac{(\vec{\nabla}\zeta)^2}{a^2} - 2\frac{\dot{\zeta}}{H} \frac{\nabla^2\zeta}{a^2} + \epsilon\dot{\zeta}^2 \right] \quad (1.84)$$

Attraverso una procedura di integrazione per parti è possibile riscrivere il secondo termine della formula nella stessa forma degli altri, come

$$-2 \int dt d^3\vec{x} M_{Pl}^2 a \frac{\dot{\zeta}}{H} \nabla^2\zeta = - \int dt d^3\vec{x} M_{Pl}^2 a (1 + \epsilon) (\vec{\nabla}\zeta)^2 \quad (1.85)$$

Si arriva così alla seguente forma per l'azione di ζ :

$$S_\zeta^{(2)} = \int dt d^3\vec{x} a^3 M_{Pl}^2 \epsilon \left[\dot{\zeta}^2 - \frac{(\vec{\nabla}\zeta)^2}{a^2} \right] \quad (1.86)$$

La quantizzazione di ζ , data l'azione quadratica $S_\zeta^{(2)}$ procede come nel caso di $\delta\varphi$ mostrato dall'equazione (1.45), ovvero passando alla trasformata di Fourier $\zeta_{\vec{k}}$ ed esprimendo questa come combinazione lineare di operatori di creazione e distruzione con i coefficienti forniti dalle soluzioni delle equazioni del moto. Confrontando l'azione (1.86) e l'azione per $\delta\varphi$ data in (1.37), entrambe azioni quadratiche per fluttuazioni provenienti dalla stessa azione di slow-roll data dalla (1.11), si ricava che, in prima approssimazione, vale la seguente relazione tra ζ e $\delta\varphi$:

$$M_{Pl}\sqrt{\epsilon}\zeta \approx \frac{\delta\varphi}{\sqrt{2}} \quad (1.87)$$

o, sfruttando l'equazione di Friedmann (1.16), $\zeta \approx \frac{H\delta\varphi}{\dot{\varphi}_0}$ dove $\varphi_0(t)$ è la soluzione omogenea. Questo legame ci consente di dedurre direttamente lo spettro delle perturbazioni per ζ , a cui da ora in poi ci riferiremo semplicemente come spettro scalare $P_s(k) \equiv P_\zeta(k)$. Esso è dato da

$$P_s(k) \approx \frac{1}{2\epsilon M_{Pl}^2} P_{\delta\varphi}(k) = \left[\frac{H^2}{4M_{Pl}^2\epsilon k^3} \right]_{k=aH} \quad (1.88)$$

dove abbiamo indicato esplicitamente che le quantità vanno valutate all'uscita dall'orizzonte della scala di lunghezza comovente k^{-1} . Nel limite di de Sitter in cui H può essere considerato costante nel tempo, si ottiene un andamento come k^{-3} di $P_\zeta(k)$, che è ben verificato dalle osservazioni della CMB. Uno spettro siffatto prende il nome di spettro invariante di scala, poichè si dimostra che in tal caso, al rientro delle perturbazioni all'interno dell'orizzonte, nella fase ormai descritta dalla cosmologia relativistica standard, tutte le fluttuazioni di densità di materia hanno la stessa frequenza statistica indipendentemente da quanta massa contengano. Una volta introdotta la quantità adimensionale

$$\Delta_s^2(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_s(k) = \left[\frac{H^2}{8\pi^2 M_{Pl}^2\epsilon} \right]_{k=aH} \quad (1.89)$$

la deviazione dall'invarianza di scala che si verifica in condizioni quasi-de Sitter, dovuta alla debole dipendenza temporale di H e in generale di ϵ , viene solitamente

espressa in termini del parametro di tilt scalare definito come

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln k} \quad (1.90)$$

Il parametro di tilt può essere espresso in termini dei parametri di slow-roll, introducendo il numero di e-folds dN legato ad ϵ e η dalle (1.21) e (1.22), come segue:

$$\frac{d \ln \Delta_s^2}{d \ln k} = \frac{d \ln \Delta_s^2}{dN} \frac{dN}{d \ln k} = \left(2 \frac{d \ln H}{dN} - \frac{d \ln \epsilon}{dN} \right) \frac{dN}{d \ln k} = (-2\epsilon - \eta) \frac{dN}{d \ln k} \quad (1.91)$$

Ricordando la relazione $k = aH$ per l'uscita dall'orizzonte si ricava per il fattore $\frac{dN}{d \ln k}$ l'espressione

$$\frac{dN}{d \ln k} = \left(1 + \frac{d \ln H}{dN} \right)^{-1} \approx 1 + \epsilon \quad (1.92)$$

dove si è usato $\epsilon \ll 1$. Al primo ordine nei parametri di slow-roll si ha dunque $n_s - 1 \approx -2\epsilon - \eta$, confermando che si tratta di piccole deviazioni dall'invarianza di scala.

1.7 Spettro tensoriale dell'inflazione

Finora si sono analizzate solo le perturbazioni scalari generate dall'inflazione e si è calcolato lo spettro associato ad esse. Più in generale possiamo considerare nella metrica spaziale h_{ij} anche il contributo tensoriale come segue:

$$h_{ij} = a^2(t) \left(e^{2\zeta} \delta_{ij} + \gamma_{ij} \right) \quad (1.93)$$

Il contributo della perturbazione tensoriale della metrica γ_{ij} è relegato nell'azione di Einstein-Hilbert, risultando in una azione quadratica per γ_{ij} data da

$$S = \int d\tau d^3 \vec{x} \frac{M_{Pl}^2}{8} a^2 \left[(\gamma'_{ij})^2 - (\vec{\nabla} \gamma_{ij})^2 \right] \quad (1.94)$$

Dopo la quantizzazione di questa azione quadratica si ricava lo spettro delle perturbazioni tensoriali (che è la somma di due contributi identici per ciascuna delle due

polarizzazioni delle onde gravitazionali coinvolte)

$$P_t(k) = \frac{4H^2}{M_{Pl}^2 k^3} \quad (1.95)$$

Si tratta di una conseguenza del tutto generale del paradigma inflazionario, indipendente dal modello specifico di inflazione, in quanto proveniente dall'azione di Einstein-Hilbert comune a tutte le teorie. La rilevazione di queste onde gravitazionali primordiali e la misura del loro spettro di potenza darebbe quindi una solida prova a sostegno dell'inflazione. Inoltre, come mostra la (1.95), essa permetterebbe una misura della scala energetica H coinvolta in quella fase di espansione accelerata. Si usa introdurre il parametro r (tensor to scalar ratio) definito da

$$r \equiv \frac{P_t}{P_s} \quad (1.96)$$

come quantità caratteristica dello specifico modello di inflazione, e le analisi svolte dagli esperimenti BICEP2 e Keck Array hanno fissato attualmente un limite superiore $r < 0.07$. Nel caso di inflazione slow-roll, usando i risultati ottenuti per P_s e P_t si ha

$$r = 16\epsilon \quad (1.97)$$

per cui lo spettro delle perturbazioni tensoriali è molto piccolo rispetto a quello scalare.

1.8 Non-gaussianità primordiali

Lo studio delle perturbazioni effettuato nella sezione 1.6, basato sulla sola azione quadratica per ζ , si limita a fornire un meccanismo di produzione che rende conto esclusivamente del comportamento gaussiano della distribuzione statistica delle anisotropie di temperatura della CMB. Si tratta di un'informazione parziale, che trascura le deviazioni da una distribuzione perfettamente gaussiana (dette appunto non-gaussianità), riducendo drasticamente i gradi libertà necessari a una descrizione completa delle anisotropie. Per una distribuzione gaussiana è infatti sufficiente assegnare la varianza che, come abbiamo visto, è legata alla funzione a due punti della perturbazione. L'origine delle non-gaussianità, assenti quando ci si ferma all'a-

zione libera per le perturbazioni (che restituisce solo una funzione a due punti non nulla, definendo lo spettro), va dunque ricercata nelle interazioni e nelle funzioni di correlazione di ordine superiore al secondo che solo esse prevedono. Lo studio delle non-gaussianità consente di investigare le proprietà dinamiche fondamentali dell'Universo primordiale e incoraggia la ricerca di meccanismi capaci di renderle abbastanza rilevanti da potere essere osservate con l'odierna risoluzione delle strumentazioni. A tal proposito vi sono fondamentalmente tre approcci possibili:

- restare all'interno delle teorie di inflazione prodotta da un singolo campo ed esplorare le modificazioni del modello di slow-roll fondamentale che abbiamo finora studiato (anticipando un risultato che discuteremo nel seguito, nell'inflazione slow-roll le non gaussianità sono infatti troppo piccole per essere rilevate con la sensibilità attuale);
- studiare le modificazioni prodotte dall'aggiunta di gradi di libertà leggeri, che continuino a dare un background con espansione accelerata, ma modifichino qualitativamente la dinamica delle perturbazioni;
- abbandonare il paradigma inflazionario e muoversi nella direzione di teorie alternative ad esso.

In questo lavoro di tesi scegliamo la prima strada, cercando modificazioni della lagrangiana di un singolo campo scalare rispetto al caso di slow-roll. Prima di procedere è però necessario formalizzare in modo quantitativo il legame tra non-gaussianità, interazioni e funzioni di correlazione a più di due punti. Durante l'inflazione, quando le scale comoventi a cui studiamo la genesi delle perturbazioni primordiali erano dentro l'orizzonte, gli stessi effetti quantistici sono stati responsabili della comparsa di non-gaussianità nella distribuzione statistica delle perturbazioni. Avendo in mente che le non-gaussianità sono legate alle funzioni ad almeno tre punti delle perturbazioni, si pone allora il problema di valutare i valori di aspettazione di operatori dipendenti dalle perturbazioni quantizzate (noi ci interesseremo solo dei gradi di libertà scalari, descritti dalla perturbazione di curvatura $\zeta(t, \vec{x})$) conoscendo la procedura di quantizzazione (canonica) solo nel caso di azione quadratica, cioè di campi liberi, mentre la dinamica completa contiene interazioni. La questione è analoga al

calcolo della matrice-S nell'approccio perturbativo alla teoria quantistica dei campi con hamiltoniana $H = H_0 + H_{int}(t)$, dove viene risolto passando in rappresentazione di interazione, anche qui usando come campi quantizzati quelli liberi. Nel caso della matrice-S le quantità fisiche interessanti sono le ampiezze di transizione tra uno stato asintoticamente libero nel remoto passato $|in\rangle$ e uno nel lontano futuro $|out\rangle$ (entrambi autostati di H_0), cioè

$$\langle out(t_f = +\infty) | in(t_i = -\infty) \rangle = \langle out | S | in \rangle \quad (1.98)$$

Detta $H_{int}^I(t)$ l'hamiltoniana di interazione in rappresentazione di interazione, ovvero

$$H_{int}^I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_i)} H_{int}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_i)} \quad (1.99)$$

la matrice di scattering è definita come

$$S = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} H_{int}^I(t) dt} \quad (1.100)$$

dove il simbolo T (time-ordering) impone di ordinare gli operatori in modo che quelli a tempi maggiori siano a sinistra. Dal punto di vista della cosmologia, come vedremo, le quantità di interesse e le condizioni al bordo sono di natura diversa.

1.8.1 Formalismo di Schwinger-Keldysh

In cosmologia, in particolare durante l'inflazione, vorremmo potere calcolare valori di aspettazione di funzioni di ζ a un tempo fissato t (ad esempio quello a cui vogliamo vedere quanto sono grandi le non-gaussianità che i meccanismi quantistici hanno prodotto) e vi sono condizioni asintotiche fissate solo nel lontano passato, quando la scala delle perturbazioni è ben dentro l'orizzonte e i campi in rappresentazione di interazione sono vincolati ad assumere la stessa forma che hanno nel caso di metrica di Minkowski. Per una generica funzione Q di ζ (ad esempio, nel caso delle funzioni a tre punti, $Q = \zeta_{\vec{k}_1} \zeta_{\vec{k}_2} \zeta_{\vec{k}_3}$) il valore di aspettazione di interesse cosmologico all'istante t (che, nel caso del calcolo delle non-gaussianità primordiali, è quello di fine dell'inflazione) è

$$\langle Q(t) \rangle = \langle in | Q(t) | in \rangle \quad (1.101)$$

dove $|in\rangle$ è il fondamentale della teoria interagente nel remoto passato ad un istante iniziale t_i (ad esempio, occupandoci qui di inflazione, possiamo prendere t_i come l'istante in cui inizia la fase di espansione accelerata). Siano $H_0(t)$ l'operatore hamiltoniano libero (si noti che, a differenza del caso della teoria dei campi su spazio-tempo di Minkowski, in cosmologia anche l'hamiltoniana libera dipende dal tempo perchè l'equazione del moto classica è un oscillatore armonico con frequenza esplicitamente dipendente dal tempo) e $H_{int}(t)$ quello di interazione. Il formalismo di Schwinger-Keldysh [22, 23] permetterà che, come nel caso della matrice di scattering, i valori di aspettazione delle osservabili cosmologiche (1.101) siano riscritti in termini di operatori in rappresentazione di interazione. Per raggiungere tale obiettivo, detto $U_0(t, t_i)$ l'operatore di evoluzione temporale della teoria libera (dall'istante t_i a t) e $U(t, t_i)$ quello completo della teoria interagente, consideriamo che gli operatori in rappresentazione di Heisenberg al tempo t sono legati a quelli al tempo t_i da

$$Q(t) = U^\dagger(t, t_i)Q(t_i)U(t, t_i) \quad (1.102)$$

e quelli in rappresentazione di interazione sono dati da

$$Q^I(t) = U_0^\dagger(t, t_i)Q(t_i)U_0(t, t_i) \quad (1.103)$$

da cui si ricava che

$$Q(t) = U^\dagger(t, t_i)U_0(t, t_i)Q^I(t)U_0^\dagger(t, t_i)U(t, t_i) \quad (1.104)$$

Poichè $U_0(t, t_i)$ e $U(t, t_i)$ soddisfano per definizione le equazioni

$$i\hbar\frac{d}{dt}U_0(t, t_i) = H_0(t)U_0(t, t_i) \quad (1.105)$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}U(t, t_i) = H(t)U(t, t_i) \quad (1.106)$$

si deduce che $U_0^\dagger(t, t_i)U(t, t_i)$ soddisfa un'equazione di evoluzione temporale dipendente dalla sola H_{int}^I (operatore in rappresentazione di interazione),

$$i\hbar\frac{d}{dt}\left(U_0^\dagger(t, t_i)U(t, t_i)\right) = H_{int}^I(t)\left(U_0^\dagger(t, t_i)U(t, t_i)\right)$$

la cui soluzione è la serie di Dyson

$$U_0^\dagger(t, t_i)U(t, t_i) = T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t H_{int}^I(t') dt'}$$

Concludiamo allora che l'espressione cercata per $\langle Q(t) \rangle$ è

$$\langle Q(t) \rangle = \langle in | \left(T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t H_{int}^I(t') dt'} \right)^\dagger Q^I(t) T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t H_{int}^I(t'') dt''} | in \rangle \quad (1.107)$$

dove $H_{int}^I(t)$ e i campi in essa contenuti sono definiti in rappresentazione di interazione. Per spegnere l'interazione al tempo remoto t_i usiamo la prescrizione $i\epsilon$, come nel caso del calcolo delle funzioni di correlazione in teoria dei campi su spazio-tempo di Minkowski, ovvero mandiamo $t_i \rightarrow t_i(1 - i\epsilon)$ con $\epsilon \rightarrow 0^+$. Questo fa sì che nella (1.107) possiamo sostituire il vuoto interagente $|in\rangle$ con quello libero $|0\rangle$. Ponendo $t_i = -\infty$ e notando che l'aggiunto nella (1.107) agisce anche sugli estremi di integrazione si giunge alla soluzione completa del problema del calcolo dei valori di aspettazione in cosmologia:

$$\langle Q(t) \rangle = \langle 0 | \bar{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t H_{int}^I(t') dt'} Q^I(t) T e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t H_{int}^I(t'') dt''} | 0 \rangle \quad (1.108)$$

dove \bar{T} (anti-time-ordering) ordina gli operatori ponendo quelli a tempi maggiori più a destra (al contrario di T) e si è posto $-\infty^\pm = -\infty(1 \mp i\epsilon)$. La (1.108) si presta ad uno sviluppo perturbativo nei parametri di H_{int}^I e, in particolare, fermandoci al primo ordine in H_{int}^I , si ha

$$\langle Q(t) \rangle = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle 0 | [Q^I(t), H_{int}^I(t')] | 0 \rangle dt' \quad (1.109)$$

Più concretamente, per calcolare il bispettro che contiene le informazioni sulle non-gaussianità primordiali, si considera l'azione per ζ contenente la parte libera di densità lagrangiana \mathcal{L}_2 e quella di interazione (di cui consideriamo solo gli operatori cubici in ζ) di densità lagrangiana $\mathcal{L}_{int} \approx \mathcal{L}_3$

$$S[\zeta] = \int dt d^3 \vec{x} a^3 (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3) \quad (1.110)$$

e dunque l'hamiltoniana di interazione associata è

$$H_{int}(t) = - \int d^3 \vec{x} a^3 \mathcal{L}_3 \quad (1.111)$$

Passando al tempo conforme τ definito da $dt = a d\tau$, e posto $\tau = 0$ alla fine dell'inflazione, la formula (1.109) applicata all'operatore $Q(t) = \zeta_{\vec{k}_1}(t) \zeta_{\vec{k}_2}(t) \zeta_{\vec{k}_3}(t)$ ci consente di definire il bispettro $B_\zeta(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3)$ prodotto dall'inflazione come

$$B_\zeta(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \equiv \langle \zeta_{\vec{k}_1} \zeta_{\vec{k}_2} \zeta_{\vec{k}_3} \rangle(\tau = 0) = -i \int_{-\infty^+}^0 d\tau \langle 0 | \left[\zeta_{\vec{k}_1} \zeta_{\vec{k}_2} \zeta_{\vec{k}_3}(\tau = 0), H_{int}(\tau) \right] | 0 \rangle \quad (1.112)$$

dove il fattore extra a , dovuto al passaggio da tempo cosmologico a tempo conforme, è stato incluso nella definizione di $H_{int}(\tau)$ che è

$$H_{int}(\tau) = - \int d^3 \vec{x} a^4 \mathcal{L}_3 \quad (1.113)$$

L'omogeneità e l'isotropia del background FRW impongono che la dipendenza vettoriale del bispettro sia confinata alla conservazione dell'impulso, la quale impone che $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ formino un triangolo (cioè $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$) così che possiamo scrivere

$$B_\zeta(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) = (2\pi)^3 B_\zeta(k_1, k_2, k_3) \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3) \quad (1.114)$$

Nel caso di spettro invariante di scala, la struttura di $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$ può essere posta nella seguente forma:

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) = \frac{18}{5} f_{NL} \frac{S(x_2, x_3)}{(k_1 k_2 k_3)^2} \Delta_\zeta^4 \quad (1.115)$$

dove $x_2 = \frac{k_2}{k_1}$, $x_3 = \frac{k_3}{k_1}$ e la funzione di shape $S(x_2, x_3)$, è normalizzata in modo da soddisfare $S(1, 1) = 1$. Il coefficiente adimensionale e costante f_{NL} (nella cui definizione a partire dal bispettro è presente, solo per motivi storici, il fattore $\frac{18}{5}$) misura la grandezza delle non-gaussianità e quindi l'importanza delle interazioni responsabili della loro produzione.

1.8.2 Il caso di slow-roll

Il primo modello di inflazione a cui vogliamo applicare il formalismo illustrato nel paragrafo precedente è quello di slow-roll. Il calcolo dettagliato delle non-gaussianità attraverso la (1.112) richiede la conoscenza dell'azione cubica per la perturbazione di curvatura ζ , che può essere ottenuta con le stesse tecniche utilizzate nella sezione 1.6 ma mantenendo i termini fino all'ordine cubico in ζ . La procedura è laboriosa, come lo era già per la sola azione quadratica, ed essendo interessati solo ad una stima dell'ordine di grandezza delle non-gaussianità, ci limitiamo qui a considerare solo uno dei termini cubici che ne risultano [24], la cui forma è $\mathcal{L}_3 = M_{Pl}^2 \epsilon^2 \zeta \dot{\zeta}^2$. L'hamiltoniana corrispondente data dalla (1.113) è allora

$$H_{int}(\tau) = - \int d^3\vec{x} M_{Pl}^2 a^2 \epsilon^2 \zeta (\zeta')^2 \quad (1.116)$$

Il calcolo dettagliato dell'integrale in (1.112) non è in realtà necessario ai fini di ottenere una stima dell'ordine di grandezza del parametro f_{NL} che, come vedremo, risulterà molto piccolo nell'inflazione slow-roll, senza nessuna possibilità di potere essere osservato. Un modo semplice di stimare f_{NL} è considerare solo i fattori H (parametro di Hubble) e ϵ senza preoccuparsi delle dipendenze temporali e degli impulsi presenti nell'integrale, in quanto essi determineranno la forma precisa del bispettro, inutile per un calcolo approssimato. Ad ogni fattore a corrisponde una potenza H^{-1} (visto che durante l'inflazione $a(\tau) \approx -\frac{1}{H\tau}$) e la conoscenza dello spettro di potenza, calcolato nella sezione 1.6, fornisce la stima $\zeta, \zeta' \propto \Delta_\zeta \propto H\epsilon^{-\frac{1}{2}}$. Il vertice di interazione cubico di \mathcal{L}_3 è allora associato alle potenze seguenti:

$$a^2 \epsilon^2 \zeta (\zeta')^2 \propto H\epsilon^{\frac{1}{2}} \quad (1.117)$$

Includendo il contributo del prodotto $\zeta_{\vec{k}_1} \zeta_{\vec{k}_2} \zeta_{\vec{k}_3}$ la (1.112) prevede quindi

$$B_\zeta \propto \left(H\epsilon^{-\frac{1}{2}}\right)^3 H\epsilon^{\frac{1}{2}} \sim \frac{H^4}{\epsilon} \quad (1.118)$$

e dalla definizione di f_{NL} data dalla (1.115) si arriva alla stima

$$f_{NL} \sim \frac{B_\zeta}{\Delta_\zeta^4} \sim \epsilon \ll 1 \quad (1.119)$$

Includendo gli ulteriori termini cubici di interazione si sarebbe ottenuto un andamento $f_{NL} \sim O(\epsilon, \eta)$ che non cambia comunque il fatto qualitativamente interessante che l'inflazione slow-roll prevede non-gaussianità molto piccole, dello stesso ordine dei parametri di slow-roll, che non potranno essere osservate dalle analisi sulla radiazione di fondo [25]. Ciò è in accordo con il fatto che nell'inflazione slow-roll, essendo il potenziale vincolato ad essere molto piatto (in modo da garantire l'esistenza del background con espansione accelerata) i coupling delle interazioni devono essere necessariamente piccoli e dunque ne risultano solo non-gaussianità molto deboli. Osserviamo che un modo più compatto di riassumere il metodo usato per stimare f_{NL} è

$$f_{NL} \sim \frac{1}{\zeta} \frac{\mathcal{L}_3}{\mathcal{L}_2} \quad (1.120)$$

Tale scrittura è del tutto generale e può essere usata per effettuare stime anche su modelli diversi da quello di slow-roll, come faremo nel prossimo paragrafo.

1.8.3 Non-gaussianità grandi e instabilità radiativa

L'inflazione slow-roll finora trattata, come abbiamo visto, è insoddisfacente dal punto di vista della possibilità di rivelarne le non-gaussianità. Se vogliamo restare nell'ambito dei modelli inflazionari con un singolo campo, le modificazioni dell'inflazione slow-roll in modo da avere non-gaussianità grandi e potenzialmente osservabili, con $f_{NL} \gtrsim 1$, devono necessariamente coinvolgere operatori contenenti derivate che agiscono sull'inflatone [1], in quanto gli operatori che non ne contengono sono già compresi nel potenziale, che è vincolato ad essere piatto affinché esista la fase di espansione accelerata. Consideriamo allora, al variare di $n \geq 2$, operatori della forma

$$\hat{O}_n \propto \frac{(\partial_\mu \varphi)^{2n}}{\Lambda^{4n-4}} \quad (1.121)$$

dove Λ ha le dimensioni di un'energia e $n \geq 2$ è un numero intero ($n = 1$ corrisponde al termine cinetico già presente nel modello di slow-roll). La prima modificazione della lagrangiana dell'inflatone può essere scritta come

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{(\partial_\mu\varphi)^4}{8\Lambda^4} \quad (1.122)$$

dove, come si vedrà tra un attimo, il fattore 8 è stato inserito per avere la normalizzazione canonica della lagrangiana del campo di perturbazione rispetto al caso spazialmente omogeneo. Decomponiamo $\varphi(t, \vec{x})$ nel background $\varphi_0(t)$ e nella fluttuazione $\delta\varphi(t, \vec{x})$ e osserviamo che la (1.122) ha senso come lagrangiana efficace, ottenuta troncando la serie di operatori \hat{O}_n , solo se $\dot{\varphi}_0 \ll \Lambda^2$, in quanto nel momento in cui si verificasse $\dot{\varphi}_0 \gtrsim \Lambda^2$ si avrebbe che ogni \hat{O}_n valutato sulla soluzione omogenea φ_0 è di ordine $\frac{\dot{\varphi}_0^{2n}}{\Lambda^{4n-4}} \gtrsim \Lambda^4$ indipendentemente da n , e non avrebbe senso fermarsi a $n = 2$ come si fa nella (1.122). Con questa assunzione la lagrangiana del campo di fluttuazione $\delta\varphi(t, \vec{x})$ ha le seguenti parti quadratiche e di interazione (fermandoci alla lagrangiana cubica nei campi):

$$\mathcal{L}_2 \approx -\frac{1}{2}(\partial_\mu\delta\varphi)^2 \quad (1.123)$$

$$\mathcal{L}_3 \approx -\frac{\dot{\varphi}_0}{2\Lambda^4}\delta\dot{\varphi}(\partial_\mu\delta\varphi)^2 \quad (1.124)$$

dove, grazie alla condizione $\dot{\varphi}_0 \ll \Lambda^2$, la parte quadratica è determinata dal solo termine cinetico (e non da \hat{O}_2 il cui contributo quadratico in $\delta\varphi$ è $-\frac{\dot{\varphi}_0^2}{8\Lambda^4}(\partial_\mu\delta\varphi)^2$, trascurabile rispetto a $-\frac{1}{2}(\partial_\mu\delta\varphi)^2$). Applichiamo la (1.120) per valutare le non-gaussianità:

$$f_{NL} \sim \frac{1}{\zeta}\frac{\mathcal{L}_3}{\mathcal{L}_2} \sim \frac{1}{\zeta}\frac{\dot{\varphi}_0\delta\dot{\varphi}}{\Lambda^4} \quad (1.125)$$

Stimando $\delta\dot{\varphi}$ con $H\delta\varphi$ (rapporto tra il campo di fluttuazione e la scala di tempo di Hubble H^{-1}) e ricordando che $\zeta = \frac{H}{\dot{\varphi}_0}\delta\varphi$ si ottiene

$$f_{NL} \sim \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\Lambda^4} \quad (1.126)$$

La richiesta iniziale di avere non gaussianità grandi, almeno dell'ordine dell'unità, è allora soddisfatta solo se $\dot{\varphi}_0 \gtrsim \Lambda^2$, nel qual caso, come abbiamo già osservato, non si può in alcun modo troncature la serie degli \hat{O}_n . Per ovviare a questo conflitto tra l'esigenza di avere teorie inflazionarie con non-gaussianità rilevanti e l'accettabilità delle sole teorie radiativamente stabili, occorre quindi considerare teorie complete nell'ultravioletto, o che rispettino determinate simmetrie che ne proteggano i coefficienti dei vari operatori dalle correzioni radiative. Un esempio molto studiato in letteratura di teoria protetta dalle correzioni quantistiche grazie ad una simmetria (nello specifico, una simmetria per boosts in dimensione maggiore) è l'inflazione DBI [2, 3], la cui lagrangiana è data da

$$\mathcal{L} = -\frac{\Lambda^4}{f(\varphi)}\sqrt{1 - f(\varphi)X} - V(\varphi) \quad (1.127)$$

dove Λ ha le dimensioni di una energia, $f(\varphi)$ è una funzione adimensionale del campo φ e si è definito $X = -\frac{g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi}{\Lambda^4}$. Questo modello può essere studiato nel contesto generale della teoria efficace dell'inflazione introdotta nella sezione 1.5. In particolare, detto $\varphi_0(t)$ il campo omogeneo di background, usando le equazioni di Friedmann corrispondenti

$$3M_{Pl}^2 H^2 = \rho = \frac{\Lambda^4}{f(\varphi_0)}\frac{1}{\sqrt{1 - f(\varphi_0)X_0}} + V(\varphi_0) \quad (1.128)$$

$$-M_{Pl}^2 \dot{H} = \frac{\rho + p}{2} = \frac{\Lambda^4 X_0}{2\sqrt{1 - f(\varphi_0)X_0}} \quad (1.129)$$

si ha per l'azione in gauge unitaria l'espressione

$$S_{u.g.}^{(DBI)} = \int dt d^3\vec{x} N \sqrt{h} \left[\frac{1}{2} M_{Pl}^2 R - M_{Pl}^2 \dot{H} \frac{1}{N^2} - M_{Pl}^2 (3H^2 + \dot{H}) + \frac{1}{2} M^4(t) \delta N^2 \right] \quad (1.130)$$

che è ovviamente un caso particolare della scrittura generale (1.55), dove il coefficiente $M^4(t)$ è legato al campo $\varphi_0(t)$ di background come

$$M^4 = \frac{\Lambda^4 X_0^2 f(\varphi_0)}{(1 - f(\varphi_0)X_0)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.131)$$

Riprenderemo in seguito l'inflazione DBI per confrontarla con la teoria di campo efficace che ci accingiamo a costruire nel prossimo capitolo (a partire da una simmetria ben precisa, che ne garantisca le proprietà di stabilità radiativa) e su cui ci concentreremo in tutto il lavoro rimanente.

1.9 Dati osservativi e vincoli sui parametri inflazionari

Riassumiamo qui le limitazioni generali sui parametri cosmologici di inflazione poste dalle osservazioni sulla radiazione CMB:

- Lo spettro di potenza scalare, direttamente legato alle anisotropie di temperatura nel fondo cosmico a microonde, ha un'entità espressa da

$$\Delta_s^2 \sim 10^{-5}$$

- Le deviazioni dall'invarianza di scala, secondo i dati e le analisi della collaborazione Planck, hanno

$$1 - n_s \sim 10^{-2}$$

con $n_s \neq 1$ acclarato ad un livello di confidenza maggiore di 5 deviazioni standard.

- Il dato su $1 - n_s$, ovvero l'esistenza di piccole ma sicure differenze rispetto all'invarianza di scala, implica dei vincoli sulle deviazioni dell'Universo inflazionario da un'evoluzione di tipo de Sitter, caratteristiche riassunte nei parametri di slow-roll. In particolare, a meno di cancellazioni accidentali, si ha

$$\epsilon \lesssim 10^{-2}$$

- Il rapporto r tra lo spettro di potenza delle perturbazioni tensoriali e quelle scalari ha un limite superiore, che gli esperimenti BICEP2 e KeckArray sulla polarizzazione della radiazione di fondo [26] pongono a

$$r < 0.07$$

- Lo studio delle non-gaussianità nelle anisotropie della CMB, effettuato dal satellite Planck [27], stabilisce per il parametro f_{NL} che descrive le non-gaussianità primordiali

$$|f_{NL}| < 50$$

2 Simmetria galileiana

Lo studio delle anisotropie nella temperatura della radiazione cosmica di fondo fornisce informazioni sulla distribuzione delle perturbazioni di densità primordiali dell'Universo, di cui, come abbiamo visto, le fluttuazioni quantistiche durante l'inflazione sono una causa promettente. In particolare, la distribuzione delle anisotropie mostrata dalle osservazioni è molto vicina ad una gaussiana. In presenza di un meccanismo di produzione basato su fluttuazioni quantistiche, questo implica che le interazioni dell'inflatone sono piccole. Il modello di slow-roll illustrato nella sezione 1.3 è minimale, nel senso che è la teoria di campo contenente il più piccolo numero di ingredienti necessario a produrre un'epoca di inflazione. L'equazione del moto per le fluttuazioni del campo $\delta\varphi(t, \vec{x})$, che abbiamo scritto nel capitolo precedente, descrive una teoria di campo libera nel limite in cui il potenziale è abbastanza piatto, ovvero $\epsilon_V, |\eta_V| \ll 1$, come richiesto dall'inflazione. Il risultato è quindi una distribuzione gaussiana, a meno di correzioni che risultano dello stesso ordine dei parametri di slow-roll, troppo piccole per potere essere osservate. Il fatto che la distribuzione quasi gaussiana delle perturbazioni sia semplicemente una conseguenza della struttura minimale di una teoria che produca inflazione, indica che sono le non-gaussianità a distinguere tra loro vari modelli di inflazione e spinge la ricerca di teorie in cui le non-gaussianità risultino abbastanza grandi da potere essere rilevate. Introduremo allora un modello di inflazione più complesso, dove le interazioni abbiano un ruolo centrale; esso verrà descritto da una teoria efficace, la cui costruzione è guidata da un principio di simmetria.

2.1 Galileone su spazio-tempo piatto

Il modello che si vuole studiare di seguito è una teoria di campo scalare con interazioni contenenti più di una derivata per campo, ma con equazioni del moto che risultino del secondo ordine nelle derivate temporali. Quest'ultima richiesta è dettata dalla stabilità della teoria; infatti, se le equazioni del moto sono di ordine maggiore del secondo nelle derivate temporali, allora esiste una teoria equivalente a quella data, con un numero maggiore di gradi di libertà ed equazioni del moto del secondo ordine in cui il termine cinetico di almeno un grado di libertà è quello di un "ghost" (energia

cinetica non limitata inferiormente). Lo studio di questa teoria di campo sarà prima effettuato nel caso di spazio-tempo di Minkowski e, in seguito, si discuterà la sua generalizzazione su spazio-tempo curvo. Consideriamo la seguente simmetria, detta galileiana (a causa della sua analogia di forma con i boosts di Galileo), per la teoria di un campo scalare $\varphi(x)$

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + b_\mu x^\mu + c \quad (2.1)$$

dove b_μ è un arbitrario 4-vettore costante (dalle dimensioni fisiche adeguate) e c è un arbitrario shift costante [28, 4, 5, 6, 7]. Termini lagrangiani con almeno due derivate per campo sono banalmente invarianti, ma esistono termini in cui la realizzazione della simmetria è meno banale (ovvero solo le equazioni del moto sono invarianti, mentre la lagrangiana cambia per una derivata totale) e che soddisfano la richiesta di avere equazioni del moto del secondo ordine. In particolare vi sono solo 5 possibilità; oltre al termine cinetico standard $\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2$ e al termine di tadpole $\mathcal{L}_1 = \varphi$ essi hanno la forma seguente [4]:

$$\mathcal{L}_3 = (\partial_\mu\varphi)^2 \square\varphi \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_4 = (\partial_\mu\varphi)^2 [(\square\varphi)^2 - \partial^\mu\partial_\nu\varphi\partial^\nu\partial_\mu\varphi] \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_5 = (\partial_\mu\varphi)^2 [(\square\varphi)^3 - 3\square\varphi\partial^\mu\partial_\nu\varphi\partial^\nu\partial_\mu\varphi + 2\partial^\mu\partial_\nu\varphi\partial^\nu\partial_\rho\varphi\partial^\rho\partial_\mu\varphi] \quad (2.4)$$

Tutti questi operatori sono invarianti a meno di una derivata totale. Per tutta la trattazione ci occuperemo esclusivamente del primo contributo

$$\mathcal{L}_3 = \frac{(\partial_\mu\varphi)^2 \square\varphi}{\Lambda_3^3} \quad (2.5)$$

dove Λ_3 è il cut-off ultravioletto della teoria.

2.1.1 Analisi delle correzioni radiative

Data la lagrangiana classica $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \alpha\mathcal{L}_3$ (con α coefficiente adimensionale), vogliamo studiare le correzioni radiative generate dalla quantizzazione della teoria. Si può verificare esplicitamente che si possono generare operatori con almeno due derivate per campo (e quindi banalmente invarianti) tra i quali quello di dimensione minore

è

$$\frac{(\partial^2\varphi)^3}{\Lambda_3^5} \quad (2.6)$$

In particolare, usando la notazione ψ per le linee esterne e φ per quelle interne (faremo questa distinzione di notazione ogni volta che considereremo esplicitamente un diagramma di Feynman), per generare quest'ultimo basta considerare il diagramma ad 1-loop con 3 linee esterne $\partial^2\psi$ e 3 linee interne $\partial\varphi$ e stimare il contributo del diagramma troncando gli impulsi interni al cut-off ultravioletto Λ_3 . Tuttavia operatori come quello discusso, oltre a rispettare la simmetria, sono anche soppressi rispetto ad \mathcal{L}_3 per energie basse rispetto a Λ_3 . Operatori che violano la simmetria, come

$$\frac{(\partial\varphi)^4}{\Lambda_3^4} \quad (2.7)$$

non vengono invece generati, come in generale operatori del tipo $\frac{(\partial\varphi)^{2n}}{\Lambda_3^{4(n-1)}}$. Per vederlo notiamo, mediante esplicita costruzione del diagramma di Feynman, che un tale vertice di interazione efficace richiede l'uso di vertici della teoria del tipo $\partial\psi\partial\varphi\Box\varphi$, ma, attraverso una integrazione per parti, quest'ultimo operatore si riconduce alla forma $\Box\psi\partial\varphi\partial\varphi$ che contiene solo linee esterne con due derivate, concludendo così che non solo non è possibile generare $(\partial\varphi)^4$, ma anche che gli operatori del tipo (2.2), (2.3), (2.4) non ricevono correzioni quantistiche. Questo teorema di “non rinormalizzazione” [29] costituisce la proprietà più importante delle teorie invarianti sotto trasformazioni galileoniche a livello quantistico.

2.2 Galileone su spazio-tempo curvo

Passiamo ora ad estendere la teoria al caso in cui sia presente la gravità. Facciamo questo nel modo convenzionale, cioè attraverso il metodo di accoppiamento minimale, sostituendo le derivate con derivate covarianti e la metrica di Minkowski con il tensore metrico generico

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu \quad (2.8)$$

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} \quad (2.9)$$

L'azione della teoria, comprendente anche il termine di Einstein-Hilbert per la metrica è

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_{Pl}^2 R - \frac{1}{2} (\nabla_\mu \varphi)^2 + \alpha_3 \frac{(\nabla_\mu \varphi)^2 \square \varphi}{\Lambda_3^3} \right] \quad (2.10)$$

dove $M_{Pl} = (8\pi G)^{-\frac{1}{2}}$ è la massa di Planck ridotta, $\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi$ perchè φ è un campo scalare, e

$$\square \varphi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \partial_\nu \varphi = g^{\mu\nu} (\partial_\mu \partial_\nu \varphi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \varphi) \quad (2.11)$$

contiene l'accoppiamento tra il campo scalare e la metrica. Il termine cinetico per la perturbazione $h_{\mu\nu}$ del tensore metrico è contenuto nello scalare di Ricci e viene normalizzato canonicamente (cioè nella forma $-\frac{1}{2}(\partial_\mu h_c)^2$) ponendo $h_c = M_{Pl} h$. Ne risulta il seguente coupling tra le metrica e lo scalare, che non rispetta la simmetria galileiana,

$$\mathcal{L}_3^{(h)} = \frac{(\partial\varphi)^3 \partial h_c}{\Lambda_3^3 M_{Pl}} \quad (2.12)$$

Questo operatore è regolato da una scala

$$\Lambda_2 \equiv (\Lambda_3^3 M_{Pl})^{\frac{1}{4}} \quad (2.13)$$

Vi sono dunque tre scale di energia che, assumendo da ora in avanti $\Lambda_3 \ll M_{Pl}$, sono ordinate come segue

$$\Lambda_3 \ll \Lambda_2 \ll M_{Pl} \quad (2.14)$$

e ciò mostra che la rottura della simmetria galileiana nell'azione classica, causata dal coupling gravitazionale, è debole nel regime di energie $E \ll \Lambda_3$ in cui la teoria efficace ha senso.

2.2.1 Studio delle proprietà di rinormalizzazione

Vediamo come le correzioni radiative modificano l'azione classica in presenza dell'accoppiamento con la gravità. Poichè la simmetria è esplicitamente rotta da $\mathcal{L}_3^{(h)}$, le correzioni radiative genereranno necessariamente anche operatori che non rispettano la simmetria galileiana. Di nuovo, consideriamo esplicitamente, come esempio, la possibile comparsa di operatori del tipo $(\partial\varphi)^4$. Si vede facilmente che, rispetto al caso di assenza di gravità, vi è un nuovo diagramma ad 1-loop coinvolto che contiene

due vertici di interazione della teoria della forma

$$(\partial\psi)^2\partial\varphi\partial h \quad (2.15)$$

Il contributo del diagramma può essere valutato troncando l'integrazione sull'impulso di loop al cutoff Λ_3 risultando in

$$\frac{(\partial\psi)^4}{\Lambda_3^2 M_{Pl}^2} \quad (2.16)$$

Ma, essendo $\Lambda_3 \ll M_{Pl}$ la scala $\Lambda_3^2 M_{Pl}^2$ che sopprime questo operatore è molto più grande di quella presente in $\mathcal{L}_3^{(h)}$ data da $\Lambda_3^3 M_{Pl}$, così che le correzioni quantistiche sono sotto controllo.

2.3 Teorie WBG

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, in presenza di gravità la simmetria galileiana è inevitabilmente rotta, ma questa rottura è dovuta a termini soppressi da scale di energia alte rispetto al cutoff ultravioletto della teoria [28]. E' interessante allora considerare teorie più generali, in cui la rottura della simmetria galileiana sia debole, nel senso che gli operatori che la violano nell'azione classica siano soppressi da scale di energia pari almeno a Λ_2 e tali da preservare le proprietà quantistiche discusse in precedenza: le correzioni radiative sono sopprese da scale di energia ancora più grandi. Questa proprietà definisce l'insieme delle teorie con “weakly broken galileon (WBG) invariance”. Tra gli operatori che violano debolmente la simmetria galileiana vi sono quelli del tipo

$$\frac{(\partial\varphi)^{2n}(\partial\varphi)\partial h_c}{\Lambda_2^{4n}} \quad (2.17)$$

che generalizzano $\mathcal{L}_3^{(h)}$, ma si possono includere già nell'azione classica anche operatori

$$\frac{(\partial\varphi)^{2n}}{\Lambda_2^{4n-4}} \quad (2.18)$$

Ciò è consentito dal fatto che $\Lambda_2 \gg \Lambda_3$ e che le correzioni radiative risultano in

$$\frac{\widehat{O}_i}{\Lambda_i^{d_i-4}} \quad (2.19)$$

(con \widehat{O}_i operatore di dimensione $d_i > 4$) i quali sono soppressi da scale $\Lambda_i \gg \Lambda_2$ (in questo contesto rientra anche il caso visto prima dove $\Lambda_i = \Lambda_3^2 M_{Pl}^2 \gg \Lambda_2$). Definendo la quantità adimensionale

$$X = -\frac{g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}{\Lambda_2^4} \quad (2.20)$$

in modo più compatto la lagrangiana per le teorie WBG che prenderemo in considerazione è

$$\mathcal{L}^{(WBG)} = -\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \Lambda_2^4 G_2(X) + \Lambda_2^4 G_3(X) \frac{g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi}{\Lambda_3^3} \quad (2.21)$$

dove $G_2(X) = c_2^{(2)} X^2 + c_2^{(3)} X^3 + c_2^{(4)} X^4 + \dots$ (il termine cinetico, lineare in X , è stato scritto separatamente) e $G_3(X) = c_3^{(1)} X + c_3^{(2)} X^2 + c_3^{(3)} X^3 + \dots$ sono polinomi in X , con coefficienti $c_{2,3}^{(n)}$ di ordine 1. Nel seguito, per comodità di scrittura, indicheremo con G_{2X} e G_{3X} i polinomi ottenuti derivando G_2 e G_3 rispetto alla variabile X e analogamente con G_{2XX} e G_{3XX} le derivate seconde. Il teorema di non rinormalizzazione ora implica che le correzioni quantistiche $\delta c_{2,3}^{(n)}$ per i coefficienti sono sopprese da potenze intere positive del rapporto $\frac{\Lambda_3}{M_{Pl}} \ll 1$.

3 Inflazione WBG

In questo capitolo verrà studiata l'inflazione prodotta da un campo scalare con una lagrangiana di tipo WBG, prima mostrando che esiste effettivamente una soluzione cosmologica inflazionaria e poi analizzando le perturbazioni attorno al background trovato, così da potere calcolare le non-gaussianità previste dal modello. L'azione, contenente sia i gradi di libertà tensoriali della metrica che quello scalare del galileone è:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_{Pl}^2 R + -\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \Lambda_2^4 G_2(X) + \Lambda_2^4 G_3(X) \frac{\square\varphi}{\Lambda_3^3} - V(\varphi) \right] \quad (3.1)$$

Nell'espressione precedente abbiamo inserito un potenziale perchè anche qui studieremo, tra le altre, soluzioni cosmologiche dominate dal potenziale $V(\varphi)$, soddisfacente le condizioni di slow-roll $\epsilon_V, |\eta_V| \ll 1$. Anche $V(\varphi)$ costituisce un termine di rottura della simmetria galileiana e si può verificare che, se $V(\varphi)$ soddisfa le condizioni di slow-roll, l'analisi delle correzioni radiative discussa nelle sezioni 2.2.1 e 2.3 rimane valida. Per il seguito sarà comodo separare i vari contributi all'azione S come

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} M_{Pl}^2 R \quad (3.2)$$

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Lambda_2^4 \frac{X}{2} + \Lambda_2^4 G_2(X) - V(\varphi) \right] \quad (3.3)$$

$$S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda_2^4 G_3(X) \frac{\square\varphi}{\Lambda_3^3} \quad (3.4)$$

3.1 Esistenza del background inflazionario

Per vedere se il nostro modello ammette soluzioni inflazionarie, studiamo una metrica piatta di tipo FRW, cioè omogenea e isotropa

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\vec{x}^2 \quad (3.5)$$

e supponiamo $\varphi = \varphi_0(t)$ indipendente dalle coordinate spaziali comoventi \vec{x} in modo da garantire omogeneità spaziale. L'equazione del moto per $\varphi_0(t)$ si ottiene dal

principio di azione stazionaria, una volta implementate le condizioni suddette per il background. Oltre a $X_0 = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\Lambda_2^4}$ introduciamo la variabile Z_0 , che sarà utile per esprimere l'equazione del moto e le equazioni di Friedmann, definita come

$$Z_0 \equiv \frac{H\dot{\varphi}_0}{\Lambda_3^3} \quad (3.6)$$

per cui, quando $\varphi = \varphi_0(t)$, possiamo scrivere

$$\frac{\square\varphi}{\Lambda_3^3} = -\frac{\ddot{\varphi}_0}{\Lambda_3^3} - 3Z_0 \quad (3.7)$$

L'azione per il campo scalare omogeneo è allora

$$S = \int dt d^3\vec{x} a^3 \left[\Lambda_2^4 \frac{X_0}{2} + \Lambda_2^4 G_2 - \Lambda_2^4 G_3 \left(\frac{\ddot{\varphi}_0}{\Lambda_3^3} + 3Z_0 \right) - V \right] \quad (3.8)$$

dove è sottinteso che il potenziale V sia valutato su φ e che i polinomi G_2 , G_3 (e, quando compariranno, anche le loro derivate) sono da intendersi valutate in X_0 . La variazione δS dell'azione in seguito ad una cambiamento nella configurazione del campo scalare omogeneo $\varphi_0(t) \rightarrow \varphi_0(t) + \delta\varphi(t)$ è data da

$$\begin{aligned} \delta S = & \int dt d^3\vec{x} a^3 \left[\dot{\varphi}_0 \frac{d}{dt} \delta\varphi + 2G_{2X} \dot{\varphi}_0 \frac{d}{dt} \delta\varphi - 2G_{3X} \dot{\varphi}_0 \frac{d}{dt} \delta\varphi \left(\frac{\ddot{\varphi}_0}{\Lambda_3^3} + 3Z_0 \right) \right] \\ & - \int dt d^3\vec{x} a^3 \left[\Lambda_2^4 G_3 \left(\frac{1}{\Lambda_3^3} \frac{d^2}{dt^2} \delta\varphi + \frac{3H}{\Lambda_3^3} \frac{d}{dt} \delta\varphi \right) + V' \delta\varphi \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

La parte di δS contenente $\frac{d^2}{dt^2} \delta\varphi$ si può integrare per parti, come

$$- \int dt d^3\vec{x} a^3 \frac{\Lambda_2^4}{\Lambda_3^3} G_3 \frac{d^2}{dt^2} \delta\varphi = \int dt d^3\vec{x} a^3 \left(\frac{2}{\Lambda_3^3} G_{3X} \dot{\varphi}_0 \ddot{\varphi}_0 \frac{d}{dt} \delta\varphi + 3H \frac{\Lambda_2^4}{\Lambda_3^3} G_3 \frac{d}{dt} \delta\varphi \right) \quad (3.10)$$

per cui la variazione δS si semplifica in

$$\delta S = \int dt d^3\vec{x} a^3 \left[\dot{\varphi}_0 \frac{d}{dt} \delta\varphi + 2G_{2X} \dot{\varphi}_0 \frac{d}{dt} \delta\varphi - 6Z_0 G_{3X} \dot{\varphi}_0 \frac{d}{dt} \delta\varphi - V' \delta\varphi \right] \quad (3.11)$$

e integrando ancora per parti tutti gli addendi di δS tranne quello dipendente dal potenziale si trova l'equazione del moto

$$\frac{1}{a^3} \frac{d}{dt} \left[2a^3 \dot{\varphi}_0 \left(\frac{1}{2} + G_{2X} - 3Z_0 G_{3X} \right) \right] = -V'(\varphi_0) \quad (3.12)$$

Per trovare le equazioni di Friedmann che descrivono l'evoluzione del background omogeneo e isotropo associato all'inflazione WBG bisogna valutare il tensore energia-impulso, che si ottiene da

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (3.13)$$

Considerando le varie parti dell'azione WBG in (3.1), nel caso di S_2 la dipendenza semplice da $g^{\mu\nu}$ solo attraverso la variabile X permette di calcolare facilmente il tensore energia-impulso associato, con l'aiuto della proprietà matematica (1.13) ottenendo

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(2)} &= g^{\mu\nu} \mathcal{L}_2 - 2 \frac{\delta \mathcal{L}_2}{\delta g^{\mu\nu}} = \\ &= \left(\Lambda_2^4 \frac{X}{2} + \Lambda_2^4 G_2 - V \right) g_{\mu\nu} + (1 + 2G_{2X}) \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nel caso di S_3 la struttura è più complicata a casua della dipendenza di $\square\varphi$ dalle derivate del tensore metrico contenute nei simboli di Christoffel (come in (2.11)) ed è conveniente variare l'azione rispetto a $g^{\mu\nu}$ solo dopo avere usato la seguente scrittura alternativa per il laplaciano:

$$\square\varphi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \right) \quad (3.15)$$

La (3.15) si può verificare esplicitamente ricordando che

$$\partial_\mu \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\mu g_{\alpha\beta} \quad (3.16)$$

grazie alla quale si ha

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi \right) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\mu g_{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi + \partial_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi + g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi \quad (3.17)$$

e riconoscere che la somma dei primi due addendi è proprio $-g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\partial_{\alpha}\varphi$, in quanto

$$\begin{aligned}
-g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}\partial_{\alpha}\varphi &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(\partial_{\nu}g_{\beta\mu} + \partial_{\mu}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu})\partial_{\alpha}\varphi = \\
\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\beta\mu}\partial_{\nu}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\varphi &+ \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\beta\nu}\partial_{\mu}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\varphi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\partial_{\beta}g_{\mu\nu}\partial_{\alpha}\varphi \\
&= \partial_{\beta}g^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\varphi + \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\mu}g_{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\partial_{\nu}\varphi
\end{aligned} \tag{3.18}$$

che, a meno di rinominare gli indici, coincide con la somma dei primi due addendi della (3.17). Utilizzando la (3.15) e dopo un'integrazione per parti, scriviamo S_3 nella forma

$$S_3 = - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\Lambda_2^4}{\Lambda_3^3} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X \partial_{\beta} \varphi G_{3X} \tag{3.19}$$

e la variazione di S_3 quando $g^{\mu\nu}$ varia secondo $g^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}$ è

$$\begin{aligned}
\delta S_3 &= - \int d^4x \frac{\Lambda_2^4}{\Lambda_3^3} \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X \partial_{\beta} \varphi G_{3X} + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \partial_{\mu} X \partial_{\nu} \varphi G_{3X} \right] + \\
&+ \int d^4x \frac{1}{\Lambda_3^3} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} (\delta g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi) \partial_{\beta} \varphi G_{3X} + \\
&+ \int d^4x \frac{1}{\Lambda_3^3} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X \partial_{\beta} \varphi \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi G_{3XX} \delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Integriamo per parti il solo addendo di δS_3 che contiene la variazione $\delta g^{\mu\nu}$ sottoposta ad una derivata, diventando

$$\begin{aligned}
&\int d^4x \frac{1}{\Lambda_3^3} \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} (\delta g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi) \partial_{\beta} \varphi G_{3X} = \\
&= - \int d^4x \frac{1}{\Lambda_3^3} \delta g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi \partial_{\alpha} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_{\beta} \varphi G_{3X}) = \\
&= - \int d^4x \frac{1}{\Lambda_3^3} \delta g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \varphi \partial_{\nu} \varphi (\sqrt{-g} \square \varphi G_{3X} + \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X \partial_{\beta} \varphi G_{3XX})
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Così la variazione δS_3 , al cui interno $\delta g^{\mu\nu}$ compare adesso solo come coefficiente moltiplicativo, si semplifica in

$$\delta S_3 = \int d^4x \frac{\Lambda_2^4}{\Lambda_3^3} \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta \varphi G_{3X} - \partial_\mu X \partial_\nu \varphi G_{3X} - \square \varphi \frac{\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}{\Lambda_2^4} G_{3X} \right) \delta g^{\mu\nu}$$

e quindi il corrispondente tensore energia-impulso è dato da

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(3)} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_3)}{\delta g^{\mu\nu}} = \\ &= \frac{\Lambda_2^4}{\Lambda_3^3} \left(-g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X \partial_\beta \varphi G_{3X} + 2 \partial_\mu X \partial_\nu \varphi G_{3X} + 2 \square \varphi \frac{\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}{\Lambda_2^4} G_{3X} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Il tensore energia-impulso totale è ovviamente

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(2)} + T_{\mu\nu}^{(3)} \quad (3.23)$$

Per una metrica FRW come in (3.5) e un campo scalare omogeneo $\varphi = \varphi_0(t)$, la densità di energia è data da $\rho = T_{00}$ e la pressione da $p = \frac{T_{ii}}{a^2}$ dove i è un qualunque indice spaziale fissato (l'isotropia garantisce l'indipendenza della pressione dall'indice i scelto). Usando le relazioni $X_0 = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\Lambda_2^4}$, $\square \varphi = -\ddot{\varphi}_0 - 3H\dot{\varphi}_0$ e $\partial_0 X_0 = \frac{2\dot{\varphi}_0 \ddot{\varphi}_0}{\Lambda_2^4}$ si ottengono le equazioni di Friedmann seguenti:

$$\rho = 3M_{Pl}^2 H^2 = \Lambda_2^4 \left[\frac{X_0}{2} - G_2 + 2X_0 (G_{2X} - 3Z_0 G_{3X}) \right] + V \quad (3.24)$$

$$\frac{\rho + p}{2} = -M_{Pl}^2 \dot{H} = \Lambda_2^4 X_0 \left(\frac{1}{2} + G_{2X} - 3Z_0 G_{3X} \right) + M_{Pl} \ddot{\varphi}_0 X_0 G_{3X} \quad (3.25)$$

Adesso discuteremo l'esistenza di soluzioni inflazionarie per l'equazione del moto di $\varphi_0(t)$, con parametro di Hubble $H(t)$ determinato dalle equazioni di Friedmann, in due diversi regimi a seconda che il potenziale $V(\varphi)$ sia dominante o trascurabile rispetto al termine cinetico di ordine di grandezza $\Lambda_2^4 X_0$.

3.1.1 Dominio del potenziale e slow-roll

La condizione che esprime un'evoluzione cosmologica dominata dal potenziale si traduce, usando la prima equazione di Friedmann (3.24), nella seguente:

$$M_{Pl}^2 H^2 \sim V \gg \Lambda_2^4 X_0 \quad (3.26)$$

Vogliamo considerare un regime di slow-roll con $\ddot{\varphi}_0 \ll H\dot{\varphi}_0$ nel quale la (3.12) diventa

$$3H\dot{\varphi}_0(1 + 2G_{2X} - 6Z_0G_{3X}) \cong -V'(\varphi_0) \quad (3.27)$$

Pochè siamo interessati ad un regime in cui gli operatori higher-derivative sono grandi ma le correzioni quantistiche sotto controllo, assumeremo $Z_0 \lesssim 1$. Dalle definizioni di X_0 e Z_0 si ha il legame

$$\sqrt{X_0} = \frac{\Lambda_2^2 Z_0}{M_{Pl} H} \quad (3.28)$$

mentre dall'equazione di Friedmann (3.25) si ottiene la stima per il parametro di slow-roll $\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$ data da

$$\epsilon \sim \frac{\Lambda_2^4 X_0}{M_{Pl}^2 H^2} \quad (3.29)$$

Dalla combinazione di (3.28) e (3.29) si ricava allora $X_0 \sim Z_0 \sqrt{\epsilon}$ ed avendo assunto $Z_0 \lesssim 1$ si ottiene la stima $X_0 \lesssim \sqrt{\epsilon} \ll 1$, e la quantità $1 + 2G_{2X} - 6Z_0G_{3X}$ che compare nell'equazione del moto (3.27) è dell'ordine dell'unità.

3.1.2 Dominio dei termini cinetici

Un altro regime di interesse è quello in cui il potenziale gioca un ruolo trascurabile nell'evoluzione cosmologica. Notiamo prima di tutto che, dal punto di vista puramente formale, anche se di ben poca importanza fisica, le equazioni di Friedmann (3.24) e (3.25), considerate insieme all'equazione del moto (3.12), in assenza di potenziale ($V = 0$) ammettono una soluzione di Universo esattamente de Sitter, a patto di scegliere $\varphi_0(t) \propto t$ e $F(X_0, Z_0) \equiv \frac{1}{2} + G_{2X} - 3Z_0G_{3X} = 0$. Più in generale, per continuità, esistono soluzioni quasi de Sitter (quindi inflazionarie) anche nel

regime di dominio del termine cinetico individuato da

$$V \ll \Lambda_2^4 X_0 \sim M_{Pl}^2 H^2 \quad (3.30)$$

Di nuovo, a maggior ragione rispetto al caso precedente, siamo interessati a situazioni in cui gli operatori higher-derivative siano determinanti ma le correzioni radiative controllate, consentendoci così di spingere il parametro Z_0 fino a valori $Z_0 \lesssim 1$ e, di conseguenza, date le (3.28) e (3.30) $\sqrt{X_0} \lesssim \frac{\Lambda_2^2}{M_{Pl} H} \sim \frac{1}{\sqrt{X_0}}$, ovvero $X_0 \lesssim 1$.

3.2 Perturbazioni

3.2.1 Costruzione della teoria efficace nel caso WBG

Per ottenere la scrittura dell'azione in gauge unitaria per la teoria (3.1), si impone $\varphi = \varphi_0(t)$ mantenendo generale la metrica, dove $\varphi_0(t)$ è la soluzione inflazionaria la cui equazione del moto è stata studiata nella sezione precedente [30]. Svilupperemo l'azione fino al secondo ordine nelle fluttuazioni della metrica e con riferimento alla (2.20) si ha

$$X = -\frac{1}{\Lambda_2^4} g^{00} \dot{\varphi}_0^2 = \frac{1}{\Lambda_2^4} \frac{\dot{\varphi}_0^2}{N^2} \approx \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\Lambda_2^4} (1 - 2\delta N + 3\delta N^2) \quad (3.31)$$

ovvero $X = X_0 + \delta X$, dove $X_0 = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{\Lambda_2^4}$ e, al secondo ordine in δN ,

$$\delta X = \left(\frac{1}{N^2} - 1 \right) X_0 \approx X_0 (-2\delta N + 3\delta N^2) \quad (3.32)$$

Consideriamo separatamente le parti dell'azione S_2 ed S_3 definite nella (3.4). Per ottenere l'azione in gauge unitaria, nel caso di S_2 è sufficiente la (3.32), mentre nel caso di S_3 passiamo ad una scrittura contenente K mostrando che

$$\square\varphi = -\Lambda_2^2 \sqrt{X} K + \frac{1}{2} \frac{\partial^\mu \varphi \partial_\mu X}{X} \quad (3.33)$$

Per giungere a questo legame consideriamo che, per $\varphi = \varphi_0(t)$, la formula (2.11) per il laplaciano diventa

$$\square\varphi = -\frac{1}{N^2} \ddot{\varphi}_0 - g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0 \dot{\varphi}_0 \quad (3.34)$$

e scriviamo come utile riferimento per il seguito l'espressione dei simboli di Christoffel in funzione della metrica, data da

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{1}{2}g^{\alpha\alpha} (\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) \quad (3.35)$$

Utilizzando le (1.50) e (1.51) valutiamo in variabili ADM i vari simboli di Christoffel, indicando con 0 l'indice temporale, con i quelli spaziali e con il punto la derivata temporale:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}\partial_0 g_{00} + \frac{1}{2}g^{0i} (2\partial_0 g_{0i} - \partial_i g_{00}) = \\ &= -\frac{1}{2N^2} (-2N\dot{N} + \dot{N}^i N_i + N^i \dot{N}_i) + \frac{N^i}{2N^2} (2\dot{N}_i + 2N\partial_i N - \partial_i N^j N_j - N^j \partial_i N_j) = \\ &= \frac{\dot{N}}{N} + \frac{N^i \dot{N}_i}{2N^2} - \frac{\dot{N}^i N_i}{2N^2} + \frac{N^i \partial_i N}{N} - \frac{N^i N_j \partial_i N^j}{2N^2} - \frac{N^i N^j \partial_i N_j}{2N^2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0i}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}\partial_i g_{00} + \frac{1}{2}g^{0j} (\partial_i g_{0j} + \partial_0 g_{ij} - \partial_j g_{0i}) = \\ &= -\frac{1}{2N^2} (-2N\partial_i N + N_j \partial_i N^j + N^j \partial_i N_j) + \frac{N^j}{2N^2} (\partial_i N_j + \dot{h}_{ij} - \partial_j N_i) = \\ &= \frac{\partial_i N}{N} - \frac{N_j \partial_i N^j}{2N^2} + \frac{N^j \dot{h}_{ij}}{2N^2} - \frac{N^j \partial_j N_i}{2N^2} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}g^{00} (\partial_j g_{0i} + \partial_i g_{0j} - \partial_0 g_{ij}) + \frac{1}{2}g^{0k} (\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{kj} - \partial_k g_{ij}) = \\ &= -\frac{1}{2N^2} (\partial_j N_i + \partial_i N_j - \dot{h}_{ij}) + \frac{N^k}{2N^2} (\partial_j h_{ki} + \partial_i h_{kj} - \partial_k h_{ij}) = \\ &= -\frac{\partial_j N_i}{2N^2} - \frac{\partial_i N_j}{2N^2} + \frac{\dot{h}_{ij}}{2N^2} + \frac{N^k \partial_j h_{ki}}{2N^2} + \frac{N^k \partial_i h_{kj}}{2N^2} - \frac{N^k \partial_k h_{ij}}{2N^2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Utilizzando le espressioni appena trovate e la proprietà

$$\partial_i N_j = h_{jk} \partial_i N^k + N^k \partial_i h_{jk} \quad (3.39)$$

si ottiene così

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0 &= g^{00} \Gamma_{00}^0 + 2g^{0i} \Gamma_{0i}^0 + g^{ij} \Gamma_{ij}^0 = \\ &= -\frac{\dot{N}}{N^3} + \frac{N^i \partial_i N}{N^3} - \frac{\partial_i N^i}{N^2} + \frac{h^{ij} \dot{h}_{ij}}{2N^2} - \frac{h^{ij} N^k \partial_k h_{ij}}{2N^2} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Passiamo ora ad esplicitare la scrittura (1.54) per K_{ij} in modo da ricavare K . I simboli di Christoffel associati alla metrica spaziale da usare nelle derivate covarianti della (1.54) sono dati da

$$\hat{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} h^{kl} (\partial_j h_{li} + \partial_i h_{lj} - \partial_l h_{ij}) \quad (3.41)$$

e le derivate covarianti sono

$$\hat{\nabla}_i N_j = \partial_i N_j - \hat{\Gamma}_{ij}^k N_k \quad (3.42)$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{\dot{h}_{ij} - \partial_i N_j - \partial_j N_i + 2\hat{\Gamma}_{ij}^k N_k}{2N} = \\ &= \frac{\dot{h}_{ij} - \partial_i N_j - \partial_j N_i + N^l \partial_j h_{li} + N^l \partial_i h_{lj} - N^l \partial_l h_{ij}}{2N} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Così l'espressione per K è

$$K = K^i_i = h^{ij} K_{ij} = \frac{h^{ij} \dot{h}_{ij}}{2N} - \frac{h^{ij} \partial_i N_j}{N} + \frac{h^{ij} N^k \partial_i h_{jk}}{N} - \frac{h^{ij} N^k \partial_k h_{ij}}{2N} \quad (3.44)$$

e usando la (3.39) possiamo compattare il secondo ed il terzo addendo ottenendo

$$K = \frac{h^{ij} \dot{h}_{ij}}{2N} - \frac{\partial_i N^i}{N} - \frac{h^{ij} N^k \partial_k h_{ij}}{2N} \quad (3.45)$$

Confrontando quest'ultima formula con la (3.40) si deduce che

$$g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0 = \frac{K}{N} - \frac{\dot{N}}{N^3} + \frac{N^i \partial_i N}{N^3} \quad (3.46)$$

Il laplaciano dell'inflatone è perciò dato da

$$\square\varphi = -\frac{1}{N^2} \ddot{\varphi}_0 - \left(\frac{K}{N} - \frac{\dot{N}}{N^3} + \frac{N^i \partial_i N}{N^3} \right) \dot{\varphi}_0 \quad (3.47)$$

Per concludere la validità della (3.33) basta allora notare che

$$\frac{\dot{\varphi}_0}{N} = \Lambda_2^2 \sqrt{X} \quad (3.48)$$

e valutare esplicitamente l'espressione

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^\mu \varphi \partial_\mu X}{X} = -\frac{1}{N^2} \ddot{\varphi}_0 + \frac{\dot{N}}{N^3} \dot{\varphi}_0 - \frac{N^i \partial_i N}{N^3} \dot{\varphi}_0 \quad (3.49)$$

Menzioniamo qui il fatto che la (3.33) è in realtà un'identità valida per qualunque configurazione del campo φ (e non solo per $\varphi = \varphi_0(t)$ omogeneo) purchè si intenda con K la curvatura estrinseca delle ipersuperfici a campo φ costante; in gauge unitaria ciò è equivalente alla definizione geometrica di K usata in questo lavoro di tesi, come curvatura estrinseca delle ipersuperfici a tempo fissato. Ai fini della manipolazione di S_3 con integrazioni per parti è utile, oltre alla (3.33), anche la scrittura alternativa per il laplaciano data nella (3.15). Tornando alla manipolazione di S_3 , la scrittura risulterà parecchio semplice se si introduce il polinomio $F_3(X)$ [31] definito dall'equazione

$$G_3 = F_3 + 2X F_{3X} \quad (3.50)$$

(in particolare se $G_3(X) = \sum_{n=1}^{\infty} c_3^{(n)} X^n$ allora $F_3(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_3^{(n)}}{2n+1} X^n$). Con la decomposizione (3.50) e omettendo la dipendenza da X dei polinomi, S_3 diviene

$$S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda_2^4 F_3 \frac{\square \varphi}{\Lambda_3^3} + 2 \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda_2^4 X F_{3X} \frac{\square \varphi}{\Lambda_3^3} \quad (3.51)$$

Usando la (3.15) nel primo integrale di S_3 e la (3.33) nel secondo, si ha

$$S_3 = \int d^4x \frac{\Lambda_2^4}{\Lambda_3^3} F_3 \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \varphi) + 2 \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\Lambda_2^4}{\Lambda_3^3} X F_{3X} \left(-\Lambda_2^2 \sqrt{X} K + \frac{\partial^\mu \varphi \partial_\mu X}{2X} \right) \quad (3.52)$$

Effettuando una integrazione per parti il primo addendo nella (3.52) diventa

$$\int d^4x \frac{\Lambda_2^4}{\Lambda_3^3} F_3 \partial_\mu (\sqrt{-g} \partial^\mu \varphi) = - \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\Lambda_2^4}{\Lambda_3^3} F_{3X} \partial^\mu \varphi \partial_\mu X \quad (3.53)$$

per cui l'espressione (3.52) per S_3 si semplifica in

$$S_3 = -2 \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\Lambda_2^6}{\Lambda_3^3} X^{\frac{3}{2}} F_{3X} K = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\Lambda_2^6}{\Lambda_3^3} X^{\frac{1}{2}} (F_3 - G_3) K \quad (3.54)$$

Nel seguito, per rendere la notazione più compatta, porremo $H_3 = F_3 - G_3 = -2X F_{3X}$. Ricordando la (3.32) e la decomposizione $K = 3H + \delta K$ sviluppiamo i vari contributi all'azione fino al secondo ordine nelle fluttuazioni della metrica, sottintendendo in tutti i polinomi che seguono la loro dipendenza da X_0 , come segue:

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \Lambda_2^4 \left[\frac{X_0}{2N^2} + G_2 + G_{2X} \delta X + \frac{1}{2} G_{2XX} (\delta X)^2 \right] - V \right\} \quad (3.55)$$

$$S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\Lambda_2^6}{\Lambda_3^3} X_0^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\delta X}{2X_0} - \frac{(\delta X)^2}{8X_0^2} \right] \left[H_3 + H_{3X} \delta X + \frac{H_{3XX}}{2} (\delta X)^2 \right] (3H + \delta K) \quad (3.56)$$

Considerando sia S_2 che S_3 , i termini di ordine 0 e quelli lineari in δX sono dati da

$$\begin{aligned} S_{u.g.}^{(1)} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \Lambda_2^4 \left[\frac{X_0}{2N^2} + G_2 + G_{2X} \delta X \right] - V + 3H \frac{\Lambda_2^6}{\Lambda_3^3} X_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{H_3}{2X_0} + H_{3X} \right) \delta X \right\} = \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Lambda_2^4 (G_2 - X_0 G_{2X}) - V - 3H \frac{\Lambda_2^6}{\Lambda_3^3} X_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{H_3}{2} + X_0 H_{3X} \right) \right] + \\ &+ \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{N^2} \left[\Lambda_2^4 X_0 \left(\frac{1}{2} + G_{2X} \right) + 3H \frac{\Lambda_2^6}{\Lambda_3^3} X_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{H_3}{2} + X_0 H_{3X} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Usando la definizione di H_3 e di F_3 in termini del polinomio G_3 si ha

$$\frac{H_3}{2} + X_0 H_{3X} = -X_0 G_{3X} \quad (3.58)$$

per cui $S_{u.g.}^{(1)}$ diventa

$$\begin{aligned} S_{u.g.}^{(1)} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\Lambda_2^4 (G_2 - X_0 G_{2X}) - V + 3\Lambda_2^4 X_0 Z_0 G_{3X} \right] + \\ &+ \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{N^2} \Lambda_2^4 X_0 \left(\frac{1}{2} + G_{2X} - 3Z_0 G_{3X} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Confrontando con le equazioni di Friedmann (3.24) e (3.25) si possono esprimere i coefficienti dell'azione $S_{u.g.}^{(1)}$ in termini del background inflazionario di parametro di Hubble $H(t)$, ottenendo

$$S_{u.g.}^{(1)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-M_{Pl}^2 (3H^2 + \dot{H}) - M_{Pl}^2 \dot{H} \frac{1}{N^2} \right] \quad (3.60)$$

in accordo con le conclusioni generali sulla teoria efficace dell'inflazione tratte nella sezione 1.5. I contributi rimanenti dalle (3.55) e (3.56), fermandoci al secondo ordine nelle fluttuazioni della metrica, sono del tipo $(\delta X)^2$ e $\delta X \delta K$, e le loro azioni saranno indicate rispettivamente con $S_{u.g.}^{(2)}$ e $S_{u.g.}^{(3)}$. Cominciamo a valutare il primo, con espressione

$$S_{u.g.}^{(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \Lambda_2^4 G_{2XX} + 3H \frac{\Lambda_2^6}{\Lambda_3^3} X_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} H_{3XX} + \frac{1}{2} \frac{H_{3X}}{X_0} - \frac{1}{8} \frac{H_3}{X_0^2} \right) \right] (\delta X)^2 \quad (3.61)$$

Poichè derivando la definizione di F_3 data nella (3.50) si ricava la relazione

$$F_{3XX} = \frac{G_{3X} - 3F_{3X}}{2X} \quad (3.62)$$

allora vale l'uguaglianza

$$\frac{1}{2} H_{3XX} + \frac{1}{2} \frac{H_{3X}}{X_0} - \frac{1}{8} \frac{H_3}{X_0^2} = \frac{G_{3X} - 3F_{3X}}{4X_0} - \frac{G_{3XX}}{2} + \frac{F_{3X} - G_{3X}}{2X_0} + \frac{F_{3X}}{4X_0} = -\frac{G_{3X}}{4X_0} - \frac{G_{3XX}}{2} \quad (3.63)$$

Usando la (3.63) e una volta espresso δX in funzione di δN come nella (3.32) (nella quale basta il primo ordine in δN perchè stiamo considerando nell'azione termini proporzionali a $(\delta X)^2$), si conclude che

$$S_{u.g.}^{(2)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{2\dot{\varphi}_0^4}{\Lambda_2^4} G_{2XX} - \frac{3H\dot{\varphi}_0^3}{\Lambda_3^3} G_{3X} - \frac{6H\dot{\varphi}_0^5}{\Lambda_3^6 M_{Pl}} G_{3XX} \right) \delta N^2 \quad (3.64)$$

dove si è esplicitato il campo omogeneo $\varphi_0(t)$. Passando ad $S_{u.g.}^{(3)}$ scriviamo

$$S_{u.g.}^{(3)} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\Lambda_2^6}{\Lambda_3^3} X_0^{\frac{1}{2}} \left(H_{3X} + \frac{1}{2} \frac{H_3}{X_0} \right) \delta X \delta K \quad (3.65)$$

Dalla (3.58) si ha

$$H_{3X} + \frac{1}{2} \frac{H_3}{X_0} = -G_{3X} \quad (3.66)$$

ed esprimendo δX in funzione di δN come si è fatto nel caso di $S_{u.g.}^{(2)}$ giungiamo a

$$S_{u.g.}^{(3)} = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{2\dot{\varphi}_0^3}{\Lambda_3^3} G_{3X} \delta N \delta K \quad (3.67)$$

In conclusione, mettendo insieme tutte le parti di azione in gauge unitaria specificate e il termine di Einstein-Hilbert, si ha l'espressione finale per l'azione in gauge unitaria dell'inflazione WBG

$$S_{u.g.} = S_{EH} + S_{u.g.}^{(1)} + S_{u.g.}^{(2)} + S_{u.g.}^{(3)} \quad (3.68)$$

$$S_{u.g.} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_{Pl}^2 R - M_{Pl}^2 (3H^2 + \dot{H}) - M_{Pl}^2 \dot{H} \frac{1}{N^2} + \right. \\ \left. + \Lambda_2^4 X_0 (2X_0 G_{2XX} - 3Z_0 G_{3X} - 6X_0 Z_0 G_{3XX}) \delta N^2 + \frac{2}{H} \Lambda_2^4 X_0 Z_0 G_{3X} \delta N \delta K + \dots \right] \quad (3.69)$$

dove, come ricordiamo, i polinomi G_2 , G_3 (e le loro derivate prime e seconde) sono da intendersi valutati sulla soluzione omogenea $\varphi_0(t)$ e si sono usate le variabili X_0 e Z_0 nelle espressioni contenenti $\dot{\varphi}_0(t)$. I puntini alla fine della formula per $S_{u.g.}$ indicano che lo sviluppo è stato troncato al secondo ordine nelle fluttuazioni, omettendo i termini successivi. La (3.69) costituisce un caso particolare dell'espressione generale (1.55) in cui i coefficienti sono specificati in termini del campo di background $\varphi_0(t)$ soddisfacente le equazioni di Friedmann. Nel seguito, per comodità, scriveremo $S_{u.g.}$ nel seguente modo più compatto:

$$S_{u.g.} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M_{Pl}^2 R - M_{Pl}^2 (3H^2 + \dot{H}) - M_{Pl}^2 \dot{H} \frac{1}{N^2} \right] + \\ + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} M(t)^4 \delta N^2 - \hat{M}(t)^3 \delta N \delta K + \dots \right] \quad (3.70)$$

dove $M(t)$ e $\hat{M}(t)$ hanno le dimensioni di una massa, in consistenza col fatto che δN è adimensionale e δK ha dimensione 1 in massa. A partire da M^4 e \hat{M}^3 , qualunque sia il regime in considerazione (sia esso quello di slow-roll o quello cinetico),

introduciamo i parametri adimensionali α e β definiti come

$$\alpha \equiv \frac{M^4}{M_{Pl}^2 H^2 \epsilon} \quad (3.71)$$

$$\beta \equiv \frac{\hat{M}^3}{M_{Pl}^2 H \epsilon} \quad (3.72)$$

Nel caso di regime di slow-roll discusso nella sottosezione 3.1.1, usando i valori massimi consentiti $Z_0 \sim 1$ e $X_0 \sim \sqrt{\epsilon}$, si ha

$$M^4 \sim M_{Pl}^2 \dot{H} \quad (3.73)$$

$$\hat{M}^3 \sim \frac{M_{Pl}^2 \dot{H}}{H} \quad (3.74)$$

per cui α e β sono dell'ordine dell'unità. Nel caso del regime cinetico trattato nella sottosezione 3.1.2, usando $Z_0 \sim 1$ e $X_0 \sim 1$, si ha invece

$$M^4 \sim M_{Pl}^2 H^2 \quad (3.75)$$

$$\hat{M}^3 \sim M_{Pl}^2 H \quad (3.76)$$

e di conseguenza $\alpha \sim \frac{1}{\epsilon}$ e $\beta \sim \frac{1}{\epsilon}$.

3.2.2 Regime di decoupling e azione per il bosone di Goldstone

L'azione in gauge unitaria ottenuta precedentemente non rispetta più l'invarianza sotto diffeomorfismi prevista dal postulato di relatività generale, come conseguenza della scelta di una coordinata temporale ben precisa, tale da eliminare le fluttuazioni del campo scalare. Tuttavia è possibile recuperare l'invarianza sotto diffeomorfismi temporali con una procedura nota come “Stückelberg trick”: si esegue un cambio di coordinata temporale

$$t \rightarrow \tilde{t} = t + \xi(t, \vec{x}) \quad (3.77)$$

e si sostituisce il parametro della trasformazione $\xi(t, \vec{x})$ con un campo $\pi(t, \vec{x})$ imponendo che quest'ultimo trasformi sotto un diffeomorfismo temporale $t \rightarrow t + \eta(t, \vec{x})$

secondo la legge

$$\pi(t, \vec{x}) \rightarrow \tilde{\pi}(t, \vec{x}) = \pi(t, \vec{x}) - \eta(t, \vec{x}) \quad (3.78)$$

La procedura illustrata ripristina l'invarianza generale sotto diffeomorfismi perchè, quando si effettua un cambio di variabile temporale, $\pi(t, \vec{x})$ trasforma esattamente nel modo giusto per cancellare le variazioni provocate dalla trasformazione di t . Il significato fisico del campo $\pi(t, \vec{x})$ è quello di bosone di Goldstone associato alla rottura dell'invarianza della teoria sotto cambi della coordinata temporale in seguito alla scelta della gauge unitaria, e $\pi(t, \vec{x})$ deve trasformare in modo non-lineare (nel nostro caso con uno shift) per ripristinare tale invarianza.

La reintroduzione del grado di libertà scalare nella forma di bosone di Goldstone $\pi(t, \vec{x})$ appare come un passo indietro rispetto allo spirito della costruzione dell'azione in gauge unitaria, ma troverebbe la sua giustificazione nel caso in cui esistesse un regime di energia in cui la dinamica di $\pi(t, \vec{x})$ si separa da quella della metrica e se la scala cosmologica di energia H cadesse proprio in tale regime [19, 20]; qualora questo si verifici (e vedremo che accadrà nel regime di slow-roll), si semplificherebbe molto lo studio delle perturbazioni scalari, legate alle fluttuazioni di densità di energia e osservativamente alle anisotropie di temperatura nella CMB, in quanto il solo grado di libertà coinvolto nell'analisi sarebbe proprio il bosone di Goldstone.

Il punto di partenza per realizzare la procedura esposta è dato dalla legge di trasformazione per il tensore metrico sotto un diffeomorfismo generico $x \rightarrow \tilde{x}(x)$

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} \quad (3.79)$$

Ciò implica, per le quantità coinvolte nell'azione in gauge unitaria, le seguenti regole di trasformazione sotto un diffeomorfismo puramente temporale (3.77), una volta sostituito $\xi(t, \vec{x})$ con il bosone di Goldstone $\pi(t, \vec{x})$

$$g^{00} \rightarrow \tilde{g}^{00} = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{t}}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} = g^{00} + 2g^{0\mu} \partial_\mu \pi + g^{\mu\nu} \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi \quad (3.80)$$

$$\delta K \rightarrow \delta \tilde{K} = \delta K - g^{ij} \partial_i \partial_j \pi + O(\pi^2) \quad (3.81)$$

$$\delta N \rightarrow \delta \tilde{N} = \delta N + g^{0\mu} \partial_\mu \pi + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi + \frac{3}{2} g^{0\mu} g^{0\nu} \partial_\mu \pi \partial_\nu \pi \quad (3.82)$$

La (3.82) si ottiene dalla (3.80) utilizzando le definizioni

$$\delta N = (-g^{00})^{-\frac{1}{2}} - 1 \quad (3.83)$$

$$\delta \tilde{N} = (-\tilde{g}^{00})^{-\frac{1}{2}} - 1 \quad (3.84)$$

Eseguendo queste sostituzioni nell'azione (3.70) si ottiene un'azione che coinvolge π , una per la sola metrica e un'azione di coupling tra π e la metrica. L'azione per il solo grado di libertà scalare π , ottenuta mantenendo la metrica imperturbata rispetto al caso FRW, ha la struttura seguente (dove si omettono le dipendenze temporali dei coefficienti e si scrivono esplicitamente la parte quadratica e cubica nel campo π):

$$\begin{aligned} S_\pi = \int dt d^3 \vec{x} a^3 \left[\left(\frac{1}{2} M^4 - M_{Pl}^2 \dot{H} \right) \dot{\pi}^2 + \left(M_{Pl}^2 \dot{H} - \frac{1}{2} \hat{M}^3 H \right) \frac{(\vec{\nabla} \pi)^2}{a^2} - M^4 \pi^3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} \hat{M}^3 H - \frac{1}{2} M^4 \right) \dot{\pi} \frac{(\vec{\nabla} \pi)^2}{a^2} + \hat{M}^3 \frac{\nabla^2 \pi}{a^2} \left(\dot{\pi}^2 + \frac{1}{2} \frac{(\vec{\nabla} \pi)^2}{a^2} \right) + \dots \right] \quad (3.85) \end{aligned}$$

Vogliamo discutere l'esistenza di un regime di decoupling nel quale il mixing tra il bosone di Goldstone e la metrica è trascurabile, così che sarà possibile limitarsi all'azione S_π data dalla (3.85). I termini di accoppiamento tra π e la metrica si distinguono in due tipologie distinte, che discutiamo separatamente prendendo un esempio esplicito di termine lagrangiano appartenente a ciascuna classe.

- La prima tipologia (I) è costituita da termini di coupling che sono trascurabili o meno a seconda della scala di energia in considerazione. All'interno di questa classe è presente il seguente termine, che discutiamo esplicitamente:

$$\mathcal{L}_{mix}^{(I)} = - \left(M^4 - 2M_{Pl}^2 \dot{H} \right) \dot{\pi} \delta N + \dots \quad (3.86)$$

Normalizzando canonicamente i campi come segue

$$\pi_c = \left(M^4 - 2M_{Pl}^2 \dot{H} \right)^{\frac{1}{2}} \pi \quad (3.87)$$

$$\delta N_c = M_{Pl} \delta N \quad (3.88)$$

si può riscrivere

$$\mathcal{L}_{mix}^{(I)} = \left(M^4 - 2M_{Pl}^2 \dot{H} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{\pi}_c \frac{\delta N_c}{M_{Pl}} \quad (3.89)$$

e confrontando $\mathcal{L}_{mix}^{(I)}$ con il termine cinetico $\dot{\pi}_c^2$ si vede che il mixing è trascurabile per energie $E \gg E_{mix}$ con

$$E_{mix} = \frac{\left(M^4 - 2M_{Pl}^2 \dot{H} \right)^{\frac{1}{2}}}{M_{Pl}} = H \sqrt{(2 + \alpha) \epsilon} \quad (3.90)$$

- La seconda tipologia (II) è composta da termini di coupling la cui rilevanza dipende da condizioni sui coefficienti indipendenti dalla scala di energia considerata. Un esempio di elemento di questa seconda classe è il seguente termine lagrangiano ottenuto da $-\hat{M}^3 \delta N \delta K$ nell'azione (3.70) dopo la sostituzione della (3.81):

$$\mathcal{L}_{mix}^{(II)} = \hat{M}^3 g^{ij} \partial_i \partial_j \pi \delta N \quad (3.91)$$

o, passando alla normalizzazione canonica,

$$\mathcal{L}_{mix}^{(II)} = \hat{M}^3 \frac{\partial^i \partial_i \pi_c}{\left(M^4 - 2M_{Pl}^2 \dot{H} \right)^{\frac{1}{2}}} \frac{\delta N_c}{M_{Pl}} \quad (3.92)$$

Questo termine di coupling potrà essere trascurato se si verifica la condizione

$$\frac{\hat{M}^3}{M_{Pl} \left(M^4 - 2M_{Pl}^2 \dot{H} \right)^{\frac{1}{2}}} = \beta \sqrt{\frac{\epsilon}{2 + \alpha}} \ll 1 \quad (3.93)$$

Nel caso di regime cinetico, essendo $\alpha \sim \frac{1}{\epsilon}$ e $\beta \sim \frac{1}{\epsilon}$ si ha $\beta \sqrt{\frac{\epsilon}{2 + \alpha}} \sim 1$ per cui la condizione (3.93) non è rispettata e non è possibile trascurare il coupling con la metrica. Nel caso del regime di slow-roll invece, essendo $\alpha \sim 1$, $\beta \sim 1$ si ha $\beta \sqrt{\frac{\epsilon}{2 + \alpha}} \sim \sqrt{\epsilon}$ per cui la (3.93) è rispettata e, per quanto riguarda la (3.90) si ha $E_{mix} \sim H \sqrt{\epsilon} \ll H$, per cui, ai fini delle implicazioni cosmologiche del modello WBG in slow-roll, è possibile trascurare il mixing con la metrica e ridursi alla sola S_π . Nell'azione S_π i termini $\dot{\pi}^2$ e $(\vec{\nabla} \pi)^2$ hanno coefficienti diversi, per cui il campo

π ha una velocità del suono $c_s < 1$ dove

$$c_s^2 = \frac{-M_{Pl}^2 \dot{H} + \frac{1}{2} \hat{M}^3 H}{-M_{Pl}^2 \dot{H} + \frac{1}{2} M^4} = \frac{2 + \beta}{2 + \alpha} \quad (3.94)$$

Ciò implica che esiste un limite distinto di momento p_{mix} per il decoupling, che non considereremo qui visto che siamo interessati alle implicazioni cosmologiche del modello in cui il ruolo determinante è giocato dalla scala di energia H dell'inflazione.

3.3 Non-gaussianità nel caso WBG con slow-roll

Possiamo ora analizzare le implicazioni cosmologiche di un modello di inflazione WBG nel regime di slow-roll. Nella teoria relativistica delle perturbazioni, la curvatura gauge-invariante $\zeta(t, \vec{x})$, conservata durante l'evoluzione super-horizon, è definita come la parte scalare di una perturbazione infinitesima della metrica spaziale nella gauge (unitaria) in cui $\pi = 0$, ovvero

$$h_{ij} = a(t)^2 [e^{2\zeta} \delta_{ij} + \gamma_{ij}] \approx a(t)^2 [(1 + 2\zeta) \delta_{ij} + \gamma_{ij}] \quad (3.95)$$

dove γ_{ij} è un tensore trasverso e a traccia nulla (perturbazioni tensoriali). ζ è responsabile delle perturbazioni primordiali di densità, mentre γ_{ij} descrive le perturbazioni tensoriali, che dovrebbero manifestarsi sottoforma di onde gravitazionali. L'azione per $\pi(t, \vec{x})$ nel limite di decoupling ricavata prima è sufficiente allo studio delle perturbazioni scalari descritte da ζ e il legame tra le due quantità si ottiene facilmente dal ragionamento seguente. Nel regime di decoupling si trascurano le fluttuazioni della metrica per cui questa è piatta e di tipo FRW con fattore di scala $a(t)$, ovvero

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 d\vec{x}^2 \quad (3.96)$$

Partendo da una gauge in cui sia presente un certo $\pi(t, \vec{x})$ per ritornare alla gauge unitaria, in base alla (3.19) è necessario un diffeomorfismo $t \rightarrow t + \pi(t, \vec{x})$. Ciò comporta una trasformazione della funzione $a(t)$ secondo la legge

$$a(t) \rightarrow a(t - \pi) \approx a(t) (1 - H\pi)$$

da cui confrontando con la (3.39) risulta

$$\zeta(t, \vec{x}) = -H\pi(t, \vec{x}) \quad (3.97)$$

La quantizzazione della parte quadratica di S_π data da

$$S_\pi^{(2)} = \int dt d^3\vec{x} a^3 \left(-M_{Pl}^2 \dot{H} + \frac{1}{2} M^4 \right) \left[\dot{\pi}^2 - c_s^2 \frac{(\vec{\nabla}\pi)^2}{a^2} \right] \quad (3.98)$$

fatta esclusione per la diversa normalizzazione e la presenza di $c_s < 1$, è del tutto identica al caso già affrontato per la teoria (1.10) e quindi possiamo ottenere i seguenti risultati nel tempo conforme τ

$$\hat{\pi}_{\vec{k}}(\tau) = \pi_{\vec{k}}(\tau) \hat{a}_{\vec{k}} + \pi_{\vec{k}}^*(\tau) \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \quad (3.99)$$

$$\pi_{\vec{k}}(\tau) = \pi_{\vec{k}}(0) (1 + ikc_s\tau) e^{-ikc_s\tau} \quad (3.100)$$

$$\pi_{\vec{k}}(0) = \frac{i}{2M_{Pl}\sqrt{c_s k^3 \epsilon} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)} \quad (3.101)$$

dove si è posto $\tau = 0$ alla fine dell'inflazione. Di nuovo lo spettro di potenza è invariante di scala ed è dato da

$$P_\zeta(k) = \langle \zeta_{\vec{k}} \zeta_{\vec{k}} \rangle = H^2 |\pi_{\vec{k}}(0)|^2 = \frac{H^2}{4M_{Pl}^2 \epsilon c_s \left(1 + \frac{\beta}{2}\right)} \frac{1}{k^3} \quad (3.102)$$

Per il seguito porremo $\Delta_\zeta^2 \equiv k^3 P_\zeta(k)$ (indipendente da k nel caso di invarianza di scala). La parte cubica $S_\pi^{(3)}$ dell'azione per il bosone di Goldstone π contiene le interazioni $\dot{\pi}^3$, $\dot{\pi} \frac{(\vec{\nabla}\pi)^2}{a^2}$, $\frac{(\vec{\nabla}\pi)^2}{a^2} \frac{\nabla^2\pi}{a^2}$, $\dot{\pi}^2 \frac{\nabla^2\pi}{a^2}$ ed è responsabile della produzione delle non-gaussianità primordiali. Prima di proseguire osserviamo che il termine di interazione proporzionale a $\dot{\pi}^2 \frac{\nabla^2\pi}{a^2}$ può essere riscritto in termini di $\dot{\pi}^3$ [32] usando l'equazione del moto lineare proveniente dalla parte quadratica dell'azione (3.98)

$$\ddot{\pi} + 3H\dot{\pi} - c_s^2 \frac{\nabla^2\pi}{a^2} = 0 \quad (3.103)$$

Infatti, usando la (3.103) e integrando per parti, si ha

$$\int dt d^3 \vec{x} a^3 \hat{M}^3 \dot{\pi}^2 \frac{\nabla^2 \pi}{a^2} = \int dt d^3 \vec{x} a^3 \hat{M}^3 \frac{2H}{c_s^2} \dot{\pi}^3$$

per cui, ricordando di modificare il coefficiente di $\dot{\pi}^3$ nell'azione (3.85), da ora in poi considereremo solo gli operatori di interazione $\dot{\pi}^3$, $\dot{\pi} \frac{(\vec{\nabla} \pi)^2}{a^2}$, $\frac{(\vec{\nabla} \pi)^2}{a^2} \frac{\nabla^2 \pi}{a^2}$. Per il calcolo dei corrispondenti bispettri con la (1.112) supporremo per semplicità pari a 1 i coefficienti lagrangiani dei vari operatori di interazione, e inseriremo in seguito i valori reali come coefficienti moltiplicativi vista la natura lineare in $H_{int}(\tau)$ della (1.112), ricordando però che i coefficienti dell'hamiltoniana sono opposti a quelli della lagrangiana. Cominciamo con il primo operatore di interazione

$$B_{\dot{\pi}^3} = i\pi_{k_1}(0)\pi_{k_2}(0)\pi_{k_3}(0) \int_{-\infty^+}^0 d\tau \left(-\frac{1}{H\tau} \right) (\pi_{k_1}^*)' (\pi_{k_2}^*)' (\pi_{k_3}^*)' + perms. + c.c. \quad (3.104)$$

dove *perms.* indica l'insieme di tutte le permutazioni degli indici 1, 2, 3, *c.c.* indica il complesso coniugato della scrittura riportata e, all'interno dell'integrale, si è sottintesa la dipendenza delle funzioni $\pi_{k_i}^*(\tau)$ dal tempo conforme τ . Ricordando la (3.100) si ha

$$(\pi_k^*(\tau))' = \pi_k^*(0) k^2 c_s^2 \tau e^{-ikc_s \tau} \quad (3.105)$$

e quindi, sostituendo nell'integrale, si può scrivere

$$B_{\dot{\pi}^3} = -i|\pi_{k_1}(0)|^2 |\pi_{k_2}(0)|^2 |\pi_{k_3}(0)|^2 (k_1 k_2 k_3)^2 \frac{c_s^6}{H} \int_{-\infty^+}^0 d\tau \tau^2 e^{3iKc_s \tau} + perms. + c.c. \quad (3.106)$$

dove, come useremo fare da ora in poi, si è posto $K = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$.

L'integrale in (3.106) si può calcolare attraverso un prolungamento analitico della funzione integranda nel secondo quadrante del piano complesso, come consentito dall'estremo inferiore $-\infty^+ = -\infty(1 - i\epsilon)$. Detta $f(\tau)$ la funzione integranda, analitica nel secondo quadrante del piano complesso, si ha per analiticità (assenza di poli)

$$\int_{-\infty^+}^0 d\tau f(\tau) = - \int_0^{+\infty} id\tau f(i\tau) \quad (3.107)$$

per cui il bispettro diventa

$$B_{\pi^3} = |\pi_{k_1}(0)|^2 |\pi_{k_2}(0)|^2 |\pi_{k_3}(0)|^2 \frac{c_s^6}{H} \int_0^{+\infty} d\tau \tau^2 e^{-3Kc_s\tau} + perms. + c.c. \quad (3.108)$$

ed essendo

$$\int_0^{+\infty} d\tau \tau^2 e^{-\alpha\tau} = \frac{2}{\alpha^3} \quad (3.109)$$

si ricava

$$B_{\pi^3} = \frac{2}{27} c_s^3 \frac{\Delta_\zeta^6}{H^7 (k_1 k_2 k_3) K^3} + perms. + c.c. = \frac{8}{9} c_s^3 \frac{\Delta_\zeta^6}{H^7 (k_1 k_2 k_3) K^3} \quad (3.110)$$

dove si è usata una conseguenza della (3.102) espressa come $|\pi_k(0)|^2 = \frac{P_\zeta(k)}{H^2} = \frac{\Delta_\zeta^2}{H^2 k^3}$.

Consideriamo ora il bispettro associato all'operatore successivo

$$B_{\pi(\partial_i\pi)^2} = i\pi_{k_1}(0)\pi_{k_2}(0)\pi_{k_3}(0) \int_{-\infty^+}^0 d\tau \left(-\frac{1}{H\tau}\right) (\pi_{k_1}^*)' \pi_{k_2}^* \pi_{k_3}^* (i\vec{k}_2) \cdot (i\vec{k}_3) + perms. + c.c. \quad (3.111)$$

Come nel caso precedente, usando la (3.100) e la (3.105) si ha

$$B_{\pi(\partial_i\pi)^2} = i \frac{\Delta_\zeta^6 k_1^2 c_s^2 (k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)}{2H^7 (k_1 k_2 k_3)^3} \int_{-\infty^+}^0 d\tau e^{3iKc_s\tau} \prod_{j=2,3} (1 - ik_j c_s \tau) + perms. + c.c. \quad (3.112)$$

dove si è utilizzata la condizione di conservazione del momento $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$ per scrivere $(i\vec{k}_2) \cdot (i\vec{k}_3)$ in termini dei soli moduli dei vettori. Effettuando un prolungamento analitico sul secondo quadrante e usando la (3.107) si riscrive l'integrale come

$$B_{\pi(\partial_i\pi)^2} = \frac{\Delta_\zeta^6 k_1^2 c_s^2 (k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)}{2H^7 (k_1 k_2 k_3)^3} \int_0^{+\infty} d\tau (1 + k_2 c_s \tau) (1 + k_3 c_s \tau) e^{-3Kc_s\tau} + perms. + c.c. \quad (3.113)$$

Usando la (3.109) ed essendo

$$\int_0^{+\infty} d\tau \tau e^{-\alpha\tau} = \frac{1}{\alpha^2} \quad (3.114)$$

si ottiene

$$B_{\hat{\pi}(\partial_i\pi)^2} = c_s \frac{\Delta_\zeta^6}{H^7 (k_1 k_2 k_3)^3} k_1^2 (k_1^2 - k_2^2 - k_3^2) \left(\frac{1}{3K} + \frac{k_2 + k_3}{9K^2} + \frac{2k_2 k_3}{27K^3} \right) + perms. \quad (3.115)$$

dove si è fatto riferimento alla (3.102) per lo spettro di potenza. Infine per l'ultimo operatore di interazione il bispettro è dato da

$$B_{\partial_i^2 \pi(\partial_j \pi)^2} = i \pi_{k_1}(0) \pi_{k_2}(0) \pi_{k_3}(0) \int_{-\infty^+}^0 d\tau \pi_{k_1}^* \pi_{k_2}^* \pi_{k_3}^* (i\vec{k}_1 \cdot i\vec{k}_1) (i\vec{k}_2 \cdot i\vec{k}_3) + perms. + c.c. \quad (3.116)$$

Utilizzando la (3.100)

$$B_{\partial_i^2 \pi(\partial_j \pi)^2} = i \frac{\Delta_\zeta^6 k_1^2 (\vec{k}_2 \cdot \vec{k}_3)}{H^6 (k_1 k_2 k_3)^3} \int_{-\infty^+}^0 d\tau e^{3iK c_s \tau} \prod_{j=1,2,3} (1 - ik_j c_s \tau) + perms. + c.c. \quad (3.117)$$

Con la tecnica del prolungamento analitico al secondo quadrante descritta dalla (3.107) e utilizzando la conservazione del momento (come nel caso precedente) si giunge a

$$B_{\partial_i^2 \pi(\partial_j \pi)^2} = \frac{\Delta_\zeta^6 k_1^2 (k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)}{2H^6 (k_1 k_2 k_3)^3} \int_0^{+\infty} d\tau e^{-3K c_s \tau} \prod_{j=1,2,3} (1 + k_j c_s \tau) + perms. + c.c. \quad (3.118)$$

Dalle (3.102), (3.109), (3.114) ed essendo

$$\int_0^{+\infty} d\tau \tau^3 e^{-\alpha\tau} = \frac{6}{\alpha^4} \quad (3.119)$$

si ha infine

$$B_{\partial_i^2 \pi(\partial_j \pi)^2} = \frac{1}{c_s} \frac{2\Delta_\zeta^6 k_1^2 (k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)}{H^6 (k_1 k_2 k_3)^3} \left(\frac{1}{3K} + \frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{27K^3} + \frac{k_1 k_2 k_3}{27K^4} \right) + perms. \quad (3.120)$$

Si può verificare la validità della seguente identità per gli spettri dei tre operatori di interazione considerati:

$$B_{\partial_i^2 \pi(\partial_j \pi)^2} = \frac{2H}{c_s^2} \left(B_{\hat{\pi}(\partial_i\pi)^2} + \frac{1}{c_s^2} B_{\hat{\pi}^3} \right) \quad (3.121)$$

Questa è consistente con il fatto che, utilizzando l'equazione del moto lineare (3.103), l'azione per l'operatore di interazione $\frac{(\vec{\nabla}\pi)^2}{a^2} \frac{\nabla^2\pi}{a^2}$ si riscrive, attraverso integrazioni per parti, come combinazione lineare delle azioni per gli altri due operatori $\dot{\pi} \frac{(\vec{\nabla}\pi)^2}{a^2}$ e $\dot{\pi}^3$ proprio nella modalità prevista dalla (3.121) ovvero

$$\int dt d^3\vec{x} a^3 \frac{(\vec{\nabla}\pi)^2}{a^2} \frac{\nabla^2\pi}{a^2} = \int dt d^3\vec{x} a^3 \frac{2H}{c_s^2} \left[\dot{\pi} \frac{(\vec{\nabla}\pi)^2}{a^2} + \frac{1}{c_s^2} \dot{\pi}^3 \right] \quad (3.122)$$

Infatti, dalla (3.103), omettendo per semplicità l'operazione di integrazione $\int dt d^3\vec{x}$ e indicando con una freccia l'equivalenza a meno di integrazioni per parti, si ha

$$a^3 \frac{(\vec{\nabla}\pi)^2}{a^2} \frac{\nabla^2\pi}{a^2} = \frac{a}{c_s^2} (\ddot{\pi} + 3H\dot{\pi}) (\vec{\nabla}\pi)^2 = \frac{3Ha}{c_s^2} \dot{\pi} (\vec{\nabla}\pi)^2 + \frac{a}{c_s^2} \ddot{\pi} (\vec{\nabla}\pi)^2 \quad (3.123)$$

Dato che il primo è già nella forma desiderata, consideriamo solo il secondo termine dell'espressione (3.123), senza riportare il suo coefficiente $\frac{1}{c_s^2}$ e trasformiamolo:

$$\begin{aligned} a\ddot{\pi} (\vec{\nabla}\pi)^2 &\rightarrow -\dot{\pi} \partial_t \left[a (\vec{\nabla}\pi)^2 \right] = -aH\dot{\pi} (\vec{\nabla}\pi)^2 - 2a\dot{\pi} \vec{\nabla}\pi \cdot \vec{\nabla}\dot{\pi} = \\ &= -aH\dot{\pi} (\vec{\nabla}\pi)^2 - a\vec{\nabla}\pi \cdot \vec{\nabla}\dot{\pi}^2 \rightarrow -aH\dot{\pi} (\vec{\nabla}\pi)^2 + a\dot{\pi}^2 \nabla^2\pi = \\ &= -aH\dot{\pi} (\vec{\nabla}\pi)^2 + \frac{a^3}{c_s^2} \dot{\pi}^2 (\ddot{\pi} + 3H\dot{\pi}) = -aH\dot{\pi} (\vec{\nabla}\pi)^2 + \frac{3a^3H}{c_s^2} \dot{\pi}^3 + \frac{a^3}{c_s^2} \partial_t \left(\frac{\dot{\pi}^3}{3} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow -aH\dot{\pi} (\vec{\nabla}\pi)^2 + \frac{3a^3H}{c_s^2} \dot{\pi}^3 - \frac{a^3H}{c_s^2} \dot{\pi}^3 = -aH\dot{\pi} (\vec{\nabla}\pi)^2 + \frac{2a^3H}{c_s^2} \dot{\pi}^3 \end{aligned} \quad (3.124)$$

Inserendo la (3.124) nella (3.123) si ritrova la (3.122). Inserendo i coefficienti della vera azione (3.85) e ricordando che $\zeta = -H\pi$ si hanno le seguenti espressioni complete per i bispettri di ζ [33, 34]

$$B_{\zeta^3} = -\frac{8}{9} \frac{c_s^3 M^4}{H^4} \frac{\Delta_\zeta^6}{k_1 k_2 k_3} \frac{1}{K^3} \quad (3.125)$$

$$B_{\dot{\zeta}(\partial_i\zeta)^2} = -\frac{c_s M^4 \Delta_\zeta^6}{2H^4 (k_1 k_2 k_3)^3} \left[k_1^2 (k_1^2 - k_2^2 - k_3^2) \left(\frac{1}{3K} + \frac{k_2 + k_3}{9K^2} + \frac{2k_2 k_3}{27K^3} \right) + perms. \right] \quad (3.126)$$

$$B_{\partial_i^2 \zeta (\partial_j \zeta)^2} = \frac{\hat{M}^3 \Delta_\zeta^6 k_1^2 (k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)}{c_s H^3 (k_1 k_2 k_3)^2} \left(\frac{1}{3K} + \frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{27K^3} + \frac{k_1 k_2 k_3}{27K^4} \right) + perms. \quad (3.127)$$

$$B_{\dot{\zeta}^2 \partial_i^2 \zeta} = \frac{16 c_s \hat{M}^3}{9} \frac{\Delta_\zeta^6}{H^3} \frac{1}{k_1 k_2 k_3} \frac{1}{K^3} \quad (3.128)$$

dove per ottenere la (3.128) si è usata la riscrittura dell'azione per l'operatore $\dot{\pi}^2 \frac{\nabla^2 \pi}{a^2}$ in termini di $\dot{\pi}^3$. Usando le stime (3.73) e (3.74) valide in slow-roll, i coefficienti f_{NL} relativi ai vari operatori di interazione sono dati nell'ordine da $f_{NL} [\dot{\zeta}^3] \sim 1$, $f_{NL} [\dot{\zeta}(\partial_i \zeta)^2] \sim \frac{1}{c_s^2}$, $f_{NL} [\partial_i^2 \zeta (\partial_j \zeta)^2] \sim \frac{1}{c_s^4}$, $f_{NL} [\dot{\zeta}^2 \partial_i^2 \zeta] \sim \frac{1}{c_s^2}$. Dunque, mentre nel caso dell'operatore $\dot{\zeta}^3$ la (3.125) limita f_{NL} all'ordine dell'unità, le formule (3.126), (3.127) e (3.128) dicono che, per gli altri operatori, le non-gaussianità possono diventare grandi se la velocità del suono c_s è abbastanza piccola, nel qual caso sono determinate prevalentemente dall'interazione $\partial_i^2 \zeta (\partial_j \zeta)^2$ e sono dell'ordine di

$$f_{NL} \sim \frac{1}{c_s^4} \quad (3.129)$$

Come adesso discuteremo, questa evenienza per c_s può in effetti realizzarsi. La velocità del suono è data dalla (3.94) dove a numeratore compare la differenza tra $M_{Pl}^2 \dot{H}$ e $\frac{1}{2} \hat{M}^3 H$ che, come mostra la stima (3.74), sono quantità dello stesso ordine; se i coefficienti di G_3 (che, come si è discusso nella sezione 2.3, sono protetti dalle correzioni radiative da un teorema di non rinormalizzazione che consente di sceglierne i valori dell'ordine dell'unità), avessero valori opportuni allora \hat{M}^3 , dipendente da essi come in (3.74), potrebbe essere tale da dare una considerevole cancellazione al numeratore della (3.94), con il risultato di una velocità del suono piccola. Tenendo conto che i due addendi a denominatore nella (3.94), come si vede dalla (3.73) sono circa della stessa grandezza, una cancellazione a meno del 10%, solo a titolo di esempio dell'efficacia del meccanismo descritto, produrrebbe un valore di f_{NL} dell'ordine delle centinaia, e quindi non-gaussianità abbastanza grandi da potere essere rilevate nel prossimo futuro.

3.4 Studio del regime cinetico

La condizione di demixing tra il campo associato al Goldstone π e la metrica, come si è già discusso nella sottosezione 3.2.2, viene a cadere quando i termini higher-derivative dominano sul potenziale. Non è possibile allora limitarsi alla sola azione per π e il calcolo delle non-gaussianità va affrontato a partire dall'intera azione in gauge unitaria, derivando le equazioni di vincolo per N ed N_i e sostituendo in modo da ridursi ad un'azione per la perturbazione di curvatura ζ . Il calcolo è molto più laborioso, ma già limitandosi alla parte quadratica dell'azione, e dunque allo spettro di potenza, ne risulterà un rapporto r fuori dalla zona consentita dai dati di BICEP2 e Keck Array, rendendo così non interessante dal punto di vista fisico il regime di WBG dominato dai termini cinetici e il calcolo delle sue non-gaussianità. Procediamo dunque con il calcolo dell'azione quadratica per ζ , nella gauge unitaria in cui $\delta\varphi(t, \vec{x}) = 0$ e per perturbazioni scalari della parte spaziale della metrica definite come

$$h_{ij} = a^2(t)e^{2\zeta}\delta_{ij} \quad (3.130)$$

L'azione a cui siamo interessati, nella gauge unitaria e scritta usando variabili ADM, è data da

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x N \sqrt{h} \left[\frac{1}{2} M_{Pl}^2 R^{(3)} + \frac{1}{2} M_{Pl}^2 N^{-2} (E^{ij} E_{ij} - E^2) - M_{Pl}^2 N^{-2} \dot{H} \right] + \\ & + \int d^4x N \sqrt{h} \left[-M_{Pl}^2 (3H^2 + \dot{H}) + \frac{1}{2} M^4(t) \delta N^2 - \hat{M}(t)^3 \delta N \delta K \right] \end{aligned} \quad (3.131)$$

Per variare l'azione rispetto a N è utile sostituire

$$-N\sqrt{h}\hat{M}^3\delta N\delta K = -\hat{M}^3(\delta N\delta E - 3H\delta N^2) \quad (3.132)$$

perchè, come si legge dalla (1.54), δE , a differenza di δK , è indipendente da N . Ne risulta la seguente equazione di vincolo per N :

$$M_{Pl}^2 \left[R^{(3)} + K^2 - K^{ij} K_{ij} + \frac{2\dot{H}}{N^2} - 2(3H^2 + \dot{H}) \right] + 2M^4\delta N - 2\hat{M}^3(\delta K - 3H\delta N) = 0 \quad (3.133)$$

Per quanto riguarda l'equazione di vincolo per N_i , si varia l'azione in corrispondenza a $N_i \rightarrow N_i + \Delta N_i$, utilizzando

$$\Delta \left(\frac{E^{ij} E_{ij} - E^2}{2} \right) = - (E_i^j - E \delta_i^j) \hat{\nabla}_j \Delta N^i \quad (3.134)$$

$$\Delta E = -h^{ij} \hat{\nabla}_j \Delta N_i \quad (3.135)$$

da cui si ottiene il vincolo

$$\hat{\nabla}_j \left[M_{Pl}^2 (K_i^j - K \delta_i^j) - \delta_i^j \hat{M}^3 \delta N \right] = 0 \quad (3.136)$$

Procedendo come nel caso di inflazione slow-roll trattato nella sezione 1.6, decomponiamo $N_i = \tilde{N}_i + \partial_i \psi$ e poniamo $\tilde{N}_i = 0$. Come nel caso dell'inflazione slow-roll affrontato nella sottosezione, usando le (1.72)-(1.79) e lavorando all'ordine lineare in ζ , l'equazione di vincolo (3.136) diventa

$$-2M_{Pl}^2 \partial_i \dot{\zeta} + (2M_{Pl}^2 H - \hat{M}^3) \partial_i \delta N = 0 \quad (3.137)$$

la cui soluzione è quindi data da

$$\delta N = \frac{2M_{Pl}^2}{2M_{Pl}^2 H - \hat{M}^3} \dot{\zeta} \quad (3.138)$$

La sostituzione di questo risultato nell'equazione di vincolo per N data dalla (3.133) consente poi di determinare ψ , che soddisfa l'equazione

$$\nabla^2 \psi = \frac{2M_{Pl}^2}{\hat{M}^3 - 2M_{Pl}^2 H} \nabla^2 \zeta + a^2 \frac{3\hat{M}^6 + 2M_{Pl}^2 M^4 - 4M_{Pl}^4 \dot{H}}{(\hat{M}^3 - 2M_{Pl}^2 H)^2} \dot{\zeta} \quad (3.139)$$

Utilizzando, nei passaggi intermedi, le definizioni di α e β date nelle (3.71) e (3.72) si può riscrivere in modo più compatto

$$\delta N = \frac{\dot{\zeta}}{H \left(1 - \frac{\epsilon\beta}{2} \right)} \quad (3.140)$$

$$\nabla^2\psi = -\frac{1}{H\left(1-\frac{\epsilon\beta}{2}\right)}\nabla^2\zeta + a^2\frac{\epsilon(4+2\alpha+3\epsilon\beta^2)}{(2-\epsilon\beta)^2}\dot{\zeta} \quad (3.141)$$

Prima di sostituire le soluzioni delle equazioni di vincolo, usando le equazioni (1.72)-(1.79) e dopo alcune integrazioni per parti, l'azione fino all'ordine quadratico in ζ ha la forma seguente:

$$\begin{aligned} S = \int dt d^3\vec{x} a^3 M_{Pl}^2 & \left[\frac{(\vec{\nabla}\zeta)^2}{a^2} - 2\delta N \frac{\nabla^2\zeta}{a^2} - 3H^2\delta N^2 - \dot{H}\delta N^2 + \right. \\ & + 6H\dot{\zeta}\delta N - 2H\delta N \frac{\nabla^2\psi}{a^2} - 3\dot{\zeta}^2 + 2\dot{\zeta} \frac{\nabla^2\psi}{a^2} + \\ & \left. + \frac{1}{2}\alpha\epsilon H^2\delta N^2 - \beta\epsilon H\delta N \left(-3H\delta N + 3\dot{\zeta} - \frac{\nabla^2\psi}{a^2} \right) \right] \quad (3.142) \end{aligned}$$

Sostituendo le equazioni di vincolo si giunge a

$$\begin{aligned} S = \int dt d^3\vec{x} a^3 M_{Pl}^2 & \left\{ \frac{(\vec{\nabla}\zeta)^2}{a^2} - \frac{2}{1-\frac{\epsilon\beta}{2}} \frac{\dot{\zeta}}{H} \frac{\nabla^2\zeta}{a^2} - \frac{3\dot{\zeta}^2}{\left(1-\frac{\epsilon\beta}{2}\right)^2} + \frac{\epsilon\dot{\zeta}^2}{\left(1-\frac{\epsilon\beta}{2}\right)^2} + \right. \\ & + \frac{6\dot{\zeta}^2}{1-\frac{\epsilon\beta}{2}} - 3\dot{\zeta}^2 + \frac{\alpha\epsilon\dot{\zeta}^2}{2\left(1-\frac{\epsilon\beta}{2}\right)^2} + \frac{3\epsilon\beta\dot{\zeta}^2}{\left(1-\frac{\epsilon\beta}{2}\right)^2} - \frac{3\epsilon\beta\dot{\zeta}^2}{1-\frac{\epsilon\beta}{2}} + \\ & \left. + \left[-\frac{\nabla^2\zeta}{a^2 H \left(1-\frac{\epsilon\beta}{2}\right)} + \frac{\epsilon(4+2\alpha+3\epsilon\beta^2)}{(2-\epsilon\beta)^2} \dot{\zeta} \right] \left[-\frac{2\dot{\zeta}}{1-\frac{\epsilon\beta}{2}} + 2\dot{\zeta} + \frac{\epsilon\beta\dot{\zeta}}{1-\frac{\epsilon\beta}{2}} \right] \right\} \quad (3.143) \end{aligned}$$

Attraverso una procedura di integrazione per parti è possibile riscrivere il secondo termine della formula nella stessa forma degli altri, come

$$-\int dt d^3\vec{x} M_{Pl}^2 a \frac{2}{1-\frac{\epsilon\beta}{2}} \frac{\dot{\zeta}}{H} \nabla^2\zeta = -\int dt d^3\vec{x} M_{Pl}^2 a \left[\frac{1+\epsilon}{1-\frac{\epsilon\beta}{2}} + \frac{\partial_t(\epsilon\beta)}{2H\left(1-\frac{\epsilon\beta}{2}\right)^2} \right] (\vec{\nabla}\zeta)^2 \quad (3.144)$$

giungendo alla fine alla seguente azione quadratica per ζ :

$$S_\zeta^{(2)} = \int dt d^3\vec{x} a^3 \left[A(t)\dot{\zeta}^2 - B(t)\frac{(\vec{\nabla}\zeta)^2}{a^2} \right] \quad (3.145)$$

dove

$$A(t) = M_{Pl}^2 \frac{-4M_{Pl}^4 \dot{H} + 2M_{Pl}^2 M^4 + 3\hat{M}^6}{(\hat{M}^3 - 2M_{Pl}^2 H)^2} \quad (3.146)$$

$$B(t) = M_{Pl}^2 \frac{-4M_{Pl}^4 \dot{H} + 2M_{Pl}^2 H \hat{M}^3 - \hat{M}^6 + 2M_{Pl}^2 \partial_t \hat{M}^3}{(\hat{M}^3 - 2M_{Pl}^2 H)^2} \quad (3.147)$$

Essendo $A(t) \neq B(t)$, la velocità del suono c_s per il campo ζ , definita da $c_s^2 = \frac{B}{A}$, è minore di 1. La quantizzazione dell'azione quadratica, necessaria per il calcolo dello spettro di potenza, si ottiene in modo analogo al caso di semplice slow-roll studiato nella sezione 1.6, con l'accortezza di notare la diversa normalizzazione delle azioni (3.145) e (1.86) e di sostituire k con kc_s . Ne risulta uno spettro di potenza scalare dato da

$$P_s(k) = \frac{H^2}{4Ac_s^3 k^3} \quad (3.148)$$

da cui si trova il seguente rapporto r (definito nella (1.96)):

$$r = \frac{16}{M_{Pl}^2} B^{\frac{3}{2}} A^{-\frac{1}{2}} \quad (3.149)$$

In termini dei parametri α e β definiti nelle (3.71), (3.72) e trascurando la dipendenza temporale di \hat{M}^3 e M^4 , si può scrivere

$$r = 16\epsilon \frac{(4 + 2\beta - \epsilon\beta^2)^{\frac{3}{2}}}{(2 - \epsilon\beta)^2 (4 + 2\alpha + 3\epsilon\beta^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.150)$$

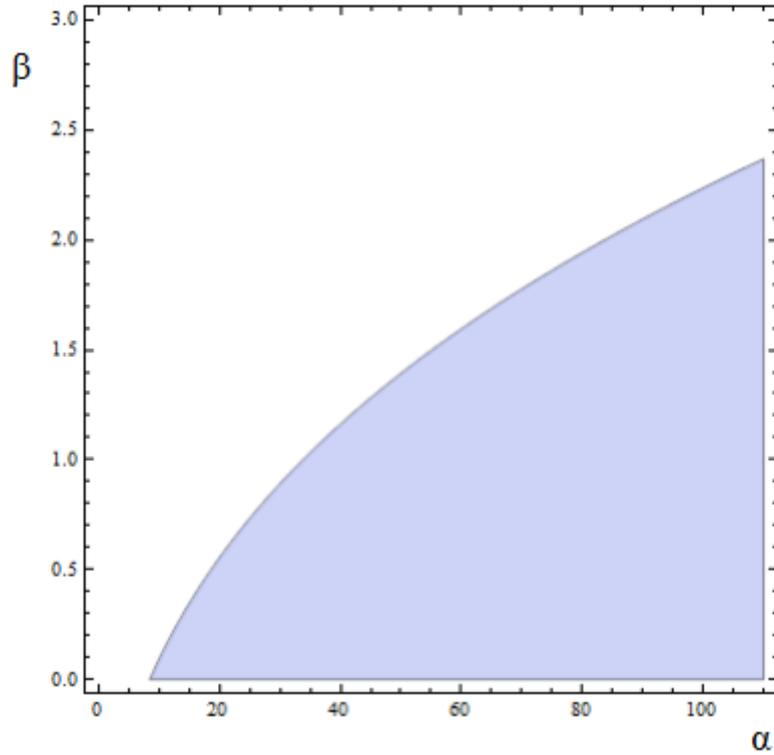
Per come è stata ottenuta, la (3.150) è valida per qualunque modello la cui azione in gauge unitaria sia della forma (3.70), indipendentemente dai valori di α e β specifici.

3.5 Confronto tra i modelli di inflazione

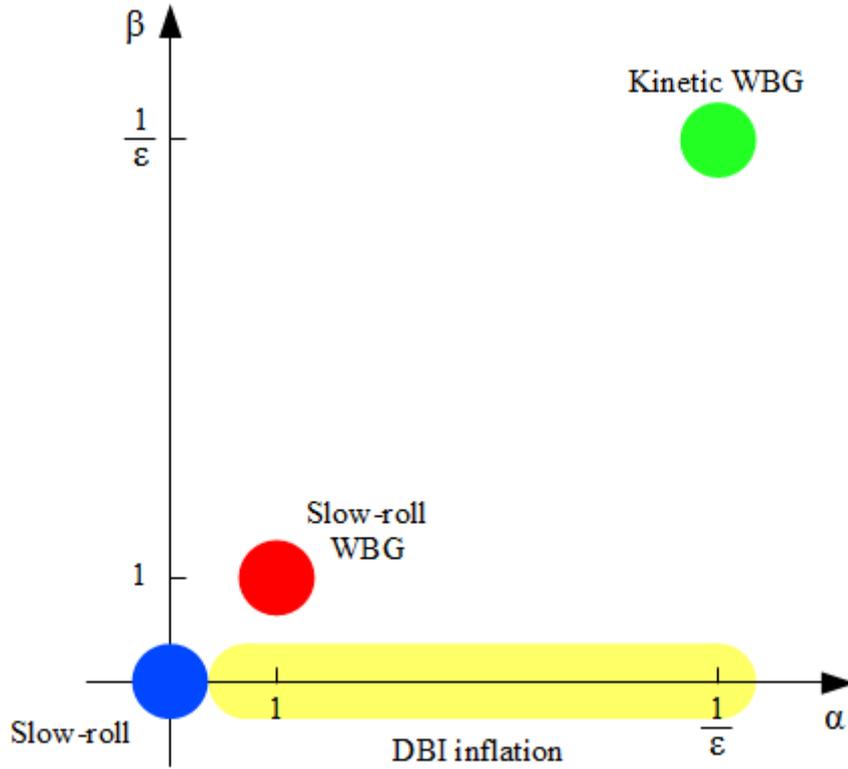
L'azione in gauge unitaria per l'inflazione DBI, data dalla (1.130), si ottiene come un caso particolare della (3.70) ponendo $\hat{M}^3 = 0$, ossia $\beta = 0$. Di conseguenza il problema di valutare lo spettro di potenza dell'inflazione DBI, o equivalentemente il rapporto r è già risolto grazie (3.150). Per quanto riguarda le non-gaussianità, vogliamo dimostrare con il ragionamento seguente che, nei casi compatibili con l'at-

tuale constraint osservativo $|f_{NL}| \lesssim 50$, le condizioni di demixing $E_{mix} \ll H$ (dove E_{mix} è definita nella (3.90)) e (3.93) sono rispettate. Infatti la (3.93) è sicuramente valida perchè $\beta = 0$, mentre $E_{mix} \ll H$ è rispettata per $\alpha \ll \frac{1}{\epsilon}$ (dove ricordiamo che, grazie all'attuale stima osservativa $\epsilon \lesssim 10^{-2}$ si ha $\frac{1}{\epsilon} \gtrsim 100$). Se vale questa condizione su α , le non-gaussianità possono essere valutate considerando la sola S_π data dalla (3.85) e ponendo $\hat{M}^3 = 0$, da cui si ricavano i bispettri (3.125) e (3.126) e le corrispondenti non-gaussianità $f_{NL} [\dot{\zeta}^3] \sim 1$, $f_{NL} [\dot{\zeta}(\partial_i \zeta)^2] \sim \frac{1}{c_s^2}$. Le non-gaussianità diventano allora grandi, con $f_{NL} \sim \frac{1}{c_s^2}$, quando $c_s \ll 1$. Ma poichè in DBI vale la relazione $c_s^2 = \frac{2}{2+\alpha}$, la condizione $|f_{NL}| \lesssim 50$ pone un limite superiore ad α , compatibile con la condizione di decoupling $\alpha \ll \frac{1}{\epsilon} \sim 100$. Ciò conclude il ragionamento e fornisce, nel limite più favorevole per avere grandi non-gaussianità, la stima $f_{NL} \sim \frac{1}{c_s^2}$ per l'inflazione DBI [35, 36, 37, 38]. Ricordiamo che, nel caso di inflazione WBG in regime di slow-roll, si era ottenuto $f_{NL} \sim \frac{1}{c_s^4}$ a causa della presenza nell'azione S_π dell'interazione $\hat{M}^3 \partial_i^2 \pi (\partial_j \pi)^2$, che è invece assente in DBI dove $\hat{M}^3 = 0$.

Nel grafico seguente la zona colorata mostra, per un valore preciso del parametro di slow-roll ϵ scelto come $\epsilon = 0.01$, la regione dei parametri α e β consentita dall'attuale limite superiore sul rapporto tra spettro tensoriale e spettro scalare $r < 0.07$. Si sono rappresentati in ascissa valori di α compresi tra 0 e 100, mentre in ordinata, per una maggiore leggibilità del grafico, ci si è limitati a valori di β tra 0 e 3. Si noti che, per $\epsilon = 0.01$, il regime cinetico di inflazione WBG corrisponde ad $\alpha, \beta \sim \frac{1}{\epsilon} = 100$ e il grafico mostra senza alcuna ambiguità che tale regime è ben al di fuori della regione colorata, ovvero è assolutamente incompatibile con il limite su r , come si era preannunciato nella sezione 3.4.



Nel grafico successivo sono invece evidenziate in modo qualitativo le regioni dei parametri α e β corrispondenti ai vari modelli cui si è fatto riferimento in questo lavoro di tesi. Per l'inflazione DBI si è evidenziato solo l'intervallo di α compreso tra 0 e $\frac{1}{\epsilon}$ perchè, essendo valida (a meno di fattori di ordine 1) la stima $f_{NL} \sim \frac{1}{c_s^2} \sim \alpha$, quando α è al di sopra di $\frac{1}{\epsilon} \sim 100$, i valori di f_{NL} sono certamente incompatibili con il dato osservativo $|f_{NL}| \lesssim 50$.



4 Conclusioni

In questo lavoro di tesi, ai fini della ricerca di una teoria inflazionaria che preveda grandi non-gaussianità, ci siamo dedicati allo sviluppo di una teoria di campo efficace a partire da una simmetria in grado di tenerne sotto controllo le correzioni radiative, giungendo alla classe dei modelli WBG. Lo studio delle implicazioni cosmologiche di tali modelli ha poi individuato due regimi, uno di slow-roll e l'altro dominato dal termine cinetico e da interazioni higher-derivative. Il regime di slow-roll per l'inflazione WBG, oltre ad essere compatibile con i vincoli osservativi sui parametri cosmologici riportati nella sezione 1.9, si è anche dimostrato capace di fornire un meccanismo, basato sulla regolazione in modo opportuno dei coefficienti della teoria efficace, per la produzione di non-gaussianità abbastanza grandi da essere rilevabili con l'attuale

risoluzione delle osservazioni sulla CMB. Come abbiamo visto, la richiesta di una simmetria come punto di inizio della costruzione di teorie di campo efficaci è cruciale per preservarne la struttura dalle correzioni radiative. Più in generale, nel contesto dello studio delle teorie di campo e delle proprietà che ne determinano l'ammissibilità fisica, è stato posto recentemente il problema dell'esistenza di teorie efficaci a bassa energia, apparentemente accettabili sul piano della località e dell'invarianza di Lorentz (parliamo qui di situazioni in assenza di gravità, dove lo spazio-tempo è quello di Minkowski), ma che nascondono comportamenti non-locali e non ammettono alcun completamento ultravioletto senza che siano violate proprietà di analiticità della matrice di scattering. Un esempio di teorie di questo tipo [39] è quella di uno scalare φ che rispetti l'invarianza sotto shift $\varphi \rightarrow \varphi + c$ (caso particolare del galileone discusso in questa tesi) di cui scriviamo i primi termini lagrangiani come $\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)^2 + c \frac{(\partial_\mu \varphi)^4}{\Lambda^4} + \dots$ (questi operatori sono ovviamente presenti anche in teorie WBG, nelle quantità che avevamo denotato con X e $G_2(X)$). Considerando lo scattering $2 \rightarrow 2$, e usando le variabili di Mandelstam s, t, u (di cui prendiamo s e t come indipendenti), si può dimostrare che l'ampiezza di scattering per questo processo, nel limite in cui $t \rightarrow 0$, è vincolata da proprietà generali di analiticità ad assumere la forma $\mathcal{A}(s) = a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots$ con $a_2 > 0$, e questo pone la condizione $c > 0$ sul coefficiente c della teoria iniziale. E' altresì possibile che ulteriori richieste sulle teorie di campo emergano guardando a determinate quantità che prima non erano state prese in considerazione (ad esempio, nella teoria scalare ora discussa, si è presa in considerazione l'ampiezza per lo scattering $2 \rightarrow 2$, ma nulla ci previene dal considerare altre quantità, dalle quali possono magari emergere ulteriori vincoli sulla struttura della teoria stessa). L'esistenza di lagrangiane come quelle esposte, capaci di rendere inaccettabili teorie fisiche a prima vista ammissibili, dimostra che non vi è ancora una chiara comprensione di quali siano i vincoli sufficienti a garantire il rispetto di requisiti fisici fondamentali, e spingono la ricerca in tal senso.

Riferimenti bibliografici

- [1] P. Creminelli, JCAP 0310, 003 (2003), arXiv:astro-ph/0306122 [astro-ph].
- [2] E. Silverstein and D. Tong, Phys.Rev. D70, 103505 (2004), arXiv:hep-th/0310221 [hep-th].
- [3] M. Alishahiha, E. Silverstein, and D. Tong, Phys.Rev. D70, 123505 (2004), arXiv:hep-th/0404084 [hep-th].
- [4] A. Nicolis, R. Rattazzi, and E. Trincherini, Phys.Rev. D79, 064036 (2009), arXiv:0811.2197 [hep-th].
- [5] G. Dvali, G. Gabadadze, and M. Porrati, Phys.Lett. B485, 208 (2000), arXiv:hep-th/0005016 [hep-th].
- [6] C. de Rham and G. Gabadadze, Phys.Rev. D82, 044020 (2010), arXiv:1007.0443 [hep-th].
- [7] C. de Rham, G. Gabadadze, and A. J. Tolley, Phys.Rev.Lett. 106, 231101 (2011), arXiv:1011.1232 [hep-th].
- [8] E. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. 15, 168 (1929).
- [9] R. Dicke, P. J. E. Peebles, P. Roll, and D. Wilkinson, Astrophys. J. 142, 414 (1965).
- [10] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow, Phys. Rev. 73, 803 (1948).
- [11] S. Dodelson, Modern Cosmology (Amsterdam, Netherlands: Academic Press, 2003).
- [12] V. Mukhanov, Physical Foundations of Cosmology (Cambridge University Press, 2005).
- [13] S. Weinberg, Cosmology (Oxford University Press, 2008).
- [14] H. Mo, F. van den Bosch, and S. White, Galaxy Formation and Evolution (Cambridge University Press, 2010).

- [15] A. H. Guth, Phys. Rev. D23, 347 (1981).
- [16] A. D. Linde, Phys. Lett. B108, 389 (1982).
- [17] B. A. Bassett, S. Tsujikawa, and D. Wands, Rev. Mod. Phys. 78, 537 (2006), astro-ph/0507632.
- [18] D. H. Lyth and A. Riotto, Phys. Rept. 314, 1 (1999), hep-ph/9807278.
- [19] P. Creminelli, M. A. Luty, A. Nicolis, and L. Senatore, JHEP 0612, 080 (2006), arXiv:hep-th/0606090 [hep-th].
- [20] C. Cheung, P. Creminelli, A. L. Fitzpatrick, J. Kaplan, and L. Senatore, JHEP 0803, 014 (2008), arXiv:0709.0293 [hep-th].
- [21] S. Weinberg, Adiabatic Modes in Cosmology, arXiv:astro-ph/0302326v1 [astro-ph].
- [22] J. Schwinger, J. Math. Phys. 2, 407 (1961).
- [23] L. V. Keldysh, Journal of Experimental and Theoretical Physics 20, 1018 (1965). [Zh. Eksp. Teor. fiz. 47, 1515 (1964). Sov. Phys. JETP 20, 1018 (1965)]
- [24] J. M. Maldacena, JHEP 0305, 013 (2003), arXiv:astro-ph/0210603 [astro-ph].
- [25] M. Alvarez, T. Baldauf, J. R. Bond, N. Dalal, R. de Putter, et al., (2014), arXiv:1412.4671 [astro-ph.CO].
- [26] P. Ade et al. (Keck Array and BICEP2 Collaborations), BICEP2 / Keck Array VI: Improved Constraints On Cosmology and Foregrounds When Adding 95GHz Data From Keck Array, arXiv:submit/1390175 [astro-ph.CO]
- [27] P. Ade et al. (Planck Collaboration), (2015), arXiv:1502.01592 [astro-ph.CO].
- [28] D. Pirtskhalava, L. Santoni, E. Trinchlerini, and F. Vernizzi, (2015), arXiv:1505.00007 [hep-th].
- [29] M. A. Luty, M. Porrati, and R. Rattazzi, JHEP 0309, 029 (2003), arXiv:hep-th/0303116 [hep-th].

- [30] G. Gubitosi, F. Piazza, and F. Vernizzi, JCAP 1302, 032 (2013), arXiv:1210.0201 [hep-th].
- [31] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, Essential building blocks of dark energy, arXiv:1304.4840 [hep-th]
- [32] P. Creminelli, G. D'Amico, M. Musso, J. Norena, and E. Trincherini, JCAP 1102, 006 (2011), arXiv:1011.3004 [hep-th].
- [33] C. Burrage, C. de Rham, D. Seery, and A. J. Tolley, JCAP 1101, 014 (2011), arXiv:1009.2497 [hep-th].
- [34] S. Mizuno and K. Koyama, Phys.Rev. D82, 103518 (2010), arXiv:1009.0677 [hep-th].
- [35] X. Chen, M.-x. Huang, S. Kachru, and G. Shiu, JCAP 0701, 002 (2007), arXiv:hep-th/0605045 [hep-th].
- [36] D. Baumann and D. Green, JCAP 1109, 014 (2011), arXiv:1102.5343 [hep-th].
- [37] L. Senatore, K. M. Smith, and M. Zaldarriaga, JCAP 1001, 028 (2010), arXiv:0905.3746 [astro-ph.CO].
- [38] D. Baumann, D. Green, and R. A. Porto, (2014), arXiv:1407.2621 [hep-th].
- [39] A. Addams, N. Arkani-Hamed, S. Dubovsky, A. Nicolis, and R. Rattazzi, Causality, Analyticity and an IR Obstruction to UV Completion, (2006), arXiv:0602178 [hep-th].