



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI FISICA “ENRICO FERMI”
CORSO DI LAUREA IN FISICA TEORICA

SALVATORE CALÌ

TUBI DI FLUSSO CROMOELETTRICI IN QCD

—————
ELABORATO FINALE
—————

RELATORE:
PROF. MASSIMO D’ELIA

ANNO ACCADEMICO 2013/2014

Indice

Introduzione	v
1 Richiami di Cromodinamica Quantistica	1
1.1 Modello a quark costituenti e l'introduzione della carica di colore	1
1.2 Formulazione continua della QCD	4
1.3 Costante di accoppiamento <i>running</i>	7
1.4 Path integral in Meccanica Quantistica	8
1.5 Path integral per una teoria di campo scalare	13
1.6 Rappresentazione delle funzioni di Green per campi fermionici . .	16
1.6.1 Algebra di Grassmann	16
1.6.2 Calcolo dell'integrale di un esponenziale di un bilineare fermionico	17
1.6.3 Funzionale generatore per campi fermionici	18
1.6.4 Derivata destra e sinistra rispetto alle variabili di Grassmann	19
1.6.5 Funzioni di Green di variabili di Grassmann	20
1.7 Formulazione euclidea	21
1.7.1 Rotazioni nel piano complesso	21
1.7.2 Versione euclidea di una teoria di campo scalare	23
1.7.3 Versione euclidea della QCD	24
1.8 Nozioni utili di Meccanica Statistica	25
1.9 Integrale funzionale e Termodinamica	26
2 QCD su reticolo	29
2.1 Introduzione del reticolo	29
2.2 Metodi delle differenze finite	31
2.3 Teorie di campo su reticolo	32
2.3.1 Campo scalare	32
2.3.2 Fermion doubling	33
2.3.3 Fermioni di Wilson	35
2.3.4 Fermioni staggered	36

2.3.5	Il trucco della radice quarta	38
2.3.6	Teoria di gauge $SU(3)$	39
2.3.7	Azione di Wilson per campi di gauge	41
2.4	Misura di Haar	43
2.5	Limite continuo	45
2.6	Il problema del confinamento e il loop di Wilson	48
2.7	Studio della QCD in presenza di campi magnetici	51
2.7.1	Introduzione di un campo magnetico esterno su reticolo	52
2.7.2	Anisotropia del potenziale di una coppia quark-antiquark in presenza di un campo magnetico	55
2.8	Metodi Monte Carlo	57
2.9	Il metodo jackknife	60
3	Superconduttività ordinaria e superconduttività duale	63
3.1	Fenomenologia della superconduttività	63
3.2	Modello di London	66
3.3	Rottura spontanea di simmetria: caso globale	68
3.4	Modello di Higgs abeliano	70
3.5	La superconduttività vista come rottura spontanea di simmetria	72
3.5.1	Quantizzazione del flusso	74
3.6	Campo magnetico critico termodinamico	75
3.7	Teoria di Landau-Ginzburg dei superconduttori	76
3.7.1	Parametro d'ordine complesso	76
3.7.2	Equazioni di Landau-Ginzburg	78
3.7.3	Il parametro di Landau-Ginzburg k	78
3.8	Confronto tra modello di Higgs e modello di Landau-Ginzburg	80
3.9	Superconduttori di tipo I e di tipo II	80
3.9.1	Argomento energetico	81
3.9.2	Determinazione del valore di confine $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$	84
3.10	Modello a superconduttore duale per il vuoto della QCD	86
3.11	Caratteristiche dei tubi di flusso cromoelettrici	87
4	Simulazioni numeriche	89
4.1	Obiettivi di questo lavoro	89
4.2	Misure di tubo di flusso su reticolo	90
4.3	Smearing delle configurazioni di gauge	91
4.4	Metodi numerici usati per le simulazioni	93

4.5	Dati numerici ottenuti in assenza di campo magnetico	96
4.5.1	Stime dei parametri che caratterizzano un superconduttore ed estrapolazione al continuo	103
4.6	Dati numerici ottenuti in presenza di un campo magnetico	105
4.6.1	Anisotropia dell'intensità del tubo di flusso cromoelettrico in presenza di un campo magnetico	106
4.6.2	Tubo di flusso cromoelettrico e tensione di stringa	110
5	Conclusioni	113
6	Ringraziamenti	115
	Bibliografia	117

Introduzione

Una delle principali sfide della Fisica Teorica delle Particelle è capire perché non si osservano quark liberi. Infatti, tramite la Cromodinamica Quantistica, che rappresenta ad oggi la teoria più accreditata a descrivere la dinamica delle interazioni forti, non si è ancora arrivati ad una dimostrazione rigorosa e convincente che spieghi il problema del confinamento dei quark.

È chiaro che se si vuole comprendere tale problema, è necessario conoscere il comportamento della QCD a grandi distanze e conseguentemente occorre studiare tale teoria in un regime di basse energie. Tuttavia, è ben noto che la costante di accoppiamento α_s della QCD dipende dall'energia delle particelle [25, 39]: quando le energie delle particelle sono molto più grandi di una costante della natura nota come Λ_{QCD} , α_s è piccola e di conseguenza quark e gluoni si comportano essenzialmente come particelle libere; viceversa, al diminuire dell'energia delle particelle α_s aumenta. A basse energie non è quindi possibile studiare la QCD mediante metodi perturbativi. Per comprendere il problema del confinamento siamo allora costretti ad utilizzare metodi non perturbativi.

Il metodo non perturbativo che abbiamo usato in questa tesi consiste nel lavorare in uno spazio-tempo Euclideo e disporre i campi da cui la teoria dipende su un reticolo: questo approccio è noto in letteratura come Lattice QCD. Utilizzando questo metodo, il valore di aspettazione di una generica osservabile viene solitamente calcolato tramite simulazioni numeriche, basate sui Metodi Monte Carlo. Dalle simulazioni su reticolo viene fuori che il potenziale di una coppia quark-antiquark statica consiste di un termine coulombiano e di un termine lineare del tipo σr , dove σ è una costante reale nota come tensione di stringa.

A differenza della QED, dove le linee di campo che connettono una coppia di cariche opposte si possono sparpagliare, ci si aspetta che i quark dentro gli adroni siano sorgenti di un flusso cromoelettrico che è concentrato lungo la congiungente $q\bar{q}$. A grandi distanze si pensa che le linee di campo non si sparpaglino, grazie alle autointerazioni tra i mediatori dell'interazione forte, i gluoni. Così, le linee di campo si organizzano in dei sottili tubi di flusso, aventi una densità lineare di energia pari a σ . La geometria di questi tubi di flusso ci garantisce quindi che

Introduzione

l'energia cresce linearmente con la distanza, creando un potenziale confinante lineare tra la coppia $q\bar{q}$.

Negli ultimi anni è cresciuto l'interesse verso lo studio delle proprietà della QCD in presenza di campi magnetici intensi. Infatti, per valori di campi magnetici che siano confrontabili con le scale di energie tipiche della QCD ci si aspetta che le proprietà dinamiche delle interazioni forti possano cambiare in modo significativo. Esistono diversi scenari fisici in cui è possibile riscontrare campi magnetici così intensi.

- Nell'Universo primordiale, ad esempio, si stima che possano essersi generati dei campi dell'ordine di 10^{16} T.
- Campi leggermente più piccoli, dell'ordine di 10^{15} T, possono invece essere prodotti nelle collisioni non centrali ultra-relativistiche tra ioni pesanti.

Lo studio della QCD in presenza di un campo magnetico esterno ha finora fornito risultati molto importanti. In particolare, un interessante fenomeno scoperto in [8] ha dato lo spunto per il lavoro di ricerca che è oggetto di questa tesi. Gli autori dell'articolo [8] hanno infatti trovato che, in presenza di un campo magnetico \vec{B} uniforme e costante, la tensione di stringa sembra essere una funzione crescente (decrescente) del modulo di \vec{B} , nel caso in cui la coppia $q\bar{q}$ sia disposta perpendicolarmente (parallelamente) all'orientazione del campo magnetico.

Se la formazione dei tubi di flusso è responsabile del potenziale confinante tra la coppia $q\bar{q}$ e se tale potenziale risulta anisotropo in presenza di un campo magnetico esterno, è lecito aspettarsi che questa anisotropia sia dovuta ad una deformazione del tubo di flusso.

Così, in questo lavoro abbiamo deciso di esaminare il tubo di flusso cromoelettrico generato da una coppia statica $q\bar{q}$ con e senza campi magnetici esterni. Per farlo, abbiamo utilizzato gli usuali metodi numerici adoperati in Lattice QCD, considerando una discretizzazione reticolare della QCD con $N_f = 2 + 1$ sapori e masse dei quark fisiche.

Nella prima parte del lavoro, abbiamo misurato numericamente il tubo di flusso a campo magnetico "spento" e successivamente lo abbiamo analizzato all'interno del modello a superconduttore duale per il vuoto della QCD. Tale modello è stato finora messo alla prova per teorie di pura gauge $SU(N)$ e sembra spiegare abbastanza bene i dati del tubo di flusso ottenuti dalle simulazioni [13].

Nella seconda parte, abbiamo invece studiato i tubi di flusso cromoelettrici introducendo nella teoria un campo magnetico esterno \vec{B} uniforme e costante, orientato lungo la direzione z , con l'obiettivo di rivelare eventuali anisotropie nella forma

del tubo di flusso. Capire come si deforma il tubo di flusso è sicuramente importante per comprendere meglio il fenomeno trovato in [8] e rappresenta l'obiettivo di questa parte del lavoro.

Per una migliore comprensione del lavoro svolto abbiamo deciso di organizzare la tesi nel modo seguente:

- Nel capitolo 1 si trovano alcuni richiami di Cromodinamica Quantistica e del formalismo degli integrali funzionali, sia in Meccanica Quantistica che in Teoria Quantistica dei Campi.
- Il capitolo 2 si apre invece con un'introduzione alla QCD su reticolo, metodo che ci consente di studiare la Cromodinamica Quantistica in modo non perturbativo. In particolare viene spiegato il modo in cui si formulano diverse teorie di campo su reticolo. Vengono inoltre messe in evidenza le problematiche che solitamente sorgono quando si prova a discretizzare una teoria di campo. Alla fine del capitolo abbiamo poi presentato il modo in cui si formula la QCD su reticolo in presenza di un campo magnetico esterno, con l'obiettivo di poter poi commentare in maniera quantitativa i risultati trovati in [8].
- Nel capitolo 3 viene fornita una breve introduzione alla superconduttività ordinaria. Successivamente viene mostrato, a livello qualitativo, perché il modello a superconduttore duale per il vuoto della QCD possa giustificare la formazione di tubi di flusso cromoelettrici e il conseguente confinamento del colore all'interno della materia adronica.
- Il capitolo 4 illustra il lavoro originale di questa tesi: abbiamo testato dapprima se il modello a superconduttore duale risulti un meccanismo valido per il vuoto della QCD a $N_f = 2 + 1$ sapori. Successivamente, nell'ipotesi che lo stato fondamentale della QCD sia assimilabile ad un superconduttore duale, abbiamo cercato di determinarne la tipologia: si è quindi provato a misurare la lunghezza di penetrazione λ ed il parametro di Landau-Ginzburg k del superconduttore duale.

Abbiamo poi introdotto nella teoria un campo magnetico esterno ed abbiamo esaminato il profilo del tubo di flusso per diversi valori del modulo di \vec{B} , con l'obiettivo di rivelare eventuali anisotropie. Si è poi cercato, con i dati in nostro possesso, di stimare le anisotropie della tensione di stringa, per poi confrontare i risultati ottenuti con quelli del lavoro [8].

Introduzione

- Infine, nel capitolo 5 vengono riassunti i risultati più significativi che emergono da questo lavoro ed eventuali prospettive future.

1 Richiami di Cromodinamica Quantistica

L'interazione forte è una delle quattro interazioni fondamentali finora conosciute. I suoi effetti sono visibili a due diverse scale di distanza: una più piccola, dove si manifesta tra i quark e i gluoni nella formazione degli adroni, ed una più grande, dove si manifesta indirettamente tra protoni e neutroni nella formazione dei nuclei atomici.

Ad oggi la teoria più accreditata a descrivere la dinamica delle interazioni forti sembra essere la Cromodinamica Quantistica (abbreviazione inglese: QCD). In questo capitolo ci proponiamo di introdurre alcuni aspetti di questa teoria che risulteranno utili per la contestualizzazione di questa tesi.

1.1 Modello a quark costituenti e l'introduzione della carica di colore

Vediamo brevemente come si è arrivati storicamente all'ipotesi dei quark e della loro carica di colore per poter poi introdurre, nella prossima sezione, la formulazione continua della QCD.

Nei primi studi sulle reazioni nucleari si trovò che, con buona approssimazione, le forze responsabili di tali reazioni erano indipendenti dalla carica elettrica trasportata da protoni e neutroni. Queste evidenze sperimentali indussero Heisenberg [30] a introdurre l'idea di invarianza di isospin nell'interazione forte. Si assume cioè che questa interazione non sia in grado di distinguere tra un neutrone e un protone. Utilizzando il linguaggio della teoria dei gruppi, si dice che l'interazione forte sia invariante per rotazione di un protone in un neutrone. Una delle ipotesi più semplici che si può fare, è assumere che l'isospin corrisponda ad una simmetria $SU(2)_I$, e che neutroni e protoni formino un doppietto.

Seguendo l'idea di Heisenberg, uno dei primi tentativi di classificazione degli adroni, fu quello di raggrupparli in multipletti di isospin, analogamente a quanto visto

per protone e neutrone. Ad esempio, i tre pioni vennero visti come un tripletto di isospin 1, le Δ come un quadrupletto di isospin 3/2, ecc.

Tuttavia, dalla proposta di Heisenberg fino all'inizio degli anni '60 il numero di adroni conosciuti crebbe vertiginosamente e così, per spiegare la struttura dei multipletti adronici osservati, Gell-Mann propose il **modello a quark** [22]; secondo tale modello le interazioni forti dovevano possedere un gruppo di simmetria $SU(3)_f$ di *flavour*, allargando così il gruppo di simmetria $SU(2)_I$ proposto precedentemente da Heisenberg.

In particolare Gell-Mann evidenziò che era possibile raggruppare tutti gli adroni con lo stesso spin e parità in dei multipletti che assomigliavano molto alle rappresentazioni irriducibili di dimensione **1, 8, 10** del gruppo $SU(3)$. Per giustificare tale organizzazione, il fisico statunitense suppose allora che gli adroni fossero costituiti da particelle di spin 1/2 e che tali particelle potessero presentarsi in tre sapori diversi (up, down, strange); a tali particelle venne attribuito il nome **quark**.

Seguendo questa schema, viene fuori che gli adroni che osserviamo più frequentemente in natura risultano essere composti o da un quark e un antiquark, o da tre quark, o da tre antiquark; queste tre possibili combinazioni vengono chiamate rispettivamente **mesoni**, **barioni** e **antibarioni**. Sperimentalmente si ha che la simmetria $SU(3)_f$ di flavour risulta meno precisa rispetto alla simmetria $SU(2)_I$ di isospin.

Nonostante la simmetria $SU(3)_f$ di flavour sembrava potesse spiegare abbastanza i multipletti adronici osservati, rimanevano tuttavia alcuni problemi da risolvere:

- perché non si osservano quark liberi?
- perché si osservano solo stati $q\bar{q}$, qqq e $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ e non si osservano ad esempio stati qq o $qqqq$?
- come conciliare il teorema di spin-statistica e l'esistenza dello stato Δ^{++} costituito da tre quark up e con proiezione del momento angolare di spin 3/2?

Per rispondere a tutti questi quesiti, venne introdotto un numero quantico extra, il *colore* [21], che si manifesta in tre possibili varietà. In questo modo ogni singolo quark può assumere tre differenti colori:

$$q^i = (q^1, q^2, q^3). \quad (1.1)$$

1.1 Modello a quark costituenti e l'introduzione della carica di colore

Con l'introduzione di questo grado di libertà, è possibile risolvere il problema della statistica dell'ultimo quesito, assumendo che la funzione d'onda di colore dello stato Δ^{++} sia totalmente antisimmetrica ¹

$$|\Delta^{++}, J = 3/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}} \epsilon_{ijk} |u_1^i \uparrow, u_2^j \uparrow, u_3^k \uparrow\rangle_{l=0}. \quad (1.2)$$

Si suppone inoltre che i tre colori che può assumere un quark formino il tripletto di una rappresentazione fondamentale di un gruppo, detto appunto $SU(3)$ di colore: $SU(3)_c$ ². Rispetto a questo gruppo un quark trasforma come

$$q^i = q'^i = U_j^i q^j, \quad \text{con } U_j^i \in SU(3)_c. \quad (1.3)$$

Sotto queste ipotesi, osserviamo che applicando una trasformazione $SU(3)_c$ allo stato Δ^{++} si ottiene:

$$\epsilon_{ijk} u^i u^j u^k \rightarrow \epsilon_{ijk} U_a^i U_b^j U_c^k u^a u^b u^c = \det U \epsilon_{abc} u^a u^b u^c = \epsilon_{abc} u^a u^b u^c. \quad (1.4)$$

Da tutte queste congetture, viene fuori che lo stato Δ^{++} risulta un singoletto di colore. Venne allora postulato, per analogia, che tutti gli stati adronici fossero singoletti di colore. In questo modo è possibile rispondere anche alle prime due domande nel modo seguente:

- un quark isolato non è un singoletto di colore e quindi non è possibile osservarlo;
- se assumiamo che il gruppo di simmetria è $SU(3)_c$ di colore, combinazioni come qq o $qqqq$ non possono dar luogo a singoletti di colore; viceversa si possono formare singoletti di colore mediante le combinazioni $q\bar{q}$ e qqq ;

Fu questo l'*iter* logico che portò nel secolo scorso alla nascita della moderna teoria delle interazioni forti, oggi nota come QCD.

Prima di passare alla formulazione matematica di tale teoria, vogliamo concludere questa sezione osservando che, ad oggi, non esiste ancora una spiegazione rigorosa del perché la QCD preveda il *confinamento* dei quark. Solo risultati numerici ottenuti mediante simulazioni su reticolo sembrano essere in accordo con tale assunzione.

¹Si suppone che i quark siano in uno stato di momento angolare orbitale nullo.

²Furono suggeriti anche altri gruppi di simmetria che, per motivi diversi, non si sono rivelati adeguati per descrivere le interazioni forti. Per ulteriori approfondimenti si rimanda ai testi [27] e [36].

1.2 Formulazione continua della QCD

La QCD è una teoria di gauge basata sul gruppo di simmetria non abeliano $SU(3)_c$ di colore. Le variabili dinamiche fondamentali di tale teoria sono i campi di materia dei quark, che si manifestano in sei diversi sapori (o flavour): up, down, charm, strange, top, bottom. In Tabella 1.1 riportiamo schematicamente le caratteristiche fisiche di tali campi in unità naturali ($\hbar = c = 1$)³.

Dal momento che i quark di ogni dato sapore risultano essere particelle massive

Quark	m	$q(e)$
up	≈ 2 MeV	$2/3$
down	≈ 5 MeV	$-1/3$
strange	≈ 101 MeV	$-1/3$
charm	≈ 1.27 GeV	$2/3$
bottom	≈ 4.19 GeV	$-1/3$
top	≈ 172 GeV	$2/3$

Tabella 1.1: m e q rappresentano rispettivamente la massa e la carica elettrica in unità di $|e|$ dei quark finora conosciuti. Dato che in questo lavoro non siamo interessati a una stima precisa delle masse, riportiamo solo valori approssimati. Stime degli errori su questi parametri possono essere trovati in [37].

di spin $1/2$, possiamo descriverli mediante spinori di Dirac [20]

$$\psi_{\alpha c}^f(x), \quad \bar{\psi}_{\alpha c}^f(x). \quad (1.5)$$

In (1.5) x denota la coordinata spazio-temporale, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ è l'indice di Dirac e $c = 1, 2, 3$ è l'indice di colore. Convenzionalmente useremo sempre lettere greche per rappresentare gli indici di Dirac e lettere latine per rappresentare gli indici di colore. L'indice in alto f denota invece il sapore e quindi può assumere sei diversi valori.

Tenendo a mente che ogni campo $\psi^f(x)$ possiede sia indici di Dirac che di colore, spesso tali indici verranno omessi nel corso della trattazione per far uso della più comoda notazione matriciale.

Ogni campo $\psi^f(x)$ vive nella rappresentazione fondamentale del gruppo di sim-

³A rigore, non essendo mai stati osservati quark liberi, la massa dei quark rappresenta un concetto mal definito. Così, per i quark leggeri u , d ed s , i valori delle masse riportati in Tabella 1.1 sono stati determinati valutando le violazioni della simmetria chirale e facendo uso di *Lagrangiane chirali efficaci*.

Per quanto riguarda i quark pesanti c , b e t , la loro massa è tipicamente più grande della scala di energia tipica delle interazioni forti e quindi può essere determinata essenzialmente dalle masse degli stati composti.

metria $SU(3)_c$; così l'azione del gruppo su tali campi sarà:

$$\psi^f(x) \rightarrow U(x)\psi^f(x) \quad (1.6)$$

dove

$$U(x) = e^{i\omega^a(x)T^a}. \quad (1.7)$$

La trasformazione (1.6) viene detta locale perché i parametri $\omega_a(x)$ che la caratterizzano dipendono dalle coordinate spazio-temporali; T_a sono invece gli otto generatori della rappresentazione definita di $SU(3)$ e soddisfano le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} [T^a, T^b] &= if^{abc}T^c \\ Tr [T^a T^b] &= \frac{1}{2}\delta^{ab}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Poiché l'oggetto

$$\partial_\mu \psi^f(x) \quad (1.9)$$

non ha la stessa legge di trasformazione (1.6) rispetto al gruppo $SU(3)_c$, risulta conveniente introdurre un nuovo campo matriciale $A_\mu(x)$, detto **campo di gauge**, e una costante g , nota come **costante di accoppiamento**. In questo modo, definendo la cosiddetta **derivata covariante**

$$D_\mu \psi^f(x) \equiv (\partial_\mu + igA_\mu(x))\psi^f(x) \quad (1.10)$$

e imponendo che, sotto il gruppo di simmetria $SU(3)_c$, $A_\mu(x)$ trasformi secondo la legge

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x)A_\mu(x)U^\dagger(x) + \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^\dagger(x), \quad (1.11)$$

si trova che

$$D_\mu \psi^f(x) \xrightarrow{SU(3)_c} U(x)D_\mu \psi^f(x). \quad (1.12)$$

Grazie a questa costruzione, dovuta ai fisici Yang e Mills [43], è possibile scrivere densità Lagrangiane non banali (cioè che contengono derivate dei campi) invarianti per trasformazioni locali del gruppo $SU(3)_c$. In particolare la densità Lagrangiana della QCD è data da

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{2}Tr[F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)] + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m^f)\psi^f(x). \quad (1.13)$$

1 Richiami di Cromodinamica Quantistica

In (1.13), $F_{\mu\nu}(x)$ è definito come [27]

$$[D_\mu, D_\nu] \equiv igF_{\mu\nu}(x) \rightarrow F_{\mu\nu}(x) \equiv \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), A_\nu(x)] \quad (1.14)$$

e prende il nome di **curvatura**. L'invarianza di gauge della Lagrangiana (1.13) è garantita, oltre che dall'Eq. (1.12), dal fatto che

$$F_{\mu\nu}(x) \xrightarrow{SU(3)_c} F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^\dagger(x). \quad (1.15)$$

Questa legge di trasformazione si ottiene banalmente combinando la relazione (1.12) e la definizione (1.14) ⁴.

In (1.13) è evidente che quark di diverso sapore si accoppiano al campo di gauge allo stesso modo e differiscono solo per la loro massa m^f .

Risulta inoltre possibile scrivere $A_\mu(x)$, e quindi anche $F_{\mu\nu}(x)$, come combinazione lineare dei generatori T^a dell'algebra del gruppo. In particolare si ha:

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T^a \quad (1.16)$$

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a(x)T^a \rightarrow F_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - gf^{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x). \quad (1.17)$$

Gli $A_\mu^a(x)$ vengono detti campi gluonici e giocano un ruolo analogo al campo fotonico della QED; una differenza importante sta però nel termine quadratico nei campi in (1.17), che dà luogo a termini di interazione tra soli gluoni nella *Lagrangiana* (1.13) ⁵. Notiamo infine che l'introduzione di un termine bilineare nei campi gluonici romperebbe in maniera esplicita l'invarianza di gauge e pertanto in QCD i campi gluonici risultano non massivi ⁶.

⁴Alla Lagrangiana 1.13 potrebbe essere aggiunto un termine extra invariante di gauge, pari a $i\theta \frac{g^2}{64\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_a^{\mu\nu} F_a^{\rho\sigma}$. Ciò che limita l'introduzione di questo termine è il fatto che la presenza di un θ non nullo viola la simmetria CP , che sembra essere preservata dalle interazioni forti. In questa tesi, non verrà considerata la presenza di questo termine extra.

⁵In questo lavoro utilizzeremo spesso, per brevità, il termine *Lagrangiana* invece del termine corretto *densità Lagrangiana*.

⁶Un discorso a parte meritano le teorie di gauge con rottura spontanea di simmetria. Questo tema verrà brevemente affrontato nel capitolo 3.

1.3 Costante di accoppiamento running

In QCD assume un ruolo importante la funzione β introdotta da Gell-Mann e Low e definita come

$$\beta \equiv \mu \frac{dg_R(\mu)}{d\mu}, \quad (1.18)$$

dove g_R rappresenta la costante di accoppiamento rinormalizzata e μ è la scala di rinormalizzazione.

La funzione β può essere sviluppata in serie di potenze attorno a $g_R = 0$ tramite il metodo perturbativo; in particolare, all'ordine di un loop, Gross, Wilczek [25] e Politzer [39] hanno dimostrato che per una teoria di gauge non abeliana $SU(N_c)$ con N_f quark privi di massa si ha:

$$\begin{aligned} \beta(g_R) &= -\beta_0 g_R^3 + \mathcal{O}(g_R^5), \\ \beta_0 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{11N_c}{3} - \frac{2N_f}{3} \right). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Se in (1.19) utilizziamo i valori $N_c = 3$ ed $N_f = 6$ otteniamo che $\beta_0 > 0$. Il fatto che β_0 sia positivo ha delle conseguenze fisiche importantissime; infatti, un rapido confronto di (1.18) e (1.19) ci permette di affermare che:

$$\frac{dg_R(\mu)}{d\mu} < 0. \quad (1.20)$$

Questo implica che:

- se $\mu \rightarrow \infty \Rightarrow g_R \rightarrow 0$ ⁷;
- se $\mu \rightarrow 0 \Rightarrow g_R$ cresce ⁸.

Altre informazioni interessanti vengono fuori integrando l'equazione (1.18):

$$\beta = \mu \frac{dg_R(\mu)}{d\mu} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dg_R}{\beta(g_R)} \Rightarrow \frac{\mu_2}{\mu_1} = \exp \left(\int_{g_R(\mu_1)}^{g_R(\mu_2)} \frac{1}{\beta(g_R)} dg_R \right); \quad (1.21)$$

inserendo l'approssimazione (1.19) in (1.21) si ha:

$$\mu_1 \exp \left(-\frac{1}{2\beta_0 g_R^2(\mu_1)} \right) = \mu_2 \exp \left(-\frac{1}{2\beta_0 g_R^2(\mu_2)} \right). \quad (1.22)$$

La (1.22) ci dice che la QCD ha una scala di massa che è indipendente dalla scala di rinormalizzazione utilizzata; questa scala di massa viene solitamente indicata

⁷In questo caso si parla spesso di *asymptotic freedom* (libertà asintotica).

⁸Viceversa in questo caso si parla spesso di *infrared slavery* (schiavitù infrarossa).

1 Richiami di Cromodinamica Quantistica

con il simbolo Λ_{QCD} . Definiamo quindi:

$$\Lambda_{QCD} \equiv \mu \exp\left(-\frac{1}{2\beta_0 g_R^2(\mu)}\right). \quad (1.23)$$

Sperimentalmente è stato stimato che $\Lambda_{QCD} \approx 200$ Mev. Manipolando con un po' di algebra la (1.23) otteniamo infine la cosiddetta **costante di accoppiamento running** della QCD:

$$\alpha_s(\mu) \equiv \frac{g_R^2(\mu)}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\beta_0 \log\left(\frac{\mu^2}{\Lambda_{QCD}^2}\right)}. \quad (1.24)$$

Dalla (1.24) risulta purtroppo evidente che per scale di energie vicine a Λ_{QCD}

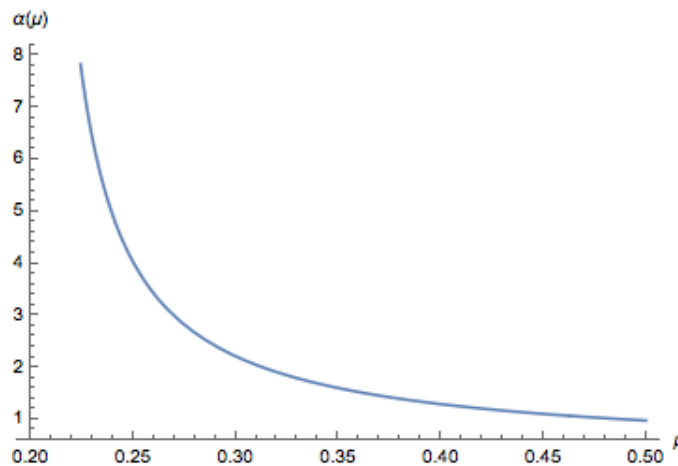


Figura 1.1: Grafico della costante di accoppiamento running in QCD.

gli sviluppi perturbativi non possono rappresentare un modo corretto di studiare la QCD; diventa quindi necessario l'utilizzo di metodi alternativi, detti appunto *non perturbativi*.

Il metodo non perturbativo che è stato usato in questo lavoro di tesi è quello della QCD su reticolo (o Lattice QCD in inglese). È per questo motivo che il prossimo capitolo di questa tesi sarà interamente dedicato alla formulazione reticolare della Cromodinamica Quantistica.

1.4 Path integral in Meccanica Quantistica

In questa sezione presentiamo una formulazione alternativa della Meccanica Quantistica, nota come formulazione degli *integrali funzionali* (o dei *path integral*) ed elaborata dal fisico statunitense R.P. Feynman [19]. La particolarità

di tale formulazione risiede nel fatto che, a differenza delle rappresentazioni di Schrödinger ed Heisenberg, le coordinate in Meccanica Quantistica rimangono funzioni ordinarie anziché diventare operatori.

Consideriamo per semplicità un sistema quantistico unidimensionale e indichiamo con \hat{q} , \hat{p} e $\hat{\mathcal{H}}(\hat{p}, \hat{q})$ rispettivamente l'operatore posizione, l'operatore impulso e l'operatore hamiltoniano.

Se usiamo la rappresentazione di Schrödinger gli stati evolvono nel tempo secondo la legge

$$|\psi_S\rangle(t) = e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}|\psi_S\rangle(0), \quad (1.25)$$

mentre gli operatori risultano indipendenti dal tempo. In rappresentazione di Heisenberg, invece, gli stati

$$|\psi_H\rangle = e^{i\hat{\mathcal{H}}t}|\psi_S\rangle(t) \quad (1.26)$$

sono per costruzione indipendenti dal tempo, mentre gli operatori variano nel tempo nel modo seguente,

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{A}_S e^{-i\hat{\mathcal{H}}t}. \quad (1.27)$$

Notiamo che se $|q\rangle$ è autostato di \hat{q} con autovalore q , allora lo stato

$$|q, t\rangle = e^{i\hat{\mathcal{H}}t}|q\rangle \quad (1.28)$$

è autostato di $\hat{q}(t)$ con lo stesso autovalore; infatti:

$$\hat{q}(t)|q, t\rangle = e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{q} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t} e^{i\hat{\mathcal{H}}t}|q\rangle = q e^{i\hat{\mathcal{H}}t}|q\rangle = q|q, t\rangle. \quad (1.29)$$

Consideriamo, in rappresentazione di Schrödinger, l'ampiezza

$$\mathcal{A} = \langle q_f | e^{-i\hat{\mathcal{H}}(t_f - t_i)} | q_i \rangle. \quad (1.30)$$

La (1.30) rappresenta l'ampiezza di probabilità che il sistema ha di passare da un autostato della coordinata $|q_i\rangle$ al tempo t_i ad un altro autostato $|q_f\rangle$ al tempo t_f . Grazie alla (1.28) possiamo riscrivere l'ampiezza \mathcal{A} anche nella forma

$$\mathcal{A} = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle. \quad (1.31)$$

1 Richiami di Cromodinamica Quantistica

Osserviamo che ad ogni istante t fissato, gli stati $|q, t\rangle$ formano un insieme completo, cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq |q, t\rangle \langle q, t| = \mathbb{1}. \quad (1.32)$$

Successivamente, scegliamo un insieme di valori temporali intermedi t_0, t_1, \dots, t_N con $t_i = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = t_f$; prendiamo per semplicità i t_m ugualmente spazati, $t_m = t_0 + m\epsilon$, con $N\epsilon = t_f - t_i$. Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 \langle q_f, t_f | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2 \langle q_f, t_f | q_2, t_2 \rangle \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2 \dots dq_{N-1} \prod_{m=0}^{N-1} \langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle, \end{aligned} \quad (1.33)$$

dove nell'ultima riga abbiamo usato la notazione $q_i = q_0$, $q_f = q_N$. Adesso, cerchiamo di valutare l'elemento $\langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle$ usando la rappresentazione di Schrödinger. Si ha

$$\langle q_{m+1}, t_{m+1} | q_m, t_m \rangle = \langle q_{m+1} | e^{-i\hat{H}t_{m+1}} e^{i\hat{H}t_m} | q_m \rangle = \langle q_{m+1} | e^{-i\hat{H}\epsilon} | q_m \rangle. \quad (1.34)$$

A questo punto, risulta conveniente restringere la classe di problemi trattati e considerare il caso più comune in cui l'Hamiltoniana classica è del tipo:

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(q). \quad (1.35)$$

In questo modo, sfruttando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots} \quad (1.36)$$

si ha

$$e^{-i\frac{V(\hat{q})}{2}\epsilon} e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\epsilon} e^{-i\frac{V(\hat{q})}{2}\epsilon} = e^{-i\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q})\right)\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^3)}. \quad (1.37)$$

Ricordando che i due insiemi completi $|p\rangle$ e $|q\rangle$ sono legati dalla relazione

$$\langle q | p \rangle = e^{ipq}, \quad (1.38)$$

valutiamo dunque, al posto dell'espressione (1.34), l'elemento:

$$\begin{aligned}
 & \langle q_{m+1} | e^{-i\frac{V(\hat{q})}{2}\epsilon} e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\epsilon} e^{-i\frac{V(\hat{q})}{2}\epsilon} | q_m \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \langle q_{m+1} | e^{-i\frac{V(\hat{q})}{2}\epsilon} e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\epsilon} | p \rangle \langle p | e^{-i\frac{V(\hat{q})}{2}\epsilon} | q_m \rangle \\
 &= e^{-i\left(\frac{V(q_{m+1})+V(q_m)}{2}\right)\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q_{m+1}-q_m)} e^{-i\frac{p^2}{2m}\epsilon} \\
 &= \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{1/2} e^{-i\left(\frac{V(q_{m+1})+V(q_m)}{2}\right)\epsilon} e^{i\frac{m}{2\epsilon}(q_{m+1}-q_m)^2} \\
 &= \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{1/2} \exp \left[i \left(\frac{m}{2} \dot{q}_m^2 - \bar{V}_m \right) \epsilon \right].
 \end{aligned} \tag{1.39}$$

In (1.39) abbiamo inserito un set completo di autostati dell'impulso, fatto agire gli operatori sui relativi autostati, usato la (1.38), sfruttato il noto risultato per l'integrale gaussiano $\int dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$ e definito

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_m &\equiv \frac{q_{m+1}-q_m}{\epsilon} \\
 \bar{V}_m &\equiv \frac{V(q_{m+1})+V(q_m)}{2}
 \end{aligned} \tag{1.40}$$

Inserendo il risultato (1.39) in (1.33) si ottiene dunque:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A} &= \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \prod_{m=0}^{N-1} \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{1/2} \exp \left[i \left(\frac{m}{2} \dot{q}_m^2 - \bar{V}_m \right) \epsilon \right] \\
 &= \left(\frac{m}{2\pi i\epsilon}\right)^{N/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1} \exp \left[i \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{m}{2} \dot{q}_m^2 - \bar{V}_m \right) \epsilon \right]
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

Cerchiamo adesso di scrivere il risultato (1.41) in modo piú elegante. A tal proposito, consideriamo la funzione $q(t)$ tale che $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$, \dots , $q(t_N) = q_N$, definita come un'interpolazione lineare dei valori di t intermedi, descritta in Fig. (1.2). Poiché in (1.41) stiamo integrando su tutti i possibili valori di q_1, \dots, q_{N-1} , stiamo di fatto integrando su una classe molto ampia di funzioni con estremi fissati.

Adesso prendiamo il limite $\epsilon \rightarrow 0$. In questo limite, l'integrale in (1.41) viene effettuato su un numero infinito di variabili di integrazione, e diventa un integrale funzionale, ovvero un integrale su tutte le possibili funzioni $q(t)$ con condizioni al contorno $q(t_i) = q_i$ e $q(t_f) = q_f$. Indichiamo allora con $\mathcal{D}q(t)$ il limite formale della misura di integrazione, includendo nella sua definizione anche la costante

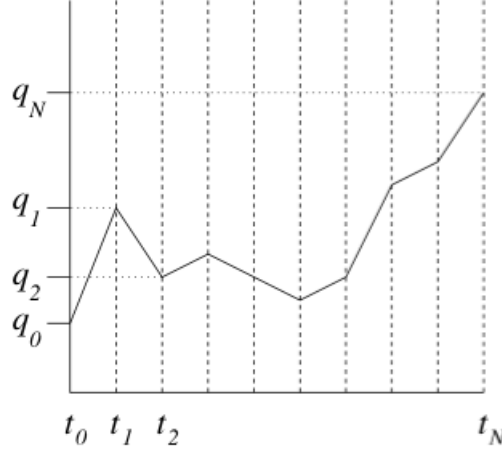


Figura 1.2: La funzione $q(t)$ definita mediante un'interpolazione dei valori $q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1, \dots, q(t_N) = q_N$. La figura è stata tratta dal testo di M. Maggiore [33].

$$\left(\frac{m}{2\pi i \epsilon}\right)^{N/2}:$$

$$\mathcal{D}q(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{N}(\epsilon) dq_1 dq_2 \cdots dq_{N-1}, \quad \mathcal{N}(\epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon}\right)^{N/2}. \quad (1.42)$$

Così, eseguendo il limite $\epsilon \rightarrow 0$ nell'Eq. (1.41), otteniamo

$$\mathcal{A} = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) e^{iS[q(t)]}, \quad (1.43)$$

dove $S[q(t)]$ è l'azione classica, cioè:

$$S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} dt L(q, \dot{q}), \quad L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q). \quad (1.44)$$

A causa del fattore divergente $\mathcal{N}(\epsilon)$, l'integrale di Feynman non è matematicamente ben definito. Tuttavia, come vedremo tra un po', quando si estende la sua formulazione alle teorie di campo, viene fuori che le grandezze a cui si è interessati in fisica dipendono solo dal rapporto di integrali funzionali; per questo motivo l'uso che faremo del path integral sarà sempre ben definito.

Se ripristiniamo la costante \hbar , la fase dell'integrando che compare in (1.43) è $S[q(t)]/\hbar$. Questo significa che l'ampiezza di transizione è esprimibile mediante una somma su tutti i possibili cammini $q(t)$ che soddisfano i vincoli $q(t_i) = q_i$ e $q(t_f) = q_f$, e ogni cammino è pesato mediante il fattore $\exp(iS[q(t)]/\hbar)$. Seguendo questo schema è anche possibile spiegare perché una particella macroscopica percorra il cammino classico $q_{cl}(t)$. Per un corpo macroscopico la fase $S[q(t)]/\hbar$

1.5 Path integral per una teoria di campo scalare

sarà un numero molto grande perché le azioni in gioco sono molto più grandi di \hbar .

Questo ha delle conseguenze quando, nella (1.43), sommiamo le ampiezze relative a ogni cammino. Infatti i cammini molto vicini dei corpi di dimensioni macroscopiche hanno fasi assai diverse e si elidono fra loro, ad eccezione del caso in cui la fase sia stazionaria e i contributi vanno a sommarsi. Come sappiamo dalla Meccanica Classica (per il Principio di Minima Azione), la traiettoria reale percorsa da una particella è quella che rende l'azione stazionaria. Di conseguenza, l'ampiezza di transizione \mathcal{A} riceve contributi solo da un piccolissimo intorno della traiettoria classica $q_{cl}(t)$ e quindi risulta quasi nulla la probabilità di trovare la particella al di fuori del cammino $q_{cl}(t)$.

Concludiamo il paragrafo osservando che è possibile generalizzare l'espressione (1.43) aggiungendo n operatori coordinata ai tempi intermedi $t_n > t_{n-1} > \dots > t_1$:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \rightarrow \langle q_f, t_f | \hat{q}(t_n) \cdots \hat{q}(t_1) | q_i, t_i \rangle. \quad (1.45)$$

Il calcolo di questo elemento di matrice mediante integrale sui cammini procede in maniera analoga al caso precedente, ovvero mediante l'inserzione di insiemi completi (1.32) a tempi intermedi tra t_i e t_f , avendo tuttavia l'accortezza di scegliere n di questi tempi intermedi in coincidenza di t_1, \dots, t_n . L'unica differenza sta nel fatto che adesso gli operatori $\hat{q}(t_m)$ agiranno sullo stato $|q_m, t_m\rangle$ portando fuori gli autovalori q_m . Possiamo allora scrivere:

$$\langle q_f, t_f | T[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)] | q_i, t_i \rangle = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) e^{iS[q(t)]} q(t_1) \cdots q(t_n), \quad (1.46)$$

dove con il simbolo $T[\hat{q}(t_1) \cdots \hat{q}(t_n)]$ abbiamo indicato il prodotto T -ordinato degli operatori $\hat{q}(t_1), \dots, \hat{q}(t_n)$.

1.5 Path integral per una teoria di campo scalare

Cerchiamo di estendere, quanto appena detto, a una teoria di campo scalare. Osserviamo innanzitutto che, se in Meccanica Quantistica avessimo considerato spazi multi-dimensionali con coordinate q_j , nell'Eq. (1.43) avremmo dovuto sostituire l'espressione $\int \mathcal{D}q(t)$ con $\int \prod_j \mathcal{D}q_j(t)$. Per una teoria di campo scalare l'indice discreto j viene sostituito dalla coordinata spaziale continua \mathbf{x} , mentre $\varphi(\mathbf{x}, t)$ gioca il ruolo delle $q_j(t)$. Inoltre la Lagrangiana L può essere scritta come $\int d^3x \mathcal{L}$. Allora, l'ampiezza tra una configurazione di campo $\varphi_i(\mathbf{x})$ al tempo t_i e

1 Richiami di Cromodinamica Quantistica

una configurazione di campo $\varphi_f(\mathbf{x})$ al tempo t_f è

$$\langle \varphi_f(\mathbf{x}), t_f | \varphi_i(\mathbf{x}), t_i \rangle = \int_{\varphi(\mathbf{x}, t_i) = \varphi_i(\mathbf{x})}^{\varphi(\mathbf{x}, t_f) = \varphi_f(\mathbf{x})} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} \int_{-\infty}^{+\infty} dt d^3x \mathcal{L} \right\}, \quad (1.47)$$

dove $\mathcal{D}\varphi$ indica la misura di integrazione su tutte le configurazioni di campo $\varphi(\mathbf{x}, t)$ con condizioni al contorno fissate. Analogamente alla relazione (1.46), vale inoltre la seguente generalizzazione della formula (1.47):

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_f(\mathbf{x}), t_f | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \varphi(x_n) \} | \varphi_i(\mathbf{x}), t_i \rangle \\ &= \int_{\varphi(\mathbf{x}, t_i) = \varphi_i(\mathbf{x})}^{\varphi(\mathbf{x}, t_f) = \varphi_f(\mathbf{x})} \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \exp \left\{ i \int_{t_i}^{t_f} \int_{-\infty}^{+\infty} dt d^3x \mathcal{L} \right\}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Vediamo come dalle Eq. (1.47) e (1.48) è possibile ricavare, almeno dal punto di vista formale, le *funzioni di Green a n punti*, ossia il valore medio del prodotto T -ordinato sullo stato di vuoto.

Per far questo, ruotiamo l'asse reale dei tempi di $\epsilon \rightarrow 0^+$ in senso orario, cioè

$$t \rightarrow te^{-i\epsilon} \approx t(1 - i\epsilon); \quad (1.49)$$

in questo modo:

$$\begin{aligned} |\varphi_i(\mathbf{x}), t_i \rangle &= e^{i\hat{\mathcal{H}}t_i} |\varphi_i(\mathbf{x}) \rangle \rightarrow |\varphi_i(\mathbf{x}), t_i e^{-i\epsilon} \rangle = e^{i\hat{\mathcal{H}}t_i(1-i\epsilon)} |\varphi_i(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \varphi_f(\mathbf{x}), t_f | &= \langle \varphi_f(\mathbf{x}) | e^{-i\hat{\mathcal{H}}t_f} \rightarrow \langle \varphi_f(\mathbf{x}), t_f e^{-i\epsilon} | = \langle \varphi_f(\mathbf{x}) | e^{-i\hat{\mathcal{H}}t_f(1-i\epsilon)}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Inseriamo adesso nelle espressioni in (1.50) un insieme completo degli autostati di \mathcal{H} :

$$\begin{aligned} |\varphi_i(\mathbf{x}), t_i e^{-i\epsilon} \rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n | e^{i\hat{\mathcal{H}}t_i(1-i\epsilon)} |\varphi_i(\mathbf{x}) \rangle = \sum_n e^{iE_n t_i(1-i\epsilon)} |n\rangle \langle n | \varphi_i(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \varphi_f(\mathbf{x}), t_f e^{-i\epsilon} | &= \sum_n \langle \varphi_f(\mathbf{x}) | e^{-i\hat{\mathcal{H}}t_f(1-i\epsilon)} |n\rangle \langle n | = \sum_n e^{-iE_n t_f(1-i\epsilon)} \langle \varphi_f(\mathbf{x}) |n\rangle \langle n|. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Se poniamo $t_f = T$ e $t_i = -T$ e consideriamo il limite $T \rightarrow +\infty$, nelle decomposizioni (1.51) il termine dominante risulta essere quello ad energia più bassa, cioè quello relativo allo stato di vuoto $|\Omega\rangle$. Possiamo allora scrivere ⁹

$$\begin{aligned} |\varphi_i(\mathbf{x}), -\infty e^{-i\epsilon} \rangle &= e^{-iE_\Omega \infty(1-i\epsilon)} |\Omega\rangle \langle \Omega | \varphi_i(\mathbf{x}) \rangle \\ \langle \varphi_f(\mathbf{x}), +\infty e^{-i\epsilon} | &= e^{-iE_\Omega \infty(1-i\epsilon)} \langle \varphi_f(\mathbf{x}) | \Omega \rangle \langle \Omega|. \end{aligned} \quad (1.52)$$

⁹Stiamo assumendo che lo stato di vuoto abbia energia strettamente minore rispetto agli altri stati.

1.5 Path integral per una teoria di campo scalare

Inserendo i risultati ricavati in (1.52) nelle espressioni (1.47) e (1.48) si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f(\mathbf{x}), +\infty e^{-i\epsilon} | \varphi_i(\mathbf{x}), -\infty e^{-i\epsilon} \rangle &= e^{-i2E_\Omega \infty(1-i\epsilon)} \langle \varphi_f(\mathbf{x}) | \Omega \rangle \langle \Omega | \Omega \rangle \langle \Omega | \varphi_i(\mathbf{x}) \rangle \\ &= e^{-i2E_\Omega \infty(1-i\epsilon)} \langle \varphi_f(\mathbf{x}) | \Omega \rangle \langle \Omega | \varphi_i(\mathbf{x}) \rangle, \end{aligned} \quad (1.53)$$

mentre

$$\begin{aligned} \langle \varphi_f(\mathbf{x}), +\infty e^{-i\epsilon} | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \varphi(\hat{x}_n) \} | \varphi_i(\mathbf{x}), -\infty e^{-i\epsilon} \rangle \\ = e^{-i2E_\Omega \infty(1-i\epsilon)} \langle \varphi_f(\mathbf{x}) | \Omega \rangle \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \varphi(\hat{x}_n) \} | \Omega \rangle \langle \Omega | \varphi_i(\mathbf{x}) \rangle. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Prendendo il rapporto tra (1.54) e (1.53) viene fuori che le funzioni di Green a n punti sono date da

$$\begin{aligned} G_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &\equiv \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \varphi(\hat{x}_n) \} | \Omega \rangle \\ &= \frac{\langle \varphi_f(\mathbf{x}), +\infty e^{-i\epsilon} | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \cdots \varphi(\hat{x}_n) \} | \varphi_i(\mathbf{x}), -\infty e^{-i\epsilon} \rangle}{\langle \varphi_f(\mathbf{x}), +\infty e^{-i\epsilon} | \varphi_i(\mathbf{x}), -\infty e^{-i\epsilon} \rangle} \\ &= \frac{\int_{\varphi(\mathbf{x}, -\infty e^{-i\epsilon}) = \varphi_i(\mathbf{x})}^{\varphi(\mathbf{x}, +\infty e^{-i\epsilon}) = \varphi_f(\mathbf{x})} \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \exp \left\{ i \int_{-\infty e^{-i\epsilon}}^{+\infty e^{-i\epsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt d^3x \mathcal{L} \right\}}{\int_{\varphi(\mathbf{x}, -\infty e^{-i\epsilon}) = \varphi_i(\mathbf{x})}^{\varphi(\mathbf{x}, +\infty e^{-i\epsilon}) = \varphi_f(\mathbf{x})} \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int_{-\infty e^{-i\epsilon}}^{+\infty e^{-i\epsilon}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt d^3x \mathcal{L} \right\}}. \end{aligned} \quad (1.55)$$

La (1.55) è la formula fondamentale che connette il formalismo operatoriale con il formalismo degli integrali funzionali. È interessante notare che le condizioni al contorno sono del tutto arbitrarie, purché $\langle \varphi_f(\mathbf{x}) | \Omega \rangle, \langle \Omega | \varphi_i(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$.

Per una teoria come la QCD l'uso del path integral avviene in maniera leggermente diversa rispetto ad una teoria di campo scalare, in quanto nel trattare campi fermionici e campi di gauge occorre fare qualche considerazione in più rispetto al semplice campo scalare.

Nella prossima sezione ci dedicheremo alla rappresentazione delle funzioni di Green per campi fermionici. Per quanto riguarda la quantizzazione del campo di gauge, l'invarianza di gauge della teoria porta ad alcuni problemi nella definizione del propagatore. Per superare questi problemi, si attua in genere una procedura di gauge-fixing, introdotta per la prima volta dai fisici Faddeev e Popov¹⁰. Non diremo oltre perché, come vedremo nel prossimo capitolo, in Lattice QCD le azioni discretizzate dipendono dai campi A_μ^a solo attraverso delle variabili di link, che sono degli elementi del gruppo $SU(3)_c$. Possiamo allora sostituire l'integrale $\mathcal{D}A_\mu$ sull'algebra con un integrale $\mathcal{D}U$ sugli elementi del gruppo compatto $SU(N)$. In questo modo non è necessaria la procedura di gauge fixing perché la ridondanza del campo di gauge non pregiudica la finitezza dell'integrazione.

¹⁰Per eventuali approfondimenti si rimanda, ad esempio, al testo [36].

Chiudiamo il paragrafo osservando, come avevamo anticipato, che in teoria dei campi il calcolo della costante divergente $\mathcal{N}(\epsilon)$ è irrilevante, in quanto tutta l'informazione sul sistema è contenuta nelle funzioni di Green, che però risultano essere dei rapporti di integrali funzionali: questo rende le funzioni di Green calcolate mediante integrali funzionali formalmente ben definite.

1.6 Rappresentazione delle funzioni di Green per campi fermionici

Finora abbiamo considerato sistemi quanto-meccanici che coinvolgono solo gradi di libertà bosonici. Ma i campi di materia fondamentali in natura hanno spin $1/2$. Rispetto al caso bosonico questi campi anticommutano nel limite $\hbar \rightarrow 0$, e quindi in questo limite diventano gli elementi di un'algebra di Grassmann.

1.6.1 Algebra di Grassmann

Risulta assai utile introdurre delle variabili, dette appunto variabili di Grassmann, che non sono c-numeri, ma variabili anticommutanti per le quali vanno ridefiniti gli integrali funzionali.

Gli elementi $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N\}$ sono detti generatori di un'algebra di Grassmann se anticommutano l'uno con l'altro, cioè se

$$\{\eta_i, \eta_j\} = \eta_i \eta_j + \eta_j \eta_i = 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1.56)$$

Da (1.56) segue che

$$\eta_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.57)$$

Un elemento generico di un'algebra di Grassmann è definito come una serie di potenze nelle variabili η_i . A causa della Eq. (1.57), tuttavia, questa serie di potenze possiede solo un numero finito di termini (2^N):

$$f(\eta) = f_0 + \sum_i f_i \eta_i + \sum_{i \neq j} f_{ij} \eta_i \eta_j + \dots + f_{12\dots N} \eta_1 \eta_2 \dots \eta_N. \quad (1.58)$$

Vogliamo adesso definire delle regole che ci consentano di calcolare gli integrali della forma

$$\int \prod_{i=1}^N d\eta_i f(\eta), \quad (1.59)$$

1.6 Rappresentazione delle funzioni di Green per campi fermionici

dove $f(\eta)$ è una funzione la cui struttura generale è data da (1.58). Poiché una data variabile di Grassmann può apparire al massimo alla prima potenza in $f(\eta)$, sono sufficienti le seguenti regole per calcolare un integrale arbitrario:

$$\begin{aligned}\int d\eta_i &= 0, \\ \int d\eta_i \eta_i &= 1.\end{aligned}\tag{1.60}$$

Quando calcoliamo degli integrali multipli dobbiamo tenere presente che anche le misure di integrazione $\{d\eta_i\}$ anticommutoano tra loro, così come con tutte le variabili $\{\eta_i\}$:

$$\{d\eta_i, d\eta_j\} = \{d\eta_i, \eta_j\} = 0 \quad \forall i, j.\tag{1.61}$$

Queste regole di integrazione sembrano molto strane, ma come vedremo presto, sono le regole appropriate che ci consentiranno di ottenere una rappresentazione delle funzioni di Green mediante i path-integral.

Dalle Eq. (1.60) e (1.61) si ha

$$\begin{aligned}\int \prod_{i=1}^N d\eta_i f(\eta) &= f_{12\dots N}, \\ \int \prod_{i=1}^N d\eta_i f(\eta + a) &= f_{12\dots N}.\end{aligned}\tag{1.62}$$

1.6.2 Calcolo dell'integrale di un esponenziale di un bilineare fermionico

Proviamo adesso a calcolare l'integrale di una funzione particolarmente interessante, che è l'esponenziale di un bilineare fermionico. A tal proposito, consideriamo un insieme di $2N$ variabili di Grassmann

$$\psi_1, \dots, \psi_N, \bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_N.\tag{1.63}$$

ed il seguente integrale

$$I[A] = \int \prod_{l=1}^N d\bar{\psi}_l d\psi_l e^{-\sum_{i,j} \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j}.\tag{1.64}$$

1 Richiami di Cromodinamica Quantistica

Cerchiamo di manipolare l'esponenziale, tenendo conto della definizione di variabile di Grassmann. Si ha

$$\begin{aligned} e^{-\sum_{i,j} \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j} &= \prod_i e^{-\bar{\psi}_i \sum_j A_{ij} \psi_j} = \prod_i \left(1 - \bar{\psi}_i \sum_j A_{ij} \psi_j \right) \\ &= \left(1 - \bar{\psi}_1 \sum_{j_1} A_{1j_1} \psi_{j_1} \right) \cdots \left(1 - \bar{\psi}_N \sum_{j_N} A_{Nj_N} \psi_{j_N} \right). \end{aligned} \quad (1.65)$$

L'unico termine che contribuirà nell'integrale sarà

$$\sum_{j_1 \cdots j_N} \psi_{j_1} \bar{\psi}_1 \cdots \psi_{j_N} \bar{\psi}_N A_{1j_1} \cdots A_{Nj_N}. \quad (1.66)$$

Osserviamo che solo le permutazioni di $(j_1, \cdots, j_N) = (1, 2, \cdots, N)$ daranno nell'integrale un contributo diverso da zero. Tuttavia (j_1, \cdots, j_N) non sono necessariamente ordinati. È possibile riordinare i termini tenendo conto del fatto che ogni scambio contribuisce con un segno meno. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sum_{j_1 \cdots j_N} \psi_{j_1} \bar{\psi}_1 \cdots \psi_{j_N} \bar{\psi}_N A_{1j_1} \cdots A_{Nj_N} &= \psi_1 \bar{\psi}_1 \cdots \psi_N \bar{\psi}_N \sum_{j_1, \cdots, j_N}^{\text{perm.}} \epsilon_{j_1 \cdots j_N} A_{1j_1} \cdots A_{Nj_N} \\ &= \psi_1 \bar{\psi}_1 \cdots \psi_N \bar{\psi}_N \det[A]. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Da questo ne segue che

$$I[A] = \int \prod_{l=1}^N d\bar{\psi}_l d\psi_l e^{-\sum_{i,j} \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j} = \det[A]. \quad (1.68)$$

1.6.3 Funzionale generatore per campi fermionici

L'obiettivo che ci proponiamo di raggiungere in questa sezione è di costruire un funzionale generatore per campi fermionici. Una possibile scelta è la seguente

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \int [d\bar{\psi} d\psi] \exp \left\{ - \sum_{i,j=1}^N \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j + \sum_{i=1}^N (\bar{\psi}_i \rho_i + \bar{\rho}_i \psi_i) \right\} \quad (1.69)$$

dove ρ e $\bar{\rho}$ rappresentano due tipi di sorgenti, anch'esse variabili di Grassmann. Se effettuiamo la traslazione

$$\begin{aligned} \psi &= \psi' + A^{-1} \rho, \\ \bar{\psi}^t &= \bar{\psi}'^t + \bar{\rho}^t A^{-1} \end{aligned} \quad (1.70)$$

è possibile ricondurre il funzionale generatore (1.69) alla forma (1.68) e si arriva al seguente risultato

$$Z[\rho, \bar{\rho}] = \det[A] \exp \left\{ \sum_{i,j} \bar{\rho}_i (A^{-1})_{ij} \rho_j \right\}. \quad (1.71)$$

1.6.4 Derivata destra e sinistra rispetto alle variabili di Grassmann

Per ricavare le funzioni di Green risulta indispensabile introdurre il concetto di derivata parziale nello spazio delle funzioni (1.58). Si definisce in particolare la derivata sinistra e destra.

- Derivata sinistra

1. Se $f(\eta)$ non dipende da η_i , allora $\frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta) = 0$.
2. Se $f(\eta)$ dipende da η_i , la derivata sinistra $\frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta)$ si realizza dapprima portando la variabile η_i in fondo a sinistra, usando le regole di anticommutazione (1.56), e quindi applicando la regola $\frac{\partial}{\partial \eta_i} \eta_i = 1$.

- Derivata destra

1. Se $f(\eta)$ non dipende da η_i , allora $f(\eta) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \eta_i}} = 0$.
2. Se $f(\eta)$ dipende da η_i , la derivata destra $f(\eta) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \eta_i}}$ si realizza dapprima portando la variabile η_i in fondo a destra, usando le regole di anticommutazione (1.56), e quindi applicando la regola $\eta_i \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \eta_i}} = 1$.

Così per esempio $\frac{\partial}{\partial \eta_1} \eta_2 \eta_1 = -\eta_1$, oppure $\eta_2 \eta_1 \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \eta_2}} = -\eta_1$. Osserviamo che, a causa della particolare definizione dell'integrazione di Grassmann, abbiamo che

$$\int d\eta_i f(\eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_i} f(\eta). \quad (1.72)$$

Un'altra proprietà che può essere facilmente provata, è che

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \eta_i}, \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right\} f(\eta) = 0. \quad (1.73)$$

A titolo di esempio, applichiamo le regole di derivazione sinistra e destra alle funzioni esponenziali. Se consideriamo la funzione

$$f(\bar{\rho}) = e^{\sum_j \bar{\rho}_j \eta_j} \quad (1.74)$$

si ha che la derivata sinistra è data da

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_i} f(\bar{\rho}) &= \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_i} e^{\sum_j \bar{\rho}_j \eta_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_i} \prod_j e^{\bar{\rho}_j \eta_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_i} \prod_j (1 + \bar{\rho}_j \eta_j) \\ &= \eta_i \prod_{j \neq i} (1 + \bar{\rho}_j \eta_j) = \eta_i \prod_j (1 + \bar{\rho}_j \eta_j) = \eta_i f(\bar{\rho}). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Allo stesso modo si dimostra che

$$e^{\sum_j \bar{\eta}_j \rho_j} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \rho_i}} = \bar{\eta}_i e^{\sum_j \bar{\eta}_j \rho_j}. \quad (1.76)$$

1.6.5 Funzioni di Green di variabili di Grassmann

Si definisce la funzione di Green di $2l$ variabili di Grassmann come

$$\langle \psi_{i_1} \cdots \psi_{i_l} \bar{\psi}_{j_1} \cdots \bar{\psi}_{j_l} \rangle = \frac{\int [d\bar{\psi} d\psi] \psi_{i_1} \cdots \psi_{i_l} \bar{\psi}_{j_1} \cdots \bar{\psi}_{j_l} e^{-\sum_{i,j} \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j}}{\int [d\bar{\psi} d\psi] e^{-\sum_{i,j} \bar{\psi}_i A_{ij} \psi_j}} \quad (1.77)$$

Usando le regole di derivazione sinistra e destra, la funzione di Green può essere espressa in termini del funzionale generatore come

$$\langle \psi_{i_1} \cdots \psi_{i_l} \bar{\psi}_{j_1} \cdots \bar{\psi}_{j_l} \rangle = \frac{1}{Z[\rho, \bar{\rho}]} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_{i_l}} \right) Z[\rho, \bar{\rho}] \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \rho_{j_1}}} \cdots \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \rho_{j_l}}} \right) \Big|_{\rho=\bar{\rho}=0}. \quad (1.78)$$

Per verificare che queste regole, seppur laboriose, risultano utili, calcoliamo il propagatore di Dirac della teoria fermionica libera. In questo caso abbiamo bisogno di calcolare la funzione di Green di due variabili di Grassmann

$$\langle \psi_i \bar{\psi}_j \rangle = \frac{\int [d\bar{\psi} d\psi] \psi_i \bar{\psi}_j e^{-\sum_{k,l} \bar{\psi}_k A_{kl} \psi_l}}{\int [d\bar{\psi} d\psi] e^{-\sum_{k,l} \bar{\psi}_k A_{kl} \psi_l}} = \frac{1}{Z[\rho, \bar{\rho}]} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_i} Z[\rho, \bar{\rho}] \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \rho_j}} \right) \Big|_{\rho=\bar{\rho}=0}. \quad (1.79)$$

con $Z[\rho, \bar{\rho}]$ dato dall'Eq. (1.71). Sviluppando al solito modo gli esponenziali si trova che

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\rho}_i} Z[\rho, \bar{\rho}] \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \rho_j}} \Big|_{\rho=\bar{\rho}=0} = \det[A] (A^{-1})_{ij}. \quad (1.80)$$

Così si ottiene

$$\langle \psi_i \bar{\psi}_j \rangle = (A^{-1})_{ij} \quad (1.81)$$

Teniamo presente che un campo di Grassmann è una funzione dello spazio-tempo i cui valori sono numeri anticommutanti. Più precisamente, possiamo definire un campo di Grassmann $\psi(x)$ in termini di un qualunque insieme di funzioni

ortonormali che formino una base:

$$\psi(x) = \sum_a \psi_a \varphi_a(x). \quad (1.82)$$

Le funzioni $\varphi_a(x)$ sono funzioni ordinarie a valori complesse, mentre i coefficienti ψ_a sono numeri di Grassmann. Per descrivere il campo di Dirac, occorre prendere una base di spinori a quattro componenti.

Abbiamo adesso tutto il macchinario necessario per valutare gli integrali funzionali, e di conseguenza le funzioni di Green, in cui sono coinvolti i fermioni. Per esempio, sfruttando la struttura della funzione a due punti per il caso di un campo scalare, saremmo tentati di scrivere che la funzione a due punti di Dirac sia data da

$$\langle \Omega | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi} \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi}} \quad (1.83)$$

Questo modo di scrivere è corretto se utilizziamo le nozioni che sono state introdotte in questa sezione. Infatti, tenendo conto dei risultati (1.71) e (1.80) si trova che la funzione di Dirac a due punti è data da $[-i(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)]^{-1}$. Valutando questa espressione nello spazio degli impulsi troviamo il corretto propagatore di Feynman,

$$\langle \Omega | T \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | \Omega \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik(x_1-x_2)}}{\gamma^\mu k_\mu - m + i\epsilon}. \quad (1.84)$$

1.7 Formulazione euclidea

La caratteristica più importante del formalismo del path integral è che esso ci consente di trattare una teoria di campo in modo non perturbativo, in quanto il membro destro dell'Eq. (1.55) assume significato sia nella teoria perturbativa che in quella non perturbativa. Tuttavia, quando si utilizza questo formalismo, risulta spesso utile accertarsi della convergenza degli integrali funzionali; un modo per farlo consiste nel ruotare la teoria nello spazio euclideo.

1.7.1 Rotazioni nel piano complesso

Analizziamo la rotazione nel piano complesso

$$x^0 \rightarrow x'^0 = x^0 e^{-i\epsilon} \quad (1.85)$$

1 Richiami di Cromodinamica Quantistica

e vediamo come agisce la funzione $\delta(x'^0 - y'^0)$ su una funzione test:

$$\int_{-\infty e^{-i\epsilon}}^{+\infty e^{-i\epsilon}} dx'^0 \delta(x'^0 - y'^0) f(x'^0) = f(y'^0). \quad (1.86)$$

Riscrivendo questa espressione in termini delle variabili x^0 e y^0 si ha invece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 e^{-i\epsilon} \delta(x'^0 - y'^0) f(x^0 e^{-i\epsilon}) = f(y^0 e^{-i\epsilon}). \quad (1.87)$$

Abbiamo allora che

$$e^{-i\epsilon} \delta(x'^0 - y'^0) = \delta(x^0 - y^0); \quad (1.88)$$

Passando in trasformata di Fourier otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \delta(x'^0 - y'^0) &= e^{i\epsilon} \delta(x^0 - y^0) = e^{i\epsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} e^{-ik^0(x^0 - y^0)} \\ &= \int_{-\infty e^{i\epsilon}}^{+\infty e^{i\epsilon}} \frac{dk'^0}{2\pi} e^{-ik'^0(x'^0 - y'^0)}, \end{aligned} \quad (1.89)$$

avendo definito

$$k'^0 = e^{i\epsilon} k^0. \quad (1.90)$$

Da (1.85) e (1.90) si evince che ad una rotazione oraria nello spazio delle coordinate, corrisponde una rotazione antioraria nello spazio degli impulsi.

Prendiamo adesso $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ ed eseguiamo la cosiddetta rotazione di Wick:

$$\begin{aligned} x &= (x^0, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{x} = (-ix_{E4}, \mathbf{x}_E) \\ k &= (k^0, \mathbf{k}) \rightarrow \tilde{k} = (ik_{E4}, -\mathbf{k}_E). \end{aligned} \quad (1.91)$$

La coordinata x_{E4} viene in genere chiamata *tempo euclideo*.

Dalle posizioni (1.91) segue che

$$\begin{aligned} (\tilde{x})^2 &= (\tilde{x}^0)^2 - (\tilde{\mathbf{x}})^2 = -x_{E4}^2 - \mathbf{x}_E^2 = -x_E^2, \\ (\tilde{k})^2 &= (\tilde{k}^0)^2 - (\tilde{\mathbf{k}})^2 = -k_{E4}^2 - \mathbf{k}_E^2 = -k_E^2, \\ \tilde{k}\tilde{x} &= k_E \cdot x_E. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Seguendo questo schema, l'oggetto minkowskiano ∂_μ è legato alla sua controparte euclidea mediante le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \partial_0 &= i\partial_{E4}; \\ \partial_i &= \partial_{Ei}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.93)$$

1.7.2 Versione euclidea di una teoria di campo scalare

Vediamo adesso cosa succede se eseguiamo una rotazione di Wick per una teoria di campo scalare

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(x) - V(\varphi(x)), \quad (1.94)$$

dove abbiamo usato il pedice M per ricordare che siamo nello spazio di Minkowski.

Le funzioni di Green euclidee a n punti possono essere ottenute mediante il prolungamento analitico euclideo del seguente rapporto di integrali funzionali:

$$G_n(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(\tilde{x}_1) \cdots \varphi(\tilde{x}_n) \exp \left\{ i \int d^4 \tilde{x} \mathcal{L}_M(\tilde{x}) \right\}}{\int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ i \int d^4 \tilde{x} \mathcal{L}_M(\tilde{x}) \right\}}. \quad (1.95)$$

Ponendo $\varphi(\tilde{x}) \equiv \varphi_E(x_E)$ otteniamo dunque

$$\begin{aligned} iS_M &= i \int d^4 \tilde{x} \mathcal{L}_M(\tilde{x}) \\ &= i \int d^4 \tilde{x} \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(\tilde{x}) \partial^\mu \varphi(\tilde{x}) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(\tilde{x}) - V(\varphi(\tilde{x})) \right] \\ &= i \int d^4 \tilde{x} \left[\frac{1}{2} (\partial_0 \varphi(\tilde{x}))^2 - \frac{1}{2} (\partial_i \varphi(\tilde{x}))^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2(\tilde{x}) - V(\varphi(\tilde{x})) \right] \\ &= - \int d^4 x_E \left[\frac{1}{2} \partial_{E\mu} \varphi_E(x_E) \partial_{E\mu} \varphi_E(x_E) + \frac{1}{2} m^2 \varphi_E^2(x_E) + V(\varphi_E(x_E)) \right] \\ &\equiv -S_E, \end{aligned} \quad (1.96)$$

dove abbiamo definito l'azione euclidea S_E come

$$S_E = \int d^4 x_E \left[\frac{1}{2} \partial_{E\mu} \varphi_E(x_E) \partial_{E\mu} \varphi_E(x_E) + \frac{1}{2} m^2 \varphi_E^2(x_E) + V(\varphi_E(x_E)) \right]. \quad (1.97)$$

Il potenziale $V(\varphi_E(x_E))$ deve essere inferiormente limitato, altrimenti il vuoto della teoria non sarebbe stabile. Senza perdere di generalità, possiamo traslare il potenziale di una costante arbitraria in modo tale che $V(\varphi_E(x_E)) \geq 0$. Allora vediamo che l'azione euclidea è definita positiva e il fattore

$$e^{iS_M} = e^{-S_E} \quad (1.98)$$

assicura la convergenza dell'integrale per grandi fluttuazioni, poiché cammini con un'azione molto grande sono esponenzialmente soppressi. In questo modo il path integral sulle configurazioni di campo euclidee $\varphi(x_{E4}, \mathbf{x}_E)$ risulta ben definito e

possiamo calcolare le funzioni di Green euclidee a n punti nel modo seguente ¹¹:

$$S_n(x_{E1}, \dots, x_{En}) = \frac{\int \mathcal{D}\varphi_E \varphi_E(x_{E1}) \cdots \varphi_E(x_{En}) e^{-S_E}}{\int \mathcal{D}\varphi_E e^{-S_E}}, \quad (1.99)$$

dove x_{E1}, \dots, x_{En} sono punti di uno spazio euclideo quadridimensionale.

A titolo di esempio analizziamo il caso in cui $V(\varphi(x)) = 0$. In questo caso la funzione di Green a 2 punti è data da

$$G_2(x, y) = \langle \Omega | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(y) \} | \Omega \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}. \quad (1.100)$$

Applicando la rotazione di Wick (1.91) otteniamo la funzione di Green euclidea a due punti

$$S_2(x_E, y_E) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m^2} e^{-ik_E(x_E - y_E)}. \quad (1.101)$$

1.7.3 Versione euclidea della QCD

Cerchiamo adesso di scrivere la versione euclidea della lagrangiana della QCD (1.13).

Dato che il campo di gauge minkowskiano A_μ è un oggetto covariante come ∂_μ , si ha quindi:

$$\begin{aligned} A_0 &= iA_{E4}; \\ A_i &= A_{Ei}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (1.102)$$

Analizziamo adesso cosa succede alle componenti del tensore di campo:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 + ig[A_0, A_i] = i(\partial_{E4} A_{Ei} - \partial_{Ei} A_{E4} + ig[A_{E4}, A_{Ei}]) \equiv iF_{E4i}; \\ F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i + ig[A_i, A_j] = \partial_{Ei} A_{Ej} - \partial_{Ej} A_{Ei} + ig[A_{Ei}, A_{Ej}] \equiv F_{Eij}; \\ \Rightarrow F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= -2(F_{0i})^2 + (F_{ij})^2 = 2(F_{E4i})^2 + (F_{Eij})^2 \equiv F_{E\mu\nu} F_{E\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Per quanto riguarda il contributo fermionico di un singolo quark si ha invece:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi &= \bar{\psi}_E(i\gamma^0 iD_{E4} + i\gamma^i D_{Ei} - m)\psi_E \\ &= \bar{\psi}_E(-\gamma^0 D_{E4} + i\gamma^i D_{Ei} - m)\psi_E. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Risulta a questo punto utile introdurre le matrici γ euclidee definite come:

$$\begin{aligned} \gamma_{E4} &\equiv \gamma^0, \quad \gamma_{Ei} \equiv -i\gamma^i; \\ \{\gamma_{E\mu}, \gamma_{E\nu}\} &= 2\delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

¹¹Indicheremo le funzioni di Green euclidee con la lettera S in onore del fisico Julian Schwinger che per primo le ha introdotte.

In questo modo il contributo fermionico diventa:

$$\bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \equiv -\bar{\psi}_E(\gamma_{E\mu}D_{E\mu} + m)\psi_E. \quad (1.106)$$

Siamo finalmente in grado di scrivere l'azione della QCD usando la formulazione euclidea:

$$\begin{aligned} iS_{QCD} &= i \int d^4x \left(-\frac{1}{2}Tr[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^f(i\gamma^\mu D_\mu - m^f)\psi^f \right) \\ &= - \int d^4x_E \left(\frac{1}{2}Tr[F_{E\mu\nu}F_{E\mu\nu}] + \sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}_E^f(\gamma_{E\mu}D_{E\mu} + m^f)\psi_E^f \right) \\ &= -S_{EQCD}. \end{aligned} \quad (1.107)$$

D'ora in poi, quando sarà ovvio che stiamo utilizzando il formalismo euclideo, ometteremo l'utilizzo del pedice E che ci è finora servito per distinguere gli oggetti euclidei da quelli minkowskiani.

1.8 Nozioni utili di Meccanica Statistica

Supponiamo di avere un sistema quantistico descritto dall'hamiltoniano \mathcal{H} e sia $|n\rangle$ un suo insieme completo di autostati:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}|n\rangle &= E_n|n\rangle, \\ \sum_n |n\rangle\langle n| &= \mathbb{1}. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Assumeremo per semplicità che lo spettro sia discreto; se lo spettro è continuo è sufficiente sostituire il simbolo di sommatoria con quello di integrale.

Nel caso di *ensemble canonico* è noto che, quando il sistema è all'equilibrio con un termostato a temperatura T , il sistema fluttua da un autostato all'altro dell'energia, in modo tale che la probabilità di occupazione di un particolare autostato sia data dalla distribuzione di Gibbs:

$$P_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z}; \quad Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = Tr[e^{-\beta\mathcal{H}}]. \quad (1.109)$$

In (1.109) $\beta = \frac{1}{k_B T}$, k_B è la costante di Boltzmann e Z è la funzione di partizione. Facendo uso di (1.109) è allora possibile scrivere il valore medio termodinamico

di una qualsiasi osservabile associata all'operatore O nel modo seguente:

$$\langle O \rangle = \sum_n P_n O_n = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta E_n} O_n = \frac{\text{Tr} [O e^{-\beta \mathcal{H}}]}{\text{Tr} [e^{-\beta \mathcal{H}}]}; \quad O_n \equiv \langle n|O|n \rangle. \quad (1.110)$$

Dal momento che per cambi di base fra sistemi ortonormali la traccia è un invariante, a volte può risultare conveniente scrivere (1.110) mediante un insieme diverso di autostati, come ad esempio quelli di posizione. Così, possiamo ad esempio scrivere che

$$Z = \int dq \langle q|e^{-\beta \mathcal{H}}|q \rangle. \quad (1.111)$$

Possiamo ricavare un'importante proprietà nel limite di temperatura nulla, cioè $\beta \rightarrow \infty$. Infatti nell'ipotesi che lo stato fondamentale sia non degenere, cioè $E_1 > E_0$ si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \langle O \rangle &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr} [O e^{-\beta \mathcal{H}}]}{\text{Tr} [e^{-\beta \mathcal{H}}]} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{e^{-\beta E_0} \langle 0|O|0 \rangle + e^{-\beta E_1} \langle 1|O|1 \rangle + \dots}{e^{-\beta E_0} + e^{-\beta E_1} + \dots} \\ &= \langle 0|O|0 \rangle. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Così, per $\beta \rightarrow \infty$, possiamo concludere il valore medio di O si riduce al valore medio preso sullo stato fondamentale.

1.9 Integrale funzionale e Termodinamica

Abbiamo visto che, nel limite di volume spazio-temporale infinito, l'integrale funzionale di Feynman ci permette di calcolare i valori di aspettazione sul vuoto del prodotto di un numero qualunque di campi o, in generale, di una qualunque osservabile sviluppabile in potenze dei campi.

Ad esempio, per una teoria di campo scalare, il valore di aspettazione sul vuoto di una generica osservabile O è dato da

$$\langle \Omega|O|\Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\varphi O(\varphi) e^{-S[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}}. \quad (1.113)$$

Vediamo adesso come sorge un legame naturale tra la termodinamica e l'integrale funzionale. Per comprendere questa relazione riconsideriamo l'Eq. (1.43) scritta in rappresentazione di Schrödinger:

$$\langle q_f|e^{-i\hat{\mathcal{H}}(t_f-t_i)}|q_i \rangle = \int_{q(t_i)=q_i}^{q(t_f)=q_f} \mathcal{D}q(t) e^{iS[q(t)]}. \quad (1.114)$$

1.9 Integrale funzionale e Termodinamica

Se eseguiamo una rotazione di Wick $t = -i\tau$, il fattore $e^{-i\hat{H}t}$ diventa $e^{-\hat{H}\tau}$, mentre e^{iS} diventa e^{-S_E} , come abbiamo visto nelle precedenti sezioni. Così l'Eq. (1.114) può essere riscritta come

$$\langle q_f | e^{-\hat{H}(\tau_f - \tau_i)} | q_i \rangle = \int_{q(\tau_i)=q_i}^{q(\tau_f)=q_f} \mathcal{D}q(\tau) e^{-S_E[q(\tau)]}, \quad (1.115)$$

dove

$$S_E = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 + V(q) \right) \quad (1.116)$$

rappresenta l'azione euclidea per una particella di massa m sottoposta a un potenziale V .

Confrontando l'espressione precedente con la funzione integranda in (1.111) ci accorgiamo che le due espressioni sono identiche a patto di identificare $|q_i\rangle = |q_f\rangle = |q\rangle$ e sostituire $\beta = \tau_f - \tau_i$. Se inoltre integriamo su tutti i possibili valori di q otteniamo la seguente uguaglianza

$$Z = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle = \int_{q(0)=q(\beta)} \mathcal{D}q(\tau) e^{-S_E[q(\tau)]}. \quad (1.117)$$

Per una teoria di campo scalare, ripetendo gli stessi passi logici si trova che

$$Z = \int_{\varphi(\mathbf{x},0)=\varphi(\mathbf{x},\beta)} \mathcal{D}\varphi(\tau) e^{-S_E[\varphi(\tau)]}, \quad (1.118)$$

dove $S_E[\varphi(\tau)]$ è l'azione introdotta in (1.97). Questo significa che, se siamo interessati alla media termodinamica di un'osservabile O in una teoria di campo a temperatura finita, si ha

$$\langle O \rangle_\beta = \frac{\text{Tr} [O e^{-\beta \mathcal{H}}]}{\text{Tr} [e^{-\beta \mathcal{H}}]} = \frac{\int_{\varphi(\mathbf{x},0)=\varphi(\mathbf{x},\beta)} \mathcal{D}\varphi(\tau) O[\varphi] e^{-\int d^3x \int_0^\beta d\tau \mathcal{L}_E}}{\int_{\varphi(\mathbf{x},0)=\varphi(\mathbf{x},\beta)} \mathcal{D}\varphi(\tau) e^{-\int d^3x \int_0^\beta d\tau \mathcal{L}_E}} \quad (1.119)$$

Il risultato (1.119) è l'analogo dell'espressione (1.113), ma con bordo temporale finito. Nel caso della QCD la funzione di partizione termodinamica è data da

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}U \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left(- \int d^3x \int_0^\beta d\tau \mathcal{L}_{QCD}[U, \psi, \bar{\psi}] \right), \quad (1.120)$$

dove, per quanto riguarda la direzione temporale, si usano condizioni al bordo periodiche (antiperiodiche) per campi bosonici (fermionici). Questa diversità è dovuta al fatto che i bosoni (fermioni) soddisfano le relazioni di commutazione (anticommutazione) canoniche.

1 Richiami di Cromodinamica Quantistica

Nel caso di una teoria quantistica di campo definita su un reticolo di passo a e di estensione $N^3 \times N_t$, dove con N ed N_t indichiamo rispettivamente il numero di siti reticolari nelle direzioni spaziali e temporali, valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} N_t a &= \frac{1}{k_B T} = \beta, \\ N &= \infty. \end{aligned} \tag{1.121}$$

Chiaramente, in una simulazione numerica non possiamo lavorare con estensioni spaziali infinite e quindi, per approssimare il limite termodinamico, ci si mette nelle condizioni in cui $N \gg N_t$.

2 QCD su reticolo

In questo capitolo illustreremo i metodi che vengono solitamente utilizzati per discretizzare una teoria di campo. Per brevità, tratteremo solo i punti necessari per la comprensione di questo lavoro. Uno studio sicuramente più approfondito di tali argomenti si trova, ad esempio, nei testi di Gattringer e Lang [20] e Rothe [41].

2.1 Introduzione del reticolo

Dal punto di vista formale, la funzione di Green euclidea a n punti (1.99) è identica a una media statistica di un sistema classico che vive in uno spazio quadridimensionale e in cui ogni configurazione di campo è pesata con il fattore e^{-S} . Utilizzando il linguaggio della Meccanica Statistica, un oggetto di questo tipo prende il nome di *funzione di correlazione*.

Un possibile approccio per calcolare le funzioni di correlazione consiste nel realizzare i seguenti step:

- **Step 1:** Sostituire lo spazio-tempo euclideo con un reticolo $4D$ di passo reticolare a e dimensione finita definito nel modo seguente:

$$\Lambda = \{n = (n_1, n_2, n_3, n_4) | n_1, n_2, n_3 = 0, 1, \dots, N-1; n_4 = 0, 1, \dots, N_T-1\}. \quad (2.1)$$

In (2.1) N denota il numero di siti reticolari nelle tre dimensioni spaziali, mentre N_T rappresenta il numero di siti reticolati nella direzione temporale. Utilizzando questa struttura, due punti adiacenti in una data direzione sono separati, in quella direzione, da una distanza a che definisce la costante reticolare e rappresenta la nostra unità di misura delle distanze. La posizione di un oggetto nel reticolo è identificata dal corrispondente valore n in $x = an$.

- **Step 2:** Occorre utilizzare un'azione euclidea discretizzata $S_E[\varphi]$ che, nel limite continuo $a \rightarrow 0$, riproduca l'azione euclidea continua. Bisogna tut-

2 QCD su reticolo

tavia fare in modo che la teoria su reticolo abbia le stesse simmetrie della teoria continua: in QCD su reticolo sarà quindi importante verificare che l'introduzione del reticolo preservi l'invarianza di gauge.

- **Step 3:** Estrapolare i risultati delle simulazioni nel limite del continuo (e prendere il limite di volume infinito). L'estrapolazione al continuo si esegue utilizzando le tecniche del gruppo di rinormalizzazione che verranno discusse nelle prossime sezioni.

L'introduzione del reticolo Λ fa sì che una configurazione di campo risulti specificata da una collezione finita di variabili, ovvero il valore φ_n che il campo assume nel punto n . Così la misura di integrazione diventa

$$\mathcal{D}\varphi(x) = \prod_{n \in \Lambda} d\varphi_n. \quad (2.2)$$

L'integrale funzionale viene così ridotto a un integrale multiplo, che in linea di principio può essere studiato numericamente. In realtà, la valutazione numerica di un integrale multiplo con un numero molto grande di variabili di integrazione è pressoché irrealizzabile in tempi ragionevoli; esiste tuttavia una tecnica, nota con il nome di simulazione Monte Carlo, che consiste nel generare un insieme di configurazioni di campo con una distribuzione di probabilità e^{-S} . In questo modo, l'integrale funzionale viene rimpiazzato da una media su questo insieme di configurazioni. Andremo un po' più nei dettagli di questa tecnica in §2.8.

Concludiamo la sezione osservando che nelle simulazioni al computer siamo costretti a usare reticoli di dimensione finita. D'altra parte, un sistema fisico possiede delle scale tipiche di variazione che prendono il nome di lunghezze di correlazione. Tali lunghezze, sono di solito uguali agli inversi delle masse delle particelle descritte dal sistema. Così, per evitare indesiderati effetti di cut-off solitamente si lavora nelle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} a &\ll \xi_{min}, \\ \xi_{max} &\ll Na, N_T a. \end{aligned} \quad (2.3)$$

In (2.3) ξ_{min} e ξ_{max} indicano rispettivamente le lunghezze di correlazione minime e massime associate al sistema fisico in esame.

2.2 Metodi delle differenze finite

Tra poco risulterà utile conoscere delle espressioni che ci consentono di approssimare la derivata in un punto.

Supponiamo di essere interessati alla derivata di una funzione $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $x = 0$, cioè $f'(0)$. La derivata in un punto generico x può essere trovata per traslazione. Discretizziamo l'asse delle x usando degli intervalli di lunghezza a .

$$f_n = f(x_n), \quad x_n = na, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4)$$

L'obiettivo è trovare un valore approssimato di $f'(0)$ in funzione degli f_n . A tal proposito, consideriamo uno sviluppo in serie di Taylor di $f(x)$ intorno ad $x_0 = 0$:

$$f(x) = f_0 + xf' + \frac{x^2}{2}f'' + \frac{x^3}{3!}f''' + \dots \quad (2.5)$$

dove le derivate f', f'', \dots sono valutate per $x = x_0$.

In particolare abbiamo:

$$\begin{aligned} x = \pm a &\rightarrow f_{\pm 1} = f_0 \pm af' + \frac{a^2}{2}f'' \pm \frac{a^3}{6}f''' + \mathcal{O}(a^4), \\ x = \pm 2a &\rightarrow f_{\pm 2} = f_0 \pm 2af' + 2a^2f'' \pm \frac{4a^3}{3}f''' + \mathcal{O}(a^4). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Combinando in maniera opportuna le espressioni in (2.6) si ottengono diverse espressioni che ci consentono di approssimare la derivata in un punto. Le più usate solitamente sono:

- formula a due punti in avanti

$$f' = \frac{f_1 - f_0}{a} + \mathcal{O}(a); \quad (2.7)$$

- formula a due punti all'indietro

$$f' = \frac{f_0 - f_{-1}}{a} + \mathcal{O}(a); \quad (2.8)$$

- formule simmetriche

$$f' = \frac{f_1 - f_{-1}}{2a} + \mathcal{O}(a^2); \quad f'' = \frac{f_{-1} - 2f_0 + f_1}{a^2} + \mathcal{O}(a^2). \quad (2.9)$$

2.3 Teorie di campo su reticolo

Questa sezione sarà dedicata alla formulazione di alcune teorie di campo su reticolo: cominceremo con il caso più semplice, il campo scalare, e subito dopo analizzeremo i campi fermionici e di gauge.

2.3.1 Campo scalare

Consideriamo l'azione per un campo scalare reale (1.97) e analizziamo il caso in cui $V(\varphi) = 0$. Nell'ipotesi in cui i campi vadano a zero in modo sufficientemente veloce all'infinito, possiamo integrare per parti e scrivere

$$S_E = \frac{1}{2} \int d^4x \varphi(x) (-\partial_\mu \partial_\mu + M^2) \varphi(x). \quad (2.10)$$

Usando la formula simmetrica a tre punti (2.9) per approssimare la derivata seconda, discretizzando l'integrale $\int d^4x$ con $a^4 \sum_n$ e introducendo le variabili adimensionali, $\hat{\varphi}_n = a\varphi(na)$ ed $\hat{M} = Ma$ possiamo scrivere l'azione scalare reticolare nel modo seguente

$$S_E = -\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} \hat{\varphi}_n [\hat{\varphi}_{n+\mu} + \hat{\varphi}_{n-\mu}] + \frac{1}{2} (8 + \hat{M}^2) \sum_n \hat{\varphi}_n \hat{\varphi}_n. \quad (2.11)$$

Se siamo interessati alla forma che il propagatore scalare assume nel reticolo risulta conveniente mettere l'azione (2.11) nella forma

$$S_E = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \hat{\varphi}_n M_{nm} \hat{\varphi}_m, \quad (2.12)$$

$$M_{nm} = - \sum_{\mu} [\delta_{n+\mu,m} + \delta_{n-\mu,m} - 2\delta_{nm}] + \hat{M}^2 \delta_{nm}.$$

Il propagatore su reticolo sarà dato dall'inverso della matrice M_{nm} . Per trovare la sua espressione risulta utile passare nello spazio degli impulsi, tenendo conto del fatto che, poiché n ed m sono interi, gli estremi di integrazione della trasformata sono $[-\pi, \pi]$ anziché $[-\infty, +\infty]$. Così, ponendo $\hat{k} = ka$, otteniamo

$$\delta_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\hat{k}}{2\pi} e^{i\hat{k}(n-m)},$$

$$M_{nm} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4\hat{k}}{(2\pi)^4} e^{i\hat{k}(n-m)} \tilde{M}(\hat{k}), \quad (2.13)$$

$$\tilde{M}(\hat{k}) = - \sum_{\mu} [e^{i\hat{k}_\mu} + e^{-i\hat{k}_\mu} - 2] + \hat{M}^2.$$

Ne segue che il propagatore scalare sarà dato da

$$\langle \Omega | \hat{\varphi}_n \hat{\varphi}_m | \Omega \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{4 \sum_{\mu} \sin^2 \left(\frac{\hat{k}_{\mu}}{2} \right) + \hat{M}^2} e^{i\hat{k}(n-m)}. \quad (2.14)$$

Ripristinando le usuali unità fisiche e ponendo $n = \frac{x}{a}$, $m = \frac{y}{a}$, il propagatore (2.14) diventa

$$\langle \Omega | \varphi(x) \varphi(y) | \Omega \rangle = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{4 \sum_{\mu} \frac{\sin^2(k_{\mu} a/2)}{a^2} + M^2} e^{ik(x-y)}. \quad (2.15)$$

Poiché l'integrale in (2.15) è ristretto all'intervallo $[-\pi/a, \pi/a]$, l'integrale riceverà contributo principalmente dagli impulsi che sono piccoli rispetto all'inverso della costante reticolare a . Così, quando prendiamo il limite $a \rightarrow 0$ otteniamo il corretto propagatore continuo euclideo (1.101):

$$\langle \Omega | \varphi(x) \varphi(y) | \Omega \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sum_{\mu} k_{\mu}^2 + M^2} e^{ik(x-y)}. \quad (2.16)$$

2.3.2 Fermion doubling

Guardando l'azione (1.107), ci accorgiamo che l'azione euclidea libera per un campo fermionico è data da

$$S_E(\psi, \bar{\psi}) = \int d^4 x \bar{\psi}(x) (\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + M) \psi(x). \quad (2.17)$$

Se procediamo come nel caso bosonico e utilizziamo la formula simmetrica (2.9) per approssimare le derivate prime dei campi, otteniamo che l'azione fermionica discretizzata assume la forma

$$S_E = \sum_n \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{\mu} \hat{\psi}_n \gamma_{\mu} \hat{\psi}_{n+\mu} - \hat{\psi}_n \gamma_{\mu} \hat{\psi}_{n-\mu} \right) + \hat{M} \hat{\psi}_n \hat{\psi}_n \right]. \quad (2.18)$$

In questo caso, dal momento che i campi fermionici in unità naturali hanno dimensione pari a $[\text{energia}]^{3/2}$, abbiamo posto $\hat{\psi}_n = a^{3/2} \psi(na)$. Per quanto riguarda il propagatore fermionico su reticolo si ottiene invece la seguente espressione

$$\langle \Omega | \hat{\psi}_n \hat{\psi}_m | \Omega \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sum_{\mu} i \gamma_{\mu} \sin(\hat{k}_{\mu}) + \hat{M}} e^{i\hat{k}(n-m)}. \quad (2.19)$$

2 QCD su reticolo

Ripristinando le usuali unità fisiche e utilizzando le stesse convenzioni della sottosezione precedente si ha che

$$\langle \Omega | \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sum_{\mu} i \gamma_{\mu} \frac{\sin(k_{\mu} a)}{a} + M} e^{ik(x-y)}. \quad (2.20)$$

Dato che la funzione integranda va a zero solo se $\sin(k_{\mu} a) \neq 0$, gli unici contributi non nulli al propagatore sono dati da $k_{\mu} = 0$ o $k_{\mu} = \frac{\pi}{a}$; all'interno della prima zona di Brillouin questa condizione può manifestarsi in 16 modi differenti: 1 combinazione del tipo $k = (0, 0, 0, 0)$, 4 del tipo $k = (\pi/a, 0, 0, 0)$, 6 del tipo $k = (\pi/a, \pi/a, 0, 0)$, 4 del tipo $k = (0, \pi/a, \pi/a, \pi/a)$ ed 1 del tipo $k = (\pi/a, \pi/a, \pi/a, \pi/a)$. Dal momento che non esistono motivi a priori per poter scartare alcune di queste configurazioni, quando si esegue il limite per $a \rightarrow 0$ si trova che

$$\langle \Omega | \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{\sum_{\mu} i \gamma_{\mu} k_{\mu} + M} + 15 \text{ contributi extra.} \quad (2.21)$$

Stavolta, a differenza di quanto trovato per il campo scalare, nel limite continuo la funzione di correlazione a due punti è data dalla somma del noto propagatore fermionico della teoria continua e di altri 15 contributi extra che prendono il nome di *doppioni*: tale questione è nota in letteratura come *fermion doubling*¹.

Per risolvere il problema del fermion doubling, i metodi ad oggi più usati sono:

1. il metodo dei fermioni di Wilson;
2. il metodo dei fermioni *staggered*.

¹È possibile dimostrare che se avessimo approssimato la derivata prima con le formule a due punti (2.7) o (2.8) non avremmo avuto fermion doubling. Tuttavia in questo caso l'azione reticolare avrebbe avuto un altro problema: non sarebbe stata hermitiana. Per capire perché consideriamo l'azione di Dirac discretizzata con la formula a due punti in avanti (per semplicità abbiamo posto $\hat{M} = 0$)

$$S_E = \sum_n \left\{ \left[\sum_{\mu} \hat{\psi}_n \gamma_{\mu} (\hat{\psi}_{n+\mu} - \hat{\psi}_n) \right] \right\} \quad (2.22)$$

e calcoliamone l'hermitiana coniugata. Si ha:

$$\begin{aligned} S_E^{\dagger} &= \sum_n \left\{ \left[\sum_{\mu} (\bar{\psi}_{n+\mu} - \bar{\psi}_n) \gamma_{\mu} \hat{\psi}_n \right] \right\} = \sum_n \left\{ \left[\sum_{\mu} (\bar{\psi}_n \gamma_{\mu} \hat{\psi}_{n-\mu} - \bar{\psi}_n \gamma_{\mu} \hat{\psi}_n) \right] \right\} \\ &= - \sum_n \left\{ \left[\sum_{\mu} \hat{\psi}_n \gamma_{\mu} (\hat{\psi}_n - \hat{\psi}_{n-\mu}) \right] \right\} \neq S_E \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.3.3 Fermioni di Wilson

Consideriamo dapprima il metodo di Wilson: l'idea è di aggiungere all'azione (2.18) un contributo che nel limite continuo vada a zero, ma al contempo dia luogo ad un unico propagatore continuo. L'azione fermionica di Wilson è così data da

$$S_W = \sum_n \left[\frac{1}{2} \left(\sum_\mu \hat{\psi}_n \gamma_\mu \hat{\psi}_{n+\mu} - \hat{\psi}_n \gamma_\mu \hat{\psi}_{n-\mu} \right) + \hat{M} \hat{\psi}_n \hat{\psi}_n \right] - \frac{r}{2} \sum_n \left[\hat{\psi}_n \left(\sum_\mu \hat{\psi}_{n+\mu} + \hat{\psi}_{n-\mu} - 2\hat{\psi}_n \right) \right], \quad (2.24)$$

dove r è una costante positiva. Nel limite $a \rightarrow 0$ l'ultimo termine è approssimativamente pari a

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} \sum_n \left[\hat{\psi}_n \left(\sum_\mu \hat{\psi}_{n+\mu} + \hat{\psi}_{n-\mu} - 2\hat{\psi}_n \right) \right] &\approx \frac{r}{2} a^5 \sum_n \bar{\psi}(na) \partial_\mu \partial_\mu \psi(na) \\ &\approx a \frac{r}{2} \int d^4x \bar{\psi}(x) \partial_\mu \partial_\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Quindi nel limite continuo il termine extra di Wilson va correttamente a zero. Il propagatore di tale azione risulta invece

$$\langle \Omega | \hat{\psi}_n \hat{\psi}_m | \Omega \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 \hat{k}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\hat{k}(n-m)}}{\sum_\mu i\gamma_\mu \sin(\hat{k}_\mu) + \hat{M} + 2r \sum_\mu \sin^2\left(\frac{\hat{k}_\mu}{2}\right)}. \quad (2.26)$$

In unità fisiche l'espressione del propagatore fermionico su reticolo risulta invece

$$\langle \Omega | \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\sum_\mu i\gamma_\mu \frac{\sin(k_\mu a)}{a} + \frac{2r}{a} \sum_\mu \sin^2(k_\mu a/2) + M} e^{ik(x-y)}. \quad (2.27)$$

Con questo stratagemma, il campo fermionico possiede una massa efficace $M(k)$ data da

$$M(k) = \frac{2r}{a} \sum_\mu \sin^2(k_\mu a/2) + M. \quad (2.28)$$

Per qualunque valore di k_μ fissato all'interno della prima zona di Brillouin, si ha che $\lim_{a \rightarrow 0} M(k) = M$; d'altra parte, ai bordi della prima zona di Brillouin $M(k)$ diverge e conseguentemente azzerà la funzione integranda dell'Eq. (2.27). Nel limite continuo ritroviamo quindi la giusta espressione del propagatore fermionico

$$\langle \Omega | \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{\sum_{\mu} i \gamma_{\mu} k_{\mu} + M}. \quad (2.29)$$

L'azione di Wilson (2.24) ha il vantaggio di essere molto semplice da capire dal punto di vista concettuale e viene spesso usata nelle simulazioni numeriche; presenta tuttavia il problema che il termine extra di Wilson non è invariante chirale². Proprio a causa di questa rottura esplicita di simmetria, è molto difficile studiare fenomeni legati alla rottura spontanea della simmetria chirale mediante l'azione di Wilson. Per questo motivo nelle simulazioni numeriche viene spesso usato il metodo dei fermioni staggered, di cui parleremo nella prossima sottosezione.

2.3.4 Fermioni staggered

Abbiamo visto che, quando si esegue il limite continuo del propagatore fermionico, i principali problemi provengono dai bordi della prima zona di Brillouin. L'idea della formulazione staggered è quella di aumentare il passo reticolare effettivo e conseguentemente diminuire l'estensione della prima zona di Brillouin, in modo tale da aggirare il problema del fermion doubling.

Per far questo si introduce dapprima un cambio locale di variabili tramite il quale è possibile ridurre da 4 a 1 il numero di gradi di libertà del campo fermionico sito per sito. In questo modo, dal momento che ogni ipercubo contiene 2^4 siti reticolari, ogni ipercubo conterrà 16 campi a una componente.

Successivamente si cerca una particolare combinazione lineare di queste 16 componenti che sia in grado di riprodurre 4 campi fermionici di Dirac: a questo punto però, tali campi fermionici vivranno su un reticolo dove la costante reticolare è pari a $2a$. Così facendo riusciamo a ottenere una teoria in cui il propagatore presenta il corretto limite continuo, ma con il vincolo di dover disporre 4 specie fermioniche su reticolo.

Vediamo adesso come si formula quanto finora detto in modo più quantitativo; il punto di partenza consiste nel considerare l'azione fermionica naïve (2.18) e definire dei nuovi campi $\hat{\chi}$ e $\hat{\bar{\chi}}$ tali che

$$\hat{\psi}_n = \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3} \gamma_4^{n_4} \hat{\chi}_n, \quad \hat{\bar{\psi}}_n = \hat{\bar{\chi}}_n \gamma_4^{n_4} \gamma_3^{n_3} \gamma_2^{n_2} \gamma_1^{n_1}. \quad (2.30)$$

²Nel limite di massa nulla per L quark leggeri si dimostra che Lagrangiana della QCD è invariante rispetto al gruppo chirale $SU(L)_{left} \otimes SU(L)_{right}$. La presenza del termine extra $\bar{\psi}\psi$ dell'azione di Wilson distrugge esplicitamente la simmetria chirale, perché non è possibile ruotare in maniera diversa le componenti left e right degli spinori.

Le matrici di trasformazione sono semplicemente prodotti di matrici γ_μ elevate a una particolare potenza, che è data dalla corrispondente componente n_μ dell'indice di sito $n = (n_1, n_2, n_3, n_4)$. Così, le matrici di trasformazione mescolano indici di Dirac ed indici spazio-temporali.

Poiché le matrici γ obbediscono alla relazione $\gamma_\mu^2 = \mathbb{1}$, è ovvio che il termine di massa non cambia struttura, ovvero si ha $\hat{\psi}_n \hat{\psi}_n = \hat{\chi}_n \hat{\chi}_n$. Per quanto riguarda il termine cinetico dell'azione (2.18), il campo $\hat{\psi}$ risulta traslato di una distanza pari al passo reticolare rispetto al campo $\hat{\psi}$. Quindi le trasformazioni (2.30) per i campi $\hat{\psi}_n$ e $\bar{\psi}_{n\pm\mu}$ differiranno di una potenza di γ_μ . Questa matrice γ_μ extra si elide con quella esplicitamente contenuta nel termine cinetico di (2.18). Se prendiamo in considerazione il necessario riordinamento delle matrici γ e le loro regole di anticommutazione, si trova che il termine derivativo nella direzione 3, ad esempio, è dato da

$$\hat{\psi}_n \gamma_3 \hat{\psi}_{n\pm\hat{3}} = (-1)^{n_1+n_2} \hat{\chi}_n \mathbb{1} \hat{\chi}_{n\pm\hat{3}}. \quad (2.31)$$

In questo modo l'azione (2.18) può essere scritta nella seguente forma:

$$S_E = \sum_n \hat{\chi}_n \mathbb{1} \left(\sum_\mu \eta_\mu(n) \frac{\hat{\chi}_{n+\mu} - \hat{\chi}_{n-\mu}}{2} + \hat{M} \hat{\chi}_n \right), \quad (2.32)$$

dove abbiamo introdotto le cosiddette *fasi staggered*

$$\eta_1(n) = 1, \quad \eta_2(n) = (-1)^{n_1}, \quad \eta_3(n) = (-1)^{n_1+n_2}, \quad \eta_4(n) = (-1)^{n_1+n_2+n_3}, \quad (2.33)$$

che giocano il ruolo delle matrici γ_μ . In questo modo l'azione (2.32) risulta diagonale nello spazio di Dirac ed assume la stessa forma per tutte e quattro le componenti di Dirac.

Nonostante l'azione (2.32) sia una semplice riscrittura dell'azione (2.18), da un punto di vista formale possiamo ipotizzare che non sia più necessario fare assumere 4 valori all'indice spinoriale dei campi $\hat{\chi}_n$ e $\hat{\chi}_n$ e considerare il caso in cui tali campi siano funzioni complesse ad una sola componente:

$$S_{st.} = \sum_n \hat{\chi}_n \left(\sum_\mu \eta_\mu(n) \frac{\hat{\chi}_{n+\mu} - \hat{\chi}_{n-\mu}}{2} + \hat{M} \hat{\chi}_n \right), \quad (2.34)$$

Con un po' di algebra siamo allora riusciti a ridurre di un fattore quattro il numero di gradi di libertà di ogni sito e tenere conto dell'originale struttura spinoriale della teoria per mezzo delle fasi staggered η_μ .

2 QCD su reticolo

Resta da vedere che l'azione (2.34) sia effettivamente in grado di descrivere un sistema di quattro fermioni degeneri: a tal proposito risulta utile fare le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned}
 n_\mu &= 0, 1, \dots, N_\mu - 1 \equiv \text{indice dei siti del reticolo;} \\
 h_\mu &= 0, 1, \dots, N_\mu/2 - 1 \equiv \text{indice di ipercubi con origini separate da} \\
 &\quad \text{una distanza pari a un multiplo di } 2a; \\
 s_\mu &= 0, 1 \equiv \text{indice che denota i vertici dell'ipercubo.}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Così facendo, la coordinata di un sito reticolare n può essere scritta come

$$n = 2h + s. \tag{2.36}$$

Mediante queste posizioni è possibile dimostrare [41] che i 4 sapori f dei quark su un ipercubo sono dati da

$$\hat{\psi}_n^{\alpha,f} = \mathcal{N}_0 \sum_s (\gamma_1^{s_1} \gamma_2^{s_2} \gamma_3^{s_3} \gamma_4^{s_4})^{\alpha f} \hat{\chi}_s(2h + s), \tag{2.37}$$

dove \mathcal{N}_0 rappresenta un'opportuna costante di normalizzazione.

Nonostante questa formulazione sia più complicata dal punto di vista teorico rispetto alla formulazione di Wilson, mediante il suo utilizzo si ha l'ulteriore vantaggio che, per $\hat{M} \rightarrow 0$ la simmetria $U(1)$

$$\psi_n^{\alpha,f} \rightarrow e^{i\alpha \gamma_5^{\alpha\beta} \otimes \gamma_5^{ff'}} \psi_n^{\beta,f'} \tag{2.38}$$

rimane intatta: questo gruppo di simmetria rappresenta un residuo della simmetria chirale della teoria originale e rende più adatti i fermioni staggered allo studio di fenomeni legati alla rottura spontanea della simmetria chirale.

2.3.5 Il trucco della radice quarta

Nelle simulazioni numeriche si preferisce a volte usare fermioni staggered. I motivi di questa scelta sono essenzialmente due:

- Permettono di studiare meglio fenomeni legati alla rottura spontanea della simmetria chirale.
- Non possedendo una struttura alla Dirac, hanno un numero minore di gradi di libertà e quindi, dal punto di vista delle simulazioni numeriche, risultano più vantaggiosi.

Tuttavia, la teoria che emerge usando i fermioni staggered nasconde un problema: l'azione staggered descrive infatti quattro fermioni degeneri e non è quindi adeguata se vogliamo descrivere quark con differenti masse.

Nelle simulazioni usate in questa tesi, abbiamo voluto aggiungere alla teoria di pura gauge $SU(3)$, la presenza di due quark leggeri degeneri (u, d) ed un quark più pesante (s). Per raggiungere tale obiettivo si usa in genere il trucco della radice quarta [20].

Questo trucco si basa sul fatto che, nel limite continuo, l'azione fermionica trae contributo da quattro fermioni degeneri. Questo ci porta a pensare che la funzione di partizione di un singolo fermione possa essere definita, grazie alla relazione (1.68), come

$$Z_1^{(st.)} = (Z^{(st.)})^{\frac{1}{4}} = (\det[M])^{\frac{1}{4}}, \quad (2.39)$$

dove M è l'operatore di Dirac staggered e $Z^{(st.)}$ è la funzione di partizione staggered libera per quattro fermioni degeneri.

Così, se vogliamo descrivere la QCD con $N_f = 2 + 1$ sapori, la funzione di partizione fermionica da utilizzare è

$$Z_{2+1} = (\det[M(m_{ud})])^{\frac{1}{2}} (\det[M(m_s)])^{\frac{1}{4}}, \quad (2.40)$$

in cui m_{ud} rappresenta la media delle masse dei quark u e d , mentre m_s è la massa del quark s .

La completa correttezza di questa procedura è ancora da verificare ed è oggetto di dibattito. Una trattazione approfondita dei problemi legati al trucco della radice quarta si trova nell'articolo [18].

2.3.6 Teoria di gauge $SU(3)$

Abbiamo visto che nella formulazione continua delle teorie di campo, il tentativo di promuovere una simmetria dell'azione da globale a locale comporta l'introduzione di opportuni campi di gauge; una cosa analoga avviene anche nella formulazione reticolare, ma con delle piccole differenze.

Ignoriamo per un momento il problema del fermion doubling e consideriamo l'azione fermionica naïve (2.18). Le trasformazioni locali di gauge sul reticolo sono implementate dalla scelta di un elemento $\Omega_n \in SU(3)$ per ogni sito reticolare n , che trasforma il campo fermionico secondo la legge

$$\hat{\psi}_n \rightarrow \hat{\psi}'_n = \Omega_n \hat{\psi}_n, \quad \hat{\bar{\psi}}_n \rightarrow \hat{\bar{\psi}}'_n = \hat{\bar{\psi}}_n \Omega_n^\dagger. \quad (2.41)$$

2 QCD su reticolo

Come nel caso continuo, troviamo che sul reticolo il termine di massa di (2.18) è invariante rispetto alle trasformazioni di gauge (2.41). D'altra parte, se consideriamo il termine derivativo, otteniamo ad esempio

$$\hat{\psi}_n \hat{\psi}_{n+\mu} \rightarrow \hat{\psi}'_n \hat{\psi}'_{n+\mu} = \hat{\psi}_n \Omega_n^\dagger \Omega_{n+\mu} \hat{\psi}_{n+\mu}. \quad (2.42)$$

Il termine (2.42) non è invariante di gauge. Se, tuttavia, introduciamo un campo $U_{n,\mu}$ con un indice direzionale μ , allora il termine

$$\hat{\psi}'_n U'_{n,\mu} \hat{\psi}'_{n+\mu} = \hat{\psi}_n \Omega_n^\dagger U'_{n,\mu} \Omega_{n+\mu} \hat{\psi}_{n+\mu} \quad (2.43)$$

è invariante di gauge se definiamo la trasformazione di gauge del nuovo campo $U_{n,\mu}$ nel modo seguente

$$U_{n,\mu} \rightarrow U'_{n,\mu} = \Omega_n U_{n,\mu} \Omega_{n+\mu}^\dagger. \quad (2.44)$$

Così, per rendere l'azione fermionica invariante di gauge, risulta utile introdurre i campi di gauge $U_{n,\mu}$, che sono elementi del gruppo di gauge $SU(3)$ e che trasformano secondo la legge (2.44). Queste variabili matriciali sono orientate e vivono sui link che connettono i siti n ed $n + \mu$: per tale motivo, questi oggetti vengono spesso chiamati *variabili di link*.

Dal momento che le variabili di link sono orientate, possiamo anche definire variabili di link che puntino nella direzione negativa. Osserviamo che queste variabili di link non sono indipendenti dalle precedenti, ma vengono spesso introdotte per convenienza di notazione. In particolare, $U_{n,-\mu}$ punta dal sito n al sito $n - \mu$ ed è collegata alla variabile di link orientata positivamente $U_{n-\mu,\mu}$ dalla definizione

$$U_{n,-\mu} \equiv U_{n-\mu,\mu}^\dagger. \quad (2.45)$$

Dalle definizioni (2.44) e (2.45) è possibile ottenere la legge di trasformazione delle variabili di link nella direzione negativa

$$U_{n,-\mu} \rightarrow U'_{n,-\mu} = \Omega_n U_{n,-\mu} \Omega_{n-\mu}^\dagger. \quad (2.46)$$

Osserviamo che nella formulazione reticolare i campi gluonici vengono introdotti come elementi del gruppo di gauge, mentre nella formulazione continua essi sono elementi dell'algebra associata al gruppo di gauge.

Una volta introdotte le variabili di link e le loro leggi di trasformazione rispetto al gruppo di gauge, possiamo generalizzare l'azione fermionica libera di Wilson

alla cosiddetta azione fermionica di Wilson per fermioni in un campo esterno di gauge U :

$$S_W = \sum_n \left[\frac{1}{2} \left(\sum_\mu \hat{\psi}_n \gamma_\mu U_{n,\mu} \hat{\psi}_{n+\mu} - \hat{\psi}_n \gamma_\mu U_{n,-\mu} \hat{\psi}_{n-\mu} \right) + \hat{M} \hat{\psi}_n \hat{\psi}_n \right] - \frac{r}{2} \sum_n \left[\hat{\psi}_n \left(\sum_\mu U_{n,\mu} \hat{\psi}_{n+\mu} + U_{n,-\mu} \hat{\psi}_{n-\mu} - 2\hat{\psi}_n \right) \right]. \quad (2.47)$$

In modo analogo possiamo generalizzare l'azione fermionica staggered libera tramite la seguente espressione

$$S_{st.} = \sum_n \hat{\chi}_n \left(\sum_\mu \eta_\mu(n) \frac{U_{n,\mu} \hat{\chi}_{n+\mu} - U_{n,-\mu} \hat{\chi}_{n-\mu}}{2} + \hat{M} \hat{\chi}_n \right). \quad (2.48)$$

2.3.7 Azione di Wilson per campi di gauge

Esiste un'importante connessione tra le variabili di link che appartengono al gruppo di gauge e i campi di gauge a valori nell'algebra della formulazione continua. Per trovare come queste due quantità risultano collegate, è necessario introdurre il concetto di trasporto parallelo: esso rappresenta l'integrale esponenziale P-ordinato del campo di gauge A_μ lungo una qualche curva C_{xy} che connette due punti x ed y ed ha le stesse proprietà di trasformazione di $U_{n,\mu}$. Il trasporto parallelo è definito come

$$G(x, y) = P \exp \left(i \int_{C_{xy}} A \cdot ds \right) \quad (2.49)$$

e trasforma secondo la relazione

$$G(x, y) \rightarrow \Omega(x) G(x, y) \Omega(y)^\dagger, \quad \Omega(x) \in SU(3). \quad (2.50)$$

Basandoci su tale proprietà di trasformazione, la variabile di link $U_{n,\mu}$ può essere interpretata come la versione reticolare del trasporto parallelo che connette i siti n ed $n + \mu$. Se il nostro obiettivo è stabilire una relazione valida fino al primo ordine in a , cioè $U_{n,\mu} = G(n, n + \mu) + \mathcal{O}(a)$, è sufficiente introdurre un campo $A_\mu(n)$ a valori nell'algebra definito sui siti reticolari, e scrivere

$$U_{n,\mu} = e^{igaA_\mu(n)}. \quad (2.51)$$

2 QCD su reticolo

Questo significa che abbiamo approssimato, all'ordine $\mathcal{O}(a)$, l'integrale lungo il percorso che connette i siti n ed $n+\mu$, con la lunghezza a del percorso moltiplicata per il valore del campo nel punto iniziale $A_\mu(n)$.

Dobbiamo adesso cercare di costruire un'azione che, nel limite $a \rightarrow 0$, si riconduca all'azione di Yang-Mills (euclidea)

$$S_{YM} = \frac{1}{2} \text{Tr} [F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \quad (2.52)$$

contenuta in (1.13). La scelta non è univoca e in questo capitolo considereremo solo l'azione proposta da Wilson.

Il primo criterio di cui dobbiamo assicurarci è l'invarianza di gauge dell'azione proposta. A tal proposito, è facile dimostrare che oggetti che consistono di tracce calcolate su percorsi chiusi di variabili di link sono gauge invarianti, e quindi rappresentano degli ottimi candidati per la costruzione delle azioni di pura gauge. Vedremo a breve che percorsi chiusi di variabili di link sono pure in stretto collegamento con alcune osservabili fisiche.

L'azione gluonica con il corretto limite naïve contiene il più semplice loop chiuso che può essere considerato sul reticolo, ovvero la cosiddetta plaquette, che consiste nel prodotto P-ordinato di variabili di link che formano un loop chiuso di lato a in un generico piano $\mu\nu$. Indichiamo tale oggetto con $U_{\mu\nu}(n)$; la sua espressione è data da

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &= U_{n,\mu} U_{n+\mu,\nu} U_{n+\mu+\nu,-\mu} U_{n+\nu,-\nu} \\ &= U_{n,\mu} U_{n+\mu,\nu} U_{n+\nu,\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.53)$$

L'azione di gauge di Wilson è una somma su tutte le plaquette, dove ogni plaquette viene contata con una sola orientazione. Questa somma è realizzata su tutti i siti reticolari n e sugli indici direzionali tramite la condizione $1 \leq \mu < \nu \leq 4$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} S_G[U] &= \beta \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{N_c} \text{Re}(\text{Tr}[U_{\mu\nu}(n)]) \right] \\ &= \beta \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{2N_c} \text{Tr}[U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)] \right], \end{aligned} \quad (2.54)$$

dove il fattore β rappresenta una costante moltiplicativa, da determinare quando vogliamo eseguire il limite continuo $a \rightarrow 0$, ed N_c è il numero di colori. Facendo uso dell'approssimazione (2.51) e della formula di Baker-Campbell-Hausdorff,

viene fuori che

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &= e^{iga^2(\partial_\mu A_\nu(n) - \partial_\nu A_\mu(n) + ig[A_\mu(n), A_\nu(n)] + \mathcal{O}(a^3))} \\ &= e^{iga^2(F_{\mu\nu}(n) + \mathcal{O}(a^3))}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Inserendo questo risultato nel termine in parentesi quadre dell'azione di pura gauge proposta da Wilson (2.54) ed eseguendo lo sviluppo in serie di Taylor della funzione esponenziale, per $a \rightarrow 0$ troviamo che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2N_c} \text{Tr}[U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}^\dagger(n)] &\approx \frac{1}{2N_c} \text{Tr}[2 \times \mathbb{1} - g^2 a^4 F_{\mu\nu}^2(n)] \\ &= \frac{1}{2N_c} \text{Tr}[2 \times \mathbb{1} - g^2 a^4 F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^b(n) T^a T^b] \\ &= \frac{1}{2N_c} \left(2N_c - g^2 a^4 F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^b(n) \frac{1}{2} \delta_{ab} \right) \\ &= 1 - \frac{g^2 a^4}{4N_c} F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^a(n). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Inserendo questo risultato in (2.54) si ottiene

$$\begin{aligned} S_G[U] &= \beta \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \left[1 - 1 + \frac{g^2 a^4}{4N_c} F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^a(n) \right] \\ &= \frac{\beta}{2} \times \frac{g^2}{4N_c} \sum_{n \in \Lambda} a^4 \sum_{\mu, \nu} F_{\mu\nu}^a(n) F_{\mu\nu}^a(n). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Se poniamo $\beta = \frac{2N_c}{g^2}$ e osserviamo che $\sum_{n \in \Lambda} a^4$ corrisponde alla discretizzazione dell'integrale spazio-temporale, otteniamo che

$$\lim_{a \rightarrow 0} S_G[U] = S_{YM}[A] \quad (2.58)$$

dove abbiamo indicato con $S_{YM}[A]$ l'azione di pura gauge nella formulazione euclidea continua.

2.4 Misura di Haar

Sommando l'azione di pura gauge (2.57) o all'azione fermionica di Wilson (2.47) o all'azione fermionica staggered (2.48) otteniamo l'azione completa della QCD su reticolo. In generale possiamo scrivere che

$$S_{QCD}[\psi, \bar{\psi}, U] = S_G[U] + S_F[\psi, \bar{\psi}, U]. \quad (2.59)$$

2 QCD su reticolo

Avendo a disposizione tutti gli ingredienti per scrivere i path integral in QCD su reticolo, possiamo scrivere la forma generale del valore di aspettazione sul vuoto di un generico operatore \hat{O} sviluppabile in potenze dei campi. Abbiamo infatti che

$$\langle \Omega | \hat{O} | \Omega \rangle = \langle O \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_G[U] - S_F[\psi, \bar{\psi}, U]} O[U, \psi, \bar{\psi}]}{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_G[U] - S_F[\psi, \bar{\psi}, U]}}. \quad (2.60)$$

La misura di integrazione per le variabili di link è data in particolare da

$$\int \mathcal{D}U = \prod_{n \in \Lambda} \prod_{\mu=1}^4 \int dU_{n,\mu}. \quad (2.61)$$

Per come abbiamo costruito l'azione reticolare della QCD, ricordiamo che $U_{n,\mu}$ sono elementi del gruppo $SU(3)$. Dobbiamo tuttavia cercare di dare una buona definizione della misura $dU_{n,\mu}$. Un'importante restrizione per la misura del campo di gauge proviene dall'invarianza di gauge della teoria. In particolare, abbiamo visto che per trasformazioni di gauge le variabili di link trasformano secondo la legge (2.44). Le matrici Ω_n possono essere scelte indipendentemente in ogni sito reticolare n . L'azione $S_G[U]$ per il campo di gauge risulta per costruzione invariante rispetto a queste trasformazioni, e quindi abbiamo

$$S_G[U] = S_G[U']. \quad (2.62)$$

In generale, però, il risultato di un path integral dovrebbe essere invariante rispetto alle trasformazioni di gauge (2.44). In termini della funzione di partizione questa richiesta si scrive nel modo seguente

$$Z = \int \mathcal{D}U e^{-S_G[U]} = \int \mathcal{D}U' e^{-S_G[U']} = \int \mathcal{D}U' e^{-S_G[U]}. \quad (2.63)$$

Da questa catena di uguaglianze si ottiene che

$$\mathcal{D}U = \mathcal{D}U'; \quad (2.64)$$

combinando questo risultato con l'Eq. (2.61), deriviamo la condizione

$$dU_{n,\mu} = dU'_{n,\mu} = d(\Omega_n U_{n,\mu} \Omega_{n+\mu}^\dagger). \quad (2.65)$$

Questa condizione rappresenta una delle proprietà che definiscono la cosiddetta misura di Haar. Inoltre poiché le matrici Ω_n ed $\Omega_{n+\mu}$ possono essere scelte

indipendentemente, la misura $\mathcal{D}U$ per un elemento del gruppo dovrebbe essere invariante rispetto alla moltiplicazione a destra o a sinistra di un altro elemento del gruppo V ; questo significa che

$$\mathcal{D}U = \mathcal{D}(VU) = \mathcal{D}(UV). \quad (2.66)$$

Quest'ultima equazione, insieme con la proprietà di normalizzazione

$$\int \mathcal{D}U 1 = 1 \quad (2.67)$$

costituiscono le proprietà che definiscono la misura di Haar per l'integrazione su gruppi di Lie compatti. Tale misura, nel caso di $SU(N)$, dipenderà dagli $N^2 - 1$ parametri reali che parametrizzano i gruppi speciali unitari. Indicando con ω_n^a , con $a = 1, \dots, N^2 - 1$, i parametri da cui dipende l' n -esimo link, la misura di Haar sarà data da

$$\mathcal{D}U = \prod_{n \in \Lambda} \mathcal{J}(\omega_n^1, \dots, \omega_n^{N^2-1}) d\omega_n, \quad (2.68)$$

dove

$$d\omega_n = \prod_{a=1}^{N^2-1} d\omega_n^a. \quad (2.69)$$

La struttura dello Jacobiano \mathcal{J} dipende in generale dal gruppo $SU(N)$ e va ricavata imponendo l'invarianza di gauge. Per qualsiasi approfondimento, si rimanda a [41] e [20].

2.5 Limite continuo

Se vogliamo estrarre fisica continua dalle teorie di campo su reticolo che abbiamo finora sviluppato, diventa fondamentale cercare di eseguire in qualche modo il limite $a \rightarrow 0$. Tuttavia, tutti i parametri o campi sono resi adimensionali quando si discretizza una teoria di campo, e così la dipendenza dal parametro a risulta nascosta.

Osserviamo innanzitutto che la massa fisica M deve essere indipendente dal passo reticolare e possedere un valore finito; di conseguenza la corrispondente massa reticolare $\hat{M} = Ma$ deve tendere a zero quando eseguiamo il limite $a \rightarrow 0$. Questo significa che la lunghezza di correlazione $\hat{\xi} = \frac{1}{\hat{M}}$ deve divergere: in altri termini, per il sistema statistico in esame il limite continuo si realizza in presenza di una transizione di fase del secondo ordine. Quanto detto deve valere per qualunque teoria di campo: infatti, solo se la lunghezza di correlazione diverge il sistema

2 QCD su reticolo

può perdere memoria della sua struttura reticolare di passo a , essendo $\hat{\xi}$ l'unica lunghezza rilevante.

Una lunghezza di correlazione divergente è caratteristica dei sistemi critici; quindi rimuovere il cutoff in una teoria di campo è analogo a modulare un sistema statistico verso un punto critico. Possiamo quindi affrontare il problema utilizzando gli usuali argomenti del gruppo di rinormalizzazione.

Per semplificare la discussione consideriamo quindi una teoria di pura gauge, dove l'unico parametro da tenere in considerazione è l'accoppiamento di gauge g . Tale parametro entra nell'azione come parametro nudo e non rappresenta un numero fisico direttamente osservabile. Tuttavia, dal momento che le osservabili fisiche non dovrebbero dipendere dal passo reticolare nel limite $a \rightarrow 0$ ed essere in accordo con i valori sperimentali, è plausibile ipotizzare che i parametri nudi come g abbiano una dipendenza non banale dal passo reticolare a

$$g = g(a). \quad (2.70)$$

Quando si esegue il limite $a \rightarrow 0$ i valori dei parametri nudi cambieranno per mantenere costanti i valori delle osservabili fisiche.

Concentriamoci allora sulla funzione rinormalizzata g_R ; essa sarà tale che

$$\lim_{a \rightarrow 0} g_R(g(a), a\mu) = g_R(\mu) \quad (2.71)$$

Definiamo inoltre l'equivalente reticolare della funzione β introdotta nel capitolo 1:

$$\beta_{lat} = -a \frac{dg}{da} \quad (2.72)$$

Per $a \rightarrow 0$ deve valere la seguente catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} 0 &= a \frac{dg_R}{da} = a \left(\frac{\partial g_R}{\partial g} \right)_{a\mu} \frac{dg}{da} + a \left(\frac{\partial g_R}{\partial a\mu} \right)_g \frac{da\mu}{da} \\ &= - \left(\frac{\partial g_R}{\partial g} \right)_{a\mu} \left(-a \frac{dg}{da} \right) + a\mu \left(\frac{\partial g_R}{\partial a\mu} \right)_g. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Sussiste allora la seguente relazione tra β_{lat} e la funzione β di Gell-Mann e Low

$$\beta_{lat} = \frac{\beta}{\left(\frac{\partial g_R}{\partial g} \right)_{a\mu}}. \quad (2.74)$$

Dalla teoria perturbativa è noto che

$$\begin{aligned} g_R(\mu) &= g + Ag^3 + \mathcal{O}g^5, \\ \beta(g_R) &= -\beta_0 g_R^3 - \beta_1 g_R^5 + \dots \end{aligned} \quad (2.75)$$

Combinando i risultati (2.74) e (2.75) si ottiene dunque

$$\beta_{lat}(g) = -\beta_0 g^3 - \beta_1 g^5 + \dots \quad (2.76)$$

Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per $\beta(g_R)$, ad ordine 1 loop arriviamo alla seguente dipendenza di g dal passo reticolare a (valida per $1/a \gg \Lambda_{lat}$)

$$g^2(a) = \frac{1}{\beta_0 \ln\left(\frac{1}{a^2 \Lambda_{lat}^2}\right)}, \quad \Lambda_{lat} = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{1}{2\beta_0 g^2(a)}\right). \quad (2.77)$$

È importante evidenziare che, al diminuire di a , $g(a)$ diventa sempre più piccolo, e in particolare $g(a) \rightarrow 0$ quando $a \rightarrow 0$.

Supponiamo adesso di essere interessati alla misura su reticolo di una qualche osservabile $O(g(a), a)$. Nel limite continuo si ha che

$$\lim_{a \rightarrow 0} O(g(a), a) = O_{phys}. \quad (2.78)$$

Inoltre, se d_O è la dimensione in energia dell'osservabile O , possiamo scrivere che

$$O(g(a), a) = \left(\frac{1}{a}\right)^{d_O} \hat{O}_{lat}(g(a)) \quad (2.79)$$

dove \hat{O}_{lat} è la corrispondente osservabile reticolare adimensionata. Invertendo quest'ultima relazione si trova che

$$\begin{aligned} \hat{O}_{lat}(g(a)) &= a^{d_O} O(g(a), a) \\ \Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \hat{O}_{lat}(g(a)) &= \frac{O_{phys}}{\Lambda_{lat}^{d_O}} \left[\exp\left(-\frac{1}{2\beta_0 g^2(a)}\right) \right]^{d_O} \end{aligned} \quad (2.80)$$

Così, per verificare se stiamo estraendo fisica continua dalle nostre simulazioni, occorre controllare che la nostra osservabile segue la legge (2.80). La grandezza $\frac{O_{phys}}{\Lambda_{lat}^{d_O}}$ rappresenta l'unica informazione che siamo in grado di estrarre quando si eseguono simulazioni su reticolo: inoltre, dal momento che Λ_{lat} non dipende dall'osservabile, è possibile trovare Λ_{lat} una volta per tutte nel caso in cui O_{phys} rappresenta una grandezza fisica conosciuta, come può essere la massa di un adrone o la ben nota *tensione di stringa* (che introdurremo a breve).

È importante evidenziare che la relazione (2.80) è stata ricavata sfruttando i risultati della teoria perturbativa; ragion per cui, tale relazione vale solo in una certa regione in cui $g(a)$ è sufficientemente piccolo. Tale regione viene tradizionalmente chiamata zona di *scaling asintotico*.

Ingenuamente si potrebbe pensare di scegliere g il più piccolo possibile; occorre però ricordare che man mano che ci si avvicina al limite continuo la lunghezza di correlazione $\hat{\xi}$ diverge e, se $\hat{\xi}$ non è contenuta nelle dimensioni del reticolo, si possono verificare importanti effetti di volume finito (ricordiamo che le limitate capacità di calcolo dei computer ci impongono di usare reticoli di dimensione finita). Per tutte queste ragioni, il limite continuo si verifica in una piccola *finestra* in cui g non è né troppo piccolo, né troppo grande.

Viste le difficoltà sperimentali nel poter realizzare queste condizioni, spesso ci si accontenta della semplice condizione di scaling

$$\frac{\hat{O}_{lat_1}^{1/d_{O_1}}}{\hat{O}_{lat_2}^{1/d_{O_2}}} \quad \text{non dipendente da } g. \quad (2.81)$$

Quest'equazione è facilmente ricavabile dalle relazioni (2.78) e (2.79) applicate a due diverse osservabili O_1 ed O_2 . Dal confronto delle due osservabili per differenti g , la relazione (2.81) ci consente di capire quanto siamo vicini al limite continuo.

2.6 Il problema del confinamento e il loop di Wilson

Il confinamento dei quark all'interno della materia adronica non trova ancora oggi una spiegazione del tutto convincente. Oltretutto, alcune simulazioni numeriche [28] sembrano indicare che il confinamento del colore non sia uno stato permanente della materia. Sembrano esistere particolari condizioni termodinamiche (probabilmente quelle durante i primi istanti di vita dell'universo, quando le temperature erano elevatissime) in cui il confinamento di quark e gluoni viene meno e la materia adronica sembra comportarsi come una specie di plasma quark-gluonico (QGP). In Fig. (2.1) è mostrato un diagramma di fase qualitativo in cui sono presenti i risultati finora ottenuti in questo campo.

Dal momento che tali problematiche esulano dagli scopi di questa tesi, non approfondiremo ulteriormente il problema del plasma di quark e gluoni.

In questo lavoro ci proponiamo invece di studiare il meccanismo di confinamento dei quark e le proprietà del vuoto della QCD. Per portare avanti questi studi, risulta indispensabile cercare delle osservabili che ci diano una misura del confinamento della materia. Queste osservabili vengono chiamate *parametri di con-*

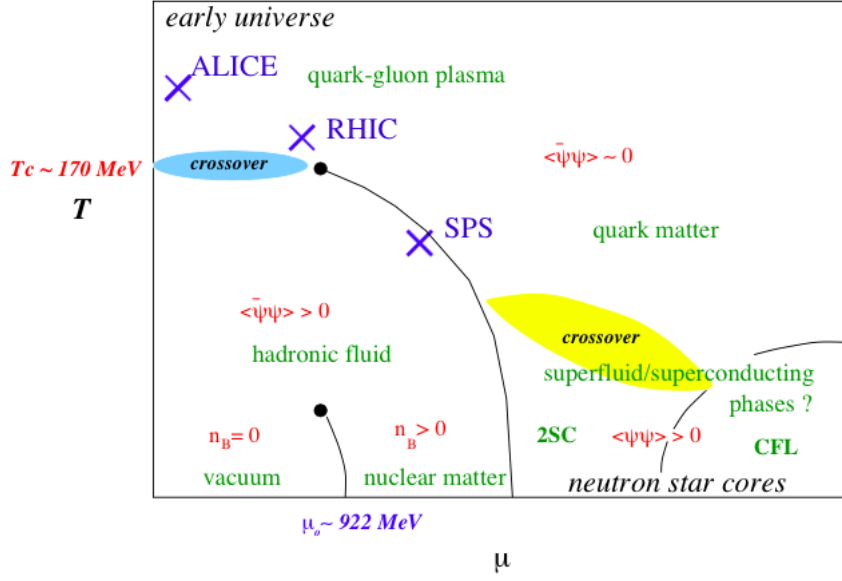


Figura 2.1: In questa figura viene mostrato un diagramma di fase qualitativo della QCD [28]: in particolare è descritto il comportamento della materia soggetta alle interazioni forti in funzione della temperatura e del potenziale chimico. La curva che interseca gli assi T e μ corrisponde ai valori di temperatura e potenziale chimico per cui si crede ci sia la transizione tra fase confinata e deconfinata della materia. Questo problema è stato studiato, oltre che nelle simulazioni numeriche, anche nelle collisioni ad alte energie tra ioni pesanti negli esperimenti ALICE, RHIC ed SPS (croci blu in figura).

finamento della QCD. In questa sezione vedremo come l'osservabile nota come *loop di Wilson* ci dà informazione diretta sul potenziale statico quark-antiquark. Abbiamo già visto che è possibile costruire oggetti gauge-invarianti che dipendono solo dai campi di gauge, considerando la traccia di un prodotto di variabili di link che giacciono lungo un percorso chiuso. Un loop di Wilson consiste di due trasporti spaziali e due trasporti temporali. Un trasporto spaziale, detto anche linea di Wilson, rappresenta un particolare percorso $C_{\mathbf{nm}}$ sul reticolo, che connette due diversi punti spaziali, \mathbf{n} ed \mathbf{m} , tramite un prodotto ordinato di variabili di link il cui argomento temporale è fissato al valore n_t :

$$S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, n_t) = \prod_{(\mathbf{k}, j) \in C_{\mathbf{nm}}} U_{(\mathbf{k}, n_t), j}. \quad (2.82)$$

Un trasporto temporale invece, rappresenta un particolare percorso sul reticolo che connette due diversi punti temporali, 0 ed n_t , mediante un prodotto ordinato

2 QCD su reticolo

di variabili di link il cui argomento spaziale è fissato, ad esempio, al valore \mathbf{n} ,

$$T(\mathbf{n}, n_t) = \prod_{j=0}^{n_t-1} U_{(\mathbf{n},j),4}. \quad (2.83)$$

Il loop di Wilson si ottiene prendendo la traccia del prodotto di due trasporti spaziali e due trasporti temporali, disposti in modo tale da formare un percorso chiuso L :

$$\begin{aligned} W[U] &= Tr \left[S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, n_t) T(\mathbf{n}, n_t)^\dagger S(\mathbf{m}, \mathbf{n}, n_t)^\dagger T(\mathbf{m}, n_t) \right] \\ &= Tr \left[\prod_{(k,\mu) \in L} U_{k,\mu} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Si può dimostrare [41] che, dato un percorso rettangolare $C_{R,T}$, dove R e T rappresentano rispettivamente le dimensioni spaziali e temporali, il loop di Wilson, nel limite $T \rightarrow \infty$, ci dà informazioni sul potenziale statico di una coppia quark-antiquark mediante la seguente relazione

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W_{C_{R,T}}[U] \rangle, \quad (2.85)$$

dal momento che si trova

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \langle W_{C_{R,T}}[U] \rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \Omega | W_{C_{R,T}}[U] | \Omega \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi W_{C_{R,T}}[U] e^{-S_{QCD}[\psi, \bar{\psi}, U]}}{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_{QCD}[\psi, \bar{\psi}, U]}} \\ &\approx C e^{-TV(R)}. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Proprio tramite il loop di Wilson e la relazione (2.85), è stato possibile studiare numericamente l'andamento della forza esercitata tra due sorgenti di colore statiche predetto dalla QCD. A piccole distanze ($\ll 1$ fm), visto che la QCD è una teoria asintoticamente libera, si è trovato un potenziale di tipo coulombiano, $V(r) \approx \frac{B}{r}$. A distanze dell'ordine del fermi, si è invece trovato che il potenziale tra un quark ed un antiquark statici cresce linearmente con la distanza, $V(r) = \sigma r$. È proprio questo effetto che è responsabile del confinamento dei quark all'interno della materia adronica.

La costante σ viene chiamata tensione di stringa, in quanto intuitivamente si può pensare che una coppia quark-antiquark sia legata da una stringa avente densità di energia per unità di lunghezza costante ed uguale a σ .

Tuttavia, se la distanza r cresce troppo, visto che l'energia immagazzinata dalla

coppia cresce linearmente con r , si può arrivare a una situazione in cui tale energia superi la massa di due mesoni; in questo caso diventa energeticamente favorita la creazione di una coppia quark-antiquark dal vuoto, che legandosi alle due cariche di colore statiche, dà luogo alla produzione di due mesoni. Tale fenomeno è noto come *rottura di stringa*.

Così, per distanze inferiori alla distanza di rottura di stringa, dalle simulazioni viene fuori che il potenziale statico della QCD può essere parametrizzato mediante la relazione

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r, \quad (2.87)$$

dove la costante A rappresenta solo una normalizzazione irrilevante dell'energia. Questa parametrizzazione del potenziale è nota in letteratura come parametrizzazione standard di Cornell. Sperimentalmente si è trovato che la tensione di stringa è $\sigma \approx 1 \frac{\text{GeV}}{\text{fm}}$.

Solitamente il parametro di confinamento che viene utilizzato nelle teorie di campo a temperatura finita è il loop di Polyakov ³. Tuttavia, non approfondiremo ulteriormente lo studio della QCD a temperatura finita poiché per questo lavoro sono state eseguite simulazioni numeriche a $T = 0$, quindi con $N = N_t$.

2.7 Studio della QCD in presenza di campi magnetici

Negli ultimi anni è cresciuto l'interesse verso lo studio delle proprietà della QCD in presenza di campi magnetici intensi, in quanto ci si aspetta che, in tali condizioni, le proprietà dinamiche delle interazioni forti possano cambiare in modo significativo. Per campi magnetici intensi, intendiamo campi che sono confrontabili con le scale di energie tipiche della QCD, cioè

$$e|B| \approx 1 \text{ GeV}^2 \rightarrow B \approx 10^{15} - 10^{16} \text{ Tesla}. \quad (2.88)$$

Questo interesse è giustificato dal fatto che esistono diversi scenari fisici in cui le proprietà della QCD possono giocare un ruolo fondamentale, come ad esempio

- l'Universo primordiale, $B \approx 10^{16}$ Tesla;
- le collisioni non centrali di ioni pesanti ad alta energia, $B \approx 10^{15}$ Tesla;
- oggetti astrofisici compatti, $B \approx 10^{10}$ Tesla.

³È possibile trovare un'ampia trattazione sul loop di Polyakov nei libri di testo [41] e [20].

Lo studio della QCD in presenza di un campo magnetico esterno ha fornito risultati molto interessanti, ma per non allontanarci troppo dagli argomenti trattati in questo lavoro, ci limiteremo a discutere dell'importante fenomeno scoperto in [8].

Vediamo però prima come si formula la QCD su reticolo in presenza di un campo magnetico esterno [16].

2.7.1 Introduzione di un campo magnetico esterno su reticolo

Il campo di un quark che interagisce con un campo di gauge del gruppo $SU(3)$ e con un campo elettromagnetico è descritto dalla Lagrangiana $\bar{\psi}(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi$, dove la derivata covariante è data da

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a T^a + iqa_\mu. \quad (2.89)$$

In (2.89) g è l'accoppiamento di gauge del gruppo $SU(3)$, q è la carica elettrica del quark, T^a sono i generatori di $SU(3)$, A_μ^a sono i campi di gauge non abeliani e a_μ è il campo di gauge abeliano.

Nel capitolo 2 abbiamo visto che per garantire l'invarianza di gauge su reticolo nel caso di $SU(3)$ è conveniente introdurre la variabile di link $U_{n,\mu}$ definita in (2.51). Analogamente, nel caso più semplice del gruppo $U(1)$ conviene usare le variabili di link

$$u_{n,\mu} = e^{iaqa_\mu}. \quad (2.90)$$

Questo significa che, per il gruppo $SU(3)_c \times U(1)_{em}$, una possibile discretizzazione della derivata covariante è data da

$$D_\mu \psi \rightarrow \frac{1}{2a} \left(U_{n,\mu} u_{n,\mu} \psi(n + \mu) - U_{n-\mu,\mu}^\dagger u_{n-\mu,\mu}^* \psi(n - \mu) \right). \quad (2.91)$$

Consideriamo adesso, a titolo di esempio, la funzione di partizione a temperatura finita di due quark degeneri, u e d , in presenza di un campo magnetico uniforme e costante. Nel caso di formulazione staggered dei fermioni con il trucco della radice quarta, si ha che

$$Z(T, B) \equiv \int \mathcal{D}U e^{-S_G} \det M^{1/4}[B, q_u] \det M^{1/4}[B, q_d], \quad (2.92)$$

dove

$$M_{m,n}[B, q] = am\delta_{m,n} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^4 \eta_{\mu}(m) (u_{m,\mu}(B, q) U_{m,\mu} \delta_{m,n-\mu} - u_{m-\nu,\nu}^*(B, q) U_{m-\nu,\nu}^{\dagger} \delta_{m,n+\nu}). \quad (2.93)$$

Scegliamo, come nel caso fisico, $q_u = 2|e|/3$ e $q_d = -|e|/3$. Per quanto detto in §1.9 si devono imporre, lungo la direzione temporale, condizioni al bordo periodiche per i campi di gauge e condizioni antiperiodiche per i campi fermionici.

Per quanto riguarda le direzioni spaziali, uno dei modi migliori per approssimare il limite di volume infinito, consiste nello scegliere per tutti i campi condizioni al bordo periodiche. Questa scelta, che è in genere standard nelle simulazioni su reticolo, pone dei vincoli sui possibili valori del campo magnetico.

Adesso, consideriamo un campo magnetico diretto lungo l'asse z di un toro tridimensionale, $\vec{B} = B\hat{z}$, e siano l_x ed l_y le dimensioni del toro lungo le direzioni ortogonali.

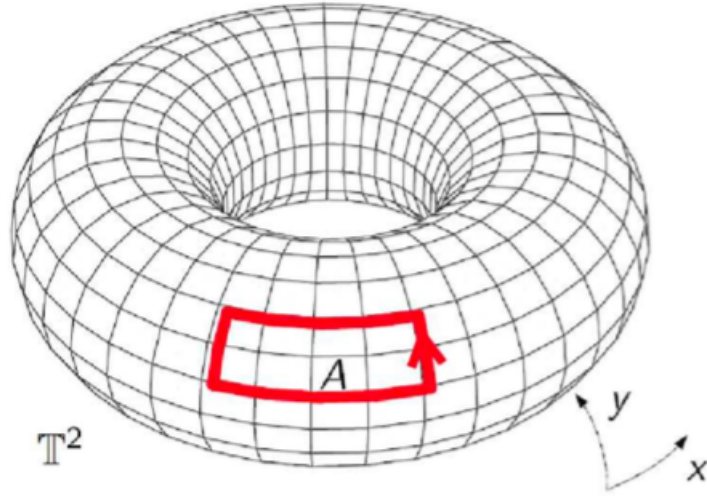


Figura 2.2: La superficie toroidale mostrata in figura corrisponde al piano $x - y$ con condizioni al bordo periodiche. Il circuito chiuso di colore rosso rappresenta una dei possibili percorsi a cui possiamo applicare il teorema di Stokes. Dal momento che il campo magnetico punta, per ipotesi, nella direzione z possiamo immaginarlo come un campo vettoriale normale ad ogni punto della superficie. L'immagine è stata tratta da [17].

Sotto queste ipotesi, la circuitazione di a_{μ} lungo un percorso chiuso nel piano $x - y$ (vedere Fig. (2.2)) che racchiude una regione di area A , è data, applicando il teorema di Stokes, da

$$\oint a_{\mu} dx_{\mu} = AB. \quad (2.94)$$

2 QCD su reticolo

Osserviamo però che è ambiguo, su una superficie chiusa come quella di un toro, stabilire qual è la regione racchiusa da un determinato percorso: possiamo allora scegliere la regione complementare di area $A - l_x l_y$ ed affermare allo stesso tempo che

$$\oint a_\mu dx_\mu = (A - l_x l_y) B. \quad (2.95)$$

A prescindere da quale soluzione si scelga per risolvere quest'ambiguità (come per esempio l'introduzione *ad hoc* di una discontinuità di a_μ nello spazio), è importante assicurarsi che tale ambiguità non venga percepita da una particella carica che si muove su un toro. Così, se consideriamo il trasporto parallelo di una particella di carica q lungo il percorso suddetto, è sufficiente imporre che

$$e^{iqBA} = e^{iqB(A - l_x l_y)} \quad \Rightarrow \quad qB = \frac{2\pi b}{l_x l_y}, \quad (2.96)$$

dove b è un numero intero. Dall'espressione (2.96) risulta chiaro che, nel caso in cui la teoria sotto esame descriva più di una particella, tutte le particelle devono possedere una carica elettrica pari ad un multiplo intero della stessa quantità. Nel nostro caso la regola di quantizzazione è imposta dalla carica del quark d e otteniamo quindi

$$|e|B = \frac{6\pi b}{l_x l_y} = \frac{6\pi b}{a^2 L_x L_y}, \quad (2.97)$$

dove L_x ed L_y sono le estensioni adimensionate del reticolo nelle direzioni x ed y . Nel caso di campo magnetico uniforme e costante lungo la direzione z , una possibile scelta del potenziale vettore è la seguente

$$a_\mu = (0, Bx, 0, 0), \quad \mu = x, y, z, t. \quad (2.98)$$

Seguendo questa prescrizione, le variabili di link sono date da

$$u_{n,y}(B, q) = e^{ia^2 q B n_x}, \quad u_{n,x}(B, q) = u_{n,z}(B, q) = u_{n,t}(B, q) = 1. \quad (2.99)$$

Se vogliamo garantire che il campo di background sia una funzione *liscia* ai bordi del reticolo e mantenere allo stesso tempo l'invarianza di gauge dell'azione fermionica, è necessario imporre appropriate condizioni al bordo per i campi fermionici lungo l'asse x [1]. In termini delle variabili di link $u_{n,x}$ queste condizioni sono date da

$$u_{n,x}(B, q)|_{n_x=L_x} = e^{-ia^2 q L_x B n_y}. \quad (2.100)$$

Osserviamo infine che la discretizzazione del reticolo pone un vincolo ulteriore sui possibili valori esplorabili del campo magnetico. Infatti, dal momento che il più piccolo percorso chiuso nel piano $x - y$ è rappresentato da una plaquette, in seguito al trasporto parallelo lungo tale cammino una particella di carica q acquista un fattore di fase dato da

$$\exp(iqa^2B) = \exp\left(i\frac{2\pi b}{L_x L_y}\right). \quad (2.101)$$

Tutti gli altri fattori di fase, corrispondenti a percorsi differenti, sono potenze intere positive di tale quantità. È evidente che il fattore di fase dell'Eq. (2.101) non può distinguere campi magnetici che fanno variare la quantità qa^2B di multipli di 2π . Quindi, i valori esplorabili del campo magnetico sono limitati dalla condizione

$$-\frac{\pi}{a^2} < qB < \frac{\pi}{a^2}. \quad (2.102)$$

Per riassumere, quando si vuole studiare la QCD su reticolo in presenza di un campo magnetico uniforme e costante per tenere conto degli effetti della discretizzazione e delle condizioni periodiche al bordo sulle direzioni spaziali, i possibili valori del campo magnetico sono limitati dalle formule (2.96) e (2.102).

2.7.2 Anisotropia del potenziale di una coppia quark-antiquark in presenza di un campo magnetico

Siamo adesso in grado di discutere i risultati trovati nell'articolo [8]. In tale lavoro, considerando una discretizzazione reticolare della QCD con $N_f = 2 + 1$ sapori e masse dei quark fisiche, si è studiato il potenziale statico di una coppia quark-antiquark in presenza di un campo magnetico esterno uniforme e costante. Le simulazioni sono state realizzate a temperatura nulla, utilizzando reticoli ipercubici con diverse discretizzazioni.

Per determinare il potenziale della coppia $q\bar{q}$, separata da una distanza \vec{r} , si è considerato il comportamento per grandi valori di t di un loop di Wilson rettangolare $W(\vec{r}, t)$. In questo genere di studi, solitamente, si media su tutte le possibili direzioni di \vec{r} , ipotizzando che ci sia isotropia spazio-temporale. In questo lavoro però, a parte il caso di campo magnetico nullo, si sono considerate le medie su diverse direzioni, lasciando così spazio all'ipotesi che il potenziale $V(\vec{r})$ possa essere di tipo non centrale.

2 QCD su reticolo

Per stimare il potenziale si è fatto uso della relazione

$$aV(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\langle W(\vec{r}, t) \rangle}{\langle W(\vec{r}, t+1) \rangle} \right), \quad (2.103)$$

che segue direttamente dall'Eq. (2.85). In questo modo è stato possibile misurare il potenziale $V(\vec{r})$ per diversi valori di $|\vec{r}|$. I risultati delle simulazioni hanno mostrato che il campo magnetico è in grado di modificare il potenziale della coppia $q\bar{q}$. A tal proposito, consideriamo il grafico in Fig. (2.3).

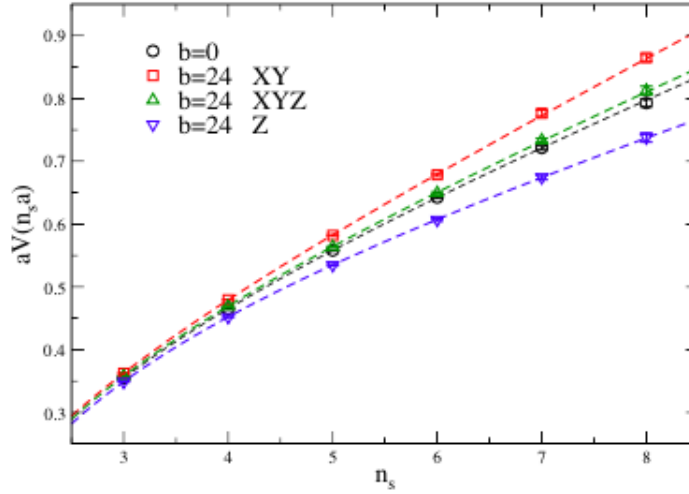


Figura 2.3: Potenziale della coppia $q\bar{q}$ per $|e|B = 0$ e per $|e|B = 0.7 \text{ GeV}^2$ su un reticolo 40^4 , con $a = 0.1249 \text{ fm}$ [8].

Sia per $B = 0$ che per $B \neq 0$, il potenziale sembra avere il tipico andamento descritto in (2.87). Dalla figura risulta tuttavia evidente che il potenziale calcolato lungo la direzione parallela al campo magnetico (z) è notevolmente più piccolo di quello misurato nella direzione perpendicolare al campo magnetico (piano $x - y$). Mediando invece il loop di Wilson su tutte le direzioni spaziali, gli effetti del campo magnetico sul potenziale statico appaiono fortemente ridotti.

Una volta accertata l'anisotropia del potenziale, ci si è concentrati sulla determinazione dei parametri. Si è quindi eseguito un best-fit dei dati numerici del potenziale con la parametrizzazione standard di Cornell, scritta come

$$aV(an\hat{d}) = \hat{c}_d + \hat{\sigma}_d n + \frac{\hat{\alpha}_d}{n}, \quad (2.104)$$

dove n indica la distanza in unità reticolari, \hat{d} è un versore lungo le direzioni z o xy , $\hat{\sigma}_d$ è la tensione di stringa, $\hat{\alpha}_d$ è l'accoppiamento di Coulomb e \hat{c}_d è un termine costante. L'indice d è stato utilizzato per tenere conto della eventuale

dipendenza dei parametri dalla direzione. Tutti i potenziali misurati sembrano essere ben descritti dalla parametrizzazione (2.104).

Per monitorare la dipendenza dei parametri del best-fit da B , si è deciso di normalizzarli al valore che essi assumono per $B = 0$ e allo stesso passo reticolare e di misurare le quantità:

$$R^{\mathcal{O}_d} = \frac{\mathcal{O}_d(|e|B)}{\mathcal{O}_d(|e|B=0)}, \quad (2.105)$$

dove \mathcal{O}_d rappresenta uno dei tre parametri del fit misurato nelle diverse direzioni. Nello specifico si è visto che la tensione di stringa e l'accoppiamento di Coulomb presentano l'andamento mostrato nei grafici in Fig. (2.4) e (2.5).

Dai grafici risulta evidente che entrambi i parametri risultano influenzati dalla presenza del campo magnetico. In particolare, la tensione di stringa σ cresce nel piano $x - y$ e decresce lungo la direzione z , mentre l'accoppiamento di Coulomb α si comporta nel modo opposto.

Le linee continue mostrate nei due grafici rappresentano i best fit dei dati ottenuti per un reticolo 40^4 ed $a = 0.1249$ fm, assumendo che il rapporto $R^{\mathcal{O}_d}$ abbia la seguente forma funzionale:

$$R^{\mathcal{O}_d} = 1 + A^{\mathcal{O}_d}(|e|B)^{C^{\mathcal{O}_d}}. \quad (2.106)$$

Gli autori del lavoro [8] fanno inoltre notare che la debole dipendenza dei dati dal passo reticolare a fa pensare che i fenomeni osservati siano tipici della fisica continua. Risulta però importante escludere altre possibilità, come per esempio una dipendenza anisotropa non banale del passo reticolare dal campo magnetico B . In particolare, se si avesse un aumento di a_z e una diminuzione di a_{xy} al crescere di B , si osserverebbero risultati simili a quelli finora discussi. Tuttavia i risultati provenienti da lavori precedenti sembrano escludere una dipendenza significativa del passo reticolare dal campo magnetico. Ad esempio, nel lavoro [4] è stato visto che la massa del pione non mostra alcuna dipendenza dal campo magnetico, almeno per valori del campo fino a $|e|B \approx 0.4 \text{ GeV}^2$.

2.8 Metodi Monte Carlo

Una volta discretizzata la teoria, lo scopo di una simulazione in Lattice QCD è solitamente quello di ricavare i valori medi di osservabili fisiche che, in generale, possono dipendere dai campi fermionici ψ e $\bar{\psi}$ e dalle variabili di link U .

Ad esempio, nel caso di una teoria di pura gauge, il valore medio sul vuoto di un

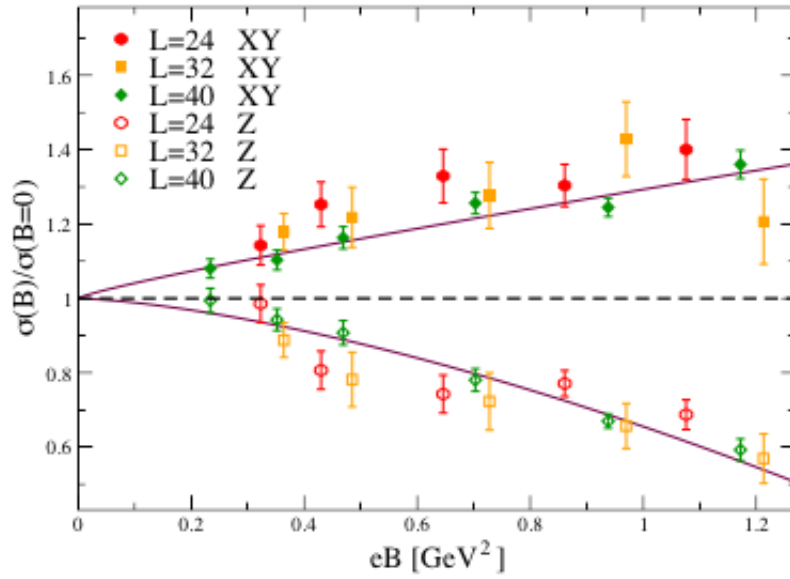


Figura 2.4: Dipendenza della tensione di stringa dal campo magnetico lungo le direzioni Z ed XY. La linea continua rappresenta il best-fit dei dati ottenuti per un reticolo 40^4 ed $a = 0.1249$ fm [8].

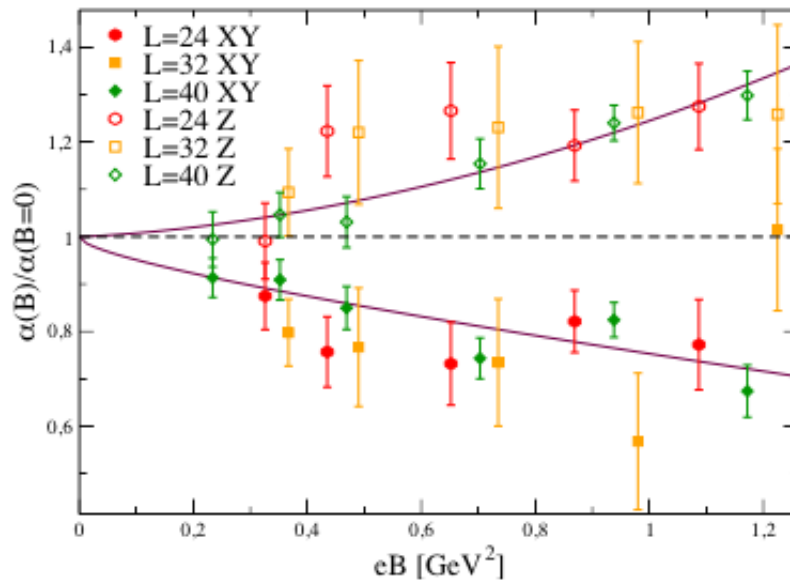


Figura 2.5: Dipendenza dell'accoppiamento di Coulomb dal campo magnetico lungo le direzioni Z ed XY. La linea continua rappresenta il best-fit dei dati ottenuti per un reticolo 40^4 ed $a = 0.1249$ fm [8].

qualunque operatore $O[U]$ è dato da

$$\langle O \rangle = \frac{\int \mathcal{D}U O[U] e^{-S[U]}}{\int \mathcal{D}U e^{-S[U]}}. \quad (2.107)$$

Tuttavia, anche facendo uso di reticoli di piccole dimensioni, l'integrazione numerica diretta è quasi impraticabile a causa dell'elevato numero delle variabili di integrazione. Così, generalmente si preferisce usare il cosiddetto campionamento per importanza (*importance sampling*), che consiste nel generare N configurazioni di link $\{U\}_i$ (con $i = 1, \dots, N$) mediante la distribuzione di probabilità $\frac{e^{-S[U]}}{\int \mathcal{D}U e^{-S[U]}}$ e approssimare l'integrale (2.107) con la media campionaria \bar{O} :

$$\langle O \rangle \approx \bar{O} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N O(\{U\}_i). \quad (2.108)$$

Teniamo però presente che la media campionaria, essendo funzione delle variabili stocastiche $O(\{U\}_i)$, è una variabile stocastica. Inoltre, il *Teorema del Limite Centrale* ci dice che nel limite di grandi N , indipendentemente dalla distribuzione di probabilità delle $O(\{U\}_i)$ ⁴, \bar{O} è distribuita in modo normale

$$P(\bar{O}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} \exp \left\{ -\frac{(\bar{O} - \langle O \rangle)^2}{2\hat{\sigma}^2} \right\}, \quad (2.109)$$

dove $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{N}$ e $\sigma^2 = \langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2$. Dal momento che generalmente non si conoscono $\langle O \rangle$ e $\langle O^2 \rangle$, la varianza σ^2 viene stimata di solito tramite

$$\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (O(\{U\}_i) - \bar{O})^2. \quad (2.110)$$

Così, nel caso in cui i dati del campione sono indipendenti, l'errore sulla stima del valore di aspettazione di O è dato da

$$\Delta O = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (O(\{U\}_i) - \bar{O})^2}. \quad (2.111)$$

La tecnica con cui si riesce a produrre configurazioni con una determinata distribuzione di probabilità fa uso delle cosiddette *catene di Markov*. Grazie a questa tecnica, partendo da una configurazione iniziale arbitraria, si è in grado di costruire un certo numero di operazioni che, eseguite iterativamente, definiscono un

⁴Purché siano indipendenti, identicamente distribuite e la loro varianza sia ben definita

percorso stocastico all'interno dei possibili stati del sistema. Il percorso stocastico generato, indipendentemente dal punto di partenza, è in grado di visitare dopo un certo numero di iterazioni i vari stati del sistema con una frequenza proporzionale alla densità di probabilità desiderata ⁵. Nel corso degli anni sono stati sviluppati diversi algoritmi, che si dimostrano più o meno efficienti a seconda del sistema in esame.

Se nella teoria introduciamo i fermioni, il calcolo di $\langle O[U] \rangle$ presenta dei problemi in più. Infatti, poiché l'algebra di Grassmann non è facilmente comunicabile ad un calcolatore, siamo costretti a scrivere il valore di aspettazione di $O[U]$ come

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \frac{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_G[U] - S_F[\psi, \bar{\psi}, U]} O[U]}{\int \mathcal{D}U \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-S_G[U] - S_F[\psi, \bar{\psi}, U]}} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}U \det[M(U)] e^{-S_G[U]} O[U]}{\int \mathcal{D}U \det[M(U)] e^{-S_G[U]}}, \end{aligned} \quad (2.112)$$

dove con M indichiamo l'operatore di Dirac. Questo rende il calcolo di $\langle O \rangle$ molto più dispendioso dal punto di vista computazionale perché, dal momento che $\det[M(U)]$ è un funzionale di U , siamo costretti a calcolare il determinante fermionico durante la generazione delle configurazioni $\{U\}_i$ ⁶. Uno dei metodi più utilizzati per calcolare $\det[M(U)]$ consiste nell'introdurre dei campi bosonici ausiliari, detti campi *pseudofermionici*, e sfruttare il noto risultato

$$\int \mathcal{D}\phi^* \mathcal{D}\phi e^{-\phi^* \frac{1}{M(U)} \phi} \propto \det[M(U)]. \quad (2.113)$$

Sull'utilizzo di tali campi è basato l'algoritmo *Rational Hybrid Monte Carlo* ⁷, di cui abbiamo fatto ampiamente uso nelle simulazioni numeriche svolte in questi lavori.

2.9 Il metodo jackknife

I metodi Monte Carlo ci consentono di ottenere, grazie all'uso delle catene di Markov, una stima del valore medio di un'osservabile tramite il campionamento di configurazioni successive. Tuttavia, questo modo di procedere (detto *dinamico*) è in genere affetto dal problema della correlazione tra misure consecutive. Inoltre,

⁵Per non allontanarci troppo dall'argomento principale di questa tesi ci limiteremo a dire questo. È possibile trovare i dettagli matematici di questa tecnica nei testi [41] e [20].

⁶Teniamo presente che un campo fermionico per ogni sito reticolare possiede 12 gradi di libertà (3 indici di colore per 4 indici di Dirac) e quindi la matrice fermionica ha un numero di righe e colonne pari a 12 volte il numero di siti del reticolo.

⁷I dettagli matematici di questo algoritmo si trovano, ad esempio, nei testi [41] e [20].

man mano che ci si avvicina al limite continuo, la lunghezza di correlazione $\hat{\xi}$ aumenta e diventa quindi più difficile ottenere delle misure indipendenti. Così, per dare una stima corretta delle osservabili che vogliamo misurare, è importante tenere conto della correlazione delle misure.

Per affrontare questo genere di problemi, i metodi solitamente più utilizzati si basano sul ricampionamento dei dati ottenuti. In particolare, in questa tesi abbiamo usato il metodo jackknife, che si rivela utile quando dobbiamo fornire la stima e l'errore di una grandezza del tipo

$$f(\mu_x), \quad (2.114)$$

dove μ_x è il valore di aspettazione dell'osservabile x . Per utilizzare questo metodo occorre dapprima calcolare le *medie parziali* [6]:

$$x_i^J = \frac{1}{N-1} \sum_{k \neq i} x_k, \quad (2.115)$$

dove N è la dimensione del campione. Fatto questo, la stima di $f(\mu_x)$ e del suo errore quadratico medio sono dati rispettivamente da

$$\bar{f}^J = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i^J, \quad \text{con } f_i^J = f(x_i^J) \quad (2.116)$$

e

$$\sigma_J^2 = \frac{N-1}{N} \sum_{i=1}^N (f_i^J - \bar{f}^J)^2. \quad (2.117)$$

Nel caso in cui si consideri una funzione dipendente dal valore di aspettazione di n grandezze differenti, gli stimatori jackknife si ottengono generalizzando le formule (2.115), (2.116) e (2.117) al caso di n variabili.

Il metodo jackknife viene usato frequentemente nelle simulazioni: ricalcolare più volte la grandezza fisica lasciando fuori dal campione un'osservazione alla volta ⁸, ci consente di calcolare nel modo corretto le deviazioni standard di valori correlati.

⁸Spesso si levano dal campione anche blocchi di osservazioni alla volta.

3 Superconduttività ordinaria e superconduttività duale

L'obiettivo principale di questo lavoro è studiare il confinamento dei quark all'interno della materia adronica con e senza campi magnetici esterni. A tal proposito, abbiamo esaminato il tubo di flusso cromoelettrico generato da una coppia statica $q\bar{q}$ e successivamente lo abbiamo analizzato all'interno del modello a superconduttore duale per il vuoto della QCD.

Per introdurre tale modello, abbiamo deciso di organizzare il capitolo nel modo seguente:

- inizialmente faremo alcuni richiami fenomenologici di superconduttività ordinaria ed al modello di London;
- poi, vedremo come la superconduttività ordinaria può essere interpretata in termini di rottura spontanea della simmetria locale $U(1)$;
- successivamente tratteremo la teoria di Landau-Ginzburg dei superconduttori e verrà introdotto un parametro, k , che è in grado di determinare la tipologia del superconduttore;
- infine, introdurremo il modello a superconduttore duale per lo stato fondamentale della QCD e discuteremo le caratteristiche dei tubi di flusso cromoelettrici che sono state finora riscontrate per teorie di pura gauge $SU(N)$.

3.1 Fenomenologia della superconduttività

Agli inizi del '900 il fisico H.K. Onnes, dopo aver realizzato la liquefazione dell'elio, iniziò uno studio sistematico della dipendenza della resistività elettrica dei metalli dalla temperatura. In particolare, nel 1911 egli si accorse che la resistività di un campione di mercurio crollava bruscamente a zero ad una temperatura di circa 4 K. Questo nuovo stato della materia venne chiamato superconduttivo,

3 Superconduttività ordinaria e superconduttività duale

mentre la temperatura al di sotto della quale si presentava questo fenomeno venne chiamata temperatura critica T_c .

In seguito si osservò che, a temperature inferiori a T_c , lo stato superconduttivo potesse essere distrutto, con ritorno allo stato di conduttore normale, applicando un campo magnetico esterno superiore ad un certo valore critico B_c . Il campo critico B_c presenta il seguente andamento sperimentale in funzione della temperatura

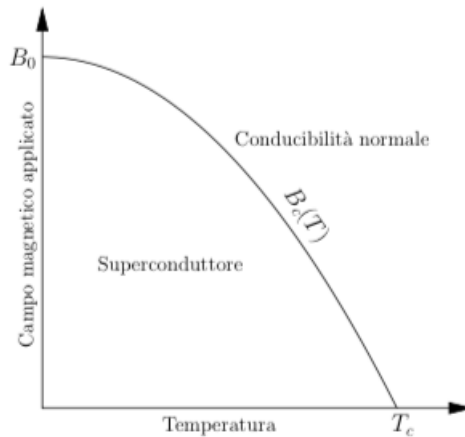


Figura 3.1: Andamento del campo critico B_c in funzione della temperatura.

$$B_c(T) \approx B_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad (3.1)$$

dove $B_0 = B_c(T = 0)$.

Esiste tuttavia una differenza importante tra un conduttore perfetto ed un superconduttore. Ricordiamo infatti che la relazione tra una corrente elettrica \mathbf{j} e un campo elettrico \mathbf{E} applicato dall'esterno è $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, dove la costante di proporzionalità σ è nota come conduttività. Sia un conduttore perfetto che un superconduttore sono caratterizzati da $\sigma = \infty$. Dal momento che in un metallo di dimensione finita abbiamo un numero di elettroni finito, la corrente non può essere infinita e quindi il campo elettrico deve essere nullo all'interno del metallo. Così, l'equazione di Maxwell $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ implica che, se $\sigma = \infty$ allora il campo magnetico \mathbf{B} è costante nel tempo.

Vediamo a questo punto dove sta la differenza tra un conduttore perfetto e un superconduttore. Se raffreddiamo un metallo fino a farlo diventare un conduttore perfetto e successivamente lo immergiamo in un campo magnetico statico debole, il campo \mathbf{B} deve mantenersi nullo all'interno del metallo. Se invece invertiamo le due operazioni, ossia prima immergiamo il conduttore in un campo magnetico

statico debole e poi raffreddiamo il sistema, il campo \mathbf{B} indotto al suo interno, diverso da zero, rimane costante anche dopo la rimozione del campo esterno. Un superconduttore, invece, presenta al suo interno $\mathbf{B} = 0$, indipendentemente dall'ordine con cui eseguiamo le operazioni appena menzionate. Il fenomeno di espulsione di un campo magnetico all'interno di un superconduttore è noto come *effetto Meissner*. Riportiamo un'illustrazione di tale fenomeno in Fig. (3.2).

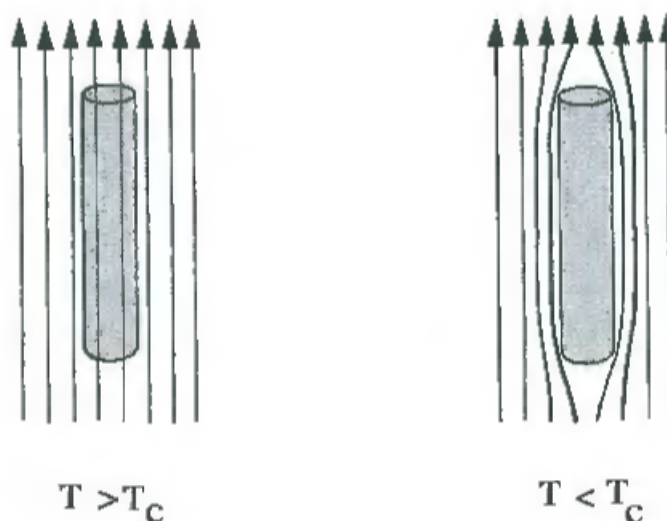


Figura 3.2: Espulsione di un campo magnetico esterno dall'interno del superconduttore. L'immagine è stata tratta dal testo di G. Grosso e G. Pastori Parravicini [26].

Queste scoperte diedero inizio ad una serie di studi al fine di trovare un modello teorico che potesse descrivere a livello microscopico il fenomeno. Allo stesso tempo si avviò anche un intenso studio sperimentale, con l'obiettivo di trovare altri materiali che manifestassero il fenomeno della superconduttività a una temperatura critica più alta e che potevano quindi risultare più pratici da utilizzare.

Nel 1957 Bardeen, Cooper e Schiffer [5] svilupparono la teoria microscopica della superconduttività: tale teoria, basata sulla Meccanica Quantistica e nota come teoria BCS, rappresenta ad oggi la teoria di maggiore successo per descrivere lo stato superconduttivo. Una delle previsioni di questa teoria è che i portatori della *supercorrente* siano coppie di elettroni debolmente legati, alle quali è stato dato il nome di *coppie di Cooper*. A livello qualitativo, questa interazione attrattiva può essere descritta nel modo seguente: un elettrone all'interno di un metallo è relativamente libero di muoversi, mentre i nuclei occupano posizioni fisse, aventi simmetrie definite, che conferiscono al metallo la struttura di un reticolo cristallino. Il moto di un elettrone all'interno del reticolo cristallino, crea una distorsione del reticolo a causa dell'attrazione che esercita sugli ioni positivi che lo costitui-

3 Superconduttività ordinaria e superconduttività duale

scono; se questa distorsione persiste per un tempo finito, può essere sentita da un secondo elettrone in moto, che quindi risulta debolmente attratto dal primo. Poiché l'energia che tiene unita la coppia è molto piccola, basta alzare di poco la

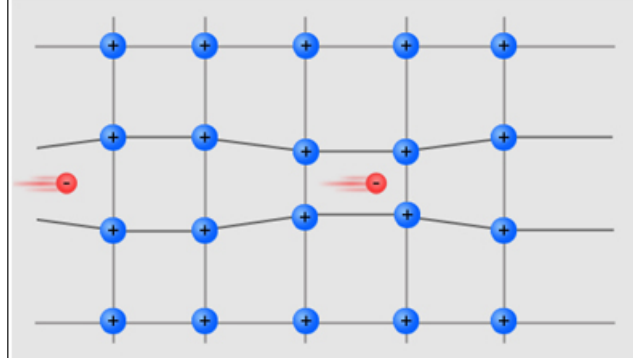


Figura 3.3: Interazione tra due elettroni mediata dal reticolo ionico.

temperatura per separare gli elettroni: esiste cioè una temperatura critica al di sopra della quale le coppie si rompono e il metallo non è più superconduttore.

3.2 Modello di London

Analizziamo adesso le prime conseguenze non banali dell'assenza di resistività, trovate dai fratelli London nel 1935. Se un mezzo ha resistività $\rho = 0$ ed n elettroni per unità di volume, in presenza di un campo elettrico \mathbf{E} gli elettroni sono descritti dalla seguente equazione dinamica

$$-e\mathbf{E} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (3.2)$$

Visto che la densità di corrente è data da $\mathbf{j} = -nev$ ricaviamo

$$\mathbf{E} = \frac{m}{ne^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Se inseriamo l'Eq. (3.3) nell'equazione di Maxwell $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \wedge \mathbf{j} + \frac{ne^2}{m} \mathbf{B} \right] = 0. \quad (3.4)$$

Questa è un'equazione valida per un conduttore perfetto, ma non è in grado di spiegare l'effetto Meissner; infatti l'Eq. (3.4) è compatibile con una situazione statica caratterizzata da un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B} \neq 0$ nel superconduttore, e densità di corrente $\mathbf{j} = 0$. Tuttavia se la quantità in parentesi quadre nell'Eq. (3.4), oltre ad essere indipendente dal tempo si annulla

identicamente, cioè

$$\nabla \wedge \mathbf{j} + \frac{ne^2}{m} \mathbf{B} = 0, \quad (3.5)$$

allora il conduttore perfetto ideale esibisce anche effetto Meissner. Infatti combinando l'Eq. (3.5) con la seguente equazione di Maxwell in condizioni stazionarie

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mathbf{j} \quad (3.6)$$

e ricordando che $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ otteniamo

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{ne^2}{m} \mathbf{B}. \quad (3.7)$$

Risolviamo adesso l'Eq. (3.7) per una lastra semi-infinita di superconduttore con la geometria indicata in Fig. (3.4).

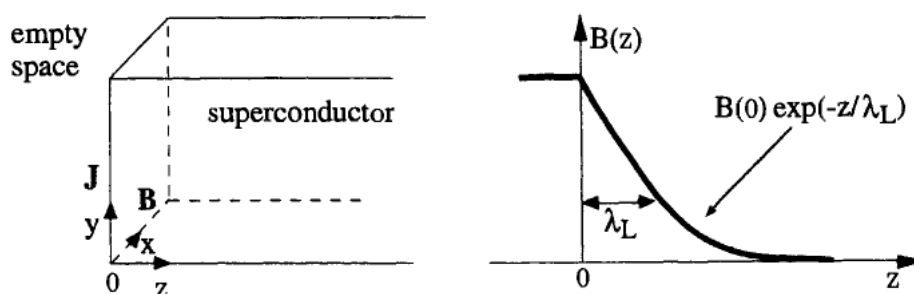


Figura 3.4: Geometria di una lastra superconduttrice semi-infinita e grafico della profondità di penetrazione nel caso in cui il campo magnetico è parallelo alla superficie. L'immagine è stata tratta da [26].

Consideriamo due esempi semplici e particolarmente significativi.

1. Il campo magnetico \mathbf{B} è parallelo all'asse z e omogeneo nel piano xy . Questo significa che $\mathbf{B} = (0, 0, B(z))$. L'equazione $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ci dice allora che $\frac{\partial B(z)}{\partial z} = 0$, e quindi $B(z)$ è costante. Così l'Eq. (3.7) da $B(z) = 0$ per $z > 0$ e mostra che è impossibile avere un campo magnetico normale alla superficie di un superconduttore.
2. Il campo magnetico \mathbf{B} è parallelo all'asse x e omogeneo nel piano xy . Questo significa che $\mathbf{B} = (B(z), 0, 0)$. Così l'equazione $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ è automaticamente soddisfatta e dall'Eq. (3.7) abbiamo

$$\frac{\partial^2 B(z)}{\partial z^2} = \frac{ne^2}{m} B(z), \quad (3.8)$$

la cui soluzione è

$$B(z) = B(0)e^{-\frac{z}{\lambda}} \quad (z > 0), \quad (3.9)$$

3 Superconduttività ordinaria e superconduttività duale

dove abbiamo posto

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{ne^2}}. \quad (3.10)$$

Quindi, tranne che per una stretta superficie, avente spessore di ordine λ , il campo magnetico parallelo alla superficie non può penetrare all'interno del superconduttore. λ è nota come *lunghezza di penetrazione di London*.

In questo modo, abbiamo visto che se viene soddisfatta l'Eq. (3.7) il conduttore ideale perfetto presenta anche effetto Meissner.

3.3 Rottura spontanea di simmetria: caso globale

Consideriamo la seguente densità Lagrangiana per una teoria di campo scalare complesso [27]

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^*(x) \partial^\mu \varphi(x) - V(|\varphi(x)|), \quad (3.11)$$

con potenziale

$$V(|\varphi(x)|) = \frac{1}{2} \zeta^2 (|\varphi(x)|^2 - \eta^2)^2, \quad \zeta, \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (3.12)$$

Per conoscere il contenuto in particelle descritte dal modello, occorre fare uno

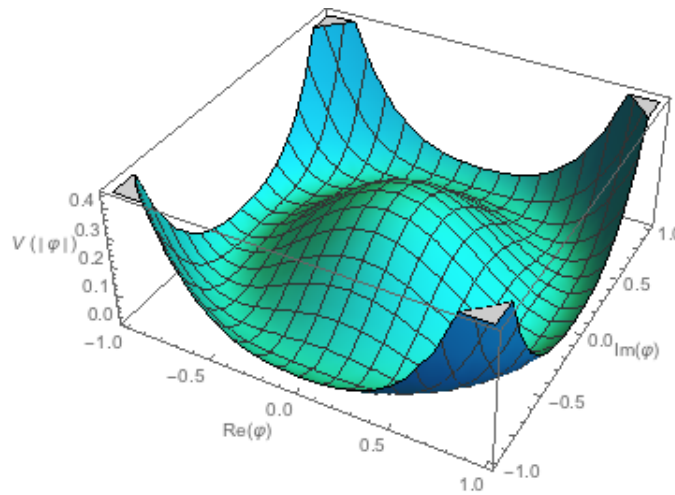


Figura 3.5: Plot di esempio del potenziale $V(|\varphi(x)|)$.

sviluppo della Lagrangiana in potenze dei campi attorno a un minimo del potenziale, altrimenti non sarebbe possibile costruire lo spazio di Fock usuale e conseguentemente quantizzare la teoria.

Tuttavia, guardando con un po' più di attenzione la Lagrangiana (3.11), ci accorgiamo che:

3.3 Rottura spontanea di simmetria: caso globale

- il potenziale (3.12) non ha un punto di minimo isolato, ma è caratterizzato da un'intera orbita di minimi, descritta dall'equazione

$$|\varphi(x)|^2 - \eta^2 = 0; \quad (3.13)$$

- il potenziale (3.12) ha un massimo locale in $\varphi(x) = 0$;
- sia la lagrangiana (3.11) che il potenziale (3.12) sono invarianti per trasformazioni $U(1)$ globali del campo $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \varphi(x). \quad (3.14)$$

Questo significa che la particolare scelta del punto di minimo attorno a cui fare lo sviluppo è totalmente irrilevante, dal momento che tutti i punti dell'orbita (3.13) sono fisicamente equivalenti. Scegliamo allora come punto di minimo $\varphi = \eta$ e poniamo

$$\varphi(x) = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}} (h(x) + ib(x)) \quad (3.15)$$

dove $h(x)$ e $b(x)$ sono campi scalari reali. Sostituendo l'Eq. (3.15) nella Lagrangiana (3.11) si ottiene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu h(x) \partial^\mu h(x) + \frac{1}{2} \partial_\mu b(x) \partial^\mu b(x) - \frac{\zeta^2}{8} \left[(2\sqrt{2}\eta)h(x) + h^2(x) + b^2(x) \right]^2. \quad (3.16)$$

Analizzando la parte quadratica della Lagrangiana (3.16) risulta allora che al campo $b(x)$ è associata una particella scalare a massa nulla, mentre al campo $h(x)$ è associata una particella scalare di massa

$$\frac{1}{2} m_h^2 = \frac{\zeta^2}{8} (2\sqrt{2}\eta)^2 = \zeta^2 \eta^2. \quad (3.17)$$

I termini cubici e quartici nei campi descrivono invece le interazioni tra le particelle associate rispettivamente ai campi $h(x)$ e $b(x)$.

Evidenziamo adesso alcuni aspetti importanti del modello appena descritto:

- la scelta del vuoto ha fatto perdere alla Lagrangiana l'invarianza manifesta per trasformazioni $U(1)$: in casi come questi si dice che *la simmetria è rotta spontaneamente*;
- il vuoto non è invariante per trasformazioni $U(1)$; se per assurdo lo fosse, a

3 Superconduttività ordinaria e superconduttività duale

causa di (3.15), si avrebbe che:

$$\begin{aligned}\eta &= \langle \Omega | \varphi(x) | \Omega \rangle = \langle \Omega | U^\dagger U \varphi(x) U^\dagger U | \Omega \rangle = \langle \Omega | U \varphi(x) U^\dagger | \Omega \rangle \\ &= e^{i\alpha} \langle \Omega | \varphi(x) | \Omega \rangle = e^{i\alpha} \eta.\end{aligned}\quad (3.18)$$

- una particella a massa nulla e spin 0 è apparsa nel modello: questa particella prende il nome di bosone di Goldstone.

Quest'ultima implicazione non è caratteristica solo del modello che abbiamo studiato, ma è conseguenza di un teorema più generale dovuto a Goldstone. Questo teorema afferma che: *se una teoria di campo quantistica ha invarianza globale rispetto a un gruppo continuo G con n_G generatori e il vuoto della teoria è invariante rispetto a un sottogruppo H di G con n_H generatori, allora la teoria contiene almeno $n_G - n_H$ particelle a massa nulla e spin 0.*

Le particelle a massa nulla associate ai generatori rotti prendono il nome di bosoni di Goldstone.

3.4 Modello di Higgs abeliano

È noto che in elettrodinamica il campo vettoriale $A_\mu(x)$ deve essere privo di massa, perché la presenza nella Lagrangiana del termine $\frac{1}{2}m_A^2 A_\mu(x)A^\mu(x)$ romperebbe l'invarianza di gauge.

Quello che ci proponiamo di vedere in questo paragrafo è che, se si cerca di promuovere una simmetria rotta spontaneamente da globale a locale, il campo corrispondente al bosone di Goldstone si combina con il campo di gauge, dando luogo ad un campo vettoriale massivo. Questo meccanismo, scoperto da P. Higgs [31], prende appunto il nome di *fenomeno di Higgs*.

Per comprendere come avviene questo fenomeno, consideriamo la Lagrangiana (3.11) e promuoviamo la simmetria $U(1)$ da globale a locale. Ripercorrendo gli stessi step logici discussi in §1.2, si trova che la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = (D_\mu \varphi(x))^* D^\mu \varphi(x) - \frac{1}{2} \zeta^2 (|\varphi(x)|^2 - \eta^2)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \quad (3.19)$$

con

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \\ D_\mu \varphi(x) &= (\partial_\mu + iqA_\mu(x))\varphi(x)\end{aligned}\quad (3.20)$$

è invariante per trasformazioni locali $U(1)$ del tipo

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\rightarrow e^{iq\theta(x)}\varphi(x) \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu\theta(x).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Per conoscere il contenuto in particelle della teoria descritta dalla Lagrangiana (3.19), conviene sviluppare attorno ad un punto di minimo del potenziale (3.12) mediante il seguente cambio di variabili

$$\varphi(x) = \left(\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x)\right) e^{ib(x)},\tag{3.22}$$

dove $h(x)$ e $b(x)$ sono campi scalari. Osserviamo che in termini dei campi $h(x)$ e $b(x)$ le trasformazioni (3.21) diventano

$$\begin{aligned}h(x) &\rightarrow h(x), \\ b(x) &\rightarrow b(x) + q\theta(x).\end{aligned}\tag{3.23}$$

Inserendo l'Eq. (3.22) nella Lagrangiana (3.19) si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu h(x)\partial^\mu h(x) + q^2 \left(\eta + \frac{1}{\sqrt{2}}h(x)\right)^2 \left(A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu b(x)\right)^2 \\ &\quad - \zeta^2 \left(\eta^2 h^2(x) + \frac{\eta\sqrt{2}}{2}h^3(x) + \frac{1}{8}h^4(x)\right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x).\end{aligned}\tag{3.24}$$

Come anticipato, il campo che sarebbe stato bosone di Goldstone se avessimo considerato trasformazioni globali, si è accoppiato al campo di gauge $A_\mu(x)$ mediante la combinazione $\left(A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu b(x)\right)$. Inoltre, dal momento che il prodotto $F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$ è invariante per le trasformazioni di gauge (3.21), possiamo sostituire in esso il campo $A_\mu(x)$ con la combinazione $\left(A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu b(x)\right)$. Definendo allora [27]:

$$B_\mu(x) = \left(A_\mu(x) + \frac{1}{q}\partial_\mu b(x)\right),\tag{3.25}$$

3 Superconduttività ordinaria e superconduttività duale

che risulta invariante rispetto alle trasformazioni (3.21) e (3.23), la Lagrangiana (3.24) diventa ¹

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu h(x) \partial^\mu h(x) + q^2 \left(\eta + \frac{1}{\sqrt{2}} h(x) \right)^2 B_\mu(x) B^\mu(x) \\ & - \zeta^2 \left(\eta^2 h^2(x) + \frac{\eta\sqrt{2}}{2} h^3(x) + \frac{1}{8} h^4(x) \right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Cerchiamo adesso di capire che informazioni ci dà la Lagrangiana (3.26): in essa possiamo riconoscere un campo scalare $h(x)$ di massa $m_h^2 = 2\zeta^2\eta^2$; per quanto riguarda invece il campo vettoriale $B_\mu(x)$, il termine quadratico è del tipo

$$\mathcal{L}_B^2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2} m_B^2 B_\mu(x) B^\mu(x), \quad (3.27)$$

con

$$m_B^2 = 2q^2\eta^2. \quad (3.28)$$

Abbiamo così dimostrato quanto detto all'inizio del paragrafo: avendo promosso la simmetria $U(1)$ da globale a locale, il campo $b(x)$ si è combinato con il campo di gauge $A_\mu(x)$, generando un campo vettoriale massivo $B_\mu(x)$.

Verifichiamo infine che il numero dei gradi di libertà si sia conservato a seguito della rottura spontanea di simmetria. Inizialmente, dal punto di vista delle rotazioni spaziali avevamo quattro gradi di libertà: due per il campo scalare complesso $\varphi(x)$ e due per il campo vettoriale privo di massa $A_\mu(x)$. Alla fine ci siamo ritrovati con un campo scalare reale $h(x)$ che ha un grado di libertà e un campo vettoriale massiccio $B_\mu(x)$ che ha tre gradi di libertà. Infatti, dal momento che $B_\mu(x)$ ha assorbito il campo $b(x)$ come suo modo longitudinale, rispetto al campo $A_\mu(x)$ ha un grado di libertà in più.

3.5 La superconduttività vista come rottura spontanea di simmetria

In questo paragrafo vedremo che un superconduttore è semplicemente un materiale in cui l'invarianza di gauge elettromagnetica è rotta spontaneamente. Occorrono teorie dinamiche dettagliate per spiegare perché e a quale temperatura avviene questa rottura spontanea di simmetria; tuttavia, per spiegare gli aspetti

¹Questa volta il prodotto $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x)$ è l'abbreviazione di $-\frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x))^2$.

3.5 La superconduttività vista come rottura spontanea di simmetria

più significativi della superconduttività, come l'esclusione del campo magnetico, la quantizzazione del flusso e la resistività nulla, è sufficiente considerare la Lagrangiana efficace (3.24).

A livello microscopico, quello che succede in un superconduttore, è che gli elettroni formano correnti di superficie, che schermano il campo magnetico esterno. Per quanto detto in §3.2, c'è allora una lunghezza di schermaggio caratteristica λ , e dentro il superconduttore il campo magnetico esterno decade esponenzialmente

$$B(x) = B(0)e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad (3.29)$$

dove $x = 0$ rappresenta l'interfaccia tra il superconduttore ($x > 0$) e lo spazio esterno. Il meccanismo fisico che sta dietro la superconduttività è che, a causa dell'interazione mediata dai fononi, due elettroni si accoppiano per formare uno stato di singoletto, cioè la già citata coppia di Cooper. L'oggetto composto è allora descritto, a livello di una teoria efficace, da un campo scalare $\varphi(x)$ di carica $q = 2e$. La Lagrangiana efficace che descrive l'interazione di questo campo scalare con il campo elettromagnetico è data da (3.19). Il risultato (3.29) è allora spiegabile tramite il meccanismo di Higgs: il campo scalare che descrive la coppia di Cooper gioca il ruolo del campo di Higgs e possiede un valore di aspettazione sul vuoto diverso da zero. Di conseguenza, il fotone acquista una massa m_B e la sua equazione d'onda è data da

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_B^2)B_\nu = 0. \quad (3.30)$$

Allora sia il campo elettrico che quello magnetico soddisfano un'equazione di Klein-Gordon massiva

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m_B^2)\mathbf{E} = 0, \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m_B^2)\mathbf{B} = 0. \quad (3.31)$$

Se accendiamo un campo magnetico esterno, dopo qualche istante di tempo ci ritroveremo una configurazione di campo statica. In queste condizioni, il campo magnetico \mathbf{B} soddisfa le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{B} &= 0 & \text{per } x < 0; \\ (\nabla^2 - m_B^2) \mathbf{B} &= 0 & \text{per } x > 0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

3 Superconduttività ordinaria e superconduttività duale

La soluzione dell'equazione per $x > 0$ è stata già discussa in §3.2 ed è data dall'espressione (3.29), con

$$\lambda = \frac{1}{m_B} = \frac{1}{\sqrt{2}q\eta}. \quad (3.33)$$

Un'altra scala di lunghezza importante in un superconduttore è la lunghezza di correlazione del campo che descrive la coppia di Cooper. Indicheremo la lunghezza di correlazione con ξ ed il suo valore è dato dalla seguente espressione

$$\xi = \frac{1}{m_h} = \frac{1}{\sqrt{2}\zeta\eta}, \quad (3.34)$$

dove intendiamo con m_h la massa del campo di Higgs.

3.5.1 Quantizzazione del flusso

Concludiamo questa sezione discutendo un'altra caratteristica peculiare dei superconduttori, che consiste nella quantizzazione del flusso del campo magnetico. Vediamo come è possibile spiegare anche questo fenomeno utilizzando la Lagrangiana (3.24).

Si vede subito che il termine di interazione di questa Lagrangiana è minimo quando $A_\mu(x) = -\frac{1}{q}\partial_\mu b(x)$ [42].

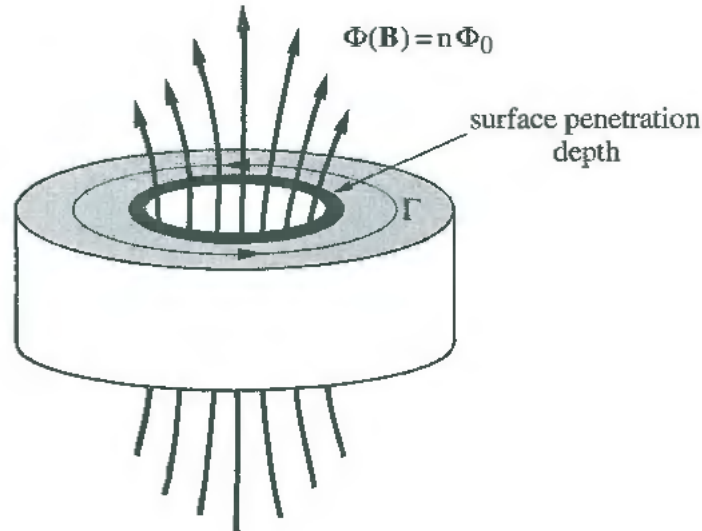


Figura 3.6: Quantizzazione del flusso magnetico attraverso un superconduttore ad anello [26].

Se consideriamo un superconduttore con una geometria toroidale, il flusso del

campo magnetico \mathbf{B} attraverso il foro \mathcal{F} dell'anello Γ è dato da

$$\int_{\mathcal{F}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{x} = -\frac{1}{q} \oint_{\Gamma} \vec{\nabla} b(x) = \frac{2n\pi}{q}, \quad (3.35)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto presente che in un giro completo lungo la circonferenza Γ il campo di Higgs $\varphi(x)$ non deve cambiare il suo valore e questo è possibile solo se $b(x) \rightarrow b(x) + 2n\pi$.

Il flusso intrappolato deve quindi essere un multiplo di $\frac{2\pi}{q}$. Nel 1961 è stato osservato sperimentalmente che il flusso intrappolato variava effettivamente a scatti, con uno scatto pari a

$$\Phi_0 = \frac{\pi}{e} \quad (3.36)$$

in accordo con la teoria secondo cui la superconduttività è dovuta alle formazione di coppie di Cooper di carica $q = 2e$.

3.6 Campo magnetico critico termodinamico

Possiamo ipotizzare che l'espulsione del campo magnetico all'interno dei superconduttori sia dovuta alla comparsa di correnti superficiali. Tali correnti, in presenza di un campo magnetico esterno, si distribuiscono in maniera tale da annullare il campo magnetico all'interno del superconduttore. Questo modo di ragionare ci porta a considerare un superconduttore come un diamagnete perfetto.

Tenendo conto che occorre una densità di energia pari a $\frac{B_e^2}{2}$ per espellere un campo magnetico esterno di intensità B_e , allora l'energia libera di Gibbs per unità di volume dello stato superconduttore è data da

$$g_s(T, B_e) = g_s(T, 0) + \frac{B_e^2}{2}. \quad (3.37)$$

Se invece assumiamo nulla la magnetizzazione del materiale nello stato normale, l'applicazione di un campo magnetico non cambia l'energia libera di Gibbs di un conduttore normale. Esiste quindi un intensità di campo magnetico massima B_c che può essere applicata ad un superconduttore affinché questo rimanga tale, ed è data da

$$g_n(T) = g_s(T, 0) + \frac{B_c^2}{2} \Rightarrow B_c(T) = \sqrt{2 [g_n(T) - g_s(T, 0)]} \quad (3.38)$$

dove $g_n(T)$ è la densità di energia libera di Gibbs del metallo nel suo stato normale.

3.7 Teoria di Landau-Ginzburg dei superconduttori

Alcune delle idee chiave della teoria di campo medio di Landau per le transizioni di fase sono state sviluppate anche nel contesto della superconduttività. In questa sezione, per brevità, tratteremo solo i punti maggiormente utili ai nostri scopi.

3.7.1 Parametro d'ordine complesso

Nella teoria di Landau-Ginzburg si assume che gli elettroni di superconduzione possano essere descritti da un parametro d'ordine complesso

$$\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad (3.39)$$

che gioca il ruolo di una funzione d'onda efficace. Il modulo quadro di tale parametro è uguale alla densità dei super-elettroni $n_s(\mathbf{r})$, cioè

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = n_s(\mathbf{r}). \quad (3.40)$$

Il parametro d'ordine ψ va a zero nella transizione stato normale-superconduttore. Inoltre, si assume che l'energia libera dello stato di superconduzione differisca da quella dello stato normale di una quantità che è sviluppabile in potenze di ψ , dove i coefficienti dello stato normale sono funzioni regolari della temperatura se siamo in assenza di campi magnetici. Così, per T vicino a T_c possiamo scrivere

$$f_s - f_n = \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \gamma|\nabla\psi|^2 + \dots, \quad (3.41)$$

dove f_s ed f_n rappresentano le energie libere per unità di volume dello stato superconduttore e normale. α , β , γ sono coefficienti fenomenologici. Il termine $\nabla\psi$ nell'Eq. (3.41) viene usato per tenere conto di eventuali fluttuazioni del parametro d'ordine e, quando queste fluttuazioni sono piccole, è sufficiente considerare solo il contributo dominante $|\nabla\psi|^2$.

In un superconduttore omogeneo in assenza di campo magnetico esterno, il parametro d'ordine ψ è indipendente dalla coordinata spaziale \mathbf{r} . In tal caso, il termine $|\nabla\psi|^2$ scompare e l'equilibrio del sistema è determinato dal punto di minimo per la densità di energia libera f_s . Affinché il minimo sia stabile è necessario che $\beta > 0$. Nel caso in cui $\alpha > 0$ il minimo si verifica per $|\psi|^2 = 0$, che corrisponde allo stato normale e al caso $T > T_c$. D'altra parte, per $\alpha < 0$, il minimo si verifica per

$$|\psi|^2 = |\psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta}, \quad (3.42)$$

3.7 Teoria di Landau-Ginzburg dei superconduttori

che corrisponde allo stato superconduttivo in cui $T < T_c$. Così, dalle Eq. (3.41) e (3.42), otteniamo che la densità di energia libera è data da

$$f_s - f_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta}, \quad (3.43)$$

il che mostra che l'energia libera dello stato superconduttivo è più bassa di quella dello stato normale. Osservando che α deve cambiare segno per $T = T_c$, la scelta più semplice che possiamo fare è supporre che, vicino a T_c

$$\begin{aligned} \alpha(T) &= \alpha_0(T - T_c), \quad \text{con } \alpha_0 > 0 \\ \beta(T) &\approx \beta(T_c). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Così, dall'Eq. (3.42) abbiamo

$$|\psi_0|^2 = \frac{\alpha_0}{\beta(T_c)}(T_c - T). \quad (3.45)$$

Analogamente l'Eq. (3.43) può essere riscritta nella forma

$$f_s - f_n = -\frac{\alpha_0^2}{2\beta(T_c)}(T_c - T)^2. \quad (3.46)$$

da cui possiamo trovare una discontinuità nel calore specifico per unità di volume vicino alla transizione di fase

$$(c_{vs} - c_{vn})_{T=T_c} = \left(-T \frac{\partial^2(f_s - f_n)}{\partial T^2} \right)_{T=T_c} = T_c \frac{\alpha_0^2}{\beta(T_c)}. \quad (3.47)$$

La transizione conduttore-superconduttore è quindi, all'interno di questo modello, una transizione di fase del secondo ordine.

Possiamo anche definire, in analogia con la definizione del campo magnetico critico data nell'Eq. (3.38), un campo critico termodinamico B_c per tutti i tipi di superconduttori imponendo la condizione $f_n(T) - f_s(T, 0) = \frac{B_c^2}{2}$. Allora, dalle Eq. (3.41), (3.42) e (3.44), in prossimità della temperatura di transizione T_c ($T < T_c$) otteniamo che

$$B_c(T) = \sqrt{\frac{\alpha^2(T)}{\beta(T)}} = T_c \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{\beta(T_c)}} \left(1 - \frac{T}{T_c} \right). \quad (3.48)$$

3.7.2 Equazioni di Landau-Ginzburg

Nei superconduttori non omogenei potrebbe non valere l'ipotesi che $\psi(r)$ sia costante nello spazio e quindi occorre mantenere il termine $|\nabla\psi|^2$. Se inoltre il mezzo è immerso in un campo magnetico, Landau e Ginzburg hanno proposto il seguente sviluppo dell'energia libera invariante di gauge

$$f_s - f_n = \alpha|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\nabla - e^*\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{B^2}{2}, \quad (3.49)$$

dove il terzo termine del membro a destra rappresenta l'energia cinetica degli elettroni di superconduzione; m^* ed e^* denotano rispettivamente la massa e la carica delle coppie di Cooper. La prima conclusione che possiamo trarre è che il coefficiente fenomenologico γ dell'Eq. (3.41) può essere identificato dalla relazione $\gamma = \frac{1}{2m^*}$.

L'equilibrio termodinamico del sistema caratterizzato dalla densità di energia libera (3.49) richiede che venga soddisfatto il seguente insieme di equazioni differenziali, note come *equazioni di Landau-Ginzburg*:

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m^*}(-i\nabla - e^*\mathbf{A})^2\psi = 0, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{j} = \frac{e^*}{2im^*}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*}|\psi|^2\mathbf{A}. \quad (3.51)$$

3.7.3 Il parametro di Landau-Ginzburg k

Anche dalla teoria di Landau-Ginzburg è possibile tirare fuori le due tipiche scale di lunghezza di un superconduttore: λ e ξ .

In particolare la lunghezza di correlazione ξ può essere ottenuta riscrivendo l'equazione di Landau-Ginzburg (3.50) nel modo seguente

$$\frac{1}{2m^*|\alpha(T)|}\nabla^2\psi' + \psi' - \psi'|\psi'|^2 = 0, \quad (3.52)$$

in cui abbiamo introdotto una nuova funzione adimensionale $\psi' = \frac{\psi}{|\psi_0|}$ e dove $|\psi_0|$ è la soluzione di equilibrio data da (3.42). Il coefficiente del primo termine dell'Eq. (3.52) ci consente di definire naturalmente

$$\xi^2 = \frac{1}{2m^*|\alpha(T)|}. \quad (3.53)$$

3.7 Teoria di Landau-Ginzburg dei superconduttori

Questa lunghezza, nel contesto della teoria di Landau-Ginzburg, rappresenta la scala spaziale su cui il parametro d'ordine varia quando si introduce nel superconduttore una qualche disomogeneità.

La seconda lunghezza caratteristica λ entra in gioco quando introduciamo effetti elettromagnetici. Se consideriamo un superconduttore immerso in un campo magnetico debole, al primo ordine in \mathbf{B} , $|\psi|^2$ può essere sostituito con $|\psi_0|^2$, e l'equazione di Landau-Ginzburg (3.51) può essere scritta come

$$\mathbf{j} = \frac{e^*}{2im^*}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*}|\psi_0|^2\mathbf{A}. \quad (3.54)$$

Prendendo il rotore del primo e del secondo membro si ottiene

$$\nabla \wedge \mathbf{j} = -\frac{e^{*2}}{m^*}|\psi_0|^2\mathbf{B}. \quad (3.55)$$

Quest'equazione è equivalente all'equazione di London (3.5) con lunghezza di penetrazione definita da

$$\lambda(T) = \sqrt{\frac{m^*}{e^{*2}|\psi_0|^2}} = \sqrt{\frac{m^*\beta}{e^{*2}|\alpha(T)|}}. \quad (3.56)$$

Questa lunghezza, dipendente dalla temperatura, caratterizza il range di variazione del campo magnetico \mathbf{B} nel contesto della teoria di Landau-Ginzburg.

Introduciamo infine il cosiddetto parametro di Landau-Ginzburg k del superconduttore. La sua definizione è

$$k \equiv \frac{\lambda}{\xi} = \frac{m^*}{|e^*|}\sqrt{2\beta} \quad (3.57)$$

Nel contesto di questo modello fenomenologico, il parametro k è indipendente dalla temperatura e, come vedremo nella prossima sezione, ci consente di caratterizzare i materiali superconduttori. Osserviamo inoltre che, per mezzo delle Eq. (3.48) e (3.56), il parametro k può essere scritto mediante il campo magnetico critico B_c e la lunghezza di penetrazione λ come

$$k = \sqrt{2}|e^*|\lambda^2 B_c. \quad (3.58)$$

Infine, tramite le Eq. (3.57) e (3.58) otteniamo la seguente relazione

$$B_c = \frac{1}{\sqrt{2}|e^*|\lambda\xi}. \quad (3.59)$$

3.8 Confronto tra modello di Higgs e modello di Landau-Ginzburg

In questo paragrafo vogliamo evidenziare come il modello di Higgs ed il modello di Landau-Ginzburg, pur utilizzando un formalismo diverso, portano a risultati equivalenti. A tal proposito, ricapitoliamo i risultati trovati in (3.33), (3.34), (3.56) e (3.53).

- Modello di Higgs

$$\begin{aligned}\lambda &\propto \frac{1}{\eta}, \\ \xi &\propto \frac{1}{\zeta\eta}.\end{aligned}\tag{3.60}$$

- Modello di Landau-Ginzburg

$$\begin{aligned}\lambda &\propto \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \\ \xi &\propto \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.\end{aligned}\tag{3.61}$$

È evidente che, pur avendo un significato fisico diverso, il parametro d'ordine di Landau-Ginzburg $\psi(\mathbf{r})$ ed il campo di Higgs $\varphi(x)$ devono giocare ruoli analoghi nella descrizione del fenomeno. Così, confrontando la Lagrangiana di Higgs (3.19) e lo sviluppo dell'energia libera di Landau-Ginzburg (3.49), viene naturale uguagliare i coefficienti relativi ai termini quadratici e quartici delle due espressioni:

$$\begin{aligned}\alpha &\leftrightarrow \zeta^2\eta^2, \\ \beta &\leftrightarrow \zeta^2.\end{aligned}\tag{3.62}$$

Da questa identificazione è facile vedere che, a meno di costanti di proporzionalità, le lunghezze di penetrazione e di correlazione ottenute con i due modelli sono formalmente equivalenti.

3.9 Superconduttori di tipo I e di tipo II

In questa sezione vedremo come il valore del parametro k caratterizza il tipo di superconduttore. In particolare distinguiamo due tipi di superconduttore:

- se $k < \frac{1}{\sqrt{2}}$ il superconduttore è detto essere di tipo I;
- se $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$ il superconduttore è detto essere di tipo II.

Un superconduttore di tipo I è caratterizzato dal fatto che, sotto l'applicazione di un campo magnetico maggiore di B_c , diventa un metallo normale e non presenta più effetto Meissner. Un superconduttore di tipo II presenta invece un'ulteriore fase, compresa tra due campi magnetici esterni B_{c1} e B_{c2} in cui il campo magnetico esterno penetra parzialmente sotto forma di tubi di flusso quantizzato; sotto B_{c1} presenta effetto Meissner completo e sopra B_{c2} diventa un metallo normale e non presenta più effetto Meissner.

Per capire come nasce la distinzione tra superconduttori di tipo I e II useremo dapprima degli argomenti energetici [42]. Successivamente, sotto determinate ipotesi, vedremo come sia possibile linearizzare l'equazione di Landau-Ginzburg (3.50) e trovare l'esatta determinazione del parametro $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ che discrimina tra superconduttori di tipo I e II.

3.9.1 Argomento energetico

Consideriamo un superconduttore sottoposto ad un campo magnetico esterno di intensità B e indichiamo con:

- W_n la densità di energia dello stato normale;
- W_s la densità di energia di un superconduttore capace di espellere completamente il campo magnetico esterno;
- W_v la densità di energia di un superconduttore che consente la penetrazione del campo magnetico esterno sotto forma di tubi di flusso.

Poniamo inoltre uguale a zero la densità di energia del superconduttore in assenza di un campo magnetico esterno. Allora si ha

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{2}B_c^2 \\ W_s &= \frac{1}{2}B^2 \\ W_v &\approx n\pi\xi^2 \times \left(\frac{1}{2}B_c^2\right) + \frac{1}{2}B^2 \times \begin{cases} 1 - n\pi\lambda^2 & n \leq \frac{1}{\pi\lambda^2} \\ 0 & n \geq \frac{1}{\pi\lambda^2} \end{cases} \quad \text{con } n < \frac{1}{\pi\xi^2} \end{aligned}, \quad (3.63)$$

dove con n intendiamo il numero di tubi di flusso per unità di superficie. Le prime due relazioni in (3.63) sono banali se teniamo presente quanto detto in

§3.6. Per capire l'ultima relazione è invece utile fare riferimento alla Fig. (3.7). Se il campo magnetico penetra nel superconduttore sotto forma di tubi di flusso,

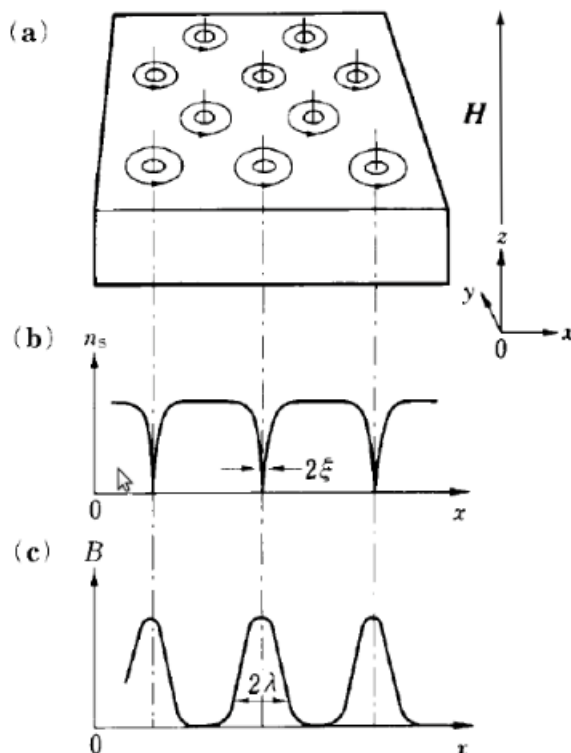


Figura 3.7: Riportiamo un'illustrazione schematica dello stato misto in un superconduttore ideale di tipo II [40]. In a) viene raffigurata la distribuzione di flusso magnetica che penetra all'interno del superconduttore. I cerchi con le frecce indicano le correnti di schermaggio che fluiscono attorno alle linee di flusso quantizzate. b) mostra la distribuzione di densità dei superelettroni, dove ξ denota la lunghezza di correlazione. c) mostra invece la distribuzione di densità del flusso magnetico, dove λ denota la lunghezza di penetrazione.

per ogni tubo si ha un core cilindro di raggio ξ di metallo normale (che dà origine al contributo $\frac{1}{2}n\pi\xi^2B_c^2$) e un cilindro concentrico di raggio λ nel quale penetra il campo magnetico. Il campo magnetico deve essere allora espulso da una frazione $1 - n\pi\lambda^2$ del campione se $n < \frac{1}{\pi\lambda^2}$, o dall'intero materiale se $n > \frac{1}{\pi\lambda^2}$ ². La condizione $n < \frac{1}{\pi\xi^2}$ consente ai cilindri di metallo normale di non sovrapporsi. Se questa condizione non fosse verificata l'intero campione sarebbe un metallo normale e la sua densità energetica sarebbe W_n .

Lo stato energeticamente favorito risulta quindi determinato dal minimo tra W_n , W_s e W_v . Analizziamo allora in dettaglio i casi $\xi < \lambda$ e $\xi > \lambda$.

²I fattori $1/2$ e π presenti in (3.63) sono puramente indicativi e sono stati inseriti per fare capire la loro origine.

- Caso $\xi > \lambda$ (superconduttori di tipo I)

In questa circostanza, la condizione $n < \frac{1}{\pi\xi^2}$ implica $n < \frac{1}{\pi\lambda^2}$.

Per $B < B_c$ si ha $W_v > \frac{1}{2}B^2 + n\pi(\xi^2 - \lambda^2)\frac{B_c^2}{2} > W_s$, quindi sicuramente non si ha formazione di tubi di flusso. Inoltre poiché si ha anche $W_n > W_s$, il materiale si comporta come un superconduttore che espelle completamente il campo magnetico.

Per $B > B_c$ si ha $W_v > \frac{1}{2}B_c^2 [n\pi(\xi^2 - \lambda^2) + 1] > W_n$ e $W_s > W_n$. Quindi il campione diventa un metallo normale.

- Caso $\xi < \lambda$ (superconduttori di tipo II)

Nei superconduttori di tipo II abbiamo bisogno di distinguere i campi magnetici in tre determinati intervalli: $B < B_{c1}$, $B_{c1} < B < B_{c2}$, e $B > B_{c2}$, dove B_{c1} e B_{c2} sono due campi magnetici critici, dell'ordine

$$B_{c1} \approx B_c \frac{\xi}{\lambda}, \quad B_{c2} \approx B_c \frac{\lambda}{\xi}. \quad (3.64)$$

È possibile inoltre dimostrare [7] che i superconduttori di tipo II portano l'unità di flusso minima $\frac{\pi}{e}$, per cui possiamo scrivere

$$n = \frac{eB}{\pi}. \quad (3.65)$$

Se $B < B_{c1} = B_c \frac{\xi}{\lambda}$, usando la relazione (3.59) è facile dimostrare che $1 - n\pi\lambda^2 > 0$, e quindi $W_v = \frac{1}{2}n\pi\xi^2 B_c^2 + \frac{1}{2}B^2(1 - n\pi\lambda^2)$. D'altra parte, $B < B_{c1}$ implica $B_c^2\xi^2 - B^2\lambda^2 > 0$, per cui $W_v > W_s$. Allo stesso tempo $B < B_{c1}$ e $\xi < \lambda$ implicano $W_n > W_s$ e quindi il campione si comporta come un superconduttore che espelle completamente il campo magnetico.

Se $B \gtrsim B_{c1}$ si ha $B_c^2\xi^2 - B^2\lambda^2 < 0$ e quindi, nel caso $1 - n\pi\lambda^2 > 0$ possiamo scrivere $W_v < W_s \approx \frac{1}{2}B_{c1}^2 < W_n$. Se $B > B_{c1}$ si arriverà al caso in cui $1 - n\pi\lambda^2 < 0$ e quindi $W_v = \frac{1}{2}n\pi\xi^2 B_c^2 \approx \left(\frac{B_{c1}}{B}\right) W_s \approx \left(\frac{B}{B_{c2}}\right) W_n$. Quindi per $B_{c1} < B < B_{c2}$ si ha $W_v < W_n$ e $W_v < W_s$ e quindi il superconduttore si troverà nello stato in cui lascia penetrare il campo magnetico sotto forma di tubi di flusso.

Per $B > B_{c2}$ si trova invece che $W_n < W_s$ e $W_n < W_v$ e quindi il materiale si comporterà come un conduttore normale.

3.9.2 Determinazione del valore di confine $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Per dimostrare che $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è il valore di confine tra un superconduttore di tipo I e II consideriamo un mezzo superconduttivo infinito e un campo magnetico esterno uniforme applicato lungo la direzione z : $\mathbf{B}_e = (0, 0, B_e)$. Quando il campo applicato è sufficientemente grande il mezzo si trova nello stato di conduttore normale con parametro d'ordine $|\psi| = 0$. Se l'intensità del campo applicato viene gradualmente diminuita, possiamo chiederci a quale valore questo campo deve essere ridotto affinché nel materiale cominci a manifestarsi la presenza di zone superconduttrici. Poiché durante la prima comparsa di regioni superconduttrici ψ è piccolo, possiamo linearizzare l'Eq. (3.50) trascurando il termine non lineare $\beta|\psi|^2\psi$. Inoltre, la richiesta che ψ sia piccolo fa sì che il campo esterno penetri quasi completamente nel mezzo, e così possiamo scrivere approssimativamente $\mathbf{B} = \mathbf{B}_e$. Allora possiamo scegliere il potenziale vettore \mathbf{A} nel modo seguente

$$\mathbf{A} = (0, B_e x, 0). \quad (3.66)$$

In questo modo l'equazione (3.50) diventa

$$-\frac{1}{2m^*} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2m^*} \left(-i \frac{\partial}{\partial y} - e^* B_e x \right)^2 \psi = |\alpha| \psi \quad (3.67)$$

L'Eq. (3.67) ha la forma di un'equazione di Schrödinger per una particella di massa m^* , carica e^* e spin zero che si muove in un campo magnetico uniforme diretto lungo l'asse z , dove α gioca il ruolo dell'autovalore dell'energia.

Allora possiamo provare a scrivere ψ nella seguente forma

$$\psi(x, y, z) = u(x) e^{ik_y y} e^{ik_z z} \quad (3.68)$$

dove $u(x)$ è una funzione da determinare. Così, sostituendo l'Eq. (3.68) nell'Eq. (3.67), troviamo

$$-\frac{1}{2m^*} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{(e^* B_e)^2}{2m^*} (x - x_0)^2 u = \left(|\alpha| - \frac{k_z^2}{2m^*} \right) u, \quad (3.69)$$

che ha la forma di un'equazione di Schrödinger per una particella che si muove sotto un potenziale armonico centrato in

$$x_0 = \frac{k_y}{e^* B_e}. \quad (3.70)$$

Gli autovalori dell'Eq. (3.69) sono allora dati da

$$|\alpha| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega + \frac{k_z^2}{2m^*}, \quad \text{con } \omega = \frac{|e^*|B_e}{m^*}. \quad (3.71)$$

Possiamo riscrivere l'Eq. (3.71) nella seguente forma

$$B_e = \frac{2m^*}{(2n+1)|e^*|} \left(|\alpha| - \frac{k_z^2}{2m^*}\right). \quad (3.72)$$

Ovviamente il campo a cui siamo interessati è il campo più alto per cui il fenomeno della superconduttività comincia a manifestarsi. Questo corrisponde a porre $n = 0$ e $k_z = 0$ nell'Eq. (3.72). Indicando questo campo con B_{c2} si ha

$$B_{c2} = \frac{2m^*|\alpha|}{|e^*|} \quad (3.73)$$

Inoltre combinando le Eq. (3.48) e (3.57) otteniamo

$$B_{c2} = k\sqrt{2}B_c \quad (3.74)$$

Così possiamo vedere che per $k > \frac{1}{\sqrt{2}}$ si ha $B_{c2} > B_c$; lo stato di superconduttore misto comincia ad apparire per $B_e \leq B_{c2}$. Come anticipato all'inizio del paragrafo, la discriminazione tra superconduttori di tipo I e di tipo II è data dal valore $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ del parametro di Landau-Ginzburg.

È anche possibile avere una stima del campo magnetico critico B_{c1} . Questa stima può essere fatta richiedendo che il flusso all'interno di un cilindro di raggio λ risulti uguale al quanto di flusso Φ_0

$$\pi\lambda^2 B_{c1} \approx \Phi_0 = \frac{\pi}{e} = \frac{2\pi}{|e^*|}. \quad (3.75)$$

Così ci aspettiamo approssimativamente che

$$B_{c1} \approx \frac{2}{\lambda^2|e^*|} = 2\sqrt{2}\frac{B_c}{k}, \quad (3.76)$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la relazione (3.58).

3.10 Modello a superconduttore duale per il vuoto della QCD

Nelle precedenti sezioni abbiamo trattato alcuni aspetti della teoria della superconduttività ordinaria; dobbiamo però cercare di capire la connessione che può esistere tra questo fenomeno e il meccanismo del confinamento del colore all'interno della materia adronica.

A tal proposito affronteremo adesso, a livello qualitativo, il modello a superconduttore duale per il vuoto della QCD, ipotizzato da 't Hooft [32], Mandelstam [34] e Parisi [38].

Chiariamo dapprima il significato dell'aggettivo duale: nel caso dell'elettromagnetismo, un superconduttore *duale* è un superconduttore in cui i ruoli dei campi elettrici e magnetici risultano scambiati. Così, mentre in un superconduttore ordinario le cariche elettriche condensano, dando luogo alle coppie di Cooper, in un superconduttore duale le cariche che condensano sono quelle magnetiche.

In termini del tensore di campo $F_{\mu\nu}$, lo scambio dei ruoli tra campo elettrico e magnetico corrisponde alla trasformazione di dualità

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu}, \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \rightarrow -F_{\mu\nu}. \quad (3.77)$$

Vediamo adesso come la presenza di cariche magnetiche di colore, la loro eventuale condensazione e l'ipotesi che il vuoto della QCD si comporti come un superconduttore duale potrebbero spiegare il confinamento dei quark.

Per capire il perché, immaginiamo una coppia quark-antiquark statica in cui le particelle sono separate da una distanza R . I quark e gli antiquark, avendo cariche di colore opposte, producono un campo cromoelettrico statico. Le linee di campo escono dalla particella carica positivamente e terminano sulla particella carica negativamente. Se la coppia $q\bar{q}$ fosse immersa in un mezzo normale (non superconduttore), il campo cromoelettrico sarebbe descritto da un potenziale di Coulomb e l'energia del sistema cambierebbe come $-e^2/R$, dove e è la carica elettrica di colore dei quark. Tuttavia, se la coppia $q\bar{q}$ fosse immersa in un superconduttore duale, l'effetto Meissner (duale) cercherebbe di espellere il campo cromoelettrico. In presenza delle cariche elettriche di colore, la legge di Gauss impedisce che il campo cromoelettrico sparisca completamente, poiché il flusso del campo elettrico deve trasportare la carica elettrica di colore dal quark (antiquark) all'antiquark (quark). Il meglio che l'effetto Meissner può fare è comprimere le linee di campo cromoelettrico in uno spazio minimale, creando così un sottile tu-

bo di flusso che congiunge le due sorgenti di colore, come mostrato in Fig. (3.8).

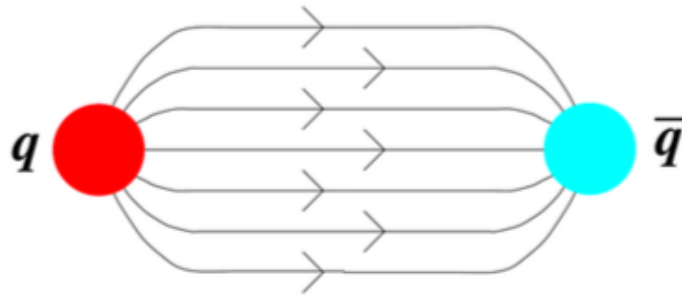


Figura 3.8: Linee di flusso cromoelettrico tra una coppia $q\bar{q}$.

La geometria del tubo di flusso ci assicura che l'energia cresce linearmente con la distanza R , generando un potenziale di confinamento lineare (termine di stringa) tra il quark e l'antiquark.

Concludiamo il paragrafo sottolineando che, ad oggi, non esiste ancora una spiegazione formale riguardo alla formazione dinamica di monopoli cromomagnetici nel vuoto della QCD. Tuttavia, simulazioni su reticolo svolte in passato hanno dato evidenze numeriche in favore della loro presenza e della loro condensazione. Così, per ottenere un'informazione più completa sul meccanismo di confinamento del colore e sulla dinamica del vuoto, risulta utile effettuare delle simulazioni che ci consentano di studiare la struttura dei tubi di flusso cromoelettrici nel contesto del modello a superconduttore duale per il vuoto della QCD.

3.11 Caratteristiche dei tubi di flusso cromoelettrici

Se vogliamo verificare che lo scenario a superconduttore duale sia consistente per descrivere lo stato fondamentale della QCD, è importante controllare che i tubi di flusso cromoelettrici abbiano un profilo analogo a quello dei tubi di flusso della superconduttività ordinaria.

Ad oggi, le caratteristiche fondamentali che sono state scoperte sui tubi di flusso cromoelettrici sono le seguenti:

- Sono quasi completamente formati dalla componente del campo cromoelettrico parallela alla retta congiungente la coppia $q\bar{q}$. Denoteremo tale componente con il simbolo E_{\parallel} .
- Variano molto lentamente lungo l'asse del tubo.

3 Superconduttività ordinaria e superconduttività duale

- Decrescono rapidamente lungo la direzione perpendicolare alla retta congiungente la coppia $q\bar{q}$. Indicheremo tale direzione con il simbolo x_t .

Per studiare il profilo trasverso del campo cromoelettrico longitudinale E_l abbiamo scelto di usare i risultati ottenuti da J.R. Clem nell'articolo [14]; in questo lavoro, assumendo un semplice modello variazionale per il valore del parametro d'ordine normalizzato di un vortice isolato, si arriva a delle semplici espressioni analitiche per il campo magnetico e la densità di supercorrente che risolvono la legge di Ampère e l'equazione di Landau-Ginzburg. Adattando i risultati di Clem trovati per il campo magnetico al profilo trasverso del campo cromoelettrico si ottiene la seguente relazione,

$$E_l(x_t) = \frac{\phi}{2\pi} \frac{1}{\lambda \xi_\nu} \frac{K_0(R/\lambda)}{K_1(\xi_\nu/\lambda)}, \quad (3.78)$$

con

$$R = \sqrt{x_t^2 + \xi_\nu^2}. \quad (3.79)$$

In (3.78) ϕ rappresenta il flusso esterno, ξ_ν è un parametro radiale variazionale del core (che risulta essere dell'ordine della lunghezza di correlazione ξ), λ è la lunghezza di penetrazione di London, mentre K_0 e K_1 sono le funzioni di Bessel modificate di ordine zero ed uno.

L' Eq. (3.78) può essere riscritta come

$$E_l(x_t) = \frac{\phi}{2\pi} \frac{\mu^2}{\alpha} \frac{K_0[(\mu^2 x_t^2 + \alpha^2)^{1/2}]}{K_1[\alpha]}, \quad (3.80)$$

con

$$\mu = \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{\lambda}{\xi_\nu}. \quad (3.81)$$

Per ottenere il parametro di Landau-Ginzburg k occorre usare invece la seguente funzione di α ,

$$k = \frac{\sqrt{2}}{\alpha} \left[1 - \frac{K_0^2(\alpha)}{K_1^2(\alpha)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.82)$$

La funzione di Clem è stata già ampiamente utilizzata in letteratura per teorie di pura gauge $SU(N)$ e sembra descrivere in maniera soddisfacente i risultati numerici che sono stati finora ottenuti dalle misure di tubi di flusso. Rispetto ad altre funzioni che sono state proposte per descrivere il profilo trasverso dei tubi di flusso, la funzione di Clem ha il vantaggio di essere valida anche per $x_t = 0$.

4 Simulazioni numeriche

In questo capitolo riporteremo i risultati delle simulazioni numeriche riguardanti lo studio del tubo di flusso cromoelettrico generato da una coppia statica $q\bar{q}$ per la QCD con $N_f = 2 + 1$ sapori, lavorando con e senza campi magnetici esterni. Prima di riportare i risultati numerici, formuleremo in domande gli obiettivi di questa tesi, faremo qualche piccola considerazione teorica e descriveremo il modo in cui sono state effettuate le simulazioni.

4.1 Obiettivi di questo lavoro

In questo lavoro, nel contesto del modello a superconduttore duale per il vuoto della QCD, abbiamo studiato la formazione di tubi di flusso cromoelettrici nel caso di una discretizzazione reticolare della QCD con numero di sapori $N_f = 2 + 1$. In passato questo modello è stato studiato per teorie di pura gauge $SU(N)$ e sembra fornire risultati promettenti. Tuttavia, supposto che lo stato fondamentale della QCD si possa assimilare ad un superconduttore duale, non è ancora chiaro se il vuoto della teoria si comporti come un superconduttore duale di tipo I o II. Ad esempio, nel caso di una teoria di pura gauge $SU(3)$, P. Cea et al. [13] hanno trovato che

$$\begin{aligned}\lambda &= (0.1676 \pm 0.0023) \text{ fm} \\ k &= 0.243 \pm 0.0088.\end{aligned}\tag{4.1}$$

D'altra parte, sempre studiando una teoria di pura gauge $SU(3)$, M. Cardoso et al. [11] hanno trovato che

$$\begin{aligned}\lambda &= (0.2013 \pm 0.0174) \text{ fm} \\ k &= 1.218 \pm 0.109.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Nel primo caso sembra che il vuoto di $SU(3)$ si comporti come un superconduttore duale di tipo I, mentre nel secondo sembra che si comporti come un superconduttore duale di tipo II. Le misure della lunghezza di penetrazione λ , seppure in

4 Simulazioni numeriche

disaccordo, risultano invece più compatibili.

Così, nella prima parte di questo lavoro proveremo a rispondere alle seguenti due domande:

- Il modello a superconduttore duale risulta essere ancora un meccanismo promettente se introduciamo nella teoria la presenza dei quark?
- Se sì, a che tipologia di superconduttore è assimilabile lo stato fondamentale della QCD?

Nella seconda parte di questo lavoro, sempre per la QCD con $N_f = 2 + 1$ sapori, abbiamo studiato il tubo di flusso cromoelettrico generato da una coppia $q\bar{q}$ statica, in presenza di un campo magnetico esterno uniforme e costante. L'interesse per questo genere di studi è scaturito dai risultati trovati in [8], di cui abbiamo brevemente discusso in §2.7.2. Dal momento che è stata rivelata un'anisotropia nel potenziale della coppia statica $q\bar{q}$ in presenza di un campo magnetico, l'ultima domanda a cui ci proponiamo di rispondere è la seguente:

- In presenza di un campo magnetico esterno uniforme e costante è possibile rivelare delle anisotropie nei profili dei tubi di flusso cromoelettrici?

4.2 Misure di tubo di flusso su reticolo

Per studiare le configurazioni di campo per una teoria di gauge $SU(N)$ prodotte da una coppia $q\bar{q}$ statica abbiamo usato la seguente funzione di correlazione connessa [23], [24]:

$$\rho_W = \frac{\langle \text{Tr}(WLU_P L^\dagger) \rangle}{\langle \text{Tr}(W) \rangle} - \frac{1}{N} \frac{\langle \text{Tr}(U_P) \text{Tr}(W) \rangle}{\langle \text{Tr}(W) \rangle}. \quad (4.3)$$

Nel correlatore (4.3) U_P denota una plaquette, W indica un loop di Wilson, mentre L ed L^\dagger rappresentano due linee di Schwinger. In Fig. (4.1) mostriamo la struttura semplificata dell'operatore appena introdotto.

La funzione di correlazione connessa definita in (4.3) è in grado di misurare l'intensità del campo cromoelettrico. Infatti nel limite continuo *naïve* si ottiene

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho_W = a^2 g [\langle F_{\mu\nu} \rangle_{q\bar{q}} - \langle F_{\mu\nu} \rangle_0], \quad (4.4)$$

dove $\langle \ \ \rangle_{q\bar{q}}$ indica il valore medio in presenza di una coppia statica $q\bar{q}$ e $\langle \ \ \rangle_0$ il valore medio sul vuoto. In base all' Eq. (4.4) definiamo il tensore di campo di

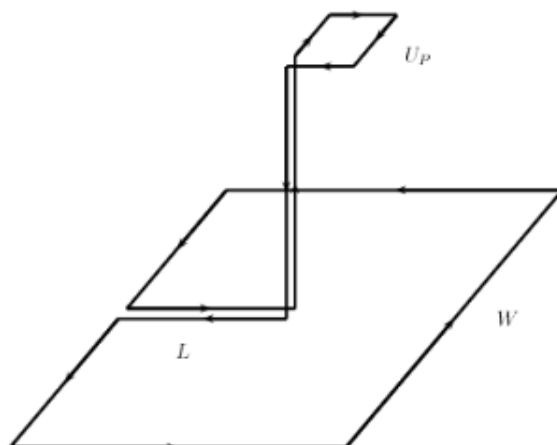


Figura 4.1: Il correlatore connesso 4.3 tra la plaquette U_P ed il loop di Wilson W . La sottrazione che appare nella definizione del correlatore non è stata disegnata esplicitamente.

colore come

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{g} \rho_W(x). \quad (4.5)$$

Facendo variare la distanza e l'orientazione della plaquette U_P rispetto al loop di Wilson W è possibile sondare la distribuzione del campo di colore del tubo di flusso. In particolare, se manteniamo l'orientazione della plaquette parallela al loop di Wilson e facciamo variare la distanza tra U_P e W , riusciamo a ricostruire il profilo trasverso del campo cromoelettrico longitudinale.

Dovrebbe a questo punto essere chiaro il nostro modo di procedere per studiare le proprietà del vuoto della QCD: l'idea è di fittare la funzione di Clem (3.80) con i dati del tubo di flusso che si ottengono mediante l'espressione (4.5).

In questo modo, nell'ipotesi in cui il vuoto della teoria sia assimilabile ad un superconduttore duale, possiamo ricavare i parametri fondamentali che contraddistinguono un superconduttore: k , λ e ξ . I valori di k e λ verranno fuori direttamente dal best-fit usando le formule (3.80), (3.81) e (3.82); per trovare la lunghezza di correlazione ξ , combineremo i valori trovati di k e λ tramite la relazione $\xi = \frac{\lambda}{k}$.

4.3 Smearing delle configurazioni di gauge

Quando si studiano le funzioni di correlazione, si è solitamente interessati al comportamento a grandi distanze. D'altra parte, quando si ha a che fare con le teorie di campo quantistiche, ci si imbatte frequentemente in violente fluttuazioni a breve distanza del campo di gauge. È possibile migliorare notevolmente il

4 Simulazioni numeriche

segnale di un correlatore effettuando uno *smearing* (levigatura) del campo di gauge, o nella direzione temporale o contemporaneamente nella direzione spaziale e temporale.

Quando si effettua lo smearing, tipicamente si sostituisce una variabile di link con delle medie locali su piccoli percorsi che connettono le estremità della variabile di link. Questa procedura è covariante di gauge e non occorre quindi fissare la gauge. Finché lo smearing è abbastanza locale, cioè l'operazione di smearing collega solo un numero fissato di link, il comportamento del correlatore a grandi distanze non dovrebbe subire grosse modifiche.

Gli algoritmi di smearing sono solitamente una media di prodotti di link lungo determinati percorsi che connettono le estremità di un dato link. Nel caso di $SU(2)$ questa media è proporzionale ad un elemento del gruppo, mentre non lo è per il gruppo $SU(3)$. In quest'ultimo caso occorre proiettare la media su una matrice di $SU(3)$.

Discutiamo adesso brevemente le tre varianti degli algoritmi di smearing di cui abbiamo fatto uso nelle nostre simulazioni.

- APE-smearing [2]: in questo caso la media viene eseguita sul link originale $U_{n,\mu}$ e sulle 6 *staple* perpendicolari che connettono le estremità del link. Le staple sono il prodotto di tre opportune variabili di link che insieme al link originale formano delle plaquette. In particolare si ha

$$V_{n,\mu} = (1 - \alpha)U_{n,\mu} + \frac{\alpha}{6} \sum_{\nu \neq \mu} C_{\mu\nu}(n), \quad (4.6)$$

$$C_{\mu\nu}(n) = U_{n,\nu}U_{n+\nu,\mu}U_{n+\mu,\nu}^\dagger + U_{n-\nu,\nu}^\dagger U_{n-\nu,\mu}U_{n-\nu+\mu,\nu},$$

dove il parametro reale α , che dipende dall'accoppiamento di gauge, può essere regolato. La proiezione della somma su $SU(3)$ viene generalmente eseguita massimizzando $Re(Tr[XV_{n,\mu}^\dagger])$ con $X \in SU(3)$ e usando X come nuova variabile di link $U'_{n,\mu}$.

- Smearing HYP [29]: in questo approccio la media viene realizzata su percorsi che giacciono all'interno di ipercubi che contengono la variabile di link. Anche in questo caso la somma deve essere proiettata sul gruppo $SU(3)$.
- Stout smearing [35]: questo metodo utilizza un metodo di proiezione particolare, definendo il nuovo link dopo un passo di smearing come

$$U'_{n,\mu} = e^{iQ_\mu(n)}U_{n,\mu}. \quad (4.7)$$

$Q_\mu(n)$ è una matrice hermitiana a traccia nulla costituita da staple,

$$Q_\mu(n) = \frac{i}{2} \left(\Omega_\mu(n)^\dagger - \Omega_\mu(n) - \frac{\mathbb{1}}{3} Tr [\Omega_\mu(n)^\dagger - \Omega_\mu(n)] \right),$$

$$\Omega_\mu(n) = \left(\sum_{\nu \neq \mu} \rho_{\mu\nu} C_{\mu\nu}(n) \right) U_{n,\mu}^\dagger. \quad (4.8)$$

Le $C_{\mu\nu}$ sono le stesse matrici definite in (4.6), mentre i fattori di peso reali $\rho_{\mu\nu}$ sono parametri regolabili. Le scelte più comuni sono o prendere $\rho_{\mu\nu}$ costanti, $\rho_{\mu\nu} = \rho$, oppure eseguire lo smearing soltanto sui link spaziali: $\rho_{\mu 4} = \rho_{4\mu} = 0$, $\rho_{nm} = \rho$. Le nuove variabili di link hanno le stesse proprietà di trasformazione di gauge dei link originali. Ovviamente, questo metodo di ottenere un elemento di $SU(3)$ da una somma di matrici può essere usato anche per altri tipi di percorsi.

I metodi di smearing appena descritti possono essere iterati. Occorre però tenere presente che, con l'aumentare dei passi di smearing, le variabili di link che verranno coinvolte si troveranno a distanze sempre maggiori. Quindi, se si esegue un numero di passi di smearing molto grande si potrebbe alterare il valore dell'osservabile che si vuole misurare. Nonostante ciò, la maggior parte degli effetti positivi dei metodi di smearing si manifesta solitamente dopo i primi step di iterazione.

4.4 Metodi numerici usati per le simulazioni

Come già accennato, le nostre simulazioni numeriche sono state realizzate per la QCD a $N_f = 2 + 1$ sapori, utilizzando i tre quark più leggeri, u , d ed s , e imponendo che i quark u e d abbiano la stessa massa. Per discretizzare la teoria abbiamo fatto uso della formulazione staggered (con il trucco della radice quarta), avendo però iterato due volte il metodo *stout smearing* per le variabili di link appartenenti a $SU(3)$ che compaiono nell'operatore di Dirac.

Se vogliamo inserire nella teoria un campo magnetico esterno \vec{B} , per quanto detto in §2.7.1, occorre aggiungere una fase $U(1)$ all'usuale variabile di link di $SU(3)$ che entra in gioco nell'operatore di Dirac. Dal momento che abbiamo lavorato con un campo magnetico uniforme e costante orientato lungo l'asse z , abbiamo usato le prescrizioni indicate nelle Eq. (2.97), (2.98), (2.99) e (2.100). A differenza delle variabili di link $SU(3)$, per i fattori di fase non è stato usato il metodo stout smearing.

4 Simulazioni numeriche

La funzione di partizione euclidea che abbiamo scelto di usare è allora data da

$$Z = \int \mathcal{D}U \prod_{f=u,d,s} \left(\det[D_{st.}^f] \right)^{\frac{1}{4}} e^{-S_G[U]} \quad (4.9)$$

dove f denota l'indice di sapore e

$$\left(D_{st.}^f \right)_{nm} = am_f \delta_{n,m} + \sum_{\mu=1}^4 \frac{\eta_{n,\mu}}{2} \left(u_{n,\mu}^f U_{n,\mu}^{(2)} \delta_{n,m-\mu} - u_{n-\mu,\mu}^{f*} U_{n-\mu,\mu}^{(2)\dagger} \delta_{n,m+\mu} \right). \quad (4.10)$$

rappresenta l'operatore di Dirac staggered.

Per quanto riguarda il settore di pura gauge, invece dell'azione di Wilson (2.54) abbiamo utilizzato l'azione migliorata di Symanzik [15]

$$S_G[U] = S_{imp.} = -\frac{\beta}{3} \sum_{n,\mu \neq \nu} \left(\frac{5}{6} W_{\mu\nu}^{1 \times 1}(n) - \frac{1}{12} W_{\mu\nu}^{1 \times 2}(n) \right), \quad (4.11)$$

che coinvolge la parte reale della traccia delle plaquette e di loop rettangolari 1×2 . È possibile infatti dimostrare che, quando si considera il limite continuo, l'uso dell'azione migliorata (4.11) porta ad una convergenza più veloce di quella di Wilson (2.54).

Anche per questa azione il legame tra β e l'accoppiamento di gauge g è dato da

$$\beta = \frac{2N_c}{g^2}. \quad (4.12)$$

Così, è possibile ridefinire il tensore di campo (4.5) nel modo seguente:

$$F_{\mu\nu}(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2N_c}} \rho_W(x). \quad (4.13)$$

Le simulazioni numeriche sono state realizzate al valore fisico della massa del pione, $m_\pi \approx 135$ MeV, per tre diversi valori del passo reticolare a , usando i parametri nudi riportati nella Tabella 4.1 (il rapporto $m_s/m_{u,d}$ è stato fissato al suo valore fisico, ovvero 28.15). Questi parametri di simulazione sono stati ricavati negli articoli [3] e [9].

Abbiamo quindi lavorato con reticoli simmetrici 24^4 , 32^4 e 40^4 , in modo tale che il numero L di siti per direzione soddisfi la condizione $La \approx 5$ fm.

Abbiamo campionato le configurazioni di gauge mediante l'algoritmo *Rational Hybrid Monte Carlo* e, per ogni simulazione, abbiamo misurato i tubi di flusso ogni 20 unità temporali di dinamica molecolare. Per ogni fissato valore del passo

L	$a(\text{fm})$	β	$am_{u,d}$	am_s	b	$ e B$ (GeV ²)
24	0.2173(4)	3.55	0.003636	0.1020	0, 12, 24, 32, 40	0, 0.32, 0.65, 0.86, 1.08
32	0.1535(3)	3.67	0.002270	0.0639	0, 12, 16, 24, 32	0, 0.36, 0.49, 0.73, 0.97
40	0.1249(3)	3.75	0.001787	0.0503	0, 12, 16, 24, 32	0, 0.35, 0.47, 0.70, 0.94

Tabella 4.1: Parametri nudi corrispondenti al punto fisico $m_\pi \approx 135$ MeV usati nelle simulazioni numeriche dei lavori [3] e [9]. Nella penultima colonna i valori del campo magnetici studiati sono espressi in funzione della variabile intera b . L'ultima colonna, invece, riporta i valori dei campi magnetici in unità fisiche.

reticolare a , abbiamo analizzato all'incirca un centinaio di configurazioni.

Per ridurre il rumore ultravioletto, abbiamo invece applicato un singolo step di smearing HYP per link temporali e diverse decine di APE-smearing per i link spaziali.

Abbiamo poi fatto un *fit* ai dati provenienti dalle misure del tubo di flusso, che si ottengono mediante l'espressione (4.13), con la funzione di Clem (3.80). Durante le simulazioni, abbiamo ottenuto un buon rapporto segnale/rumore e valori ragionevoli del χ_{rid}^2 per questi particolari valori di distanza della coppia $q\bar{q}$:

- $R = 5a = 1.0865$ fm, per $L = 24$;
- $R = 6a = 0.9210$ fm, per $L = 32$;
- $R = 7a = 0.8743$ fm, per $L = 40$.

In ogni caso, fissato il passo reticolare, l'unico parametro del fit in cui abbiamo rivelato una dipendenza dalla distanza R che separa la coppia $q\bar{q}$ è ϕ , che determina solo l'intensità del tubo di flusso, ma non ne altera il profilo. Le incertezze sperimentali sui parametri μ ed α non ci hanno consentito di rivelare sostanziali differenze al variare della distanza R .

Il tubo di flusso è stato misurato al centro della distanza della coppia $q\bar{q}$ ($x_t = 0$) e muovendoci lungo la direzione trasversa x_t . Abbiamo scelto, per convenzione, la condizione $|x_t|_{max} = R$.

Per le misure eseguite a campo magnetico spento ($b = 0$), esistono i presupposti per ipotizzare che sia isotropia spazio-temporale e così abbiamo mediato i dati del tubo di flusso su tutte le direzioni spaziali.

Invece, per le misure eseguite in presenza di un campo magnetico orientato lungo la direzione z , ci aspettiamo che non sia valida l'ipotesi di isotropia spazio-temporale e quindi abbiamo deciso di non mediare i dati del tubo di flusso su tutte le direzioni spaziali. Tuttavia, dai seguenti argomenti di simmetria, è lecito ipotizzare che le seguenti situazioni fisiche siano equivalenti.

4 Simulazioni numeriche

- Caso longitudinale: la coppia $q\bar{q}$ si trova disposta lungo l'asse z e misuriamo il profilo trasverso del tubo di flusso nelle direzioni x e y .
- Caso trasverso 1: la coppia $q\bar{q}$ si trova disposta lungo l'asse x o y e misuriamo il profilo trasverso del tubo di flusso rispettivamente nelle direzioni y o x .
- Caso trasverso 2: la coppia $q\bar{q}$ si trova disposta lungo l'asse x o y e misuriamo il profilo trasverso del tubo di flusso lungo la direzione z .

Così, in presenza di un campo magnetico esterno, abbiamo deciso di mediare soltanto sulle direzioni descritte in “caso longitudinale”, “caso trasverso 1” e “caso trasverso 2”.

Infine, per tenere conto delle correlazioni fra le misure effettuate per diverse configurazioni, gli errori statistici sono stati determinati tramite il metodo jackknife.

4.5 Dati numerici ottenuti in assenza di campo magnetico

In questa sezione mostriamo i risultati relativi alle misure eseguite in assenza di campo magnetico. Abbiamo misurato il correlatore connesso (4.3) per valori di x_t interi e per i valori del passo reticolare a mostrati in Tabella 4.1.

Come detto precedentemente, per ridurre le fluttuazioni statistiche è stato necessario realizzare le misure per diversi passi di smearing. Ad ogni passo di smearing, abbiamo fittato i nostri dati della forma trasversa del campo cromoelettrico longitudinale con la funzione di Clem (3.80). Di conseguenza, abbiamo ottenuto i parametri del fit per diversi passi di smearing. Per controllare che ci sia indipendenza dal numero di passi di smearing effettuati, diventa quindi importante trovare un ben definito plateau nei grafici in cui viene mostrata la dipendenza dei parametri del fit dal passo di smearing n -esimo.

Mostriamo quindi dalla Fig. (4.2) alla Fig. (4.13) i valori dei parametri del fit ricavati per diversi passi di smearing e degli esempi di fit di Clem che si ottengono ad un fissato passo di smearing.

Come è possibile evincere dai grafici, per ogni valore di a tutti i parametri del fit mostrano un plateau piuttosto evidente dopo circa 40 passi di smearing.

Dai best-fit ci accorgiamo inoltre che il modello di Clem riproduce abbastanza bene i dati del tubo di flusso, in particolar modo nelle code.

4.5 Dati numerici ottenuti in assenza di campo magnetico

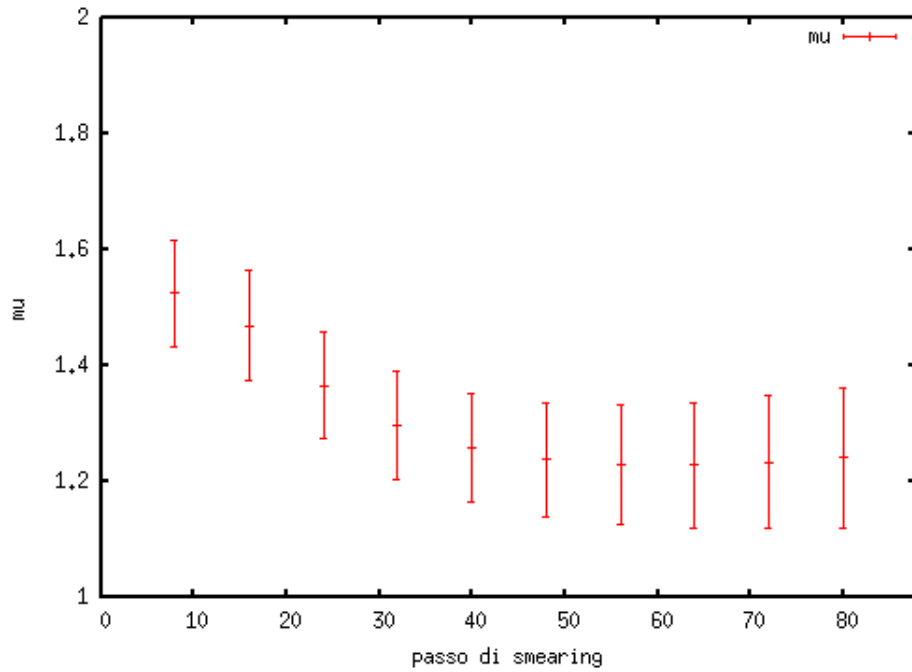


Figura 4.2: Dipendenza del parametro μ dal passo di smearing per $L = 24$, $R = 5a$ ed $a = 0.2173$ fm.

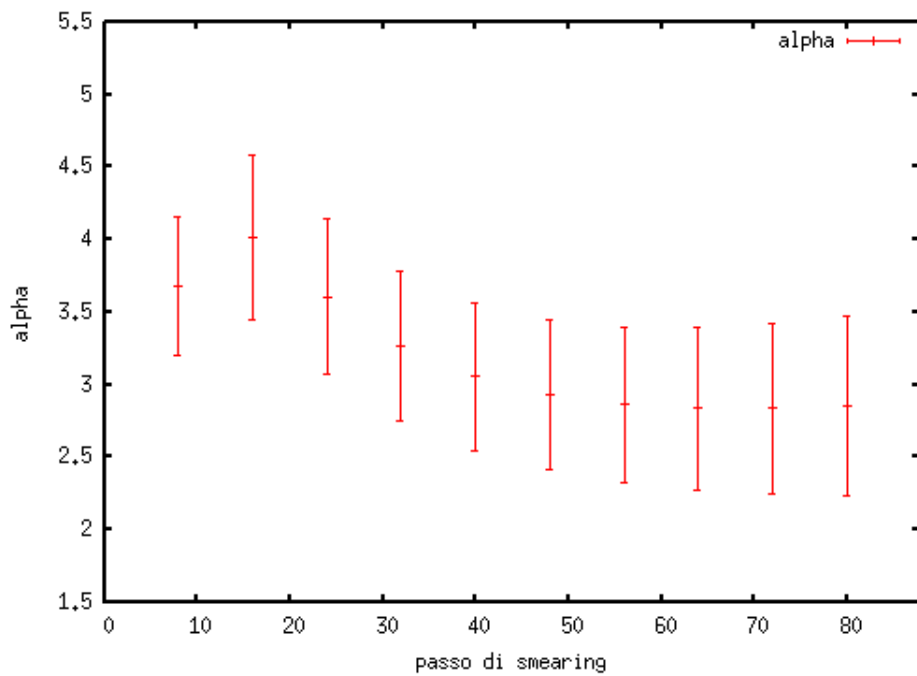


Figura 4.3: Dipendenza del parametro α dal passo di smearing per $L = 24$, $R = 5a$ ed $a = 0.2173$ fm.

4 Simulazioni numeriche

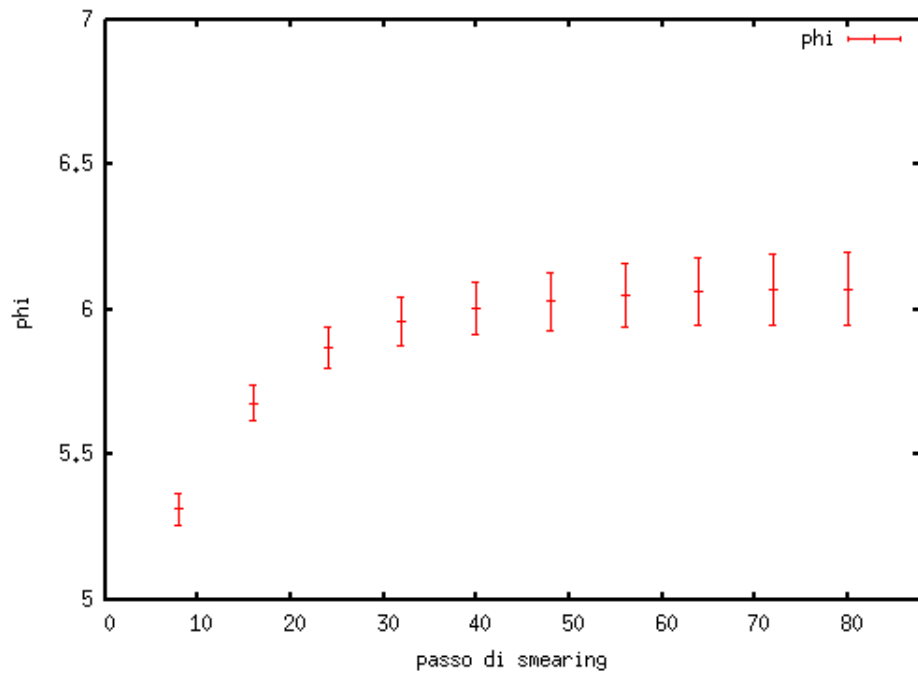


Figura 4.4: Dipendenza del parametro ϕ dal passo di smearing per $L = 24$, $R = 5a$ ed $a = 0.2173$ fm.

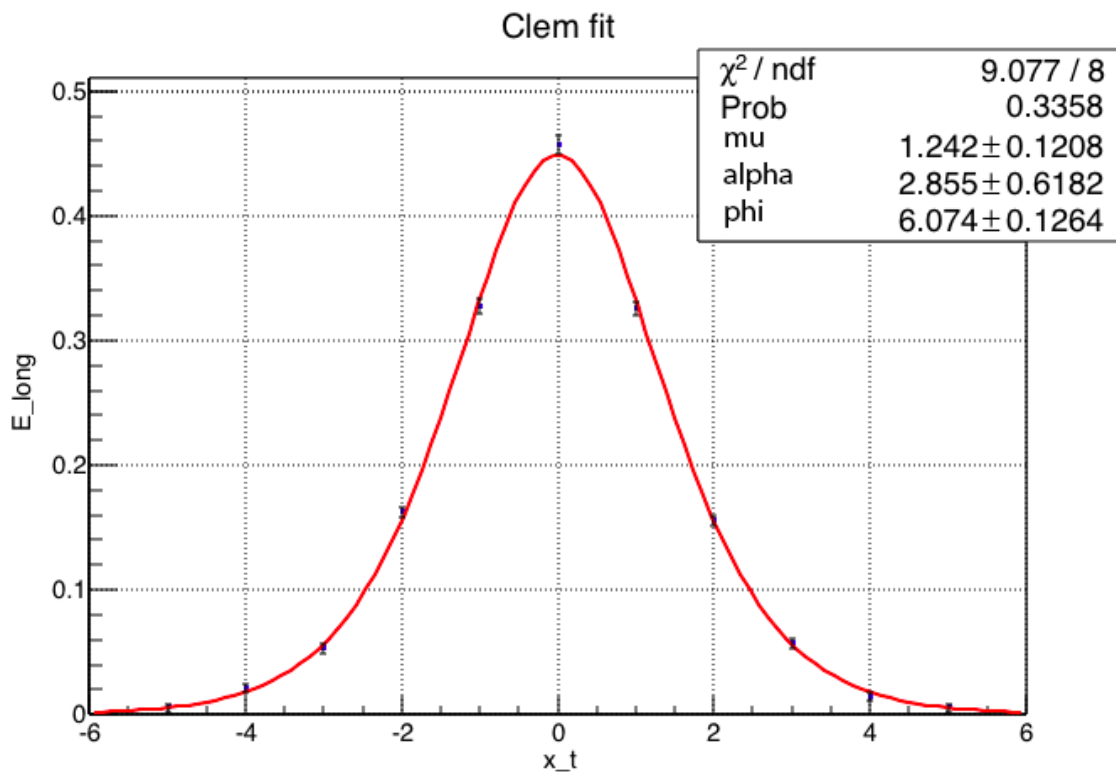


Figura 4.5: Fit di Clem del profilo trasverso del campo cromoelettrico longitudinale dopo 80 passi di smearing per $L = 24$, $R = 5a$ ed $a = 0.2173$ fm.

4.5 Dati numerici ottenuti in assenza di campo magnetico

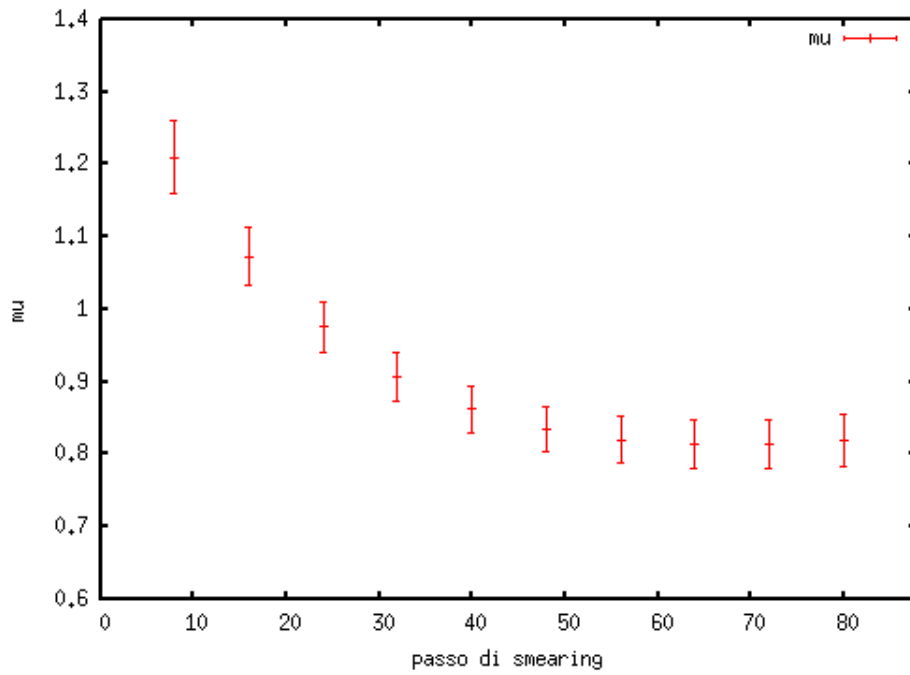


Figura 4.6: Dipendenza del parametro μ dal passo di smearing per $L = 32$, $R = 6a$ ed $a = 0.1535$ fm.

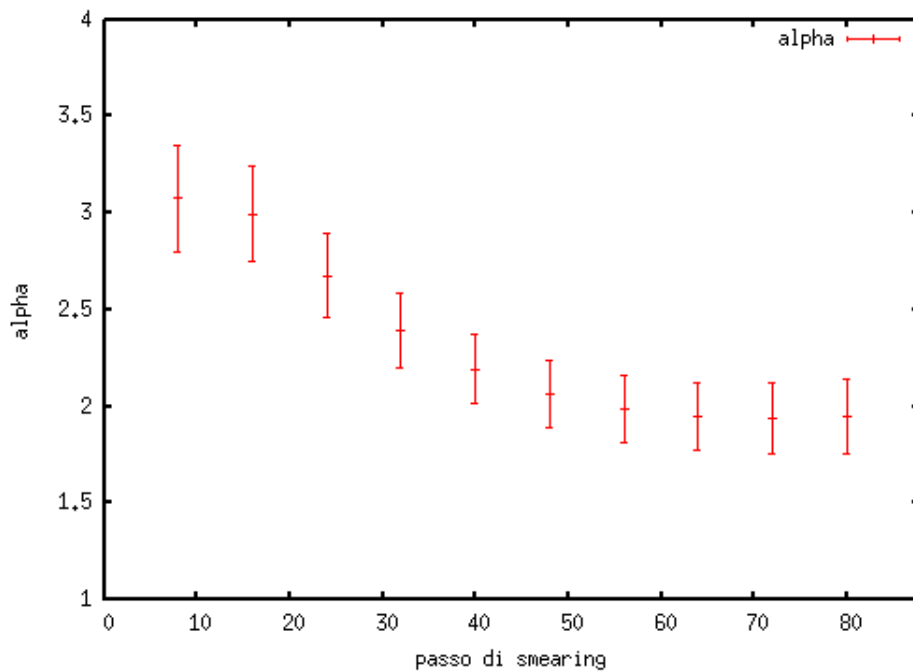


Figura 4.7: Dipendenza del parametro α dal passo di smearing per $L = 32$, $R = 6a$ ed $a = 0.1535$ fm.

4 Simulazioni numeriche

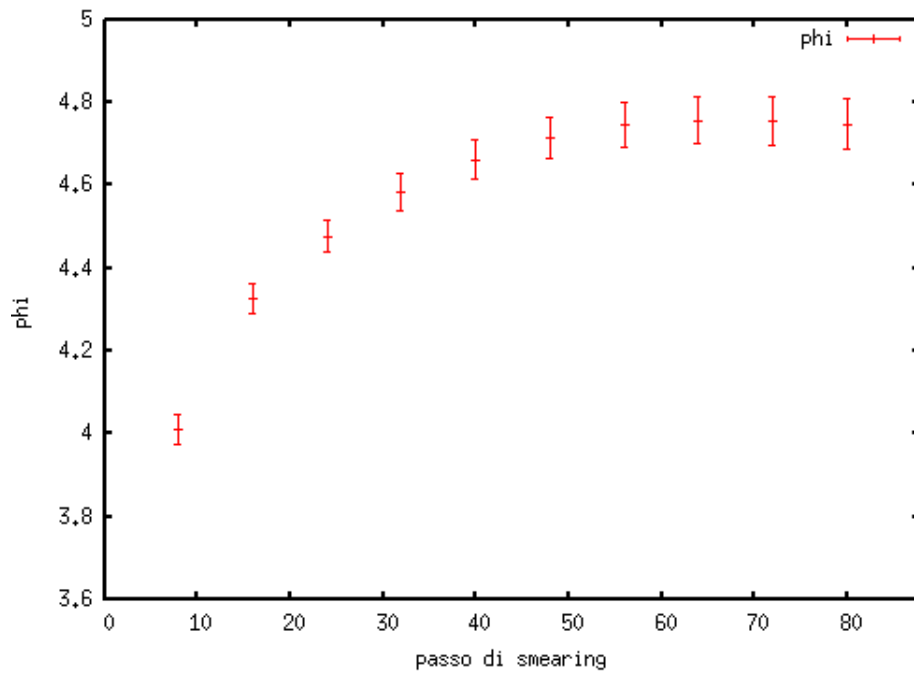


Figura 4.8: Dipendenza del parametro ϕ dal passo di smearing per $L = 32$, $R = 6a$ ed $a = 0.1535$ fm.

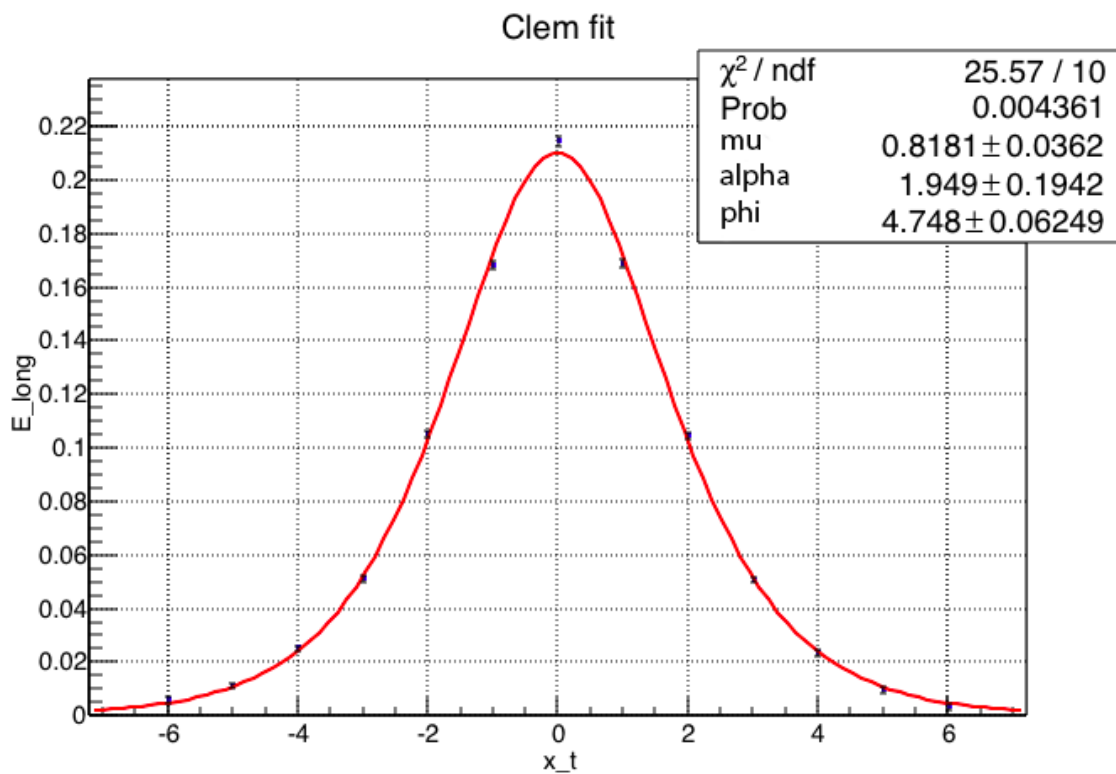


Figura 4.9: Fit di Clem del profilo trasverso del campo cromoelettrico longitudinale dopo 80 passi di smearing per $L = 32$, $R = 6a$ ed $a = 0.1535$ fm.

4.5 Dati numerici ottenuti in assenza di campo magnetico

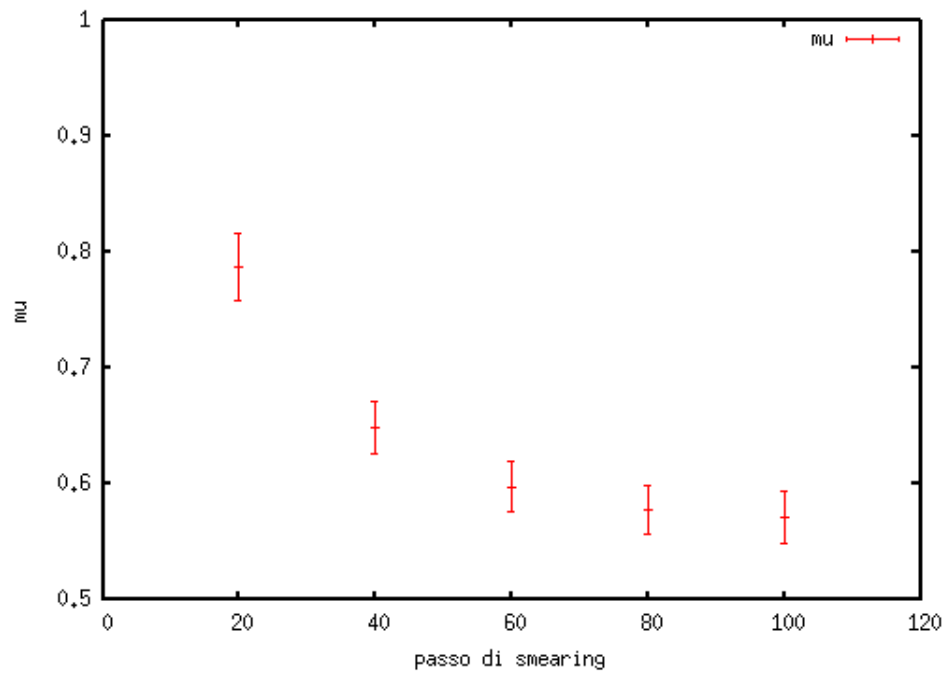


Figura 4.10: Dipendenza del parametro μ dal passo di smearing per $L = 40$, $R = 7a$ ed $a = 0.1249$ fm.

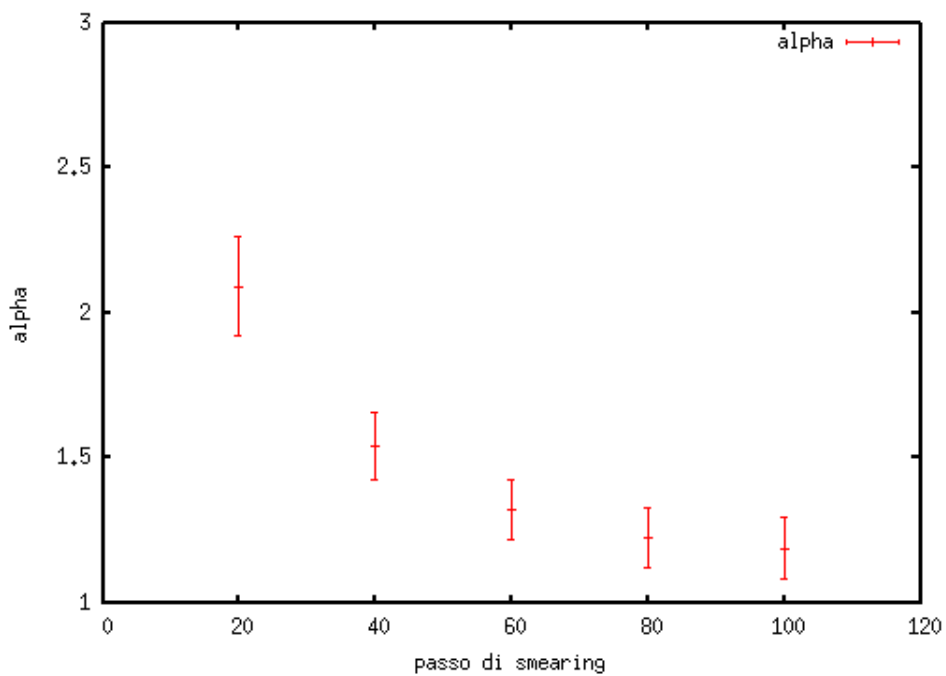


Figura 4.11: Dipendenza del parametro α dal passo di smearing per $L = 40$, $R = 7a$ ed $a = 0.1249$ fm.

4 Simulazioni numeriche

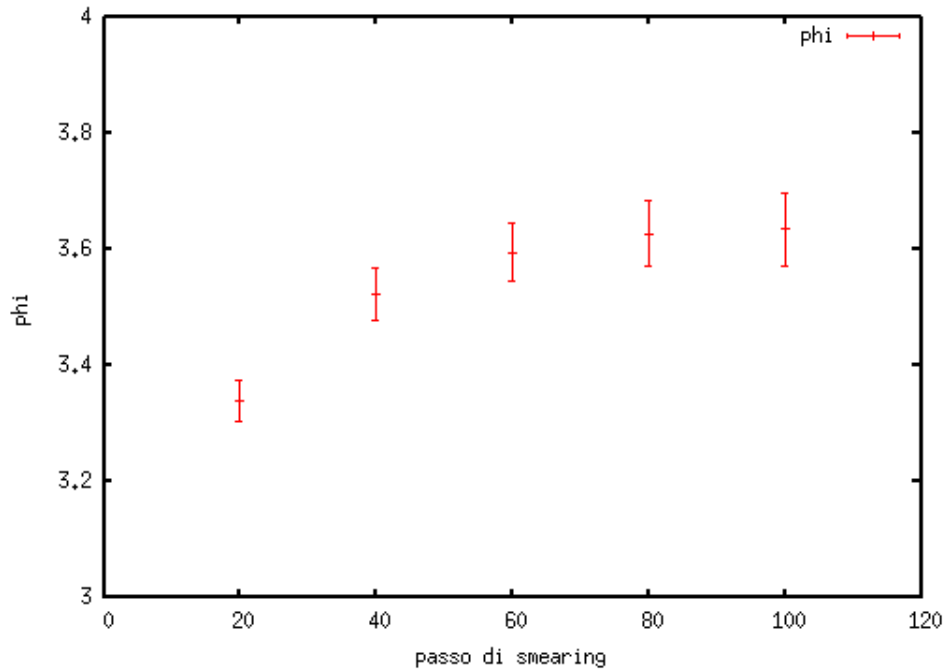


Figura 4.12: Dipendenza del parametro ϕ dal passo di smearing per $L = 40$, $R = 7a$ ed $a = 0.1249$ fm.

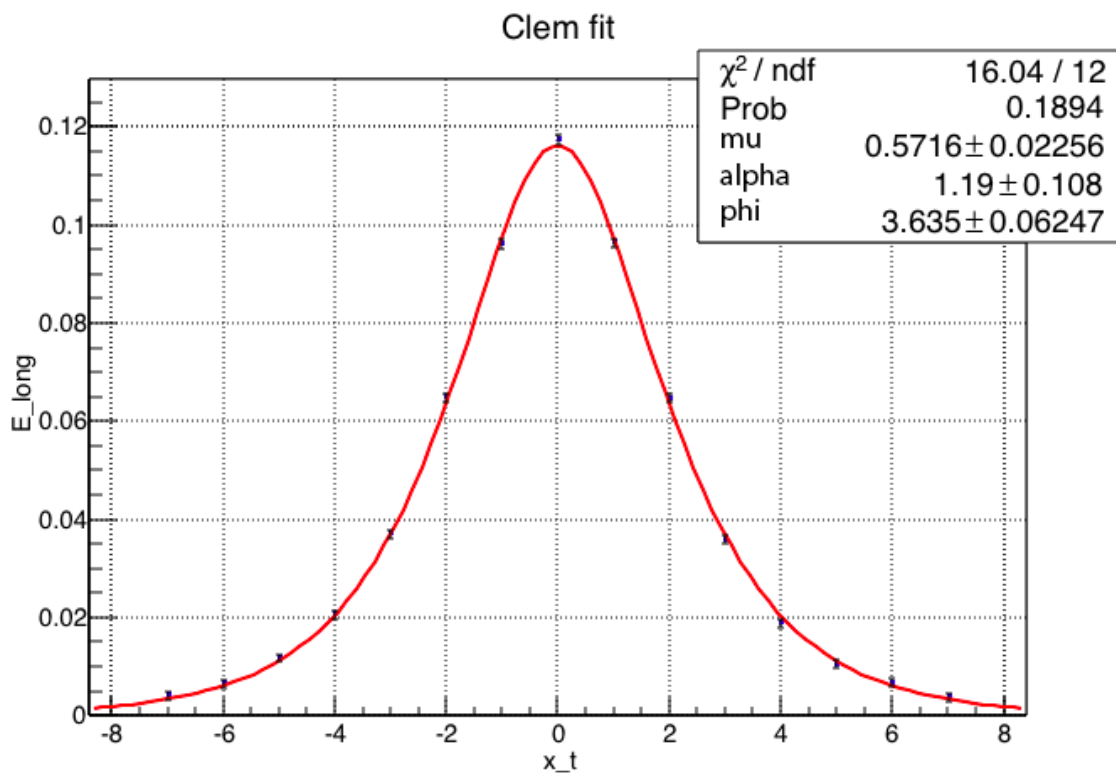


Figura 4.13: Fit di Clem del profilo trasverso del campo cromoelettrico longitudinale dopo 100 passi di smearing per $L = 40$, $R = 7a$ ed $a = 0.1249$ fm.

4.5.1 Stime dei parametri che caratterizzano un superconduttore ed estrapolazione al continuo

Per riassumere mostriamo infine i valori medi e gli errori dei parametri del fit. Queste stime sono state fatte mediando sui valori dei parametri ottenuti nella regione del plateau. Tuttavia, dal momento che le misure eseguite a differenti passi di smearing sono sicuramente correlate, abbiamo scelto come incertezze sui parametri il minimo valore dell'errore ottenuto per i diversi passi di smearing. Guardando i risultati della Tabella 4.2 ci si accorge, in particolare per il parame-

	$L = 24$	$L = 32$	$L = 40$
	$R = 1.0865 \text{ fm}$	$R = 0.9210 \text{ fm}$	$R = 0.8743 \text{ fm}$
α	2.83 ± 0.58	1.95 ± 0.18	1.20 ± 0.11
$\mu \text{ (fm}^{-1}\text{)}$	5.68 ± 0.52	5.30 ± 0.22	4.59 ± 0.18
k	0.25 ± 0.07	0.43 ± 0.05	0.79 ± 0.09
$\xi \text{ (fm)}$	0.69 ± 0.20	0.44 ± 0.06	0.27 ± 0.03
$\lambda \text{ (fm)}$	0.176 ± 0.016	0.188 ± 0.008	0.217 ± 0.008

Tabella 4.2: *Stime dei parametri del fit e dei parametri fondamentali che caratterizzano un superconduttore.*

tro di Landau-Ginzburg k e per la lunghezza di correlazione ξ , che siamo ancora abbastanza lontani dalla regione di scaling. Per questo motivo abbiamo provato a fare un'estrapolazione al continuo dei parametri che caratterizzano un superconduttore.

Dal momento che, quando si usano fermioni staggered, le violazioni di scaling cominciano solitamente con a^2 , abbiamo *fittato* i nostri dati con una funzione parabolica, dipendente dal passo reticolare a , del tipo:

$$\theta_{lat} = \theta_{phys} + c \times a^2. \quad (4.14)$$

Nelle Figure (4.14) e (4.15) sono mostrati i grafici dell'estrapolazione per λ e k . Il risultato dell'estrapolazione per $a = 0$ fornisce i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0.23 \pm 0.01 \text{ fm}, \\ k &= 0.80 \pm 0.10. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Combinando questi valori, si trova che l'estrapolazione al continuo per la lunghezza di correlazione ξ fornisce il valore

$$\xi = 0.29 \pm 0.04 \text{ fm}. \quad (4.16)$$

4 Simulazioni numeriche

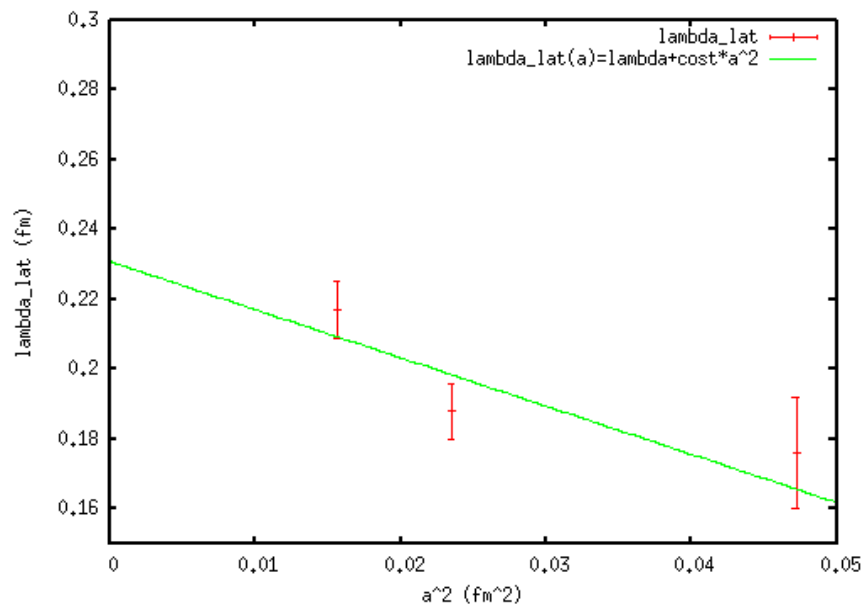


Figura 4.14: Estrapolazione al continuo del parametro λ .

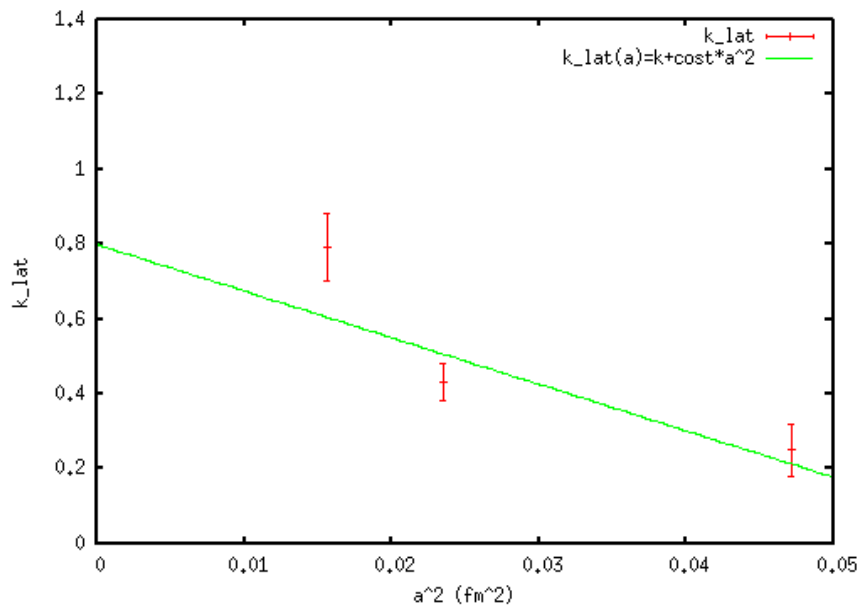


Figura 4.15: Estrapolazione al continuo del parametro k .

4.6 Dati numerici ottenuti in presenza di un campo magnetico

Le nostre simulazioni sembrano quindi confermare che il modello a superconduttore duale rappresenti un meccanismo promettente per spiegare il confinamento dei quark anche per la QCD a $N_f = 2 + 1$ sapori. Il valore ottenuto della lunghezza di penetrazione λ è abbastanza compatibile con i risultati trovati in letteratura per la teoria di pura gauge $SU(3)$.

La stima del parametro k ha presentato invece non poche difficoltà e sembra indicare che il vuoto della QCD abbia un comportamento a confine tra un superconduttore di tipo I e di tipo II. Crediamo comunque che la stima di questo parametro necessiti di ulteriori indagini, come ad esempio la misura di tubi di flusso per valori del passo reticolare a più piccoli. Un'altra possibilità potrebbe essere rieseguire le misure dei tubi di flusso usando il correlatore disconnesso

$$\rho_{disc} = \frac{\langle Tr(W)Tr(U_P) \rangle}{\langle Tr(W) \rangle} - \langle Tr(U_P) \rangle \quad (4.17)$$

anziché il correlatore (4.3) e valutare gli effetti delle linee di Schwinger che connettono il loop di Wilson alla plaquette. Occorre però tenere presente due fatti.

- Il segnale del correlatore sconnesso è solitamente più rumoroso di quello del correlatore connesso e quindi sarebbe utile analizzare un maggior numero di configurazioni di gauge.
- Tale operatore, nel limite continuo, è sensibile al quadrato del campo cromoelettrico.

4.6 Dati numerici ottenuti in presenza di un campo magnetico

Nella seconda parte di questo lavoro ci siamo dedicati allo studio di tubi di flusso cromoelettrici in presenza di un campo magnetico esterno uniforme e costante. In base ai risultati trovati in [8], ci aspettiamo che il tubo di flusso cromoelettrico si deformi.

Ci sono però diverse possibilità:

- Il profilo del tubo di flusso potrebbe rimanere identico e cambiare solo per un fattore di scala.
- Il profilo del tubo di flusso potrebbe stringersi o allargarsi e mantenere inalterata la scala.

- Il profilo del tubo di flusso potrebbe stringersi o allargarsi e cambiare la scala.

Capire cosa succede può essere utile a comprendere meglio il fenomeno trovato in [8].

4.6.1 Anisotropia dell'intensità del tubo di flusso cromoelettrico in presenza di un campo magnetico

Dalle nostre misure risulta che la presenza di un campo magnetico esterno modifica il profilo trasverso del tubo di flusso cromoelettrico solo per un fattore di scala, ma non ne altera la forma. Per spiegarne il motivo, crediamo sia utile mostrare e discutere le Fig. (4.16) e (4.17). Nella Fig. (4.16) viene riportato un esempio del tubo di flusso generato dalla coppia $q\bar{q}$ per $a = 0.1535$ fm, $R = 0.921$ fm e due diversi valori del campo magnetico, $|e|B = 0$ ed $|e|B \approx 0.97$ GeV² ($b = 32$).

Per $B \neq 0$ osserviamo un chiaro comportamento anisotropo, con una netta separazione del tubo di flusso misurato nel caso longitudinale da quello misurato nei casi trasversi 1 e 2. Il confronto con la misura eseguita a campo magnetico *spento* mostra che il tubo di flusso risulta più intenso nei casi trasversi 1 e 2 (per i quali non notiamo sostanziali differenze), mentre risulta più debole nel caso longitudinale. Questo comportamento è stato osservato per tutti i valori del passo reticolare a e per ogni valore del campo magnetico esplorato.

Una volta constatata questa anisotropia, ci siamo chiesti se i profili ottenuti, oltre che per un fattore di scala, differissero anche nella forma. Così abbiamo deciso di normalizzare a 1 il valore a $x_t = 0$ di tutti i tubi di flussi mostrati nella Fig. (4.16). Il risultato di questa normalizzazione è mostrato in Fig. (4.17) e dal grafico appare evidente che tutti i tubi di flusso si sovrappongono quasi perfettamente entro le incertezze sperimentali. Questo ci porta quindi a pensare che la presenza del campo magnetico modifichi il tubo di flusso solo di un fattore di scala.

Un altro indizio a favore di questa ipotesi proviene dai best fit, eseguiti per diversi passi di smearing, dei dati del tubo di flusso con la funzione di Clem (3.80). A titolo di esempio abbiamo riportato nelle Fig. (4.18), (4.19) e (4.20) i risultati ottenuti per $a = 0.1249$ fm, $R = 0.8743$ fm e due diversi valori del campo magnetico, $|e|B = 0$ ed $|e|B \approx 0.94$ GeV² ($b = 32$).

Anche in questo caso abbiamo trovato un ben definito plateau nei grafici che mostrano la dipendenza dei parametri del fit dal passo di smearing n -esimo; tuttavia, confrontando i risultati con quelli ottenuti a campo magnetico spento, abbiamo

4.6 Dati numerici ottenuti in presenza di un campo magnetico

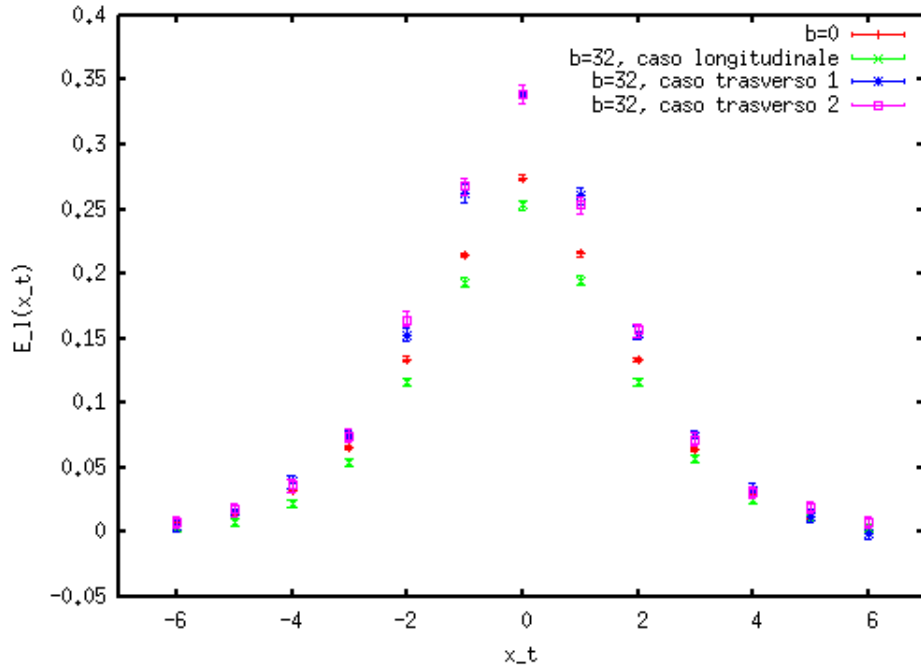


Figura 4.16: Tubo di flusso generato dalla coppia $q\bar{q}$ per $a = 0.1535$ fm, $R = 0.921$ fm e due diversi valori del campo magnetico, $|e|B = 0$ ed $|e|B \approx 0.97$ GeV² ($b = 32$).

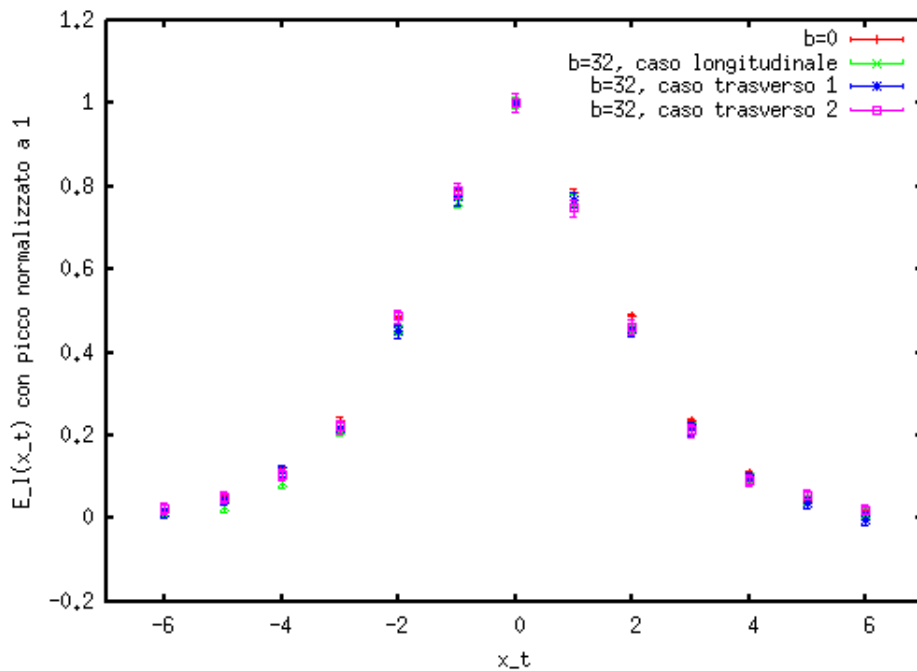


Figura 4.17: In questa figura vengono mostrati gli stessi tubi di flusso della figura precedente, avendo però normalizzato il valore del campo cromoelettrico lungo la congiungente $q\bar{q}$ a 1.

4 Simulazioni numeriche

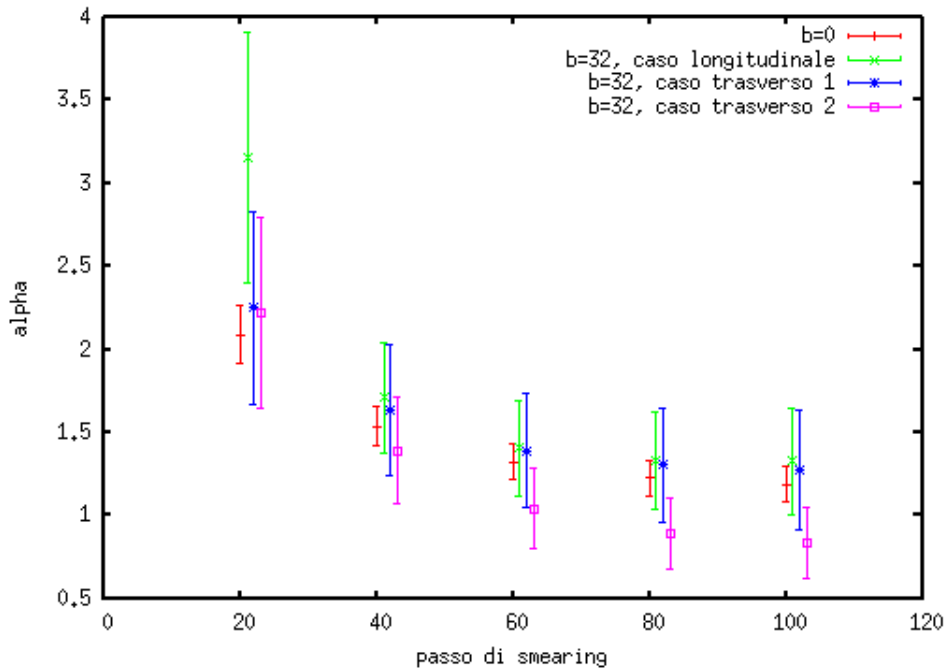


Figura 4.18: Dipendenza del parametro α dal numero di passo di smearing lavorando a due diversi valori del campo magnetico, $|e|B = 0$ ed $|e|B \approx 0.94 \text{ GeV}^2$ ($b = 32$). Questi risultati sono stati ottenuti lavorando ad un passo reticolare $a = 0.1249 \text{ fm}$ e ponendo la coppia $q\bar{q}$ a una distanza pari a $R = 7a$.

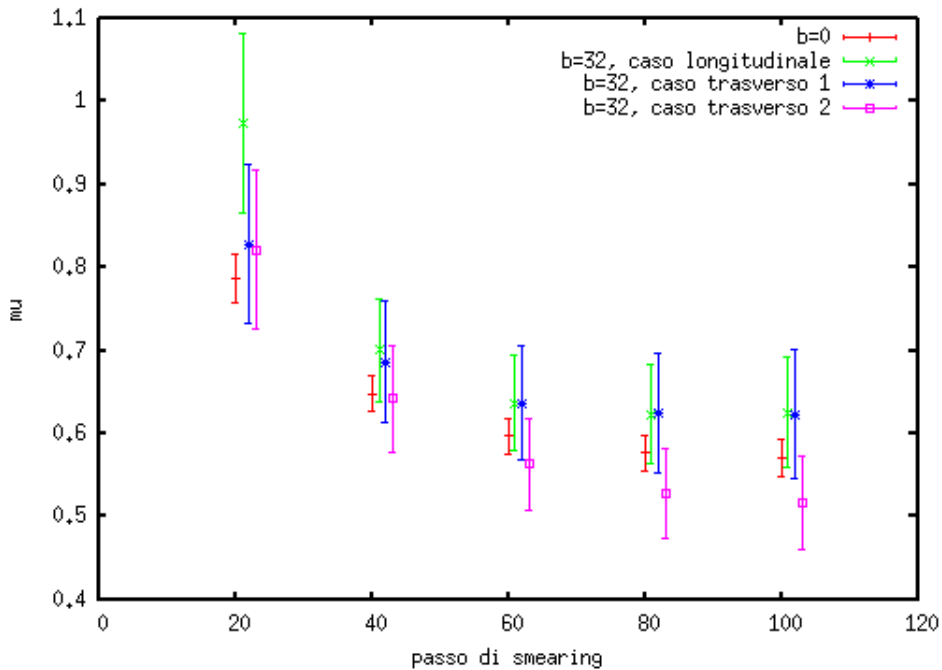


Figura 4.19: Dipendenza del parametro μ dal numero di passo di smearing lavorando a due diversi valori del campo magnetico, $|e|B = 0$ ed $|e|B \approx 0.94 \text{ GeV}^2$ ($b = 32$). Questi risultati sono stati ottenuti lavorando ad un passo reticolare $a = 0.1249 \text{ fm}$ e ponendo la coppia $q\bar{q}$ a una distanza pari a $R = 7a$.

4.6 Dati numerici ottenuti in presenza di un campo magnetico

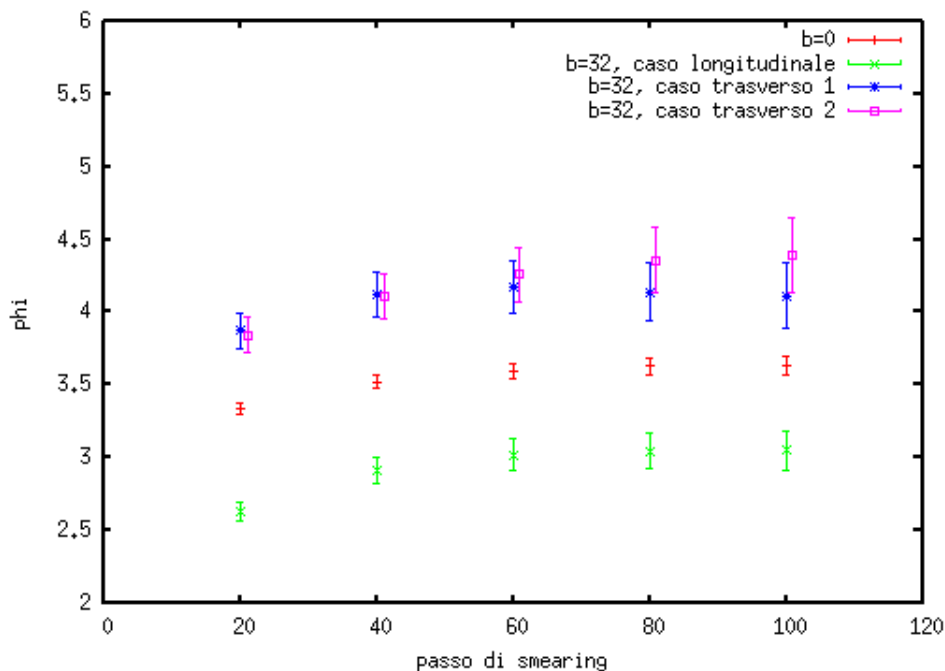


Figura 4.20: Dipendenza del parametro ϕ dal numero di passo di smearing lavorando a due diversi valori del campo magnetico, $|e|B = 0$ ed $|e|B \approx 0.94 \text{ GeV}^2$ ($b = 32$). Questi risultati sono stati ottenuti lavorando ad un passo reticolare $a = 0.1249 \text{ fm}$ e ponendo la coppia $q\bar{q}$ a una distanza pari a $R = 7a$.

rivelato che il parametro ϕ mostra un chiaro comportamento anisotropo: si ha infatti che il parametro ϕ risulta più grande nei casi trasversi 1 e 2, mentre risulta più piccolo nel caso longitudinale. Non abbiamo invece rivelato anisotropie per i parametri μ ed α .

Guardando la struttura della funzione di Clem (3.80), ci accorgiamo che il parametro ϕ determina l'intensità del tubo di flusso, mentre i parametri μ e α contraddistinguono la forma del profilo trasverso. Quindi anche dallo studio dei parametri del fit emerge quanto abbiamo detto a inizio paragrafo analizzando solo i dati del tubo di flusso: la presenza di un campo magnetico esterno modifica l'intensità del tubo di flusso cromoelettrico, ma non ne altera la forma del profilo trasverso.

Dal momento che non abbiamo rivelato sostanziali differenze tra caso trasverso 1 e 2, nella prossima sezione unificheremo i due casi (ovvero mostreremo i valori mediati su entrambi i casi) e li indicheremo con il simbolo XY . Denoteremo invece il caso longitudinale con il simbolo Z .

4.6.2 Tubo di flusso cromoelettrico e tensione di stringa

Adesso, ci proponiamo di confrontare i nostri risultati con quelli trovati nell'articolo [8] riguardo al rapporto

$$R^{\sigma_d} = \frac{\sigma_d(|e|B)}{\sigma_d(|e|B=0)}, \quad (4.18)$$

dove σ denota la tensione di stringa e l'indice d tiene in considerazione la possibile dipendenza dalla posizione (Z o XY).

Per capire come sia possibile misurare la grandezza (4.18) con i dati in nostro possesso, è utile fare le seguenti considerazioni.

- È stato mostrato [10, 12], per le teorie di pura gauge $SU(2)$ ed $SU(3)$, che i campi di colore di una coppia statica $q\bar{q}$ sono quasi completamente descritti dal campo cromoelettrico longitudinale.
- A sua volta, il campo cromoelettrico longitudinale risulta approssimativamente costante lungo l'asse del tubo di flusso.
- Dalle due considerazioni precedenti ne segue che il potenziale a lunga distanza che agisce sulle cariche di colore è lineare.

Allora, usando i nostri dati e la parametrizzazione di Clem per descrivere il tubo di flusso cromoelettrico, siamo in grado di calcolare la tensione di stringa σ come energia immagazzinata dal tubo di flusso per unità di lunghezza:

$$\sigma \approx \frac{1}{2} \int d^2x_t E_l^2(x_t). \quad (4.19)$$

Abbiamo inoltre visto che la presenza di un campo magnetico esterno non altera il profilo del tubo di flusso, ma ne modifica soltanto la scala. Ipotizziamo allora di poter stimare il rapporto (4.18) mediante la seguente espressione:

$$R^{\sigma_d} \approx \frac{\phi_d^2(|e|B)}{\phi_d^2(|e|B=0)}. \quad (4.20)$$

Per determinare il rapporto R^{σ_d} abbiamo allora misurato il parametro ϕ_d^2 per tutti i valori di B esplorati e successivamente lo abbiamo normalizzato con il valore che tale parametro assume per $B=0$ allo stesso passo reticolare a .

I risultati di questo lavoro sono mostrati nella Fig. (4.21), in cui viene inoltre riportato il best fit dei dati ottenuti per $L=40$ con la forma funzionale suggerita

4.6 Dati numerici ottenuti in presenza di un campo magnetico

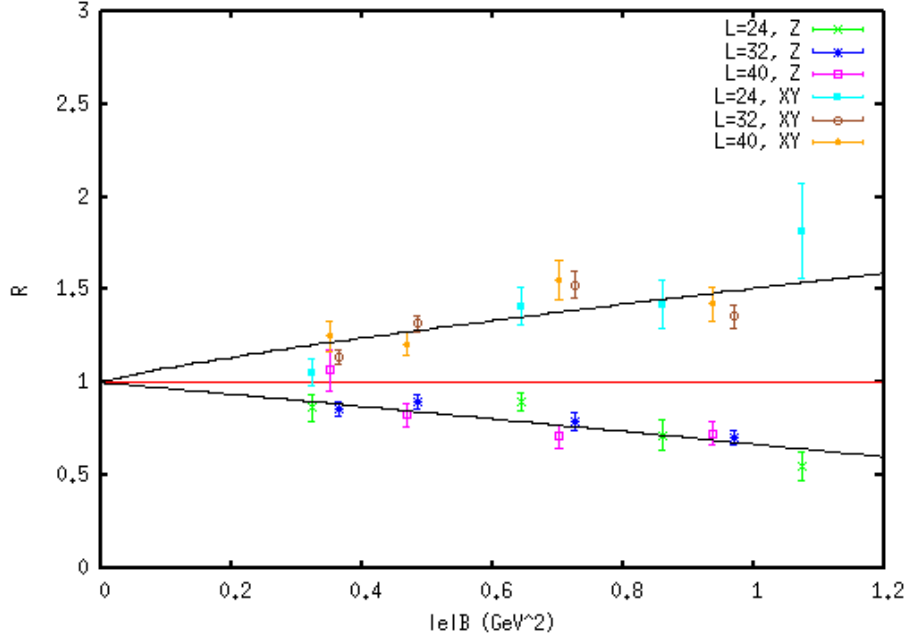


Figura 4.21: In questo grafico vengono riportati i valori misurati di R^{σ_d} ottenuti mediante l'approssimazione (4.20). La linea nera continua rappresenta il best fit dei dati ottenuti per $L = 40$ tramite la forma funzionale (4.21).

dagli autori dell'articolo [8],

$$R^{\sigma_d} = 1 + A^{\sigma_d} (|e|B)^{C^{\sigma_d}}. \quad (4.21)$$

Dal confronto delle Fig. (2.4) e (4.21) è rassicurante notare che i risultati ottenuti mediante l'approssimazione (4.20) sono molto simili a quelli ottenuti tramite misura diretta di σ nell'articolo [8]: anche dalle nostre misure risulta che la tensione di stringa aumenta (diminuisce), al crescere di $|e|B$, nella direzione trasversa (longitudinale).

Nella Tabella 4.3 confrontiamo infine i parametri del best-fit ottenuti in questo lavoro con quelli dell'articolo [8]. I risultati trovati sono quasi in accordo con quelli

	Stima ottenuta in questo lavoro	Stima ottenuta nel lavoro [8]
$A^{\sigma_{XY}}$	0.5 ± 0.1	0.29 ± 0.02
$C^{\sigma_{XY}}$	0.8 ± 0.3	0.9 ± 0.1
A^{σ_z}	-0.33 ± 0.06	-0.34 ± 0.01
C^{σ_z}	1.0 ± 0.6	1.5 ± 0.1
χ_{rid}^2	≈ 2	≈ 1

Tabella 4.3: Parametri del rapporto (4.21) ottenuti attraverso il best fit dei dati ottenuti per $L = 40$. In particolare vengono confrontati i valori trovati in questo lavoro con quelli ricavati nell'articolo [8].

4 Simulazioni numeriche

ottenuti da C. Bonati et al., ma sono affetti da incertezze più grandi. Crediamo che questo sia dovuto al fatto che la stima del rapporto (4.20) si basa su delle approssimazioni che possono incidere, in modo più o meno grande, sull'accuratezza del risultato ottenuto.

5 Conclusioni

In questa tesi è stato studiato il tubo di flusso cromoelettrico generato da una coppia statica $q\bar{q}$ considerando una discretizzazione della QCD con $N_f = 2 + 1$ sapori. Per misurare il tubo di flusso si è fatto uso del correlatore connesso introdotto in [24, 23]. Abbiamo eseguito le simulazioni per tre differenti passi reticolari ed utilizzato reticoli $4D$ simmetrici.

In un primo momento abbiamo realizzato le misure lavorando a campo magnetico spento e analizzato il tubo di flusso all'interno del modello a superconduttore duale per il vuoto della QCD. Per farlo è necessario verificare che i tubi di flusso cromoelettrici abbiano un profilo analogo ai tubi di flusso della superconduttività ordinaria. Così, abbiamo riadattato il risultato trovato da Clem in [14], valido per i superconduttori ordinari, al profilo trasverso della componente longitudinale del campo cromoelettrico. I risultati più significativi che abbiamo trovato in questa parte del lavoro sono i seguenti:

- La funzione di Clem (3.80) riproduce abbastanza bene i dati sperimentali e questo fa presumere che il modello a superconduttore duale possa essere un meccanismo convincente per spiegare il confinamento del colore nella materia adronica.
- Supposto che il vuoto della QCD si comporti come un superconduttore duale, abbiamo provato a ricavare i parametri che lo caratterizzano, ovvero la lunghezza di penetrazione λ e il parametro di Landau-Ginzburg k . Nelle condizioni sperimentali in cui abbiamo lavorato, i suddetti parametri sembrano dipendere dal passo reticolare a (in modo particolare k). Così, abbiamo realizzato un'estrapolazione continua dei parametri assumendo una dipendenza quadratica da a . I risultati trovati sono:

$$\begin{aligned}\lambda &= 0.23 \pm 0.01 \text{ fm}, \\ k &= 0.80 \pm 0.10.\end{aligned}$$

Tuttavia, per una migliore stima del parametro k , crediamo sia utile in futuro realizzare delle misure per valori più piccoli del passo reticolare. Un'altra propo-

5 Conclusioni

sta potrebbe essere studiare il tubo di flusso mediante un correlatore sconnesso, sensibile però al quadrato del campo elettrico.

Nella seconda parte del lavoro abbiamo introdotto nella teoria un campo magnetico esterno. Dal momento che in tali condizioni il potenziale di una coppia $q\bar{q}$ ha mostrato un'anisotropia [8], ci siamo chiesti se questa anisotropia fosse dovuta a delle deformazioni del tubo di flusso.

Così, abbiamo studiato il profilo del tubo di flusso per diversi valori di un campo magnetico esterno \vec{B} uniforme e costante. I risultati delle nostre simulazioni sono i seguenti.

- Il profilo trasverso del tubo di flusso, in seguito all'applicazione di un campo magnetico esterno, non risulta modificato nella forma, ma cambia solo di un fattore di scala. In particolare, abbiamo notato che il tubo di flusso risulta più intenso (debole) quando la coppia $q\bar{q}$ è disposta perpendicolarmente (parallelamente) all'orientazione di \vec{B} .
- Successivamente, ipotizzando di poter stimare la tensione di stringa σ tramite la relazione

$$\sigma \approx \frac{1}{2} \int d^2x_t E_t^2(x_t),$$

abbiamo esaminato il rapporto

$$R^{\sigma_d} = \frac{\sigma_d(|e|B)}{\sigma_d(|e|B=0)}$$

precedentemente studiato in [8]. L'indice d tiene in considerazione la possibile dipendenza di σ dall'orientazione della coppia $q\bar{q}$ rispetto al campo magnetico esterno. I risultati trovati in questo lavoro sono qualitativamente simili a quelli ottenuti in [8]: la tensione di stringa risulta una funzione crescente (decrescente) di $|\vec{B}|$ quando la coppia $q\bar{q}$ è disposta perpendicolarmente (parallelamente) all'orientazione del campo \vec{B} .

Anche in questo caso, per una migliore ricostruzione dell'anisotropia trovata potrebbe essere utile lavorare con passi reticolari più piccoli. Sarebbe pure interessante vedere cosa succede per campi magnetici più intensi. In particolare sarebbe utile rispondere alle seguenti domande:

- l'anisotropia osservata nell'intensità del tubo di flusso satura a partire da un certo valore del campo magnetico esterno?
- se questo non si verifica, a partire da quale valore del campo magnetico esterno il tubo di flusso cromoelettrico scompare?

6 Ringraziamenti

Per la stesura di questa tesi devo ringraziare molte persone. Spero di ricordarle tutte per non fare sgarbi a nessuno.

Prima di tutto vorrei ringraziare il Professore Massimo D'Elia, relatore di questa tesi. In quasi un anno di lavoro non mi ha mai fatto mancare il suo sostegno ed è riuscito a trasmettermi la sua passione per la QCD su reticolo. Dal punto di vista sia umano che professionale, sono molto felice di aver fatto la sua conoscenza.

Un doveroso grazie va poi ad Aurora per un'infinità di motivi: dal momento che non basterebbe una pagina per elencarli, mi limito solo a dire che è stato bellissimo studiare tutte le materie della laurea magistrale insieme a lei.

Un grazie speciale va inoltre a Claudio Bonati e Francesco Negro: i loro consigli e suggerimenti sono stati per me preziosi ed hanno giocato un ruolo determinante nella produzione di questo lavoro.

Non posso poi dimenticare di ringraziare il Professore Francesco Knechtli per avermi invitato a Wuppertal a tenere un seminario sulla prima parte di questo lavoro: è stata per me un'esperienza molto bella ed emozionante e mi ha sicuramente velocizzato nello scrivere la tesi. Non vedo l'ora di cominciare il corso di dottorato con la sua supervisione a Wuppertal.

Ringrazio infine tutti gli amici e i parenti che mi sono stati vicini in questi anni. Ovviamente non possono avermi aiutato direttamente nella scrittura di questa tesi, ma il loro affetto è stato per me importante nell'affrontare le difficoltà che solitamente si incontrano quando si intraprende un corso di laurea: un grazie va quindi a mamma, papà, nonni, zii, cugini, Elio, Angela, Marta, Davide, Saverio, Marco, Katia (in particolare per il suo corso accelerato di superconduttività), Maria e Paolo.

Bibliografia

- [1] M.H. Al-Hashimi e U.J. Wiese. «Discrete accidental symmetry for a particle in a constant magnetic field on a torus». In: *Annals of Physics* 324(2) (2009), pp. 343–360.
- [2] M. Albanese et al. «Glueball masses and string tension in lattice QCD». In: *Phys. Lett.* B192 (1987), p. 163.
- [3] Y. Aoki, Sz. Borsanyi, S. Durr et al. «The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit II». In: *JHEP* 0906, 088 (2009).
- [4] G.S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrodi et al. «The QCD phase diagram for external magnetic fields». In: *JHEP* 1202 (44(2012)).
- [5] J. Bardeen, L.N. Cooper e J.R. Schrieffer. «Microscopic theory of superconductivity». In: *Phys. Rev* 106 (1957), p. 162.
- [6] B.A. Berg. *Markov Chain Monte Carlo Simulations and Their Statistical Analysis*. World Scientific Lecture Notes in Physics, 2004.
- [7] E.B. Bogomol’nyi. «Stability of classical solutions». In: *Sov. J. Nucl. Phys* 24 (1976), p. 449.
- [8] C. Bonati, M. D’Elia, M. Mariti et al. «Anisotropy of the quark-antiquark potential in a magnetic field». In: *Phys. Rev* D89, 114502 (2014).
- [9] Sz. Borsanyi, G. Endrodi, Z. Fodor et al. «The QCD equation of state with dynamical quarks». In: *JHEP* 1011, 077 (2010).
- [10] M.S. Cardaci, P. Cea, L. Cosmai et al. «Chromoelectric flux tubes in QCD». In: *Phys. Rev* D83 (14202(2011)).
- [11] M. Cardoso, N. Cardoso e P. Bicudo. «SU(3) gauge invariant lattice QCD exploration of the dual superconductor picture in flux tube fusion, in the dual gluon mass, and in the dual Ginzburg-Landau parameters». In: *arXiv:1004.0166* [hep-lat] (2010).
- [12] P. Cea e L. Cosmai. «Dual superconductivity in the SU(2) pure gauge vacuum: a lattice study». In: *Phys. Rev* D52 (1995), pp. 5152–5164.

Bibliografia

- [13] P. Cea, L. Cosmai e A. Papa. «Chromoelectric flux tubes and coherence length in QCD». In: *Phys. Rev D* 86, 054501 (2012).
- [14] J.R. Clem. «Simple model for the vortex core in a type II superconductor». In: *Journal of Low Temperature Physics* 18 (1975), pp. 427–434.
- [15] G. Curci, P. Menotti e G. Paffuti. «Symanzik’s improved lagrangian for lattice gauge theory». In: *Phys. Lett.* B130 (1983), pp. 205–208.
- [16] M. D’Elia. «Lattice QCD Simulations in External Background Fields». In: *arXiv:1209.0374* [hep-lat] (2012).
- [17] M. D’Elia e F. Negro. «Chiral properties of strong interactions in a magnetic background». In: *Phys. Rev D* 83, 114028 (2011).
- [18] S. Durr. «Theoretical issues with staggered fermion simulations». In: *PoS (LAT2005)021* (2005).
- [19] R.P. Feynman e A.R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. New York: Dover, 2010.
- [20] C. Gattringer e C.B. Lang. *Quantum Chromodynamics on the Lattice*. Springer, 2010.
- [21] M. Gell-Mann. «A schematic model of baryons and mesons». In: *Phys. Lett.* 8 (1961), p. 214.
- [22] M. Gell-Mann e Y. Ne’eman. «The Eightfold way». In: *W.A. Benjamin (New York)* (1964).
- [23] A. Di Giacomo, M. Maggiore e S. Olejnik. «Confinement and chromoelectric flux tubes in lattice QCD». In: *Phys. Lett* B347 (1990), p. 441.
- [24] A. Di Giacomo, M. Maggiore e S. Olejnik. «Evidence for flux tubes from cooled QCD configurations». In: *Phys. Lett* B236 (1990), p. 199.
- [25] D. Gross e F. Wilczek. «Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories». In: *Phys. Rev. Lett* 30 (1973), p. 1343.
- [26] G. Grosso e G. Pastori Parravicini. *Solid State Physics*. Academic Press, 2005.
- [27] E. Guadagnini. *Fisica Teorica*. ETS, 1999.
- [28] S. Hands. «The phase diagram of QCD». In: *Contemp. Phys* 42 (2001), p. 209.
- [29] A. Hasenfratz e F. Knechtli. «Flavour Symmetry and the Static Potential with Hypercubic Blocking». In: *Phys. Rev D* 64, 034504 (2001).

- [30] W.K. Heisenberg. «Über den Bau der Atomkerne». In: *Zeitschrift für Physik* 77 (1932), pp. 1–11.
- [31] P.W. Higgs. «Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons». In: *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964), p. 508.
- [32] G. 't Hooft. «The Topological Mechanism for Permanent Quark Confinement in a Nonabelian Gauge Theory». In: *Phys. Scripta* 25 (1982), pp. 133–142.
- [33] M. Maggiore. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford University Press, 2010.
- [34] S. Mandelstam. «Vortices and quark confinement in non-Abelian gauge theories». In: *Phys. Lett.* B53 (1975), pp. 476–478.
- [35] C. Morningstar e M. Peardon. «Analytic smearing of SU(3) link variables in lattice QCD». In: *Phys. Rev* D69(5), 054591 (2004).
- [36] T. Muta. *Foundations of Quantum Chromodynamics*. World Scientific Lecture Notes in Physics, 1987.
- [37] K. Nakamura et al. *Particle Physics Booklet*. IOP Publishing, 2010.
- [38] G. Parisi. «Quark Imprisonment and Vacuum Repulsion». In: *Phys. Rev.* D11 (1975), p. 970.
- [39] H.D. Politzer. «Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?» In: *Phys. Rev. Lett* 30 (1973), p. 1346.
- [40] A.C. Rose-Innes e E.H. Rhoderick. *Introduction to superconductivity*. Pergamon Press, 1978.
- [41] H.J. Rothe. *Lattice Gauge Theories*. World Scientific Lecture Notes in Physics, 2005.
- [42] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Vol. 2, Modern Applications. Cambridge University Press, 1996.
- [43] C.N. Yang e R.L. Mills. «Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance». In: *Phys. Rev* 96 (1954), p. 191.