Indice

Introduzione

L'argomento principale di questa tesi è la *decomposizione di correnti normali*; il problema di demposizione nasce da una domanda di Frank Morgan (??) in cui chiedeva se data una k-corrente normale T di $\mathbb{R}^n$ è sempre possibile rappresentarla come combinazione convessa di correnti rettificabili. Questo significa avere la seguente rappresentazione integrale di T:

$$T = \int R \; d\mu(R), \tag{1}$$

per una qualche misura di probabilità μ concentrata sull'insieme delle correnti rettificabili e tale che

$$\int \mathbb{M}(R) \; d\mu(R) < +\infty \tag{2}$$

In aggiunta, se si vuole una certa compatibilità fra l'orientazione τ di T e le varie orientazioni τ_R delle correnti R si può chiedere che valga la *buona decomposizione della massa* di T ovvero

$$\mathbb{M}(T) = \int \mathbb{M}(R) \; d\mu(R). \tag{3}$$

Un' ulteriore propietà che si potrebbe richiedere alla decomposizione (1) è la *buona decomposizione della massa del bordo*:

$$\mathbb{M}(\partial T) = \int \mathbb{M}(\partial R) \; d\mu(R), \tag{4}$$

ma non porremo quasi mai molta attenzione a quest' ultima, siccome non è una richiesta naturale se si vuole rimanere nell' ambito generale della decomposizione di una corrente normale, e comunque vedremo già nel caso di 1-correnti che la (4) non è falsa in genrale. In letteratura il caso di 1-correnti normali è stato ampiamente studiato da S.K. Smirnov nel suo lavoro [16]. Anche se in [16] ci sono già tutti gli strumenti per ottenere una decomposizione in 1-correnti rettificabili, la deomposizione finale che si ottiene non è però in correnti rettificabili, ma nei cosiddetti *solenoidi elementari.* [1]. Questa decomposizione ha il vantaggio di godere anche della buona decomposizione della massa del bordo. Il risultato analogo nel caso di 1-correnti metriche è stato ottenuto nei lavori [12], [13] da E. Paolini e E. Stepanov. Quello che si conosce invece nel caso di k-correnti di $\mathbb{R}^n$ è che una $(n-1)$-corrente normale T avente bordo *rettificabile* ammette decomposizione in correnti intere, soddisfacente sia la buona decomposizione della massa di T che del bordo di T (risultato ottenuto da M.Zworski

[1](Si veda (1.16)-(1.19) di [16] per la definizione di solenoide elementare. Nel capitolo **??** discuteremo più approfonditamente il risultato ottenuto in [16]

in [18], sfruttando un'idea di R.M.Hardt e J.T.Pitt che si trova in [8]). Infine, sempre da [18], si sa che ogni k-corrente normale T del tipo $T = \xi\mathscr{L}^n$ con ξ k-campovettoriale semplice e di classe C^∞, ammette decomposizione in correnti intere con buona decomposizione della massa di T se e solo se ξ è integrabile[2].
In questo lavoro mostreremo la decomponibilità di 1-correnti normali in correnti intere con la buona propietà di decomposizione della massa in due modi diversi: il primo metodo segue la falsa riga di [12] e [13], mentre il secondo metodo è più diretto e permette di ottenere una decomposizione più velocemente. Proveremo poi che *ogni* $(n-1)$-corrente normale di $\mathbb{R}^n$ ammette decomposizione in correnti rettificabili con buona decomposizione della massa, e dedurremo in particolare come corollario che ogni $(n-1)$-campovettoriale di classe C^1 ammette correnti rettificabili *tangenti.* Mostreremo infine che quanto fatto è ottimale, esibendo una 2-corrente normale di $\mathbb{R}^3$ che non può ammettere decomposizione in correnti intere che sia anche una buona decomposizione della massa (*controesempio di Zworski*); per giustificare tale esempio useremo un risultato ottenuto da A.Massaccesi in [11] che è la generalizzazione del teorema di Frobenius a correnti intere.
I primi cinque capitoli sono dedicati all'introduzione della teoria e degli strumenti base che ci serviranno in seguito: essi hanno il solo scopo di richiamare i vari concetti, e raramente vi saranno delle dimostrazioni. Ci saranno comunque i riferimenti necessari per approfondimenti e/o dimostrazioni. Dopodichè il sesto capitolo è dedicato alla decomposizione di 1-correnti, il settimo alla decomposizione di $(n-1)$-correnti, mentre l'ottavo e ultimo capitolo è dedicato al controesempio di Zworski.

[2]Integrabilità intesa nel senso del teorema di Frobenius

Capitolo 1

Richiami sulle misure

La prima parte di questo capitolo ha lo scopo di introdurre la nozione di *misura* ed enunciare alcuni risultati che ci saranno utili in seguito. Rimandiamo comunque al primo e sesto capitolo di [15] per dimostrazioni e approfondimenti. Nella parte finale discuteremo tre diversi tipi di convergenza che si possono considerare nello spazio delle *misure positive*.

Definizione 1.1. Una collezione $\mathscr{A}$ di sottoinsiemi di un insieme X si dice σ-algebra in X se $\mathscr{A}$ ha le tre seguenti propietà

1. $X \in \mathscr{A}$.
2. Se $A \in \mathscr{A}$ allora $X \setminus A \in \mathscr{A}$.
3. Se $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ e se $A_i \in \mathscr{A}$ per ogni $i = 1, 2, 3, \ldots$, allora $A \in \mathscr{A}$.
   (a) Se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra, diciamo che X è uno *spazio misurabile* (sottointendendo che l'appellattivo *spazio misurabile* si riferisce alla coppia $(X, \mathscr{A})$), e chiamiamo gli elementi di $\mathscr{A}$ gli *insiemi misurabili* in X.
   (b) Se X è uno spazio misurabile, Y uno spazio topologico e f un'applicazione da X in Y, diciamo che f è *misurabile* se $f^{-1}(V)$ è un insieme misurabile in X per ogni aperto V in Y.

Si veda il Il seguente teorema ci dice che su un insieme X esistono sempre σ-algebre.

Teorema 1.2. *Se $\mathscr{F}$ è una qualsiasi collezione di sottoinsiemi di X, esiste una σ-algebra $\mathscr{A}^*$ che è la più piccola delle σ-algebre contenenti $\mathscr{F}$.*

Per una dimostrazione si veda il teorema 1.10 [15]. Qui ci limitiamo a notare che $\mathscr{A}^*$ è necessariamente anche unica.

Definizione 1.3. Sia X uno spazio topologico. Per il teorema 1.2 esisite in X la più piccola σ-algebra $\mathscr{B}$ fra quelle che contengono tutti gli insiemi aperti di X. Gli elementi di $\mathscr{B}$ si chiamano gli *insiemi di Borel* di X o i *boreliani* di X.

Definizione 1.4 (Misura positiva)**.** Una *misura positiva* è una funzione μ definita su una σ-algebra $\mathscr{A}$ a valori in $[0, \infty]$, e *numerabilmente additiva.* Ciò significa che, se $\{A_i\}$ è una famiglia numerabile di elementi a due a due disgiunti di $\mathscr{A}$, vale

$$\mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i).$$

Uno spazio misurabile X dotato di misura μ viene detto *spazio di misura* (riferendosi alla tripla $(X, \mathscr{A}, \mu)$). Ecco alcune propietà che si deducono direttamente dalla definizione di misura, teorema 1.19 [15]

Teorema 1.5. *Sia μ una misura positiva sulla σ-algebra $\mathscr{A}$;in tale ipotesi risulta:*

1. $\mu(\varnothing) = 0$.
2. $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_i) = \mu(A_1) + \ldots + \mu(A_n)$ *se $A_1, \ldots, A_i$ sono elementi di $\mathscr{A}$ a due a due disgiunti.*
3. *$A \subset B$ implica $\mu(A) \leq \mu(B)$ per $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{A}$.*
4. *$\mu(A_i) \to \mu(A)$ per $i \to +\infty$, se $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathscr{A}$, e*
$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$$
5. *$\mu(A_i) \to \mu(A)$ per $i \to +\infty$, se $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathscr{A}$, e*
$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots,$$
e $\mu(A_0)$ è finito.

Definizione 1.6. Sia X uno spazio topologico. Una misura positiva μ su X definita su una σ-algebra $\mathscr{A}$ che contiene tutti gli insiemi di Borel si chiama *misura di Borel su X*.
Diciamo che un insieme $E \in \mathscr{A}$ è *esternamente regolare* se

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subset V,\ V \text{ aperto}\}. \tag{1.1}$$

Diciamo che un insieme $E \in \mathscr{A}$ è *internamente regolare* se

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E,\ K \text{ compatto}\}. \tag{1.2}$$

Una misura μ per cui ogni insieme misurabile è sia internamente che esternamente regolare è detta *regolare*.

Definizione 1.7. Siano X uno spazio topologico e V uno spazio vettoriale normato finito dimensionale. Indichiamo con $C_c(X, V)$ lo spazio vettoriale delle funzioni da X in V continue e a supporto compatto dotato della norma *norma del* sup:

$$|f|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|. \tag{1.3}$$

Indichiamo con $C_0(X, V)$ la chiusura (topologica) rispetto alla norma del sup di $C_c(X, V)$. $C_0(X, V)$ è ovviamente uno spazio di Banach. Se $V = \mathbb{R}$ indicheremo più brevemente $C_c(X)$ al posto di $C_c(X, \mathbb{R})$ e $C_0(X)$ al posto di $C_0(X, \mathbb{R})$.

Enunciamo l'importante *teorema di rappresentazione di Riesz.* Teorema 2.14 di [15]

Teorema 1.8. *Sia X uno spazio localmente compatto di Hausdorff, e sia Λ un funzionale positivo lineare su $C_c(X)$. Esiste una σ-algebra $\mathscr{A}$ in X che contiene tutti gli insiemi di Borel in X, ed esiste una e una sola misura positiva μ su $\mathscr{A}$ che* rappresenta Λ *nel senso che*

1. $$\Lambda f = \int_X f \; d\mu,$$
   per ogni $f \in C_c(X)$, ed inoltre dotata delle seguienti propietà:
2. *$\mu(K) \leq \infty$ per ogni compatto $K \subset X$.*
3. *Per ogni $E \in \mathscr{A}$ si ha*
   $$\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subset V, \; V \text{ aperto}\}.$$
4. *Vale la relazione*
   $$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E, \; K \text{ compatto}\},$$
   per ogni insieme aperto E e per ogni $E \in \mathscr{A}$ con $\mu(E) \leq \infty$.
5. *Se $E \in \mathscr{A}$, $A \subset E$ e $\mu(E) = 0$, risulta $A \in \mathscr{A}$.*

Si può far vedere che nelle ipotesi di 1.8 il punto 4 è ottimale, più precisamente si possono costruire spazi localmente compatti di Hausdorff che ammettono un insieme boreliano E con $\mu(E) = \infty$ ma $\mu(K) = 0$ per ogni compatto contenuto in E. (Si veda captiolo 1, es. 16, [15]). Per avere nel teorema 1.8 una misura che renda tutti gli insiemi misurabili internamente regolari serve un' ipotesi aggiuntiva.

Definizione 1.9. Uno spazio topologico X si dice *σ-compatto* se si può scrivere come unione numerabile di compatti.

Valgono allora i teorema 2.17 e 2.18 di [15]:

Teorema 1.10 (Propietà di regolarità per misure di Borel)**.** *Supponiamo che X sia uno spazio di Hausdorff localmente compatto e σ-compatto. Se $\mathscr{A}$ contiene gli insiemi di Borel e μ soddisfa le propietà 2,3,4 del teorema 1.8, $\mathscr{A}$ e μ godono anche delle seguenti propietà*

1. *Se $E \in \mathscr{A}$ ed $\varepsilon > 0$ esistono un insieme chiuso F e un insieme aperto V tali che $F \subset E \subset V$ e $\mu(V \setminus F) \leq \varepsilon$.*
2. *μ è una misura regolare di Borel su X.*
3. *Se $E \in \mathscr{A}$ esistono due insiemi di Borel A e B tali che $A \subset E \subset B$ e $\mu(B \setminus A) = 0$.*

Teorema 1.11. *Sia X uno spazio di Hausdorff localmente compatto, in cui ogni iinsieme aperto sia σ-compatto. Sia λ una qualsiasi misura di Borel positiva su X tale che $\lambda(K) < \infty$ per ogni compatto K. In tali ipotesi λ è regolare.*

Definizione 1.12. Una misura μ di Borel regolare sullo spazio topologico X, tale che $\mu(K) < \infty$ per ogni compatto K si dice di *Radon.* Definiamo $\mathscr{M}(X)^+$ lo spazio delle misure positive di Radon su X tali che $\mu(X) < \infty$.

$\mathscr{M}(X)^+$ lo si può vedere come spazio di Banach, ma questo sarà conseguenza naturale del teorema di *rappresentazione di riesz per funzionali limitati* e lo vedremo fra un attimo.

Definizione 1.13. Sia μ una misura positiva definita sulla σ-algebra $\mathscr{A}$ di uno spazio topologico X. Definiamo supporto di μ il complementare del più grande aperto V per cui ogni $x \in V$ ammette un intorno su cui μ si annulla. Tale insieme lo indichiamo con sptμ.
Diciamo invece che μ è concentrata su $E \in \mathscr{A}$ se $\mu(X \setminus E) = 0$.

Osservazione 1.14. Non vi è nessun tipo di inclusione fra la definizione di supporto e l'essere concentrata. E' charo infatti che ogni misura è concentrata sul suo supporto o su tutto l'insieme X. D'altra parte la misura di Borel così definita

$$\mu := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i^2} \delta_{q_i},$$

dove $\{q_i\}_{i=0}^{\infty}$ è una qualsiasi numerazione dei razionali di $[0,1]$, ha supporto che è tutto $[0,1]$, ma è ad esempio concentrata solo sui razionali.

Definizione 1.15 (Misura vettoriale)**.** Sia V uno spazio vettoriale finito dimensionale e con norma che indicheremo con $|\cdot|$; indichiamo con V^* lo spazio vettoriale duale di V dotato della *norma duale* $|\cdot|_*$ che come al solito è definita da

$$|\Phi|_* := \sup_{|v| \le 1} \langle \Phi; v \rangle, \quad (\Phi \in V^*).$$

Sia $\mathscr{A}$ una σ-algebra in un insieme X. Una *misura a valori in* V o semplicemente una *misura vettoriale* è una mappa da $\mathscr{A}$ a valori in V tale che

$$\mu(E) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(E_i), \quad (E \in \mathscr{A}) \tag{1.4}$$

dove $\{E_i\}$ è una qualsiasi partizione di E composta da elementi della σ-algebra; la relazione (1.4) va intesa come convergenza della serie nella norma $|\cdot|$.

Notiamo che in questo caso chiediamo che la serie converga ad un qualche elemento di V e quindi non ammettiamo che possa divergere in nessun senso, come poteva invece accadere nel caso di misure positive in cui ammettevamo la divergenza a $+\infty$. Dunque in questo senso non è vero che le misure positive sono una sottoclasse delle misure vettoriali. E' invece vero che lo spazio $\mathscr{M}(X)^+$ è un sottospazio delle misure vettoriali a valori in $\mathbb{R}$; queste ultime sono anche dette *misure con segno.*
Ad ogni misura vettoriale μ possiamo associare la propria *misura variazione totale*

$$|\mu|(E) := \sup \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(E_i)|, \quad (E \in \mathscr{A}) \tag{1.5}$$

dove il sup è fatto su tutte le partizioni numerabili e misurabili di E. Si può verificare che $|\mu|$ sia effettivamente una misura, ovviamente positiva, e in più che la richiesta di convergenza della serie in (1.4) porta alla finitezza di $|\mu|$. Vale infatti il teorema

Teorema 1.16. *La variazione totale $|\mu|$ di una misura vettoriale μ su X è una misura positiva su X. Inoltre si ha*

$$|\mu|(X) < \infty.$$

Definizione 1.17. Una misura vettoriale di Borel μ su uno spazio topologico X, si dice regolare se lo è la sua misura variazione totale $|\mu|$ nel senso della definizione 1.6.

Definizione 1.18 ($L^1(\mu)$)**.** Sia μ una misura positiva su un insieme misurabile X. Diciamo che una mappa f da X in V sta in $L^1(\mu)$ se è misurabile (rispetto alla σ algebra di μ) e tale che

$$\int_X |f| d\mu < +\infty. \tag{1.6}$$

Esempio 1.19. *Un'ampia classe di misure vettoriali di Borel regolari (e vedremo che in realtà sono le uniche) su uno spazio topologico X è quella data dalle misure $\tau\mu$ dove $\mu \in \mathscr{M}^+$ e τ è una mappa misurabile da X in V, e*

$$\tau\mu(E) = \int_E \tau \; d\mu = (\int_E \tau_1 \; d\mu, \dots, \int_E \tau_n \; d\mu), \quad (E \in \mathscr{A})$$

dove $(\tau_1(x), \dots, \tau_n(x))$ sono le componenti del vettore $\tau(x)$ rispetto a una base di V. E' facile verificare in questo caso che

$$|\tau\mu|(E) = \int_E |\tau| \; d\mu. \quad (E \in \mathscr{A}).$$

Inoltre se f è una funzione continua limitata a valori in V^*, l'integrale di f rispetto alla misura $\tau\mu$ è

$$\int_X f \; d(\tau\mu) := \int_X \langle \tau; f \rangle \; d\mu,$$

dove il simbolo $\langle \cdot; \cdot \rangle$ indica l'accoppiamento di dualità fra V e V^*.

Definizione 1.20. Sia μ positiva su una σ-algebra $\mathscr{A}$ di un insieme X, e λ una misura vettoriale su $\mathscr{A}$.
Diremo che λ è *assolutamente continua* rispetto e μ e scriveremo

$$\lambda \ll \mu, \tag{1.7}$$

se $\lambda(E) = 0$ per ogni $E \in \mathscr{A}$ per cui $\mu(E) = 0$.
Diciamo invece che due misure λ_1, λ_2 su $\mathscr{A}$ sono *singolari*, e lo indichiamo

$$\lambda_1 \perp \lambda_2, \tag{1.8}$$

se λ_1, λ_2 sono concentrate su insiemi disgiunti.

Enunciamo il teorema fondamentale concernente la continuità assoluta.

Teorema 1.21. *Siano μ una misura positiva e finita, λ una misura vettoriale entrambe definite sulla sigma-algebra $\mathscr{A}$ in un insieme X.*

1. *Esiste un'unica coppia di misure vettoriali λ_a, λ_s su $\mathscr{A}$ tale che*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

2. (Teorema di Radon-Nikodym). *Esiste un'unica $h \in L^1(\mu)$ tale che*

$$\lambda_a(E) = \int_E h \; d\mu, \quad (E \in \mathscr{A}).$$

Un corollario al teorema 1.21 è che ogni misure vettoriale si può scrivere come nell'esempio 1.19, più precisamente vale

Proposizione 1.22. *Sia μ una misura vettoriale su una σ-algebra $\mathscr{A}$ di un insieme X. μ si può scrivere come*

$$\lambda = \tau|\lambda|, \tag{1.9}$$

dove $\tau: X \to V$ è una mappa misurabile e $|\lambda|$-q.o. unitaria ($|\tau(x)| = 1$ per $|\lambda|$-q.o. $x \in \mathbb{R}^n$).

Osservazione 1.23. Si verifica facilmente che una coppia τ', μ' soddisfacente la tesi di 1.22 è unica nel senso che $\mu' = |\lambda|$ e $\tau' = \tau$ $|\lambda|$-q.o.

Definizione 1.24. La mappa τ data dalla proposizione 1.22 si chiama orientazione di λ. Il termine orientazione sarà naturale quando parleremo di correnti rettificabili.

Ora siamo finalmente giunti al Teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali limitati (o equivalentemente continui). Sia ora X uno spazio di Hausdorff localmente compatto. Il teorema 1.8 caratterizza i funzionali lineari *positivi* su $C_c(X)$. Vogliamo ora un teorema che caratterizzi i funzionali lineari *limitati* su $C_c(X, V^*)$. Poichè $C_c(X, V^*)$ è un sottospazio denso di $C_0(X, V^*)$, tanto vale estendere per continuità i nostri funzionali su tutto lo spazio di Banach $C_0(X, V^*)$.

Teorema 1.25. *Ad ogni funzionale lineare limitato Φ su $C_0(X, V^*)$, ove X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto, V uno spazio vettoriale finito-dimensionale e normato, corrisponde una e una sola misura vettoriale λ di Borel regolare, per la quale vale*

$$\Phi(f) = \int_X f \; d\lambda \quad \forall f \in C_0(X, V^*). \tag{1.10}$$

Inoltre risulta

$$\sup_{\substack{|f|_{*\infty} \leq 1 \\ f \in C_0(X,V^*)}} \Phi(f) = |\lambda|(X). \tag{1.11}$$

Inoltre grazie alla proposizione 1.22 abbiamo che $\lambda = \tau|\lambda|$ con $\tau: X \to V$ mappa misurabile e $|\lambda|$-q.o. unitaria.

Osservazione 1.26. Il fatto che la misura variazione totale sia una norma sullo spazio vettoriale delle misure di Borel regolari su X fa parte della tesi di 1.25.
Il teorema 1.25 ci dice che la classe di misure vettoriali definite nell'esempio 1.19 in realtà sono tutte e sole le misure vettoriali di Borel regolari su X.
Un'altra osservazione che ci sarà molto utile è che(1.11) dice che la mappa che associa a Φ la misura $\tau|\lambda|$ che lo rapresenta è un isometria. Il teorema 1.25 ci permette dunque di *identificare lo spazio duale di $C_0(X, V^*)$ ovvero dei funzionali lineari limitati definiti su $C_0(X, V^*)$, con lo spazio vettoriale delle misure vettoriali di Borel regolari su X dotato della norma misura variazione totale.*

Definizione 1.27. Siano X uno spazio di Hausdorff localmente compatto, e V uno spazio vettoriale normato e finito dimensionale. Indicheremo con $\mathscr{M}(X, V)$ lo spazio vettoriale delle misure di Borel regolari su X a valori in V. Quando $V = \mathbb{R}$ indicheremo più brevemente $\mathscr{M}(X)$ per indicare $\mathbb{M}(X, \mathbb{R})$. Notiamo che in questo caso vale l'inclusione fra spazi di Banach $\mathscr{M}(X)^+ \subset \mathscr{M}(X)$.

Restringiamo ora la nostra attenzione al caso in cui X è uno *spazio metrico localmente compatto*. Denotiamo con d la sua distanza.Vogliamo discutere tre diverse topologie che si possono considerare su tale insieme.
La topologia più naturale è quella *debole** (o anche detta in dualità con $C_c(X)$) che tale spazio eredita come sottospazio vettoriale del duale di $C_c(X)$ (si ricordi l'osservazione 1.26 al teorema 1.25). In questa topologia la convergenza di successioni è caratterizzata da

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \ \text{ in } \mathscr{M}(X)^+ \iff \int_X \varphi \, d\mu_n \to \int_X \varphi \, d\mu \quad \forall \varphi \in C_c(X). \tag{1.12}$$

Grazie al *teorema di compattezza di Banach-Alaoglu* sappiamo che gli insiemi limitati in $\mathscr{M}(X)^+$ sono relativamente debole-* compatti e quindi da ogni successione limitata in $\mathscr{M}(X)^+$ se ne può estrarre una debole-* convergente. Si veda ad esempio [4] o un qualsiasi altro testo di analisi funzionale per una trattazione completa dell'argomento.

Per la seconda topologia abbiamo bisogno di una definizione.

Definizione 1.28. Indichiamo con $C_b(X)$ lo spazio delle funzioni reali continue e limitate definite su X, dotato della norma del sup.

Un'altra topologia che si può consideare sullo spazio $\mathscr{M}(X)^+$ è quella in *dualità con* $C_b(X)$. In tale topologia la convergenza associata è

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \ \text{ in dualità con } C_b(X) \iff \int_X \varphi \, d\mu_n \to \int_X \varphi \, d\mu \quad \forall \varphi \in C_b(X). \tag{1.13}$$

. Chiaramente la convergenza in dualità con C_b implica la convergenza debole-*; se lo spazio X è compatto le due convergenze coincidono. In questo caso vale il *teorema di Prokhorov* che lega la relativa sequenziale compattezza alla proprietà di *equitightness.*

Definizione 1.29 (Equitightness)**.** Sia $\mathscr{I} \subset \mathscr{M}(X)^+$. Allora diciamo che la famiglia di misure $\mathscr{I}$ è equitight se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subseteq X$ tale che per ogni $\mu \in \mathscr{I}$ si abbia $\mu(X \setminus K) \leq \varepsilon$.

Vale allora il seguente (si veda ad esempio [3]):

Teorema 1.30 (Prokhorov)**.** *$\mathscr{I} \subset \mathscr{M}(X)^+$ è equitight se e solo se $\mathscr{I}$ è relativamente sequenzialmente compatta nella dualità con $C_b(X)$.*

Notiamo ancora che se X è compatto il teorema di Prokhorov diventa un sottocaso del teorema di compattezza di Banach-Alaoglu.

Infine l'ultima topologia che consideremo su $\mathscr{M}(X)^+$ è quella indotta dalla *distanza di Wasserstein 1* $\mathbb{W}_1(\mu_1, \mu_2)$ (si veda il paragrafo 7.1 di [17]). A questo punto però ci conviene restringere la nostra attenzione al sottoinsieme $\mathscr{P}(X) \subset$

$\mathscr{M}(X)^+$ delle misure di probabilità. Ricordiamo brevemente che un modo per definire la distanza di Wasserstein fra due misure di probabilità μ_1, μ_2 su di uno spazio metrico localmente compatto è ()

$$\mathbb{W}_1(\mu_1, \mu_2) = \sup_{\varphi \in \mathrm{Lip}_1(X)} \int_X \varphi \ (d\mu_1 - d\mu_2) \tag{1.14}$$

dove per $\mathrm{Lip}_1(X)$ si intende l'insieme delle funzioni 1-lipschitziane su X. Si può provare la seguente proposizione che caratterizza la convergenza nella distanza $\mathbb{W}_1$ (teorema 7.12 di [17]):

Proposizione 1.31. *Sia $\{\mu_k\}$ una successione in $\mathscr{P}(X)$. Allora μ_k converge a μ nella distanza di Wasserstein se e solo se μ_k converge a μ in dualità con $C_b(X)$ e $\int_X d(x, x_0) d\mu_k(x) \to \int_X d(x, x_0) d\mu(x)$ per un qualche (e quindi ogni per la disuguaglianza triangolare) $x_0 \in X$.*

Vedremo nel capitolo relativo alla decomposizione di 1-correnti come la richiesta

$$\int_X \mathrm{d}(x, x_0) d\mu_k(x) \to \int_X \mathrm{d}(x, x_0) d\mu(x) \tag{1.15}$$

sia necessaria, esibendo un esempio di successione di misure che tendono in dualità con C_b ma non nella distanza di Wasserstein. Notiamo anche che la proposizione 1.31 ci dice in particolare che $\mathscr{P}(X)$ con la distanza $\mathbb{W}_1$ è uno spazio metrico completo.

Capitolo 2

Richiami di algebra multilineare

Vogliamo introdurre brevemente gli spazi dei *k-covettori* e dei *k-vettori* per poi elencare alcuni degli operatori standard che agiscono su questi spazi, quali prodotto esterno, prodotto interno e operatore di Hodge. Citeremo il teorema che lega i k-vettori semplici e unitari ai k-spazi orientati. Definiremo infine la *norma della massa* e la *norma della comassa.*

In questo capitolo supporemo che

1. V sia uno spazio vettoriale (reale),
2. V^* il suo duale.

Definizione 2.1. Una *k-forma alternante* su V è una funzione

$$\alpha : V^k \to \mathbb{R},$$

tale che

- α è lineare in *ogni variabile*;
- α è alternante, cioè

  $$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\alpha(v_1, \dots, v_k),$$

  per ogni permutazione k-upla $v_1, \dots, v_k \in V$ e ogni permutazione di k-elementi $\sigma \in \Sigma(k)$. Equivalentemente se scambiamo qualsiasi coppia di elementi in $\alpha(v_1, \dots, v_k)$, il valore cambia segno.

Indicheremo lo spazio-vettoriale delle k-forme alternanti su V con $\Lambda^k(V)$.

Osservazione 2.2. Notiamo che

- Poniamo $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$
- $\Lambda^1(V) = V^*$

- $\Lambda^k(V)$ ha dimensione k se $\dim V = k$. Questo deriva dal fatto ben noto che il determinate è unicamente determinato chiedendo che sia una k-forma alternante su $\mathbb{R}^n$ e tale che $\det I = 1$.

- Se $\alpha \in \Lambda^k(V)$ e $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti, allora $\alpha(v_1, \ldots, v_k) = 0$. Infatti basta supporre che ad esempio v_k si scriva come combinazione lineare dei $v_1, \ldots, v_{k-1}$ ed usare i due punti precedenti.

- $\Lambda^k(V) = 0$ se $k > \dim V$. Segue direttamente dal punto precedente.

Definizione 2.3 (Prodotto esterno)**.** Dati $\alpha \in \Lambda^h(V)$ e $\beta \in \Lambda^k(V)$ definiamo $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{h+k}(V)$ come

$$(\alpha\wedge\beta)(v_1, \cdots, v_{h+k}) := \frac{1}{h!k!} \sum_{\sigma\in\Sigma(h+k)} \operatorname{sign}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(h)})\beta(v_{\sigma(h+1)}, \cdots, v_{\sigma(h+k)}), \tag{2.1}$$

per ogni $v_1, \ldots, v_{h+k} \in V$.

Osservazione 2.4 (Propietà del prodotto esterno)*.* Notiamo che

- Ogni addendo della formula è lineare in ogni variabile ma non necessariamente alternante;

- Si verifica che effettivamente la somma totale di tali addendi è invece una $(h + k)$-forma alternante;

- Il prodotto esterno è lineare in tutte e due i fattori;

- Il prodotto esterno è *associativo* (questo fatto richiede un minimo di dimostrazione e non segue in modo immediato);

- Il prodotto esterno *non è commutativo*, ma bensì vale

  $$\beta \wedge \alpha = (-1)^{hk} \alpha \wedge \beta, \tag{2.2}$$

  ed in particolare $\alpha \wedge \alpha = 0$ se h è dispari.

- Il fattore di rinormalizzazione $1/(h!k!)$ verrà spiegato fra un attimo.

Ora si fissi una base $e_1 \ldots, e_n$ di V. Sia $e_1^*, \ldots, e_n^*$ la corrispondente base duale di $V^* = \Lambda^1(V)$, cioè

$$\left\langle e_i^*; e_j \right\rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n.$$

Ora sia $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k) \in \Sigma(n, k)$ un multi-indice, e sia $I(n, k)$ l'insieme dei multi-indici $\mathbf{i}$ tali che

$$1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k < n.$$

Per tali $\mathbf{i}$ definiamo

$$\mathbf{e}_\mathbf{i}^* := e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^*. \tag{2.3}$$

Valgono allora le tre seguenti proposizioni.
Nella proposizione che segue ha ruolo fondamentale il fattore di rinormalizzazione $1/(h!k!)$ della definizione 2.3

Proposizione 2.5. *Per ogni $\boldsymbol{i}$ ed ogni $v_1, \ldots, v_k \in V$, vale*

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}^*(v_1, \cdots v_k) = \det A, \tag{2.4}$$

dove A è la matrice $k \times k$

$$A_{jl} := e_{i_j}^*(v_l).$$

Proposizione 2.6. *L'insieme $\{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}^* \mid \boldsymbol{i} \in I(n,k)\}$ è una base di $\Lambda^k(V)$, e più precisamente ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$ si può scrivere come*

$$\alpha = \sum_{\boldsymbol{i} \in I(n,k)} \alpha_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}^*,$$

con $\alpha_{\boldsymbol{i}} := \alpha(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$.

Proposizione 2.7 (Formula di Cauchy-Binet)**.** *Per ogni matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ vale*

$$\det(A^t A) = \sum_{\substack{M \\ (k \times k)-\text{minori di } A}} (\det M)^2 \tag{2.5}$$

Osservazione 2.8. Notiamo che

- Se $\dim V = n$ allora $\dim \Lambda^k(V) = \#I(n,k) =$

$$\begin{cases} \binom{n}{k} & \text{se } k \leq n \\ 0 & \text{se } k > n; \end{cases}$$

- Se $V = \mathbb{R}^n$ denotiamo con $e_1, \ldots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. La corrispondente base duale verrà denotata con $dx_1, \ldots dx_n$. Ciò è coerente col fatto che di solito dx_i sta ad indicare il *differenziale della proiezione sull'i-esima coordinata* $x \mapsto x_i$ ed in tal caso *per ogni punto di* $\mathbb{R}^n$ su cui lo si calcola si ha proprio $dx_i = e_i^*$. Se allora scriviamo $dx_{\mathbf{i}}$ per $\mathbf{e}_{\mathbf{i}}^*$ abbiamo

$$\alpha = \sum_{\mathbf{i} \in I(n,k)} \alpha_{\mathbf{i}} dx_{\mathbf{i}}, \tag{2.6}$$

  per ogni $\alpha \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. La base $\{dx_{\mathbf{i}} \mid \mathbf{i} \in I(n,k)\}$ viene spesso chiamata *base canonica di* $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

Definiamo ora lo spazio dei *k-vettori* in analogia a quanto fatto per i k-covettori. Per far ciò sfrutteremo in un certo senso, l'identificazione fra V e V^* che si può fare per spazi finito dimensionali. Supponiamo d'ora in poi che $\dim V = n$.

Definizione 2.9. Definiamo lo spazio dei k-vettori di V come $\Lambda^k(V^*)$. Tale spazio lo denoteremo con $\Lambda_k(V)$.

Abbiamo dunque

$$\begin{aligned} \Lambda_k(V) &= \text{spazio dei } k\text{-vettori di } V \\ &:= \text{spazio dei } k\text{-covettori di } V^* \\ &= \Lambda^k(V^*) \end{aligned}$$

Valgono allora tutte le costruzioni e/o proposizioni viste per i k-covettori con le opportune modifiche.
La dualità fra V e V^* si estende ad una dualità fra $\Lambda_k(V)$ e $\Lambda^k(V)$.
Per definire tale dualità, scgliamo una base $e_1, \ldots, e_n$ di $V \simeq V^{**}$, e sia $e_1^*, \ldots, e_n^*$ la base duale di V^* e allora come abbiamo visto nella proposizione 2.6,

$$\{\mathbf{e}_\mathbf{i}^* \mid \mathbf{i} \in I(n,k)\} \text{ è una base di } \Lambda^k(V),$$

e anche

$$\{\mathbf{e}_\mathbf{i} \mid \mathbf{i} \in I(n,k)\} \text{ è una base di } \Lambda_k(V).$$

Definiamo allora la dualità $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ fra $\Lambda^k(V)$ e $\Lambda_k(V)$ ponendo

$$\langle \mathbf{e}_\mathbf{i}^* ; \mathbf{e}_\mathbf{j} \rangle := \delta_{\mathbf{i},\mathbf{j}} \quad \forall \mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n,k), \tag{2.7}$$

estendendola poi per linearità su tutto $\Lambda_k(V)$. Notiamo che tale definizione porta ad avere

$$\langle \alpha ; v_1 \wedge \cdots, \wedge v_k \rangle = \alpha(v_1, \cdots, v_k), \tag{2.8}$$

per ogni k-upla di vettori di V ed ogni $\alpha \in \Lambda^k(V)$ e questo ci dice che la relazione di dualità definita *non dipende dalla base* scelta.

Definizione 2.10 (Estensione delle applicazioni lineari)**.** Sia L un'applicazione lineare fra spazi vettoriali V, W. Possiamo allora "estendere"L ad un' applicazione lineare fra $\Lambda_k(V)$ e $\Lambda_k(W)$, di modo che

$$L(v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_k}) := L(v_{i_1}) \wedge \cdots \wedge L(v_{i_k}), \tag{2.9}$$

per ogni k-upla di indici $(i_1, \ldots i_k)$, ed estendendola poi per linearità su tutto $\Lambda_k(V)$.

Osservazione 2.11. Diciamo che

- Il fatto che la relazione (2.9) possa essere estesa per linearità su tutto $\Lambda^k(V)$ va verificato;
- L è univocamente determinata dal suo valore sugli elementi di una base di $\Lambda^k(V)$ $\{\mathbf{e}_\mathbf{i} \mid \mathbf{i} \in I(n,k)\}$;
- Se L è un automorfismo di V con matrice associata $L_{j,i}$ (rispetto alla base $e_1, \ldots, e_n$) e $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_k)$ allora

$$\begin{aligned} L(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) &= L(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge L(e_{i_k}) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in I(n,k)} \det A_{\mathbf{j},\mathbf{i}} \cdot \mathbf{e}_\mathbf{i}^* \end{aligned} \tag{2.10}$$

  dove $A_{\mathbf{j},\mathbf{i}}$ è la matrice $k \times k$ il cui elemento di posto (l,s) è dato da L_{j_l,i_s}:
- L'estensione di mappe lineari allo spazio dei k-covettori è identica.

Definizione 2.12 (Estensione del prodotto scalare)**.** Nel caso lo spazio vettoriale V sia dotato di prodotto scalare simmetrico definito positivo $< \cdot, \cdot >$, consideriamo la mappa $*: V \to V^*$ che a $v \in V$ fa corrispondere la forma lineare

$v^* \in V^*$ che agisce come $< v, \cdot >$.
Se $e_1, \ldots, e_n$ è una *base ortonormale* di V, si può estendere $< \cdot, \cdot >$ a tutto $\Lambda_k(V)$ chiedendo che

$$< \xi, \eta > := \langle \xi^*; \eta \rangle, \quad \forall \xi, \eta \in \Lambda_k(V), \tag{2.11}$$

dove ξ^* deve essere intesa come nella definizione 2.10.

Osservazione 2.13. La (2.11) porta ad avere

$$< \mathbf{e_i}, \mathbf{e_j} > := \delta_{\mathbf{ij}}, \tag{2.12}$$

per ogni $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n,k)$.
E' chiaro che (2.12) individua univocamente un prodotto scalare su $\Lambda_k(V)$ simmetrico e definito positivo in cui $\{\mathbf{e_i} \mid \mathbf{i} \in I(n,k)\}$ è una base ortonormale; mentre (2.11) ci dice che tale definizione non dipende dalla particolare base scelta per descrivere V.
Si capisce che procedendo in modo analogo si può considerare un unico prodotto scalare (simmetrico definito positivo) su $\Lambda^k(V)$ estendendo il prodotto scalare definito su V^* come $< v^*, w^* > := < v, w >$ (si ricordi sempre $V = V^{**}$).

Definizione 2.14 (Prodotto interno)**.** Siano $\xi \in \Lambda_m(V)$, $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \geq m$ e $k \leq \dim V$. Definiamo il $(k-m)$-covettore $\xi \lrcorner \alpha$ come

$$\langle \xi \lrcorner \alpha; \eta \rangle := \langle \alpha; \xi \wedge \eta \rangle, \quad \forall \eta \in \Lambda_{k-m}(V). \tag{2.13}$$

Siano $\xi \in \Lambda_m(V)$, $\alpha \in \Lambda^k(V)$ con $k \leq m$ e $m \leq \dim V$. Definiamo l' $(m-k)$-vettore $\xi \llcorner \alpha$ come

$$\langle \xi \llcorner \alpha; \beta \rangle := \langle \beta \wedge \alpha; \xi \rangle, \quad \forall \beta \in \Lambda^{m-k}(V). \tag{2.14}$$

Attraverso il prodotto interno si può definire l' *operatore star di Hodge*. In quello che segue vogliamo fissare le notazioni nel caso $V = \mathbb{R}^n$ e quindi la prossima definizione la daremo per $V = \mathbb{R}^n$. Ovviamente non cambierebbe nulla nel caso di un generico spazio vettoriale n-dimensionale.

Definizione 2.15. L' operatore star di Hodge $\mathbb{D}_l : \Lambda_l(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{n-l}(\mathbb{R}^n)$ è l'isomorfismo che associa

$$\xi \mapsto \xi \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \tag{2.15}$$

Analogamente l'isomorfismo canonico duale $\mathbb{D}^k : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ associa

$$\omega \mapsto \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n \llcorner \omega; \tag{2.16}$$

Osservazione 2.16. La nostra definizione di operatore di Hodge segue quella in [7] e differisce da quella usuale siccome sposta gli indici l, $n-l$ dal basso in alto $\Lambda_l(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{n-l}(\mathbb{R}^n)$ e viceversa gli indici k, $n-k$ dall'alto in basso $\Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda_{n-k}(\mathbb{R}^n)$, mentre lo star di Hodge solitamente manda l-vettori in $(n-l)$-vettori e k-covettori in $(n-k)$-covettori.

Osservazione 2.17. Notiamo che $\mathbb{D}_l$ è l'unica mappa lineare che

$$\mathbb{D}_l \mathbf{e_i} := (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma_{\mathbf{i}^+})} \bigwedge_{j \notin \mathbf{i}} dx_j, \tag{2.17}$$

per ogni $\mathbf{i} \in \Sigma(n,l)$, dove con $\sigma_{\mathbf{i}^+}$ si intende la permutazione data da

$$(1, 2, \cdots, n) \mapsto (\mathbf{i}^c, \mathbf{i}), \quad \mathbf{i}^c \equiv (1, 2, \cdots, n) \smallsetminus \mathbf{i}. \tag{2.18}$$

Quindi

$$\left(\mathbb{D}_l \mathbf{e_i}\right) \wedge dx_{\mathbf{i}} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad \forall \mathbf{i} \in \Sigma(n,l). \tag{2.19}$$

Analogamente il duale

$$\mathbb{D}^k dx_{\mathbf{i}} := (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma_{\mathbf{i}^-})} \bigwedge_{j \notin \mathbf{i}} \mathbf{e}_j, \tag{2.20}$$

per ogni $\mathbf{i} \in \Sigma(n,k)$, dove con $\sigma_{\mathbf{i}^-}$ si intende la permutazione data da

$$(1, 2, \cdots, n) \mapsto (\mathbf{i}, \mathbf{i}^c). \tag{2.21}$$

Quindi

$$\mathbf{e_i} \wedge \left(\mathbb{D}^k dx_{\mathbf{i}}\right) = \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n \quad \forall \mathbf{i} \in \Sigma(n,k). \tag{2.22}$$

Notiamo anche che $\mathbb{D}_l$ e $\mathbb{D}^{n-l}$ sono una l'inversa dell'altra.
Infine se σ_l è la permutazione che agisce

$$(1, \ldots, l, l+1, \ldots, n) \mapsto (l+1, \ldots, n, 1, \ldots, l),$$

vale la relazione $\sigma_{\mathbf{i}^-} = \sigma_l \circ \sigma_{\mathbf{i}^{c+}}$ che porta alla relazione

$$\left\langle \mathbb{D}_l \mathbf{e_i}; \mathbf{e}_{\mathbf{i}^c} \right\rangle = (-1)^{n-l} \left\langle \mathbf{e_i}; \mathbb{D}_{n-l} \mathbf{e}_{\mathbf{i}^c} \right\rangle, \tag{2.23}$$

che poi per linearità si può estendere ad ogni ξ, ζ rispettivamente $k, n-k$-covettori i.e.

$$\left\langle \mathbb{D}_l \xi; \zeta \right\rangle = (-1)^{n-l} \left\langle \xi; \mathbb{D}_{n-l} \zeta \right\rangle, \tag{2.24}$$

e quindi $(-1)^{n-l}\mathbb{D}_{n-l}$ è *l'operatore aggiunto* di $\mathbb{D}_l$.

Definizione 2.18 (k-vettori e k-covettori semplici)**.** I *k-vettori semplici* sono quelli che si scrivono come

$$\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \tag{2.25}$$

per una qualsiasi k-upla di vettori di V.
Analogamente si definiscono i k-covettori semplici.

Osservazione 2.19. Sia V di dimensione n. Mentre nei casi di 1-vettori(covettori) e $n-1$-vettori(covettori) tutti si possono scrivere come in (2.25) (e questo non è un fatto immediato), in generale non tutti i k-vettori(covettori) si scrivono in tal modo, ad esempio si consideri $\xi \in \Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ e $\xi = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$.

Ricordiamo che *l'orientazione di uno spazio vettoriale W* è una relazione di equivalenza fra basi, dove due basi *inducono la stessa orientazione* se le corrispondenti matrici di cambio base hanno determinante positivo.
Ecco la proposizione che racchiude il significato geometrico dei k-vettori di V.

Proposizione 2.20. *Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$ e poniamo $W := \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k)$. Allora la mappa*

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \mapsto \Big(W; \text{orientazione di } W; |v_1 \wedge \cdots \wedge v_k|\Big), \tag{2.26}$$

è una bigezione.

Osservazione 2.21. Dunque la proposizione 2.20 ci dice che i k-vettori semplici sono in *corrispondenza biunivoca* con i k-piani *orientati* in V e dotati di *molteplicità*.
O analogamente i k-vettori semplici e *unitari* sono in corrispondenza biunivoca con i k-piani orientati.
Questo è il punto chiave che lega la teoria dei k-covettori e k-vettori semplici alla teoria geometrica dell'integrazione sulle k-superfici, come vedremo nel prossimo capitolo.

Concludiamo questo capitolo introducendo la *norma della massa* e la *norma della comassa.* Anche se può sembrare naturale dotare gli spazi $\Lambda_k(V)$ e $\Lambda^k(V)$ della norma indotta dal prodotto scalare, per ragioni che saranno più chiare in seguito ci conviene introdurre due nuove norme.

Definizione 2.22. Consideriamo sullo spazio dei k-vettori di V, la *norma della massa* $\phi(v)$ definita come

$$\phi(\xi) \equiv \inf_{c.c.s.} \sum_{\mathbf{i}} \lambda_{\mathbf{i}}|\xi_{\mathbf{i}}|, \quad \xi_{\mathbf{i}} \in \Lambda_k(V), \ \lambda_{\mathbf{i}} \in \mathbb{R}^+, \tag{2.27}$$

dove *c.c.s.* sta per combinazioni convesse di k-vettori semplici ovvero combinazioni del tipo $\sum_{\mathbf{i}} \lambda_{\mathbf{i}}\xi_{\mathbf{i}} = \xi$, con $\xi_{\mathbf{i}}$ semplice e $\sum \lambda_{\mathbf{i}} = 1$.
Sullo spazio delle k-covettori di V, consideriamo la *norma della comassa* $\phi^*(\alpha)$ definita come

$$\phi^*(\alpha) = \sup_{|\xi|\leq 1, \xi \text{ semplice}} \langle \alpha; \xi \rangle. \tag{2.28}$$

Osservazione 2.23. Notiamo che

- Vale $\phi(\cdot) \geq |\cdot|$;
- Vale $\phi^*(\cdot) \leq |\cdot|$;
- In entrambi i casi vale l'uguaglianza per k-vettori semplici e k-covettori semplici; in particolare la norma della massa è l'inviluppo convesso della norma euclidea ristretta ai k-vettori semplici;
- ϕ^* è la norma duale di ϕ.

Capitolo 3

k-forme e k-campivettoriali

Definizione 3.1. Una *k-forma differenziale* ω su $\mathbb{R}^n$ è una mappa

$$\omega: \mathbb{R}^n \to \Lambda^k(\mathbb{R}^n).$$

Usando la base canonica di $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, possiamo scrivere ω come

$$\omega(x) = \sum_{\mathbf{i} \in I(n,k)} \omega_{\mathbf{i}}(x) dx_{\mathbf{i}},$$

dove le coordinate $\omega_{\mathbf{i}}$ sono funzioni reali su $\mathbb{R}^n$. Diciamo che una k-forma differenziale possiede una certa regolarità, quando tale regolarità la possiedono le sue funzioni coordinate. Come al solito definiamo il supporto di una k-forma differenziale come la chiusura dell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \omega(x) = 0\}$, e lo indichiamo con $\operatorname{spt}(\omega)$.

Definizione 3.2. Il *differenziale esterno* di una k-forma differenziale ω di classe C^1, è una $(k+1)$-forma differenziale definita come

$$d\omega(x) := \sum_{\mathbf{i} \in I(n,k)} \mathrm{d}\omega_{\mathbf{i}} \wedge dx_{\mathbf{i}},$$

dove

$$d\omega_{\mathbf{i}}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_{\mathbf{i}}}{\partial x_j} dx_j.$$

Nel caso di una 0-forma ω, ovvero una funzione, il differenziale esterno coincide col differenziale nel senso usuale

Osservazione 3.3. Ci sono diversi modi per definire il differenziale esterno in modo più intrinseco, come ad esempio nel paragrafo 4.1.6 di [7], ed in tal caso risulta ovvio il fatto che il differenziale esterno è un operatore che *non dipende* dalla particolare base scelta. Risulterebbe comunque ridondante in questo contesto appellarsi a tali definizioni che richiederebbero un maggior lavoro e non ci porterebbero alcun vantaggio. Per i nostri scopi è sufficiente conoscerne la definizione operativa.

Osservazione 3.4. Il differenziale esterno gode delle seguenti tre propietà (lemma 6.1.7 di [9])

1. $d(\omega + \alpha) = d\omega + d\alpha$ per ogni ω, α k-forme di classe C^1;

2. $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$, per ogni ω k-forma di classe C^1, e η m-forma di classe C^1;

3. $d^2\omega = d(d\omega) = 0$, per ogni ω k-forma di classe C^1.

Definizione 3.5 (Pull-back di una forma)**.** Sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1, e ω una k-forma di $\mathbb{R}^m$ anch'essa di classe C^1 ($k \leq n, m$). Definiamo il *pull-back* di ω tramite F, la k-forma $F^\# \omega$ di $\mathbb{R}^n$ che ad ogni $x \in \mathbb{R}^n$ associa il k-covettore definito come

$$(F^\#\omega)_x\big(v_1, \dots, v_k\big) := \omega_{F(x)}\big(dF_x(v_1), \dots, dF_x(v_k)\big), \quad \forall v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

dove i simboli $\omega_{F(x)}$ e dF_x, indicano rispettivamente il k-covettore di $\mathbb{R}^m$ $\omega(F(x))$, e il differenziale di F calcolato nel punto x.

Osservazione 3.6. Se ω è una k-forma, si può controllare la norma della comassa di $F^\#\omega$ con la norma della comassa di ω per una costante, più precisamente vale

$$\phi^*(F^\#\omega) \leq \mathrm{Lip}(F)^k \phi^*(\omega) \tag{3.2}$$

Teorema 3.7. *Il differenziale esterno commuta con il pull-back. Più precisamente data una k-forma di $\mathbb{R}^m$ e una mappa $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ entrambe di classe C^1, allora vale*

$$d(F^\#\omega) = F^\#(d\omega). \tag{3.3}$$

Il fatto che il differenziale esterno commuti con il pull-back è il punto chiave nella dimostrazione del *teorema di Stokes*. Per una dimostrazione del teorema 3.7 si veda ad esempio il teorema 6.2.8 di [9].
Ricordiamo come si integra una k-forma su una k-superficie *orientata*. A tal proposito ricordiamo il concetto di orientazione di una superficie con bordo.

Premettiamo che con il termine k-superficie di $\mathbb{R}^n$ di classe C^m (eventualmente con bordo), intendiamo che si stia trattando di una *k-sottovarietà* di $\mathbb{R}^n$ di classe C^m (eventualmente con bordo).
Sia Σ una k-superficie con bordo di $\mathbb{R}^n$ di classe C^1. Un'*orientazione* τ di Σ è una mappa continua da Σ nello spazio dei k-vettori *semplici e unitari* (capitolo 2 definizione 2.18) tale che

$$\tau(x) = \tau_1(x) \wedge \dots \wedge \tau_k(x) \text{ e } \mathrm{span}(\tau_1(x), \dots, \tau_k(x)) = \mathrm{Tan}(\Sigma, x), \quad \forall x \in \Sigma,$$

dove $\mathrm{Tan}(\Sigma, x)$ indica il k-piano tangente alla superficie Σ in x.

Osservazione 3.8. La nostra definizione di orientazione non è quella usuale di *classe di equivalenza di atlanti orientati* (si veda ad esempio il paragrafo 4.2 di [1]) che arriva dalla geometria differenziale ma è equivalente.

Indichiamo con $\eta(x)$ la normale esterna al bordo $\partial\Sigma$ nel punto x. Data τ orientazione di Σ, l'orientazione di $\partial\Sigma$ è l'unica mappa $\tau' = \tau_1' \wedge \dots \wedge \tau_{k-1}'$ che va dal bordo di Σ ai $(k-1)$-vettori unitari, e tale che

$$\eta(x) \wedge \tau_1'(x) \wedge \dots \wedge \tau_{k-1}'(x) = \tau_1(x) \wedge \dots \wedge \tau_k(x) \quad \forall x \in \partial\Sigma. \tag{3.4}$$

Osservazione 3.9. Notiamo che

- La richiesta (3.4) individua univocamente una mappa $\tau' : \partial\Sigma \to \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$. Questo siccome (3.4) implicitamente impone un'unica orientazione di $\mathrm{Tan}(\partial\Sigma, x)$, che $|\tau'_1(x) \wedge \dots \wedge \tau'_{k-1}(x)| = 1$, e che $\mathrm{span}(\tau'_1(x), \dots, \tau'_k(x)) = \mathrm{Tan}(\partial\Sigma, x)$; sappiamo allora dalla proposizione 2.20 che queste tre richieste individuano univovìcamente un $(k-1)$-vettore semplice τ';

- Nel contesto in cui Σ è una superficie orientata (quindi dotata di orientazione τ), il simbolo $\partial\Sigma$ starà sempre ad indicare il bordo di di Σ *assieme* alla sua orientazione $\tau'(x)$.

Definizione 3.10. Sia ora Σ una k-superficie orientata di $\mathbb{R}^n$ e ω una k-forma definita su un aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente Σ. Definiamo l'integrale di ω su Σ e lo indichiamo $\int_\Sigma \omega$, come

$$\int_\Sigma \omega := \int_\Sigma \big\langle \omega(x); \tau(x) \big\rangle \, d\mathscr{H}^k, \tag{3.5}$$

dove τ è l'orientazione di Σ e $\big\langle \omega(x); \tau(x) \big\rangle$ denota l'azione in dualità (capitolo 2 (2.7) e (2.8)) del k-covettore $\omega(x)$ sul k-vettore $\tau(x)$.

Osservazione 3.11. Ovviamente la definizione (3.5) ha senso ogniqualvolta l'integrale a secondo membro esiste.
Notiamo inoltre che andrebbe fatta una distinzione fra l'insieme di integrazione del primo membro e del secondo membro di (3.5). Infatti nel primo caso il simbolo Σ si riferisce alla superficie Σ orientata, mentre nel secondo Σ sta semplicemente ad indicare il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ costituito dai punti che appartengono a Σ.

Vale il seguente teorema che è in un certo senso la generalizzazione del *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* a superfici.

Teorema 3.12 (Teorema di Stokes)**.** *Sia Σ una k-superficie compatta orientata di $\mathbb{R}^n$, e sia ω una $k-1$-forma di classe C^1 definita su un intorno aperto contenente Σ. Allora*

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_\Sigma d\omega. \tag{3.6}$$

Osservazione 3.13. La dimostrazione del teorema di Stokes la si può trovare ad esempio nel paragrafo 6.2 di [9], nel paragrafo 4.5 di [1] o in un qualsiasi altro testo che tratti dell' integrazione su varietà. Bisogna notare però che nella maggior parte dei testi di geometria differenziale, come ad esempio in [1], la definizione di integrale è

$$\int_\Sigma \omega := \int_{F^{-1}(\Sigma)} F^{\#}\omega \, d\mathscr{L}^k,$$

dove $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è una qualsiasi parametrizzazione di Σ. In realtà ciò non cambia nulla siccome si può verificare (ad esempio con la *formula dell'area*) che le due definizioni coincidono.

Definizione 3.14. Un *l-campovettoriale* ξ su $\mathbb{R}^n$ è una mappa

$$\xi : \mathbb{R}^n \to \Lambda_l(\mathbb{R}^n).$$

Usando la base canonica di $\Lambda_l(\mathbb{R}^n)$, possiamo scrivere ξ come

$$\xi(x) = \sum_{\mathbf{i}\in I(n,l)} \xi_{\mathbf{i}}(x) d\mathbf{e}_{\mathbf{i}},$$

dove le coordinate $\xi_{\mathbf{i}}$ sono funzioni reali su $\mathbb{R}^n$. Analogamente a prima diciamo che un l-campovettoriale possiede una certa regolarità, quando tale regolarità la possiedono le sue funzioni coordinate. Come al solito definiamo il supporto di un l-campovettoriale come la chiusura dell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \xi(x) = 0\}$, e lo indichiamo con $\mathrm{spt}(\xi)$.

Definizione 3.15. La *divergenza* di un l-campovettoriale ξ di classe C^1, è un $(l-1)$-campovettoriale definito come

$$\mathrm{div}\xi := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \llcorner dx_j$$

ed in coordinate

$$\mathrm{div}\xi(x) = \sum_{\mathbf{i}\in I(n,l)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_{\mathbf{i}}(x)}{\partial x_j} \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \llcorner dx_j = \sum_{\mathbf{i}\in I(n,l)} \sum_{h=1}^{l} (-1)^{h-1} \frac{\partial \xi_{\mathbf{i}}(x)}{\partial x_{i_h}} \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}, \tag{3.7}$$

dove $\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}$ è la contrazione $\mathbf{e}_{\mathbf{i}} \llcorner dx_{i_h}$ ovvero

$$\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h} := \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_{h-1}} \wedge \mathbf{e}_{i_{h+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_l}.$$

Notiamo infine che se $l = 1$ ovvero ξ è un 1-campovettoriale allora la defnizione di divergenza coincide con quella usuale. Rimandiamo al paragrafo 4.1.6 di [7] per una definizione più intrinseca di divergenza. Qui ci limitiamo a dire che l'operatore di divergenza *non dipende* dalla base scelta.

Dimostriamo infine un' identità che risulterà utile in seguito, e che mostra come *l'operatore star di Hodge leghi il differenziale esterno con la divergenza.*

Proposizione 3.16. *Si consideri un l-campovettoriale di classe C^1, $\xi: \mathbb{R}^n \to \Lambda_l(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$d\big(\mathbb{D}_l \xi\big) = (-1)^{d-l} \mathbb{D}_{l-1}(\mathrm{div}\xi). \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Grazie a (8.14), la parte destra di (8.15) si può scrivere

$$(-1)^{d-l} \mathbb{D}_{l-1}(\mathrm{div}\xi) = \sum_{\mathbf{i}\in I(n,l)} \sum_{h=1}^{l} (-1)^{n-l+h-1} \frac{\partial \xi_{\mathbf{i}}(x)}{\partial x_{i_h}} \mathbb{D}_{l-1}(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h});$$

la parte sinistra invece

$$d(\mathbb{D}_l \xi) = \sum_{\mathbf{i}\in I(n,l)} \sum_{h=1}^{l} \frac{\partial \xi_{\mathbf{i}}(x)}{\partial x_{i_h}} dx_{i_h} \wedge \mathbb{D}_l(\mathbf{e}_{\mathbf{i}}),$$

dunque la tesi è equivalente a provare che

$$dx_{i_h} \wedge \mathbb{D}_l(\mathbf{e}_{\mathbf{i}}) = (-1)^{n-l+h-1} \mathbb{D}_{l-1}(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}), \tag{3.9}$$

per ogni $\mathbf{i} \in I(n,l)$ e per ogni $h = 1, \cdots, l$. Chiaramente per verificare (8.16) è solo un problema di segni, infatti

$$dx_{i_h} \wedge \mathbb{D}(\mathbf{e}_{\mathbf{i}}) = (-1)^{\alpha_{\mathbf{i}}} \bigwedge_{j \notin (\mathbf{i} \smallsetminus h)} dx_j$$

$$\mathbb{D}_{l-1}(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}) = (-1)^{\beta_{\mathbf{i}}} \bigwedge_{j \notin (\mathbf{i} \setminus h)} dx_j .$$

Grazie ad (8.4) abbiamo

$$\alpha_{\mathbf{i}} = \operatorname{sign}(\sigma_{\mathbf{i}^+}) + (i_h - h),$$

mentre

$$\begin{aligned}\beta_{\mathbf{i}} = \operatorname{sign}(\sigma_{\hat{\mathbf{i}}_h^+}) &= \sum_{s=1}^{h-1} ((n-l+1) - (i_s - s)) + \sum_{s=h+1}^{l} ((n-l) - (i_s - s)) \\ &= \operatorname{sign}(\sigma_{\mathbf{i}^+}) + (i_h - h) - (n-l) + (h-1).\end{aligned}$$

E questo prova la tesi. $\square$

Capitolo 4

Insiemi rettificabili e funzioni a variazione limitata

In questo paragrafo vogliamo introdurre il concetto di *k-rettificabilità* ed enunciare alcuni teoremi che ci saranno utili in seguito. Seguiremo la falsa riga del paragrafo 5.4 di [9].
Come al solito definiamo la misura di Hausdorff di un un sottoinsieme [1] $A \subset \mathbb{R}^n$

Definizione 4.1. 1. Sia $0 < \delta \leq \infty$, $0 \leq s < \infty$.

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) \equiv \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\mathrm{diam} C_j}{2}\right)^s \mid A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \mathrm{diam} C_j \leq \delta\right\},$$

dove

$$\alpha(s) \equiv \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}.$$

$\Gamma(s) \equiv \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1}\, dx$ è la funzione gamma di Eulero.

2. Poniamo

$$\mathscr{H}^s(A) \equiv \lim_{\delta \to 0} \mathscr{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathscr{H}^s_\delta(A).$$

Chiamiamo $\mathscr{H}^s$ *misura di Hausdorff s-dimensionale* su $\mathbb{R}^n$.

Definizione 4.2. La *dimensione di Hausdorff* di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è definita come

$$\dim_{\mathscr{H}}(A) \equiv \inf\{0 \leq s < \infty \mid \mathscr{H}^s(A) = 0\}.$$

Rimandiamo al capitolo 2 di [5] per le propietà elementari della misura di Hausdorff.
Vediamo ora la definizione di insieme rettificabile.

[1] In realtà noi abbiamo definito una misura come una mappa definita solo su una σ algebra. Quando si parla di misura di Hausdorff è però conveniente seguire l'approccio di [5] dove si definisce misura una mappa definita su tutte le parti di $\mathbb{R}^n$. Per i nostri scopi le due definizioni possono essere considerate equivalenti. Rimandiamo comunque al capitolo 1 di [5] per approfondimenti.

Definizione 4.3. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathscr{H}^k$-misurabile [2], con k un intero tale che $1 \leq k \leq n$. Allora diciamo che E è *numerabilmete k-rettificabile* o più brevemente *k-rettificabile* se e solo se esistono insiemi $\{E_i\}_{i=0}^{\infty}$ e mappe lipschitziane $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ $f_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ tali che

1. $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i$,
2. $E_i = f_i(\mathbb{R}^k)$ se $i \geq 1$,
3. $\mathscr{H}^k(E_0) = 0$.

Siccome ogni mappa lipschitziana f definita su un qualunque insieme $S \subseteq \mathbb{R}^k$ $f : S \to \mathbb{R}^n$ può essere estesa ad una mappa lipschitziana $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ notiamo che la definizione 4.3 è equivalente a

$$E \subseteq \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(S_i) \right\} \bigcup E_0, \tag{4.1}$$

dove $S_i \subseteq \mathbb{R}^k$ e $\mathscr{H}^k(E_0) = 0$.

Teorema 4.4. *$E \subseteq \mathbb{R}^n$ è numerabilmente k-rettificabile se e solo se $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ con $\mathscr{H}^k(E_0) = 0$, e per ogni i $E_i \subseteq S_i$, dove le S_i sono k-sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di classe C^1.*

Sketch Dimostrazione. La parte “se ”è ovvia.
Per la parte “solo se ”notiamo che ci basta provare che $f(\mathbb{R}^k)$ con $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ lipschitziana può essere ricoperto da una famiglia numerabile di C^1 k-sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^n$ più un insieme $\mathscr{H}^k$ trascurabile.
Grazie al *teorema di Rademacher* (si veda il teorema 2 del paragrafo 3.1.2 di [5]) e al *teorema di estensione di Whitney* (si veda il teorema 1 del paragrafo 6.5 di [5]) vale la cosiddetta *propietà di Lusin per funzioni lipschitziane* i.e. per ogni $i = 1, 2, \ldots$ esiste $g_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ con $g_i \in C^1(\mathbb{R}^k)$ e $\mathscr{H}^k(\{f \neq g_i\}) \leq 1/i$.
Ora se consideriamo B_i l'insieme dei punti su cui g_i ha rango massimo, allora dalla formula dell'area $\mathscr{H}^k\big(g_i\big(\mathbb{R}^k \smallsetminus B_i\big)\big) = 0$ ed essendo B_i aperto, $g_i(B_i)$ è una C^1 k-sottovarietà embedded di $\mathbb{R}^n$. Infine siccome $\mathscr{H}^k\big(f\big(\bigcap_i \{f \neq g_i\}\big)\big) = 0$, basta notare che

$$f(\mathbb{R}^k) \subseteq \left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty} g_i(B_i) \right\} \bigcup f\Big(\bigcap_i \{f \neq g_i\}\Big).$$

□

Osservazione 4.5.

1. Gli insiemi rettificabili possono essere (topologicamente parlando) molto “brutti”. Ad esempio si pensi ad $E \subset \mathbb{R}^2$ unione di una famiglia numerabile di segmenti densi in $\mathbb{R}^2$ e tutti di lunghezza unitaria. In questo caso E è un insieme 1-rettificabile di $\mathbb{R}^2$.
2. Esistono insiemi compatti $K \subset \mathbb{R}^2$ tali che $\mathscr{H}^1(K) \equiv 0$ ma che non ammettono ricoprimenti composti da famiglie numerabili di curve lipschitziane. Si pensi ad esempio alla funzione di Cantor ψ e all'insieme di Cantor $C \subset [0, 1]$ e si consideri $K := \{\big(x, \psi(x)\big) \mid x \in C\}$.

[2] Gli insiemi $\mathscr{H}^k$-misurabili di $\mathbb{R}^n$ sono una σ-algebra contenente i boreliani. Si veda sempre il capitolo 2 di [5]

Valgono comunque le seguenti proposizioni, che permettono di definire piani tangenti ad un insieme k-rettificabile a meno di insiemi $\mathscr{H}^k$ trascurabili.

Proposizione 4.6 (Definizione di Fibrato Tangente Debole)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ k-rettificabile. Possiamo allora associare ad ogni $x \in E$ un k-spazio-vettoriale (piano tangente ad E in x) $\tau(x)$ tale che per ogni S k-sottovarietà embedded di classe C^1 vale*

$$\tau(x) \equiv \mathrm{Tan}(S, x) \text{ per } \mathscr{H}^k\text{-q.o. } x \in E \cap S. \tag{4.2}$$

Inoltre dati τ_1, τ_2 che soddisfano (4.2) *allora vale* $\mathscr{H}^k(\{\tau_1 \neq \tau_2\}) = 0$.

L'idea della dimostrazione della proposizione precedente si basa sul fatto che date $f, g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, allora $Df(x) = Dg(x)$ per $\mathscr{H}^k$-q.o. $x \in \{f = g\}$. E' chiaro che in questo modo possiamo definire un fibrato tangente debole relativo a E che è una classe di equivalenza fra fibrati tangenti che possono differire su insiemi di misura $\mathscr{H}^k$-trascurabili.

Definizione 4.7 (Orientazione di un insieme rettificabile)**.** L'orientazione di un insieme k-rettificabile E è una qualsiasi mappa boreliana [3] $x \mapsto \tau_1(x) \wedge \cdots \wedge \tau_k(x)$ da E nei k-vettori semplici unitari tale che se τ è il fibrato tangente debole di E

$$\mathrm{span}(\tau_1(x), \ldots, \tau_k(x)) = \tau(x) \quad \text{per } \mathscr{H}^k\text{-q.o. } x \in E. \tag{4.3}$$

Quando non ci sono ambiguità denoteremo una generica orientazione di E con il simbolo τ.

Denotiamo con $\mathrm{Tan}(E, x)$ il k-piano tangente ad E in x, definito per $\mathscr{H}^k$-q.o. $x \in E$.

Definizione 4.8 (Spazio Tangente Approssimato)**.** Sia $V \subset \mathbb{R}^n$ un k-spazio vettoriale, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Diciamo che V è lo *spazio tangente approssimato* ad E in x se vale

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \int_{\lambda^{-1}(E-x)} f(y)\ d\mathscr{H}^k(y) = \int_V f(y)\ d\mathscr{H}^k(y), \tag{4.4}$$

per ogni f funzione continua a supporto compatto.

Chiaramente nel caso di una sottovarietà di classe C^1 il tangente approssimato coincide sempre con il tangente in senso usuale. Generalmente invece possono esistere punti in cui non esiste un piano tangente approssimato, si pensi ad esempio al veritce di un simplesso. Nonostante ciò la definizione precedente è giustificata dal fatto che insiemi k-rettificabili con misura di Hausdorff localmente finita posseggono il piano tangente approssimato per $\mathscr{H}^k$-q.o. x. Vale infatti

Teorema 4.9. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ k-rettificabile e tale che $\mathscr{H}^k(K \cap E) < +\infty$ per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$. Allora per $\mathscr{H}^k$-q.o. $x \in E$ esiste il piano tangente approssimato ed inoltre coincide con Tan(E, x).*

Per una dimostrazione di 4.9 si veda il teorema 5.4.5 di [9]. Qui ci limitiamo a notare che l'ipotesi di locale finitezza per la misura $\mathscr{H}^k \llcorner E$ è necessaria

[3] Una mappa f da uno spazio topologico X ad uno spazio topologico Y si dice *boreliana* se l'immagine inversa di un insieme aperto è un insieme boreliano

siccome nel primo esempio di 4.5 è evidente che i segmenti si possono prendere in modo che la tesi di 4.9 non sia più vera.
Per introdurre il concetto di *funzione a variazione limitata* ricordiamo brevemente cos'è la derivata distribuzionale. Se Λ è una distribuzione di $\mathbb{R}^n$ allora si definisce la sua derivata i-esima ($i = 1, \dots, n$), e la si indica con $D_i\Lambda$, la distribuzione di $\mathbb{R}^n$ che agisce come

$$\left\langle D_i\Lambda; \varphi \right\rangle := -\left\langle \Lambda; \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n).$$ [4]

Una funzione $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si dice a variazione limitata se per ogni $i = 1, \dots, n$ la sua derivata distribuzionale $D_i u$ *rappresenta una misura di Radon* [5] su $\mathbb{R}^n$. O più compattamente si può dire:

Definizione 4.10. Una funzione $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ si dice a variazione limitata se e solo se

$$\sup_{\substack{|\varphi|_\infty \leq 1 \\ \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)}} \int_{\mathbb{R}^n} u \ \mathrm{div}\varphi \ dx < \infty. \tag{4.5}$$

Lo spazio delle funzioni a variazione limitata di $\mathbb{R}^n$ lo si indica con $BV(\mathbb{R}^n)$.

Se denotiamo con Du la misura vettoriale la cui componente i-esima è $D_i u$ vale la relazione di dualità

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \ d(Du) = -\int_{\mathbb{R}^n} u \ \mathrm{div}\varphi \ dx. \tag{4.6}$$

Sullo spazio vettoriale $BV(\mathbb{R}^n)$ si considera la norma $|u|_{BV}$ che lo rende uno spazio di Banach, e definita nel seguente modo

$$|u|_{BV} := \int_{\mathbb{R}^n} u \ d\mathscr{L}^n + |Du|(\mathbb{R}^n),$$

dove $|Du|$ indica la misura variazione totale (si veda il primo capitolo) associata alla misura vettoriale Du.

Definizione 4.11. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$. Definiamo la misura positiva P_E, detta misura perimetro di E, come

$$P_E(B) := |D\mathbb{1}_E|(B), \tag{4.7}$$

per ogni boreliano B di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 4.12 (Frontiera ridotta)**.** Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro finito. Diciamo che $x \in \mathbb{R}^n$ è un punto di frontiera ridotta per E se e solo se

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{P_E(B_r(x))} \int_{B_r(x)} dD(\mathbb{1}_E) = \nu_E(x), \ \text{e} \ |\nu_E(x)| = 1.$$

L'insieme dei puntii x di frontiera ridotta li denoteremo con $\partial_* E$. Inoltre se $x \in \partial_* E$ allora chiameremo $\nu_E(x)$ *normale esterna* ad E in x.

[4] $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle funzioni test.
[5] Da intendersi sempre nel senso del teorema di Rappresentazione di Riesz per funzionali limitati 1.25.

Esiste una relazione fra insiemi di perimetro finito e insiemi $n-1$-rettificabili di $\mathbb{R}^n$. Questa relazione è contenuta nell' importante *teorema di rettificabilità della frontiera ridotta* [6].

Teorema 4.13 (Rettificabilità della Frontiera Ridotta)**.** *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro finito. Allora $\partial_* E$ è un insieme $(n-1)$-rettificabile. In particolare sussiste l'uguaglianza fra misure positive*

$$P_E \equiv \mathscr{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E,$$

e fra misure vettoriali

$$D\mathbb{1}_E \equiv \nu_E(\mathscr{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E).$$

Vale infine la *formule di coarea per funzioni BV* [7].

Teorema 4.14 (Formula di coarea BV)**.** *Sia $u \in BV(\mathbb{R}^n)$, indichiamo con $E_t := \{u > t\}$ i sopralivelli di u. Vale allora per ogni insieme boreliano B di $\mathbb{R}^n$ la seguente* decomposizione *della misura $|Du|$*

$$|Du|(B) = \int_{\mathbb{R}} P_{E_t}(B)\ dt, \tag{4.8}$$

e della misura vettoriale Du

$$Du(B) = \int_{\mathbb{R}} D\mathbb{1}_{E_t}(B)\ dt. \tag{4.9}$$

Osservazione 4.15. Siccome la formula di coarea vale per ogni boreliano $B \subseteq \mathbb{R}^n$, con un facile argomento di approssimazione si prova la validità di

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\ d|Du| = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\ d|D\mathbb{1}_{E_t}| \right) dt \tag{4.10}$$

per ogni $f \in L^1(|Du|)$. Vale l'analogo di (4.10) nel caso vettoriale:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\ dDu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\ dD\mathbb{1}_{E_t} \right) dt, \tag{4.11}$$

per ogni campo vettoriale φ a coefficienti misurabili, e tale che $|\varphi| \in \mathbf{L}^1(|Du|)$.

[6] Si veda il paragrafo 5.7.3 di [5]

[7] Si veda paragrafo 5.5 di [5]

Capitolo 5

Correnti in $\mathbb{R}^n$

Denotiamo con $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$ lo spazio delle k-forme di $\mathbb{R}^n$ con supporto compatto. Lo *spazio delle correnti di* $\mathbb{R}^n$ è definito come il duale topologico di $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$ e lo si indica con $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$.
Vediamo brevemente qual'è topologia su $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$. Da questo punto di vista la teoria delle correnti segue di pari passo quella delle distribuzioni: come spazio vettoriale $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$ lo si può identificare con $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)^{\binom{n}{k}}$ dove $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ è lo spazio delle funzioni di classe C^∞ a supporto compatto di $\mathbb{R}^n$ (funzioni test). Questo ci suggerisce di considerare per ogni compatto K di $\mathbb{R}^n$ $\mathscr{D}^k(K)$ lo spazio delle k-forme C^∞ a supporto in K. $\mathscr{D}^k(K)$ è uno spazio di *Frechèt* dotato delle seminorme date dalle norme dell' estremo superiore sulle derivate di ogni ordine.
In questo modo si considera su $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$ la minima topologia di spazio vettoriale localmente convessa che renda tutte le inclusioni $\mathscr{D}^k(K) \hookrightarrow \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$ continue. Con questa topologia allora $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ è il duale topologico di $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$. Denoteremo l'azione della corrente T sulla forma ω indipendentemente con $\langle T;\omega\rangle$, oppure $T(\omega)$.
In realtà quello che si usa è la convergenza che tale topologia induce sulle correnti, che noi daremo invece come definizione.

Definizione 5.1 (Convergenza delle correnti)**.** Sia $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ e $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$. Diciamo che la successione $\{T_j\}$ *converge a* T *in* $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ e lo indichiamo con $T_j \rightharpoonup T$ per $j \to \infty$ se e solo se

$$\langle T_j;\omega\rangle \to \langle T;\omega\rangle \text{ per } j \to \infty, \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n). \tag{5.1}$$

Esempio 5.2. *Il classico esempio di k-corrente è quello dato da una k-superficie orientata $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ di classe C^1. Possiamo allora considerare la corrente T_Σ che agisce come*

$$\langle T_\Sigma;\omega\rangle := \int_\Sigma \omega, \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$$

notiamo che l'integrale è finito siccome ω è a supporto compatto.

Vediamo alcune operazioni standard che si possono fare sullo spazio delle correnti. Tali operazioni sono in un certo estensioni alle correnti di operazioni già viste per forme e campivettoriali.

Definizione 5.3 (Operatore di Contrazione o Prodotto Interno)**.** Sia $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ e $\eta \in \mathscr{D}^m(\mathbb{R}^n)$ con $0 \leq m \leq k$. Definiamo allora la $(k-m)$-corrente $T \llcorner \eta$ come

$$\langle T \llcorner \eta; \omega \rangle := \langle T; \eta \wedge \omega \rangle, \quad \forall \omega \in \mathscr{D}_{k-m}(\mathbb{R}^n) \tag{5.2}$$

Definizione 5.4 (Operatore di Estensione o Prodotto Esterno)**.** Sia $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ e $\xi: \mathbb{R}^n \to \Lambda_m(\mathbb{R}^n)$ un m-campovettoriale di classe C^∞. Definiamo allora la $(k+m)$-corrente $T \wedge \xi$ come

$$\langle T \wedge \xi; \omega \rangle := \langle T; \xi \lrcorner \omega \rangle \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^{k+m}(\mathbb{R}^n). \tag{5.3}$$

Uno degli aspetti interessanti della teoria delle correnti è che ci si può associare una teoria omologica e per fare ciò abbiamo bisogno di definire un operatore di bordo.

Definizione 5.5 (Operatore Bordo)**.** Sia $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$. Defianiamo allora *il bordo di* T come la $(k-1)$-corrente ∂T che agisce come

$$\langle \partial T; \alpha \rangle := \langle T; d\alpha \rangle \quad \forall \alpha \in \mathscr{D}_{k-1}(\mathbb{R}^n). \tag{5.4}$$

Esempio 5.6. *Consideriamo una k-superficie orientata $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ di classe C^1 con bordo $\partial\Sigma$. Se consideriamo la corrente T_Σ associata a Σ come nell' esempio 5.2 allora, usando il teorema di Stokes, il bordo di T_Σ è*

$$\langle \partial T_\Sigma; \alpha \rangle = \langle T_\Sigma; d\alpha \rangle = \int_\Sigma d\alpha = \int_{\partial\Sigma} \alpha = \langle T_{\partial\Sigma}; \alpha \rangle,$$

per ogni $\alpha \in \mathscr{D}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$. Dunque in questo caso abbiamo $\partial T_\Sigma = T_{\partial\Sigma}$.

Osservazione 5.7. Se $\omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$ si possono verificare le seguenti identità (conseguenza diretta delle indentità analoghe per forme dell'osservazione 3.4)

1. $\partial(\partial T) = 0$ se $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ $k \geq 2$,

2. $(\partial T) \llcorner \omega = T \llcorner d\omega + (-1)^k \partial (T \llcorner \omega)$.

Definizione 5.8. Definiamo il supporto di una corrente T e lo indichiamo con spt$T$ come la chiusura di tutti i punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che per ogni intorno U di x esiste una forma ω a supporto in U e $\langle T; \omega \rangle \neq 0$.

Intorduciamo la *massa* di una corrente. In un certo senso la massa di una corrente è un'estensione del concetto di area di una superficie.

Definizione 5.9. Sia T una k-corrente, si definisce la massa di T, e la si indica con $\mathbb{M}(T)$, come

$$\mathbb{M}(T) := \sup_{\phi^*(\omega) \leq 1} \langle T; \omega \rangle, \quad \omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n), \tag{5.5}$$

dove $\phi^*(\omega)$ indica la norma della comassa (2.28), estesa allo spazio $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$:

$$\phi^*(\omega) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \phi^*(\omega(x)). \tag{5.6}$$

Ora usando il linguaggio del capitolo 1, lo spazio delle k-forme di $\mathbb{R}^n$ è incluso nello spazio $C_0(\mathbb{R}^n, \Lambda^k(\mathbb{R}^n))$ delle k-forme a coefficienti continui e infinitesimi. Se consideriamo su quest'ultimo spazio la norma della comassa (5.6), allora siccome $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$ è denso in $C_0(\mathbb{R}^n, \Lambda^k(\mathbb{R}^n))$ rispetto a tale norma (si ragioni componente per componente), le k-correnti T di massa finita rappresentano un funzionale lineare e *limitato* su $C_0(\mathbb{R}^n, \Lambda^k(\mathbb{R}^n))$. Il teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali limitati 1.25, ci dice allora che esiste un'unica misura vettoriale $\tau\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n, \Lambda_k(\mathbb{R}^n))$ (si ricordi che $\Lambda_k(\mathbb{R}^n) = \Lambda_k(\mathbb{R}^n)^{**}$) che rappresenta T, ovvero

$$\langle T; \omega \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \tau; \omega \rangle \, d\mu \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n), \tag{5.7}$$

dove $\tau: \mathbb{R}^n \to \Lambda_k(\mathbb{R}^n)$ $\phi(\tau) = 1$ (si ricordi che ϕ e ϕ^* sono una la norma duale dell'altra) μ-q.o. e $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)^+$. Inoltre vale anche $\mathbb{M}(T) = \mu(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 5.10. Sia T una k-corrente di massa finita di $\mathbb{R}^n$. Sia $\tau\mu$ l'unica misura vettoriale che rappresenta T nel senso (5.7). Allora per evidenziare il fatto che la misura μ è legata alla corrente T, indicheremo μ con il simbolo $|T|$. Inoltre chiameremo τ *l'orientazione di* T.

Osservazione 5.11 (Contrazione ed estensione per correnti di massa finita)*.* Una k-corrente di massa finita T si può estendere per continuità su tutte le k-forme a coefficienti $|T|$-integrabili. In questo modo le operazioni di contrazione $T \llcorner \eta$ ed estensione $T \wedge \xi$ si possono fare rispettivamente rispetto ad una m-forma η e m-campovettoriale ξ entrambi a coefficienti $|T|$-integrabili.

Teorema 5.12 (Semi-continuità inferiore)**.** *Sia* $\{T_j\}$ *una successione di* k*-correnti di* $\mathbb{R}^n$ equi-limitate *in massa. Se* $T_j \rightharpoonup T$ *per* $j \to \infty$ *in* $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ *allora*

$$\liminf_{j \to \infty} \mathbb{M}(T_j) \geq \mathbb{M}(T). \tag{5.8}$$

Dimostrazione. L'equi-limitatezza sulle masse ci dice che in realtà

$$\langle T_j; \omega \rangle \to \langle T; \omega \rangle$$

per ogni k-forma ω a coefficienti continui e infinitesimi; allora l'identificazione data dal teorema 1.25 delle correnti di massa finita come uno spazio duale, ci dice che $\{T_j\}$ converge *debole** [1] a T in $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n, \Lambda_k(\mathbb{R}^n))$. La tesi segue allora dal classico risultato di semi-continuità [2] della norma rispetto alla convergenza debole in spazi di Banach. □

Teorema 5.13 (Compattezza)**.** *Sia* $\{T_j\}$ *una successione di* k*-correnti di* $\mathbb{R}^n$ equi-limitate *in massa. Esiste allora una sottosuccessione* $\{T_{j_m}\}$ *che converge in* $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ *ad una* k*-corrente* T *di massa finita.*

Dimostrazione. Usando sempre l'identificazione data dal teorema 1.25 fra lo spazio delle k-correnti di massa finita con $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n, \Lambda_k(\mathbb{R}^n))$, dal famoso *teorema di compattezza di Banach-Alaoglu* abbiamo una sottosuccessione $\{T_{j_m}\}$ che converge nella topologia debole*, e quindi in particolare anche in $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$, ad una k-corrente T di massa finita. □

[1] Si veda il paragrafo III.4 di [4]

[2] Si veda la proposizione III.12 di [4]

Definizione 5.14 (Push-forward)**.** Sia T una k-corrente di $\mathbb{R}^n$ avente massa finita e *supporto compatto*, e $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^1. Definiamo il *push-forward* di T tramite F, la k-corrente di $\mathbb{R}^m$ che indichiamo con $F_\# T$, come

$$\langle F_\# T;\omega\rangle := \langle T; F^\# \omega\rangle \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^m). \tag{5.9}$$

Osservazione 5.15. Il push-forward può essere definito per una generica $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$, ma bisogna chiedere che la mappa F sia liscia e *propria* (i.e. immagine inversa di un compatto è compatto). Questo per avere che la generica forma $F^\#\omega$ stia ancora in $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$. Nella nostra definizione, chiedendo che T sia di massa finita e a supporto compatto, siamo liberi di fare il push-forward rispetto ad una generica mappa F di classe C^1.

Osservazione 5.16. Nelle ipotesi della definizione 5.14 vale

1. $\mathbb{M}(F_\# T) \le \mathrm{Lip}(F)^k \mathbb{M}(T)$. Infatti dalla stima sul pull-back (3.2) possiamo scrivere

$$\mathbb{M}(F_\# T) = \sup_{\substack{\phi^*(\omega)\le 1\\ \omega\in\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^m)}} |\langle T; F^\#\omega\rangle| \le \mathrm{Lip}(F)^k \cdot \sup_{\substack{\phi^*(\eta)\le 1\\ \eta\in\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)}} |\langle T;\eta\rangle| \le \mathrm{Lip}(F)^k \mathbb{M}(T);$$

2. L'operatore di bordo commuta con il push-forward: $\partial F_\# T = F_\# \partial T$. Questa è una diretta conseguenza del fatto che il differenziale esterno commuta con i pull-back (teorema 3.7). Infatti

$$\langle \partial F_\# T,\omega\rangle = \langle T, F^\#(d\omega)\rangle = \langle T, d(F^\#\omega)\rangle = \langle F^\# \partial T,\omega\rangle \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n).$$

Le correnti di massa finita sono una famiglia ancora troppo grande affinchè possegga un significato geometrico. Infatti ad esempio basta prendere una qualsiasi k-superficie Σ di classe C^1 con $\mathscr{H}^k(\Sigma) < \infty$, e τ un *qualsiasi* k-campovettoriale ($\mathscr{H}^k \llcorner \Sigma$)-integrabile, e si avrebbe che $\tau\mathscr{H}^k \llcorner \Sigma$ è una corrente di massa finita.

Esempio 5.17. *Sia γ una curva di classe C^1 in $\mathbb{R}^n$. Se consideriamo la corrente $T := \tau\mathscr{H}^1 \llcorner \gamma$ dove τ è un generico campovettoriale (1-campovettoriale) su γ, si può verificare che se τ non è tangente a γ allora la* massa del bordo di T non è finita. *Mentre se ad esempio $\tau = \gamma'$, il teorema fondamenale del calcolo ci dice che in questo caso*

$$\langle \partial T; g\rangle = \int_a^b < \gamma'(t), \nabla g(\gamma(t)) > \, dt = \int_a^b \frac{dg(\gamma(t))}{dt}\, dt = g(b) - g(a) \quad \forall g \in C_0^1(\mathbb{R}^n),$$

e quindi si verifica facilmente che $\mathbb{M}(\partial T) = 2$.

L'esempio precedente ci suggerisce che se vogliamo fare della geometria con le correnti, dobbiamo restringere la nostra attenzione a quelle aventi *anche la massa del bordo finita.*

Definizione 5.18 (Correnti normali)**.** Sia $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$. T si dice *normale* se e solo se T ha massa finita e ∂T ha massa finita. Lo spazio delle k-correnti normali di $\mathbb{R}^n$ lo indicheremo con $\mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 5.19 (Compattezza per correnti normali)**.** *Sia $\{T_j\}$ una successione di k-correnti normali di $\mathbb{R}^n$ tali che*

$$\sup_j \big(\mathbb{M}(T_j) + \mathbb{M}(\partial T_j)\big) < +\infty.$$

Esiste allora una sottosuccessione $\{T_{j_m}\}$ che converge in $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ ad una k-corrente normale T.

Dimostrazione. Basta applicare il teorema 5.13 separatamente sulla successione T_j e sulla successione ∂T_j, per trovare una sotto-successione comune a tutte e due, tale che $T_{j_m} \rightharpoonup T$ in $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ e $\partial T_{j_m} \rightharpoonup \partial T$ in $\mathscr{D}_{k-1}(\mathbb{R}^n)$. T è allora normale ad esempio grazie al teorema di semi-continuità inferiore della massa. □

Una particolare sottospazio di correnti normali è quello delle correnti a supporto compatto e aventi bordo nullo. Vogliamo provare che analogamente a ciò che succede alle k-forme di $\mathbb{R}^n$ aventi differenziale esterno nullo [3], una k-corrente normale T di $\mathbb{R}^n$ avente bordo nullo, ammette una $(k+1)$ corrente U di $\mathbb{R}^n$ di massa finita il cui bordo è proprio T, in formule $\partial U = T$. A tal proposito ci serve introdurre il *prodotto fra correnti di massa finita* [4]

Definizione 5.20 (Prodotto)**.** Siano T_1 una k-corrente di $\mathbb{R}^n$ e T_2 una d-corrente di $\mathbb{R}^m$ entrambe di massa finita. La corrente prodotto è la $k+d$-corrente di $\mathbb{R}^{n+m} = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m\}$ definita da

$$\big(T_1 \times T_2\big)(\omega) := \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \big\langle \tau_1(x) \wedge \tau_2(y); \omega(x,y)\big\rangle \, d(|T_1| \times |T_2|), \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^{k+d}(\mathbb{R}^{n+m}), \tag{5.10}$$

dove τ_1 e τ_2 sono le orientazioni rispettivamente di T_1 e T_2, e $|T_1| \times |T_2|$ è la misura prodotto su $\mathbb{R}^{n+m}$ data dal *teorema di Fubini.*

Osservazione 5.21 (Propietà del prodotto di correnti)*.* Date $T_1 \in \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$ e $T_2 \in \mathbf{N}_d(\mathbb{R}^m)$ valgono le seguenti propietà

1. $\mathbb{M}(T_1 \times T_2) = \mathbb{M}(T_1) \cdot \mathbb{M}(T_2)$;
2. $\partial(T_1 \times T_2) = \partial T_1 \times T_2 + (-1)^k T_1 \times \partial T_2$.

Tornando al nostro problema, indichiamo con $[\![0,1]\!]$ la 1-corrente di $\mathbb{R}$ che agisce per integrazione sull'intervallo $[0,1]$:

$$[\![0,1]\!](\omega) = \int_0^1 \omega(t)\ dt \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^0(\mathbb{R}).$$

Definizione 5.22 (Cone construction)**.** Sia $T \in \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$. Sia inoltre $H\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ l'omotopia tra la mappa identità di $\mathbb{R}^n$ e la mappa costantemente uguale a y definita da $H(x,t) = tx + (1-t)y$. Definiamo allora

$$\delta_y \times T := H_\#([\![0,1]\!] \times T) \in \mathbf{N}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$$

e lo chiameremo cono di base T e estremo y.

[3] Tali forme vengono dette *chiuse*

[4] Il prodotto fra correnti si definisce in realtà fra generiche correnti come nel paragafo 7.4.1 di [9]. Preferiamo in questo contesto limitarci al caso di correnti di massa finita.

Nel nostro caso la k-corrente T è tale che $\partial T = 0$; allora usando il punto 2 dell'osservazione 5.21 abbiamo

$$\partial(\delta_y \times T) = H_{\#}\big((\delta_1 - \delta_0) \times T\big) = T \quad (\text{per } k > 1). \tag{5.11}$$

Osserviamo che l' ultima uguaglianza in (5.11) andrebbe verificata siccome non è immediata. Infine concludiamo questo discorso dicendo che se si sceglie $y \in \mathrm{spt}T$, con un analisi più approfondita si riesce ad ottenere il seguente bound (paragrafo 7.4.3 di [9])

$$\mathbb{M}(\delta_y \times T) \leq \mathrm{diam}(\mathrm{spt}T) \cdot \mathbb{M}(T), \tag{5.12}$$

e siccome inizialmente avevamo scelto T a supporto compatto, $\delta_y \times T$ soddisfa la nostra richiesta.

Definizione 5.23 (Correnti rettificabili)**.** Sia $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ di massa finita. T si dice *rettificabile* se e solo se esiste un insieme E k-rettificabile con orientazione che indichiamo con τ (definizione 4.7) ed una funzione $m\colon E \to \mathbb{R}^+$ $\mathscr{H}^k \llcorner E$-integrabile tali che $T = [\![E, \tau, m]\!]$, dove $[\![E, \tau, m]\!]$ agisce come

$$[\![E, \tau, m]\!](\omega) := \int_E \langle \tau; \omega \rangle \; m d\mathscr{H}^k, \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n). \tag{5.13}$$

La funzione m viene detta molteplicità di T. Infine lo spazio delle k-correnti rettificabili di $\mathbb{R}^n$ lo indichiamo con $\mathbf{R}_k(\mathbb{R}^n)$

Definizione 5.24 (Correnti intere)**.** Sia $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$. T si dice intera se e solo sia T che ∂T sono rettificabili, e le loro molteplicità assumono solo valori interi. Lo spazio delle k-correnti intere di $\mathbb{R}^n$ lo indichiamo con $\mathbf{I}_k(\mathbb{R}^n)$.

Esempio 5.25. *Sia T_Σ la k-corrente associata alla k-superficie orientata Σ come nell'esempio 5.6. Se chiediamo anche $\mathscr{H}^k(\Sigma) < \infty$ e $\mathscr{H}^{k-1}(\partial\Sigma) < \infty$, allora T_Σ è intera e in particolare vale*

$$T_\Sigma = [\![\Sigma, \tau, 1]\!],$$

dove τ è l'orientazione di Σ.

Definizione 5.26 (Correnti poliedrali)**.** Dato un k-simplesso non degenere di $\mathbb{R}^n$ che denotiamo con S, possiamo associarci la k-corrente $[\![S, \tau, \theta]\!]$, dove τ è una delle due possibili orientazioni costanti di S, e θ è un numero reale. Chiaramente in questo caso si ha sempre $[\![S, \tau, \theta]\!] \in \mathbf{R}_k(\mathbb{R}^n)$ e $\partial[\![S, \tau, \theta]\!] \in \mathbf{R}_{k-1}(\mathbb{R}^n)$ mentre $[\![S, \tau, \theta]\!] \in \mathbf{I}_k(\mathbb{R}^n)$ se e solo se θ è intero. Una k-corrente P si dice poliedrale se e solo se si può scrivere

$$P = \sum_{i=1}^{N} [\![S_i, \tau_i, \theta_i]\!], \tag{5.14}$$

con S_i k-simplessi con orientazione costante τ_i e θ_i un numero reale. Lo spazio delle k-correnti poliedrali di $\mathbb{R}^n$ lo denotiamo con $\mathbf{P}_k(\mathbb{R}^n)$.

Sull'insieme $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ si può introdurre un'altra norma detta *norma flat* e definita nel seguente modo

$$\mathbb{F}(T) \equiv \inf\{\mathbb{M}(R) + \mathbb{M}(S) \mid T = R + \partial S\}. \tag{5.15}$$

Chiaramente ponendo $R = T$ e $S = 0$ in (5.15) otteniamo subito che $\mathbb{F}(T) \le \mathbb{M}(T)$. Inoltre è facile provare che $\mathbb{F}(\cdot)$ sia effettivamente una norma. Nel caso in cui T sia un bordo, ovvero $T = \partial U$, e abbia supporto compatto, è comodo introdurre un'altra norma flat, equivalente alla precedente, definita come

$$\mathbb{F}_0(T) \equiv \inf\{\mathbb{M}(S) \mid T = \partial S\}. \tag{5.16}$$

Ora ci limiteremo ad elencare una serie di proprietà relativi alla norma flat che saranno utili in seguito.

Teorema 5.27. *Se $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ allora vale*

$$\mathbb{F}(T) \equiv \sup_{\phi^*(\omega),\ \phi^*(d\omega) \le 1} T(\omega),$$

e inoltre se T è un bordo ovvero $T = \partial U$ vale

$$\mathbb{F}_0(T) \equiv \sup_{\phi^*(d\omega) \le 1} T(\omega)$$

Si veda 4.1.12 di [7] per una dimostrazione del teorema 5.27.

Teorema 5.28. *Sia $\{T_j\}$ una successione di k-correnti di $\mathbb{R}^n$. Allora la convergenza delle T_j in norma flat implica convergenza delle T_j in $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$. Mentre se esiste un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni $j = 1, 2, \ldots,$ spt $T_j \subset K$, allora la convergenza delle T_j in $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ implica la convergenza delle T_j in norma flat.*

Vediamo una conseguenza dei teoremi precedente:

Teorema 5.29. *Il sotto-spazio vettoriale di $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ delle correnti aventi norma flat finita è $\mathbb{F}$-chiuso.*

Dimostrazione. Consideriamo una successione $\{T_j\}$ di k-correnti che sia di Cauchy in norma flat. Consideriamo poi su $\mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n)$ la norma data da $|\omega|_{\max} := \max\big(\phi^*(\omega), \phi^*(d\omega)\big)$. Il teorema 5.27 ci dice che la norma flat è la norma duale di $|\cdot|_{\max}$, dunque la successione $\{T_j\}$ è di Cauchy nella norma duale di uno spazio-vettoriale normato, ovvero il suo limite deve essere ancora un elemento del duale di tale spazio [5]. In particolare esiste il limite T in norma flat della successione T_j e $\mathbb{F}(T) < \infty$.
Resta da provare che T sia una k-corrente. Questo segue dal fatto che convergenza in norma flat implica convergenza in $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$, e quest'ultima è sufficiente a garantire che $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ [6]. □

Un altro aspetto importante delle correnti, è che esiste uno stretto legame fra n-correnti di $\mathbb{R}^n$ aventi bordo di massa finita e funzioni in $BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Per esplicitare tale legame, denotiamo con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, e con $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ la rispettiva base duale; ora se T è una n-corrente di $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathbb{M}(\partial T) < \infty$ consideriamo la distribuzione Λ che agisce sulle funzioni test $\omega \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ come

$$\big\langle \Lambda; \omega \big\rangle = \big\langle T; \omega\ dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \big\rangle. \tag{5.17}$$

[5] Il duale di uno spazio vettoriale normato è sempre uno spazio di Banach

[6] Questo è un fatto generale per le distribuzioni. Si veda un qualsiasi testo di base sulla teoria delle distribuzioni per una dimostrazione

La (5.17) ci dice che vale inoltre la seguente formula

$$\left\langle \partial T; \omega\, dx_{\hat{i}} \right\rangle = \left\langle T; (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \right\rangle = (-1)^i \left\langle D_i \Lambda; \omega \right\rangle, \ \ \forall \omega \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n). \quad (5.18)$$

Dunque la derivata distribuzionale i-esima di Λ agisce sulla generica funzione test ω come agisce il bordo della corrente T sulla $(n-1)$-forma $\omega\, dx_{\hat{i}}$ (modulo un segno $(-1)^i$). Usando la (5.18) si può provare il cosiddetto Constancy Lemma che è di fondamentale importanza nella teoria delle correnti.

Lemma 5.30 (Constancy Lemma)**.** *Sia $T \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^n)$ tale che $\partial T = 0$. Allora $T = c(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) d\mathscr{L}^n$ dove $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e c è una costante.*

Dimostrazione. Associando a T la distribuzione Λ come in (5.17) e ricordando la relazione (5.18) abbiamo che per ogni $i = 1, \cdots, n$, $D_i \Lambda = 0$ e questo ci dice che la distribuzione Λ agisce come $\Lambda(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega\, c d\mathscr{L}^n$ [7] per ogni $\omega \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, che ricordando ancora (5.17) è proprio la tesi. □

Il Constancy Lemma ci dice dunque che l'operatore bordo, quando la dimensione della corrente è uguale alla dimensione dello spazio ambiente, dà in un qualche modo una misura della variazione della corrente, nel senso che bordo nullo implica molteplicità di T costante, ovvero variazione nulla.
Ecco il lemma che lega lo spazio $\mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$ alle n-correnti con massa del bordo finita:

Lemma 5.31. *Sia $T \in \mathscr{D}_n(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbb{M}(\partial T) < +\infty$. Allora $T = (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) m d\mathscr{L}^n$, dove $m \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$, e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.*

Traccia di dimostrazione. Associando a T la distribuzione Λ come in (5.17) e usando la relazione (5.18) è facile concludere che $D\Lambda \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Rimane dunque da provare che $\Lambda \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (nel senso delle distribuzioni).
A tal proposito si consideri una famiglia di mollificatori $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ e si ponga $\Lambda_\varepsilon = \Lambda * \rho_\varepsilon$. Abbiamo allora $\Lambda_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\Lambda_\varepsilon \rightharpoonup \Lambda$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ e $\|\nabla \Lambda_\varepsilon\|_1 \le |D\Lambda|(\mathbb{R}^n)$. Grazie ad una versione della disuguaglianza di Poincarè [8] abbiamo per ogni palla $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_B |\Lambda_\varepsilon|\, d\mathscr{L}^n \le c \left[\int_B |\nabla \Lambda_\varepsilon|\, d\mathscr{L}^n + \left| \int_B \phi \Lambda_\varepsilon\, d\mathscr{L}^n \right| \right] \le c' \left[|D\Lambda|(\mathbb{R}^n) + |\Lambda(\phi)| \right],$$

dove ϕ è una qualsiasi funzione in $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int_B \phi \neq 0$, e c dipende solo da B. Dunque esiste $L < \infty$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\|\Lambda_\varepsilon\|_1 + \|\nabla \Lambda_\varepsilon\|_1 \le L.$$

Quest'ultima disuguaglianza assieme all'immersione $BV(B) \hookrightarrow L^{1^*}(B)$ mi dicono che le Λ_ε convergono forte in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ad una mappa $m \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e chiaramente $m = \Lambda$. □

Esiste anche una versione generalizzata del lemma 5.31 per insiemi k-rettificabili.

[7] Questo è un fatto generale per le distribuzioni. Si veda l'appendice
[8] Si veda l'appendice

Lemma 5.32. *Sia T una k-corrente di $\mathbb{R}^n$ con massa del bordo finita, e concentrata su un insieme k-rettificabile E avente misura $\mathscr{H}^k$ localmente finita. Allora T è rettificabile, più precisamente esistono un'orientazione τ di E, e una mappa m localmente $\mathscr{H}^k \llcorner E$-integrabile tali che*

$$T = [\![E, \tau, m]\!].$$

Notare che se vale $\mathscr{H}^k(E) < +\infty$ allora T è normale. Inoltre il lemma 5.32 implica in particolare che nelle stesse ipotesi se $\partial T = 0$ E è una k-superficie di classe C^1 connessa, allora m è costante. Notiamo infine che anche in questo caso il lemma funziona siccome la dimensione della corrente è uguale alla dimensione dell'insieme rettificabile su cui è concentrata.

Vogliamo discutere infine due importanti teoremi della teoria delle correnti che saranno i fondamentale importanza per i capitoli successivi.

Definizione 5.33 (δ-griglia e k-scheletro)**.** Sia $\delta > 0$ e k un intero tale che $0 < k < n - 1$. Consideriamo i cubi di $\mathbb{R}^n$ del tipo

$$Q_{\delta,m} := [\delta m_1, \delta(m_1 + 1)] \times [\delta m_2, \delta(m_2 + 1)] \times \cdots \times [\delta m_n, \delta(m_n + 1)]$$

al variare di $m \in \mathbb{Z}^n$. La δ-griglia centrata $\mathscr{G}_\delta^0$ di $\mathbb{R}^n$ è l'unione di tutte le $(n-1)$-facce di tutti i $Q_{\delta,m}$. Il k-scheletro della δ-griglia centrata è definito come l'unione di tutte le k-facce di tutti i $Q_{\delta,m}$.
Definiamo allora la generica δ-griglia di $\mathbb{R}^n$, e la indichiamo con $\mathscr{G}_\delta$, una qualsiasi roto-traslazione della δ-griglia centrata. Il suo k-scheletro $\mathscr{S}_\delta^k$, è l'insieme ottenuto con la stessa roto-traslazione applicata al k-scheletro della δ-griglia centrata

Vale allora il seguente importantissimo teorema (rimandiamo al paragrafo 7.7 di [9] per dimostrazioni e approfondimenti):

Teorema 5.34 (Deformazione Poliedrale)**.** *Sia $\mathscr{G}_\delta$ una δ griglia di $\mathbb{R}^n$ e $T \in \boldsymbol{N}_k(\mathbb{R}^n)$ $(0 \le k \le n-1)$. Allora esistono, una k-corrente P che è somma finita di k-facce appartenenti al k-scheletro ognuna con molteplicità costante, ovvero*

$$P = \sum_{i=1}^{N} [\![S_i, \tau_i, \theta_i]\!], \text{ (N dipende da } \delta)$$

dove $S_i \in \mathscr{S}_\delta^k$, τ_i è una delle due orientazioni costanti di S_i e θ_i è una costante reale, una $(k+1)$-corrente S, una k-corrente R ed una costante c che dipende solo dalla dimensione n, tali che

1. $T - P = \partial S + R$
2. $\mathbb{M}(P) \le c\big(\mathbb{M}(T) + \delta\mathbb{M}(\partial T)\big),\ \mathbb{M}(\partial P) \le c\mathbb{M}(\partial T)$
3. $S \le c\delta\mathbb{M}(T)$
4. $R \le c\delta\mathbb{M}(\partial T)$.

In particolare (3) e (4) ci dicono che $\mathbb{F}(T-P) \le c\delta\big(\mathbb{M}(T) + \mathbb{M}(\partial T)\big)$. Inoltre se $\partial T = 0$ allora $R = 0$, $T - P = \partial S$ e quindi $\partial P = 0$.

Un'immediata conseguenza della deformazione poliedrale è *ogni corrente normale può essere arbitrariamente approssimata in norma flat con correnti poliedrali.* Una conseguenza invece non troppo immediata è data dal seguente teorema:

Una conseguenza non troppo immediata del teorema di deformazione è il seguente:

Teorema 5.35 (Approssimazione poliedrale forte). *Sia* $T \in \boldsymbol{N}_k(\mathbb{R}^n)$. *Allora esiste una successione* $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \boldsymbol{P}_k(\mathbb{R}^n)$ *di correnti poliedrali tali che*

1. $\mathbb{F}(P_n - T) \to 0$ *per* $n \to +\infty$ *e*

2. $\mathbb{M}(P_n) \to \mathbb{M}(T)$, $\mathbb{M}(\partial P_n) \to \mathbb{M}(\partial T)$ *per* $n \to +\infty$.

Inoltre se $\partial T = 0$, *le* P_n *si possono scegliere in modo che* $\partial P_n = 0$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

La parte non immediata del precente teorema è il punto 2, ovvero la convergenza delle masse.
Limitiamoci infine ad enunciare l'importantissimo Teorema di Compattezza di Federer-Fleming (rimandiamo al paragrafo 8.1 del testo [9]):

Teorema 5.36 (Teorema di Compattezza). *Sia* $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ *una successione di* k*-correnti intere che*

$$\sup_j \big(\mathbb{M}(T_j) + \mathbb{M}(\partial T_j)\big) < +\infty, \tag{5.19}$$

esiste allora una sottosuccessione $\{T_{j_m}\}_{m=0}^{\infty}$ *ed una* k*-corrente* T *intera, tali che*

$$T_{j_m} \rightharpoonup T \text{ per } j \to \infty, \text{ in } \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n). \tag{5.20}$$

Osservazione 5.37. Notare che se esiste un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ per cui $\mathrm{spt} T_j \subset K$ per ogni $i = 1, 1, \ldots$, allora la convergenza in $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ è equivalente alla convergenza in norma flat (teorema 5.28). Inoltre il teorema 5.36 è a volte citato come *teorema di chiusura*, poichè il teorema 5.19 già ci fornisce una sottosuccessione che converge ad una corrente *normale*. La parte più difficile del teorema è in effetti quella di provare che le correnti limite e i rispettivi bordi siano rettificabili e le loro molteplicità siano intere, da cui l'appellativo teorema di chiusura.

Capitolo 6

Decomposizone di 1-correnti normali

Data una k-corrente normale di $\mathbb{R}^n$ diciamo che è *decomponibile in correnti rettificabili*, se esiste una misura μ positiva sull'insieme delle correnti rettificabili di $\mathbb{R}^n$ e tale che

$$T(\omega) = \int R(\omega)\ d\mu(R) \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^k(\mathbb{R}^n), \tag{6.1}$$

e

$$\int \mathbb{M}(R)\ d\mu(R) < +\infty. \tag{6.2}$$

A volte più compattamente scriviamo anche $T = \int R\ d\mu(R)$ che sta ad indicare esattamente (6.1). Inoltre diciamo che la decomposizione (6.1) è una *buona decomposizione della massa*, o semplicemente una *buona decomposizione*, se vale anche

$$\mathbb{M}(T) = \int \mathbb{M}(R)\ d\mu(R). \tag{6.3}$$

Notiamo che è invece sempre vera la disuguaglianza $\mathbb{M}(T) \le \int \mathbb{M}(R)\ d\mu(R)$. Analogamente diremo che T è decomponibile in correnti *intere* se vale (6.1) e μ è concentrata sulle correnti intere, e che è una buona decomposizione se in più vale (6.3).
Riprendendo ciò che è già stato accennato nell'introduzione, da [16] si sa che ogni 1-corrente normale con bordo nullo, si può decomporre in solenoidi elementari [1]. Inoltre dalla teoria generale della convessità sappiamo già che esiste unun insieme J, tale che ogni 1-corrente normale si decompone in elementi di J. Infatti si consideri la palla unitaria B_s nello spazio delle 1-correnti normali; tale palla è allora metrizzabile (nella topologia della correnti), siccome è un insieme limitato e duale di uno spazio separabile. Dunque l'insieme dei suoi punti estremali extr B_s è non vuoto e di Borel [2], e quindi applicando il teorema di Choquet [3], segue che ogni corrente con bordo nullo si decompone attraverso una misura supportata su extr B_s. Sempre in [16], si fa notare che la decomposizione in solenoidi elementari è equivalente a dire che l'insieme extr

[1] Si veda (1.16)-(1.19) di [16].
[2] Si veda il teorema di Krein-Milman in [14]
[3] Si veda sempre [14]

B_s è contenuto nell'insieme dei solenoidi elementari, dando così in certo senso una caratterizzazione dei punti estremali di B_s. Ribadiamo qui, che l'uso dei solenoidi elementari è dovuto al fatto che si vuole una decomposizione fatta di elementi in B_s (extr B_s nello specifico), in particolare di correnti aventi ancora bordo nullo. Una generica 1-corrente normale la si può decomporre ottenere riducendosi al caso bordo nullo, si veda sempre [16].
In questo capitolo il nostro obbiettivo è quello di provare che data $T \in \mathbf{N}_1(\mathbb{R}^n)$, è sempre possibile decomporla in correnti intere. Vedremo infine un esempio che mostra che quanto fatto è ottimale, nel senso che chiedendo che la decomposizione sia intera, non ci si può aspettare anche una buona decomposizione della massa del bordo [4].
Seguiremo dapprima l'approccio al problema come in [12] e [13], e poi daremo una seconda dimostrazione più diretta. Iniziamo quindi introducendo il concetto di corrente aciclica.

§ 1. Correnti Acicliche

Iniziamo con una definizione:

Definizione 6.1 (Sottocorrente)**.** Siano $T, S \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$, allora diciamo che S è una sottocorrente di T, e scriviamo $S \leq T$, se e solo se

$$\mathbb{M}(T - S) + \mathbb{M}(S) \leq \mathbb{M}(T). \tag{6.4}$$

Facciamo alcune considerazioni a riguardo.

Osservazione 6.2. Siccome la disuguaglianza opposta

$$\mathbb{M}(T - S) + \mathbb{M}(S) \geq \mathbb{M}(T)$$

è sempre vera, abbiamo che (1.1) è equivalente in realtà ad un'uguaglianza.

Osservazione 6.3. Se $R \leq S$ e $S \leq T$ allora $R \leq T$. Infatti:

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(T) &\geq \mathbb{M}(S) + \mathbb{M}(T - S) \geq \mathbb{M}(R) + \mathbb{M}(S - R) + \mathbb{M}(T - S)\\ &\geq \mathbb{M}(R) + \mathbb{M}(T - R)\end{aligned}$$

Osservazione 6.4. Sia $T \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ e $E \subset \mathbb{R}^n$ boreliano. Allora $T \llcorner E \leq T$. Infatti,

$$\mathbb{M}(T) = |T|(\mathbb{R}^n) = |T|(E) + |T|(E^c) = \mathbb{M}(T \llcorner E) + \mathbb{M}(T - T \llcorner E)$$

Osservazione 6.5. Se $S \leq T$, allora per ogni insieme di Borel $E \subset \mathbb{R}^n$ si ha $S \llcorner E \leq T \llcorner E$. Infatti sempre grazie alla disuguaglianza triangolare

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(T \llcorner E) &\leq \mathbb{M}((T - S) \llcorner E) + \mathbb{M}(S \llcorner E)\\ \mathbb{M}(T \llcorner E^c) &\leq \mathbb{M}((T - S) \llcorner E^c) + \mathbb{M}(S \llcorner E^c)\end{aligned} \tag{6.5}$$

mentre se sommiamo ambo i membri delle due disuguaglianze, usando che $S \leq T$, otteniamo un'uguaglianza. Dunque le due disuguaglianze in (6.5) si riducono ad uguaglianze per ogni boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$. In particolare otteniamo anche

$$|T| = |T - S| + |S|$$

e quindi $|S| \leq |T|$ come misure.

[4]Dal punto di vista geometrico, questo è il motivo per cui se si vuole una caratterizzazione dei punti estremali di B_s non bastano le correnti intere, ma sevono i solenoidi elementari.

Osservazione 6.6. Se $S \le T$ allora $T - S \le T$. Infatti

$$\mathbb{M}(T - (T - S)) + \mathbb{M}(T - S) = \mathbb{M}(S) + \mathbb{M}(T - S) \le \mathbb{M}(T). \tag{6.6}$$

Proposizione 6.7. *Sia T_j una successione di correnti normali, $S_j \le T_j$, e supponiamo che entrambe $S_j \rightharpoonup S$ e $T_j \rightharpoonup T$ entrambe nella convergenza di $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ per $j \to +\infty$, e supponiamo inoltre che $\mathbb{M}(T_j) \to \mathbb{M}(T)$ per $j \to +\infty$. Allora $S \le T$ e $\mathbb{M}(S_j) \to \mathbb{M}(S)$.*

Dimostrazione. Si consideri la successione $\{T_j - S_j\}_{j=0}^{+\infty}$ che converge a $T - S$ in $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$. Dalla semicointinuità inferiore di $\mathbb{M}$ rispetto a tale convergenza sappiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(S) + \mathbb{M}(T - S) &\le \liminf_{j\to\infty} \mathbb{M}(S_j) + \liminf_{j\to\infty} \mathbb{M}(T_j - S_j) \\
&\le \liminf_{j\to\infty} [\mathbb{M}(S_j) + \mathbb{M}(T_j - S_j)] \\
&\le \liminf_{j\to\infty} \mathbb{M}(T_j) \\
&= \mathbb{M}(T),
\end{aligned} \tag{6.7}$$

ovvero $S \le T$. Siccome l'altra disuguaglianza è sempre verificata abbiamo che in (6.7) sono tutte uguaglianze. Ancora, siccome $\mathbb{M}(T - S) \le \liminf_{j\to\infty} \mathbb{M}(T_j - S_j)$ otteniamo che $\mathbb{M}(S) = \liminf_{j\to\infty} \mathbb{M}(S_j)$. Siccome ciò è vero per ogni sottosuccessione estratta da T_j, abbiamo in realtà la convergenza di $\mathbb{M}(S_j)$ a $\mathbb{M}(S)$ per $j \to \infty$. □

Vediamo adesso la definizione di ciclo

Definizione 6.8. Diciamo che $C \in \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$ è un ciclo di $T \in \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$, se $C \le T$ e $\partial C = 0$. Diciamo che T è aciclica se $C = 0$ è l'unico ciclo di T.

E' facile provare che per ogni corrente normale T esiste un suo ciclo C tale che $T - C$ è aciclica. (In generale C non è unica)

Proposizione 6.9 (Cicli Massimali)**.** *Ogni corrente normale T possiede un ciclo C tale che $T - C$ è aciclica.*

Dimostrazione. Definiamo

$$\xi(T) := \sup\{\mathbb{M}(C) \mid C \text{ è un ciclo di } T\}.$$

Sia ora C_0 un ciclo di $T_0 := T$ tale che $\mathbb{M}(C_0) \ge \xi(T_0)/2$ e sia $T_1 := T_0 - C_0$. Per induzione possiamo definire una successione di correnti C_j tali che C_j sia un ciclo di T_j e $\mathbb{M}(C_j) \ge \xi(T_j)/2$ e $T_{j+1} := T_j - C_j$.
Ora sia C un ciclo di $T_{j+1} = T_j - C_j$. Allora siccome $C_j \le T_j$ e $C \le T_j - C_j$, grazie alla disuguaglianza triangolare otteniamo

$$\mathbb{M}(C + C_j) + \mathbb{M}(T_j - C_j - C) \le \mathbb{M}(C) + \mathbb{M}(C_j) + \mathbb{M}(T_j - C_j - C) = \mathbb{M}(T_j),$$

e quindi $\tilde{C} := C_j + C$ è un ciclo di T_j e $\mathbb{M}(\tilde{C}) = \mathbb{M}(C) + \mathbb{M}(C_j)$. Questo significa che $\xi(T_j) \ge \mathbb{M}(\tilde{C}) = \mathbb{M}(C_j) + \mathbb{M}(C)$, ovvero

$$\mathbb{M}(C) \le \xi(T_j) - \mathbb{M}(C_j) \le \frac{\xi(T_j)}{2},$$

e in particolare $\xi(T_{j+1}) \le \xi(T_j)/2$.
D'altra parte si ha anche

$$\mathbb{M}(C) \le \xi(T_j) \le \frac{\xi(T_0)}{2^j},$$

e quindi $\sum_j C_j$ è convergente in massa e quindi lo è anche la successione $\{T_j\}$, siccome $T_j = T - \sum_{i=0}^{j} C_i$. Poniamo dunque $T^{'} := \lim_j T_j$, e abbiamo $T^{'} \le T$ dalla proposizione 6.7 e inoltre $T^{'}$ è aciclica. Infatti sia $j \in \mathbb{N}$, allora $T_{j+i} \le T_j$ (poichè dall'osservazione 6.6 $T_{j+i} \le \cdots \le T_{j+1} \le T_j$) per ogni $i \in \mathbb{N}$, e dunque passando al limite per $i \to +\infty$, otteniamo ancora dalla proposizione 6.7 che $T^{'} \le T_j$. Quindi se $C^{'}$ è un ciclo di $T^{'}$ allora è anche un ciclo di T_j, e deve essere $\mathbb{M}(C^{'}) \le \xi(T_j)$, e siccome $\xi(T_j) \to 0$ otteniamo che $C^{'} \equiv 0$. □

§ 2. Un Teorema di Passaggio al Limite

La proposizione 6.9 del paragrafo precedente ci dice che data una corrente normale T allora si può sempre scomporre come somma di due sottocorrenti di cui una è un ciclo C e l'altra è aciclica $T - C$. Quello che faremo è decomporre separatamente C e $T - C$. Questo paragrafo è dedicato alla decomposizione di correnti acicliche. Dunque da adesso in poi supporremo sempre che la data corrente T che vogliamo decomporre sia aciclica.
In breve l'idea è quella di approssimare T con opportune correnti più semplici delle quali si conosce una decomposizione, e poi provare che queste decomposizioni rimangono stabili per passaggio al limite. Siccome la decomposizione la vogliamo in correnti intere, notiamo che una tale decomposizione di una corrente T è completamente individuata dando una misura $\mu \in \mathscr{M}\big(\mathbf{I}_1(\mathbb{R}^n)\big)$ e si avrebbe

$$T(\omega) = \int_{\mathbf{I}_1(\mathbb{R}^n)} I(\omega)\ d\mu(I) \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^n). \tag{6.8}$$

E' bene quindi fissare una topologia sullo spazio (o su un opportuno sottospazio di) $\mathbf{I}_1(\mathbb{R}^n)$:

Definizione 6.10. Definiamo lo spazio metrico

$$\Theta := \{\theta \in \mathbf{I}_1(\mathbb{R}^n) \mid \mathbb{M}(\partial\theta) \le 2\} \tag{6.9}$$

dotato della norma flat $\mathbb{F}$.

Osservazione 6.11. Se $T \in \mathbf{N}_1(\mathbb{R}^n)$ è decomponibile in correnti intere tramite una misura μ, allora dato un boreliano $\mathscr{B} \subset \Theta$, si ha che se definiamo la corrente $\tilde{T}$ come

$$\tilde{T} = \int_{\mathscr{B}} \theta\ d\mu(\theta), \tag{6.10}$$

allora $\tilde{T}$ è normale e $\tilde{T} \le T$. Infatti abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(\tilde{T}) + \mathbb{M}(T - \tilde{T}) &\le \int_{\mathscr{B}} \mathbb{M}(\theta)\ d\mu + \int_{\Theta\smallsetminus\mathscr{B}} \mathbb{M}(\theta)\ d\mu \\ &= \int_{\Theta} \mathbb{M}(\theta)\ d\mu \\ &= \mathbb{M}(T),\end{aligned}$$

il che implica immediatamente $\mathbb{M}(\tilde{T}) = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{M}(\theta)\, d\mu$ e $\tilde{T} \leq T$. Infine per la massa del bordo basta notare che siccome ogni $\theta \in \Theta$ è tale che $\mathbb{M}(\partial\theta) \leq 2$ allora

$$\mathbb{M}(\partial\tilde{T}) \leq \int_{\mathscr{B}} 2\, d\mu \leq 2\mu(\Theta).$$

Proposizione 6.12. *Θ è σ-compatto e separabile.*

Dimostrazione. Notiamo che grazie alla proposizione 5.28 se $\mathbb{F}(T - T_k) \to 0$ allora $\partial T_k \rightharpoonup \partial T$ in $\mathscr{D}_1(\mathbb{R}^n)$. Dunque la s.c.i. di $\mathbb{M}$ rispetto alla convergenza delle correnti, insieme al teorema di compattezza di (F.&F.), ci dice che se definiamo l'insieme $U_n := \{\theta \in \Theta \mid \mathbb{M}(\theta) \leq n\}$, abbiamo che U_n è compatto. Basta dunque scrivere $\Theta = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.
Per la separabilità basta notare che il teorema di approssimazione poliedrale ci dice che ad esempio l'insieme delle correnti poliedrali supportate sull'unione di $1/n$-griglie, $n \in \mathbb{N}$, con molteplicità razionali è $\mathbb{F}$ denso. □

Il prossimo teorema è il punto centrale di questa sezione. Siccome vogliamo ottenere la decomposizione di una data corrente come limite di decomposizioni di correnti più semplici che approssimano T, siamo interessati a studiare come si comporta al limite una successione di decomposizioni di date correnti T_k. D'ora in poi, se non specificato altrimenti, supporremo di essere nelle seguenti ipotesi:
Siano $T, \{T_k\}_{k=0}^{+\infty}$ correnti normali a supporto compatto tali che

$$\mathbb{F}(T - T_k) \to 0 \text{ per } k \to +\infty \tag{6.11}$$

$$\mathbb{M}(T_k) \to \mathbb{M}(T) \text{ per } k \to +\infty \tag{6.12}$$

$$T_k = \int_{\Theta} \theta d\mu_k(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{6.13}$$

$$\mathbb{M}(T_k) = \int_{\Theta} \mathbb{M}(\theta) d\mu_k(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{6.14}$$

dove le $\mu_k \in \mathscr{P}(\Theta)$ sono misure di probabilità.

Teorema 6.13 (Passaggio al Limite della Decomposizione)**.** *Siano $T, \{T_k\}_{k=0}^{+\infty}$, 1-correnti normali di $\mathbb{R}^n$ a supporto compatto, con T aciclica, soddisfacenti* (6.11), (6.12), (6.13), (6.14). *Allora esiste $\mu \in \mathscr{P}(\Theta)$ tale che*

$$T(\omega) = \int_{\Theta} \theta(\omega) d\mu(\theta) \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\mathbb{M}(T) = \int_{\Theta} \mathbb{M}(\theta) d\mu(\theta).$$

Incominciamo con il

Lemma 6.14. *Nelle ipotesi del teorema 6.13 le misure $\{\mu_k\}_{k=0}^{+\infty}$ sono equitight.*

Dimostrazione. Basta notare che scelto $M \in \mathbb{N}$, posto $\Theta_M \equiv \{\theta \in \Theta | \mathbb{M}(\theta) > M\}$ allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$M\mu_k(\Theta_M) \leq \int_{\Theta_M} \mathbb{M}(\theta)\, d\mu_k \leq \mathbb{M}(T_k),$$

siccome $\mathbb{M}(T_k) \to \mathbb{M}(T)$ se $k \to +\infty$ rispetto alla $\mathscr{D}_1(\mathbb{R}^n)$-convergenza ci dice che Θ_M^c è chiuso, e siccome su Θ_M^c la $\mathscr{D}_1(\mathbb{R}^n)$ coincide con la $\mathbb{F}$-convergenza, Θ_M^c è anche $\mathbb{F}$-chiuso. La semi-continuità inferiore di $\mathbb{M}$ e Θ_M^c è $\mathbb{F}$-compatto, otteniamo la tesi. □

Supponiamo di essere nelle ipotesi di 6.13,siccome per il lemma 6.14 la famiglia $\{\mu_k\}_{k=0}^{+\infty}$ è equitight, per il teorema di Prokhorov (a meno di sottosuccessione) possiamo supporre $\mu_k \rightharpoonup \mu \in \mathscr{P}(\Theta)$ nella dualità con $C_b(\Theta)$. Possiamo dunque chiederci se $\int_\Theta \theta \; d\mu(\theta)$ è una decomposizione per T.
Vediamo un esempio che mostra come la sola convergenza delle misure μ_k nella dualità con $C_b(\Theta)$ non basta per garantire che $T = \int_\Theta \theta d\mu(\theta)$

Esempio 6.15. *Consideriamo la successione di correnti $T_k \in \boldsymbol{N}_1(\mathbb{R}^2)$ definita da*

$$T_k(\omega) = \int_\Theta \theta(\omega) \; d\Big(\frac{1}{k}\delta_{\theta_k} + (1 - \frac{1}{k})\mu\Big)$$

dove $\theta_k(t) = \big(1 + \frac{t}{k}\big)\big(\cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t)\big)$ per $t \in [0,1]$, e μ è una qualsiasi misura di probabilità su Θ con supp$(\mu) \subset \big\{\theta \in \Theta | supp(\theta) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus B_2(0) \;\; \mathbb{M}(\partial T) \leq 2\big\}$.
Ora chiaramente le $\mu_k \equiv \frac{1}{k}\delta_{\theta_k} + (1 - \frac{1}{k})\mu$ e siccome $\frac{1}{k}\delta_{\theta_k}(\Theta) = \frac{1}{k} \to 0$ abbiamo $\frac{1}{k}\delta_{\theta_k} + (1 - \frac{1}{k})\mu \rightharpoonup \mu$ nella dualità con $C_b(\Theta)$. D'altra parte si vede chiaramente che $T_k \rightharpoonup T$ in $\mathscr{D}_1(\mathbb{R}^2)$ dove $T = \int_\Theta \theta \; d\big(\delta_{\overline{\theta}} + \mu\big)$ e $\overline{\theta}(t) = \big(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)\big)$ per $t \in [0,1]$.
Notiamo però due particolari che emergono da questo esempio: il primo è che vale

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_\Theta \mathbb{F}(\theta) d\mu_k(\theta) > \int_\Theta \mathbb{F}(\theta) d\mu(\theta),$$

siccome $\mathbb{F}(\theta_{k\#}[\![0,1]\!]) \approx \pi k$ per $k \to +\infty$. Inoltre $\theta_{k\#}[\![0,1]\!] = \int_\Theta \theta \; d\big(\frac{1}{k}\delta_{\theta_k}\big)$ converge nel senso delle correnti a $\overline{T} = \overline{\theta}_\#[\![0,1]\!]$, e $\overline{T}$ è un ciclo siccome $\partial\overline{T} = 0$.

Vale invece il seguente

Lemma 6.16. *Siano $T, \{T_k\}_{k=0}^{+\infty}$ soddisfacenti le ipotesi del teorema 6.13. Se $\mathbb{W}_1(\mu_k, \mu) \to 0$ per $k \to +\infty$ allora vale*

$$T = \int_\Theta \theta \; d\mu(\theta).$$

Dimostrazione. Notiamo che scegliendo k sufficientemente grande vale la seguente catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}\left(T - \int_\Theta \theta \; d\mu\right) &\leq \mathbb{F}(T - T_k) + \mathbb{F}\left(\int_\Theta \theta \; d\mu_k - \int_\Theta \theta \; d\mu\right) \\
&= \epsilon + \sup_{\|\omega\|\leq 1, \|d\omega\|\leq 1} \left[\int_\Theta \theta \; (d\mu_k - d\mu)\right](\omega) \;, \big(\omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^n)\big) \\
&= \epsilon + \sup_{\|\omega\|\leq 1, \|d\omega\|\leq 1} \int_\Theta \theta(\omega) \; (d\mu_k - d\mu) \;, \big(\omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^n)\big) \\
&\leq \epsilon + \sup_{\varphi \in \mathrm{Lip}_1(\Theta)} \int_\Theta \varphi \; (d\mu_k - d\mu) \\
&\leq \epsilon + \mathbb{W}(\mu_k, \mu) \\
&\leq 2\epsilon,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che la mappa $\theta \mapsto \theta(\omega)$ è lipschitziana in θ se ω è tale che $\|\omega\| \leq 1, \|d\omega\| \leq 1$. □

Siamo pronti per provare il risultato principale di questo paragrafo.

Dimostrazione 6.13. . Grazie al lemma 6.14 possiamo (a meno di sottosuccessioni) supporre $\mu_k \rightharpoonup \mu \in \mathscr{P}(\Theta)$ per $k \to +\infty$ nella dualità con $C_b(\Theta)$. Dunque i lemmi 6.16 e 1.31 ci dicono che per concludere basta provare che $\int_\Theta \mathbb{F}(\theta) d\mu_k(\theta) \to \int_\Theta \mathbb{F}(\theta) d\mu(\theta)$, e μ sarebbe proprio la misura cercata.
Notiamo che posto $\phi(M) := \limsup_{k\to+\infty} \int_{\Theta_M} \mathbb{F}(\theta)\ d\mu_k(\theta)$ dove $\Theta_M := \{\theta \in \Theta | \mathbb{F}(\theta) > M\}$, se provassimo $\lim_{k\to+\infty} \phi(k) = 0$ allora avremmo la tesi. Infatti siccome $\mathbb{F}$ è ovviamente continua e Θ_M^c è un insieme chiuso di Θ, se poniamo

$$\begin{cases} f_M(\theta) = \mathbb{F}(\theta)\ se\ \theta \in \Theta_M^c \\ f_M(\theta) = M\ se\ \ \in \Theta_M \end{cases}$$

otteniamo una mappa $f_M : \Theta \to \mathbb{R}$ continua e limitata. Quindi

$$\begin{aligned} \limsup_{k\to\infty} \left| \int_\Theta \mathbb{F}(\theta) d(\mu_k - \mu) \right| &\le \limsup_{k\to\infty} \left| \int_\Theta \big(\mathbb{F}(\theta) - f_M(\theta)\big) d\mu_k \right| + \limsup_{k\to\infty} \left| \int_\Theta f_M(\theta) d(\mu_k - \mu) \right| + \left| \int_\Theta \big(f_M(\theta) - \mathbb{F}(\theta)\big) d\mu \right| \\ &\le \limsup_{k\to\infty} \left| \int_{\Theta_M} \big(\mathbb{F}(\theta) - M\big)\ d\mu_k \right| + \left| \int_{\Theta_M} \big(\mathbb{F}(\theta) - M\big)\ d\mu \right| \\ &\le 2 \limsup_{k\to\infty} \int_{\Theta_M} \mathbb{F}(\theta)\ d\mu_k + 2 \int_{\Theta_M} \mathbb{F}(\theta)\ d\mu \\ &\le 4\epsilon \end{aligned}$$

per $k \to +\infty$ e se M è sufficientemente grande. Dove abbiamo usato alla fine che la mappa $\theta \mapsto \mathbb{F}(\theta) \mathbb{1}_{\Theta_M}(\theta)$ è semicontinua inferiormente e quindi $\int_{\Theta_M} \mathbb{F}(\theta)\ d\mu \le \phi(M)$.
Proviamo dunque che $\lim_{M\to+\infty} \phi(M) = 0$. Usiamo che T è aciclica: supponiamo per assurdo che $\lim_{M\to+\infty} \phi(M) = C > 0$. Allora esiste una sottosuccessione $\{\mu_{k_M}\}_{M=0}^{+\infty}$ per cui vale $\lim_{M\to+\infty} \int_{\Theta_M} \mathbb{F}(\theta)\ d\mu_{k_M} = C > 0$. Dunque in particolare anche $\lim_{M\to+\infty} \int_{\Theta_M} \mathbb{M}(\theta)\ d\mu_{k_M} = C > 0$.
Definiamo allora per ogni $M \in \mathbb{N}$, le correnti normali $\tilde{T}_{k_M}(\omega) := \int_{\Theta_M} \theta(\omega)\ d\mu_{k_M}$ e notiamo che grazie all'osservazione 6.11 vale per ogni M

1. $\tilde{T}_{k_M} \le T$, quindi $\mathbb{M}(\tilde{T}_{k_M}) \le \mathbb{M}(T_{k_M})$, $M \in \mathbb{N}$
2. $\mathbb{M}(\partial \tilde{T}_{k_M}) \le \int_{\Theta_M} \mathbb{M}(\partial\theta)\ d\mu_{k_M} \le 2\mu_{k_M}(\Theta_M)$ e $\mu_{k_M}(\Theta_M) \to 0$

e quindi grazie alla compattezza della palla unitaria di $\mathbf{N}_1(\mathbb{R}^n)$ nella topologia di $\mathscr{D}_1(\mathbb{R}^n)$, abbiamo l'esistenza di una corrente normale $\tilde{T}$ tale che $\tilde{T}_{k_M} \rightharpoonup \tilde{T}$ e di conseguenza anche $T_{k_M} - \tilde{T}_{k_M} \rightharpoonup T - \tilde{T}$. La proposizione 6.7 insieme al punto 1 ci dicono che $\mathbb{M}(\tilde{T}_{k_M}) \to \mathbb{M}(\tilde{T})$, quindi $\mathbb{M}(\tilde{T}) = C > 0$. D'altra parte ancora la proposizione 6.7 insieme al punto 1 ci dicono $\tilde{T} \le T$ ed il punto 2 ci dice $\partial T \equiv 0$. Data l'aciclicità di T concludiamo $\tilde{T} = 0$, da cui l'assurdo.

□

§ 3. Costruzione delle Approssimanti

Osservazione 6.17. Se P è una 1-corrente poliedrale allora

$$P = \sum_{i=0}^{N} [\![S_i, \tau_i, \eta_i]\!],$$

dove per ogni i, $S_i = [a_i, b_i] := \{\lambda a_i + (1-\lambda)b_i \mid \lambda \in [0,1],\ a_i, b_i \in \mathbb{R}^n\}$. Cambiando eventualmente orientazione possiamo sempre supporre che ogni η_i sia positivo. Inoltre sarà comodo indicare la generica corrente poliedrale $[\![S_i, \tau_i, \eta_i]\!]$ con $\eta_i[\![a_i, b_i]\!]$ dove si intende che $[\![a_i, b_i]\!]$ è la corrente di molteplicità uno associata al segmento $[a_i, b_i]$ e orientata da a_i a b_i.
Notiamo anche che per la corrente

$$P = \sum_{i=0}^{N} \eta_i [\![a_i, b_i]\!] \tag{6.15}$$

riarrangiando eventualmente la scrittura (6.15), possiamo sempre supporre che scelti due segmenti $[a_{i_1}, b_{i_1}]$ e $[a_{i_2}, b_{i_2}]$ in (6.15) essi si possono intersecare solo agli estremi (se $i_1 \neq i_2$).

Teorema 6.18. *Sia $T \in \boldsymbol{N}_1(\mathbb{R}^n)$, T aciclica e a supporto compatto. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}^+$ ed una successione di correnti poliedrali $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ verificanti le propietà* (6.11), (6.12), (6.13), (6.14) *relativamente rispetto a cT.*

Dimostrazione. Il teorema di approssimazione poliedrale forte ci dà una successione di correnti poliedrali $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ verificanti (6.11), (6.12). Per i nostri scopi sarà utile scegliere le P_k con un bound sulle masse dei bordi, ad esempio $c_1\mathbb{M}(\partial T) \leq \mathbb{M}(\partial P_k) \leq c_2\mathbb{M}(\partial T) \quad \forall k \in \mathbb{N},\ c_1, c_2 > 0$. Per avere le P_k acicliche, basta ragionare come in 6.9 e scrivere $P_k = C_k + (P_k - C_k)$ con $C_k \in \mathbf{P}_1(\mathbb{R}^n)$ ciclo massimale di P_k, e notare con un ragionamento di compattezza, che C_k deve convergere a qualche corrente C con $\partial C = 0$ e C ciclo di T. Questo porta a concludere $C = 0$ per aciclicità. Questo significa che le correnti $P_k - C_k$ sono acicliche e verificano (6.11), (6.12) e $\mathbb{M}\big(\partial(P_k - C_k)\big) = \mathbb{M}(\partial P_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Supponiamo dunque che le P_k siano acicliche.
Ora facciamo vedere che scelta P_k, essa ammette decomposizione integrale del tipo (6.13), verificante (6.14).
P_k ammette una scrittura del tipo (6.15)

$$P_k = \sum_{i=0}^{N} \eta_i [\![a_i, b_i]\!], \quad \eta_i > 0,$$

Poniamo $\tilde{\eta}_0 = \min\{\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_N\}$. Chiamiamo Λ l'insieme dei segmenti che compaiono nella scrittura di P_k.
Data una corrente poliedrale del tipo

$$\sum_{i=0}^{M} [\![a_i, b_i]\!], \quad \text{dove } [a_i, b_i] \in \Lambda \tag{6.16}$$

tale che $\partial \sum_{i=0}^{M} [\![a_i, b_i]\!] = \delta_{b_M} - \delta_{a_0}$, diciamo che $\sum_{i=0}^{M} [\![a_i, b_i]\!]$ è prolungabile in avanti se esiste $[a_{i_1}, b_{i_1}] \in \Lambda$ tale che $a_{i_1} = b_{i_M}$. In tal caso definiamo la *corrente prolungata in avanti* come $\sum_{i=0}^{M} [\![a_i, b_i]\!] + [\![a_{i_1}, b_{i_1}]\!]$. Analogamente diremo che una corrente $\sum_{i=0}^{M} [\![a_i, b_i]\!]$ tipo (6.16) è prolungabile all'indietro se esiste $[a_{i_{-1}}, b_{i_{-1}}] \in \Lambda$ e $b_{i_{-1}} = a_0$. Analogamente definiamo la *corrente prolungata all'indietro* come $[\![a_{i_{-1}}, b_{i_{-1}}]\!] + \sum_{i=0}^{M} [\![a_i, b_i]\!]$.
Ora scelto $[a_i, b_i] \in \Lambda$, prolunghiamo la corrente $[\![a_i, b_i]\!]$ in avanti e indietro fino a che è possibile. La corrente così ottenuta, diciamo T_0, è tale che $\mathbb{M}(\partial T_0) \leq 2$ e ricordando che i segmenti che stanno in Λ si possono intersecare fra di loro

solo agli estremi, se poniamo $\tilde{P}_0 = P_k - \tilde{\eta}_0 T_0$, abbiamo che $\tilde{P}_0 \leq P_k$ e $\tilde{P}_0$ aciclica. Inoltre dire che la corrente T_0 così ottenuta non è più prolungabile è equivalente a dire che $\partial \eta_0 T_0 \leq \partial P_k$ e quindi anche $\partial \tilde{P}_0 \leq \partial P_k$ (osservazione 6.6).
Notiamo ancora che siccome P_k è aciclica, nel procedimento di prolungamento in avanti e indietro, non può mai capitare che ad un certo passo la catena di segmenti si chiuda in modo da formare una curva chiusa. Questo perchè se chiamiamo C la corrente associata a tale curva, allora avremmo $\tilde{\eta}_0 C \leq P_k$ e $\partial \tilde{\eta}_0 C = 0$ in contrasto con il fatto che P_k è aciclica. Quest'ulteriore informazione ci dice allora che $\mathbb{M}(\partial T_0) \equiv 2$.
Possiamo definire dunque per induzione su m $\tilde{\eta}_m = \min\{\eta \mid \eta$ è molteplicità di $\tilde{P}_{m-1}\}$. Poi $\tilde{P}_m = \tilde{P}_{m-1} - \tilde{\eta}_m T_m$, e T_m è la corrente che si ottiene a partire da $\tilde{P}_{m-1}$ allo stesso modo con il quale T_0 si è ottenuta a partire da P_k. Denotiamo inoltre con Λ_m l'insieme dei segmenti che compaiono nella scrittura di $\tilde{P}_m$. Avremo quindi per ogni m che

$$\mathbb{M}(\partial T_{m-1}) \equiv 2 \tag{6.17}$$

$$\tilde{P}_m \leq \tilde{P}_{m-1} \leq \cdots, \leq P_0 \leq P_k, \tag{6.18}$$

$$\partial \tilde{P}_m \leq \partial \tilde{P}_{m-1} \leq \cdots, \leq \partial P_0 \leq \partial P_k \tag{6.19}$$

$$\mathrm{card}\Lambda_m < \mathrm{card}\Lambda_{m-1} < \cdots < \mathrm{card}\Lambda. \tag{6.20}$$

Chiaramente (6.20) ci dice che questo processo termina ad un certo passo finito $\tilde{M} \in \mathbb{N}$. Se definiamo la misura $\mu \in \mathscr{M}^+(\Theta)$ come

$$\mu_k := \sum_{m=0}^{\tilde{M}} \tilde{\eta}_m \delta_{T_m}, \tag{6.21}$$

abbiamo grazie a (6.17) che

$$P_k = \int_\Theta \theta \; d\mu_k(\theta) \tag{6.22}$$

e grazie a (6.18) anche

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(P_k) &= \mathbb{M}(\tilde{P}_0) + \mathbb{M}(P_k - \tilde{P}_0)\\ &= \mathbb{M}(\tilde{P}_1) + \mathbb{M}(\tilde{P}_0 - \tilde{P}_1) + \mathbb{M}(P_k - \tilde{P}_0)\\ &= \mathbb{M}(\tilde{P}_{\tilde{M}-1} - \tilde{P}_{\tilde{M}}) + \ldots + \mathbb{M}(\tilde{P}_0 - \tilde{P}_1) + \mathbb{M}(P_k - \tilde{P}_0)\\ &= \sum_{m=0}^{\tilde{M}} \mathbb{M}(T_m)\tilde{\eta}_m\\ &= \int_\Theta \mathbb{M}(\theta) \; d\mu_k(\theta),\end{aligned} \tag{6.23}$$

e grazie a (6.17) e (6.19) anche

$$\begin{aligned}\mathbb{M}(\partial P_k) &= \mathbb{M}(\partial\tilde{P}_0) + \mathbb{M}(\partial P_k - \partial\tilde{P}_0)\\ &= \mathbb{M}(\partial\tilde{P}_1) + \mathbb{M}(\partial\tilde{P}_0 - \partial\tilde{P}_1) + \mathbb{M}(\partial P_k - \partial\tilde{P}_0)\\ &= \mathbb{M}(\partial\tilde{P}_{\tilde{M}-1} - \partial\tilde{P}_{\tilde{M}}) + \ldots + \mathbb{M}(\partial\tilde{P}_0 - \partial\tilde{P}_1) + \mathbb{M}(\partial P_k - \partial\tilde{P}_0)\\ &= \sum_{m=0}^{\tilde{M}} 2\tilde{\eta}_m\\ &= 2\mu_k(\Theta).\end{aligned} \tag{6.24}$$

Siccome vogliamo $\mu_k \in \mathscr{P}(\Theta)$, basta porre $\mu_k = \mu_k/\mu_k(\Theta)$. In questo modo, siccome per (6.24) $c_1\mathbb{M}(\partial T)/2 \le \mu_k(\Theta) \le c_2\mathbb{M}(\partial T)/2$ senza perdita di generalità possiamo supporre che $\lim_k \mu_k(\Theta) = c > 0$, e abbiamo così ottenuto la tesi per cT.

□

Siamo infine in grado di dimostrare il seguente teorema:

Teorema 6.19 (Decomposizione intera di 1-Correnti Acicliche)**.** *Sia $T \in \boldsymbol{N}_1(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto e aciclica. Allora T è decomponibile in correnti intere.*

Dimostrazione. Grazie ai teoremi 6.13 e 6.18 sappiamo che possiamo scrivere per una certa costante positiva c:

$$cT(\omega) = \int_\Theta \theta(\omega)\ d\tilde{\mu}(\theta)\ ,\ \forall \omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^n) \tag{6.25}$$

e

$$c\mathbb{M}(T) = \int_\Theta \mathbb{M}(\theta)\ d\tilde{\mu}, \tag{6.26}$$

e basta dunque porre $\mu = \tilde{\mu}/c$. □

§ 4. Decomposizione di cicli e conclusione

In questo contesto è utile distinguere lo spazio metrico $\Theta^n \equiv \{\theta \in \mathbf{I}_1(\mathbb{R}^n) \mid \mathbb{M}(\partial\theta) \le 2\}$ dallo spazio metrico $\Theta^{n+1} \equiv \{\theta \in \mathbf{I}_1(\mathbb{R}^{n+1}) \mid \mathbb{M}(\partial\theta) \le 2\}$.
Questa sezione è dedicata al seguente risultato.

Teorema 6.20. *Sia $T \in \boldsymbol{N}_1(\mathbb{R}^n)$, $\partial T = 0$. Allora esiste $\mu \in \mathscr{M}(\Theta^n)$ tale che*

$$T(\omega) = \int_{\Theta^n} \theta(\omega)\ d\mu(\theta)\ ,\ \forall \omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^n) \tag{6.27}$$

e

$$\mathbb{M}(T) = \int_{\Theta^n} \mathbb{M}(\theta)\ d\mu. \tag{6.28}$$

In altre parole T è decomponibile in correnti intere.

Dimostriamo questo risultato per ultimo, siccome la dimostrazione si basa sul risultato di decomposizione delle correnti acicliche.
Per provare il teorema sopra citato, ci serve una costruzione preliminare.
Sia T come nelle ipotesi del teorema 6.20 allora definiamo la famiglia di 1-correnti $\{T'_t\}_{t\in[0,1]}$, definite come $T' \in \mathbf{N}_1(\mathbb{R}^{n+1})$ come

$$T' \equiv T \times \mathscr{H}^1 \llcorner [0,1] + |T| \times [|0,1|].$$

Inoltre siano $\pi_n: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le proiezioni di $\mathbb{R}^{n+1}$ rispettivamente sulle prime n coordinate e sull' ultima $(n+1)$-esima coordinata.
Abbiamo allora che

1. $\pi_{n\#}T' = T$
2. $\pi_\# T' = \mathbb{M}(T)[|0,1|]$
3. $\mathbb{M}(T) = \mathbb{M}(\pi_\# T')$

4. $\partial T = |T| \otimes (\delta_1 - \delta_0)$

5. $\mathbb{M}(T') = \sqrt{2} \cdot \mathbb{M}(T)$

6. T' è aciclica.

Le prime quattro sono immediate. Per la 5 indichiamo le coordinate di $\mathbb{R}^{n+1}$ come (x,t), dove $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Se τ è l'orientazione di T e e_{n+1} è il versore della base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$ che dà l'ultima coordinata, notiamo che

$$T' = (\tau + e_{n+1})\big(|T| \times \mathscr{H}^1 \llcorner [0,1]\big), \tag{6.29}$$

e il punto 5 segue facilmente dal fatto che $|\tau + e_{n+1}| = \sqrt{2}$ $|T| \times \mathscr{H}^1 \llcorner [0,1]$-quasi ovunque. Per il punto 6, supponiamo che C sia un ciclo di T', allora siccome $\mathbb{M}(C) + \mathbb{M}(T' - C) = \mathbb{M}(T')$, il teorema A.8 sulla compatibilità dell'orientazione, ci dice che indicando con τ_C l'orientazione di C allora $\tau_C = \tau$ per $|C|$-q.o. in $\mathbb{R}^{n+1}$. Questo significa che quando consideriamo il push-forward di C tramite π, otteniamo una corrente normale di $\mathbb{R}$ la cui massa può essere maggiorata nel seguente modo

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(\pi_\# C) &= \sup_{\substack{\phi^*(\omega)\le 1\\ \omega\in\mathscr{D}^1(\mathbb{R})}} \pi_\# C(\omega)\\
&= \sup_{\substack{\phi^*(\omega)\le 1\\ \omega\in\mathscr{D}^1(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big\langle \pi\Big(\frac{\tau + e_{n+1}}{\sqrt{2}}\Big); \omega(\pi(y))\Big\rangle \; d|C|(y)\\
&\le \sup_{\substack{\phi^*(\omega)\le 1\\ \omega\in\mathscr{D}^1(\mathbb{R})}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Big\langle \frac{e_1}{\sqrt{2}}; \omega(\pi(y))\Big\rangle \; d|C|(y)\\
&\le \frac{\mathbb{M}(C)}{\sqrt{2}},
\end{aligned} \tag{6.30}$$

e la stessa maggiorazione vale per $\pi_\#(T' - C)$. Avremmo quindi

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}(\pi_\# C) + \mathbb{M}(\pi_\#(T' - C)) &\le \frac{\mathbb{M}(C)}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbb{M}(T' - C)}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{\mathbb{M}(T')}{\sqrt{2}}\\
&= \mathbb{M}(T)\\
&= \mathbb{M}(\pi_\# T')
\end{aligned} \tag{6.31}$$

D'altra parte siccome $\partial \pi_\# C = 0$, dal Constancy Lemma deduciamo necessariamente $\pi_\# C = 0$, e quindi da (6.31) anche $\mathbb{M}(C) = 0$.

Siamo ora in grado di provare 6.20

Dimostrazione. Notiamo subito che $\pi_{n\#}\Theta^{n+1} \subseteq \Theta^n$. Detto ciò, grazie all'aciclicità di T', dal teorema di decomposizione 6.19 abbiamo una misura $\mu' \in \mathscr{M}(\Theta^{n+1})$ tale che

$$T'(\omega) = \int_{\Theta^{n+1}} \theta(\omega) \; d\mu'(\theta) \;, \;\; \forall \omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^{n+1}) \tag{6.32}$$

e
$$\mathbb{M}(T') = \int_{\Theta^{n+1}} \mathbb{M}(\theta)\ d\mu' \tag{6.33}$$
Dundue se poniamo $\pi_{n\#}\mu' \equiv \mu$, abbiamo per ogni $\omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^n)$
$$T(\omega) = (\pi_{n\#}T')(\omega) = T'(\pi_n^{\#}\omega) = \int_{\Theta^{n+1}} [\pi_{n\#}\theta](\omega)\ d\mu' = \int_{\Theta^n} \theta(\omega)\ d\mu.$$
Ci resta da provare la buona decomposizione della massa.
La buona decomposizione della massa di T' ci permette di applicare il teorema A.8 di compatibilità dell'orientazione, ovvero per μ'-q.o. θ vale
$$\tau_\theta = \tau \quad |\theta|\text{-q.o.}, \tag{6.34}$$
dunque lo jacobiano tangenziale di π_n ristretto a θ è costantemente uguale a $1/\sqrt{2}$. Sia $\theta \in \Theta^{n+1}$ soddisfacente (6.34), allora se denotiamo con $\tilde{m}$ la molteplicità di $\pi_{n\#}\theta$, e con m la molteplicità di θ, grazie alla formula di coarea per insiemi rettificabili vale
$$\tilde{m}(x) = \sum_{y \in \{\pi_n^{-1}(x) \cap \operatorname{spt}\theta\}} m(y),$$
siccome lo jacobiano tangenziale di π_n ristretto a θ è sempre positivo. Applicando allora la formula di coarea alla mappa π_n ristretta sul supporto di θ otteniamo:
$$\begin{aligned}\mathbb{M}(\pi_{n\#}\theta) = \int_{\operatorname{spt}\pi_{n\#}\theta} \tilde{m}(x)\ d\mathscr{H}^1(x) &= \int_{\operatorname{spt}\theta} J_{\mathrm{Tan}}\pi_n(y) \cdot m(y)\ d\mathscr{H}^1(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{M}(\theta).\end{aligned} \tag{6.35}$$
Infine siccome l'uguaglianza (6.35) è vera per μ'-q.o. $\theta \in \Theta^{n+1}$, abbiamo
$$\int_{\Theta^n} \mathbb{M}(\theta)\ d\mu = \int_{\Theta^{n+1}} \mathbb{M}(\pi_{n\#}\theta)\ d\mu' = \int_{\Theta^{n+1}} \frac{\mathbb{M}(\theta)}{\sqrt{2}}\ d\mu' = \frac{\mathbb{M}(T')}{\sqrt{2}} = \mathbb{M}(T)$$
da cui segue anche la (6.28). □

Siamo infine in grado di provare:

Teorema 6.21. *Sia $T \in \boldsymbol{N}_1(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto, allora T è decomponibile in correnti intere.*

Dimostrazione. Sia C un ciclo massimale di T dato dalla proposizione 6.9. Basta applicare allora separatamente i teoremi 6.19 e 6.20 rispettivamente su $T-C$ e C e si ottengono due misure $\mu_{T-C}, \mu_C \in \mathscr{M}(\Theta)^+$ che decompongono rispettivamente $T-C$ e C. Basta porre $\mu := \mu_{T-C} + \mu_C$ e si ottiene una decomposizione di T in correnti intere. □

§ 5. Metodo diretto

Ora vediamo un altro approccio per dimostrare la decomponibilità di 1-correnti normali in correnti intere. In questo caso vogliamo lavorare su uno spazio compatto di correnti intere, in questo modo si semplificherà notevolmente la questione di passaggio al limite delle decomposizioni delle approssimanti, ma dovremo lavorare un po' di più sulla costruzione delle approssimanti stesse. Con questo metodo, riusciremo ad ottenere subito una decomposizione per una generica corrente normale, e non dovremo più badare all'aciclicità o meno della stessa. Quello che si perde in questo modo è la caratterizzazione dei punti estremali extr B_s In effetti con un analisi più approfondita, usando lo stesso tipo di ragionamento del terzo capitolo (a tal proposito si veda [12], [13]), si prova che in realtà la decomposizione che si ottiene per le correnti acicliche è fatta (μ q.o.) di curve lipschitziane iniettive, ovvero di 1-correnti intere con molteplicità 1 e aventi massa del bordo uguale a 2. Siccome noi siamo interessati alla decomposizione di correnti normali in correnti intere, o eventualmente in correnti rettificabili, vediamo questo nuovo approccio che ha il vantaggio di essere più diretto di quello precedente.

Introduciamo brevemente la notazione.

Definizione 6.22 (Lo spazio Ξ)**.** Defininiamo lo spazio metrico Ξ come

$$\Xi := \{\theta \in \mathbf{I}_1(\mathbb{R}^n) \mid \mathbb{M}(\theta) \leq 1 \ , \ \mathbb{M}(\partial\theta) \leq 2\}, \tag{6.36}$$

dotato della topologia indotta dalla norma flat $\mathbb{F}$.

Osservazione 6.23. Grazie al teorema di compattezza di Federer-Fleming, Ξ è uno spazio metrico compatto.

Notiamo subito che se ci mettiamo nelle ipotesi:

$$\mathbb{F}(T - T_k) \to 0 \text{ per } k \to +\infty \tag{6.37}$$

$$\mathbb{M}(T_k) \to \mathbb{M}(T) \text{ per } k \to +\infty \tag{6.38}$$

$$T_k = \int_\Xi \theta d\mu_k(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{6.39}$$

$$\mathbb{M}(T_k) = \int_\Xi \mathbb{M}(\theta) d\mu_k(\theta) \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{6.40}$$

$$\mu_k \in \mathscr{M}(\Xi) \ , \ \forall k \in \mathbb{N} \ \mu_k(\Xi) < +\infty. \tag{6.41}$$

dove $T, \{T_k\}_{k=0}^\infty$, sono correnti normali e a supporto compatto, allora otteniamo nell'immediato una decomposizione di T in correnti intere. Vale infatti:

Teorema 6.24. *Siano $T, \{T_k\}_{k=0}^\infty$, 1-correnti normali di $\mathbb{R}^n$, e supponiamo siano soddisfatte* (6.37)*,* (6.38)*,* (6.39)*,* (6.40)*,* (6.41)*. Allora T ammette decomposizione in correnti intere.*

Dimostrazione. Sappiamo che per ogni $\omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^n)$ la mappa $\theta \mapsto \theta(\omega)$ è $\mathbb{F}$ continua. Siccome Ξ è compatto e vale (6.41), la compattezza debole-$*$ dei limitati di $\mathscr{M}(\Xi)$ ci dice che (a meno di sottosuccessioni) $\mu_k \rightharpoonup \mu$ per qualche $\mu \in \mathscr{M}(\Xi)$. Usando anche (6.37) e (6.39), questo significa

$$T(\omega) = \lim_{k\to\infty} \int_\Xi \theta(\omega) \ d\mu_k(\theta) = \int_\Xi \theta(\omega) \ d\mu(\theta). \tag{6.42}$$

Infine grazie alla s.c.i. della massa rispetto alla convergenza flat, a (6.38) e a (6.40) abbiamo

$$\int_{\Xi} \mathbb{M}(\theta)\ d\mu(\theta) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Xi} \mathbb{M}(\theta)\ d\mu_k(\theta) = \liminf_{k\to\infty} \mathbb{M}(T_k) = \mathbb{M}(T). \tag{6.43}$$

Siccome per (6.42) la disuguaglianza $\mathbb{M}(T) \geq \int_{\Xi} \mathbb{M}(\theta)\ d\mu(\theta)$ è certamente verificata, abbiamo dunque ottenuto una decomposizione di T in correnti intere. □

Dedichiamo il resto di questo paragrafo alla costruzione delle approssimanti per T.
L'idea è quella di approssimare T con correnti poliedrali date dal teorema di approssimazione poliedrale forte. Il punto è che ora è più delicato provare la (6.39) insieme a (6.41) e al fatto che adesso stiamo lavorando in Ξ e con una generica 1-corrente normale. Infatti il primo ostacolo che si incontra è che non essendo più T necessariamente aciclica, la presenza di cicli non permette più di avere un controllo sulle molteplicità delle approssimanti con $\mathbb{M}(\partial T)$. Inoltre dovremo aver cura di lavorare con correnti intere con massa e massa del bordo entrambe limitate. Vediamo un esempio che può chiarificare dove sorgono alcune difficoltà.

Esempio 6.25. *Consideriamo l'insieme $[0,1) \times [0,1) \subset \mathbb{R}^2$ e un versore $\nu_0 \in \mathbb{S}^1$ tale che $\nu_{0y}/\nu_{0x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. E sia $f\colon [0,1) \times [0,1) \to \mathbb{T}^2$ il diffeomorfismo di $[0,1) \times [0,1)$ sul toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Definiamo allora la 1-corrente T come*

$$T := f_{\#}\big[\nu_0 \wedge \mathscr{L}^2 \llcorner \big([0,1) \times [0,1)\big)\big].$$

T è dunque la corrente associata ad una curva che avvolge il toro $\mathbb{T}^2$ con lo stesso passo ν_{0y}/ν_{0x} e in modo denso siccome il passo è irrazionale. T è normale siccome si vede facilmente che $\mathbb{M}(T) = \mathscr{H}^2(\mathbb{T}^2)$ e $\partial T \equiv 0$. Si verifica che in questo caso ogni tentativo di decomposizione di T in correnti intere, deve necessariamente creare del bordo che T non ha, siccome $\partial T = 0$. In effeti si vede che il modo più ragionevole di prcedere in questo caso, è proprio quello di seguire passo a passo la curva stessa e tagliarla ogni volta che supera una determinata lunghzza fissata a pripori.
Inoltre proprio perchè $\mathbb{M}(\partial T) = 0$ è impossibile controllare le masse delle misure $\mu_k(\Xi)$ con la massa di ∂T come si faceva in 6.18.

Osservazione 6.26. Se $c \in \mathbb{R}^+$ denotiamo con $\lceil c \rceil$ la parte intera di c approssimata per eccesso.

Vediamo allora come si possono costruire delle buone approssimanti per T.

Teorema 6.27 (Costruzione delle buone approssimanti)**.** *Sia $T \in \boldsymbol{N}_1(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto. Esistono allora $\{T_k\}_{k=0}^{\infty}$ 1-correnti normali e misure $\{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}$ in $\mathscr{M}^+(\Xi)$ tali che tutte le* (6.37), (6.38), (6.39), (6.40), (6.41) *siano soddisfatte.*

Dimostrazione. Siano $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ correnti poliedrali date dal teorema di approssimazione poliedrale forte. Usando la simbologia come in (6.15), sappiamo allora che per ogni $k \in \mathbb{N}$, possiamo scrivere

$$P_k = \sum_{l=1}^{N} \eta_l [\![a_l, b_l]\!], \tag{6.44}$$

dove $\eta_i > 0$ e i segmenti $[a_i, b_i]$ si possono intersecare fra di loro solo agli estremi. Poniamo $\Lambda := \{\zeta \in \mathbb{R}^+ \mid \zeta \le 1,\ \zeta = \eta_l \text{ per qualche } l\}$. Scriviamo

$$P_k = \sum_{\zeta\in\Lambda}\Bigg(\sum_{\eta_l=\zeta}\eta_l[\![a_l, b_l]\!]\Bigg). \tag{6.45}$$

Scelto $\zeta \in \Lambda$ esaminiamo l'addendo

$$\sum_{\eta_l=\zeta}\eta_l[\![a_l, b_l]\!] \equiv \sum_{\eta_l=\zeta}\zeta[\![a_l, b_l]\!]. \tag{6.46}$$

Ora procediamo a seconda di due casi:

1. Consideriamo il sottoinsieme $\mathscr{G}$ di Λ per cui vale

$$\exists l \in (1, 2, \cdots, N), \exists\zeta \in \mathscr{G} \text{ tale che } \eta_l \equiv \zeta \Rightarrow \mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!]) \ge 1. \tag{6.47}$$

In questo caso possiamo partizionare la corrente $\sum_{\eta_l=\zeta\in\mathscr{G}}[\![a_l, b_l]\!]$ in $\left\lceil \sum_{\eta_l=\zeta\in\mathscr{G}}\mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!])\right\rceil$-sottocorrenti $[\![a_{l_s}, b_{l_s}]\!]$ ognuna delle quali è la corrente associata ad un sottosegmento $[a_{l_s}, b_{l_s}]$ di un qualche segmento $[a_l, b_l]$ e in modo che per ognuna valga $\mathbb{M}([\![a_{l_s}, b_{l_s}]\!]) \le 1$. Siccome ho anche $\mathbb{M}(\partial[\![a_{l_s}, b_{l_s}]\!]) = 2$, vale $[\![a_{l_s}, b_{l_s}]\!] \in \Xi$ per ogni s. Definisco allora la misura μ_k^ζ in $\mathscr{M}^+(\Xi)$ come

$$\mu_k^{'\zeta} := \sum_s \zeta\delta_{[\![a_{l_s}, b_{l_s}]\!]} \tag{6.48}$$

Notiamo che vale il seguente bound:

$$\mu_k^{'\zeta}(\Xi) \le \zeta\text{card}\big\{[\![a_{l_s}, b_{l_s}]\!]\big\} \le \zeta\left\lceil\sum_{\eta_l=\zeta\in\mathscr{G}}\mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!])\right\rceil \le 2\zeta\Bigg(\sum_{\eta_l=\zeta\in\mathscr{G}}\mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!])\Bigg). \tag{6.49}$$

2. Altrimenti se $\zeta \in \Lambda \smallsetminus \mathscr{G}$, pongo $m_l := \lceil 1/\mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!])\rceil$, e definisco semplicemente la misura μ_k^ζ in $\mathscr{M}^+(\Xi)$ come

$$\mu_k^{''\zeta} := \sum_{\eta_l=\zeta\in\Lambda\smallsetminus\mathscr{G}}\frac{\zeta}{m_l}\,\delta_{m_l[\![a_l, b_l]\!]}, \tag{6.50}$$

e ho la stima

$$\mu_k^{''\zeta}(\Xi) \le \sum_{\eta_l=\zeta\in\Lambda\smallsetminus\mathscr{G}}\frac{\zeta}{m_l} \le \zeta\Bigg(\sum_{\eta_l=\zeta\in\Lambda\smallsetminus\mathscr{G}}\mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!])\Bigg) \tag{6.51}$$

Mettendo assieme il caso 1 ed il caso 2 ho certamente che

$$\sum_{\eta_l=\zeta}\zeta[\![a_l, b_l]\!](\omega) = \int_{\theta\in\Xi}\theta(\omega)\ d(\mu_k^{'\zeta} + \mu_k^{''\zeta})(\theta),\ \ \forall\omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^n), \tag{6.52}$$

e ricordando che anche in (6.48) la misura è supportata su sotto-correnti delle correnti $[\![a_l, b_l]\!]$,

$$\mathbb{M}(\sum_{\eta_l=\zeta}\zeta[\![a_l, b_l]\!]) = \sum_{\eta_l=\zeta}\zeta\mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!]) = \int_{\theta\in\Xi}\mathbb{M}(\theta)\ d(\mu_k^{'\zeta} + \mu_k^{''\zeta})(\theta), \tag{6.53}$$

Siccome i due casi precedenti sono disgiunti, ricordandosi che i segmenti che compaiono in (6.44) si possono intescecare fra loro solo agli estremi, usando (6.52), (6.53) per ogni $\zeta \in \Lambda$ otteniamo

$$\begin{aligned} P_k(\omega) &= \sum_{\zeta \in \Lambda} \left(\sum_{\eta_l = \zeta} \eta_l [\![a_l, b_l]\!](\omega) \right) \\ &= \sum_{\zeta \in \Lambda} \left(\int_\Xi \theta(\omega)\ d(\mu_k^{'\zeta} + \mu_k^{''\zeta})(\theta) \right) \\ &= \int_\Xi \theta(\omega)\ d\left(\sum_{\zeta \in \Lambda} \mu_k^{'\zeta} + \mu_k^{''\zeta} \right)(\theta), \ \ \forall \omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \tag{6.54}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbb{M}(P_k) &= \sum_{\zeta \in \Lambda} \left(\sum_{\eta_l = \zeta} \eta_l \mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!]) \right) \\ &= \sum_{\zeta \in \Lambda} \left(\int_\Xi \mathbb{M}(\theta)\ d(\mu_k^{'\zeta} + \mu_k^{''\zeta})(\theta) \right) \\ &= \int_\Xi \mathbb{M}(\theta)\ d\left(\sum_{\zeta \in \Lambda} \mu_k^{'\zeta} + \mu_k^{''\zeta} \right)(\theta), \end{aligned} \tag{6.55}$$

e ancora

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\zeta \in \Lambda} \mu_k^{'\zeta} + \mu_k^{''\zeta} \right)(\Xi) &\leq \sum_{\zeta \in \mathscr{G}} \left(\sum_{\eta_l = \zeta} \eta_l \mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!]) \right) + \sum_{\zeta \in \Lambda \smallsetminus \mathscr{G}} \left(\sum_{\eta_l = \zeta} \eta_l \mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!]) \right) \\ &= \sum_{l=1}^{N} \eta_l \mathbb{M}([\![a_l, b_l]\!]) \\ &= \mathbb{M}(P_k) \end{aligned} \tag{6.56}$$

Basta allora porre per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\mu_k := \sum_{\zeta \in \Lambda} (\mu_k^{'\zeta} + \mu_k^{''\zeta}) \in \mathscr{M}^+(\Xi)$ e abbiamo la tesi. $\square$

Notiamo che la dimostrazione precedente si basa sul fatto che una 1-corrente poliedrale avente molteplicità 1, si può sempre tagliare in pezzi aventi massa limitata da una certa costante fissata a priori (ad esempio 1 nel nostro caso) *mantenendo però un bound dall'alto sulle masse dei bordi dei singoli pezzi* (costantemente uguale a 2 nel nostro caso). Fondamentalmente, questo è invece l'ostacolo che impedisce di applicare lo stesso ragionamento del teorema 6.27 nel caso k-dimensionale ($1 < k < n$).

Capitolo 7

Decomposizione di $(n-1)$-correnti normali

Nel capitolo 4 abbiamo discusso la relazione che sussiste fra funzioni BV e n-correnti normali con bordo nullo(i.e. $(n-1)$-correnti normali di massa finita e bordo nullo). Vogliamo riscrivere la formula di coarea in termini di correnti, per poi dedurne una decomposizione per correnti normali.
Data u a variazione limitata, B un boreliano di $\mathbb{R}^n$, e denotando per ogni $t \in \mathbb{R}$ $E_t = \{u > t\}$, i sopralivelli di u, vale:

$$|Du|(B) = \int_{\mathbb{R}} P_{E_t}(B)\ dt. \tag{7.1}$$

La formula di coarea ci dice che la misura $|Du|$ si può decomporre come integrale dei perimetri dei sopralivelli di u. La (7.1) ci dice inoltre che per $\mathscr{L}^1$-q.o. $t \in \mathbb{R}$, $P_B(E_t) < +\infty$. Sappiamo allora dal *teorema di rettificabilità della frontiera ridotta* che per tali t, che $\partial_* E_t$ è un insieme $\mathscr{H}^{n-1}$-rettificabile. Se indichiamo inoltre con $\nu_t(x)$, la normale esterna a $\mathrm{Tan}(\partial_* E_t, x)$, allora sappiamo che sussiste l'uguaglianza:

$$D\mathbb{1}_{E_t} = \nu_t \mathscr{H}^{n-1} \llcorner (\partial_* E_t), \tag{7.2}$$

come misure vettoriali. Possiamo riscrivere (7.1) ed (4.11) come

$$|Du|(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{H}^{n-1}(\partial_* E_t \cap B)\ dt \tag{7.3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\ dDu = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial_* E_t} < \nu_t, \varphi >\ d\mathscr{H}^{n-1} \right) dt. \tag{7.4}$$

Definizione 7.1. Sia $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Definiamo l'n-corrente $\mathbf{E}^n$ come

$$\mathbf{E}^n := (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n) \mathscr{L}^n. \tag{7.5}$$

Se $R \in \mathbf{N}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ e $\partial R = 0$, la tecnica *cone construction* ci fornisce $T \in \mathbf{N}_n(\mathbb{R}^n)$ e $\partial T = R$. Ragionando come in (5.17), (5.18), sappiamo che esiste $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ tale che $T = u \cdot \mathbf{E}^n$. Per descrivere bene la relazione che intercorre fra il gradiente distribuzionale Du, e $\partial(u \cdot \mathbf{E}^n)$ usiamo l'operatore di Hodge.

Proposizione 7.2 (Formula di coarea per correnti)**.** *Sia* $T \in \boldsymbol{N}_n(\mathbb{R}^n)$*. Allora esiste* $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ *tale che*

$$\partial T(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \partial\big(\boldsymbol{E}^n \llcorner E_t\big)(\omega)\ dt, \tag{7.6}$$

per ogni $n-1$ *forma* ω *a coefficienti in* $\boldsymbol{L}^1(|Du|)$*. Analogamente usando* (7.1) *abbiamo per ogni boreliano* B *di* $\mathbb{R}^n$

$$|\partial T|(B) = \int_{\mathbb{R}} |\partial(\boldsymbol{E}^n \llcorner E_t)|(B)\ dt. \tag{7.7}$$

Dimostrazione. Data una generica $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ definiamo l' $(n-1)$-corrente normale di $\mathbb{R}^n$ $\omega \mapsto (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{D}^{n-1}\omega\ dDu$, (dove $\omega \in \mathscr{D}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$). Allora ricordandosi 8.4, (8.7), deduciamo che per ogni $(n-1)$-forma ω:

$$\begin{aligned}
(-1)^n Du(\mathbb{D}^{n-1}\omega) &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^n D_i u\big(\omega^i \mathbb{D}^{n-1}(dx_{\hat{i}})\big)\\
&= (-1)^n \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i} D_i u(\omega^i dx_i)\\
&= (-1)^n \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}(-1)^i \partial T(\omega^i dx_{\hat{i}}) \quad \text{(e qui abbiamo usato (5.17))},\\
&= \partial T(\omega).
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Ora dal capitolo 4, sappiamo che esiste $u \in BV(\mathbb{R}^n)$ tale che $T = u \cdot \mathbf{E}^n$; usando (7.8) e la formula di coarea per u abbiamo

$$\begin{aligned}
\partial T(\omega) &= (-1)^n Du(\mathbb{D}^{n-1}\omega)\\
&= \int_{\mathbb{R}} (-1)^n D\mathbb{1}_{E_t}(\mathbb{D}^{n-1}\omega)\ dt\\
&= \int_{\mathbb{R}} \partial(\mathbf{E}^n \llcorner E_t)(\omega)\ dt.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Inoltre estendendo (7.8) ad ogni forma ω di Borel integrabile, ed usando ancora la formula di coarea per u otteniamo per ogni insieme boreliano $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
|\partial T|(B) &= |Du|(B)\\
&= \int_{\mathbb{R}} |D\mathbb{1}_{E_t}|(B)\ dt\\
&= \int_{\mathbb{R}} |\partial(\mathbf{E}^n \llcorner E_t)|(B)\ dt.
\end{aligned} \tag{7.10}$$

□

Osservazione 7.3. Sia ν un vettore unitario di $\mathbb{R}^n$ e τ l$(n-1)$ campo-vettoriale tale che $\nu \wedge \tau = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, allora si può verificare che sussiste la seguente relazione

$$< \nu, \mathbb{D}^{n-1}\omega >= \big\langle \tau; \omega \big\rangle, \tag{7.11}$$

dove il membro a sinistra è un prodotto scalare, mentre il membro di destra è l'azione in dualità fra Λ_{n-1} e Λ^{n-1}. Infatti se denotiamo con ν^* l'elemento di $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\big\langle \nu^*; v \big\rangle = < \nu, v > \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,$$

abbiamo

$$
\begin{aligned}
<\nu, \mathbb{D}^{n-1}\omega> &= \big\langle \omega \wedge \nu^*; e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \big\rangle \\
&= (-1)^{n-1}\big\langle \nu^* \wedge \omega; e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \big\rangle \\
&= (-1)^{n-1}\big\langle \mathbb{D}^1\nu^*; \omega \big\rangle.
\end{aligned}
$$

Dobbiamo provare che $(-1)^{n-1}\mathbb{D}^1\nu^* = \tau$ o equivalentemente che $(-1)^{n-1}\nu \wedge \mathbb{D}^1\nu^* \lrcorner\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 1$. Infatti vale

$$
\begin{aligned}
(-1)^{n-1}\big(\nu \wedge \mathbb{D}^1\nu^*\big) \lrcorner dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n &= (-1)^{n-1}\big\langle \mathbb{D}_1\nu; \mathbb{D}^1\nu^* \big\rangle \\
&= \big\langle \nu; \mathbb{D}_{n-1}\mathbb{D}^1\nu^* \big\rangle \\
&= \big\langle \nu; \nu^* \big\rangle \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Teorema 7.4. *Sia $T \in \boldsymbol{N}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto e tale che $\partial T = 0$. In queste ipotesi T ammette una buona decomposizione in correnti intere.*

Dimostrazione. Siccome T è a supporto compatto e $\partial T = 0$, dalla tecnica cone construction, abbiamo U n-corrente normale di $\mathbb{R}^n$ tale che $\partial U = T$. Usando la formula di coarea per correnti, notiamo che la tesi si riduce a provare che la corrente $\partial(\mathbf{E}^n \llcorner E_t)$ è intera. Dunque usando l'osservazione 7.3, abbiamo

$$
\begin{aligned}
\partial(\mathbf{E}^n \llcorner E_t)(\omega) &= (-1)^n D\mathbb{1}_{E_t}(\mathbb{D}^{n-1}\omega) \\
&= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial_* E_t} <\nu_t, \mathbb{D}^{n-1}\omega> \, d\mathscr{H}^{n-1} \right) dt \\
&= (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial_* E_t} \big\langle \tau_t; \omega \big\rangle \, d\mathscr{H}^{n-1} \right) dt
\end{aligned}
$$

dove $\nu_t(x) \wedge \tau_t(x) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$, e quindi abbiamo la tesi. □

Vogliamo usare la (7.6) e la (7.7) per provare un teorema di decomposizione relativo a correnti $T \in \mathbf{N}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Procederemo discutendo due casi: assumeremo dapprima che $\partial T \in \mathbf{I}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ e poi il caso generale $\partial T \in \mathbf{N}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$.

§ 1. Caso $\partial T \in \mathbf{I}_{n-2}(\mathbb{R}^n)$

In questo caso la strategia è quella di trovare una corrente normale R tale che $\partial R = \partial T$ e $\|R\| \perp \|T\|$. In altre parole R deve avere lo stesso bordo di T e deve esistere un boreliano E di $\mathbb{R}^n$ tale che $\|R\|(E) = \|R\|(\mathbb{R}^n)$, mentre $\|T\|(E) = 0$. Se riuscissimo a trovare una tale corrente R allora avremmo $\partial(T - R) = 0$ e applicando il risutato precedente a $T - R$, otterremmo l'esistenza di una $u \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$ per cui

$$
(T - R)(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \partial\big(\mathbf{E}^n \llcorner \{u > t\}\big)(\omega) \, dt. \tag{7.12}
$$

e quindi grazie all'ipotesi di mutua ortogonalità tra le misure $\|T\|, \|R\|$:

$$
T(\omega) = (T - R) \llcorner E^c(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \left[\partial\big(\mathbf{E}^n \llcorner \{u > t\}\big) \llcorner E^c \right](\omega) \, dt \tag{7.13}
$$

e avremmo quindi una decomposizione della corrente T in correnti rettificabili $\left\{\partial\big(\mathbf{E}^n \llcorner \{u > t\}\big) \llcorner E^c\right\}_{t\in\mathbb{R}}$, a priori non normali, siccome (per quanto ne sappiamo fin qui) E^c è un boreliano qualsiasi e potrebbe avere perimetro non finito. Inoltre si avrebbe ovviamente anche

$$\mathbb{M}(T) = \mathbb{M}\big((T - R) \llcorner E^c\big) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{M}\big(\partial(\mathbf{E}^n \llcorner \{u > t\}) \llcorner E^c\big)\, dt. \tag{7.14}$$

Vediamo ora il lemma centrale di questa sezione.

Lemma 7.5. *Sia $T \in \boldsymbol{I}_{n-2}(\mathbb{R}^n)$, $\partial T = 0$. Allora esiste $A \subseteq [0,1]^n$, $\mathscr{L}^n(A) = 1$, tale che scelti comunque $x_1, x_2 \in A$ si ha*

$$\|\delta_{x_1} \times T\| \perp \|\delta_{x_2} \times T\|.$$

Per dimostrare il lemma precedente, faremo appoggio al seguente lemma secondario. Ci servono però prima due definizioni per alleggerire la notazione.

Definizione 7.6. Se $T \in \mathbf{I}_{n-2}(\mathbb{R}^n)$ allora denoteremo con E_T l'insieme $\mathscr{H}^{n-2}$-rettificabile su cui $\|T\|$ è concentrata.

Definizione 7.7. Sia $y \in \mathbb{R}^n$. Poniamo $h_y: \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ l'omotopia fra la mappa identità di $\mathbb{R}^n$ e la mappa costantemente uguale a y i.e.

$$h_y(x,t) = tId_{\mathbb{R}^n} + (1-t)y. \tag{7.15}$$

Lemma 7.8. *Sia $T \in \boldsymbol{I}_{n-2}(\mathbb{R}^n)$. Esiste allora un boreliano $B \subseteq [0,1]^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$, con $\mathscr{L}^{2n}(B) = 1$ tale che comunque scelto $(x_1, x_2) \in B$, vale*

$$dim_{\mathscr{H}}(E_{(\delta_{x_1} \times T)} \cap E_{(\delta_{x_2} \times T)}) \leq n-2.$$

Dimostrazione. Sappiamo che $E_T \subseteq \big(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\big) \cup E_0$, dove per ogni $i > 1$ gli E_i sono ipersuperficie $(n-2)$-dimensionali di classe C^1 limitate, e $\mathscr{H}^{n-2}(E_0) = 0$. Scelti $i, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ consideriamo le parametrizzazioni $f_i: \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^n$, $f_j: \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^n$ di E_i, E_j, e siano K_i, K_j due compatti tali che $f^{-1}(E_i) \subset K_i, f^{-1}(E_j) \subset K_j$. Definiamo $F: \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ come

$$F(x,t,y,s,x_1,x_2) \equiv tf_i(x) + (1-t)x_1 - sf_j(y) - (1-s)x_2,$$

e per ogni $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, poniamo

$$Q(i,j,k) \coloneqq K_i \times [0,1/k] \times K_j \times [0,1/k] \times [0,1]^n \times [0,1]^n \subset \mathbb{R}^{4n-2}.$$

Vale allora l'inclusione

$$(E_{(\delta_{x_1} \times T)} \cap E_{(\delta_{x_2} \times T)}) \setminus E_T \subseteq \bigcup_{i,j,k \in \mathbb{N}} \big(F^{-1}(0) \cap Q(i,j,k) \cap \pi^{-1}(x_1,x_2)\big),$$

dove $\pi:: \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ è la proiezione sulle ultime $2n$-coordinate. Per ottenere la tesi ci basta dunque provare che fissati $i, j, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, allora per $\mathscr{L}^{2n}$-q.o. (x_1, x_2) vale

$$\dim_{\mathscr{H}}\big(F^{-1}(0) \cap Q(i,j,k) \cap \pi^{-1}(x_1,x_2)\big) \leq n-2.$$

A tal proposito notiamo che fissati $i, j, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, siccome $|JDf| > 0$ in $Q(i,j,k)$, il teorema del Dini ci dice che $F^{-1}(0) \cap Q(i,j,k)$ è una C^1 sottovarietà $(3n-2)$-dimensionale di $\mathbb{R}^{4n-2} \cap Q(i,j,k)$. Dunque $\mathscr{H}^{3n-2} \llcorner_{F^{-1}(0) \cap Q(i,j,k)}$ è localmente finita, e per ragioni di compattezza anche globalmente finita. Applicando la formula di coarea alla proiezione π ristretta a $F^{-1}(0) \cap Q(i,j,k)$:

$$\int_{F^{-1}(0)\cap Q(i,j,k)} |J_\tau \pi| \, d\mathscr{H}^{3n-2} = \int_{[0,1]^n \times [0,1]^n} \mathscr{H}^{n-2}\big(F^{-1}(0)\cap Q(i,j,k)\cap \pi^{-1}(x_1,x_2)\big) \, dx_1 dx_2,$$

il che significa che per $\mathscr{L}^{2n}$-q.o. $(x_1,x_2) \in [0,1]^{2n}$, $\mathscr{H}^{n-2}\big(F^{-1}(0) \cap Q(i,j,k) \cap \pi^{-1}(x_1,x_2)\big) < +\infty$, e in particolare $\dim_{\mathscr{H}}\big(F^{-1}(0) \cap Q(i,j,k) \cap \pi^{-1}(x_1,x_2)\big) \leq n-2$.

□

Ora siamo pronti per provare il lemma 7.5:

Dimostrazione. (Lemma 7.5)
Sia $B \subset [0,1]^{2n}$ dato dal lemma 7.8. Denotiamo con $\pi_p, \pi^u: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ rispettivamente le proiezioni sulle prime ed ultime n-coordinate di $\mathbb{R}^{2n}$. Siccome $\mathscr{L}^{2n}(B) = 1$ abbiamo che $\mathscr{L}^n\big(\pi_p(B) \cap \pi^u(B)\big) = 1$. Se poniamo $A := (\pi_p(B) \cap \pi^u(B))$, ricordando che correnti normali $(n-1)$-dimensionali non possono essere supportate su insiemi di misura di Hausdorff strettamente minore di $n-1$, il lemma 7.8 ci dice proprio che

$$\|E_{(\delta_{x_1} \times T)}\| \perp \|E_{(\delta_{x_2} \times T)}\|, \quad \forall x_1, x_2 \in A.$$

□

Come già detto in precedenza il nostro obbiettivo è quello di trovare una corrente normale $R \in \mathbf{N}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\partial R = \partial T$ e inoltre $\|R\| \perp \|T\|$. Questo è il contenuto del prossimo teorema:

Teorema 7.9. *Sia $T \in \boldsymbol{N}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, $\partial T \in \boldsymbol{I}_{n-2}(\mathbb{R}^n)$, allora esiste $R \in \boldsymbol{I}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ tale che*

1. $\partial R = \partial T$
2. $\|R\| \perp \|T\|$.

Dimostrazione. Sia $A \subset [0,1]^n$ dato dal lemma 7.5. Siccome $\mathscr{L}^n(A) = 1$, T è normale e $\|T\|$ non può essere supportata su insiemi di misura di Hausdorff strettamente minore di $n-1$, deduciamo che non può essere $\|T\|(E_{(\delta_x \times T)}) > 0$ per ogni $x \in A$. Sia allora $x \in A$, $\|T\|(E_{(\delta_x \times T)}) = 0$. Basta dunque porre $R \equiv \delta_x \times T$ e otteniamo la tesi.

□

Possiamo infine provare

Teorema 7.10. *Sia $T \in \boldsymbol{N}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, $\partial T \in \boldsymbol{I}_{n-2}(\mathbb{R}^n)$. Allora esistono correnti rettificabili $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \boldsymbol{R}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ tali che*

1. $T(\omega) = \int_{\mathbb{R}} T_t(\omega) \, dt, \ \forall \omega \in \mathscr{D}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$
2. $\mathbb{M}(T) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{M}(T_t) \, dt$

Dimostrazione. Sia R data dal teorema 7.9. Siccome $\partial(T-R)=0$, sappiamo che esiste $u \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$T - R = \int_{\mathbb{R}} \partial(\mathbf{E}^n \llcorner \{f > t\})\ dt. \tag{7.16}$$

Sfruttando la relazione di ortogonalità fra le misure $\|T\|$ e $\|R\|$, abbiamo un boreliano $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che $(T-R)\llcorner B = T$ e dunque localizzando la formula di coarea su B otteniamo la decomposizione

$$T = (T-R)\llcorner B = \int_{\mathbb{R}} \partial\big(\mathbf{E}^n \llcorner \{f > t\}\big)\llcorner B\ dt. \tag{7.17}$$

Grazie a (7.8), per q.o. t le correnti $\partial\big(\mathbf{E}^n \llcorner \{f > t\}\big)\llcorner B$, coincidono con le correnti rettificabili $\tau_t \wedge \mathscr{H}^{n-1} \llcorner B$, dove $\tau_t(x)$ è $\mathscr{H}^{n-1}$-q.o. l'orientazione di $\mathrm{Tan}(\partial_*\{f>t\}, x)$. Ponendo $T_t \coloneqq \partial\big(\mathbf{E}^n \llcorner \{f > t\}\big)\llcorner B$ otteniamo il primo punto. Per il secondo, basta usare (7.7). $\square$

In realtà in questo caso, come M.Hardt e J.T.Pitts fanno in [8], la corrente R si può scegliere in modo da avere una certa compatibilità fra la sua orientazione τ_R e l'orientazione τ_{T-R} di $T-R$. Più precisamente vale

Teorema 7.11. *Se $T \in \boldsymbol{N}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, T a supporto compatto, e $\partial T \in \boldsymbol{I}_{n-2}(\mathbb{R}^n)$, allora esiste $R \in \boldsymbol{I}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ con $\partial T = \partial R$ tale che valgano le seguenti tre proposizioni.*

1. $\|T-R\| = \|T\| + \|R\|$, *(i.e.* $\|T\| \perp \|R\|$*).*
2. $\tau_{T-R}(x) + \tau_R(x) = 0$ *per* $\|R\| -$ *q.o.* $x \in \mathbb{R}^n$.
3. *Se u è una funzione reale $\mathscr{L}^n$-misurabile tale che $\partial(\boldsymbol{E}^n \llcorner u) = T - R$, e se λ e μ sono rispettivamente il limite inferiore e superiore approssimati di u (si veda 4.5.9 di [7]), allora*

   $$0 < \Theta^{n-1}(\|T-R\|, x) = \Theta^{n-1}(\|R\|, x) = \mu(x) - \lambda(x) \in \mathbb{Z},$$

   per $\|R\|$-q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Ragionando come in [18], si fa vedere che il teorema precedente permette di ottenere una decomposizione di T in correnti intere $\{T_t\}_{t\in[0,1]}$, tali che per ogni q.o. $t \in [0,1]$, $\partial T_t \equiv \partial T$ e dunque ovviamente

$$\mathbb{M}(\partial T) = \int_0^1 \mathbb{M}(\partial T_t)\ dt. \tag{7.18}$$

Chiaramente, come già visto nel caso di 1-correnti, la richiesta (7.18) non può essere soddisfatta in generale. Vedremo più avanti un esempio di corrente che non può ammettere decomposizione che soddisfi anche (7.18).

§ 2. Caso $\partial T \in \mathbf{N}_{n-2}(\mathbb{R}^n)$

In questo paragrafo vogliamo dimostrare la decomponibilità di una generica corrente normale $T \in \mathbf{N}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ in correnti rettificabili. Chiaramente il teorema 7.10 diventerà quindi un caso particolare di questa sezione. Ora spendiamo alcune parole per vedere perchè in generale non possiamo aspettarci una decomposizione in correnti intere. Innanzi tutto come avevame già accennato in precedenza, la richiesta di buona decomposizione della massa:

$$\mathbb{M}(T) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{M}(T_t)\ dt, \tag{7.19}$$

comporta una certa compatibilità fra l'orientazione τ_T di T e le orientazioni τ_{T_t} delle T_t. Questo indipendentemente da come siano fatte le T_t oppure dal fatto che T sia normale. E' facile infatti provare un risultato per misure a valori in $\Lambda_{n-1}(\mathbb{R}^n)$, che dice che se una generica misura T si decompone ad esempio come

$$T = \int_{\mathbb{R}} T_t\ dt,$$

e in più vale (7.19) allora per $\mathscr{L}^1$-q.o. t

$$\tau_{T_t}(x) = \tau_T(x) \text{ per } \|T_t\|\text{-q.o. } x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.20}$$

Se T_t sono intere o rettificabili, allora $\|T_t\| = \mathscr{H}^{n-1} \llcorner E_t$ per qualche insieme E_t $\mathscr{H}^{n-1}$-rettificabile. Ora, se ad esempio $T = \xi \wedge \mathscr{L}^n$ con ξ $n-1$-campo vettoriale semplice e smooth, e se le T_t le vogliamo anch'esse smooth, ovvero del tipo $\tau_t \wedge \mathscr{H}^{n-1} \llcorner S_t$ con S_t iper-superficie smooth, allora è chiaro che da (7.20) insieme al teorema di Frobenius ci dicono che la decomponibilità è strettamente legata all'integrabilità del campo ξ (come in [18]). Il punto è capire se la non integrabilità del campo ξ e quindi ad esempio la non involutività dei commutatori, è forte abbastanza da garantire la non esistenza di correnti intere e/o rettificabili tangenti a ξ. Come già detto in precedenza quello che accade, è che l'involutività dei commutatori garantisce ancora la non esistenza di correnti intere tangenti al campo ξ. Questo è il motivo fondamentale per il quale non ci si può aspettare (in generale) decomposizioni intere. Nel caso rettificabile invece le cose sono diverse. Cioè se non si hanno controlli sulla massa del bordo, l'ipotesi del teorema di Frobenius non è più sufficiente a garantire la non esistenza di correnti rettificabili tangenti. In effetti quello che proveremo in questa sezione è proprio la decomponibilità di ogni corrente normale T in correnti rettificabili $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, e questo insieme a (7.20) ci dirà che per $\mathscr{L}^1$-q.o. $t \in \mathbb{R}^n$ le T_t sono tangenti al campo τ_T.
Discuteremo comunque più approfonditamente nel capitolo successivo il legame fra non integabilità del campo e non esistenza di decomposizioni intere.
Detto ciò iniziamo con un lemma

Lemma 7.12. *Siano $\{T_i\}$, T, N k-correnti normali, tali che $\forall i \in \mathbb{N}$ $\|T_i\| \perp \|N\|$, e $\mathbb{M}(T_i - T) \to 0$ per $i \to \infty$, allora vale*

$$\|T\| \perp \|N\|.$$

Dimostrazione. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ esiste un un boreliano $B_i \subset \mathbb{R}^n$ per cui

$$\|N\| \llcorner B_i \equiv \|N\| \ \&\ \|T_i\| \llcorner (\mathbb{R}^n \setminus B_i) = \|T_i\|.$$

Abbiamo allora che la misura $\|N\|$ è concentrata sul boreliano $B := \bigcap_i B_i$. Dunque per ogni ε, se i è abbastanza grande abbiamo

$$\|T\|(B) \leq \|T - T_i\|(B) + \|T_i\|(B) \leq \mathbb{M}(T - T_i) \leq \varepsilon.$$

Grazie all'arbitrarietà di ε otteniamo $\|T\|(B) \equiv 0$. □

Lemma 7.13. *Sia $T \in \boldsymbol{N}_k(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni $\delta > 0$ esiste una δ- griglia $\mathscr{G}_\delta$ tale che $\|T\|(\mathscr{S}_\delta^k) = 0$.*

Dimostrazione. Per ogni $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_k) \in \Sigma(n-k, n)$, denotiamo con $\pi_{\mathbf{i}}$ la proiezione sulle $\mathbf{i}$ coordinate di $\mathbb{R}^n$. Siccome $\|T\|(\mathbb{R}^n < +\infty)$ allora posto

$$U_{\mathbf{i}} := \{x \in \mathbb{R}^{n-k} \mid \|T\|\big(\pi_{\mathbf{i}}^{-1}(x)\big) > 0\},$$

vale $\mathscr{L}^{n-k}(U_i) = 0$ per ogni $\mathbf{i} \in \Sigma(n-k, n)$. Poniamo $U := \bigcap_{\mathbf{i} \in \Sigma(n-k,n)} \mathbb{R}^{n-k} \setminus U_i$. Chiaramente si ha $\mathscr{L}^{n-k}(\mathbb{R}^{n-k} \setminus U) = 0$. Dico che esiste un $\delta < \varepsilon$ e una δ-griglia $\tilde{\mathscr{G}_\delta}$ di $\mathbb{R}^{n-k}$, tale che il suo 0-scheletro $\tilde{\mathscr{S}_\delta^0} \subset U$. Infatti fissata una δ-griglia qualsiasi, per ogni $x \in \tilde{\mathscr{S}_\delta^0}$ definisco

$$P_x := \{v \in B_1(0) \subset \mathbb{R}^{n-k} \mid x + v \in U\},$$

allora per ogni $x \in \tilde{\mathscr{S}_\delta^0}$, $\mathscr{L}^{n-k}(B_1(0) \setminus P_x) = 0$ e quindi anche $\mathscr{L}^{n-k}\Bigg(B_1(0) \setminus \big(\cap_{x \in \tilde{\mathscr{S}_\delta^0}} P_x\big)\Bigg) = 0$. Scelto allora $v \in \bigcap_{x \in \mathscr{S}_\delta^0} P_x$ e posto

$$S_\delta^k := \bigcup_{\mathbf{i} \in \Sigma(n-k,n)} \Bigg(\bigcup_{x \in (\tilde{\mathscr{S}_\delta^0} + v)} \pi_{\mathbf{i}}^{-1}(x)\Bigg),$$

siccome $\|T\|(S_\delta^k) = 0$ basta allora considerare la delta griglia $\mathscr{G}_\delta$ di cui S_δ^k ne è il k-scheletro. □

Siamo ora pronti a provare il risultato centrale di questo paragrafo. Siccome la dimostrazione non si basa sul fatto di stare lavorando con $n-1$-correnti, proveremo tale risultato per una generica k-corrente normale.

Teorema 7.14. *Sia $T \in \boldsymbol{N}_k(\mathbb{R}^n)$. Allora esiste $R \in \boldsymbol{N}_k(\mathbb{R}^n)$ tale che $\partial T = \partial R$ e*

1. *$\|R\|$ è concentrata su di un insieme E $\mathscr{H}^k$-rettificabile,*
2. *$\|T\| \perp \|R\|$.*

Dimostrazione. Sia $\delta \in (0,1)$ e usando (7.13) consideriamo una δ-griglia, diciamo $\mathscr{G}_{1,\delta}$, il cui k-scheletro, diciamo $\mathscr{S}_\delta^k$ è tale che $\|T\|(\mathscr{S}_{1,\delta}^k) = 0$. Applicando il teorema di deformazione poliedrale a T otteniamo $U_1 \in \mathscr{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$, $T_1, R_1 \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ tali che $T - R_1 = \partial U_1 + T_1$ e

1. $\mathbb{M}(R_1) \leq c\mathbb{M}(T)$, $R_1 \in \mathbf{P}_k(\mathbb{R}^n)$, e $\mathrm{spt} R_1 \subseteq \mathscr{S}_{1,\delta}^k$,
2. $\mathbb{M}(T_1) \leq c\delta\mathbb{M}(\partial T)$,
3. $\mathbb{M}(\partial R_1) \leq c\mathbb{M}(\partial T)$,
4. $\mathbb{M}(\partial T_1) \leq 2c\mathbb{M}(\partial T)$,

dove $c \in \mathbb{R}^+$ è una costante che dipende solo dalla dimensione dello spazio n. Riapplichiamo lo stesso ragionamento a T_1, stavolta con un passo δ^2. Grazie a (7.13) scelgo $\mathscr{G}_{2,\delta^2}$ tale che $\|T\|(\mathscr{S}_{2,\delta^2}^k) = 0$. Allora esistono correnti $U_2 \in \mathscr{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$, $T_2, R_2 \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ tali che $T_1 - R_2 = \partial U_2 + T_2$ e

1. $\mathbb{M}(R_2) \leq c\mathbb{M}(T_1)$, $R_2 \in \mathbf{P}_k(\mathbb{R}^n)$, e $\mathrm{spt} R_2 \subseteq \mathscr{S}_{2,\delta^2}^k$,

2. $\mathbb{M}(T_2) \leq c\delta^2 \mathbb{M}(\partial T_1) \leq 2c\delta^2 \mathbb{M}(\partial T)$,

3. $\mathbb{M}(\partial R_2) \leq c\mathbb{M}(\partial T_1) \leq 2c^2 \mathbb{M}(\partial T)$,

4. $\mathbb{M}(\partial T_2) \leq 2c\mathbb{M}(\partial T_1) \leq 2^2 c^2 \mathbb{M}(\partial T)$.

Per induzione possiamo definire $U_m \in \mathscr{D}_{k+1}(\mathbb{R}^n)$, $T_m, R_m \in \mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$ tali che $T_{m-1} - R_m = \partial U_m + T_m$ e dunque

$$T - \sum_{i=1}^{m-1} R_i = \sum_{i=1}^{m} \partial U_i + T_m, \tag{7.21}$$

tali che $R_m \in \mathbf{P}_k(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{spt} R_m \subseteq \mathscr{S}^k_{m,\delta^m}$, e

$$\mathbb{M}(R_m) \leq 2^{m-2} c^m \delta^{m-1} \mathbb{M}(\partial T), \tag{7.22}$$

$$\mathbb{M}(T_m) \leq 2^{m-1} c^m \delta^m \mathbb{M}(\partial T), \tag{7.23}$$

$$\mathbb{M}(\partial R_m) \leq c\mathbb{M}(\partial T_{m-1}), \tag{7.24}$$

$$\mathbb{M}(\partial T_m) \leq 2c\mathbb{M}(\partial T_{m-1}). \tag{7.25}$$

La (7.24), (7.25) si ottengono direttamente dal teorema di deformazione. La (7.23) la si ottiene notando che il teorema di deformazione dà $\mathbb{M}(T_m) \leq c\delta^m \mathbb{M}(\partial T_{m-1})$. Dopodichè applicando ripetutamente la (7.25) per ogni $i \leq m$ otteniamo esattamente $\mathbb{M}(T_m) \leq 2^{m-1} c^m \delta^m \mathbb{M}(\partial T)$. Mentre (7.22) la si ottiene notando che il teorema di deformazione dà $\mathbb{M}(R_m) \leq c\mathbb{M}(T_{m-1})$ e applicando (7.23) con $m-1$ al posto di m.
Se scegliamo $\delta \leq 1/4c$ allora siccome $\sum_{i=m}^{+\infty} \mathbb{M}(R_i) \leq \sum_{i=m}^{+\infty} c/2^i$, abbiamo che la successione di correnti $\sum_{i=1}^{m} R_i$ converge in massa ad una data corrente $R \in \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$. Per costruzione abbiamo che $\|R\|$ è concentrata sull'insieme $\mathscr{H}^k$-rettificabile $\bigcup_{m=1}^{+\infty} \mathscr{S}^k_{m,\delta^m}$. Inoltre per il lemma (7.12) vale $\|T\| \perp \|R\|$.
Infine siccome $\partial T - \partial(\sum_{i=1}^{m-1} R_i) = \partial T_m$ allora

$$\mathbb{F}\left(\partial T - \partial(\sum_{i=1}^{m-1} R_i)\right) \leq \mathbb{M}(T_m) \leq \frac{c}{2^m}, \tag{7.26}$$

e siccome già sappiamo $\partial(\sum_{i=1}^{m-1} R_i) \rightharpoonup \partial R$ in $\mathscr{D}_k(\mathbb{R}^n)$, (5.28) insieme a (7.26) ci dicono $\partial T \equiv \partial R$ e completiamo la dimostrazione. □

Abbiamo dunque ottenuto la decomposizione di una $n-1$-corrente normale in correnti rettificabili:

Teorema 7.15. *Sia $T \in \boldsymbol{N}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Allora esistono correnti rettificabili $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset \boldsymbol{R}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$ tali che*

1. $T(\omega) = \int_{\mathbb{R}} T_t(\omega)\, dt \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$

2. $\mathbb{M}(T) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{M}(T_t)\, dt$.

Dimostrazione. Sia R data dal teorema 7.14 con $k \equiv n-1$. Ragionare allora come nella dimostrazione di 7.10. □

§ 3. Considerazioni sul caso di k-correnti

Vediamo quali considerazioni posssiamo fare riguardo al generico caso di decomposizione di una k-corrente normale ($1 \leq k \leq n-2$).
Notiamo innanzitutto che il teorema 7.14 può essere applicato ad una qualsiasi $T \in \mathbf{N}_k(\mathbb{R}^n)$ e quindi ragionando come nel paragrafo precedente, il problema di decomposizione di una generica k-corrente normale T, sarebbe completamente risolto non appena si riescano a decomporre tutte le k-correnti T tali che $\partial T = 0$.
Fissiamo un attimo la nostra attenzione sulle $n-2$-corrrenti, ovvero ad esempio sulle 2-correnti (normali) di $\mathbb{R}^4$. La prima idea che viene in mente, ovvero considerare una $n-1$-corrrente U (ad esempio $U := \delta_{x_0} \times T$) tale che $\partial U = T$, decomporre U come $U = \int_{\mathbb{R}} U_t \, dt$ e poi scrivere $T = \partial U = \int_{\mathbb{R}} \partial U_t \, dt$ potrebbe non funzionare in generale. Questo perchè in genere (come vedremo nel prossimo capitolo) una $n-1$-corrente normale non si può decomporre in correnti intere (in particolare con massa del bordo finito) e in questo modo si perderebbe la buona decomposizione della massa $\mathbb{M}(\partial T)$.
Si potrebbe invece approssimare una generica corrente normale T con $T_\varepsilon := \int \phi_\varepsilon(-y)\tau_{y\#}T \, d\mathscr{L}^n(y)$ con $\{\phi_\varepsilon\}$ famiglia di mollifcatori e $\tau_y(x) = x + y$ si veda 4.1.18 di [7], e avremmo $T_\varepsilon \equiv \xi_\varepsilon \wedge m_\varepsilon \mathscr{L}^n$ con $\xi_\varepsilon, m_\varepsilon$ rispettivamente un k-campovettoriale e una funzione entrambi di classe C^∞ e a questo punto decomporre localmente le T_ε come nella proposizione 1 di [18]. Il problema di questo approccio è che la decomposizione locale crea bordo che a priori non si riesce a controllare con nessun tipo di grandezza legata alla corrente T (tanto meno alla massa del bordo ∂T siccome $\partial T \equiv 0$!), e questo crea delle complicazioni nel passaggio al limite delle decomposizioni, siccome se non si hanno controlli sul bordo non ci sono buone propietà di compattezza nello spazio delle correnti rettificabili.
Inoltre non possiamo aspettarci come nel caso $n-1$-dimensionale che correnti con bordo nullo ammettano in generale decomposizioni fatte da correnti rettificabili aventi anch'esse bordo nullo. Questo si vede già nel caso 1-dimensionale come nell'esempio 6.25 della curva irrazionale che avvolge il toro $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Abbiamo già discusso la decomposizione di una tale corrente $T = f_\#\big(\nu_0 \wedge \mathscr{L}^2 \llcorner [0,1] \times [0,1]\big)$ nel terzo capitolo, ma in questo caso siccome la nostra corrente T è supportata su di una sottovarietà 2-dimensionale di $\mathbb{R}^3$ possiamo applicare un ragionamento del tipo: ricopro $\mathbb{T}^2$ con aperti $\{A_i\}$ diffeomorfi ad esempio al disco $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$, dopodichè per compattezza si estrae un sottoricoprimento $\{A_{i_m}\}_{m=0}^M$ finito di $\mathbb{T}^2$. Ora siccome per ogni $m = 0, \ldots, M$ le correnti $T \llcorner A_{i_m}$ possono essere pensate come 1-correnti di $\mathbb{R}^2$, e inoltre $\partial(T \llcorner A_{i_m}) = 0$, possiamo decomporle usando il metodo descritto all'inizio di questo capitolo, e poi incollare in qualche modo tali decomposizioni sul toro $\mathbb{T}^2$. Si capisce che facendo ciò si crea inevitabilmente del bordo, localizzato sui vari bordi topologici degli insiemi A_{i_m}.

Capitolo 8

Controesempio di Zworski

L'obbiettivo di questo capitolo è quello di mostrare l'esistenza di una 2-corrente di $\mathbb{R}^3$ non decomponibile in correnti intere. L'idea per costruire una tale corrente sta dietro al famoso teorema di Frobenius, (per un 'ampia trattazione legata al teorema di Frobenius si veda ad esempio [1] oppure [10]) che caratterizza i k-campi che ammettono superfici k-dimensionali tangenti (i.e. integrabili) di una n-varietà $\mathscr{V}$ come quei campi $\xi = \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k$ tali che

$$[\tau_m, \tau_s](x) \in \operatorname{span}\xi(x) \quad \forall x \in \mathscr{V}, \quad \forall m, s \in \{1, \ldots, k\}, \tag{8.1}$$

dove $[\tau_m, \tau_s] = \nabla_{\tau_m}\nabla_{\tau_s} - \nabla_{\tau_s}\nabla_{\tau_m}$ è la parentesi di Lie dei campi τ_1, τ_2. La condizione (8.1) si dice *involutività dei campi* τ_m, τ_s . In realtà il teorema di Frobenius afferma che l'involutività dei campi è una condizione sufficiente e necessaria alla *completa integrabilità* che è una condizione più forte della sola integrabilità.
Ciò a cui noi siamo interessati è estendere il risultato a correnti intere, nel senso di una proposizione del tipo *l'involutività è condizione necessaria per l'esistenza di k-correnti intere tangenti.* Vedremo poi come questo teorema del tutto generale implicherà in particolare l'esistenza di una corrente non decomponibile in correnti intere.
In ciò che faremo seguiremo di pari passo il lavoro [11].

§ 1. Operatore Divergenza e Parentesi di Lie

Definizione 8.1. L'*operatore star duale di Hodge* $\mathbb{D}_l : \Lambda_l(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{n-l}(\mathbb{R}^n)$ è l'isomorfismo che associa

$$\xi \mapsto \xi \lrcorner\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n; \tag{8.2}$$

ricordiamo che $\langle \xi \lrcorner\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n; \eta \rangle \equiv \langle dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n; \xi \wedge \eta \rangle$ per ogni $\eta \in \Lambda_{n-l}(\mathbb{R}^n)$.
Analogamente l'isomorfismo canonico duale $\mathbb{D}^k : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda_{n-k}(\mathbb{R}^n)$ associa

$$\omega \mapsto \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n \llcorner\, \omega; \tag{8.3}$$

ricordiamo che $\langle \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n \llcorner\, \omega; \alpha \rangle \equiv \langle \omega \wedge \alpha; \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n \rangle$ per ogni $\alpha \in \Lambda^{n-k}(\mathbb{R}^n)$.

Osservazione 8.2. Notiamo che $\mathbb{D}_l$ è l'unica mappa lineare che

$$\mathbb{D}_l \mathbf{e}_{\mathbf{i}} := (-1)^{\operatorname{sign}(\sigma_{\mathbf{i}^+})} \bigwedge_{j \notin \mathbf{i}} dx_j, \tag{8.4}$$

per ogni $\mathbf{i} \in \Sigma(n,l)$, dove con $\sigma_{\mathbf{i}^+}$ si intende la permutazione data da

$$(1,2,\cdots,n) \mapsto (\mathbf{i}^c,\mathbf{i}), \quad \mathbf{i}^c \equiv (1,2,\cdots,n) \setminus \mathbf{i}. \tag{8.5}$$

Quindi

$$\big(\mathbb{D}_l \mathbf{e_i}\big) \wedge dx_{\mathbf{i}} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n, \quad \forall \mathbf{i} \in \Sigma(n,l). \tag{8.6}$$

Analogamente il duale

$$\mathbb{D}^k dx_{\mathbf{i}} := (-1)^{\mathrm{sign}(\sigma_{\mathbf{i}^-})} \bigwedge_{j \notin \mathbf{i}} \mathbf{e}_j, \tag{8.7}$$

per ogni $\mathbf{i} \in \Sigma(n,k)$, dove con $\sigma_{\mathbf{i}^-}$ si intende la permutazione data da

$$(1,2,\cdots,n) \mapsto (\mathbf{i},\mathbf{i}^c). \tag{8.8}$$

Quindi

$$\mathbf{e_i} \wedge \big(\mathbb{D}^k dx_{\mathbf{i}}\big) = \mathbf{e}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_n \quad \forall \mathbf{i} \in \Sigma(n,k). \tag{8.9}$$

Notiamo anche che $\mathbb{D}_l$ e $\mathbb{D}^{n-l}$ sono una l'inversa dell'altra.
Infine se σ_l è la permutazione che agisce

$$(1,\ldots,l,l+1,\ldots,n) \mapsto (l+1,\ldots,n,1,\ldots,l),$$

vale la relazione $\sigma_{\mathbf{i}^-} = \sigma_l \circ \sigma_{\mathbf{i}^{c+}}$ che porta alla relazione

$$< \mathbb{D}_l \mathbf{e_i}; \mathbf{e}_{\mathbf{i}^c} >= (-1)^{n-l} < \mathbf{e_i}; \mathbb{D}_{n-l} \mathbf{e}_{\mathbf{i}^c} >, \tag{8.10}$$

che poi per linearità si può estendere ad ogni ξ,ζ rispettivamente $k, n-k$-campivettoriali i.e.

$$< \mathbb{D}_l \xi; \zeta >= (-1)^{n-l} < \xi; \mathbb{D}_{n-l} \zeta >, \tag{8.11}$$

e quindi $(-1)^{n-l}\mathbb{D}_{n-l}$ è l'operatore aggiunto di $\mathbb{D}_l$.

Definizione 8.3. Data una k-forma $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$, possiamo definire il suo differenziale $D\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ come

$$D\omega := \sum_{j=1}^n \sum_{\mathbf{i} \in \Sigma(n,k)} \frac{\partial \omega_{\mathbf{i}}}{\partial x_j}(x) dx_j \otimes dx_{\mathbf{i}}. \tag{8.12}$$

Analogamente, dato un l-campovettoriale $\xi \in \Lambda_l(\mathbb{R}^n)$, definiamo $D\xi \in \Lambda_l(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ come

$$D\xi := \sum_{j=1}^n \sum_{\mathbf{i} \in \Sigma(n,l)} \frac{\partial \xi_{\mathbf{i}}}{\partial x_j}(x) \mathbf{e_i} \otimes dx_j. \tag{8.13}$$

Osservazione 8.4. Notiamo che data una k-forma, il suo differenziale esterno $d\omega$ può essere definito come l'immagine di $D\omega$ sotto la mappa lineare indotta dalla moltiplicazione esterna data da

$$\wedge \colon \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente definiamo la divergenza di un campo vettoriale:

Definizione 8.5. Dato un l-campovettoriale $\xi: \mathbb{R}^n \to \Lambda_l(\mathbb{R}^n)$, definiamo div$\xi$ come l'immagine di $D\xi$ sotto la mappa lineare indotta dall'operatore di contrazione (o moltiplicazione interna)

$$\llcorner : \Lambda_l(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \to \Lambda_{l-1}(\mathbb{R}^n).$$

Operativamente questo significa

$$\mathrm{div}\xi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \llcorner dx_j,$$

mentre in coordinate $\xi(x) = \sum_{\mathbf{i}\in\Sigma(n,l)} \xi_{\mathbf{i}}(x)\mathbf{e}_{\mathbf{i}}$,

$$\mathrm{div}\xi(x) = \sum_{\mathbf{i}\in\Sigma(n,l)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \xi_{\mathbf{i}}(x)}{\partial x_j}\mathbf{e}_{\mathbf{i}} \llcorner dx_j = \sum_{\mathbf{i}\in\Sigma(n,l)} \sum_{h=1}^{l} (-1)^{h-1} \frac{\partial \xi_{\mathbf{i}}(x)}{\partial x_{i_h}} \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}, \tag{8.14}$$

dove $\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}$ è la contrazione $\mathbf{e}_{\mathbf{i}} \llcorner dx_{i_h}$ ovvero

$$\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h} := \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_{h-1}} \wedge \mathbf{e}_{i_{h+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_l}.$$

Notiamo infine che se $l \equiv 1$ ovvero ξ è un 1-campovettoriale allora la defnizione di divergenza coincide con quella usuale. Rimandiamo al paragrafo 4.1.6 di [7] per una descrizione più dettagliata della definizione 8.5

Proposizione 8.6. *Si consideri un l-campovettoriale liscio $\xi: \mathbb{R}^n \to \Lambda_l(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$d\big(\mathbb{D}_l\xi\big) = (-1)^{d-l}\mathbb{D}_{l-1}(\mathrm{div}\xi). \tag{8.15}$$

Dimostrazione. Grazie a (8.14), la parte destra di (8.15) si può scrivere

$$(-1)^{d-l}\mathbb{D}_{l-1}(\mathrm{div}\xi) = \sum_{\mathbf{i}\in\Sigma(n,l)} \sum_{h=1}^{l} (-1)^{n-l+h-1} \frac{\partial \xi_{\mathbf{i}}(x)}{\partial x_{i_h}} \mathbb{D}_{l-1}(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h});$$

la parte sinistra invece

$$d(\mathbb{D}_l\xi) = \sum_{\mathbf{i}\in\Sigma(n,l)} \sum_{h=1}^{l} \frac{\partial \xi_{\mathbf{i}}(x)}{\partial x_{i_h}} dx_{i_h} \wedge \mathbb{D}_l(\mathbf{e}_{\mathbf{i}}),$$

dunque la tesi è equivalente a provare che

$$dx_{i_h} \wedge \mathbb{D}_l(\mathbf{e}_{\mathbf{i}}) = (-1)^{n-l+h-1}\mathbb{D}_{l-1}(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}), \tag{8.16}$$

per ogni $\mathbf{i} \in \Sigma(n,l)$ e per ogni $h = 1, \cdots, l$. Chiaramente per verificare (8.16) è solo un problema di segni, infatti

$$dx_{i_h} \wedge \mathbb{D}(\mathbf{e}_{\mathbf{i}}) = (-1)^{\alpha_{\mathbf{i}}} \bigwedge_{j\notin(\mathbf{i}\setminus h)} dx_j$$

$$\mathbb{D}_{l-1}(\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}) = (-1)^{\beta_{\mathbf{i}}} \bigwedge_{j\notin(\mathbf{i}\setminus h)} dx_j.$$

Grazie ad (8.4) abbiamo

$$\alpha_{\mathbf{i}} = \mathrm{sign}(\sigma_{\mathbf{i}^+}) + (i_h - h),$$

mentre

$$\beta_{\mathbf{i}} = \text{sign}(\sigma_{\hat{\mathbf{i}}_h^+}) = \sum_{s=1}^{h-1}((n-l+1)-(i_s-s)) + \sum_{s=h+1}^{l}((n-l)-(i_s-s))$$
$$= \text{sign}(\sigma_{\mathbf{i}^+}) + (i_h-h)-(n-l)+(h-1).$$

E questo prova la tesi. □

Lemma 8.7. *Si consideri un k-campo-vettoriale semplice $\xi = \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k$, con $\tau_1,\ldots,\tau_k \in C^1(\mathbb{R}^n, \Lambda_k(R^n))$, allora*

$$\text{div}\xi \wedge \tau_m \wedge \tau_s = -\xi \wedge [\tau_m, \tau_s], \tag{8.17}$$

per ogni $m, s = 1,\ldots,k$.

Dimostrazione. Usiamo l' operatore star di Hodge $\mathbb{D}$ per trovare un legame fra l'operatore divergenza e le parentesi di Lie.
Dalla proposizione 8.6 possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\mathbb{D}_{k+1}(\text{div}\xi \wedge \tau_m \wedge \tau_s) &= (\text{div}\xi \wedge \tau_m \wedge \tau_s) \lrcorner\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n\\ &= (\tau_m \wedge \tau_s) \lrcorner\, \mathbb{D}_{k-1}(\text{div}\xi)\\ &= (-1)^{n-k}(\tau_m \wedge \tau_s) \lrcorner\, d(\mathbb{D}_k\xi).\end{aligned}$$

Inoltre per ogni $\mathbf{i} \in \Sigma(n, n-k-1)$ possiamo scrivere

$$< \tau_m \wedge \tau_s \lrcorner\, d(\mathbb{D}_k\xi); \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_{n-k-1}} > \tag{8.18}$$
$$=< d(\mathbb{D}_k\xi); \mathbf{e}_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_{n-k-1}} \wedge \tau_m \wedge \tau_s > \tag{8.19}$$
$$= \sum_{h=1}^{n-k-1} (-1)^{h-1} < \nabla_{i_h}(\mathbb{D}_k\xi); \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h} \wedge \tau_m \wedge \tau_s > \tag{8.20}$$
$$+ (-1)^{n-k-1} < \nabla_{\tau_m}(\mathbb{D}_k\xi); \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \wedge \tau_s > \tag{8.21}$$
$$+ (-1)^{n-k} < \nabla_{\tau_s}(\mathbb{D}_k\xi); \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \wedge \tau_m > . \tag{8.22}$$

Siccome $< \mathbb{D}_k(\xi); \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h} \wedge \tau_m \wedge \tau_s >\equiv 0$ per ogni $h = 1,\ldots,n-k-1$, allora (8.20) diventa

$$\begin{aligned}&\sum_{h=1}^{n-k-1}(-1)^{h-1}\Big\langle \mathbb{D}_k\xi; \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h} \wedge -\Big(\frac{\partial \tau_m}{\partial x_{i_h}} \wedge \tau_s + \tau_m \wedge \frac{\partial \tau_s}{\partial x_{i_h}}\Big)\Big\rangle\\ &\quad= \sum_{h=1}^{n-k-1}(-1)^{h-1}\Big\langle dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n; \mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h} \wedge -\Big(\frac{\partial \tau_m}{\partial x_{i_h}} \wedge \tau_s + \tau_m \wedge \frac{\partial \tau_s}{\partial x_{i_h}}\Big)\wedge\xi\Big\rangle = 0.\end{aligned}$$

Siccome anche $< \mathbb{D}_k\xi; \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \wedge \tau_m >\equiv 0 \equiv< \mathbb{D}_k\xi; \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \wedge \tau_s >$, allora continuando il calcolo con (8.21), (8.22) possiamo scrivere

$$\begin{aligned}-< \mathbb{D}_{k+1}(\text{div}\xi \wedge \tau_m \wedge \tau_s); \mathbf{e}_{\mathbf{i}} > &=< \mathbb{D}_k\xi; \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \wedge (\nabla_{\tau_m}\tau_s - \nabla_{\tau_s}\tau_m) >\\ &=< \mathbb{D}_k\xi; \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \wedge [\tau_m, \tau_s] >\\ &=< dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n; \mathbf{e}_{\mathbf{i}} \wedge [\tau_m, \tau_s] \wedge \xi >\\ &=< \mathbb{D}_{k+1}\big([\tau_m, \tau_s] \wedge \xi\big); \mathbf{e}_{\mathbf{i}} >,\end{aligned}$$

per ogni multi-indice $\mathbf{i} \in \Sigma(n, n-k-1)$. Segue la tesi siccome $\mathbb{D}_{k+1}$ è un isomorfismo. □

Corollario 8.8. *Si consideri un k-campo-vettoriale semplice $\xi = \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k$, con $\tau_1, \ldots, \tau_k \in C^1(\mathbb{R}^n, \Lambda_k(R^n))$. Allora vale l'involutività se e solo se*

$$\mathrm{div}\xi \wedge \tau_m \wedge \tau_s = 0, \quad \forall m, s = 1, \ldots, n. \tag{8.23}$$

Proposizione 8.9. *Siano ξ, ζ rispettivamente un $k, n-k$-campivettoriali di classe C^1 di $\mathbb{R}^n$. Sussiste allora la seguenta relazione di dualità*

$$\langle d\mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; \xi\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; \xi \llcorner dx_j\rangle + (-1)^{k-1}\langle \zeta; \mathbb{D}_{k-1}\mathrm{div}(\xi)\rangle. \tag{8.24}$$

Dimostrazione. Fissiamo una generica $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_{k-1}) \in \Sigma(n, k-1)$, g una funzione liscia, e vediamo che grazie a (8.14) e (8.11)

$$\begin{aligned}
\langle d\mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; g\mathbf{e_i}\rangle &= \sum_{h=1}^{k-1} (-1)^{h-1} \langle \nabla_{i_h} \mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; g\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}\rangle \\
&= \sum_{h=1}^{k-1} (-1)^{h-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_h}} \langle \mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; g\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}\rangle - \langle \mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; \frac{\partial}{\partial x_{i_h}}(g\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h})\rangle \right) \\
&= \sum_{h=1}^{k-1} (-1)^{h-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_h}} \langle \mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; g\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}\rangle - \langle \mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; \sum_{h=1}^{k-1} (-1)^{h-1} \frac{\partial}{\partial x_{i_h}}(g\mathbf{e}_{\hat{\mathbf{i}}_h}) \llcorner dx_{i_h}\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; g\mathbf{e_i} \llcorner dx_j\rangle - \langle \mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; \mathrm{div}(g\mathbf{e_i})\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \mathbb{D}_{n-k+1}\zeta; g\mathbf{e_i} \llcorner dx_j\rangle + (-1)^{k-1} \langle \zeta; \mathbb{D}_{k-1}\mathrm{div}(g\mathbf{e_i})\rangle.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi la tesi per linearità. □

Siamo pronti per provare un lemma chiave di questa sezione

Lemma 8.10. *Dato un k-campovettoriale semplice non-involutivo di classe $C^1(\mathbb{R}^n, \Lambda_k(\mathbb{R}^n))$ $\xi = \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k$, esiste un insieme aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ e una $k-1$ forma α tale che, in U vale*

$$< d\alpha; \xi > \neq 0 \tag{8.25}$$

e

$$< \alpha; \eta > = 0 \tag{8.26}$$

qualora η sia un $k-1$-campovettoriale tale che per ogni $x \in U$, span$(\eta) \subset$ span(ξ).

Dimostrazione. Siccome ξ è involutivo, il lemma 8.7 di dà un paio di indici (m, s) e un insieme aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ dove

$$\mathrm{div}\xi \wedge \tau_m \wedge \tau_s = -\xi \wedge [\tau_m, \tau_s] \neq 0.$$

Per ogni $x \in U$, scegliamo una base di $\mathbb{R}^n$ completando l'insieme di vettori linearmente indipendenti $\{\tau_1, \ldots, \tau_k, [\tau_m, \tau_s]\}$ con un insieme ortonormale di vettori $\{\nu_1, \ldots, \nu_{n-(k+1)}\}$. La $k-1$-forma così definita

$$\alpha := \mathbb{D}_{n-k+1}(\tau_m \wedge \tau_n \wedge \nu_1 \wedge \cdots \wedge \nu_{n-(k+1)}),$$

soddisfa (8.25), (8.26). Infatti denotando con N l' $(n-k-1)$-campovettoriale $\nu_1 \wedge \cdots \wedge \nu_{n-(k+1)}$, grazie alla proposizione 8.9 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} < d\alpha; \xi > &= \sum_{j=1}^{n} \langle \mathbb{D}_{n-k+1}\tau_m \wedge \tau_s \wedge N; \xi \llcorner dx_j \rangle + (-1)^{k-1} \langle \tau_m \wedge \tau_s \wedge N; \mathbb{D}_{k-1}\mathrm{div}(\xi) \rangle \\ &= (-1)^{k-1} \langle \tau_m \wedge \tau_s \wedge N; \mathbb{D}_{k-1}\mathrm{div}(\xi) \rangle \quad (\text{ siccome } \xi \wedge \tau_m \equiv \xi \wedge \tau_s \equiv 0) \\ &= \langle dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n; \mathrm{div}\xi \wedge \tau_m \wedge \tau_s \wedge N \rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Infine , se η è un $k-1$-campovettoriale con $\mathrm{span}(\eta) \subset \mathrm{span}(\xi)$, allora

$$\langle \alpha; \eta \rangle = \langle dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n; \eta \wedge \tau_m \wedge \tau_s \wedge N \rangle = 0,$$

perchè si ha $\eta \wedge \tau_m \wedge \tau_s \equiv 0$. □

Osservazione 8.11 (Controesempio di Zworski). Vediamo di utilizzare gli strumenti sin qui introdotti su un esempio concreto.
Definiamo due campi vettoriali di $\mathbb{R}^3$

$$\tau_1(x_1, x_2, x_3) := x_1 e_1 + x_2 e_2 + e_3,$$

$$\tau_2(x_1, x_2, x_3) := x_1 e_1 + e_2 + x_3 e_3.$$

Defianimo il 2-campovettoriale di $\mathbb{R}^3$, $\xi := \tau_1 \wedge \tau_2$ e la corrente associata $T := \xi \wedge \mathscr{L}^3$. In questo caso la parentesi di Lie dei due campi τ_1, τ_2 è

$$\begin{aligned} [\tau_1, \tau_2](\omega) &= \nabla_{\tau_1}\nabla_{\tau_2}(\omega) - \nabla_{\tau_2}\nabla_{\tau_1}(\omega) \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \quad \forall \omega \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

dunque $[\tau_1, \tau_2] \equiv e_3 - e_2$ e si verifica che $e_3 - e_2 \in \mathrm{span}\xi(x_1, x_2, x_3)$ se e solo se $x_2 = x_3$. Ovvero ξ è involutivo solo sul 2-piano $\pi := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 - x_3 = 0\}$.
Mentre la divergenza è

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\xi &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \xi}{\partial x_j} \llcorner dx_j \\ &= \big((1-e_2)e_1 \wedge e_2 + (x_3 - 1)e_1 \wedge e_3\big) \llcorner dx_1 + \big(-x_1 e_1 \wedge e_2 + x_3 e_2 \wedge e_3\big) \llcorner dx_2 + \\ &\quad + \big(x_1 e_1 \wedge e_3 + x_2 e_2 \wedge e_3\big) \llcorner dx_3 \\ &= (1 - 2x_2)e_2 - (1 - 2x_3)e_3. \end{aligned}$$

La corrente T è localmente normale (se la volessimo anche globalmente basterebbe considerare $T \llcorner \psi$ per una qualsiasi $\psi \in \mathscr{D}^0(\mathbb{R}^3)$) siccome la relazione (8.24) della proposizione 8.11 ci dice che $\partial T \equiv -\mathrm{div}\ \xi \wedge \mathscr{L}^3$. Sappiamo allora dal teorema **??** che esisitono insiemi $\{E_t\}_{t \in \mathbb{R}}$, $\mathscr{H}^2$-rettificabili (con $\mathscr{H}^2(E_t) < +\infty$ per $\mathscr{L}^1$-q.o. t) tangenti a ξ.
Cosa possiamo dire sul bordo delle correnti $\xi \wedge (\mathscr{H}^2 \llcorner E_t)$?

Se consideriamo la famiglia di 1-forme $\{\mathbb{D}_2(\varphi\eta)\}$ dove $\eta := \tau_1 \wedge [\tau_1, \tau_2] = \tau_1 \wedge (e_3 - e_2)$ e al variare di $\varphi \in \mathscr{D}^0(\mathbb{R}^3)$, $|\varphi|_\infty \leq 1$, allora sempre la relazione (8.24) ci dice che

$$
\begin{aligned}
\langle d\mathbb{D}_2(\varphi\eta);\xi\rangle &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\langle \mathbb{D}_2(\varphi\eta);\xi \llcorner dx_j\rangle - \langle \eta;\mathbb{D}_1\mathrm{div}(\xi)\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\langle \mathbb{D}_2\eta;\xi \llcorner dx_j\rangle + \varphi\frac{\partial}{\partial x_j}\langle \mathbb{D}_2\eta;\xi \llcorner dx_j\rangle\right) - \langle \varphi\eta;\mathbb{D}_1\mathrm{div}(\xi)\rangle,
\end{aligned}
$$

e nel nostro caso vale

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbb{D}_2\eta;\xi \llcorner dx_1\rangle &= -x_1(x_1 - x_2x_1) + x_1(x_1x_3 - x_1),\\
\langle \mathbb{D}_2\eta;\xi \llcorner dx_2\rangle &= (x_1x_2 - x_1)(x_2 + 1) - x_1(x_2x_3 - 1),\\
\langle \mathbb{D}_2\eta;\xi \llcorner dx_3\rangle &= (x_1 - x_1x_3)(x_2 + 1) - (x_1)(1 - x_2x_3),
\end{aligned}
$$

(notare che per ogni $j = 1,2,3$, vale $\langle \mathbb{D}_2\eta;\xi \llcorner dx_j\rangle \equiv 0$ su $\{x_2 = x_3\}$ i.e. dove i campi sono involutivi), inoltre

$$
\langle \eta;\mathbb{D}_1\mathrm{div}(\xi)\rangle = x_1(1 - 2x_3) + (x_2 + 1)(1 - 2x_2).
$$

Dunque quando si considera il bordo di T, il termine problematico è $\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\langle \mathbb{D}_2\eta;\xi \llcorner dx_j\rangle$, siccome non c'è nessun modo di controllare gli incrementi delle φ nelle direzioni ortogonali a Tan (E_t, x) al variare di $x \in E_t$. Non possiamo quindi aspettarci che le E_t possano avere bordo di massa finita.
Notare infine invece che

$$
\partial(\xi \wedge \mathscr{H}^2 \llcorner \{x_2 = x_3\})(\mathbb{D}_2(\varphi\eta)) = -\int_{\{x_2=x_3\}}\langle \varphi\eta;\mathbb{D}_1\mathrm{div}\ (\xi)\rangle\ d\mathscr{H}^2,
$$

e ciò è dovuto al fatto che τ_1, τ_2 sono involutivi su $\{x_2 = x_3\}$.

§ 2. Non-integrabilità per Correnti Intere

In questo paragrafo supporremo sempre che ξ sia un k-campo vettoriale di $\mathbb{R}^n$ non-involutivo.

Teorema 8.12. *Sia ξ un k-campo vettoriale continuo di $\mathbb{R}^n$, sia $R \in \boldsymbol{I}_k(\mathbb{R}^n)$ corrente intera con $R = [\![E,\xi,m]\!]$ e $\partial R = [\![E',\eta,m']\!]$. Vale allora*

$$
\mathrm{span}\eta(x) \subset \mathrm{span}\xi(x) \quad \textit{per } \mathscr{H}^{k-1}\textit{-q.o. } x \in E' \tag{8.27}
$$

La parte delicata del teorema 8.12 è l' $\mathscr{H}^{k-1}$-quasi ovunque. Il fatto fondamentale che permette di ottenere 8.12 è che se $u \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^k)$ allora ammette traccia $\mathscr{H}^{k-1}$-quasi ovunque. Inoltre siccome l'idea per provare (8.12) è di usare la tecnica di *blow-up* sui punti di E', dimostriamo due lemmi che ci garantiranno la convergenza dei blow-up per $\mathscr{H}^{k-1}$-q.o. $x \in E'$.

Definizione 8.13. Siano $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Denotiamo con $\lambda_{x,r}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la mappa

$$
\lambda_{x,r}(y) := \frac{y - x}{r}. \tag{8.28}
$$

Richiamiamo un fatto generale, si veda il teorema 8.1.6 [9]

Teorema 8.14. *Sia $T = [\![E, \tau, m]\!]$ una k corrente intera di $\mathbb{R}^n$. Allora per $\mathscr{H}^k$-q.o. $y \in E$ abbiamo che*

$$\lim_{r \to 0} \lambda_{y,r\#} T = [\![\mathrm{Tan}(E, y), \tau(y), m(y)]\!].$$

Lemma 8.15. *Sia T una k-corrente normale di $\mathbb{R}^k$. allora per $\mathscr{H}^{k-1}$-q.o. $x_0 \in \mathbb{R}^k$ abbiamo*

$$\mathbb{M}\big(T \llcorner B_r(x_0)\big) = O(r^k). \tag{8.29}$$

Dimostrazione. Poniamo fin da subito

$$G := \{x_0 \mid \mathbb{M}\big(T \llcorner B_r(x_0)\big) = O(r^k)\}. \tag{8.30}$$

Sappiamo dal teorema 5.32 che se denotiamo con m la molteplicità di T, allora $m \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^k)$. Se poniamo $\tilde{m}(x) := \big(\lambda(x) + \mu(x)\big)/2$ dove μ, λ sono rispettivamente l'ap-limsup e l'ap-liminf di m allora ad esempio dal paragrafo 5.9 di [5] sappiamo che

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B_r(x_0)} m(x)\ dx \to \tilde{m}(x_0) \quad \text{per } \mathscr{H}^{k-1}\text{-q.o. } x \in \mathbb{R}^k. \tag{8.31}$$

Inoltre siccome $k-1$ correnti normali non possono essere supportate su insiemi di dimensione di Hausdorff inferiore a $k-1$, abbiamo

$$\|Du\|\big(B_r(x_0)\big) = O(r^{k-1}) \quad \text{per } \mathscr{H}^{k-1}\text{-q.o. } x_0. \tag{8.32}$$

Fissato un punto x_0 per cui valgano (8.31), (8.32) otteniamo grazie alla disuguaglianza di Poincaré

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}\big(T \llcorner B_r(x_0)\big) &\le \int_{B_r(x_0)} |m(x)|\ dx \\
&\le \int_{B_r(x_0)} \left| m(x) - \left(\fint_{B_r(x_0)} m \right) \right| dx + \omega_k |\tilde{m}(x_0)| r^k + o(r^k) \\
&\le cr\|Du\|\big(B_r(x_0)\big) + O(r^k) \\
&= O(r^k).
\end{aligned}$$

Infine notiamo che per costruzione $\mathscr{H}^{k-1}(\mathbb{R}^k \setminus G) = 0$ e quindi otteniamo la tesi. □

Lemma 8.16. *Sia ξ un k-campovettoriale continuo di $\mathbb{R}^n$ e sia $R \in \boldsymbol{I}_k(\mathbb{R}^n)$ con $R = [\![E, \xi, m]\!]$ e $\partial R = [\![E', \eta, m']\!]$. Allora per $\mathscr{H}^{k-1}$-q.o. $x \in E'$ si ha*

$$\limsup_{r \to 0} \mathbb{M}\big(\lambda_{x,r\#} R\big) < +\infty. \tag{8.33}$$

Dimostrazione. Ricopriamo E' con palle $B_{\rho_i}(x_i)$ tali che esistano mappe lineari π_i le cui restrizioni $\pi_i : B_{\rho_i}(x_i) \to \mathbb{R}^k$ preservino l'orientazione e verifichino le tre condizioni seguenti

1. rank $\big(\pi_i \llcorner \mathrm{span}\xi(x)\big) = k$ per ogni $x \in B_{\rho_i}(x_i) \cap E'$;
2. rank $\big(\pi_i \llcorner \mathrm{span}\eta(x)\big) = k-1$ per $\mathscr{H}^{k-1}$-q.o. $x \in B_{\rho_i}(x_i) \cap E'$;

3. $\pi_{i\#}\big(R \llcorner B_{\rho_i}(x_i)\big)$ è una k-corrente intere di $\mathbb{R}^n$.

La richiesta 1 è semplice da soddisfare grazie alla continuità di ξ. Per la 2, siccome siamo interessati a verificare una condizione per $\mathscr{H}^{k-1}$-q.o., grazie al teorema di Lusin (ad esempio si veda sezione 1.2, teorema 2, di [5]) esiste un boreliano B tale che $\|\partial R\|(\mathbb{R}^n \setminus B) = 0$ e quindi $\mathscr{H}^{k-1}(E' \setminus B) = 0$ e η è continua su B. E 2 si può soddisfare su ogni punto di B ovvero $\mathscr{H}^{k-1} \llcorner E'$-quasi ovunque. Per avere 1, 2 e conservazione dell'orientazione bastano considerazioni elementari di algebra lineare punto per punto e poi usare ancora un argomento di conitnuità.
La 3 la si ottiene notando che la teoria di slicing di correnti (si veda la sezione 7.6 di [9]) in questo caso relativa allo slicing di R rispetto alla mappa $x \mapsto |x - x_i|$, mi dice che per $\mathscr{L}^1$-q.o. $\rho \in \mathbb{R}^+$, $\pi_{i\#}\big(R \llcorner B_{\rho_i}(x_i)\big)$ è una k-corrente intera di $\mathbb{R}^k$. Per non appesantire la notazione denotiamo con P_i la corrente $\pi_{i\#}\big(R \llcorner B_{\rho_i}(x_i)\big) = [\![\pi_i\big(E \cap B_{\rho_i}(x_i)\big), \pi_i, m_i^{\#}]\!]$ con bordo $\partial P_i = [\![F_i, \gamma_i, p'_i]\!]$. Ora grazie al lemma 8.15 abbiamo per $\mathscr{H}^{k-1}$-q.o.y_0 in F_i che

$$\mathbb{M}\big(P_i \llcorner B_r(y_0)\big) = O(r^k).$$

Poniamo $G_i := \big\{y \in F_i \mid \limsup_{r\to 0} \mathbb{M}\big(P_i \llcorner B_r(y)\big) < +\infty\big\}$.
Ora dobbiamo trasferire questa informazione da $\mathbb{R}^k$ a $\mathbb{R}^n$ per provare che $\mathbb{M}\big(R \llcorner B_r(x)\big) = O(r^k)$ per $\mathscr{H}^{k-1}$-q.o. $x \in E'$. Siccome per costruzione π_i ha rango pieno $(k-1)$ sui piani tangenti approssimati di E', la formula dell'area ci dice che

$$\mathscr{H}^{k-1}\big(\pi_i^{-1}(F_i \setminus G_i) \cap E'\big) = 0.$$

Infine siccome π_i conserva l'orientazione, abbiamo

$$m_i^{\#}(y) = \sum_{x \in \pi_i^{-1}(y)} m(x) > 0,$$

e questo grazie al fatto che la molteplicità di R è intera, significa che scelto $y_0 \in G_i$ allora esiste un numero $\delta_i > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \pi_i^{-1}(y_0) \cap E'$ e per ogni r con $B_{\delta_i r}(x_0) \subset B_{\rho_i}(x_i)$ abbiamo

$$\mathbb{M}\big(R \llcorner B_{\delta_i r}(x_0)\big) \le \mathbb{M}\big(P_i \llcorner B_r(y_0)\big) = O(r^k).$$

$\square$

Prima di dimostrare il teorema 8.12, ricordiamo un risultato sulle correnti normali, e tal proposito si veda sempre il teorema 8.1.6 [9].

Lemma 8.17. *Sia $R = \xi \wedge \mu$ una k-corrente normale di $\mathbb{R}^n$. Sia x_0 un punto di approssimata continuità di ξ rispetto a μ, allora esiste il limite*

$$R_0 := \lim_{r\to 0} \lambda_{x_0,r\#} R,$$

ed inoltre R_0 ha orientazione costante pari a $\xi(x_0)$.

Dimostrazione teorema 8.12. Si fissi un punto $x_0 \in E'$ che soddisfi le ipotesi del lemma 8.17 su R e su ∂R e del teorema 8.16 ($\mathscr{H}^{k-1}$-q.o. punto di E' le soddisfa). Esiste allora una successione $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $r_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e tale che

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{x_0,r\#} R = R_0,$$

dove R_0 è la corrente limite data da 8.17 con orientazione costante pari a $\xi(x_0)$ (si ricordi che ora $x \mapsto \xi(x)$ è continua). Dico che $\partial R_0 \llcorner \nu \equiv 0$ per ogni $\nu \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\xi(x_0) \llcorner \nu = 0$ (i.e. $\nu \notin \mathrm{span}\xi_{x_0}$). Infatti per ogni $\phi \in \mathscr{D}_{k-2}(\mathbb{R}^n)$

$$\partial R_0 \llcorner \nu(\phi) = \partial R_0(\phi \wedge \nu) = -R_0(d\phi \wedge \nu) = -R_0 \llcorner \nu(d\phi) = 0.$$

D'altra parte riapplicando il lemma 8.17 a ∂R_0 si ottiene che la sua orientazione è costante ed è pari a $\eta(x_0)$ e ciò implica che $\mathrm{span}\eta(x_0) \subset \mathrm{span}\xi(x_0)$. □

§ 3. Controesempio di Zworski

Abbiamo tutti gli strumenti necessari per dimostrare la generalizzazione del teorema di Frobenius a correnti intere.

Teorema 8.18. *Sia $\xi = \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k$ un k-campovettoriale su $\mathbb{R}^n$, con $\tau_1, \dots, \tau_k \in C^1(\mathbb{R}^d)$, e sia $R \in \boldsymbol{I}_k(\mathbb{R}^n)$ con $R = [\![E, \xi, m]\!]$ allora*

$$[\tau_m, \tau_s](x) \in \mathrm{span}\xi(x),$$

per ogni coppia $m, s = 1, \dots, k$ e per ogni x nella chiusura dell'insieme dei punti di densità positiva di E.

Dimostrazione. Supponiamo che esista un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ su cui ξ non sia involutivo. Senza perdita di generalità possiamo supporre anche che $R \llcorner U \in \mathbf{I}_k(\mathbb{R}^n)$. Consideriamo allora α la $k-1$ forma data dal lemma 8.10 e che soddisfi (8.25), (8.26) relativamente a $\xi \llcorner U$. Quindi,

$$0 \neq \langle T \llcorner U; d\alpha \rangle = \langle \partial(T \llcorner U); \alpha \rangle.$$

D'altra parte il teorema 8.12 ci dice che span $\eta(x) \subset$ span $\xi(x)$ per ogni $x \in U$ dove con η si denota l'orientazione di $\partial(R \llcorner U)$ e quindi la condizione (8.26) dà

$$\langle \partial(T \llcorner U); \alpha \rangle = 0,$$

che è una contraddizione. Abbiamo dunque la tesi sui punti di densità positiva di E. La tesi segue allora per la continuità di ξ. □

Ecco infine il controesempio di 2-corrente in $\mathbb{R}^3$ che non si può decomporre in correnti intere, che non è nient'altro che la formalizzazione di quanto già detto nell'osservazione 8.11.

Teorema 8.19 (Controesempio di Zworski)**.** *Esiste una corrente $T \in \boldsymbol{N}_2(\mathbb{R}^3)$ che non ammette decomposizione in correnti intere.*

Dimostrazione. Sia $T := (\tau_1 \wedge \tau_2) \wedge \mathscr{L}^3$ la corrente dell'osservazione 8.11 e sia $\varphi \in \mathscr{D}^0(\mathbb{R}^3)$, $\varphi \neq 0$. Allora la relazione (7.20) insieme al teorema 8.18 e il fatto che $[\tau_1, \tau_2](x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{span}\ \{\tau_1(x_1, x_2, x_3), \tau_2(x_1, x_2, x_3)\} \iff x_2 = x_3$, ci dicono che la corrente normale $T \llcorner \varphi$ non può essere decomposta in correnti intere. □

Appendice A

Compatibilità dell'orientazione

In ciò che segue supporremo sempre che V sia uno spazio vettoriale normato finito dimensionale, V^* il suo duale, e λ una misura su $\mathbb{R}^n$ a valori in V^* di Borel regolare. Dovremmo supporre inoltre che la norma duale $|\cdot|_*$ sia *strettamente convessa*. Notiamo che una propietà equivalente alla stretta convessità è che per ogni $f \in V^*$ con $|f|_* = 1$, esiste un'*unico* $x \in V$ unitario tale che $\langle f; x \rangle = 1$.

Proposizione A.1. *Sia X uno spazio topologico e $\tau : X \to V$ una mappa boreliana tale che $|\tau(x)| = 1$ per ogni $x \in X$, esiste allora una mappa boreliana $f : X \to V^*$ tale che*

$$\langle f(x); \tau(x) \rangle = 1 \ e \ |f(x)|_* = 1, \quad \forall x \in X \tag{A.1}$$

Dimostrazione. La mappa che associa ad ogni $v \in V$ l'unico elemento $f^v \in V^*$ tale che $\langle f^v; v \rangle = |v|$ è continua. Basta allora porre

$$f(x) := f^{\tau(x)},$$

e notare che f risulta boreliana siccome composizione di una mappa boreliana e una mappa continua ed infine che necessariamente $|f(x)|_* = 1$ per ogni $x \in X$. □

Definizione A.2. Sia X uno spazio di topologico, μ una misura positiva finita di Borel regolare su X, e $x \mapsto \nu_x$ una mappa che assegna ad ogni $x \in X$ una misura ν_x vettoriale di Borel regolari su $\mathbb{R}^n$. Diciamo che la misura vettoriale λ si *decompone* come prodotto $\nu_x \otimes \mu$ se valgono

1. La mappa $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\nu_x$ è continua per ogni funzione $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, V)$ e $|f|_\infty < +\infty$,
2. $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_X \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\nu_x \right) d\mu$, per ogni funzione $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, V)$ e $|f|_\infty < +\infty$,
3. $\int_X |\nu_x|(\mathbb{R}^n) \, d\mu < +\infty$.

Definizione A.3. Nelle ipotesi della definizione A.2, diciamo che le misure ν_x, μ sono una *buona decomposizione* per la misura vettoriale λ, se λ si decompone come prodotto $\nu_x \otimes \mu$, e in più

$$|\lambda|(\mathbb{R}^n) = \int_X |\nu_x|(\mathbb{R}^n)\ d\mu. \tag{A.2}$$

Osservazione A.4. Notare che è sempre vera la disuguaglianza

$$|\lambda|(\mathbb{R}^n) \le \int_X |\nu_x|(\mathbb{R}^n)\ d\mu,$$

qualora λ si decomponga come $\nu_x \otimes \mu$; infatti usando il la relazione (1.11) del teorema 1.8 abbiamo

$$|\lambda|(\mathbb{R}^n) = \sup_{\substack{|f|_\infty \le 1 \\ f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, V)}} \int_{\mathbb{R}^n} f\ d\lambda \le \int_X \Bigg(\sup_{\substack{|f|_\infty \le 1 \\ f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, V)}} \int_{\mathbb{R}^n} f\ d\nu_x \Bigg) d\mu \le \int_X |\nu_x|(\mathbb{R}^n)\ d\mu,$$

siccome $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, V)$ è denso in $C_0(\mathbb{R}^n, V)$ rispetto alla norma del sup.

Osservazione A.5.

Incominciamo con una propietà per mappe misurabili.

Proposizione A.6. *Sia μ una misura positiva di Borel regolare su $\mathbb{R}^n$. Allora data $f\colon X \to \mathbb{R}$ misurabile esiste $\tilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ di Borel tale che $f = \tilde{f}$ μ-q.o.*

Dimostrazione. □

Lemma A.7. *Siano X uno spazio topologico e $\lambda, \mu, \{\nu_x\}_{x \in X}$ misure come nella definizione A.2, e tali che $\nu_x \otimes \mu$ sia una decomposizione di λ. Allora vale l'uguaglianza*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\ d\lambda = \int_X \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} f\ d\nu_x \bigg) d\mu, \tag{A.3}$$

per ogni funzione f boreliana e limitata.

Dimostrazione. Consideriamo ora la misura di Borel su $\mathbb{R}^n$ data da $\nu(B) := \int_X |\nu_x|(B)\ d\mu$, per ogni insieme boreliano B; siccome tutte le misure ν_x al variare di $x \in X$ sono di Borel regolari, anche ν lo è. Ora sia $f\colon \mathbb{R}^n \to V$ una funzione di Borel e limitata. La limitatezza di f ci dice che $f \in L^1(\nu)$ e quindi esiste una successione *equi-limitata* $\{f_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ di mappe di classe C^∞ a supporto compatto tali che

$$\lim_{j \to \infty} f_j = \tilde{f} \text{ puntualmente},$$

e sfruttando anche la regolarità di ν, esiste un boreliano $\tilde{B}$ con $\nu(\tilde{B}) = 0$ e

$$\tilde{f}(y) = f(y) \text{ se } y \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{B}.$$

Dunque per la 2 di A.2

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f\ d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}\ d\lambda = \lim_{j \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_j\ d\lambda &= \lim_{j \to \infty} \int_X \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} f_j\ d\nu_x \bigg)\ d\mu \\
&= \int_X \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}\ d\nu_x \bigg)\ d\mu \\
&= \int_X \bigg(\int_{\mathbb{R}^n} f\ d\nu_x \bigg)\ d\mu
\end{aligned}$$

dove grazie all'equi-limitatezza della successsione $\{f_j\}$, abbbiamo usato la convergenza dominata per i passaggi al limite sotto il segno integrale, mentre la prima e l'ultima uguaglianza sono vere siccome$0 = \nu(\tilde{B}) \geq |\lambda|(\tilde{B})$. □

Teorema A.8 (Compatibilità dell'orientazione)**.** *Siano X uno spazio topologico, $\lambda \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n, V^*)$, $\{\nu_x\}_{x\in X}$ una famiglia di misure in $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n, V^*)$ e $\mu \in \mathscr{M}(X)^+$. Supponiamo che $\nu_x \otimes \mu$ sia una buona decomposizione di λ, allora denotando con τ l'orientazione di λ e denotando con τ_x l'orientazione di ν_x al variare di $x \in X$, abbiamo che per μ-q.o. $x \in X$ vale*

$$\tau_x = \tau \quad |\nu_x|\text{-quasi ovunque.} \tag{A.4}$$

Dimostrazione. La mappa $F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |\tau(y) - \tau_x(y)|_* \, d|\nu_x|$ è s.c.i., ed in particolare boreliana; infatti

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau(y) - \tau_x(y)|_* \, d|\nu_x| = \sup_{\substack{f \leq 1 \\ f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, V)}} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \tau - \tau_x ; f \rangle \, d\|\nu_x|,$$

e per definizione di decomposizione di una misura sappiamo che $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \langle \tau - \tau_x ; f \rangle \, d\|\nu_x|$ è continua per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, V)$, dunque F è s.c.i. poichè estremo superiore di funzioni continue. Posto allora $B := F^{-1}(0, +\infty)$, abbiamo che B è un aperto di X e se proviamo che $\mu(B) = 0$ abbiamo la tesi.
La proposizione 1.22 ci dice che $\tau \in L^1(|\lambda|)$. Dalla proposizione A.6, senza perdita di generalità possiamo supporre che τ sia boreliana, e eventualmente ridefinendo τ su un boreliano di misura $|\lambda|$-nulla, possiamo supporre che τ sia ovunque unitaria.. Sappiamo allora dalla proposizione A.1 che esiste una mappa $f : \mathbb{R}^n \to V$ di Borel e tale che $\langle \tau ; f \rangle = 1$ e per ogni $x \in X$ $|f(x)|_* \leq 1$. Grazie alla propietà di stretta convessità della norma $|\cdot|_*$ vale

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \tau_x(y) \neq \tau(y)\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \tau_x(y); f(y) \rangle < 1\};$$

allora siccome

$$|\nu_x|\big(\{y \in \mathbb{R}^n \mid \tau_x(y) \neq \tau(y)\}\big) > 0 \quad \forall x \in B,$$

di conseguenza anche

$$|\nu_x|\big(\{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle \tau_x(y); f(y) \rangle < 1\}\big) > 0 \quad \forall x \in B.$$

Infine ricordando il lemma A.7, che ci permette di usare la 2 di A.2 estesa a tutte le mappe boreliane e limitate, vediamo che vale la seguente catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned}
|\lambda|(\mathbb{R}^n) &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \tau ; f \rangle \, d|\lambda| \\
&= \int_X \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle \tau_x ; f \rangle \, d|\nu_x| \right) d\mu \\
&= \int_B \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle \tau_x ; f \rangle \, d|\nu_x| \right) d\mu + \int_{B^c} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle \tau_x ; f \rangle \, d|\nu_x| \right) d\mu \qquad \text{(A.5)} \\
&\leq \int_B |\nu_x|(\mathbb{R}^n) \, d\mu + \int_{B^c} |\nu_x|(\mathbb{R}^n) \, d\mu \\
&= \int_X |\nu_x|(\mathbb{R}^n) \, d\mu.
\end{aligned}$$

ci dice che se fosse $\mu(B) > 0$ la (A.5) sarebbe una disuguaglianza stretta contro l'ipotesi di buona decomposizione, dunque $\mu(B) = 0$.

$\square$

Bibliografia

[1] ABATE, M., TOVENA, F. *Geometria Differenziale.* UNITEXT, Springer-Verlag, Milano, 2011.

[2] AMBROSIO, L., FUSCO, N., PALLARA, D. *Function of bounded variation and free discontinuity problem.* Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York 2000.

[3] BILLINGSLEY, P. *Convergence of probability measures*, second ed. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. A Wiley-Interscience Publication.

[4] BREZIS, H. *Analisi Funzionale. Teoria e applicazioni.* Liguori Editore, Napoli, 1986.

[5] EVANS, L. C., and GARIEPY, R. F. *Measure theory and fine properties of functions.* Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[6] FALCONER, K. J. *The geometry of fractal sets,* vol. 85 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[7] FEDERER, H. *Geometric measure theory.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[8] HARDT, R. M., and PITTS, J. T. *Solving plateau problem for hypersurfaces without compactness theorem for integral currents,* Geometric Measure Theory and the Calculus of Varations, (W. K. Allard and F. J. Almgren, eds.), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1986.

[9] KRANTZ, S. G., and PARKS, H. R. *Geometric integration theory.* Cornerstones. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008.

[10] LEE, J. M. *Introduction to smooth manifolds*, second ed., Graduate Texts in Mathematics vol. 218, Springer, New York, 2013.

[11] MASSACCESI, A. *Currents with coefficients in groups, applications and other problems in Geometric Measure Theory.* Tesi di Perfezionamento, Scuola Normale Superiore di Pisa, 10/02/2014.

[12] PAOLINI, Emanuele, and STEPANOV, Eugene. *Decomposition of acyclic normal currents in a metric space.* Journal of Functional Analysis 263.11 (2012): 3358-3390.

[13] PAOLINI, Emanuele, and STEPANOV, Eugene. *Structure of metric cycles and normal one-dimensional currents.* Journal of Functional Analysis 264.6 (2013): 1269-1295.

[14] PHELPS, R. R. *Lecture on Choqet's Theorem* , second ed., Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[15] RUDIN, W. *Real and complex analysis*, third ed. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[16] SMIRNOV, S. K. *Decomposition of solenoidal vector charges into elementary solenoids and the structure of normal one-dimensional currents.* St Petersburg Mathematical Journal, 5.4 (1994): 841-867.

[17] VILLANI, C. *Topics in optimal transportation.* Graduate Studies in Mathematics vol. 58, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.

[18] ZWORSKI, M. *Decomposition for normal currents*, Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 831-839.

Indice analitico