



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea

FENOMENI DISPERSIVI E
BUONA POSITURA PER NLS
IN DIMENSIONE 1

Relatore:
Prof. VLADIMIR GEORGIEV

Candidato:
MATTEO NINCHERI

Controrelatore:
Prof. MARCO GHIMENTI

ANNO ACCADEMICO 2014-2015

Sommaro

Nella meccanica quantistica l'equazione di Schrödinger è molto importante in quanto descrive come lo stato quantico (di solito atomi, molecole e particelle subatomiche) di un sistema cambi con il tempo. In altre parole questa equazione è l'analoga della legge di Newton per la meccanica quantistica.

L'obiettivo di questo elaborato è verificare le stime dispersive e la buona positura del problema di Cauchy associato all'equazione 1-dimensionale di Schrödinger con non linearità cubica, senza potenziale ($V = 0$)

$$\begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = \pm |u|^2 u \\ u(t_0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

Ci sono molti autori che hanno studiato questo tipo di problema, anche nella forma più generale in dimensione n e con una non linearità di potenza p , ovvero

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u + \lambda |u|^{p-1} u \\ u(t_0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (2)$$

con $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, verificando l'esistenza locale e globale della soluzione, come ad esempio Baillon-Cazenave-Figueira [1], Ginibre-Velo [5], [6], [7], [8], Hayashi-Nakamitsu-Tsutsumi [11], Lin-Strauss [13], Pecher-von Wahl [15], Strauss [17], Tsutsumi-Hayashi [20]. Consideriamo $\alpha(n) = \infty$ se $n = 1$ o $n = 2$ e $\alpha(n) = (n+2)/(n-2)$ se $n \geq 3$. In [1] Baillon, Cazenave e Figueira dimostrano che se $1 \leq n \leq 3$, $1 < p < \alpha(n)$ e $\lambda > 0$, (2) ha un'unica soluzione globale forte $u(t) \in C(\mathbb{R}, H_x^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(\mathbb{R}, L_x^2(\mathbb{R}^n))$ per ogni $u_0 \in H_x^2(\mathbb{R}^n)$. In [5] - [7] Ginibre e Velo mostrano che se $1 < p < \alpha(n)$ e $\lambda > 0$ o $1 < p < 1+4/n$ e $\lambda < 0$, (2) ha un'unica soluzione globale debole $u(t) \in C(\mathbb{R}, H_x^1(\mathbb{R}^n))$ per ogni $u_0 \in H_x^1(\mathbb{R}^n)$. In [17] Strauss mostra che se $\lambda > 0$ e $p > 1$, (2) ha almeno una soluzione globale debole $u(t) \in L^\infty(\mathbb{R}, H_x^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^n))$ per ogni $u_0 \in H_x^1(\mathbb{R}^n) \cap L^{p+1}(\mathbb{R}^n)$. In [20] Tsutsumi e Hayashi discutono l'esistenza unica globale della soluzione classica di (2) con $\lambda > 0$ (vedere anche Pecher e von Wahl [15]). Un approfondimento dell'argomento trattato può essere la verifica della buona positura dell'equazione NLS con potenziale non nullo, ad esempio Cuccagna-Georgiev-Visciglia [4] e Weder [21], oppure lo studio dell'equazione NLS con una non linearità del tipo $|u|^{p-1}u + |u|^{q-1}u$, ad esempio Ozawa [14].

Nella maggior parte dei lavori, la soluzione di (2) viene costruita nello spazio $H_x^1(\mathbb{R}^n)$ poiché la norma coincide con l'energia e le dimostrazioni sono basate sulla legge di conservazione dell'energia. Noi, invece, cercheremo di costruire la soluzione sullo spazio $L_x^2(\mathbb{R}^n)$. I risultati di questo elaborato sono già stati ottenuti, ad esempio da Tsutsumi [19], il quale dimostra [19, Theorem 1.1] che per $1 < p < 1 + 4/n$, per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ e per ogni $u_0 \in L_x^2(\mathbb{R}^n)$ (possibilmente che non stia in $H_x^1(\mathbb{R}^n)$) esiste un'unica soluzione globale di

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\Delta u + \lambda|u|^{p-1}u \\ u(t_0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

tale che $u(t) \in C(\mathbb{R}, L_x^2(\mathbb{R}^n)) \cap L_{loc}^r(\mathbb{R}, L_x^{p+1}(\mathbb{R}^n))$. Una soluzione di questo tipo, ovvero tale che $u_0 \in L_x^2(\mathbb{R}^n)$ e $u_0 \notin H_x^1(\mathbb{R}^n)$, è chiamata soluzione- L^2 . In questo articolo ci restringeremo alla non linearità cubica in dimensione 1 ($p = 3$ e $n = 1$, quindi rientriamo nel range di $1 < p < 1 + 4/n$) e verificheremo l'esistenza globale per dati iniziali piccoli. Anche se riotteniamo lo stesso risultato di [19] ed in un caso particolare, la nostra strategia si discosta in parte da quella applicata da Tsutsumi, mettendo in luce un nuovo approccio. Infatti in [19] la dimostrazione si basa sulla legge di conservazione della norma L_x^2 , mentre la nostra usufruisce del teorema massimale di Christ-Kiselev [3] e del lemma T^*T di Ginibre-Velo [9] per applicare le stime di Strichartz. In entrambi i lavori, comunque, molta importanza viene data all'applicazione di queste ultime stime.

Questo elaborato verte su tre argomenti:

1. l'applicazione delle stime di Strichartz per l'equazione NLS in dimensione 1 attraverso il teorema massimale di Christ-Kiselev e l'argomento T^*T di Ginibre-Velo;
2. il risultato della trasformazione Pseudo-Conforme e l'invarianza delle stime di Strichartz;
3. mostreremo un esperimento numerico per la risoluzione dell'equazione (1).

Più in dettaglio nella prima e seconda sezione mostreremo due risultati interessanti, che formeranno la base per la verifica delle stime dispersive: il teorema massimale di Christ-Kiselev [3] e il lemma T^*T di Ginibre-Velo [9]. Il primo teorema afferma l'equivalenza della norma dell'operatore massimale $T_R(f)(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |T(f \cdot \chi_{y_n})(x)|$ con quella di T , operatore lineare limitato da L^q a L^p , dove $\{y_n \text{ t.c. } n \in \mathbb{Z}\}$ è una successione di sottoinsiemi di \mathbb{R} tale

che $y_n \subset y_{n+1} \forall n$, con la condizione $q < p$. A fine sezione mostreremo un controesempio quando $p = q = 2$ in cui non vale il teorema. Nella seconda sezione enunciamo il lemma di Ginibre-Velo, e in particolare il loro corollario, il quale afferma che, sotto opportune ipotesi, possiamo estendere un operatore limitato da uno spazio di Banach X ad un altro Y , senza che ci siano legami fra questi spazi, con molta semplicità. Inoltre mostreremo un'applicazione di questo risultato all'equazione NLS, completando con il teorema di Riesz-Thorin e la disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev i calcoli necessari per raggiungere le stime che ci interesseranno.

Combinando insieme entrambi i risultati, nella terza parte riusciremo ad applicare le stime di Strichartz per u , soluzione di (2), in quanto formalmente possiamo riscriverla in forma integrale

$$u(t, x) = U(t)u_0(x) - i \int_0^t U(t - \tau)f(u(\tau, x))d\tau \quad (4)$$

dove $U(t)$ è il gruppo unitario ad un parametro in L_x^2 associato all'operatore laplaciano Δ e $u_0(x)$ è il dato iniziale. Il teorema massimale di Christ-Kiselev ci permetterà di stimare la norma di u con quella dell'operatore $I(u) = U(t)u_0(x) - i \int_{\mathbb{R}} U(t - \tau)f(u(\tau, x))d\tau$, la quale, per il corollario di Ginibre-Velo, è limitata su opportuni spazi di Banach, definiti come segue: $L_t^q(I_t, L_x^r) = \{f : I_t \rightarrow L_x^r \text{ t.c. } f \in L_x^r(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|f\|_r(t) \in L_t^q(I_t)\}$, con I_t intervallo di \mathbb{R} . Applicheremo quindi le stime di Strichartz per l'equazione non lineare di Schrödinger in dimensione n , mettendo in evidenza alla fine il caso $n = 1$.

Nella quarta sezione verrà illustrata la trasformazione Pseudo-Conforme che manda u , soluzione dell'equazione NLS, in U , che è anch'essa soluzione di un'altra equazione di Schrödinger. In particolare mostreremo che le stime di Strichartz sono invarianti per questa trasformazione. Applicheremo la trasformazione Pseudo-Conforme per dimostrare l'esistenza globale per dati piccoli di (1), che sarà svolta nella quinta sezione. In quest'ultima mostriamo prima di tutto che esiste unica la soluzione di (1) o locale per ogni dato iniziale o per qualsiasi intervallo di tempo con dati iniziali piccoli. La strategia è quella di applicare il teorema delle contrazioni. Interessante sarà osservare che l'ampiezza dell'intervallo del tempo, δ , dipenda dalla norma L_x^2 del dato iniziale, che indicheremo con R , e che $\delta(R) \rightarrow 0$ se $R \rightarrow +\infty$ e $\delta(R) \rightarrow +\infty$ se $R \rightarrow 0$.

In conclusione mostreremo una simulazione numerica per l'equazione (1), considerando come dato iniziale una Gaussiana. Osserveremo come varia la stabilità della soluzione variando i dati iniziali e la differenza con la soluzione dell'equazione lineare di Schrödinger.

Indice

1	Teorema Massimale di Christ-Kiselev	2
2	Lemma T^*T di Ginibre-Velo	11
3	L'equazione di Schrödinger	19
4	Trasformazione Pseudo-Conforme	22
5	Esistenza e Unicità della soluzione per NLS	28
6	Simulazione numerica	35

1 Teorema Massimale di Christ-Kiselev

Presentiamo il risultato del Teorema di Christ e Kiselev su \mathbb{R} , con T operatore lineare da $L^q(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$, $q < p$. La norma dell'operatore T , in quanto $\mathcal{L}(L^q(\mathbb{R}), L^p(\mathbb{R}))$, spazio degli operatori lineari da $L^q(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$, è normato, si denota con

$$\|T\|_{q,p} = \sup_{f \in L^q(\mathbb{R})} \frac{\|Tf\|_p}{\|f\|_q}.$$

Indichiamo con χ_E , dove E è un sottoinsieme di \mathbb{R} , la funzione indicatrice tale che $\chi_E(x) = 1$ se $x \in E$ e 0 altrimenti. Consideriamo inoltre le successioni di sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R} di questa forma: $\{y_n \text{ t.c. } n \in \mathbb{Z}\}$ tale che $y_n \subset y_{n+1} \forall n$. Non è detto che $\mathbb{R} = \cup_n y_n$, ovvero che gli y_n siano un ricoprimento di \mathbb{R} . Un esempio di questo tipo di successioni è fornito dagli insiemi della forma $y_n = \{(-\infty, n] \text{ t.c. } n \in \mathbb{Z}\}$. Segue dalla costruzione che $y_n \subset y_{n+1} \forall n$ e in questo caso $\mathbb{R} = \cup_n y_n$. A questo punto diamo la seguente definizione, centro dell'argomento di questa sezione:

Definizione 1. *Ad ogni successione di insiemi misurabili $\{y_n\}$ definiti precedentemente ed ad ogni operatore $T : L^q(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ può essere associato un **operatore massimale**, che è definito su $L^q(\mathbb{R})$, in questo modo:*

$$T_R(f)(x) = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |T(f \cdot \chi_{y_n})(x)|.$$

L'operatore è ben definito. Infatti si ha $(f \cdot \chi_{y_n})(y) = f(y)$ se $y \in y_n$ e 0 altrimenti, e $f \cdot \chi_{y_n}$ è ancora un elemento di $L^q(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f \cdot \chi_{y_n}|^q = \int_{y_n} |f|^q \leq \int_{\mathbb{R}} |f|^q.$$

Lo scopo dell'elaborato è quello di mostrare che la norma dell'operatore lineare è *equivalente* a quella dell'operatore massimale. Una prima disuguaglianza è semplice: $\|T\|_{q,p} \leq \|T_R\|_{q,p}$. Infatti

$$T_R f = \sup_n |T(f \cdot \chi_{y_n})| \geq |T(f \cdot \chi_{\mathbb{R}})| = |Tf|$$

e possiamo riscrivere questa relazione con le norme.

Per dimostrare l'altra disuguaglianza, abbiamo bisogno di un lemma di decomposizione dello spazio misurabile:

Lemma 1. *Sia (\mathbb{R}, λ) lo spazio misurabile, con λ la misura di Lebesgue. Fissata $f \in L^q(\mathbb{R})$ t.c. $\|f\|_q = 1$, si definisce la misura di probabilità $\lambda_f(E) = \int_E |f(y)|^q dy$, con $E \subseteq \mathbb{R}$ insieme misurabile. Allora per ogni successione di*

sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R} della forma $\{y_n | n \in \mathbb{Z}\}$ tale che $y_n \subset y_{n+1} \forall n$, $\exists \{B_j^m\}$ sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R} , con $m = 0, 1, 2, \dots$ e $1 \leq j \leq 2^m$, tali che:

1. $\forall m \{B_j^m, 1 \leq j \leq 2^m\}$ è partizione disgiunta di sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}
2. $\forall B_j^m, B_j^m = B_{j_1}^{m+1} \cup B_{j_2}^{m+1}$
3. $\lambda_f(B_j^m) = 2^{-m}, \forall m, j$
4. ogni y_n può essere decomposto come (eccetto per insiemi di misura nulla o vuoti) unione disgiunta finita o infinita numerabile di B_j^m t.c. $\forall m$ posso scegliere al massimo un solo B_j^m :

$$y_n = \bigcup_{i \geq 1} B_{j_i}^{m_i}, \text{ con } m_1 < m_2 < \dots$$

Dimostrazione.

Supponiamo $\forall n$, senza perdere di generalità, $\lambda_f(y_n) \geq 0$ e $\lambda_f(y_{n+1} \setminus y_n) \geq 0$. Vogliamo costruire una funzione misurabile $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ che soddisfi queste proprietà:

- (a) $\lambda_f(\varphi^{-1}([0, t])) = t$ per ogni $t \in [0, 1]$;
- (b) $y_n = \varphi^{-1}([0, \lambda_f(y_n)))$.

In particolare $\lambda_f(\varphi^{-1}\{t\}) = 0 \forall t$, ovvero le controimmagini di punti sono insiemi λ_f -nulli.

Definiamo $\varphi(y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{R} \setminus \cup_n y_n$ e $\varphi(y) = 0$ per ogni $y \in \cap_n y_n$. Ogni punto rimanente $y \in \mathbb{R}$, appartiene a $\tilde{y}_n = y_n \setminus y_{n-1}$, per un unico indice n . Poiché su (\mathbb{R}, λ_f) si può applicare una proprietà di divisibilità, nel senso che: per ogni $S \subset \mathbb{R}$ misurabile e $\forall t \in [0, \lambda_f(S))$ esiste un sottoinsieme misurabile $S' \subset S$ tale che $\lambda_f(S') = t$. Consideriamo $S = y_n$ e $S' = K$ un sottoinsieme di y_n tale che contenga y_{n-1} e $y \in \tilde{y}_n$, ovvero $K \cap \tilde{y}_n \neq \emptyset$. Allora abbiamo che $\lambda_f(K) = t < \lambda_f(y_n)$. Applicando di nuovo la proprietà di divisibilità, con $S = K$ e $S' = y_{n-1}$, osserviamo che $\lambda_f(y_{n-1}) < \lambda_f(K)$, quindi $\lambda_f(y_{n-1}) < \lambda_f(K) < \lambda_f(y_n)$. Allora è possibile definire $\varphi : \tilde{y}_n \rightarrow [\lambda_f(y_{n-1}), \lambda_f(y_n))$ in modo che $\lambda_f(\varphi^{-1}([\lambda_f(y_{n-1}), t])) = t - \lambda_f(y_{n-1})$ per ogni $t \in [\lambda_f(y_{n-1}), \lambda_f(y_n))$. Esistono questi t poiché abbiamo supposto per ogni n che $\lambda_f(y_n) \geq 0$ e che $\lambda_f(y_{n+1} \setminus y_n) \geq 0$. La funzione così costruita $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ha entrambe le proprietà richieste:

$$(a) \lambda_f\left(\varphi^{-1}([0, t])\right) = t \text{ per ogni } t \in [0, 1]$$

$$(b) y_n = \varphi^{-1}\left([0, \lambda_f(y_n))\right).$$

Infatti, per la prima proprietà, fissato $t \in [0, 1]$, esiste un unico $N \in \mathbb{N}$ tale che $t \in [\lambda_f(y_N), \lambda_f(y_{N+1}))$, quindi possiamo decomporre l'intervallo $[0, t]$ come unione disgiunta di $[\lambda_f(y_N), t) \cup_{k \leq N} [\lambda_f(y_{k-1}), \lambda_f(y_k))$. Quindi, per come abbiamo costruito φ si ottiene

$$\begin{aligned} \lambda_f\left(\varphi^{-1}([0, t])\right) &= \lambda_f\left(\varphi^{-1}\left([\lambda_f(y_N), t) \cup_{k \leq N} [\lambda_f(y_{k-1}), \lambda_f(y_k))\right]\right) = \\ &= \lambda_f\left(\varphi^{-1}([\lambda_f(y_N), t])\right) + \sum_{k \leq N} \lambda_f\left(\varphi^{-1}([\lambda_f(y_{k-1}), \lambda_f(y_k)])\right) = \\ &= t - \lambda_f(y_N) + \sum_{k \leq N} (\lambda_f(y_k) - \lambda_f(y_{k-1})) = t. \end{aligned}$$

La seconda proprietà segue dalla costruzione di φ .

Possiamo a questo punto definire

$$B_j^m = \varphi^{-1}\left([(j-1)2^{-m}, j2^{-m})\right)$$

con $m = \{1, 2, 3, \dots\}$ e $j = \{1, 2, 3, \dots, 2^m\}$. Per costruzione i B_j^m rispettano le prime tre proprietà richieste del lemma. Infatti, per ogni m fissato, $B_j^m \cap B_i^m = \emptyset$ per ogni $j \neq i$, poiché controimmagine di disgiunti è disgiunta, e ricoprono tutto \mathbb{R} in quanto i $[(j-1)2^{-m}, j2^{-m})$, con $j = \{1, 2, 3, \dots, 2^m\}$, ricoprono $[0, 1]$: se per assurdo, per ogni j esistesse un $y \notin B_j^m$, allora

$$\begin{aligned} y \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{2^m} B_j^m &= \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^{2^m} \varphi^{-1}\left([(j-1)2^{-m}, j2^{-m})\right) = \\ \mathbb{R} \setminus \varphi^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{2^m} [(j-1)2^{-m}, j2^{-m})\right) &= \mathbb{R} \setminus \varphi^{-1}([0, 1]) = \emptyset. \end{aligned}$$

Per ogni m fissato, $B_j^m = B_{j_1}^{m+1} \cup B_{j_2}^{m+1}$: infatti

$$\begin{aligned} B_j^m &= \varphi^{-1}\left([(j-1)2^{-m}, j2^{-m})\right) = \\ \varphi^{-1}\left([(2j-2)2^{-m-1}, (2j-1)2^{-m-1})\right) \cup \varphi^{-1}\left([(2j-1)2^{-m-1}, 2j2^{-m-1})\right) &= \\ B_{j_1}^{m+1} \cup B_{j_2}^{m+1}. \end{aligned}$$

Per ogni m e j , i B_j^m hanno tutti misura 2^{-m} : infatti per le proprietà della funzione misurabile φ , si ha

$$\begin{aligned}\lambda_f(B_j^m) &= \lambda_f\left(\varphi^{-1}\left([(j-1)2^{-m}, j2^{-m})\right)\right) = \\ &= \lambda_f\left(\varphi^{-1}\left([0, j2^{-m})\right)\right) - \lambda_f\left(\varphi^{-1}\left([0, (j-1)2^{-m})\right)\right) = \\ &= j2^{-m} - (j-1)2^{-m} = 2^{-m}.\end{aligned}$$

Ci manca da verificare l'ultima proprietà. Consideriamo per ogni n la decomposizione binaria di $\lambda_f(y_n) = \sum_{m \geq 1} r_m 2^{-m}$, con $r_m = 1$ o 0 . Posso fare questa decomposizione diadica perché $\{\sum_{m=1}^N r_m 2^{-m} | N \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R} \cap [0, 1]$ densi: infatti per ogni $q \in \mathbb{Q}$ abbiamo $|q - \sum_{m=1}^N r_m 2^{-m}| \leq 2^{-N}$ e \mathbb{Q} denso in \mathbb{R} . Questa decomposizione può non essere unica, infatti $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ oppure uguale a $\sum_{m \geq 2} 2^{-m}$; ovvero nella prima decomposizione abbiamo scelto $r_1 = 1$ e $r_m = 0$ per $m \neq 1$, per la seconda $r_m = 1$ per $m \neq 0, 1$ e $r_0 = r_1 = 0$. Se capita che esistano più di una decomposizione, se ne sceglie una. In questo modo abbiamo una determinata decomposizione dell'intervallo $[0, \lambda_f(y_n))$ in unione di intervalli adiacenti diadici disgiunti, chiusi a destra e aperti a sinistra, di lunghezza $2^{-m_1}, 2^{-m_2}, \dots$ dove gli m_i sono presi se $r_{m_i} = 1$. Applicando φ^{-1} a ciascuno di questi intervalli disgiunti otterremo alcuni degli insiemi $B_{j_i}^{m_i}$. Ricordandoci della proprietà (b) di φ , ci siamo costruiti la decomposizione richiesta di $y_n = \cup_{i \geq 1} B_{j_i}^{m_i}$ di insiemi disgiunti. \square

Osservazione 1. Possiamo sostituire al posto di \mathbb{R} , un qualsiasi intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Possiamo ora enunciare il seguente risultato:

Teorema 1 (Teorema Massimale di Christ-Kiselev).

Sia $1 \leq q, p \leq +\infty$ e consideriamo un operatore lineare continuo $T : L^q(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$. Per ogni sottoinsieme della forma $\{y_n \text{ t.c. } n \in \mathbb{Z}\}$ di \mathbb{R} , con $y_n \subset y_{n+1} \forall n$ e sotto l'ipotesi $q < p$ l'operatore T_R è limitato. In particolare, vale

$$\|T_R\|_{q,p} \leq (1 - 2^{-(q^{-1} - p^{-1})})^{-1} \|T\|_{q,p}.$$

Osservazione 2. Possiamo anche in questo caso considerare al posto di \mathbb{R} un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

Di qui in avanti chiameremo $C_{q,p}$ la costante del teorema. Basta verificare che $\forall N \in \mathbb{Z}$, l'operatore lineare $T^N(f)(x) = T(f \cdot \chi_{y_N})(x)$ è limitato e soddisfa:

$$\|T^N f\|_p \leq C_{q,p} \|T\|_{q,p}$$

per ogni $f \in L^q(\mathbb{R})$ tale che $\|f\|_q = 1$. Fissiamo quindi una $f \in L^q(\mathbb{R})$ con $\|f\|_q = 1$. In questo modo possiamo considerare λ_f misura di probabilità costruita in precedenza e applicare il lemma di decomposizione dello spazio misurabile (\mathbb{R}, λ) . Quindi $\exists B_j^m$ definiti dal lemma, tali che $y_n = \cup_{i \geq 1} B_{j_i}^{m_i}$. Poiché la decomposizione non è unica, se ne sceglie una per ogni n .

Sia $f_j^m = f \cdot \chi_{B_j^m}$, allora

$$f \cdot \chi_{y_n} = \sum_{i \geq 1} f \cdot \chi_{B_{j_i}^{m_i}} = \sum_{i \geq 1} f_{j_i}^{m_i}.$$

Quindi per ogni $N \in \mathbb{Z}$ si ha

$$T^N(f) = T(f \cdot \chi_{y_N}) = T\left(\sum_{i \geq 1} f_{j_i}^{m_i}\right) = \sum_{i \geq 1} T f_{j_i}^{m_i}$$

per la linearità di T .

Possiamo allora calcolare, per la limitatezza di T

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \geq 1} T f_{j_i}^{m_i} \right\|_p^p &\leq \sum_{i \geq 1} \|T f_{j_i}^{m_i}\|_p^p \leq \|T\|_{q,p}^p \sum_{i \geq 1} \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^p = \\ &\|T\|_{q,p}^p \sum_{i \geq 1} \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^{p-q} \cdot \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^q. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^{p-q} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f_{j_i}^{m_i}(y)|^q dy \right)^{\frac{p-q}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |(f \cdot \chi_{B_{j_i}^{m_i}})(y)|^q dy \right)^{\frac{p-q}{q}} = \\ &\left(\int_{B_{j_i}^{m_i}} |f(y)|^q dy \right)^{\frac{p-q}{q}} = [\lambda_f(B_{j_i}^{m_i})]^{\frac{p-q}{q}} = 2^{-m_i \frac{p-q}{q}}. \end{aligned}$$

Sostituendo e considerando che alcuni degli m_i potrebbero essere nulli, otteniamo

$$\|T\|_{q,p}^p \sum_{i \geq 1} \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^{p-q} \cdot \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^q = \|T\|_{q,p}^p \sum_{i \geq 1} 2^{-m_i \frac{p-q}{q}} \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^q \leq$$

$$\|T\|_{q,p}^p \sum_{i \geq 1} \sum_{m \geq 1} 2^{-m \frac{p-q}{q}} \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^q = \|T\|_{q,p}^p \sum_{m \geq 1} 2^{-m \frac{p-q}{q}} \sum_{i \geq 1} \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^q$$

consideriamo adesso $\sum_{i \geq 1} \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^q$, ricordando che i $B_{j_i}^{m_i}$ che decompongono y_n sono disgiunti

$$\sum_{i \geq 1} \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^q = \sum_{i \geq 1} \|f \cdot \chi_{B_{j_i}^{m_i}}\|_q^q = \left\| \sum_{i \geq 1} |f| \cdot \chi_{B_{j_i}^{m_i}} \right\|_q^q = \| |f| \cdot \chi_{y_n} \|_q^q \leq \|f\|_q^q = 1.$$

Quindi otteniamo

$$\|T\|_{q,p}^p \sum_{m \geq 1} 2^{-m \frac{p-q}{q}} \sum_{i \geq 1} \|f_{j_i}^{m_i}\|_q^q \leq \|T\|_{q,p}^p \sum_{m \geq 1} \left(2^{-\frac{p-q}{q}}\right)^m$$

la quale serie geometrica converge in quanto per ipotesi $q < p$. Mettendo insieme i risultati, otteniamo:

$$\|T^N f\|_p = \left\| \sum_{i \geq 1} T f_{j_i}^{m_i} \right\|_p \leq \|T\|_{q,p} \sum_{m \geq 1} \left(2^{-\frac{p-q}{pq}}\right)^m = \|T\|_{q,p} \left(1 - 2^{-\frac{p-q}{pq}}\right)^{-1}$$

che è la costante cercata. Per arbitrarietà della scelta di N otteniamo che

$$\|T_R f\|_p \leq (1 - 2^{-(q^{-1}-p^{-1})})^{-1} \|T\|_{q,p}$$

per ogni $f \in L^q(\mathbb{R})$, con $\|f\|_q = 1$ e quindi

$$\|T_R\|_{q,p} \leq (1 - 2^{-(q^{-1}-p^{-1})})^{-1} \|T\|_{q,p}.$$

□

Abbiamo come corollario i seguenti risultati

Corollario 1.

Sia $1 \leq q < p \leq +\infty$ e consideriamo un operatore lineare continuo $T : L^q(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ di questa forma: $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$, con K localmente integrabile. Sia

$$T_R f(x) = \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \int_{y < s} K(x,y)f(y)dy \right|$$

allora

$$\|T_R\|_{q,p} \leq (1 - 2^{-(q^{-1}-p^{-1})})^{-1} \|T\|_{q,p}.$$

Dimostrazione.

Possiamo riscrivere $T_R f(x) = \sup_{s \in \mathbb{R}} |T(\chi_{y_s} f)(x)|$ con $y_s = \{(-\infty, s] \mid s \in \mathbb{R}\}$. Poiché il teorema massimale di Christ-Kiselev vale per ogni successione $\{y_n \text{ t.c. } n \in \mathbb{Z}\}$ di \mathbb{R} , con $y_n \subset y_{n+1} \forall n$, allora posso estenderlo al caso di $y_q = \{(-\infty, q] \mid q \in \mathbb{Q}\}$ e per densità a $y_s = \{(-\infty, s] \mid s \in \mathbb{R}\}$. Infatti per ogni fissato $Q \in \mathbb{Q}$, considero $T^Q(f)(x) = T(f \cdot \chi_{y_Q})(x)$, con $y_Q = (-\infty, Q]$, che è limitato per il teorema massimale:

$$\|T^Q\|_{q,p} \leq (1 - 2^{-(q^{-1}-p^{-1})})^{-1} \|T\|_{q,p}$$

poiché posso trovare $\{y_n \text{ t.c. } n \in \mathbb{Z}\}$ successione di sottoinsiemi di y_Q , con $y_n \subset y_{n+1} \forall n$. \square

Corollario 2.

Sia $1 \leq q < p \leq +\infty$ e consideriamo un operatore lineare continuo $T : L^q(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ di questa forma: $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$, con K localmente integrabile. Sia

$$\tilde{T}f(x) = \int_{y < x} K(x,y)f(y)dy$$

allora

$$\|\tilde{T}\|_{q,p} \leq (1 - 2^{-(q^{-1}-p^{-1})})^{-1} \|T\|_{q,p}.$$

Dimostrazione.

Per costruzione $\left| \int_{y < x} K(x,y)f(y)dy \right| \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \int_{y < s} K(x,y)f(y)dy \right| \forall x \in \mathbb{R}$ quindi

$$\|\tilde{T}f(x)\|_p \leq \|T_R f(x)\|_p \leq (1 - 2^{-(q^{-1}-p^{-1})})^{-1} \|T\|_{q,p}$$

per ogni $f \in L^q(\mathbb{R})$ con $\|f\|_q = 1$. \square

Corollario 3.

Sia $1 \leq q < p \leq +\infty$ e consideriamo un operatore lineare continuo $T : L^q(\mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R})$ di questa forma: $Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$, con K localmente integrabile. Sia

$$\tilde{T}f(x) = \int_0^x K(x,y)f(y)dy$$

allora

$$\|\tilde{T}\|_{q,p} \leq (1 - 2^{-(q^{-1}-p^{-1})})^{-1} \|T\|_{q,p}.$$

Dimostrazione.

Per costruzione

$$\left| \int_{0 < y < x} K(x, y) f(y) dy \right| \leq \left| \int_{y < x} K(x, y) f(y) dy \right| \leq \sup_{s \in \mathbb{R}} \left| \int_{y < s} K(x, y) f(y) dy \right|$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ quindi

$$\|\tilde{T}f(x)\|_p \leq \|T_R f(x)\|_p \leq (1 - 2^{-(q^{-1} - p^{-1})})^{-1} \|T\|_{q,p}$$

per ogni $f \in L^q(\mathbb{R})$ con $\|f\|_q = 1$. \square

Concludiamo la prima sezione mostrando un controesempio del teorema massimale nel caso in cui $p = q$. Consideriamo l'operatore di Hilbert:

$$H(f)(x) = Pv \left(\frac{1}{x} \right) * f,$$

$$H : L^p \rightarrow L^p.$$

Per semplicità prendiamo in esame il caso $p = 2$. Ciò che vogliamo dimostrare è che per ogni $f \in L^2$

$$\|Hf\|_{L^2} \leq C\|f\|_{L^2} \not\Rightarrow \|H_R f\|_{L^2} \leq C_R\|f\|_{L^2}.$$

Sia

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

definiamo

$$H_R(f)(x) = \frac{\Theta(x)}{x} * f.$$

Per la proprietà della trasformata di Fourier sulla convoluzione, otteniamo:

$$\widehat{H_R(f)}(\xi) = \left(\widehat{\frac{\Theta(x)}{x} * f} \right) (\xi) = \left(\widehat{\frac{\Theta(x)}{x}} \right) (\xi) \widehat{f}(\xi).$$

$$\left(\widehat{\frac{\Theta(x)}{x}} \right) (\xi) = -\gamma + i\frac{\pi}{2} - \ln(\xi + i0)$$

con la costante $\gamma = -\Gamma'(1)$ ¹ (vedere [2, p.103]).

¹Dove Γ è la funzione gamma di Eulero e γ è la costante di Eulero-Mascheroni $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$.

Consideriamo una successione f_n t.c. $\|f_n\|_{L^2} = \|\widehat{f}_n\|_{L^2} = 1$ e

$$\widehat{f}_n(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \in [n, n+1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che:

$$\|H_R f_n\|_{L^2} = \|\widehat{H_R f_n}\|_{L^2} \approx \|\ln(\xi)\widehat{f}_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

quindi non esiste per ogni $f \in L^2$ una costante $C_R > 0$ tale che $\|H_R f\|_{L^2} \leq C_R \|f\|_{L^2}$.

2 Lemma T^*T di Ginibre-Velo

Riportiamo l'argomento del T^*T come riportato nell'articolo di Ginibre-Velo.

Consideriamo con T l'operatore lineare da $\mathcal{D} \subset X$ spazio vettoriale denso in spazio di Banach a H spazio di Hilbert, e con T^* l'applicazione aggiunta da H a $\mathcal{D}^* \supset X^*$, con \mathcal{D}^* e X^* lo spazio duale rispettivamente di \mathcal{D} e X e. Si denota con $\varphi(f) = \langle \varphi, f \rangle_{\mathcal{D}}$ l'accoppiamento di dualità fra \mathcal{D}^* e \mathcal{D} , con $\varphi \in \mathcal{D}^*$ e $f \in \mathcal{D}$, considerando lineare in f e antilineare in φ .

Lemma 2 (Lemma T^*T di Ginibre-Velo). *Sia H spazio di Hilbert, X uno spazio di Banach e X^* il suo duale, e \mathcal{D} spazio vettoriale denso in X . Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}, H)$ e $T^* \in \mathcal{L}(H, \mathcal{D}^*)$ la sua aggiunta, definita da*

$$(T^*v)(f) = \langle T^*v, f \rangle_{\mathcal{D}} = \langle v, Tf \rangle_H$$

per ogni $f \in \mathcal{D}$ e per ogni $v \in H$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ antilineare nel primo argomento. Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:

(1) esiste un numero positivo reale a tale che per ogni $f \in \mathcal{D}$

$$\|Tf\|_H \leq a\|f\|_X$$

(2) $Im(T^*) \subset X^*$ e esiste un numero positivo reale a tale che per ogni $v \in H$

$$\|T^*v\|_{X^*} \leq a\|v\|_H$$

(3) $Im(T^*T) \subset X^*$ e esiste un numero positivo reale a tale che per ogni $f \in \mathcal{D}$

$$\|T^*Tf\|_{X^*} \leq a^2\|f\|_X.$$

Il numero a è lo stesso per tutte e tre le condizioni. Se una delle tre, e quindi tutte, le condizioni sono rispettate, allora gli operatori T e T^*T si possono estendere per continuità a operatori limitati da X a H e da X a X^* rispettivamente.

Dimostrazione.

Come abbiamo già osservato se $\mathcal{D} \subset X$, spazio vettoriale denso in spazio di Banach, allora $X^* \subset \mathcal{D}^*$, sottospazio. Verifichiamo il lemma:

(1) \Rightarrow (2). Sia $v \in H$, allora per ogni $f \in \mathcal{D}$ si ha $(T^*v)(f) = \langle T^*v, f \rangle_{\mathcal{D}} = \langle v, Tf \rangle_H$, quindi $T^*v \in \mathcal{D}^*$, ma in particolare vale per ogni $f \in X$, quindi $T^*v \in X^*$ e $Im(T^*) \subset X^*$. Per quanto riguarda la disuguaglianza

$$|(T^*v)(f)| = |\langle T^*v, f \rangle_{\mathcal{D}}| = |\langle v, Tf \rangle_H| \leq \|v\|_H \|Tf\|_H \leq a\|v\|_H \|f\|_X$$

quindi per $\|f\|_X = 1$ abbiamo che per ogni $v \in H$

$$\|T^*v\|_{X^*} \leq a\|v\|_H.$$

(2) \Rightarrow (1). Sia $f \in \mathcal{D}$, allora per ogni $v \in H$ si ha

$$|\langle v, Tf \rangle_H| = |\langle T^*v, f \rangle_{\mathcal{D}}| \leq \|f\|_X \|T^*v\|_{X^*} \leq a\|v\|_H \|f\|_X$$

quindi per $\|v\|_H = 1$ abbiamo che per ogni $f \in \mathcal{D}$

$$\|Tf\|_X \leq a\|f\|_X.$$

(1) \Rightarrow (3). Poiché (1) e (2) sono equivalenti, allora possiamo dire che $Im(T^*T) \subset X^*$ e per ogni $f \in \mathcal{D}$, con $v = Tf$, si ha per (2) $\|T^*v\|_{X^*} \leq a\|v\|_H$ quindi

$$\|T^*Tf\|_{X^*} \leq a\|Tf\|_H \leq a^2\|f\|_X.$$

(3) \Rightarrow (1). Sia $f \in \mathcal{D}$ allora

$$\|Tf\|_H^2 = \langle Tf, Tf \rangle_H = \langle T^*Tf, f \rangle_{\mathcal{D}} \leq \|T^*Tf\|_{X^*} \|f\|_X \leq a^2\|f\|_X^2.$$

□

Grazie a questo lemma, possiamo dare il successivo fondamentale risultato:

Corollario 4. *Siano H, \mathcal{D} e due triple (X_i, T_i, a_i) , $i = 1, 2$, che soddisfano le condizioni del lemma precedente. Allora per ogni scelta di $i, j = 1, 2$ abbiamo $Im(T_i^*T_j) \subset X_i^*$ e per ogni $f \in \mathcal{D}$*

$$\|T_i^*T_j f\|_{X_i^*} \leq a_i a_j \|f\|_{X_j}.$$

*In particolare $T_i^*T_j$ estende per continuità un operatore da X_j a X_i^* e la disuguaglianza è verificata per ogni $f \in X_j$.*

Dimostrazione.

Per ogni $f \in \mathcal{D}$ e per ogni scelta di $i, j = 1, 2$ abbiamo che $Im(T_i^*T_j) \subset X_i^*$ e

$$\|T_i^*T_j f\|_{X_i^*} \leq a_i \|T_j f\|_H \leq a_i a_j \|f\|_{X_j}.$$

□

Mostriamo un'applicazione del lemma per l'equazione differenziale del tipo

$$\partial_t u - Lu = f$$

dove L è un operatore anti-autoaggiunto, ovvero $L^* = -L$, in qualche spazio di Hilbert \mathcal{H} di funzioni per la variabile spazio $x \in \mathbb{R}^n$, che per semplicità possiamo supporre $L^2(\mathbb{R}^n)$, e la funzione sconosciuta u definita nello spazio-tempo \mathbb{R}^{n+1} . Sia $U(t) = \exp(tL)$ il gruppo unitario ad un parametro in \mathcal{H} generato da L , ovvero $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ e rispetta queste proprietà:

1. $U(0) = Id$
2. $U(t + s) = U(t) \circ U(s)$ per ogni t e $s \in \mathbb{R}$
3. $\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Il problema di Cauchy per l'equazione differenziale con dati iniziali $u(0, x) = u_0$ è formalmente equivalente all'equazione integrale

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t - \tau)f(\tau)d\tau.$$

Cosideriamo gli spazi $L_t^q(I_t, L_x^r) = \{f : I_t \rightarrow L_x^r \mid f \in L_x^r(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|f\|_r(t) \in L_t^q(I_t)\}$ con I_t si intende un intervallo di \mathbb{R} o tutta la retta reale. Sia $X = L_t^1(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ e consideriamo l'operatore $T : X \rightarrow \mathcal{H}$ definito in questo modo

$$Tf = \int_{\mathbb{R}} U(-\tau)f(\tau)d\tau = (U *_t f)(0)$$

con $*_t$ si intende la convoluzione per la sola variabile t . L'operatore aggiunto di T , $T^* : \mathcal{H} \rightarrow X^*$ con $X^* = L_t^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, ha questa forma:

$$(T^*v)(t) = U(t)v.$$

Infatti sia $v \in \mathcal{H}$ e $f \in X$, allora per definizione di operatore aggiunto

$$\begin{aligned} (T^*v)(f) &= \langle T^*v, f \rangle_{X^*} = \langle v, Tf \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{v}(x) \int_{\mathbb{R}} U(-\tau)f(\tau, x)d\tau dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} U(-\tau)\bar{v}(x)f(\tau, x)dx d\tau = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \bar{U}(\tau)\bar{v}(x)f(\tau, x)dx d\tau = \\ &= \langle U(t)v, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})}. \end{aligned}$$

Infine l'operatore $T^*T : X \rightarrow X^*$ è della forma

$$T^*Tf = U(t) \circ (U *_t f)(0) = (U *_t f)(t) = \int_{\mathbb{R}} U(t - \tau)f(\tau)d\tau.$$

Osserviamo che per ogni $f \in X$, sfruttando il fatto che U sia gruppo unitario su \mathcal{H} , si ha

$$\begin{aligned} \|T^*Tf\|_{\mathcal{H}} &= \left\| \int_{\mathbb{R}} U(t - \tau)f(\tau, x)d\tau \right\|_{\mathcal{H}} \leq \int_{\mathbb{R}} \|U(t - \tau)\|_{\mathcal{H}} \|f(\tau, x)\|_{\mathcal{H}} d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f(\tau, x)\|_{\mathcal{H}} d\tau = \|f\|_{L_t^1(\mathbb{R}, \mathcal{H})} \end{aligned}$$

quindi il punto (3) del lemma di Ginibre-Velo è stato verificato con $a^2 = 1$ e di conseguenza abbiamo che per ogni $f \in X$ e per ogni $v \in \mathcal{H}$

$$\|Tf\|_{\mathcal{H}} \leq 1\|f\|_X \text{ e } \|T^*v\|_{X^*} \leq 1\|v\|_{\mathcal{H}}.$$

Mostriamo ora un'altra applicazione del lemma di Ginibre-Velo, e soprattutto del suo corollario, prendendo in considerazione l'equazione alle derivate parziali di Schrödinger

$$i\partial_t u = \Delta u + f$$

dove con Δ si considera il laplaciano, $\Delta = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$, che è un operatore autoaggiunto.

Consideriamo $\mathcal{H} = L_x^2(\mathbb{R}^n)$ e associamo al laplaciano il gruppo unitario ad un parametro U in $L_x^2(\mathbb{R}^n)$: possiamo ricondurci al caso precedente di L anti-autoaggiunto moltiplicando tutta l'equazione per $-i$. Otteniamo infatti

$$\partial_t u + i\Delta u = 0 \Leftrightarrow \partial_t u - (-i\Delta)u = 0$$

e abbiamo che $L = -i\Delta$ che è anti-autoaggiunto in quanto Δ è autoaggiunto. Possiamo scrivere esplicitamente $U(t)$ (vedere [16, Esempio 3, p.59]) in questo modo:

$$U(t) = \exp(-it\Delta) = (4\pi it)^{-n/2} \exp(ix^2/4t) *_x.$$

Dalla sua scrittura esplicita possiamo verificare che $U(t)$ estende un operatore limitato da L_x^1 a L_x^∞ , con $\|U(t)f(t, x)\|_{L_x^\infty} \leq (4\pi|t|)^{-n/2}\|f\|_{L_x^1}(t)$ per ogni $t \neq 0$, infatti

$$\begin{aligned} |U(t)f| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(4\pi it)^{-n/2} e^{i(x-y)^2/4t} f(t, y)| dy \leq (4\pi|t|)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t, y)| dy = \\ &= (4\pi|t|)^{-n/2} \|f\|_{L_x^1}(t). \end{aligned}$$

Per proseguire con i calcoli, abbiamo bisogno del seguente risultato:

Teorema 2 (Teorema di Riesz-Thorin).

Siano $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, con $1/p_0 + 1/q_0 = 1$ e $1/p_1 + 1/q_1 = 1$, e T un operatore limitato da L^{p_0} a L^{q_0} e da L^{p_1} a L^{q_1} , ovvero esistono C_0 e C_1 costanti positive tali che $\|Tf\|_{L^{q_0}} \leq C_0\|f\|_{L^{p_0}}$ e $\|Tf\|_{L^{q_1}} \leq C_1\|f\|_{L^{p_1}}$, allora per ogni $\lambda \in (0, 1)$, T estende un operatore limitato da L^{p_λ} a L^{q_λ} , ovvero

$$\|Tf\|_{L^{q_\lambda}} \leq C_\lambda \|f\|_{L^{p_\lambda}}$$

dove

$$\frac{1}{p_\lambda} = \frac{\lambda}{p_1} + \frac{1-\lambda}{p_0} \quad e \quad \frac{1}{q_\lambda} = \frac{\lambda}{q_1} + \frac{1-\lambda}{q_0}$$

e

$$C_\lambda = C_0^{1-\lambda} C_1^\lambda.$$

Osserviamo che $1/p_\lambda + 1/q_\lambda = 1$ per ogni $\lambda \in (0, 1)$. Per una dimostrazione rimandiamo a [12, Theorem 7.1.12, p.164].

Per quanto visto prima, per ogni $t \neq 0$

$$\|U(t)f(t, x)\|_{L_x^\infty} \leq (4\pi|t|)^{-n/2} \|f\|_{L_x^1(t)}$$

e poiché $U(t)$ è unitario in $L_x^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|U(t)f(t, x)\|_{L_x^2} = \|f\|_{L_x^2(t)}.$$

Possiamo quindi applicare il teorema di Riesz-Torin considerando

$$p_0 = 1, q_0 = \infty, p_1 = q_1 = 2, p_\lambda = \bar{r}, q_\lambda = r$$

e otteniamo:

$$\|U(t)f(t, x)\|_{L_x^r} \leq (4\pi|t|)^{-\frac{n}{2}(1-\lambda)} \|f\|_{L_x^{\bar{r}}(t)}.$$

Dalla relazione

$$\frac{1}{q_\lambda} = \frac{\lambda}{q_1} + \frac{1-\lambda}{q_0} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{\infty}$$

osserviamo che $\lambda = 2/r$ e sostituendo

$$\|U(t)f(t, x)\|_{L_x^r} \leq (4\pi|t|)^{-\frac{n}{2}(1-\frac{2}{r})} \|f\|_{L_x^{\bar{r}}(t)} = (4\pi|t|)^{-n(\frac{1}{2}-\frac{1}{r})} \|f\|_{L_x^{\bar{r}}(t)}.$$

Quindi $U(t)$ può essere esteso ad un operatore limitato da $L_x^{\bar{r}}$ a L_x^r , con $\|U(t)f(t, x)\|_{L_x^r} \leq (4\pi|t|)^{-n\alpha(r)} \|f\|_{L_x^{\bar{r}}(t)}$, con $2 \leq r \leq \infty$, $\alpha(r) = 1/2 - 1/r$ e $1/r + 1/\bar{r} = 1$.

Consideriamo, agendo in modo simile all'esempio precedente, l'operatore $T : X \rightarrow \mathcal{H}$, con $X = L_t^q(\mathbb{R}, L_x^1)$ e $\mathcal{H} = L_x^2(\mathbb{R}^n)$, definito:

$$Tf = -i \int_{\mathbb{R}} U(-\tau)f(\tau, x)d\tau$$

e il suo aggiunto $(T^*v)(t) = U(t)v$ con $T^* : L_x^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_t^p(\mathbb{R}, L_x^\infty)$, $1/p + 1/q = 1$. Quindi, per ogni $f \in L_t^q(\mathbb{R}, L_x^1)$ l'operatore $T^*T : L_t^q(\mathbb{R}, L_x^1) \rightarrow L_t^p(\mathbb{R}, L_x^\infty)$ si scrive

$$T^*Tf = -i \int_{\mathbb{R}} U(t-\tau)f(\tau, x)d\tau.$$

Osserviamo che, per i conti visti precedentemente,

$$\|T^*Tf(t)\|_{L_x^\infty} \leq \int_{\mathbb{R}} \|U(t-\tau)f(\tau, x)d\tau\|_{L_x^\infty} \leq (4\pi|t|)^{-n/2} *_t \|f\|_{L_x^1(t)}.$$

Per continuare abbiamo bisogno del seguente risultato

Lemma 3 (Disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev (HLS)).

Sia $1 < a < \infty$ e $1 < q < p < \infty$ tale che

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{p}$$

e sia $k_a(y) = |y|^{-n/a}$, con $y \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\|k_a * u\|_{L^p} \leq C_{q,a} \|u\|_{L^q}.$$

Per una dimostrazione rimandiamo a [12, Theorem 4.5.3, p.117].

Applicando la disuguaglianza HLS, con $n = 1$ poiché $t \in \mathbb{R}$, otteniamo

$$\| \|T^*Tf\|_{L_x^\infty} \|_{L_t^p} \leq \| (4\pi|t|)^{-n/2} *_t \|f\|_{L_x^1}(t) \|_{L_t^p} \leq C \| \|f\|_{L_x^1} \|_{L_t^q}$$

con

$$\begin{cases} a = \frac{2}{n} \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{p} \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \end{cases}$$

ovvero T^*T estende un operatore limitato da $L_t^q(\mathbb{R}, L_x^1)$ a $L_t^p(\mathbb{R}, L_x^\infty)$. Allo stesso modo possiamo verificare che T^*T estende un operatore limitato da $L_t^q(\mathbb{R}, L_x^r)$ a $L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)$.

$$\| \|T^*Tf\|_{L_x^r} \|_{L_t^p} \leq \| (4\pi|t|)^{-n\alpha(r)} *_t \|f\|_{L_x^r}(t) \|_{L_t^p} \leq C \| \|f\|_{L_x^r} \|_{L_t^q}$$

con

$$\begin{cases} a = 1/n\alpha(r) \\ 1/q + 1/a = 1 + 1/p \\ 1/p + 1/q = 1 \\ 1/r + 1/\bar{r} = 1. \end{cases}$$

Osserviamo che è stata verificata la condizione (3) del lemma di Ginibre-Velo, quindi valgono anche le seguenti stime

$$\|Tf\|_{L_x^2} \leq C \|f\|_{L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{\bar{r}})}$$

$$\|T^*v\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)} \leq C \|v\|_{L_x^2}$$

per ogni coppia (p, r) e (q, \bar{r}) che rispettino le condizioni definite precedentemente.

Consideriamo $x \in \mathbb{R}$, ovvero $n = 1$, allora otteniamo

$$\| \|T^*Tf\|_{L_x^\infty} \|_{L_t^p} \leq \| (4\pi|t|)^{-1/2} *_t \|f\|_{L_x^1}(t) \|_{L_t^p} \leq C \| \|f\|_{L_x^1} \|_{L_t^q}$$

quindi

$$\begin{cases} a = 2 \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{p} \\ \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $a = 2$, $p = 4$ e $q = 4/3$ ovvero T^*T estende un operatore limitato da $L_t^{4/3}(\mathbb{R}, L_x^1)$ a $L_t^4(\mathbb{R}, L_x^\infty)$. Osserviamo in generale che

$$\| \|T^*Tf\|_{L_x^r} \|_{L_t^p} \leq \| (4\pi|t|)^{-\alpha(r)} *_t \|f\|_{L_{\bar{x}}(t)} \|_{L_t^p} \leq C \| \|f\|_{L_x^q} \|_{L_t^q}$$

con

$$\begin{cases} a = 1/\alpha(r) \rightarrow 1/a = \alpha(r) = 1/2 - 1/r \\ 1/q + 1/a = 1 + 1/p \\ 1/p + 1/q = 1 \\ 1/r + 1/\bar{r} = 1 \\ 2 \leq r \leq \infty \end{cases}$$

otteniamo $2/p = \alpha(r) = 1/2 - 1/r$, e ricavandoci r in funzione di p

$$r = \frac{2p}{p-4}.$$

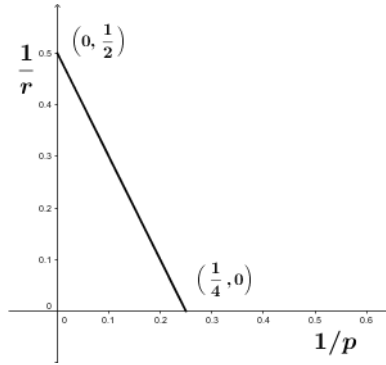


Figura 1: Coppie ammissibili (p, r) per $n = 1$

Possiamo anche ricavarci \bar{r} in funzione di q da $1/q + 1/2 + 1/\bar{r} - 1 = 1 + 1 - 1/q$ da cui

$$\bar{r} = \frac{2q}{5q-4}.$$

Continuiamo a considerare $x \in \mathbb{R}$ e per il corollario di Ginibre-Velo T^*T estende un operatore limitato da $L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{2q/(5q-4)})$ a $L_t^p(\mathbb{R}, L_x^{2p/(p-4)})$, ovvero

$$\|T^*Tf\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^{2p/(p-4)})} \leq C\|f\|_{L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{2q/(5q-4)})}$$

per ogni $4 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq 4/3$. Inoltre per il lemma di Ginibre-Velo

$$\|Tf\|_{L_x^2} \leq C\|f\|_{L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{2q/(5q-4)})}$$

$$\|T^*v\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^{2p/(p-4)})} = \|U(t)v\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^{2p/(p-4)})} \leq C\|v\|_{L_x^2}.$$

Osserviamo che non è necessaria la condizione $1/p + 1/q = 1$ grazie al corollario 4 del lemma di Ginibre-Velo.

3 L'equazione di Schrödinger

Consideriamo il problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger non lineare con $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = f \\ u(0, x) = 0 \end{cases}$$

a cui possiamo associare l'equazione integrale

$$u(t, x) = -i \int_0^t U(t - \tau) f(\tau, x) d\tau$$

con, per quanto visto sopra, $U(t) = \exp(-it\partial_x^2) = (4\pi it)^{-1/2} \exp(ix^2/4t) *_x$.

Sia $T : L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{\bar{r}}) \rightarrow L_x^2(\mathbb{R})$ l'operatore definito da

$$Tf = -i \int_{\mathbb{R}} U(-\tau) f(\tau, x) d\tau$$

e il suo aggiunto $T^* : L_x^2(\mathbb{R}) \rightarrow L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)$

$$(T^*v)(t) = U(t)v$$

con (p, r) e (q, \bar{r}) coppie ammissibili, ovvero $r = \frac{2p}{p-4}$ e $\bar{r} = \frac{2q}{5q-4}$, con $4 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq 4/3$.

Per i calcoli svolti precedentemente, l'operatore $T^*T : L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{\bar{r}}) \rightarrow L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)$ è limitato ed è definito

$$T^*Tf = -i \int_{\mathbb{R}} U(t - \tau) f(\tau, x) d\tau.$$

Osserviamo che $u(t, x)$ non è esattamente $(T^*Tf)(t, x)$, ma $(T^*T(\chi_t f))(t, x)$, dove $\chi_t = \chi_{(0,t)}$.

Consideriamo l'operatore massimale $M_T : L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{\bar{r}}) \rightarrow L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)$

$$(M_T f) = (T^*T(\chi_t f)) = u(t, x)$$

in questo modo possiamo calcolare la norma di u

$$\|u(t, x)\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)} = \|(M_T f)(t, x)\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)} \leq C_{p,q} \|(T^*Tf)(t, x)\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)}$$

applicando il corollario 3 del teorema di Christ-Kiselev, poiché $q < p$, dove la costante $C_{p,q} = (1 - 2^{-(q^{-1}-p^{-1})})^{-1}$, è quella data dal teorema.

Dal corollario 4 di Ginibre-Velo, abbiamo osservato che T^*T estende un operatore limitato da $L_t^{q_2}(\mathbb{R}, L_x^{\bar{r}_2})$ a $L_t^{p_1}(\mathbb{R}, L_x^{r_1})$, con $4 \leq p_1 \leq \infty$ e $1 \leq$

$q_2 \leq 4/3$, $r_1 = 2p_1/(p_1 - 4)$ e $\bar{r}_2 = 2q_2/(5q_2 - 4)$. Applicando nuovamente il corollario di Christ-Kiselev, $q_2 < p_1$, osserviamo che M_T estende un operatore limitato da $L_t^{q_2}(\mathbb{R}, L_x^{\bar{r}_2})$ a $L_t^{p_1}(\mathbb{R}, L_x^{r_1})$.

In generale, possiamo fare lo stesso ragionamento per l'equazione di Schrödinger non lineare con $x \in \mathbb{R}$ e dati iniziali diversi da 0

$$\begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = f \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (5)$$

e l'equazione integrale associata a (5) è:

$$u(t, x) = U(t)u_0(x) - i \int_0^t U(t - \tau)f(\tau, x)d\tau. \quad (6)$$

Per quanto verificato precedentemente, l'operatore T^*T estende un operatore limitato da $L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{\bar{r}})$ a $L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)$, e per lemma di Ginibre-Velo, $(T^*u)(t) = U(t)u$ estende un operatore limitato da $L_x^2(\mathbb{R})$ a $L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)$. Possiamo a questo punto esprimere le stime di Strichartz:

Teorema 3 (Stime di Strichartz).

$$\|u(t, x)\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^{2p/(p-4)})} \leq C\|u_0\|_{L_x^2} + C\|f\|_{L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{2q/(5q-4)})} \quad (7)$$

per ogni $4 \leq p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq 4/3$.

Dimostrazione.

Per quanto osservato precedentemente, dall'equazione integrale (6):

$$\begin{aligned} & \|u(t, x)\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^{2p/(p-4)})} \leq \\ & \|U(t)u_0(x)\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^{2p/(p-4)})} + \left\| \int_0^t U(t - \tau)f(\tau, x)d\tau \right\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^{2p/(p-4)})} \leq \\ & \leq C\|u_0\|_{L_x^2} + C\|f\|_{L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{2q/(5q-4)})}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 3. Per il teorema di Riesz-Thorin possiamo scrivere in modo più compatto le stime di Strichartz in questo modo:

$$\|u(t, x)\|_{L_t^4(\mathbb{R}, L_x^\infty)} + \|u(t, x)\|_{L_t^\infty(\mathbb{R}, L_x^2)} \leq C\|u_0\|_{L_x^2} + C\|f\|_{L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{2q/(5q-4)})} \quad (8)$$

per ogni $1 \leq q \leq 4/3$.

Osservazione 4. Sia $I \subset \mathbb{R}$, intervallo, allora valgono le stime di Strichartz:

$$\|u(t, x)\|_{L_t^4(I, L_x^\infty)} + \|u(t, x)\|_{L_t^\infty(I, L_x^2)} \leq C\|u_0\|_{L_x^2} + C\|f\|_{L_t^q(I, L_x^{2q/(5q-4)}} \quad (9)$$

per ogni $1 \leq q \leq 4/3$.

Dimostrazione.

Poiché l'operatore limitato $T^*T : L_t^q(\mathbb{R}, L_x^{\bar{r}}) \rightarrow L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)$, definito

$$T^*Tf = -i \int_{\mathbb{R}} U(t - \tau)f(\tau, x)d\tau,$$

possiamo considerarlo come un operatore che va da $L_t^q(I, L_x^{\bar{r}})$ a $L_t^p(I, L_x^r)$, con (q, \bar{r}) e (p, r) coppie ammissibili. Infatti

$$\|T^*Tf\|_{L_t^p(I, L_x^r)} \leq \|T^*Tf\|_{L_t^p(\mathbb{R}, L_x^r)} \leq C\|f\|_{L_t^q(I, L_x^{\bar{r}})}.$$

A questo punto basta riprendere i medesimi calcoli svolti precedentemente e otteniamo la tesi. \square

4 Trasformazione Pseudo-Conforme

In questo paragrafo, consideriamo una trasformazione che ci servirà per dimostrare l'esistenza e unicità della soluzione globale per l'equazione di Schrödinger non lineare con dati iniziali piccoli. Questa trasformazione è chiamata **trasformazione Pseudo-Conforme** e verificheremo che lascia invariate le stime di Strichartz.

Consideriamo $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [1, +\infty)$ e l'equazione di Schrödinger non lineare:

$$\begin{cases} i\partial_t u - \Delta u = f(u) \\ u(1, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (10)$$

con u funzione incognita e f il termine non lineare dell'equazione di Schrödinger in funzione di u .

Osservazione 5 (Ipotesi (f1)). *Consideriamo su f la seguente ipotesi: per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ allora $f(zu) = zf(u)$.*

Un esempio di funzione che rispetti questa ipotesi è $f(u) = |u|^{p-1}u$, con $p > 1$. Consideriamo da questo punto in poi che f rispetti l'ipotesi (f1).

La scelta di $t_0 = 1$ è motivata dalla seguente definizione.

Definizione 2. *Sia $\Psi : (t, x, u) \rightarrow (T, X, U)$, con $t \neq 0$, tale che:*

$$\begin{cases} T = \frac{1}{t} & e & X = \frac{x}{t} \\ U(T, X) = \frac{1}{T^{n/2}} \bar{u}\left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T}\right) e^{i\frac{X^2}{4T}} \end{cases}$$

*allora Ψ è la **trasformazione Pseudo-Conforme**. (Vedi [18]).*

Per semplicità di notazione $X^2 = (X_1^2 + \dots + X_n^2)$.

Vogliamo verificare che se u è soluzione di (10) allora U è soluzione di un'altra equazione di Schrödinger associata a U in T e X .

Calcoliamoci $i\partial_T U$ e $\Delta_X U = \partial_{X_1}^2 U + \dots + \partial_{X_n}^2 U$.

$$\begin{aligned} i\partial_T U &= i\partial_T \left(\frac{1}{T^{n/2}} \bar{u}\left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T}\right) e^{i\frac{X^2}{4T}} \right) = \\ &= i \left(\partial_T (T^{-n/2}) \bar{u}\left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T}\right) e^{i\frac{X^2}{4T}} + T^{-n/2} \partial_T \bar{u}\left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T}\right) e^{i\frac{X^2}{4T}} + \right. \\ &\quad \left. + T^{-n/2} \bar{u}\left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T}\right) \partial_T (e^{i\frac{X^2}{4T}}) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ie^{i\frac{X^2}{4T}} \left(-\frac{n}{2} T^{-(n+2)/2} \bar{u} \left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T} \right) + T^{-n/2} \partial_t \bar{u} \left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T} \right) \left(-\frac{1}{T^2} \right) + \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^n T^{-n/2} \partial_{x_j} \bar{u} \left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T} \right) \left(-\frac{X_j}{T^2} \right) + T^{-n/2} \bar{u} \left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T} \right) \left(-i\frac{X^2}{4T^2} \right) \right) = \\
&= \left(-i\partial_t \bar{u} T^{-\frac{n+4}{2}} - i \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \bar{u} X_j T^{-\frac{n+4}{2}} + \bar{u} \left(\frac{X^2}{4} T^{-\frac{n+4}{2}} - i\frac{n}{2} T^{-\frac{n+2}{2}} \right) \right) e^{i\frac{X^2}{4T}}.
\end{aligned}$$

Adesso calcoliamoci $\partial_{X_j}^2 U$ con $j = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned}
\partial_{X_j} U &= T^{-n/2} \partial_{x_j} \bar{u} T^{-1} e^{i\frac{X^2}{4T}} + T^{-n/2} \bar{u} e^{i\frac{X^2}{4T}} \left(i\frac{X_j}{2T} \right) = \\
&= T^{-(n+2)/2} \partial_{x_j} \bar{u} e^{i\frac{X^2}{4T}} + \frac{i}{2} T^{-(n+2)/2} \bar{u} e^{i\frac{X^2}{4T}} X_j. \\
\partial_{X_j}^2 U &= T^{-(n+4)/2} \partial_{x_j}^2 \bar{u} e^{i\frac{X^2}{4T}} + \frac{i}{2} T^{-(n+4)/2} \partial_{x_j} \bar{u} e^{i\frac{X^2}{4T}} X_j + \\
&+ \frac{i}{2} T^{-(n+4)/2} \partial_{x_j} \bar{u} e^{i\frac{X^2}{4T}} X_j - \frac{1}{4} T^{-(n+4)/2} \bar{u} e^{i\frac{X^2}{4T}} X_j^2 + \frac{i}{2} T^{-(n+2)/2} \bar{u} e^{i\frac{X^2}{4T}} = \\
&= \left(\partial_{x_j}^2 \bar{u} T^{-\frac{n+4}{2}} + i\partial_{x_j} \bar{u} X_j T^{-\frac{n+4}{2}} + \bar{u} \left(\frac{i}{2} T^{-\frac{n+2}{2}} - \frac{X_j^2}{4} T^{-\frac{n+4}{2}} \right) \right) e^{i\frac{X^2}{4T}}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\Delta_X U = \left(\Delta_x \bar{u} T^{-\frac{n+4}{2}} + i \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} \bar{u} X_j T^{-\frac{n+4}{2}} - \bar{u} \left(\frac{X^2}{4} T^{-\frac{n+4}{2}} - i\frac{n}{2} T^{-\frac{n+2}{2}} \right) \right) e^{i\frac{X^2}{4T}}.$$

Possiamo concludere che

$$i\partial_T U + \Delta_X U = (-i\partial_t \bar{u} + \Delta_x \bar{u}) T^{-\frac{n+4}{2}} e^{i\frac{X^2}{4T}}.$$

Osserviamo che, per la definizione 2 di U e poiché u è soluzione di (10), otteniamo:

$$\begin{aligned}
i\partial_T \bar{U} - \Delta_X \bar{U} &= -\overline{(i\partial_T U + \Delta_X U)} = \\
&= \overline{-(-i\partial_t \bar{u} + \Delta_x \bar{u}) T^{-\frac{n+4}{2}} e^{i\frac{X^2}{4T}}} = -\overline{\left(-f(\bar{u}) T^{-\frac{n+4}{2}} e^{i\frac{X^2}{4T}} \right)} = \\
&= \overline{\left(f \left(T^{n/2} U e^{-i\frac{X^2}{4T}} \right) e^{i\frac{X^2}{4T}} \right)} T^{-\frac{n+4}{2}} =
\end{aligned}$$

e per l'ipotesi (f1) di f

$$\left(\overline{f(T^{n/2}U) e^{-i\frac{X^2}{4T}} e^{i\frac{X^2}{4T}}} \right) T^{-\frac{n+4}{2}} = \left(\overline{f(T^{n/2}U)} \right) T^{-\frac{n+4}{2}}.$$

Se $f(u) = \pm|u|^{p-1}u$ allora otteniamo:

$$\left(\overline{f(T^{n/2}U)} \right) T^{-\frac{n+4}{2}} = \pm T^{\frac{n}{2}(p-1)-2} |\bar{U}|^{p-1} \bar{U} = T^\alpha f(\bar{U})$$

con $\alpha = \frac{n}{2}(p-1) - 2$. Quindi in conclusione la trasformazione Pseudo-Conforme manda u , soluzione dell'equazione di Schrödinger (10) per $t \in [1, +\infty)$, in U , che è soluzione della seguente equazione di Schrödinger per $T \in (0, 1]$:

$$\begin{cases} i\partial_T U - \Delta_X U = T^\alpha f(U) \\ U(1, X) = \bar{u}_0(X) e^{i\frac{X^2}{4}} \end{cases} \quad (11)$$

se $f(u) = \pm|u|^{p-1}u$, con $\alpha = \frac{n}{2}(p-1) - 2$.

In generale, otteniamo che U è soluzione di questo tipo di equazione di Schrödinger:

$$\begin{cases} i\partial_T U - \Delta_X U = F(U(T, X), T) = \overline{f(T^{n/2}\bar{U})} T^{-(n+4)/2} \\ U(1, X) = \bar{u}_0(X) e^{i\frac{X^2}{4}} \end{cases} \quad (12)$$

con la condizione che f realizzi l'ipotesi (f1).

L'equazione integrale associata a (12) è:

$$U(T, X) = \mathbb{U}(T)U(1, X) + i \int_t^1 \mathbb{U}(T - \sigma, X) F(U(\sigma, X), \sigma) d\sigma \quad (13)$$

con $\mathbb{U}(T) = \exp(-iT\Delta_X)$, gruppo unitario ad un parametro associato al laplaciano, come già abbiamo osservato precedentemente.

Teorema 4 (Stime di Strichartz). *Data l'equazione non lineare di Schrödinger (12), otteniamo:*

$$\|U(T, X)\|_{L_T^p((0,1], L_X^q)} \leq C \|U(1, X)\|_{L_X^2} + \|F\|_{L_T^{\bar{p}}((0,1], L_X^{\bar{q}})} \quad (14)$$

con le coppie (p, q) e (\bar{p}, \bar{q}) tali che $\frac{2}{p} = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \right)$ e $\frac{2}{\bar{p}} = 2 + n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{q}} \right)$.

Dimostrazione.

La dimostrazione riprende i calcoli eseguiti precedentemente per qualsiasi equazione di Schrödinger non lineare. \square

Osserviamo che $\|U(1, X)\|_{L_X^2} = \|u(1, x)\|_{L_x^2}$, per come sono definite e poichè $\left|e^{i\frac{x^2}{4}}\right| = 1$.

Teorema 5. *La trasformazione Pseudo-Conforme lascia invariate le stime di Strichartz, ovvero:*

$$\|U\|_{L_T^p((0,1), L_X^q)} = \|u\|_{L_t^p((1,+\infty), L_x^q)} \quad (15)$$

$$\|F\|_{L_T^{\bar{p}}((0,1), L_X^{\bar{q}})} = \|f\|_{L_t^{\bar{p}}((1,+\infty), L_x^{\bar{q}})} \quad (16)$$

con (p, q) e (\bar{p}, \bar{q}) coppie ammissibili tali che $\frac{2}{p} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$ e $\frac{2}{\bar{p}} = 2 + n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{q}}\right)$.

Dimostrazione.

Iniziamo col verificare (15). Per la definizione 2 di $U(T, X)$:

$$\begin{aligned} \|U\|_{L_X^q}^q &= \int_{\mathbb{R}^n} |U(T, X)|^q dX = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{T^{n/2}} \bar{u}\left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T}\right) e^{i\frac{X^2}{4T}} \right|^q dX = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} T^{-q\frac{n}{2}} \left| u\left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T}\right) \right|^q \left| e^{i\frac{X^2}{4T}} \right|^q dX = \end{aligned}$$

poichè $\left|e^{i\frac{X^2}{4T}}\right| = 1$ e per il cambio di coordinate $x = \frac{X}{T}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} T^{-q\frac{n}{2}} \left| u\left(\frac{1}{T}, x\right) \right|^q T^n dx = T^{-q\frac{n}{2}+n} \left\| u\left(\frac{1}{T}\right) \right\|_{L_x^q}^q.$$

Consideriamo ora:

$$\left\| \|U\|_{L_X^q} \right\|_{L_T^p(0,1)}^p = \left\| T^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{q}} \left\| u\left(\frac{1}{T}\right) \right\|_{L_x^q} \right\|_{L_T^p(0,1)}^p =$$

e con il cambio di coordinate $t = \frac{1}{T}$

$$\int_{\infty}^1 t^{p\frac{n}{2}-p\frac{n}{q}} \| \|u(t)\|_{L_x^q} \|^p (-t^{-2}) dt = \int_1^{\infty} t^{p\frac{n}{2}-p\frac{n}{q}-2} \| \|u(t)\|_{L_x^q} \|^p dt.$$

Osserviamo, poichè le coppie ammissibili (p, q) sono tali che $\frac{2}{p} = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$, allora: $p\frac{n}{2} - p\frac{n}{q} - 2 = n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)p - 2 = 0$, quindi possiamo concludere che

$$\left\| \|U\|_{L_X^q} \right\|_{L_T^p(0,1)}^p = \int_1^{\infty} t^0 \| \|u(t)\|_{L_x^q} \|^p dt = \| \|u\|_{L_x^q} \|_{L_t^p(1, \infty)}^p.$$

Per verificare (16), possiamo considerare il caso generale di $f(u)$, tale che rispetti l'ipotesi (f1), e quindi abbiamo che

$$F(U) = \overline{f(T^{n/2}\bar{U})}T^{-(n+4)/2} = \overline{f(u)T^{-\frac{n+4}{2}}e^{i\frac{X^2}{4T}}} = \bar{f}\left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T}\right)T^{-\frac{n+4}{2}}e^{-i\frac{X^2}{4T}}.$$

Si ripetono i passaggi simili a quelli di prima e si ottiene che:

$$\begin{aligned} \|F\|_{L_x^{\bar{q}}}^{\bar{q}} &= T^{-\bar{q}\frac{n+4}{2}+n} \left\| f\left(\frac{1}{T}\right) \right\|_{L_x^{\bar{q}}}^{\bar{q}} \\ \left\| \|F\|_{L_x^{\bar{q}}} \right\|_{L_T^{\bar{p}}(0,1)}^{\bar{p}} &= \int_1^\infty t^{\bar{p}\frac{n+4}{2}-\bar{p}\frac{n}{\bar{q}}-2} \|u(t)\|_{L_x^{\bar{q}}}^{\bar{p}} dt = \| \|u\|_{L_x^{\bar{q}}} \left\|_{L_t^{\bar{p}}(1,\infty)}^{\bar{p}} \right\| \end{aligned}$$

in quanto le coppie ammissibili (\bar{p}, \bar{q}) sono tali che $\frac{2}{\bar{p}} = 2 + n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{q}}\right)$, ovvero $2 = \bar{p}\left[2 + n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{q}}\right)\right]$ allora:

$$\bar{p}\frac{n+4}{2} - \bar{p}\frac{n}{\bar{q}} - 2 = \bar{p}\left[2 + n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{q}}\right)\right] - 2 = 0.$$

□

Ritorniamo all'equazione di Schrödinger non lineare con $n = 1$, f che rispetti l'ipotesi (f1) e $t \in [1, +\infty)$:

$$\begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = f(u) \\ u(1, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (17)$$

Applichiamo la trasformazione Pseudo-Conforme

$$U(T, X) = \frac{1}{T^{1/2}}\bar{u}\left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T}\right)e^{i\frac{X^2}{4T}}$$

e l'equazione di Schrödinger associata, con $T \in (0, 1]$, è:

$$\begin{cases} i\partial_T U - \partial_X^2 U = F(U) \\ U(1, X) = \bar{u}_0(X)e^{i\frac{X^2}{4}} \end{cases} \quad (18)$$

con $F(U(T, X), T) = \overline{f(T^{1/2}\bar{U})}T^{-5/2}$. L'equazione integrale associata diventa:

$$U(T, X) = \mathbb{U}(T)U(1, X) + i \int_t^1 \mathbb{U}(T - \sigma, X) F(U(\sigma, X), \sigma) d\sigma \quad (19)$$

con $\mathbb{U}(T) = \exp(-iT\partial_X^2)$, gruppo unitario ad un parametro associato al laplaciano. Per i conti già visti precedentemente, possiamo affermare che le stime di Strichartz relative all'equazione (18) sono:

$$\|U(T, X)\|_{L_T^p((0,1), L_X^q)} \leq C \|U(1, X)\|_{L_X^2} + \|F\|_{L_T^{\bar{p}}((0,1), L_X^{\bar{q}})} \quad (20)$$

con $4 \leq p \leq \infty$, $1 \leq \bar{p} \leq 4/3$, $q = \frac{2p}{p-4}$ e $\bar{q} = \frac{2\bar{p}}{5\bar{p}-4}$. Inoltre il teorema 5:

$$\|U\|_{L_T^p((0,1), L_X^q)} = \|u\|_{L_t^p((1,+\infty), L_x^q)} \quad (21)$$

$$\|F\|_{L_T^{\bar{p}}((0,1), L_X^{\bar{q}})} = \|f\|_{L_t^{\bar{p}}((1,+\infty), L_x^{\bar{q}})}. \quad (22)$$

5 Esistenza e Unicità della soluzione per NLS

In questa sezione cercheremo di dimostrare l'esistenza e unicità della soluzione dell'equazione di Schrödinger non lineare, per un caso particolare: consideriamo $x \in \mathbb{R}$ e la non linearità della forma $f(u) = |u|^2u$.

Quindi consideriamo l'equazione di Schrödinger non lineare con $x \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, +\infty)$ di questa forma:

$$\begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = \pm |u|^2 u \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad (23)$$

con u funzione incognita. L'equazione integrale associata è

$$u(t, x) = U(t)u_0(x) \mp i \int_0^t U(t - \tau) |u(\tau, x)|^2 u(\tau, x) d\tau \quad (24)$$

con $U(t) = \exp(-it\partial_x^2) = (4\pi it)^{-1/2} \exp(ix^2/4t) *_x$ gruppo unitario ad un parametro in L_x^2 . Consideriamo inoltre il seguente operatore integrale:

$$I(u)(t) = U(t)u_0(x) \mp i \int_0^t U(t - \tau) |u(\tau, x)|^2 u(\tau, x) d\tau \quad (25)$$

Possiamo a questo punto verificare l'esistenza e unicità locale della soluzione.

Teorema 6 (Soluzione locale).

Per ogni $u_0 \in L_x^2 \exists \delta > 0$ t.c. esiste ed è unica $u \in L_t^\infty([0, \delta], L_x^2) \cap L_t^4([0, \delta], L_x^\infty)$, soluzione di (23) per ogni $t \in [0, \delta]$.

Dimostrazione.

Applicheremo il teorema delle contrazioni per verificare l'esistenza e unicità della soluzione di (23), sfruttando l'operatore integrale (25)

$$I(u)(t) = U(t)u_0(x) \mp i \int_0^t U(t - \tau) |u(\tau, x)|^2 u(\tau, x) d\tau.$$

Per semplificare la notazione consideriamo lo spazio di Banach, per un certo $T > 0$

$$X_T = L_t^\infty([0, T], L_x^2) \cap L_t^4([0, T], L_x^\infty)$$

con la norma

$$\|u\|_{X_T} = \|u\|_{L_t^\infty([0, T], L_x^2)} + \|u\|_{L_t^4([0, T], L_x^\infty)}.$$

Sia $R > 0$ e consideriamo

$$B_R = \{u \in X_T \text{ t.c. } \|u\|_{X_T} \leq R\}.$$

Più tardi sceglieremo un R opportuno.

Per applicare il teorema delle contrazioni dobbiamo trovare delle condizioni in modo che:

1. $I : B_R \rightarrow B_R$
2. $I(u)(t)$ sia contrazione: $\|I(u)(t) - I(v)(t)\|_{X_T} < K\|u(t) - v(t)\|_{X_T}$ con $K < 1$

Verifichiamo 1.:

Fissato $u_0 \in L_x^2$ con $\|u_0\|_{L_x^2} \leq \bar{R}$, sia $u \in B_R$, allora per le stime di Strichartz (8):

$$\|I(u)(t)\|_{X_T} \leq C\|u_0\|_{L_x^2} + C\| |u|^2 u \|_{L_t^r([0,T], L_x^{r'})}$$

con $1 \leq r \leq 4/3$ e $r' = 2r/(5r - 4)$ una coppia ammissibile. Scegliendo $r = 4/3$ e $r' = 1$ otteniamo

$$\|I(u)(t)\|_{X_T} \leq C\|u_0\|_{L_x^2} + C\| |u|^3 \|_{L_t^{4/3}([0,T], L_x^1)} = C\|u_0\|_{L_x^2} + C\|u\|_{L_t^4([0,T], L_x^3)}^3.$$

Per proseguire, dimostreremo la seguente disuguaglianza:

$$\|u\|_{L_t^4([0,T], L_x^3)}^3 \leq C\sqrt{T}\|u\|_{L_t^4([0,T], L_x^\infty)}\|u\|_{L_t^\infty([0,T], L_x^2)}^2 \quad (26)$$

infatti, $\|u\|_{L_t^4([0,T], L_x^3)}^3 = \| \|u\|_{L_x^3} \|_{L_t^4([0,T])}^3$ quindi partendo da $\|u\|_{L_x^3}$ osserviamo che

$$\|u\|_{L_x^3}^3 \leq \|u\|_{L_x^\infty}\|u\|_{L_x^2}^2$$

quindi $\|u\|_{L_x^3} \leq \|u\|_{L_x^\infty}^{1/3}\|u\|_{L_x^2}^{2/3}$. Chiamiamo per semplicità $f = \|u\|_{L_x^\infty}$ e $g = \|u\|_{L_x^2}$, a questo punto

$$\|f^{1/3}g^{2/3}\|_{L_t^4([0,T])}^4 = \int_0^T |f|^{4/3}|g|^{8/3} dt \leq \|g\|_{L^\infty([0,T])}^{8/3} \int_0^T |f|^{4/3} dt \leq$$

per la disuguaglianza di Hölder, con le funzioni $|f|^{4/3}$ e 1 e con gli esponenti 3 e 3/2 otteniamo

$$\begin{aligned} &\leq C\|g\|_{L^\infty([0,T])}^{8/3} \left(\int_0^T (|f|^{4/3})^3 dt \right)^{1/3} \left(\int_0^T (1)^{3/2} dt \right)^{2/3} = \\ &C\|g\|_{L^\infty([0,T])}^{8/3} \|f\|_{L^4([0,T])}^{4/3} T^{2/3} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \|f^{1/3}g^{2/3}\|_{L_t^4([0,T])}^3 &\leq C\|f\|_{L^4([0,T])}\|g\|_{L^\infty([0,T])}^2 T^{1/2} = \\ &= C\sqrt{T}\|u\|_{L_t^4([0,T],L_x^\infty)}\|u\|_{L_t^\infty([0,T],L_x^2)}^2 \end{aligned}$$

dimostrando così la disequazione (26), risostituendo $f = \|u\|_{L_x^\infty}$ e $g = \|u\|_{L_x^2}$.

A questo punto considerando $R = 2C\bar{R}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \|I(u)(t)\|_{X_T} &\leq C\|u_0\|_{L_x^2} + C\sqrt{T}\|u\|_{L_t^4([0,T],L_x^\infty)}\|u\|_{L_t^\infty([0,T],L_x^2)}^2 \leq \\ &\leq CR + C\sqrt{T}(2CR)^3 \end{aligned}$$

dove abbiamo scritto R al posto di \bar{R} per semplificare la notazione. Impo-
nendo $\|I(u)(t)\|_{X_T} \leq 2CR$, si ottiene che

$$T \leq \left(\frac{2R - R}{8C^3R^3}\right)^2 = \left(\frac{1}{8C^3R^2}\right)^2 = \delta \quad (27)$$

quindi per $T \leq \delta$ abbiamo che $I : B_R \rightarrow B_R$.

Cerchiamo condizioni per verificare 2.

Siano u e $v \in B_R$, vogliamo far sì che

$$\|I(u)(t) - I(v)(t)\|_{X_T} < \|u(t) - v(t)\|_{X_T}.$$

$$\begin{aligned} \|I(u)(t) - I(v)(t)\|_{X_T} &= \underbrace{\left\| \int_0^t U(t-\tau) (|u(\tau, x)|^2 u(\tau, x) - |v(\tau, x)|^2 v(\tau, x)) d\tau \right\|_{X_T}}_{\text{per le stime di Strichartz (8)}} \leq \\ &\leq C\| |u|^2 u - |v|^2 v \|_{L_t^1([0,T],L_x^{r'})} \end{aligned}$$

con $1 \leq r \leq 4/3$ e $r' = 2r/(5r-4)$ una coppia ammissibile. Scegliamo $r = 1$
e $r' = 2$, otteniamo

$$\begin{aligned} \|I(u)(t) - I(v)(t)\|_{X_T} &\leq C\| |u|^3 - |v|^3 \|_{L_t^1([0,T],L_x^2)} \leq \\ &\leq C\| (u-v)(u^2 + v^2) \|_{L_x^2} \|_{L_t^1([0,T])}. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\|fg\|_{L^2} = \left(\int f^2 g^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty}$$

quindi

$$\| (u-v)(u^2 + v^2) \|_{L_x^2} \|_{L_t^1([0,T])} \leq \| \|u-v\|_{L_x^2} (\|u^2\|_{L_x^\infty} + \|v^2\|_{L_x^\infty}) \|_{L_t^1([0,T])}.$$

Consideriamo ora

$$\begin{aligned} \|fg\|_{L^1([0,T])} &= \int_0^T |fg| \leq \|f\|_{L^\infty} \int_0^T |g| \leq \\ &\leq C\|f\|_{L^\infty} \left(\int_0^T g^2 \right)^{1/2} \left(\int_0^T 1^2 \right)^{1/2} = CT^{1/2}\|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^2} \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di Cauchy. Applicando questo risultato, otteniamo

$$\begin{aligned} &\| \|u - v\|_{L_x^2} (\|u^2\|_{L_x^\infty} + \|v^2\|_{L_x^\infty}) \|_{L_t^1([0,T])} \leq \\ &CT^{1/2} \| \|u - v\|_{L_x^2} \|_{L_t^\infty} (\| \|u^2\|_{L_x^\infty} \|_{L_t^2} + \| \|v^2\|_{L_x^\infty} \|_{L_t^2}) \leq \\ &\leq CT^{1/2} \| \|u - v\|_{L_x^2} \|_{L_t^\infty} \left(\| \|u\|_{L_x^\infty} \|_{L_t^4}^2 + \| \|v\|_{L_x^\infty} \|_{L_t^4}^2 \right). \end{aligned}$$

Quindi

$$\|I(u)(t) - I(v)(t)\|_{X_T} \leq 2C(2CR)^2 T^{1/2} \|u - v\|_{L_t^\infty([0,T], L_x^2)}.$$

Per avere la contrazione dobbiamo imporre $8C^3 R^2 T^{1/2} < 1$, ovvero

$$T < \left(\frac{1}{8C^3 R^2} \right)^2 = \delta. \quad (28)$$

Allora per ogni $t \in [0, \delta]$ l'operatore integrale (25) $I(u)$ è una contrazione per lo spazio $L_t^\infty([0, \delta], L_x^2) \cap L_t^4([0, \delta], L_x^\infty)$, quindi ammette un unico punto fisso $u^*(t, x)$ tale che

$$u^*(t, x) = I(u^*(t, x)) = U(t)u_0(x) - i \int_0^t U(t - \tau) |u^*(\tau, x)|^2 u^*(\tau, x) d\tau.$$

Quindi per ogni fissato $u_0 \in L_x^2$, troviamo un $\delta > 0$ tale che esiste ed è unica $u \in L_t^\infty([0, \delta], L_x^2) \cap L_t^4([0, \delta], L_x^\infty)$ soluzione (locale) dell'equazione di Schrödinger non lineare (23). \square

Osservazione 6. *Dalla dimostrazione precedente, possiamo osservare che l'ampiezza dell'intervallo $[0, \delta]$ per cui esiste unica la soluzione dipende dalla norma L_x^2 del dato iniziale. Infatti*

$$\delta = \delta(R) = \left(\frac{1}{8C^3 R^2} \right)^2$$

dove $R = \|u_0\|_{L_x^2}$.

Inoltre valgono le seguenti relazioni:

$$\delta(R) \rightarrow \infty \text{ se } R \rightarrow 0$$

$$\delta(R) \rightarrow 0 \text{ se } R \rightarrow \infty$$

ovvero l'ampiezza dell'intervallo per cui esiste unica la soluzione è grande più il dato iniziale è piccolo (in norma L_x^2) e viceversa.

Il seguente teorema sfrutta appunto questa relazione:

Teorema 7 (Soluzione per dati iniziali piccoli).

Sia $T > 0$ esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $u_0 \in L_x^2$, con $\|u_0\|_{L_x^2} < \varepsilon$, esiste unica $u \in L_t^\infty([0, T], L_x^2) \cap L_t^4([0, T], L_x^\infty)$, soluzione di (23) per ogni $t \in [0, T]$.

Dimostrazione.

La dimostrazione ripete la strategia precedente, riapplicando il teorema della contrazione.

Fissiamo $T > 0$, per verificare che $I : B_R \rightarrow B_R$ e che sia una contrazione, basta riprendere la stima (27) e (28) e risolverla per R :

$$R < \left(\frac{1}{8C^3\sqrt{T}} \right)^{1/2} = \varepsilon. \quad (29)$$

Quindi, fissato $T > 0$, per ogni $u_0 \in L_x^2$ con $\|u_0\|_{L_x^2} \leq \varepsilon$ esiste ed è unica $u \in L_t^\infty([0, T], L_x^2) \cap L_t^4([0, T], L_x^\infty)$ soluzione dell'equazione di Schrödinger non lineare (23). \square

Il prossimo teorema estende un poco la relazione dell'osservazione 6:

Teorema 8 (Soluzione globale per dati iniziali piccoli).

Esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $u_0 \in L_x^2$, con $\|u_0\|_{L_x^2} < \varepsilon$, esiste unica $u \in L_t^\infty([0, +\infty), L_x^2) \cap L_t^4([0, +\infty), L_x^\infty)$, soluzione di (23) per ogni $t \in [0, +\infty)$.

Dimostrazione.

Dividiamo l'equazione di Schrödinger (23) in due:

$$\begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = \pm|u|^2 u \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \quad t \in [0, 1] \quad (30)$$

$$\begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = \pm|u|^2 u \\ u(1, x) = u_1(1, x) \end{cases} \quad t \in [1, +\infty) \quad (31)$$

dove u_1 è la soluzione della prima equazione (30), che per il teorema 7 esiste ed è unica in $t \in [0, 1]$ con $\|u_0\|_{L_x^2} < \varepsilon_1$ per un certo $\varepsilon_1 > 0$. Quindi la seconda equazione è ben definita.

Supponiamo che u_1 e u_2 siano soluzioni rispettivamente di (30) e di (31) e che siano uniche. Allora

$$u(t, x) = \begin{cases} u_1(t, x) & t \in [0, 1] \\ u_2(t, x) & t > 1 \end{cases}$$

è l'unica soluzione dell'equazione (23) per $t \in [0, +\infty)$, per l'unicità di u_1 e u_2 .

L'esistenza e unicità di u_1 è verificata dal teorema 7, considerando $\|u_0\|_{L_x^2} < \varepsilon_1$ per un certo $\varepsilon_1 > 0$. Dobbiamo ora dimostrarlo per u_2 .

Per far questo applicheremo la trasformazione Pseudo-Conforme (2): $\Psi : (t, x, u) \rightarrow (T, X, U)$, con $t \neq 0$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{t} \quad \text{e} \quad X = \frac{x}{t} \\ U(T, X) = \frac{1}{T^{1/2}} \bar{u}_2\left(\frac{1}{T}, \frac{X}{T}\right) e^{i\frac{X^2}{4T}} \end{cases}$$

poiché, per quanto già osservato precedentemente, u_2 è soluzione di (31) se e solo se U è soluzione di

$$\begin{cases} i\partial_T U - \partial_X^2 U = \frac{1}{T}|U|^2 U & T \in (0, 1] \\ U(1, X) = \bar{u}_1(1, X) e^{i\frac{X^2}{4}} \end{cases} \quad (32)$$

Per l'invarianza della trasformazione Pseudo-Conforme 14, si ha:

$$\|U\|_{L_T^p((0,1)L_X^q)} = \|u_2\|_{L_t^p((1,+\infty)L_x^q)} \quad (33)$$

$$\|U(1, X)\|_{L_X^2} = \|u_1(1, x)\|_{L_x^2} \quad (34)$$

$$\|F\|_{L_T^r((0,1)L_X^{r'})} = \|f\|_{L_t^r((1,+\infty)L_x^{r'})} \quad (35)$$

con (p, q) e (r, r') coppie ammissibili, e $F(U) = \frac{1}{T}|U|^2 U$. Quindi valgono per U le stime di Strichartz:

$$\|U\|_{L_T^\infty((0,1)L_X^2)} + \|U\|_{L_T^4((0,1)L_X^\infty)} \leq C\|U(1, X)\|_{L_X^2} + C\|F(U)\|_{L_T^r((0,1)L_X^{r'})} \quad (36)$$

con $1 \leq r \leq 4/3$ e $r' = 2r/(5r - 4)$ una coppia ammissibile. Infatti

$$\|U\|_{L_T^\infty((0,1)L_X^2)} + \|U\|_{L_T^4((0,1)L_X^\infty)} = \|u_2\|_{L_t^\infty((1,+\infty)L_x^2)} + \|u_2\|_{L_t^4((1,+\infty)L_x^\infty)} \leq$$

$$\leq C\|u_1\|_{L_x^2} + C\|f(u)\|_{L_t^r([0,T],L_x^{r'})} = C\|U(1, X)\|_{L_X^2} + C\|F(U)\|_{L_T^r((0,1),L_X^{r'})}.$$

Applicando il teorema delle contrazioni, come in precedenza, possiamo concludere che U è l'unica soluzione di (32) con $\|U(1, X)\|_{L_X^2} \leq \varepsilon_2$ per un certo $\varepsilon_2 > 0$. Di conseguenza anche u_2 è l'unica soluzione di (31) con $\|u_1(1, x)\|_{L_x^2} \leq \varepsilon_2$ per un certo $\varepsilon_2 > 0$.

Scegliendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ concludiamo che u_1 e u_2 sono le uniche soluzioni di (30) e (31), rispettivamente, con $\|u_0\|_{L_x^2} < \varepsilon$. \square

6 Simulazione numerica

Discutiamo brevemente un approccio computazionale al problema, utilizzando un codice octave per testare il comportamento delle soluzioni dell'equazione di Schrödinger, che abbiamo studiato precedentemente, con alcune funzioni test. La strategia impiegata per determinare la soluzione è quella di sfruttare il metodo del punto fisso, come visto anche in teoria. La successione che abbiamo considerato è così definita:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \text{ soluzione di } \begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = 0 \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \\ u_{n+1} \text{ soluzione di } \begin{cases} i\partial_t u - \partial_x^2 u = |u_n|^2 u_n \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases} \end{array} \right.$$

con dato iniziale $u_0(x) = \Psi(x) \in \mathcal{S}$, spazio di Schwartz, tale che $\|\Psi(x)\|_{L^2} = \varepsilon$. Per semplicità consideriamo come $\Psi(x)$ la Gaussiana:

$$\Psi(x) = \frac{\varepsilon}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

In seguito osserveremo come varia l'andamento delle soluzioni al variare di ε .

Entrambe sono equazioni alle derivate parziali. Applicando la trasformata di Fourier solo per la variabile x , ovvero:

$$\widehat{u}(t, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(t, x) dx \quad (37)$$

riusciamo a rendere le equazioni differenziali ordinarie. Possiamo quindi riscrivere la successione nel seguente modo, considerando con \widehat{u} la trasformata di Fourier solo per la variabile x (37):

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{u}_1 \text{ soluzione di } \begin{cases} i\partial_t \widehat{u} + \xi^2 \widehat{u} = 0 \\ \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi) \end{cases} \\ \widehat{u}_{n+1} \text{ soluzione di } \begin{cases} i\partial_t \widehat{u} + \xi^2 \widehat{u} = \widehat{u}_n *_{\xi} \widehat{u}_n *_{\xi} \widehat{u}_n \\ \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}_0(\xi) \end{cases} \end{array} \right.$$

dove, con il simbolo $*_{\xi}$ intendiamo la convoluzione per la variabile ξ . Scegliendo come dato iniziale la Gaussiana $\Psi(x)$, allora

$$\widehat{u}_0(\xi) = \widehat{\Psi}(\xi) = \frac{\varepsilon}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Infine, poiché nell'equazione di Schrödinger compare l'unità immaginaria i , consideriamo la funzione \hat{u} complessa. In questo modo possiamo riscrivere \hat{u} mostrando la parte reale e la parte immaginaria:

$$\hat{u} = \hat{u}_R + i\hat{u}_I.$$

Con questa considerazione, l'equazione omogenea può essere ripresentata come segue:

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u} = i\xi^2 \hat{u} &\Leftrightarrow \partial_t(\hat{u}_R + i\hat{u}_I) = i\xi^2(\hat{u}_R + i\hat{u}_I) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t \hat{u}_R = -\xi^2 \hat{u}_I \\ \partial_t \hat{u}_I = \xi^2 \hat{u}_R \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

separando parte reale e parte immaginaria.

Quindi l'equazione omogenea può essere riscritta come un sistema differenziale del primo ordine lineare, nelle incognite \hat{u}_R e \hat{u}_I . In questo caso, possiamo anche esplicitare la soluzione, ricordandoci che $\hat{u}(0, \xi) = \hat{\Psi}(\xi)$:

$$\begin{cases} \hat{u}_R = \hat{\Psi}(\xi) \cos(\xi^2 t) \\ \hat{u}_I = \hat{\Psi}(\xi) \sin(\xi^2 t) \end{cases} \quad (39)$$

e di conseguenza $\hat{u}_1 = \hat{\Psi}(\xi) (\cos(\xi^2 t) + i \sin(\xi^2 t))$.

Adoperiamo lo stesso argomento per l'equazione non lineare, considerando $\hat{v}_1 = \hat{u}_1 *_{\xi} \hat{u}_1 *_{\xi} \hat{u}_1$:

$$\partial_t \hat{u} = i\xi^2 \hat{u} - i\hat{v}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t \hat{u}_R = -\xi^2 \hat{u}_I + \hat{v}_{1,I} \\ \partial_t \hat{u}_I = \xi^2 \hat{u}_R - \hat{v}_{1,R} \end{cases} \quad (40)$$

dove $\hat{v}_{1,R}$ e $\hat{v}_{1,I}$ sono la parte reale e immaginaria di \hat{v}_1 .

Possiamo risolvere a questo punto l'equazione (40), con approccio numerico, e chiamiamo \hat{u}_2 la soluzione. Ci calcoliamo $\hat{v}_2 = \hat{u}_2 *_{\xi} \hat{u}_2 *_{\xi} \hat{u}_2$ e risolviamo l'equazione per determinarci \hat{u}_3 :

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}_R = -\xi^2 \hat{u}_I + \hat{v}_{2,I} \\ \partial_t \hat{u}_I = \xi^2 \hat{u}_R - \hat{v}_{2,R} \end{cases} \quad (41)$$

Quindi in generale, dopo aver calcolato \hat{u}_n soluzione dell'equazione non lineare, calcoliamo $\hat{v}_n = \hat{u}_n *_{\xi} \hat{u}_n *_{\xi} \hat{u}_n$ e otteniamo la nuova equazione:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}_R = -\xi^2 \hat{u}_I + \hat{v}_{n,I} \\ \partial_t \hat{u}_I = \xi^2 \hat{u}_R - \hat{v}_{n,R} \end{cases} \quad (42)$$

in modo da determinarci \widehat{u}_{n+1} .

Abbiamo osservato in teoria, nella dimostrazione del teorema 6 che la successione $\{\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \dots\}$ converge a \widehat{u} , soluzione dell'equazione di Schrödinger cubico (23) se $T < \delta(\varepsilon)$, dove $\varepsilon = \|\Psi(x)\|_{L^2}$ e T indica la lunghezza dell'intervallo di tempo, che noi consideriamo $[0, T]$, in cui cerchiamo la soluzione. Ricordiamo che se $\varepsilon \rightarrow 0$ allora $T \rightarrow +\infty$.

In questo modo siamo in grado di calcolarci la soluzione cercata. Per quanto riguarda l'approccio numerico, possiamo osservare che l'algoritmo è composto in pratica da due parti: il calcolo della soluzione per il sistema differenziale e il calcolo della convoluzione. Rimandiamo in appendice i codici utilizzati e i commenti relativi.

Il nostro obiettivo è confrontare al variare di ε l'andamento delle soluzioni. Prendiamo in esame i valori di $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$, e consideriamo per tutti i casi lo stesso intervallo di tempo $[0, \frac{1}{2}]$.

I risultati ottenuti sono riassunti nelle seguenti figure. Si indicherà con la sigla TF la trasformata di Fourier per la variabile x , come indicato in (37). I grafici seguenti rappresentano la trasformata di Fourier della soluzione.

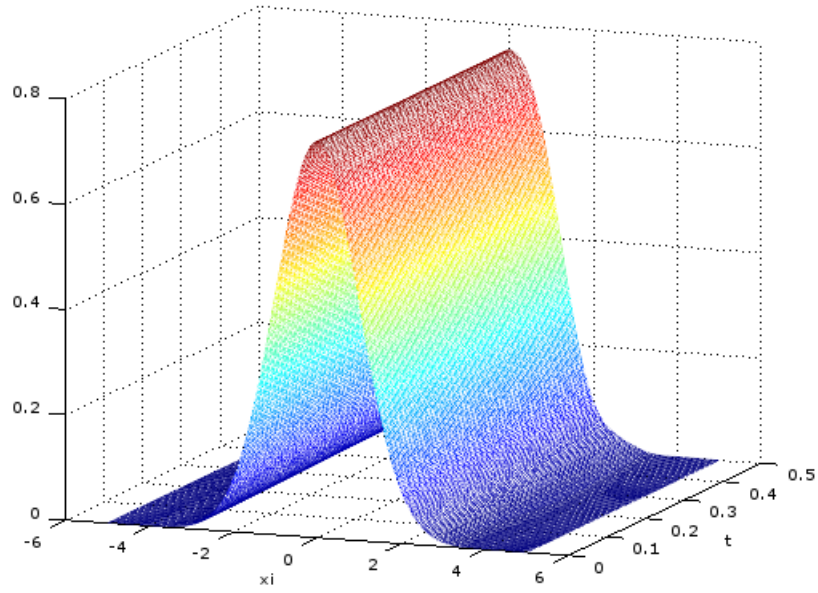


Figura 2: Parte reale della TF della soluzione di (23) con $\varepsilon = 1$

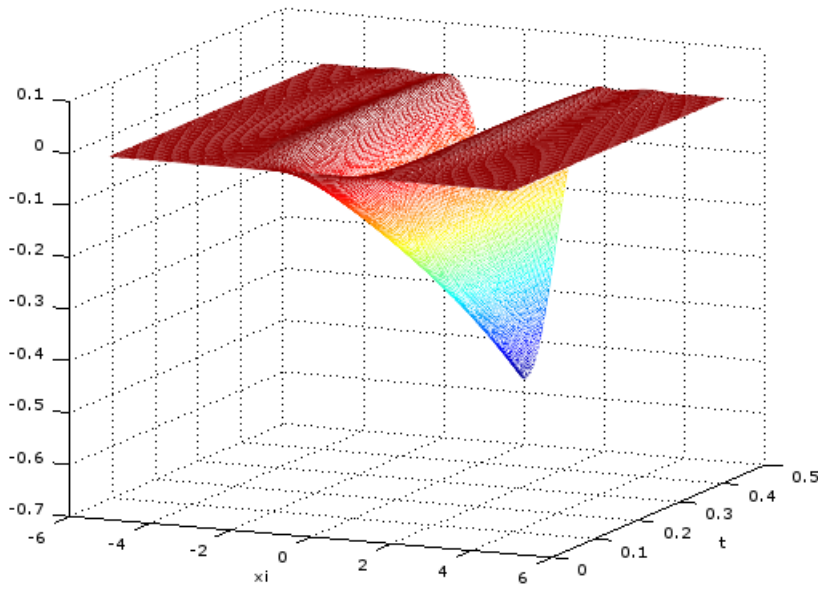


Figura 3: Parte immaginaria della TF della soluzione di (23) con $\varepsilon = 1$

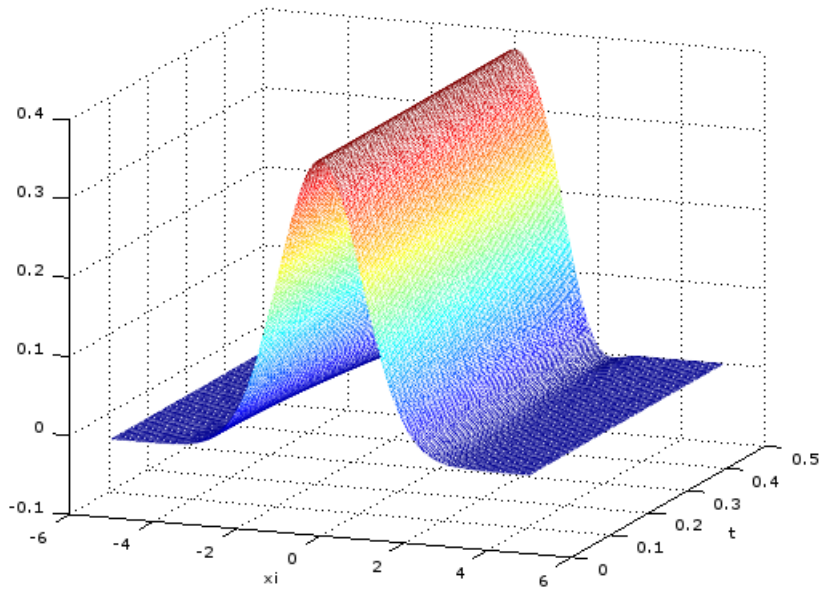


Figura 4: Parte reale della TF della soluzione di (23) con $\varepsilon = 1/2$

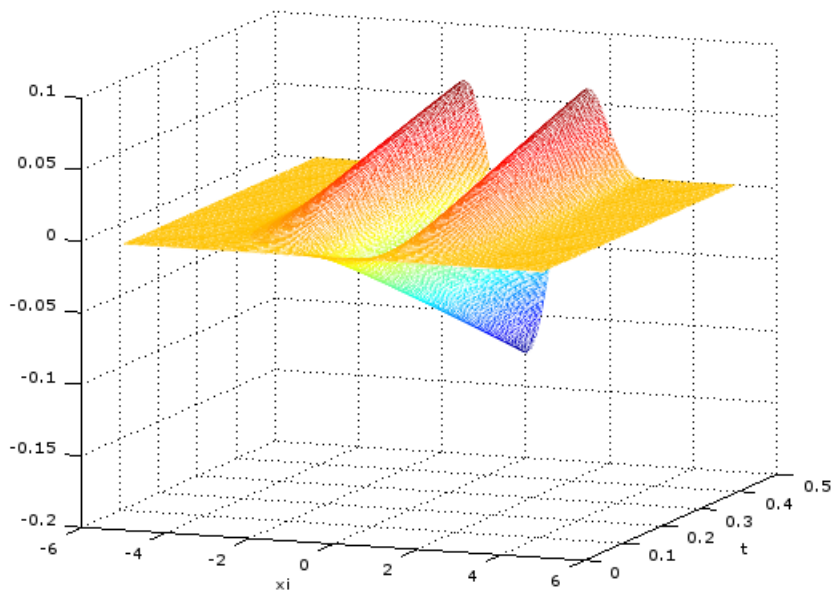


Figura 5: Parte immaginaria della TF della soluzione di (23) con $\varepsilon = 1/2$

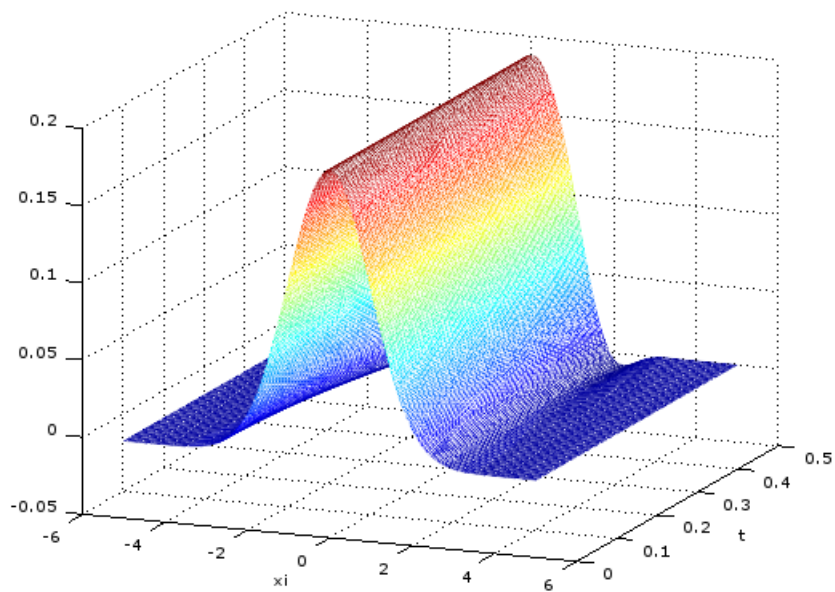


Figura 6: Parte reale della TF della soluzione di (23) con $\varepsilon = 1/4$

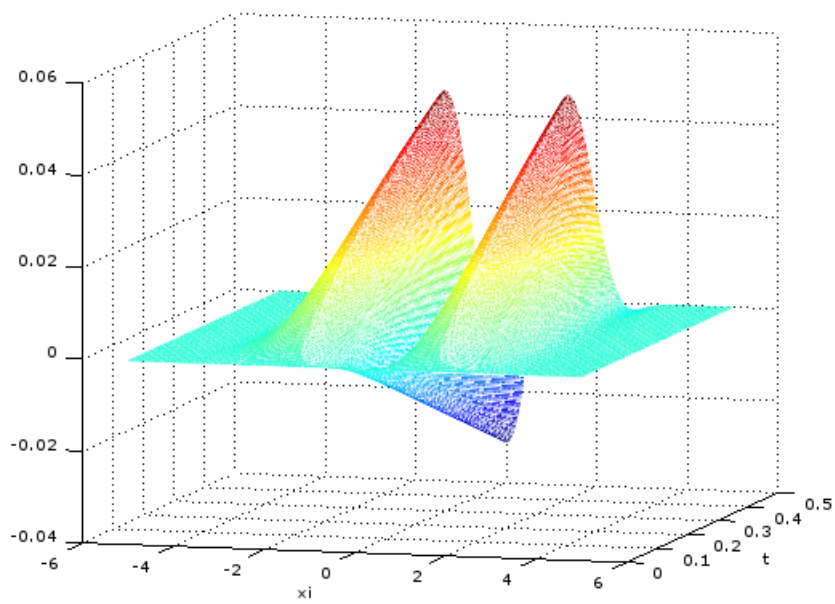


Figura 7: Parte immaginaria della TF della soluzione di (23) con $\varepsilon = 1/4$

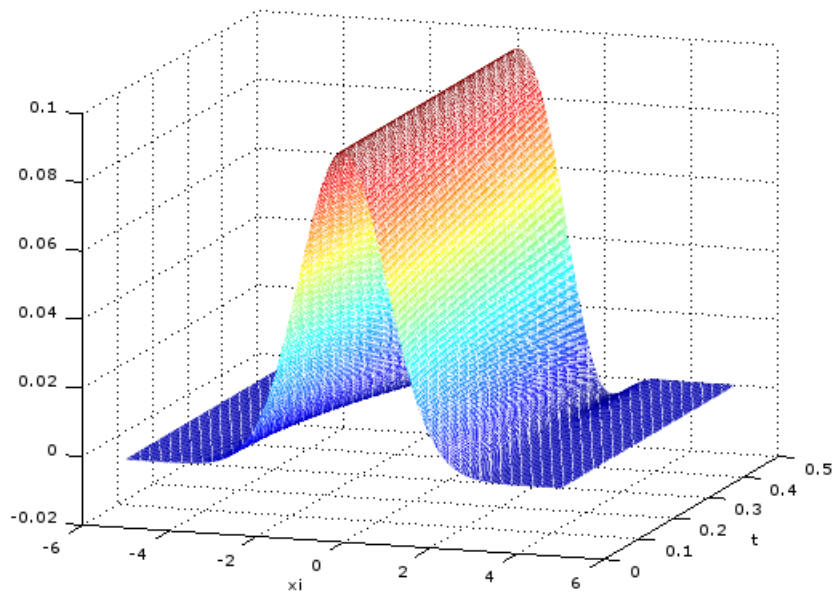


Figura 8: Parte reale della TF della soluzione di (23) con $\varepsilon = 1/8$

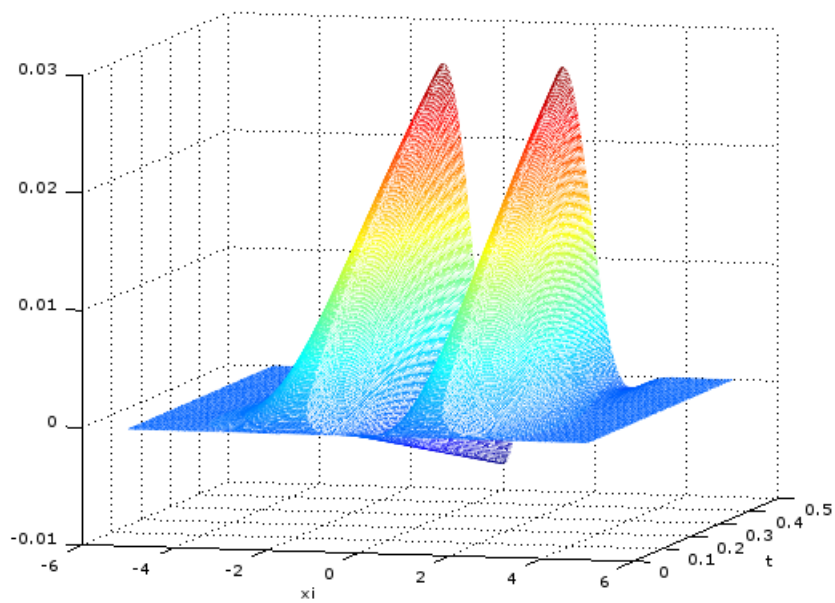


Figura 9: Parte immaginaria della TF della soluzione di (23) con $\varepsilon = 1/8$

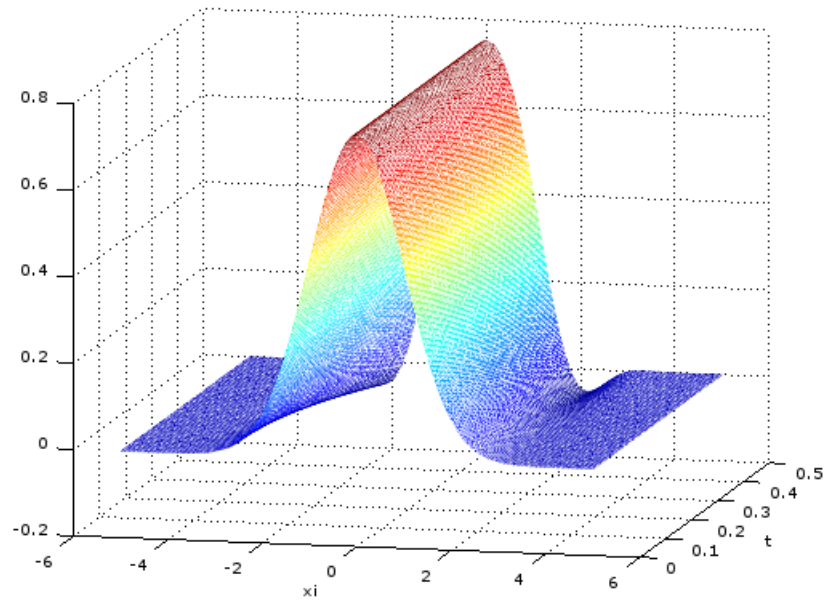


Figura 10: Parte reale della TF della soluzione dell'equazione lineare

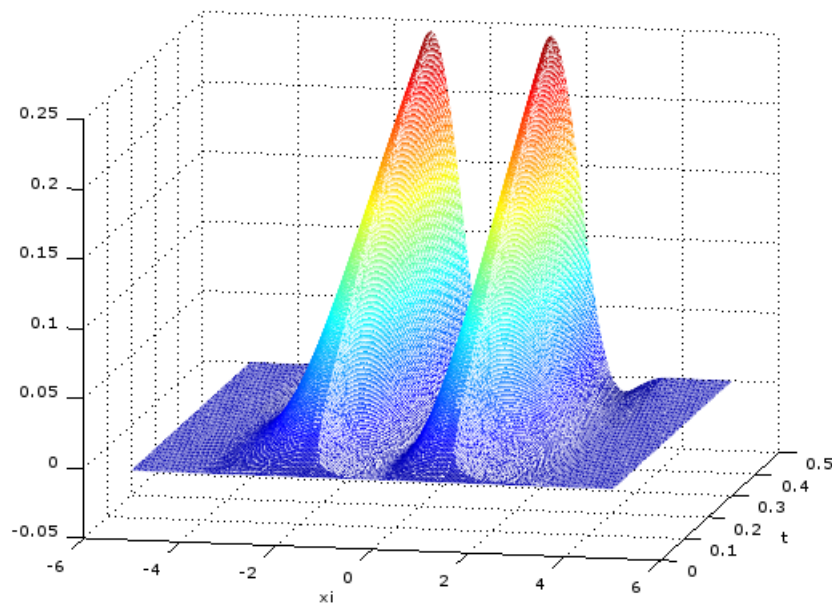


Figura 11: Parte immaginaria della TF della soluzione dell'equazione lineare

Confrontando i grafici della TF della soluzione dell'equazione non lineare con quelli della soluzione lineare, osserviamo che la parte reale è molto simile,

mentre la parte immaginaria è abbastanza diversa, conseguenza della non linearità cubica. Da questi grafici non è possibile stimare l'accuratezza dei risultati, ma attraverso l'osservazione dell'andamento delle norme riusciamo a trarre delle conclusioni.

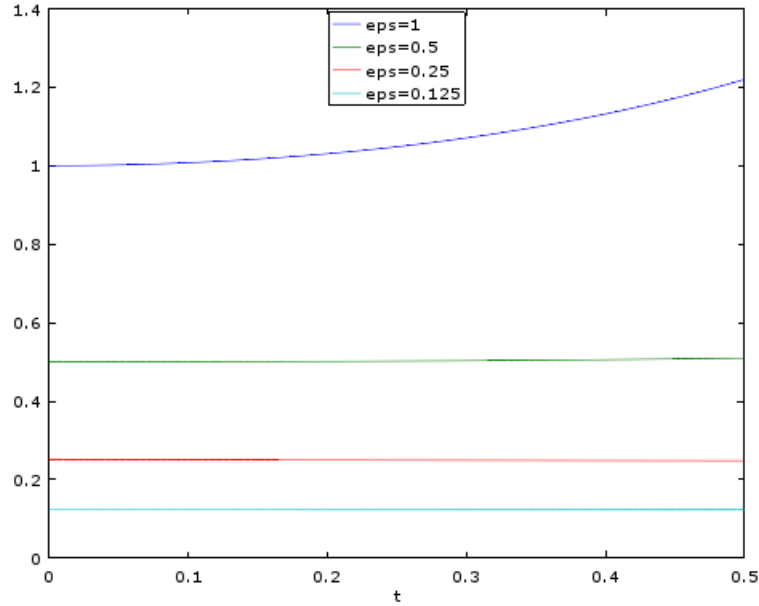


Figura 12: Norma L^2

Dal grafico della Figura 12 possiamo osservare come l'errore si propaghi nel tempo. Infatti la norma L_x^2 deve rimanere costante nel tempo (principio di conservazione della carica). Possiamo verificarlo facilmente: consideriamo l'equazione di Schrödinger non lineare

$$\begin{aligned}
 i\partial_t u - \partial_x^2 u &= |u|^2 u \Leftrightarrow \langle i\partial_t u - \partial_x^2 u, u \rangle_{L_x^2} = \langle |u|^2 u, u \rangle_{L_x^2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow i\frac{1}{2}\partial_t \|u\|_{L_x^2}^2 - \|\nabla u\|_{L_x^2}^2 = \|u\|_{L_x^4}^4.
 \end{aligned}$$

Prendendo la parte immaginaria, otteniamo che

$$\partial_t \|u\|_{L_x^2}^2 = 0$$

quindi la norma L_x^2 è costante nel tempo. Possiamo concludere dal grafico precedente che abbiamo un'ottima stima della soluzione per l'intervallo di tempo $[0, 1/2]$ per i casi in cui $\varepsilon = 1/2, 1/4$ e $1/8$, mentre per il caso $\varepsilon = 1$ abbiamo un errore abbastanza percepibile. Per stimare meglio la soluzione

dobbiamo restringere l'intervallo di tempo, ad esempio, osservando il grafico, un ottimo intervallo potrebbe essere $[0, 1/10]$ in cui la norma è quasi costante.

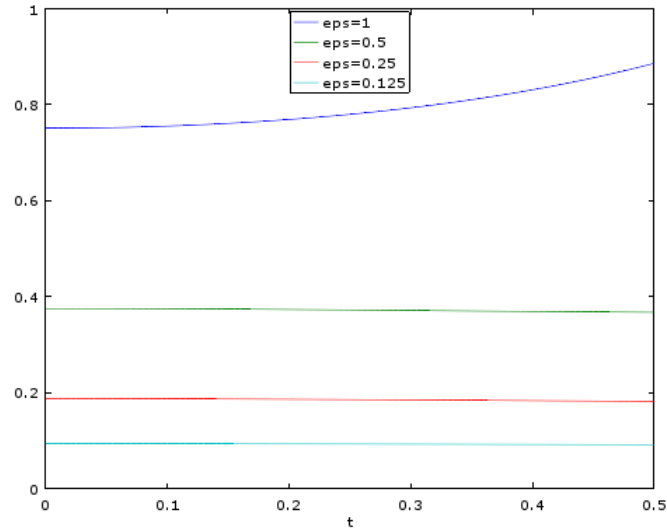


Figura 13: Norma $H^{1/2}$

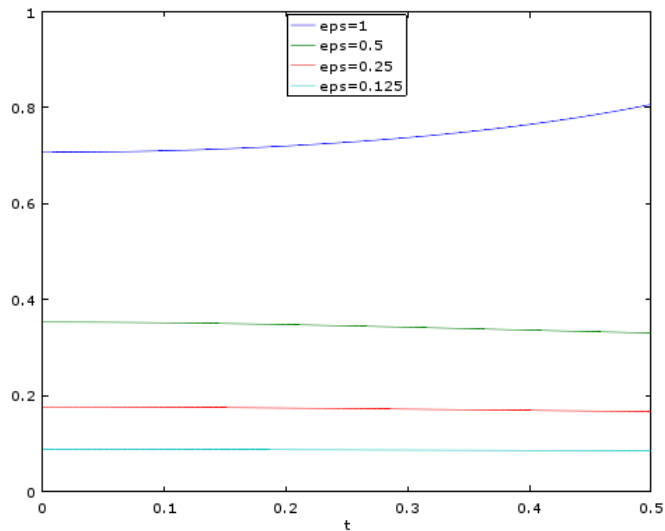


Figura 14: Norm H^1

Dal grafico della Figura 14 possiamo stimare l'energia.

Appendice

Mostriamo in appendice i codici Octave che implementano una risoluzione dell'equazione di Schrödinger e i relativi commenti. Consideriamo come dato iniziale la Gaussiana vista nel capitolo precedente

$$\hat{u}_0(\xi) = \frac{\varepsilon}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

definita dal seguente codice:

```
function y=u0Gauss(Csi,epsil)
Nmax=size(Csi)(2);
y=zeros(1,Nmax);
for N=1:Nmax
y(N)=(epsil/(pi^0.25))*exp(-(abs(Csi(N))^2)/2);
endfor
endfunction
```

Poiché il dato iniziale è una funzione pari e a decrescenza rapida e per le proprietà dell'equazione, possiamo considerare l'intervallo di ξ finito. Nel nostro caso consideriamo $\xi \in [-5, 5]$, anziché tutto \mathbb{R} . Discretizziamo a questo punto ξ e t , ricordandoci che abbiamo considerato l'intervallo di $t \in [0, 1/2]$, con i seguenti comandi:

```
Csi=linspace(-5,5,501);
delta=Csi(2)-Csi(1);
t=linspace(0,0.5,101);
```

Definiamoci il dato iniziale u_0 :

```
u0=u0Gauss(Csi,1)
```

Osserviamo che i risultati che otterremo dipenderanno dalla scelta di ε . In questo caso abbiamo scelto come ε 1, ma per gli altri tre casi basterà cambiare il valore di ε con 0.5, 0.25 oppure 0.125.

Applichiamo a questo punto la strategia descritta nel capitolo precedente. Ricordiamo che u_1 è la soluzione dell'equazione omogenea e si può trovare esplicitamente:

```
u1=u0mo(Csi,t,u0);
```

dove la funzione usata è:

```

function v=uOmo(Csi,t,u0)
xMaxDue=size(Csi,2);
tMax=size(t,2);
v=zeros(tMax,2*xMaxDue);
for Nt=1:tMax
for Nx=1:xMaxDue
v(Nt,2*Nx-1)=u0(Nx)*cos((Csi(Nx))^2*t(Nt));
v(Nt,2*Nx)=u0(Nx)*sin((Csi(Nx))^2*t(Nt));
endfor
endfor
endfunction

```

A questo punto calcoliamoci la convoluzione

```
uConv=SchrConvCubic(u1,delta);
```

dove la funzione per calcolare la convoluzione è la seguente:

```

function v=SchrConvCubic(u,delta)
[tMax,xMax]=size(u);
xMaxDue=xMax/2;
%ora scriveremo la convoluzione Ubar*U
v=zeros(tMax,xMax);
vConv=zeros(tMax,xMax);
EstrMin=((xMaxDue-1)/2)+1;
for N=1:xMaxDue
InfContr=N+1-EstrMin;
SupContr=N+xMaxDue-EstrMin;
if(InfContr>0)
v(:,2*N-1)=v(:,2*N-1)+u(:,1).*u(:,2*InfContr-1)+u(:,2).*u(:,2*InfContr);
v(:,2*N)=v(:,2*N)+u(:,1).*u(:,2*InfContr)-u(:,2).*u(:,2*InfContr-1);
endif
if(SupContr<=xMaxDue)
v(:,2*N-1)=v(:,2*N-1)+u(:,2*xMaxDue-1).*u(:,2*SupContr-1)+
u(:,2*xMaxDue).*u(:,2*SupContr);
v(:,2*N)=v(:,2*N)+u(:,2*xMaxDue-1).*u(:,2*SupContr)-
u(:,2*xMaxDue).*u(:,2*SupContr-1);
endif
for Neta=2:(xMaxDue-1)
EtaCsi=N+Neta-EstrMin;
if((EtaCsi>0)&&(EtaCsi<=xMaxDue))
v(:,2*N-1)=v(:,2*N-1)+2*(u(:,2*Neta-1).*u(:,2*EtaCsi-1))+

```

```

u(:,2*Neta).*u(:,2*EtaCsi));
v(:,2*N)=v(:,2*N)+2*(u(:,2*Neta-1).*u(:,2*EtaCsi)-
u(:,2*Neta).*u(:,2*EtaCsi-1)));
endif
endfor %Neta
endfor %N
delta=delta/2;
v=v*delta;
%ora scriveremo (Ubar*U)*U
for N=1:xMaxDue
InfContr=N+xMaxDue-EstrMin;
SupContr=N+1-EstrMin;
if(InfContr<=xMaxDue)
vConv(:,2*N-1)=vConv(:,2*N-1)+v(:,1).*u(:,2*InfContr-1)-
v(:,2).*u(:,2*InfContr);
vConv(:,2*N)=vConv(:,2*N)+v(:,1).*u(:,2*InfContr)+
v(:,2).*u(:,2*InfContr-1);
endif
if(SupContr>0)
vConv(:,2*N-1)=vConv(:,2*N-1)+v(:,2*xMaxDue-1).*u(:,2*SupContr-1)-
v(:,2*xMaxDue).*u(:,2*SupContr);
vConv(:,2*N)=vConv(:,2*N)+v(:,2*xMaxDue-1).*u(:,2*SupContr)+
v(:,2*xMaxDue).*u(:,2*SupContr-1);
endif
for Neta=2:(xMaxDue-1)
EtaCsi=N+xMaxDue+1-Neta-EstrMin;
if((EtaCsi>0)&&(EtaCsi<=xMaxDue))
vConv(:,2*N-1)=vConv(:,2*N-1)+2*(v(:,2*Neta-1).*u(:,2*EtaCsi-1)-
v(:,2*Neta).*u(:,2*EtaCsi));
vConv(:,2*N)=vConv(:,2*N)+2*(v(:,2*Neta-1).*u(:,2*EtaCsi)+
v(:,2*Neta).*u(:,2*EtaCsi-1));
endif
endfor %Neta
endfor %N
vConv=vConv*delta;
endfunction

```

Osserviamo che per calcolare la convoluzione si è utilizzato il calcolo dell'integrale con il metodo dei trapezzi.

Costruiamoci il secondo elemento della successione

```
u2=SolSchrNLCubic(Csi,t,u0,uConv);
```

dove la il codice della funzione è:

```
function v=SolSchrNLCubic(Csi,t,u0,uConv)
Nmax=size(Csi)(2);
Tmax=size(t)(2);
deltat=t(2)-t(1);
Tfin=t(Tmax);
v=zeros(Tmax,2*Nmax);
uConvRid=zeros(Tmax,2);
for N=1:Nmax
valoreCsi=Csi(N);
uConvRid(:,1:2) = uConv(:,(2*N-1):(2*N));
save valoreCsi valoreCsi uConvRid deltat Tfin Tmax
uIniziale=[u0(N) 0];
v(:,(2*N-1):(2*N))=lsode("EqSchrNLCubic",uIniziale,t);
endfor
endfunction
% % % % % % % %
function xdot=EqSchrNLCubic(x,t)
load valoreCsi
xdot=zeros(1,2);
if((t>=0)&&(t<=Tfin))
tnum=fix(t/deltat)+1;
lamda=(tnum*deltat-t)/deltat;
valoreConvRE=lamda*uConvRid(tnum,1)+(1-lamda)*uConvRid(tnum+1,1);
valoreConvIM=lamda*uConvRid(tnum,2)+(1-lamda)*uConvRid(tnum+1,2);
elseif((t<0)&&(t>=-Tfin))
tnum=fix(-t/deltat)+1;
lamda=(tnum*deltat-t)/deltat;
valoreConvRE=lamda*uConvRid(tnum,1)+(1-lamda)*uConvRid(tnum+1,1);
valoreConvIM=lamda*uConvRid(tnum,2)+(1-lamda)*uConvRid(tnum+1,2);
else
tnum=Tmax;
valoreConvRE=uConvRid(tnum,1);
valoreConvIM=uConvRid(tnum,2);
endif
xdot(1)=-valoreCsi^2*x(2)+valoreConvIM;
xdot(2)=valoreCsi^2*x(1)-valoreConvRE;
endfunction
```

A questo punto si reitera il procedimento:

```
uConv=SchrConvCubic(u2,delta);
u3=SolSchrNLCubic(Csi,t,u0,uConv);
uConv=SchrConvCubic(u3,delta);
u4=SolSchrNLCubic(Csi,t,u0,uConv);
uConv=SchrConvCubic(u4,delta);
u5=SolSchrNLCubic(Csi,t,u0,uConv);
.....
```

finché il valore $|u_n - u_{n-1}|$ è molto piccolo (dell'ordine di 10^{-6}), e lo calcoliamo con il seguente comando:

```
max(max(abs(u5-u4))).
```

Riferimenti bibliografici

- [1] J.B Baillon, T Cazenave, M Figueira *Equation de Schrödinger nonlinéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, **284** (1977), 869 – 872.
- [2] Yury A. Brychkov *ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ*, (1977).
- [3] M. Christ, A. Kiselev *Maximal Functions Associated to Filtrations*, Journal Functional Anal. **179** (2001) 409 – 425.
- [4] S. Cuccagna, V. Georgiev, N. Visciglia *Decay and scattering of small solutions of pure power NLS in R with $p > 3$ and with a potential*, Comm. Pure Appl. Math. **67** (2014), no. 6, 957 – 981. (Reviewer: Tohru Ozawa) 35Q55 (35B40 35P25).
- [5] J.Ginibre, G.Velo *On a class of nonlinear Schrödinger equations, I: The Cauchy problem, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 1 – 32. 0533218. DOI 10.1016/0022-1236(79)90076-4. (370)
- [6] J. Ginibre, G. Velo *On a class of nonlinear Schrödinger equations, II: Scattering theory, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), 33 – 71.
- [7] J. Ginibre, G. Velo *On a class of nonlinear Schrödinger equations, III: Special theories in dimensions 1, 2, and 3*, Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **28** (1978), 287 – 316.
- [8] J. Ginibre, G. Velo *The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lineaire, **2** (1985), 309 – 327.
- [9] J. Ginibre, G. Velo *Smoothing Properties and Retarded Estimates for Some Dispersive Evolution Equations*, Commun. Math. Phys. **144** (1992), 163 – 188.
- [10] J. Ginibre, G. Velo *Generalized Strichartz inequalities for the wave equation*, J. Funct. Anal. **133** (1995), 50 – 68.
- [11] N Hayashi, K Nakamitsu, M Tsutsumi *On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Math. Z., **192** (1986), 637 – 650.
- [12] L. Hörmander *The analysis of linear partial differential operators. I*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1983).

- [13] J.E Lin, W. A Strauss *Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation*, J. Funct. Anal., **30** (1978), 245 – 263.
- [14] T. Ozawa *Long Range Scattering for Nonlinear Schrödinger Equations in One Space Dimension*, commun. Math. Phys., **139** (1991), 479 – 493.
- [15] H Pecher, W von Wahl *Time dependent nonlinear Schrödinger equations*, Manuscripta Math., **27** (1979), 125 – 157.
- [16] M. Reed and B. Simon *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York, (1978).
- [17] W.A. Strauss *The nonlinear Schrodinger equation*, in "Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations", North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, (1978).
- [18] T. Tao *A pseudoconformal compactification of the nonlinear Schrödinger equation and applications*, arXiv:math/0606254 (2009).
- [19] Y. Tsutsumi *L^2 -solutions for nonlinear Schrodinger equations and nonlinear groups* Funkcialaj Ekvacioj **30** (1987) 115 – 125.
- [20] M Tsutsumi, N Hayashi *Classical solutions of nonlinear Schrödinger equations in higher dimensions*, Math. Z., **177** (1981), 217 – 234.
- [21] R Weder *$L^p - L^{p'}$ Estimates for the Schrödinger Equation on the Line and Inverse Scattering for the Nonlinear Schrödinger Equation with a Potential*, J. Funct. Anal., **170**, (2000) 37 – 68.