

Università degli studi di Pisa

Facoltà di Ingegneria

Tesi di Laurea in Ingegneria delle Costruzioni Civili



Analisi strutturale non lineare di volte in muratura:

Il caso di palazzo Franchetti a Pisa

Relatori:

Chiar.mo Prof. Ing Massimiliano Lucchesi

Dott. Ing. Anna De Falco

Dott. Ing. Daniele Pellegrini

Candidato:

Delia

D'Arrigo

Anno Accademico 2013/2014

SOMMARIO

INTRODUZIONE	1
---------------------------	----------

CAPITOLO I

ANALISI DI ARCHI E VOLTE IN MURATURA: DALLE ORIGINI AL '900	2
--	----------

I.1	Dalle origini delle strutture voltate ai trattati di Stereotomia.	3
I.2	Verso la meccanica strutturale: il problema dell'inclinazione dei giunti nella Stereotomia.	6
I.3	Le intuizioni di Leon Battista Alberti e di Leonardo da Vinci	8
I.4	Il primo documento sulla statica dell'arco	13
I.5	Philippe De La Hire e la "Teoria del cuneo"	14
I.6	Jacob Bernoulli e la "catenaria"	20
I.7	Claude Antoine Couplet e il "collasso flessionale"	21
I.7.1	La prima opera del 1729	22
I.7.2	La seconda opera del 1730	24
I.8	L'abate Bossut	26
I.9	Charles Coulomb e il "principio dei massimi e minimi"	31
I.10	Le "nuove ricerche" di Lorenzo Mascheroni	37
I.11	I contributi dell'XIX secolo: verso l'analisi elastica	40

CAPITOLO II

ANALISI DI ARCHI E VOLTE IN MURATURA: STATO DELL'ARTE	46
--	-----------

II.1	Analisi limite: i teoremi di plasticità per la muratura	48
II.1.1	Thrust Network Analysis: estensione grafica 3D dell'analisi limite	61
II.1.2	La "superficie delle eccentricità di massimo modulo"	65
II.2	Analisi incrementale: la ricerca dell'effettivo stato di sollecitazione	66
II.2.1	Modellazione del materiale muratura: approcci continui, discreti e legami costitutivi	67
II.2.1.1	Tecniche di micromodellazione	68
II.2.1.2	Tecniche di omogeneizzazione	69
II.2.1.2.1	Il modello plastico con softening di Lourenço et al.	72
II.2.1.2.2	Modello con danneggiamento di Zucchini e Lourenço	75
II.2.1.3	Tecniche di macromodellazione: legami costitutivi per il continuo	77
II.2.1.3.1	Il legame Drucker-Prager	78
II.2.1.3.2	Il legame Willam-Warnke	79

II.2.1.3.3	Confronto e limiti dei due criteri: esempi in letteratura	80
II.2.1.3.4	Il legame no-tension	85
II.2.2	Analisi FEM elastica lineare di volte in muratura	91
II.2.3	Analisi FEM non lineare di volte in muratura	92
II.2.4	Conclusioni	95
CAPITOLO III		
IL CASO DELLA VOLTA DI PALAZZO FRANCHETTI: INQUADRAMENTO STORICO 99		
III.1	Palazzo Franchetti: le origini come <i>case-torri</i>	101
III.2	L'unificazione degli edifici	111
III.2.1	Palazzo <i>del Torto</i>	111
III.2.2	Palazzo <i>Lanfranchi</i>	112
III.2.3	Palazzo <i>Mannaioni</i>	114
III.2.4	Riunificazione sotto i Franchetti.....	114
III.3	Dal progetto di Alessandro Gherardesca allo stato attuale	116
CAPITOLO IV		
IL CASO DELLA VOLTA DI PALAZZO FRANCHETTI: ANALISI STRUTTURALI..... 120		
IV.1	Il materiale masonry-like e il codice NOSA	122
IV.1.1	Il legame costitutivo	122
IV.1.1.1	Materiale non resistente a trazione e limitatamente a compressione	124
IV.1.1.2	Materiale debolmente resistente a trazione e limitatamente a compressione.....	125
IV.1.1.3	Materiale debolmente resistente a trazione e infinitamente a compressione.....	125
IV.2	Il problema al contorno	129
IV.3	Il metodo degli elementi finiti	136
IV.3.1	Il codice NOSA	138
IV.3.1.1	Calcolo della derivata del tensore degli sforzi rispetto alle deformazioni totali	143
IV.4	La volta: geometria e scelta dei vincoli	148
IV.4.1	Modello I	150
IV.4.2	Modello II	152
IV.4.3	Modello III	153
IV.5	Quadro fessurativo.....	156

IV.6	Scelta del materiale.....	160
IV.7	Carichi applicati.....	162
IV.8	Elementi finiti utilizzati	163
IV.9	Analisi elastiche lineari.....	165
IV.9.1	Modello I: Semplice appoggio alla base	165
IV.9.2	Modello I: Semplice appoggio alla base e vincoli laterali fissi.....	172
IV.9.3	Modello I: Semplice appoggio alla base e vincoli laterali parziali	177
IV.9.4	Modello II: Semplice appoggio alla base	178
IV.9.1	Modello II: Semplice appoggio alla base e vincoli laterali fissi.....	182
IV.9.2	Modello II: appoggio alla base, vincoli laterali fissi e materiale di rinfiacco.....	184
IV.10	Analisi elastiche-non lineari	190
IV.10.1	Modello I: Semplice appoggio alla base.....	190
IV.10.2	Modello I: Semplice appoggio alla base e materiale di rinfiacco	197
IV.10.3	Modello II: Semplice appoggio alla base.....	199
IV.10.4	Modello II: Semplice appoggio alla base, materiale di rinfiacco e vincoli laterali fissi ..	202
IV.10.5	Modello III: stato attuale	205
IV.10.6	Modello III: stato originario	212
IV.10.7	Modello III: stato consolidato	216
IV.11	Analisi incrementale al collasso.....	220
IV.12	Analisi dinamica	226
CONCLUSIONI		231
BIBLIOGRAFIA		233

INTRODUZIONE

Le strutture voltate in muratura sono strutture a geometria spesso molto complessa con meccanismi resistenti spaziali difficili da identificare a priori e, quindi, da schematizzare in modelli semplificati. A questo si aggiunge la difficoltà di modellare il materiale muratura, una “costruzione nella costruzione”, il cui comportamento meccanico è estremamente complesso e dipendente da un grande numero di fattori.

Questo lavoro è stato articolato in tre parti: una prima parte relativa alla rivisitazione storica dello sviluppo delle tecniche di analisi di archi e volte in muratura, dalle origini all’epoca moderna, imprescindibile per la comprensione delle attuali teorie; a queste ultime si riferisce il secondo capitolo di questa tesi, che ne riporta un breve ma esaustivo stato dell’arte per mettere in luce le peculiarità del metodo impiegato in questo lavoro; infine un’ultima parte, volta alla presentazione del caso pratico analizzato (Capitolo III), alla illustrazione di questa nuova metodologia di analisi, implementata nel programma NOSA-ITACA, e alla validazione del metodo nei risultati ottenuti (Capitolo IV).

CAPITOLO I

**Analisi di archi e volte in muratura:
dalle origini al '900**

I.1 Dalle origini delle strutture voltate ai trattati di Stereotomia¹.

Nonostante le coperture voltate siano state utilizzate in tutte le loro forme nell'architettura romana, le prime costruzioni ad arco o voltate risalgono al III millennio a.C. e si ritrovano in Egitto e Mesopotamia. Tali coperture erano costruite con pietre di dimensioni relativamente grandi, tali da sostenersi e formare una struttura solida anche senza malta o cemento: l'attrito tra i conci dovuto al peso proprio giocava, infatti, il ruolo della malta. Esse erano poste in opera secondo il sistema trilitico, cioè con blocchi sovrapposti posati progressivamente con una lieve sporgenza e convergenti nel vertice, chiuso con una lastra o un architrave di modeste dimensioni.

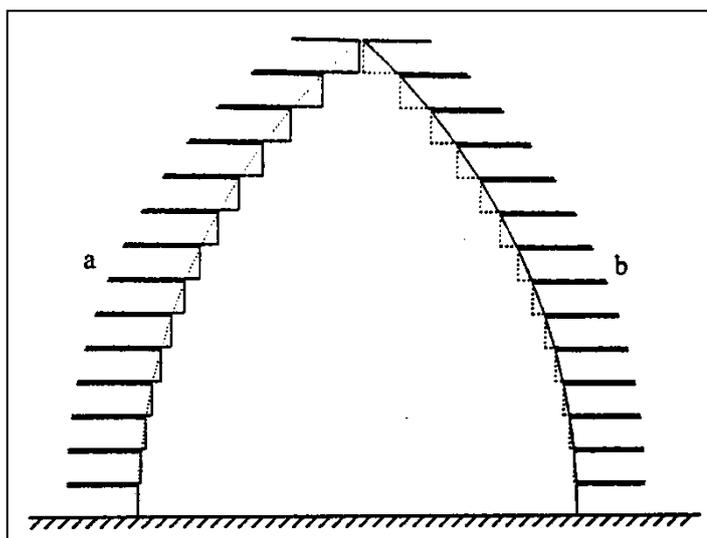


Figura I-1 – Posa in opera a sbalzo: a) per *encorbellement*; b) *par ravalement*

Un'altra tecnica costruttiva diffusa soprattutto in Mesopotamia era quella di formare una successione di archi inclinati composti da mattoni disposti a coltello. Attraverso tale tecnica era possibile realizzare volte a botte senza l'ausilio di centine, poiché il primo arco veniva appoggiato al muro di testa del vano, i successivi a quest'ultimo e così via.

Affinché si inizi ad analizzare l'arco e ad avere consapevolezza dei meccanismi strutturali del suo funzionamento, si deve arrivare all'epoca romana, nella quale furono elaborate e perfezionate le tecniche greche ed etrusche penetrate in Italia fino ad averne completa padronanza. La grande esperienza maturata ed il largo uso che questa civiltà

¹ Trattazione tratta da (166).

fece delle strutture voltate fu tale, infatti, da far iniziare i primi rudimentali studi sulla statica dell'arco e portare alla consapevolezza dei problemi legati al loro utilizzo. Chiaro esempio di questo è il *De architectura* di Vitruvio, nel quale egli dimostrò di aver intuito chiaramente l'effetto spingente esercitato dalla volta sui piedritti.

Nei primi esempi di strutture ad arco nel mondo romano, infatti, il problema era risolto costruendo strutture completamente confinate, o appartenenti ad opere interrate, o sovrastanti aperture al centro di pareti murarie. È a partire dal II secolo a.C. che i costruttori romani riescono a rendere la volta un volume libero, facendola diventare una tecnica di costruzione nobile, non più confinata a costruzioni sotterranee o all'architettura funeraria.

Nonostante ciò, gli antichi continuarono a pensare ancora per molto tempo l'arco come esempio di perfezione geometrica, che doveva contenere in sé un principio di perfezione statica: il parametro su cui essi operavano principalmente era, infatti, quello geometrico, convinti che l'armoniosità e la regolarità formale fosse un'assicurazione di solidità statica.

Si dovrà aspettare la fine del diciassettesimo secolo per veder nascere una teoria statica sugli archi in termini quantitativi.

Nel frattempo, come già accennato, gli studi si concentrano sulle forme, con il perfezionamento delle tecniche di taglio della pietra al fine di rispondere a due crescenti necessità:

- diminuire la dimensione delle pietre costituenti la struttura senza andarne a minare l'equilibrio e la stabilità;
- aumentare le luci massime di 4÷5 metri fino ad ora raggiunte, a causa della scarsa resistenza a flessione delle strutture.

Delle tecniche di taglio della pietra si occupò la Stereotomia, l'insieme di conoscenze geometriche e tecniche tradizionali relative alla tracciatura ed al taglio dei blocchi e dei conci in pietra da taglio ed al loro assemblaggio ed impiego in complesse strutture. La sua prima trattazione teorica avvenne in alcuni trattati di architettura, quasi tutti francesi, che a partire dalla seconda metà del XVI secolo conferirono dignità scientifica alla materia. In essi erano illustrate le regole con cui devono essere tagliati i conci per risolvere i vari problemi geometrici che si possono presentare. Tali metodi si possono dividere in due grandi famiglie: quelli arcaici da una parte, l'*équarrissement* e il taglio *par panneaux* dall'altra.

I metodi arcaici sono quelli che non richiedono alcun tracciato preparatorio, con pietre che vengono tagliate o direttamente dopo la messa in opera, per la quale erano state semplicemente grossolanamente sbazzate, oppure di pietra in pietra, per successivi ritocchi, in funzione dei conci già messi in opera su cui essa si dovrà appoggiare.

Probabilmente per poter accelerare il ritmo di lavorazione nei cantieri, le tecniche di taglio si sono affinate per sfruttare meglio le potenzialità della geometria.

Le nuove tecniche si basano, infatti, su un "progetto" preliminare del concio, andando così a ridurre i tempi necessari alla ricerca della forma perfetta tipici dei metodi più antichi.

L'*équarrissement*, ad esempio, consiste nel taglio di una pietra squadrandola con facce che si incontrano ad angolo retto, senza l'aiuto di pannelli ma semplicemente applicando sulla pietra le misure delle altezze e delle profondità che si ricavano dall'*èpure*, che è appunto un disegno della volta tracciato su un muro o su una tavola della stessa grandezza dell'oggetto da eseguire(1).

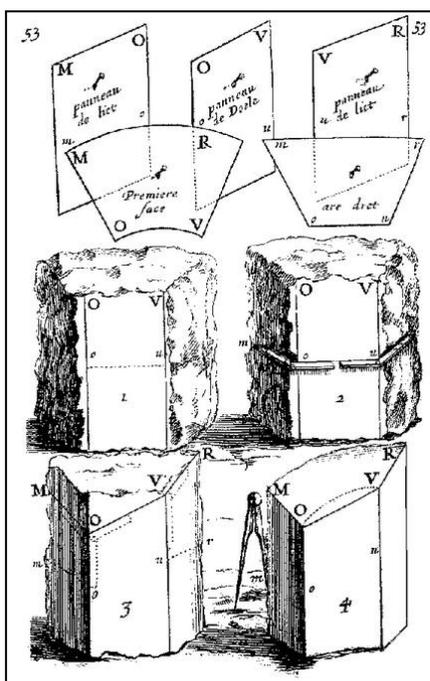


Figura I-2 - A. Bosse, *La pratique du Trait*, tav.53: descrizione dei *panneaux* di un concio

Nella tecnica *par panneaux*, invece, si determina il volume di ogni concio a partire dalla superficie di ciascuna delle sue facce, attraverso l'utilizzo di *panneaux*, sagome delle singole superfici di un concio, tagliate in legno, cartone o altro materiale sottile, per essere applicate sulla pietra e tracciarne i contorni (Figura I-2).

I.2 Verso la meccanica strutturale: il problema dell'inclinazione dei giunti nella Stereotomia.

La stereotomia si spinse, però, oltre lo studio geometrico delle forme, poiché andò a studiare anche il problema della determinazione della corretta inclinazione dei giunti in un arco, quando siano assegnati le linee di intradosso ed estradosso, ponendosi a metà tra il mondo della geometria e quello della meccanica strutturale.

In particolare, all'interno dei trattati è possibile individuare due fondamentali scuole di pensiero.

La prima sostiene che le rette rappresentative della direzione dei giunti debbano convergere in un punto, comunque siano le curve di intradosso ed estradosso dell'arco. Il vantaggio di un tale approccio risiede, ovviamente, nella semplicità esecutiva del tracciamento dei giunti, operazione per la quale l'unico strumento così necessario a è una corda ancorata ad un punto fisso, che è quello appunto di convergenza.

Il limite, però, di questo metodo è la totale disattenzione ai problemi statici e ad altri problemi costruttivi che derivano dalla semplicità di tracciamento: essa, infatti, implica la possibilità di realizzare il taglio delle pietre secondo angoli acuti ed ottusi e ciò costituisce un elemento di difficoltà esecutiva e di debolezza costruttiva.

Un chiaro esempio di questa tecnica è riportato nella Figura I-3 tratta dal *Livre de Portraiture* (una raccolta di disegni, corredati da annotazioni e fondamentale per la conoscenza dell'architettura gotica) di Villard de Honnecourt(2), un architetto francese del XIII secolo. In essa viene spiegato come tracciare i giunti di una coppia di archi con capitello intermedio, utilizzando una corda fissata al piedritto centrale.

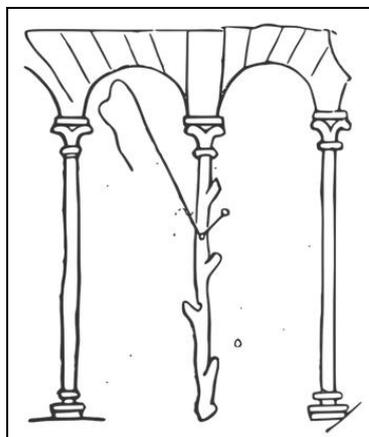


Figura I-3 - Metodo di tracciamento dei giunti, *Livre de Portraiture*, V. de Honnecourt, XIII sec.

Il secondo criterio sostiene invece la perpendicolarità dei giunti alla linea di intradosso ed è ottimale da un punto di vista costruttivo, in quanto l'angolo retto è il più facile da eseguire e garantisce una resistenza uniforme nei conci adiacenti.

Un esempio tipico si ritrova nell'opera di Amédée François Frézier(3) degli inizi del XVIII secolo. La trattazione si articola intorno a proposizioni prettamente teoriche che trasportano sul piano della pura geometria le problematiche costruttive della prassi di cantiere, attraverso un'analisi dettagliata delle superfici, delle loro intersezioni e degli sviluppi, delle proprietà delle figure geometriche e dei metodi congrui per poterle rappresentare in piano, sino a concludere con un abaco piuttosto esteso di sperimentazioni ed applicazioni pratiche.

Un esempio di questo è riportata nella figura sottostante, nella quale è possibile notare la perpendicolarità tra la direzione dei giunti di malta e l'intradosso dell'arco esaminato.

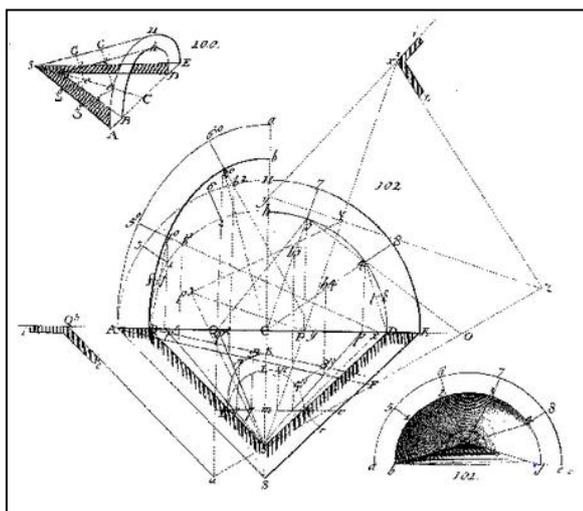


Figura I-4 - *Trompe Droit circulaire*. A.F. Frézier, Libro IV, Tav.43, p.217.

Nei trattati di Stereotomia, dunque, erano presenti dei veri e propri algoritmi dedicati alla soluzione di casi particolari.

In tal senso, si scoprono affinità più penetranti ed estese tra l'attuale concetto di modellazione, realizzata mediante software, e la stereotomia, piuttosto che tra quest'ultima e la stessa geometria descrittiva.

Infatti, lo scopo e l'uso della modellazione solida non è tanto e solo la descrizione dell'oggetto, rappresentandolo in alcune viste congelate, le quali, per identificare univocamente un punto, un segmento, una superficie, richiedono l'una l'esistenza dell'altra, ma piuttosto la determinazione stessa dell'oggetto, costruendone un modello

numerico strutturato e connesso che potrà essere modificato, esplorato, sezionato, pesato, edificato. Se la geometria descrittiva presuppone l'esistenza di un modello, sia pure mentale, da rappresentare in varie proiezioni, la modellazione solida lo crea.

In altro contesto e per mezzo di tecniche diverse, la stereotomia si assume ed assolve tuttavia lo stesso compito. Un *trait géométrique*, ancor prima di presentarsi come grafico è un vero e proprio algoritmo, nel quale le variabili di ingresso sono date da una sezione orizzontale ed una verticale del manufatto e l'univoco prodotto è il modello tridimensionale dello stesso.

I.3 Le intuizioni di Leon Battista Alberti e di Leonardo da Vinci

I costruttori medievali, come sostenne Eugène Viollet le Duc (4) nel suo "dizionario di architettura Francese" nel XIX secolo, sembravano essere già a conoscenza, per lo meno a livello intuitivo, della curva delle pressioni, tanto è che la forma dell'arco a sesto acuto approssima meglio di ogni altra la curva delle pressioni, se sottoposta a carichi come quelli ricorrenti nell'architettura gotica.

Inoltre i costruttori medievali utilizzavano un metodo geometrico empirico per dimensionare i piedritti, affinché essi contenessero la spinta dell'arco²: dividendo l'arco, sia che fosse a tutto sesto sia a sesto acuto, in tre parti eguali, AB, BC, CD, con centro in D e raggio CD si descriveva una semicirconfenza. L'estremità opposta a C del diametro, E, apparteneva al filo esterno del piedritto.

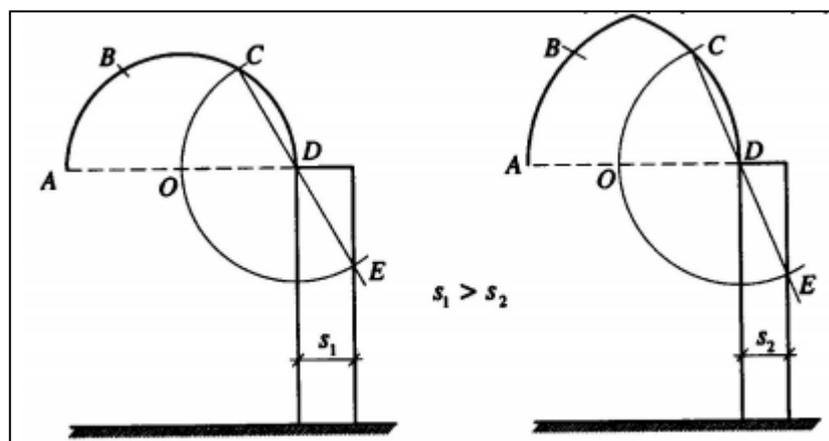


Figura I-5 - Regola per il dimensionamento dei piedritti

² Regola poi teorizzata in *L'architecture des voûtes*, F. Derand, 1643.

La regola conduce ad avere piedritti di spessore maggiore per archi a tutto sesto che per archi a sesto acuto, poiché, in effetti, la spinta per i primi risulta essere maggiore.

Nonostante, quindi, già in epoca medievale i metodi costruttivi e le scelte geometriche dimostrassero una intuizione del funzionamento statico del sistema arco, esaminando la trattatistica storica sugli archi fino al XVII secolo, si può constatare la completa assenza di riferimenti alla statica strutturale e alla resistenza.

Le uniche eccezioni sono rappresentate dalle intuizioni di Leon Battista Alberti, nel suo trattato di dieci libri sull'architettura (*De re aedificatoria* del 1450), e da quelle di Leonardo da Vinci in *Frammenti sull'architettura*.

Nell'opera di L.B. Alberti egli per prima cosa si imbarcò in una disquisizione relativa ai motivi delle origini e dello sviluppo del sistema arco nell'architettura, motivando la sua teoria con ragioni di natura statica e di necessità di sviluppo costruttivo.

Egli sostenne, infatti, che l'arco ha origine dalla struttura ad aste inclinate utilizzata per i tetti a due falde e che questa si evolse, prima in quella poligonale e poi in quella ad arco, per riuscire a coprire luci maggiori: *"Credo che gli uomini abbiano appreso a costruire l'arco in questo modo. Accortisi che due travi con le estremità superiori unite potevano essere fissate in basso, nel luogo in cui le loro basi erano divaricate, in modo tale che, reciprocamente collegate ed equilibrandosi con identico peso, si reggessero tra loro, la scoperta ebbe successo, e con questa tecnica si cominciarono a impiegare negli edifici tetti a displuvio. In seguito, probabilmente, avendo intenzione di coprire con quelli un maggiore spazio e ciò non potendo per essere le travi troppo corte, sistemarono una trave intermedia nel punto più alto, alla sommità dei tronchi, facendone risultare a un dipresso la figura di una P greca; e l'elemento aggiunto chiamarono probabilmente concio. Anche questa invenzione ebbe fortuna, anzi i conci vennero moltiplicandosi, giungendo a costituire una sorta di arco. Si pensò così di trasferire questa tecnica alle opere in pietra, e coll'aggiunta di altri conci pervennero a fabbricare un arco intero."*³

Egli continuò approfondendo le ragioni statiche che rendono l'arco a tutto sesto la tipologia di archi più "solida" e senza l'ausilio di catene: *"Che il più solido (arco) sia quello intero, si può constatare con i fatti e dimostrare con il ragionamento. Non si vede in che modo esso possa sconnettersi per conto proprio, salvoché l'un concio spinga fuori l'altro; ma essi sono talmente lungi dal danneggiarsi in questa maniera, che anzi si rafforzano*

³ *De re aedificatoria*, Libro III, Cap. XIII, L.B. Alberti, 1452 ca., cit.

prestandosi reciproco sostegno. Del resto quand'anche fossero disposti a tentare di scalzarsi a vicenda, la presenza stessa dei pesi onde sono caricati o che contengono in sé basta ad impedirlo.

Pertanto gli archi interi (a tutto sesto) non abbisognano di corda (catena) poiché essi sono in grado di mantenersi intatti da sé. Invece quelli ribassati vanno rinforzati con una catena in ferro o con qualcosa d'altro equivalente assicurato nei due tratti di muro. Tali tratti non dovranno avere una altezza inferiore a quanto occorre per completare il semicerchio di cui l'arco ribassato fa parte."⁴

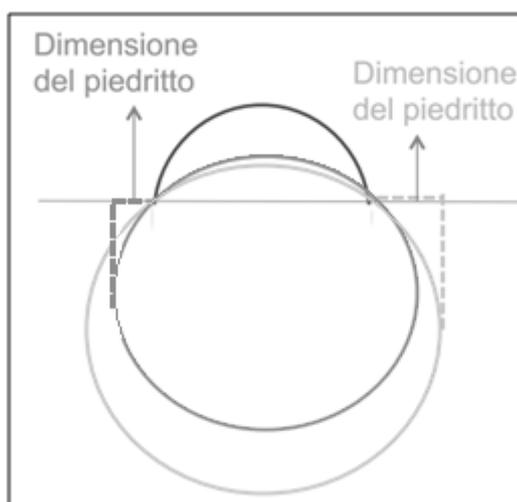


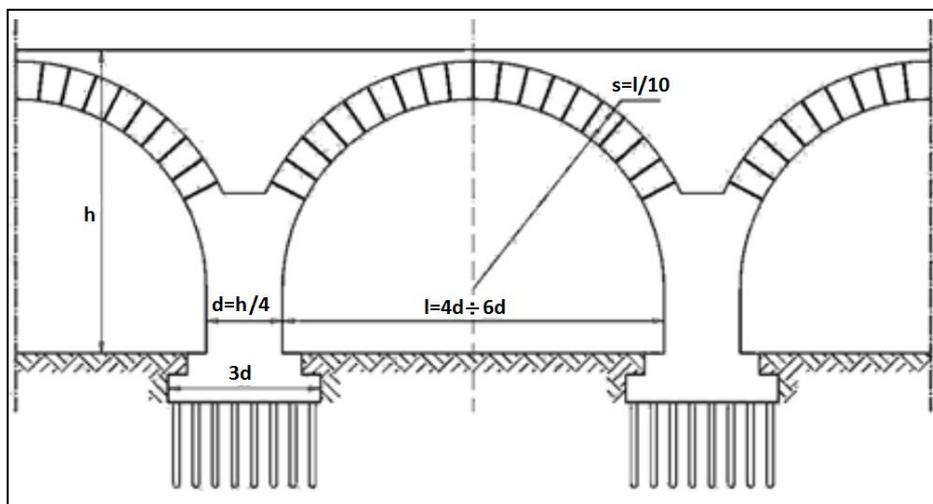
Figura I-6 - Schema illustrativo della regola di dimensionamento dei piedritti secondo L.B. Alberti.

E' evidente come la costruzione grafica imponga un piedritto variabile in funzione del grado di ribassamento dell'arco, in linea con le modalità di calcolo della effettiva spinta degli archi.

Di notevole rilevanza è anche la trattazione delle arcate relative alla costruzione dei ponti in pietra, in quanto l'Alberti è stato il primo a fornire una formulazione empirica per la determinazione dello spessore degli archi: *"gli archi che stanno a capo di tali volte, di qualunque tipo siano, saranno fatti di pietre altrettanto dure e grandi quanto quelle con cui si è reputato opportuno costruire i piloni. Nell'arco anzi le pietre non devono essere più sottili di un decimo della corda di esso; a sua volta la corda non dev'essere più lunga di sei volte lo spessore di un pilone, né meno lunga di quattro volte tanto. Per tener insieme i conci dell'arco vi si innesteranno uncini di rame e grappe robustissime; e il concio posto al*

⁴ *De re aedificatoria*, Libro III, Cap. XIII, L.B. Alberti, 1452 ca.

sommo dell'arco, detto di spina, verrà tagliato in modo da adattarsi alle linee di quelle adiacenti, e in più avrà ad una estremità uno spessore maggiore".



L'Alberti fornisce in questo modo una valida regola per il dimensionamento dello spessore delle arcate a tutto sesto:

$$s = l/10$$

Tale dimensionamento è, inoltre, proporzionato alla luce dell'arcata e quest'ultima allo spessore dei pilastri:

$$l = 4d \div 6d \quad \text{con} \quad d = h/4$$

Alcuni anni dopo, Leonardo da Vinci, riprendendo il concetto di "reciproco sostegno" tra i cunei dell'Alberti, in *Frammenti sull'architettura*, scrisse la celebre frase: "Arco non è altro che una fortezza causata da due debolezze; imperciocché l'arco negli edifiti è composto di due quarti di circolo, i quali quarti di circoli ciascuno debolissimo per sé desidera cadere e oponendosi alla ruina l'uno dell'altro, le due debolezze si convertono in un'unica fortezza".

In questa frase vi è chiaramente insita l'idea della spinta orizzontale che i vari cunei dell'arco si scambiano tra loro e dell'importanza di queste reciproche spinte di compressione per la stabilità e la statica del sistema arco.

Leonardo intuì anche come, a parità di corda e di peso proprio, la spinta alle imposte dipenda dalla geometria dell'arco (Figura I-7) e studiò le fratture ed i meccanismi che si generano in un arco sottoposto a determinate condizioni di carico (Figura I-8): arco a tutto sesto caricato in chiave, arco a tutto sesto soggetto al peso proprio e un carico concentrato in una delle reni, arco a sesto acuto caricato simmetricamente, etc.

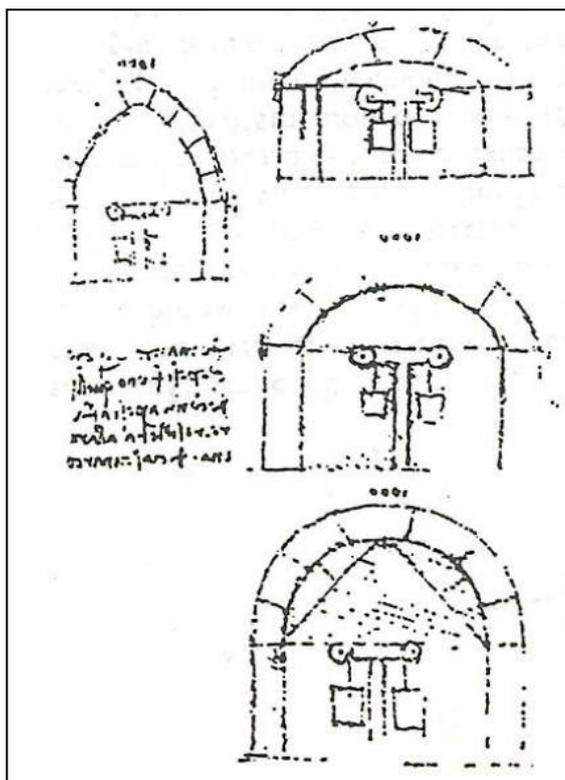


Figura I-7 - Leonardo da Vinci, Schizzi sugli studi della spinta dell'arco

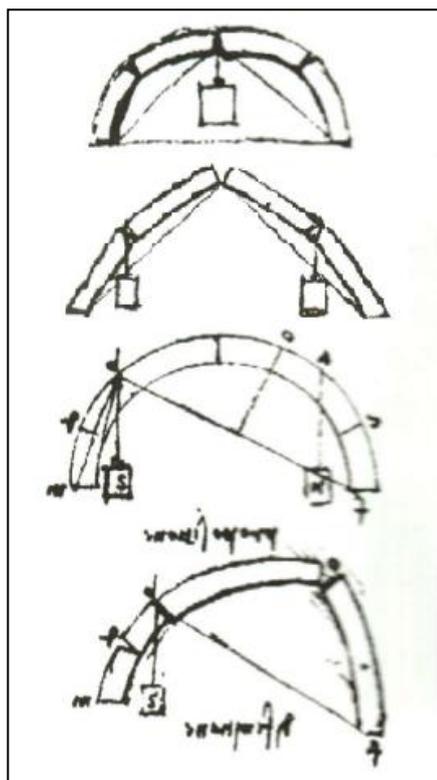


Figura I-8 - Leonardo da Vinci, Schizzi sugli studi dei meccanismi di collasso dell'arco

Da notare come, nella Figura I-8, il verso di apertura delle cerniere individui in modo corretto il meccanismo di collasso della struttura descritta.

Infine Leonardo sperimentò anche un metodo per la verifica al ribaltamento degli archi, stabilendo una condizione secondo la quale le sezioni dell'arco non ruotano.

Assimilando l'arco ad un sistema di due barre rettilinee, ab e bc (Figura I-9) egli affermò che: "L'arco non si romperà, se la corda dell'archi di fuori non tocherà l'arco di dentro".

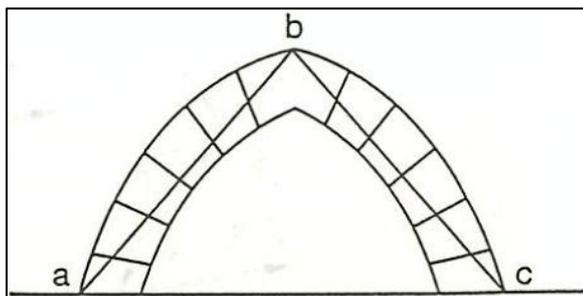


Figura I-9 - Condizione di equilibrio statico per un arco a tutto sesto secondo Leonardo da Vinci

Da notare come, nella Figura I-9, il verso di apertura delle cerniere individui in modo corretto il meccanismo di collasso della struttura descritta.

I.4 Il primo documento sulla statica dell'arco

Dopo le illuminanti ma fugaci intuizioni di Leonardo da Vinci, appena menzionate, il primo documento scientifico sulla statica dell'arco è rappresentato dagli studi dello scienziato gesuita Padre Honoré Fabri.

In due Proposizioni, la XCIV e la XCV, del Libro V del secondo trattato della *Physica*⁵, dedicato alla resistenza dei corpi, egli analizza il meccanismo resistente di una o più travi non orizzontali congiunte in modo da formare una cuspide e trae poi da tali analisi considerazioni sul sistema arco, riprendendo quindi l'intuizione di Leonardo che lo assimilava a due barre inclinate e convergenti nel vertice (Figura I-9).

La prima Proposizione è relativa ad un prisma non orizzontale incastrato ad un estremo e libero all'altro, mentre la seconda riguarda lo studio di un prisma appoggiato a entrambi gli estremi ma a quote diverse. Egli non specifica il carico che sollecita i due sistemi, e perciò si è ritenuto opportuno considerare il peso proprio.

La tesi sostenuta da Fabri, comunque, è che la rottura dei prismi avvenga per sezioni perpendicolari all'asse degli stessi e che essa si verifichi in corrispondenza dell'incastro, per il primo caso di prisma a mensola, e in corrispondenza della mezzeria della linea di intradosso, per il secondo caso di appoggi con dislivello.

Le considerazioni più interessanti relativamente ai fini del nostro excursus storico sugli studi delle strutture voltate si trovano però nel sesto corollario della Proposizione XCV nella quale Fabri considera l'effetto della diversa inclinazione delle falde di un tetto sulle azioni risultanti sugli appoggi.

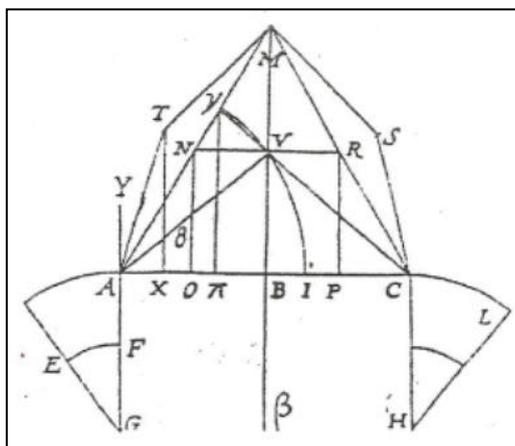


Figura I-10 - Schema di studio dell'effetto delle falde inclinate sulle spinte (Corollario VI, Prop. XCV).

⁵ *Analisi elastica non lineare e collasso di strutture ad arco in muratura*, p.26, Arch. Danila Aita, Marzo 2003.

Viene ipotizzato che le travi AV e VC abbiano sezione e peso specifico a quelle AM e MC. I fattori che egli identifica come influenzanti la spinta agli appoggi sono due:

- da una parte vi è la lunghezza dell'asta da cui dipende in maniera direttamente proporzionale il valore del peso proprio e quindi il carico che andrà a generare la spinta;
- dall'altra vi è l'inclinazione dell'asta, poiché maggiore è l'inclinazione e minore è la componente orizzontale della reazione trasmessa ai piedritti AG e CH.

In questo studio Fabri si avvicinò moltissimo a una soluzione corretta per l'arco e tre cerniere, ipotizzando che l'asta trasmetta agli appoggi una forza assiale, di intensità crescente col peso, e quindi con la lunghezza, dell'asta, compensata dalla maggiore inclinazione di quest'ultima. Egli scrisse: *"quindi la minore inclinazione di AV compensa la maggior lunghezza di AM; poiché MA spinge la parte AG più obliquamente, secondo l'angolo MAY, e VA spinge più direttamente secondo l'angolo VAY, ne segue che la forza della spinta dovuta a MA sta alla forza della spinta dovuta a VA, come il seno dell'angolo MAY sta al seno dell'angolo VAY"*.

Sono ancora molto interessanti relativamente alla statica dell'arco il quattordicesimo e il quindicesimo corollario, dedicati il primo al tetto poligonale "in semioctagonum" e il secondo all'arco. Il passaggio dal poligono all'arco, inaugurato da L.B. Alberti nella sua opera, viene qui ripreso da Fabri e diventerà nel XVIII secolo un procedimento consueto per la descrizione statica dell'arco, soprattutto nella scuola italiana.

Lo scienziato gesuita, infine, utilizzò i risultati precedenti per spiegare come un arco a tutto sesto eserciti una pressione sui piedritti minore rispetto a quella esercitata da un arco ribassato e formulò dei suggerimenti sull'introduzione di catene e sulla loro posizione in corrispondenza dell'appoggio⁶.

I.5 Philippe De La Hire e la "Teoria del cuneo"

Philippe De La Hire, versatile e insigne studioso francese, è comunemente ricordato per essere il primo che abbia affrontato scientificamente il tema degli archi e delle volte sotto l'aspetto statico; a lui, infatti, si sono riferiti gli scienziati successivi del XVIII e XIX secolo,

⁶ Per ulteriori dettagli vedere *An introduction to the History of Structural Mechanics*, pp. 315-320, E. Benvenuto, 1191 (165).

considerando le sue teorie come i primi tentativi, più o meno riusciti, di fornire spiegazioni meccaniche alle regole costruttive, fino ad allora affidate alla pratica e all'intuizione.

I problemi affrontati da De la Hire furono due: l'equilibrio di una volta indipendente dai piedritti trattata nel *Traité de Méchanique* del 1695 e la determinazione della larghezza dei medesimi in funzione delle spinte provenienti dalla volta, trattata nell'opera intitolata *Sur la construction des voûtes dans les édifices*, del 1712.

Nel primo caso (5) De la Hire pose alla base delle proposizioni riguardanti la statica degli archi un teorema che è di grande importanza in quanto prelude ad una relazione fondamentale della statica grafica, che sarà messa in evidenza verso la fine del XIX secolo: si tratta di un uso alquanto anomalo del poligono delle forze per esprimere l'equilibrio di un sistema di forze concorrenti.

L'autore osservò che se tre forze F_1 , F_2 , F_3 , convergenti in un punto, sono in equilibrio, le loro intensità devono essere proporzionali ai lati di un triangolo, perpendicolari alle direzioni delle forze medesime:

$$F_1:F_2:F_3 = GF:FH:GH \quad (I-1)$$

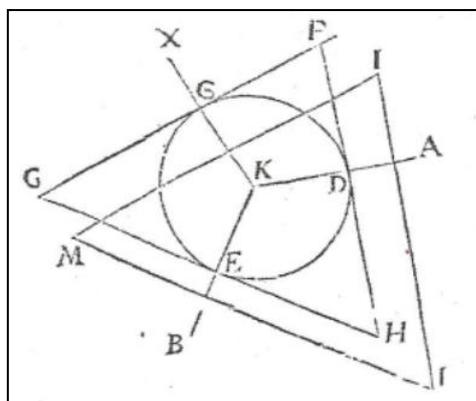


Figura I-11 - Schema di calcolo dell'equilibrio delle forze convergenti in un nodo, Prop. XXII, p.47 *Traité de Méchanique*, P.De La Hire,1695.

Sulla base della proporzione appena formulata, egli passò ad analizzare le condizioni di interazioni tra i conci ai fini della stabilità globale della struttura arco.

Facendo riferimento allo schema di Figura I-12 egli considerò che, ogni singolo concio, dovrà essere in equilibrio sotto l'azione di tre forze: il peso proprio e le due azioni dei conci adiacenti. Essi sono assimilati a solidi euclidei pesanti e perfettamente levigati, cioè con giunti di malta e attrito assenti.

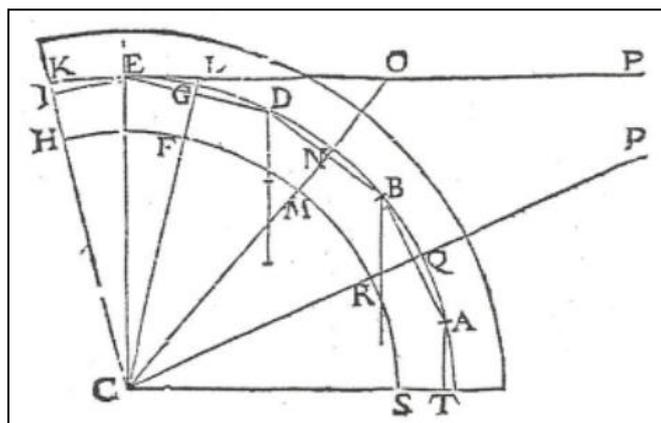


Figura I-12 - Schema di analisi delle reazioni scambiate dai conci di un arco, Prop. CXXV, p.315 *Traité de Méchanique*, P.De La Hire,1695.

I pesi dei singoli conci sono applicati ai rispettivi centri di gravità A, B, D, E in direzione verticale, mentre le forze di interazione sono perpendicolari ai giunti tra i blocchi.

Il peso del concio in chiave è assegnato a priori, considerando quest'ultimo come un *cuneo* che si appoggia ai contigui attraverso le superfici HI e GF e tale che la sua risultante Q_1 si relazioni alle reazioni F_{EI} e F_{EG} ortogonali ai giunti appena menzionati secondo la proporzione del triangolo dei lati perpendicolari:

$$Q_1 : F_{EG} : F_{EI} = KL : LC : CK \quad (1-2)$$

con KL segmento sulla perpendicolare a CE, intercettato dai prolungamenti dei giunti HI e GF, al fine di creare appunto il triangolo dei lati perpendicolari.

La determinazione della soluzione prosegue imponendo:

- l'equilibrio delle forze di interfaccia tra i blocchi

$$F_{EG} = F_{DG} \quad (1-3)$$

- l'equilibrio delle forze convergenti nel centro di gravità del blocco successivo secondo sempre la regola dei lati perpendicolari

$$Q_2 : F_{DG} : F_{DN} = LO : LC : OC \quad (1-4)$$

Generalizzando, la conseguenza di questo studio è la proporzionalità tra i pesi dei conci e il segmento che, i prolungamenti dei giunti ad essi attigui individuano sulla retta orizzontale EP.

La costruzione, corretta da un punto di vista teorico, conduce ad un risultato in parte paradossale: per il concio di imposta, infatti, le rette EP e CS risultano parallele determinando un peso infinito di tale blocco.

De La Hire stesso si accorse della discrepanza tra risultato teorico ed evidenza fisica e la spiegò come dovuta all'assunzione iniziale di blocchi perfettamente levigati e cioè di assenza di attrito.

D'altro canto l'uso del triangolo perpendicolare ha il vantaggio di far intervenire nella risoluzione del problema il raggio dell'arco, abbozzando una prima relazione tra esso e le spinte che lo caratterizzano.

L'idea sarà poi ripresa e sviluppata da Couplet, che non adotterà ancora il calcolo differenziale.

Da notare che qui La Hire opera un rovesciamento del problema statico nella verifica di resistenza: egli non si chiese di determinare la sollecitazione reale di una struttura assegnata, ma di definire la forma corrispondente alle iperstatiche assunte, anticipando grossolanamente l'idea della ricerca della funicolare.

Questa idea è rafforzata, sempre all'interno del *Traité de Mécanique*, dalla Proposizione 125: "*n'est qu'une converse de la précédente*"⁷, relativa alla statica della fune. In essa egli sottolineò, infatti, la analogia formale del problema dell'arco con quello della fune, senza però completare questa affermazione con una teoria appropriata.

Nell'opera del 1712 (6) l'analisi che egli svolse del problema del dimensionamento dei piedritti dette inizio ad un modo di ragionare e di interpretare il comportamento dell'arco che resterà egemone per quasi un secolo.

Si tratta di un abbozzo di calcolo a rottura: in altri termini l'autore prospettò un possibile meccanismo di collasso e si propose di esprimere l'equilibrio limite ad esso relativo.

L'ipotesi di rottura erano le seguenti:

- che la volta si spacchi in una sezione intermedia tra l'imposta e il mezzo della chiave, a 45° circa;
- che nelle tre zone individuate dalle sconessioni i conci siano talmente ben uniti gli uni agli altri da formare un corpo unico e che le fondazioni si presentino perfettamente rispondenti;
- che la spinta si collochi al lembo inferiore del giunto di rottura.

⁷ "non è che l'inverso della precedente"

Riassumendo il cuneo costituito dalla parte superiore della volta, al di sopra del giunto di rottura, che cala per il peso proprio, tende a far ruotare il piedritto, solidale con la restante porzione della volta, attorno al punto H (Figura I-13).

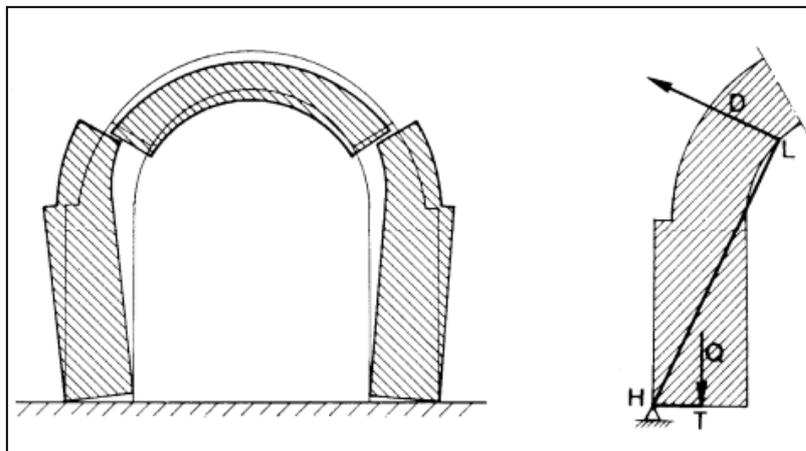


Figura I-13 - Schema di collasso a "cuneo" del sistema arco-piedritti secondo De La Hire.

Il vero traguardo di La Hire fu quello di riconsocere nel corpo della costruzione la presenza nascosta di una qualche "macchina semplice", le cui leggi di equilibrio, note in base ai principi della meccanica, consentono di interpretare il funzionamento della costruzione nella quale quella macchina si cela.

L'equazione di equilibrio limite fu da lui calcolata, dunque, con il ricorso a una leva a "gomito" il cui fulcro si trovava nel punto H e le forze applicate agli estremi erano le spinte della volta, al di sopra del giunto di rottura, ed i pesi propri piedritto-porzione inferiore della volta solidale con questo.

La difficoltà consisteva nel tradurre la forza peso verticale del concio superiore nella forza D, perpendicolare in L al braccio di leva, e nell'esprimere i pesi delle parti stabilizzanti riportandole sull'altro estremo T della leva.

Con riferimento alla figura Figura I-14, nella situazione limite il cuneo LMNF esercita sulle altre due parti della volta, come già specificato nella trattazione precedente, un'azione perpendicolare ai giunti ed agente in L ed in N.

Occorre pertanto decomporre il peso proprio verticale Q_c di metà del cuneo LMFN, secondo le perpendicolari ai giunti LM ed EF; la prima di queste due viene poi decomposta secondo le rette LD e LH.

$$F_{LD} \cdot HL = Q \cdot HT \quad (I-10)$$

dove Q è il peso complessivo del piedritto BIHS e della porzione di volta MLI, mentre $HL = \sqrt{(y+a)^2 + g^2}$. Per esprimere il peso della porzione MLI, l'autore calcola il peso di un prisma fittizio di base y ed altezza BV, avente lo stesso momento rispetto ad H di quello del concio MLI. Sviluppando i conti, il peso complessivo Q da applicare a distanza $HT = y/2$ dal fulcro H, è fornito dalla seguente espressione:

$$Q = \frac{by + (\frac{1}{2}y + h)Q'_c}{\frac{1}{2}y} \quad (I-11)$$

In definitiva l'equazione determinatrice dello spessore y del piedritto è data da:

$$\frac{1}{2}dfy^2 + \frac{1}{2}fy(Q'_c + 2Q_c) + Q'_c hf - Q'_c(eg - af) = 0 \quad (I-12)$$

Il problema è, dunque, risolto e, secondo il parere di De La Hire, estendibile a qualsiasi altro caso di archi ribassati, a sesto acuto o rampanti.

La restante parte della memoria è dedicata ad una risoluzione grafica dell'equazione (I-12).

Corradi e Buti, analizzando la complessa costruzione grafica, hanno mostrato che essa non produce la soluzione effettiva dell'equazione, ma risulta fortemente cautelativa ai fini della determinazione dello spessore dei piedritti dell'arco.

I.6 Jacob Bernoulli e la "catenaria"

Jacob Bernoulli, matematico e scienziato svizzero, ha formulato una delle prime applicazioni del calcolo differenziale allo studio dell'equilibrio delle volte pesanti.

Egli, infatti, riprendendo la teoria di De La Hire sull'analogia tra il problema di una fune e quella di un arco, lo sviluppa quantitativamente, confrontando le equazioni che li descrivono.

Nel *De curvatura fornicis* del 1704 (7) egli sviluppò, quindi, il problema. Egli considerò una volta ABC costituita da un numero illimitato di conci DKLE aventi la forma di un parallelepipedo rettangolo e uno spessore DK infinitamente piccolo. Essi, inoltre, non sono collegati da alcun legame e hanno giunti privi di attrito.

1.7.1 La prima opera del 1729

Questa prima memoria (8) è dedicata allo studio delle volte prive di attrito e si apre con la dimostrazione di un principio già dimostrato da De La Hire: "Se una forza viene scomposta in due, le tre forze staranno tra di loro come i lati di un triangolo formato dalle perpendicolari alle direzioni di queste tre forze".

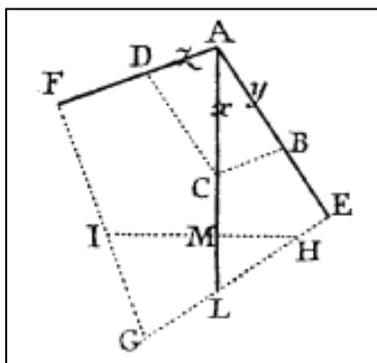


Figura I-16 - Schema di scomposizione di una forza, *De la Poussée des Voûte*, C.A.Couplet, 1729.

Ciò posto la lettura statica del comportamento dell'arco si svolge sempre con il richiamo alla teoria del "cuneo", la macchina semplice che, come teorizzato da De La Hire, esprimeva così bene il "mutuo soccorso" tra i diversi conci componenti la struttura voltata. Egli considera anche le stesse ipotesi dello studioso francese, di conci perfettamente levigati e di curva di intradosso e posizione dei giunti note.

Con riferimento alla Figura I-17 anzitutto si suppone assegnata la forza e dunque il peso QA del concio in chiave che eserciterà "per primo" sforzi perpendicolari ai giunti dei conci limitrofi. Analogamente a De La Hire, il problema viene risolto considerando che l'equilibrio sussisterà solo se le forze di interazione tra i giunti risulteranno ad essi ortogonali, essendo tali forze le uniche in gioco poiché i conci sono privi di attrito.

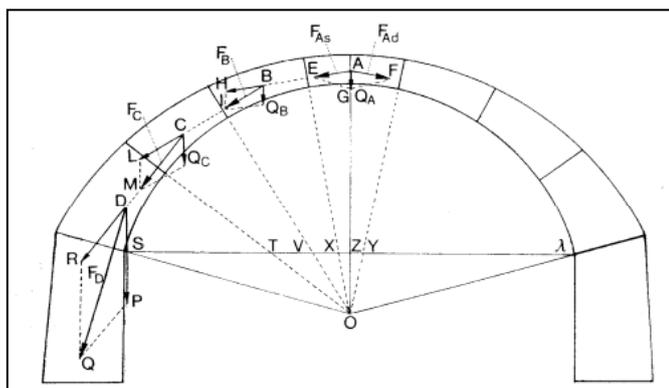


Figura I-17 - Schema per il calcolo della spinta sui piedritti, *De la Poussée des Voûte*, C.A.Couplet, 1729.

Con la nota regola del parallelogramma si ottengono dunque le forze F_{As} e F_{Ad} e si prosegue poi la costruzione nel tratto a sinistra dell'arco: sul prolungamento della AE, a partire dal punto B, centro di gravità del concio successivo alla chiave, si riporta $HB = AE$ e nel punto H si traccia una verticale sino ad incontrare in I la perpendicolare al giunto sottostante.

Si individuano così il peso QB del concio, la spinta FB e analogamente tutte le altre incognite del problema, ivi compresa l'ultima spinta FD sul piedritto.

Con questa costruzione, nel caso in cui il giunto col piedritto fosse orizzontale, l'equilibrio con la spinta sarebbe garantito solo da un peso P dell'ultimo concio infinito. Come per la soluzione di De La Hire, per il quale era il concio in chiave a dover avere peso infinito per garantire l'equilibrio, si arriva ad un risultato paradossale che di nuovo l'autore spiega come risultato minato dall'assenza di attrito tra i conci. L'attrito, infatti, porterebbe alla non perpendicolarità dell'azione rispetto al giunto e, quindi, alla non verticalità di F_D , così da permettere di nuovo l'utilizzo della regola del parallelogramma per trovare l'equilibrio tra F_D , P e R.

Dalla figura, inoltre, emerge una interessante rappresentazione grafica, sia della variazione delle "grossezze" (o dei pesi dei singoli conci), sia delle forze di pressione. Infatti, in virtù del lemma iniziale, su una retta orizzontale $S\lambda$ qualunque, si individuano, nelle intersezioni con le congiungenti il centro O della volta e i giunti dei vari conci, dei segmenti XY, VX, TV, ST che esprimono i pesi dei conci A, B, C, D, nell'ipotesi che i conci medesimi siano in equilibrio e nell'ambito della proporzione stabilita appunto dal lemma.

Se si osserva, ad esempio, il triangolo XYO, si nota facilmente che esso rappresenta il triangolo dei lati perpendicolari per l'equilibrio delle forze F_{As} , F_{Ad} e Q_A .

Analogamente i segmenti OX, OV, OT, OS rappresentano le spinte dei conci della volta sui limitrofi.

Il segmento OZ, che congiunge il centro O della volta con l'intersezione tra la verticale e la linea di fede $S\lambda$ misura *"la spinta orizzontale della chiave, quella di tutta la volta o di una porzione qualunque di essa come risulta evidente poiché ogni porzione, come tutta la volta, debbono farsi equilibrio con la chiave"*.

L'attenzione di Couplet si concentra, poi, su un metodo geometrico per la descrizione delle aree e, quindi, dei pesi propri di ogni concio. Relativamente alla un teorema afferma che l'area del concio generico MmNn coincide con quella del trapezio M'm'N'n',

individuato dalle due tangenti in chiave alle curve di intradosso e di estradosso e dai prolungamenti dei giunti Mm e Nn.

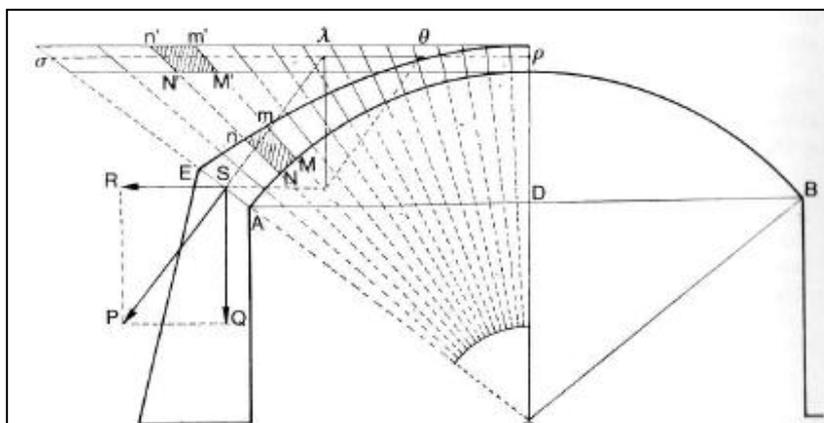


Figura I-18 - Metodo geometrico di calcolo dei pesi dei singoli conci necessari all'equilibrio secondo Couplet.

Dal teorema discendono alcuni interessanti corollari:

- se l'arco ha intradosso orizzontale e rettilineo, anche l'estradosso dovrà esserlo (piattabanda);
- se l'intradosso ha forma qualsiasi, l'estradosso sarà determinato da una curva dipendente da quella di intradosso;
- i conci non possono essere in equilibrio sotto l'azione del loro peso se l'arco ha estradosso orizzontale ed intradosso curvilineo.

I.7.2 La seconda opera del 1730

In questa seconda opera (9) il problema dell'equilibrio delle volte viene affrontato considerando l'attrito tra i conci. In realtà, non sapendo l'autore come considerare il comportamento dell'attrito, ipotizzerà l'ingranamento totale tra i conci, tornando in un certo senso al concetto di arco monolitico e spostando il problema dell'equilibrio, da quello dei singoli conci, a quello dell'arco nel suo insieme.

La rottura, dunque, può avvenire solo per distacco in seguito a rotazione mutua intorno a certi punti dell'estradosso e dell'intradosso che Couplet indica, appunto, con il nome di "*charnières*" (cerniere).

Sotto queste ipotesi le azioni mutue che si scambiano i conci non devono essere necessariamente ortogonali ai giunti, che sono in grado di trasmettere, alla stregua di

incastri, azioni comunque dirette e di qualsiasi intensità, purché la loro retta d'azione attraversi la sezione.

Il teorema esposto dall'autore riprende un'idea già presente in Leonardo: la condizione sufficiente di equilibrio viene soddisfatta *"se la corda della metà dell'estradosso non taglia l'intradosso, ma passa ovunque entro lo spessore della volta"*.

Il problema sta però nel valutare l'equilibrio quando tale grossolana condizione sia trasgredita. Per farlo Couplet assume una condizione di collasso, riconducendo l'arco ad un sistema di quattro blocchi: CE, EA, AD e DB (Figura I-19). Si abbandona qui l'idea del cuneo spingente di De La Hire, con rottura per scivolamento, e si abbraccia quella di un meccanismo complesso basato sul collasso flessionale.

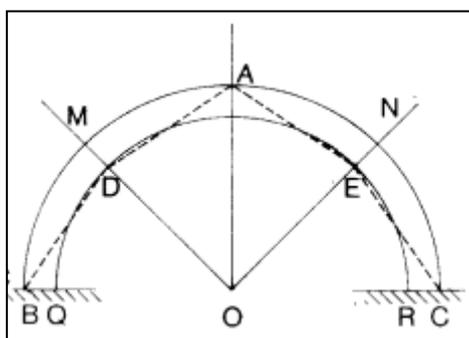


Figura I-19 - Schema illustrativo del meccanismo a 4 blocchi adottato da Couplet.

Il collasso avviene, quindi, per apertura e rotazione delle sezioni di imposta, della sezione in chiave e delle due sezioni poste a 45° dalla chiave, con formazione di cerniere in B, D, A, E e C.

Couplet risolve il problema quantitativamente arrivando al calcolo dello spessore minimo per una volta di raggio di intradosso $R_i = 14$ piedi: $h_{\min} = 1,487$ piedi.

Se si calcola il rapporto K tra il raggio di estradosso $R_e = R_i + h$ e quello di intradosso R_i , si ottiene una $K_{\lim} = 1,1062$, con un errore dello 0,6% rispetto al valore corretto di $K_{\lim} = 1,1136$.

Couplet sarebbe potuto arrivare ad un calcolo rigoroso se non avesse aggiunto una ipotesi erronea: che cioè i giunti di rottura alle reni debbano trovarsi a 45°. Purtroppo tale errore, peraltro presente anche in De la Hire, toglie interesse alle successive elaborazioni analitiche riferite ai diversi tipi di arco.

Sarà Lorenzo Mascheroni a ottenere la vera soluzione al problema.

I.8 L'abate Bossut

L'abate Bossut (1730 - 1814), prestigioso matematico francese che prese parte alla vita di numerose accademie, cimentò le sue grandi conoscenze matematiche nella risoluzione di svariati problemi, tra cui anche quello della statica dell'arco⁽¹⁰⁾.

Egli sviluppò i due particolari problemi già incontrati esaminando i contributi dei suoi predecessori:

- La ricerca della geometria (anche in termini di peso dei singoli conci) di una struttura voltata che ne garantisca l'equilibrio;
- La determinazione dello spessore dei piedritti necessario a stabilizzarla.

Tra i due, il primo problema è il più fecondo di applicazioni sino ad allora inedite.

Analizzando il primo problema, egli si rifà all'ipotesi di giunti ortogonali all'intradosso (abbracciando le teorie diffuse dalla Stereotomia), in assenza di attrito e coesione, introducendo però due nuove condizioni:

1. La presenza non solo di peso proprio, ma anche di eventuali altri sovraccarichi di intensità e direzione qualsiasi;
2. La simmetria dell'arco e degli stessi sovraccarichi rispetto alla verticale passante per la sezione in chiave.

Come già accennato le incognite sono rappresentate dagli spessori da assegnare ad ogni singolo concio dell'arco.

Analizziamo brevemente la formulazione e la soluzione⁹.

Sia ABCD.. la linea di intradosso e abcd.. quella di estradosso di un arco, con applicate forze $F_1, F_2, ..$ agenti con intensità e retta d'azione note¹⁰.

Egli decompone le forze F_1 e F_2 applicate a due conci consecutivi secondo le normali ai giunti ad essi adiacenti; in tal modo, per l'equilibrio, dovrà valere l'uguaglianza:

$$F_{1d} = F_{2s} \quad (I-13)$$

⁹ Trattazione estratta da *"La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico"*, p.342, E. Benvenuto, Sansoni, Firenze 1981 (164).

¹⁰ Bossut considera il peso proprio di ogni concio compreso nella F_i ad esso applicata.

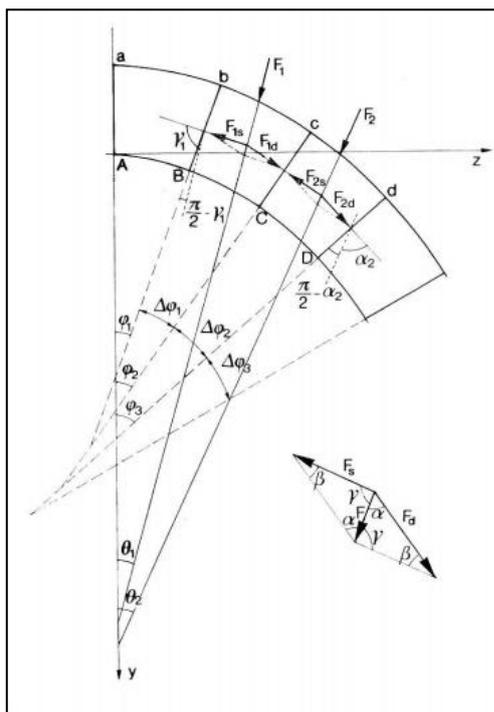


Figura I-20 - Schema per il calcolo dell'equilibrio di un concio della generica volta, abate Bossut.

In realtà tale condizione proposta da Bossut non sarebbe sufficiente a garantire l'equilibrio, poiché sarebbe necessario imporre anche quello alla rotazione, per scrivere l'equazione del quale, però, sarebbe necessario conoscere il punto di applicazione delle due forze sul giunto. Tuttavia questa mancanza non genera un errore per i risultati successivi, poiché l'autore assimila l'arco ad una linea curva tangente in ogni suo punto alle forze di compressione.

Egli prosegue esplicitando l'equazione (I-13) in funzione dei parametri geometrici dell'arco e della direzione delle forze esterne. Dal teorema dei seni:

$$F_s = F \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \qquad F_d = F \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \qquad (I-14)$$

L'equazione (I-13) diventa così:

$$\frac{F_1}{F_2} = F \frac{\sin \alpha_2 \sin \beta_1}{\sin \gamma_1 \sin \beta_2} \qquad (I-15)$$

Esprimendo, poi, gli angoli α , β , γ in funzione dell'angolo φ che descrive la rotazione della linea di intradosso e dell'angolo θ che denota la direzione della forza esterna, si determina l'equazione seguente:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sin \Delta \varphi_1 \cos(\varphi_3 - \theta_2)}{\sin \Delta \varphi_2 \cos(\varphi_1 - \theta_1)} \qquad (I-16)$$

Bussot osservò a questo punto che da questa equazione "conoscendo la figura dell'intradosso, gli archi BC, CD, ecc. ai quali corrispondono i conchi, e le direzioni delle forze

F₁, F₂, si potranno conoscere i rapporti tra le medesime forze. Ad esempio, se l'intradosso ABC è un semplice cerchio e ogni concio è semplicemente soggetto all'azione del proprio peso, se inoltre gli archi mn, n'p, ecc. sono concentrici e simili a quelli di intradosso, si potranno determinare, per semplice geometria elementare, i punti m, n', p', ecc."

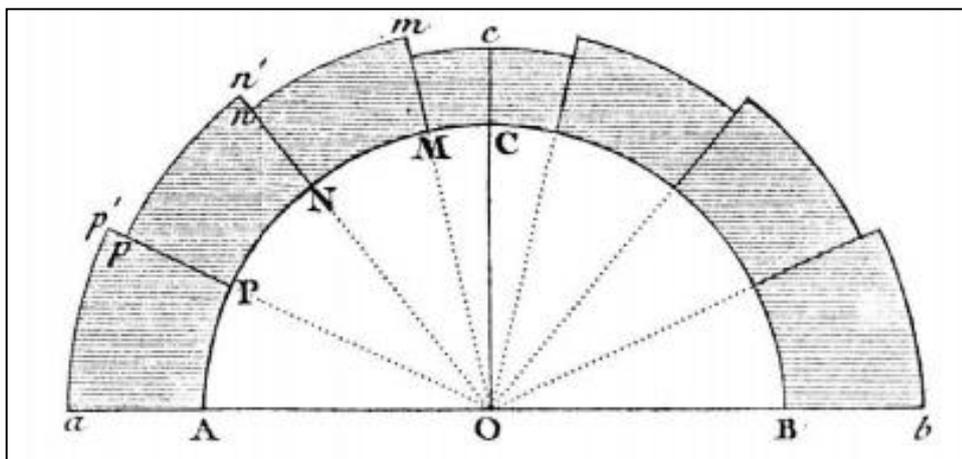


Figura I-21 - Soluzione elementare per arco a tutto sesto soggetto solo a peso proprio secondo l'abate Bossut.

Lo sviluppo più importante, però della sua trattazione è l'ulteriore passo che si accinge a fare a questo punto del problema: egli passa, dalla definizione dello stesso in termini finiti, a quella in termini differenziali.

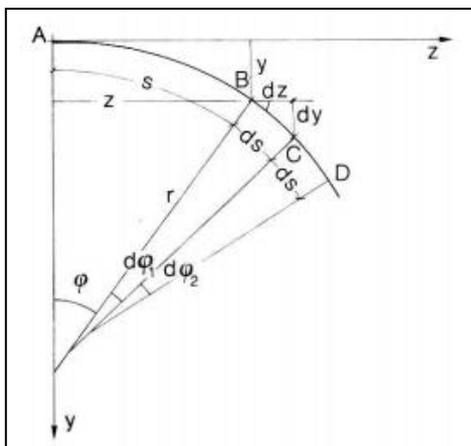


Figura I-22 - Schema per lo sviluppo del calcolo differenziale del problema secondo l'abate Bossut.

L'arco è, ora, inteso come un complesso di infiniti conci infinitesimi che si dispongono secondo una linea generica, da determinare, appunto, in vista dell'equilibrio locale. Passando al limite, facendo cioè infinitesimi gli archi BC, CD ecc., tutti di lunghezza ds, risulta, per un arco generico BC:

$$\sin \Delta\varphi_1 \rightarrow \sin d\varphi_1 = d\varphi_1 \tag{I-17}$$

E per quello attiguo CD:

$$\sin \Delta\varphi_2 \rightarrow \sin d\varphi_2 = d\varphi_2 \quad (I-18)$$

E se r è il raggio di curvatura in BC e dr la sua variazione infinitesima nel passaggio da BC a CD, si ha:

$$d\varphi_1 = \frac{ds}{r} \qquad d\varphi_2 = \frac{ds}{r + dr} \quad (I-19)$$

Esprimendo analogamente in termini parametrici gli altri elementi componenti l'equazione (I-16) si ottiene l'equazione più generica per l'equilibrio del singolo concio:

$$f \cos \theta \left(2r \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dr}{ds} \frac{dz}{ds} \right) + f \sin \theta \left(2r \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dr}{ds} \frac{dy}{ds} \right) + r \frac{dz}{ds} \frac{d}{ds} (f \cos \theta) + r \frac{dy}{ds} \frac{d}{ds} (f \sin \theta) = 0 \quad (I-20)$$

Bossut stesso affermò che questa equazione sta alla base di tutti i problemi che si possono porre in termini di equilibrio dei conci per l'equilibrio di un arco e proseguì le sue dissertazioni analizzando le due formulazioni del problema che si possono avere:

- Trovare *"la figura della volta quando si conosca la legge delle forze che pressano i conci"*;
- Trovare *"la legge delle forze che debbano pressare i conci quando si conosca la figura della volta"*.

La prima formulazione del problema è la più complicata ma anche più interessante per le applicazioni pratiche, rispetto a quella "inversa".

Dall'equazione (I-20) l'autore trae, infatti, indicazioni utili per alcuni casi particolari di volte. Il primo caso è quello di un arco omogeneo ed uniforme, soggetto al proprio peso. Queste due ipotesi si traducono in una semplificazione dell'equazione appena vista per il caso generale, ed in particolare:

- Arco omogeneo ed uniforme \longrightarrow $f = \text{costante}$;
- Solo soggetto a peso proprio \longrightarrow $\theta = 0$.

Come era prevedibile, data l'assenza di errori nella trattazione matematica dell'abate Bossut, l'applicazione di queste particolari ipotesi porta all'equazione della catenaria omogenea rovesciata.

Per verificare questa conclusione è però sufficiente riportare i passaggi relativi al secondo caso analizzato, cioè quello con carico f variabile in funzione dell'ordinata z . Vediamo i semplici passaggi necessari:

$$f \left(2r \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{dr}{ds} \frac{dz}{ds} \right) + r \frac{dz}{ds} \frac{df}{ds} = 0 \quad (1-21)$$

per l'integrazione l'abate ricorre alla moltiplicazione dell'equazione per il termine $\frac{dz}{ds}$:

$$\frac{d}{ds} \left(fr \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right) = 0 \quad (1-22)$$

ed integrando:

$$fr \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = P \quad (1-23)$$

con P = costante.

Se si assume z come variabile indipendente, valgono le tipiche relazioni sul raggio di curvatura e sul rapporto tra ascissa curvilinea dell'asse dell'arco e z, note in letteratura:

$$\frac{1}{r} = \frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3} \quad \frac{ds}{dz} = \sqrt{1+y'^2} \quad (1-24)$$

dove l'apice indica la derivazione rispetto a z. La (1-23) diventa, quindi:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = -\frac{f}{P} dz \quad (1-25)$$

L'abate Bossut è così giunto a un'equazione a variabili separabili di facile integrazione e con le costanti determinabili

Il terzo caso riguarda un arco soggetto a pressione normale rispetto alla sua linea d'asse: ad esempio, un arco soggetto alla pressione di un fluido.

In tal caso l'ipotesi implica che l'angolo tra la retta d'azione delle forze e la verticale per il concio in chiave, coincida con l'angolo tra quest'ultima e le direzioni dei giunti tra i conci: ciò si traduce in un'altra semplificazione dell'equazione (1-20), cioè $\theta = \varphi$.

Da cui:

$$\cos \theta = \frac{dz}{ds} \quad \sin \theta = \frac{dy}{ds}$$

Sostituendo nella equazione di equilibrio del generico concio si ottiene:

$$3fr \left[\frac{1}{2} \frac{d}{ds} \left(\left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right) \right] + \left[\left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] \left(r \frac{df}{ds} + f \frac{dr}{ds} \right) = 0 \quad (1-26)$$

Ma poiché $\left(\frac{dz}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 = 1$ l'equazione si riduce semplicemente a:

$$r \frac{df}{ds} + f \frac{dr}{ds} = 0 \quad (1-27)$$

Integrando:

$$fr = P \quad (1-28)$$

Dove P è una costante. Si ritrova, comunque, come del resto era da attendersi, una relazione del tutto analoga a quella che governa l'equilibrio indefinito della fune.

Nell'ultima parte dell'opera viene analizzato il secondo problema che avevamo menzionato inizialmente, cioè quello del dimensionamento dei piedritti di una volta. Egli tuttavia considera come meccanismo di collasso quello a "cuneo" di De La Hire: una trattazione basata su tali ipotesi ormai superate non ha portato, ovviamente, a sviluppi di grande interesse.

I.9 Charles Coulomb e il "principio dei massimi e minimi"

Meriti indiscussi ebbero gli studi di Coulomb, che sembrarono aver risolto il problema nella sua interezza, dato il rigore logico e la considerazione più realistica che egli ebbe sulla natura del comportamento delle volte. Oltre ad introdurre, infatti, il problema della coesione e della presenza dell'attrito, Coulomb offrì un metodo di analisi per la determinazione dei meccanismi di rottura (quattro furono quelli da lui analizzati) e del relativo valore della spinta orizzontale in chiave, al variare dell'angolo di rottura dei giunti alle reni.

La trattazione relativa a questi argomenti è il Saggio *Sur une application de règles de maximis et minimis à quelques problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture*, del 1773(11).

La trattazione specifica sulle volte inizia nel XVI capitolo della Memoria dove Coulomb definisce l'oggetto del suo studio; cioè la volta a botte, pur affermando vagamente che i medesimi principi si potranno applicare a ogni altra specie di volte.

Egli per prima cosa analizzò nuovamente il problema di una volta sottile soggetta a peso proprio, arrivando di nuovo all'equazione della catenaria, per poi passare alla determinazione della funzione che descriva lo spessore di tale volta affinché le azioni scambiate tra i conci siano sempre perpendicolari ai giunti e ricadano all'interno dello spessore della volta. Nel capitolo successivo del saggio, il XVIII, egli rivolse, invece, la propria attenzione allo studio di volte con attrito e coesione.

Qui la formulazione stessa del problema, nonché la sua soluzione, spezza l'ordine di idee che aveva guidato sino ad allora gli studi sulle costruzioni in muratura. Non soltanto, infatti, arricchisce il modello avvicinandolo alla realtà sperimentale, ma capovolge

totalmente l'orientamento dell'indagine: mentre gli autori precedenti si proponevano di determinare la forma o le dimensioni della volta affinché le sollecitazioni corrispondessero ad un prefissato schema statico, Coulomb si prefigge, invece, di determinare le sollecitazioni che insorgono in una volta sotto determinate condizioni prefissate di forma e di carico.

Prima il calcolo era essenzialmente limitato al progetto, mentre ora è piegato anche alla verifica.

Egli imposta, infatti, il problema fondamentale come quello di trovare l'azione orizzontale in chiave (la forza P applicata in S , nella Figura I-23) che garantisca l'equilibrio della volta sotto l'azione di attrito, coesione e peso proprio, con assegnati l'estradosso, l'intradosso e la direzione dei giunti perpendicolari a quest'ultimo.

Ed ecco la seconda innovazione: per risolvere tale problema egli ipotizza quattro situazioni limite che secondo lui precedono immediatamente la rottura (Figura I-23). Sta impostando, quindi, un calcolo limite a rottura.

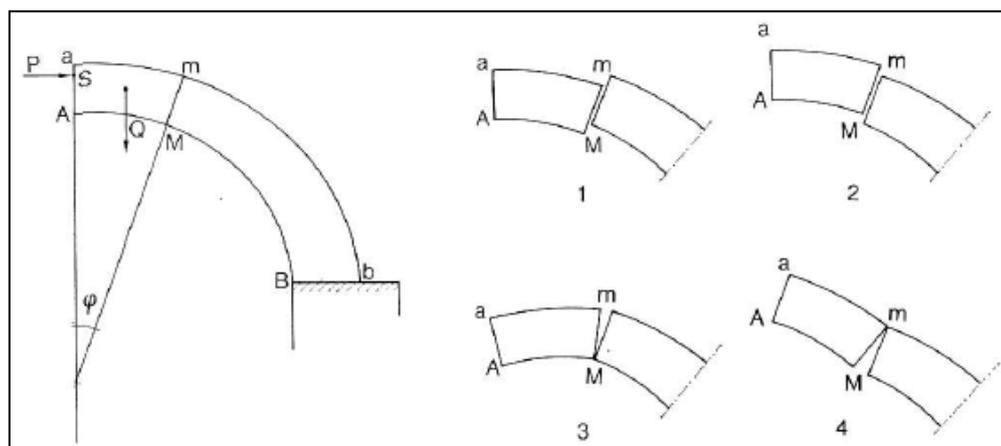


Figura I-23 - Schema di studio della volta a rottura secondo Coulomb, *Sur une application de règles de maximis et minimis à quelques problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture*, p.377.

Egli si riferisce per primo allo schema 1 di Figura I-23: indicando con τ_{lim} il valore massimo della tensione tangenziale sopportabile dal giunto Mm . Nella situazione limite suppone che su tutto lo spessore Mm sia sollecitato da τ_{lim} , per cui la risultante delle tensioni tangenziali è data da $\tau_{lim} \cdot h$ con $h = Mm$. A questo punto egli ipotizza il concio $MmAa$ come tutto un solido, che si muove, quindi, seguendo il lato del giunto Mm . Affinchè la porzione di volta analizzata sia in equilibrio è, dunque, necessario che la forza P orizzontale, applicata in S sia tale, da impedirle di scorrere segnando Mm . Dovrà, dunque, risultare (Figura I-24):

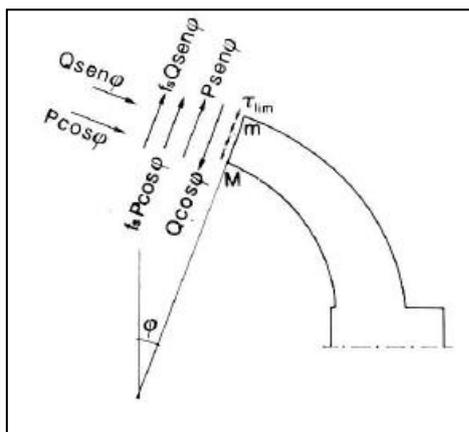


Figura I-24 - Schema di studio del primo meccanismo di rottura dei quattro analizzati da Coulomb, *Sur une application...*, p.378.

$$Q \cos \varphi - P \sin \varphi - f_s Q \sin \varphi - f_s P \cos \varphi = \tau_{lim} h \quad (I-29)$$

da cui deriva la determinazione di P sufficiente a garantire l'equilibrio:

$$P = \frac{Q(\cos \varphi - f_s \sin \varphi) - \tau_{lim} h}{\sin \varphi + f_s \cos \varphi} \quad (I-30)$$

A questo punto Coulomb afferma che, dato che lo scorrimento può avvenire per ogni giunto della volta, allora P non deve essere mai minore di tale valore per ogni φ . Preso, quindi, l'angolo φ che rende *massimo* tale valore (chiamato A_1 dall'autore), la forza P così determinata sarà sufficiente a garantire l'equilibrio della volta *per questo meccanismo di rottura*.

Ciò non toglie, prosegue Coulomb, che essa possa rompersi con il *secondo meccanismo*, cioè con il giunto Mm che scorre verso l'estradosso della volta. L'equazione di equilibrio stavolta sarà (Figura I-25):

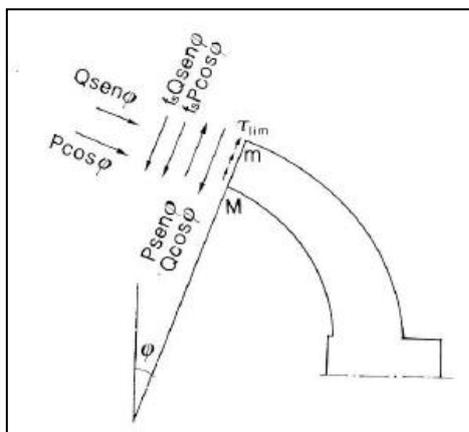


Figura I-25 - Schema di studio del secondo meccanismo di rottura dei quattro analizzati da Coulomb, *Sur une application...*, p.378.

$$Q \cos \varphi - P \sin \varphi + f_s Q \sin \varphi + f_s P \cos \varphi = -\tau_{lim} h \quad (I-31)$$

da cui si ricava:

$$P = \frac{Q(\cos \varphi + f_s \sin \varphi) + \tau_{lim} h}{\sin \varphi - f_s \cos \varphi} \quad (I-32)$$

Di nuovo, affinché non si verifichi il collasso, P dovrà non essere maggiore del valore che si ricava dall'equazione (I-32), sostituendovi il φ che la rende *minima* (tale valore è chiamato A^1 dall'autore).

Egli è, così, giunto a determinare un *campo limite* di valori di P che garantiscono l'equilibrio:

$$A_l < P < A^1 \quad (I-33)$$

Restano, tuttavia, da esaminare i casi 3 e 4 di Figura I-23, le quali, però, tirano in causa la coesione, con la sollecitazione del giunto non a taglio, ma a trazione.

La trattazione di Coulomb diviene per questo molto più frettolosa e meno specifica. Infatti, egli si limita a dire che il momento di rottura del giunto M_R è proporzionale a¹¹ $\sigma_{lim} h^2$. Per evitare, quindi, la rottura della volta secondo il *terzo meccanismo*, dovrà valere la seguente disuguaglianza (Figura I-26):

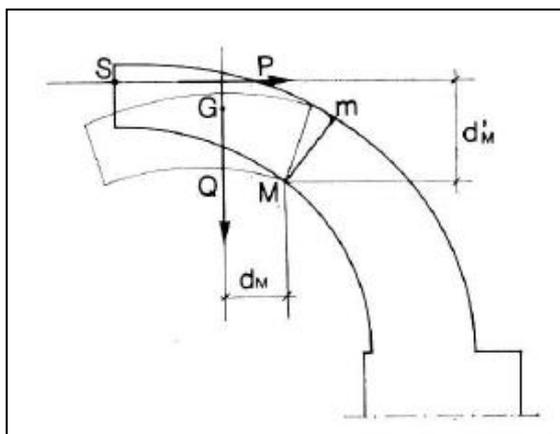


Figura I-26 - Schema di studio del terzo meccanismo di rottura dei quattro analizzati da Coulomb, *Sur une application...*, p.378.

$$M_R > Qd_M - Pd'_M \quad (I-34)$$

Analogamente, per evitare la rottura della volta secondo il *quarto meccanismo*, dovrà valere la seguente disuguaglianza (Figura I-27):

¹¹ Soluzione determinata dallo stesso Coulomb al "problema Galileiano" della mensola a sezione rettangolare caricata da un peso Q trasversale all'asse.

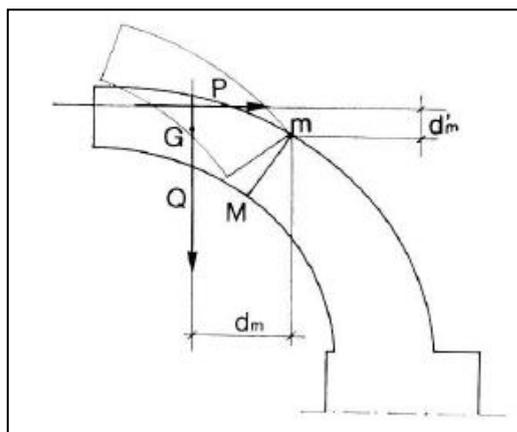


Figura I-27 - Schema di studio del quarto meccanismo di rottura dei quattro analizzati da Coulomb, *Sur une application...*, p.378.

$$M_R > Pd'_M - Qd_M \quad (I-35)$$

Se indichiamo con B_I il massimo dell'espressione:

$$\frac{Qd_M - M_R}{d'_M} \quad (I-36)$$

e con B^I il minimo dell'espressione:

$$\frac{Qd_M + M_R}{d'_M} \quad (I-37)$$

l'equilibrio è assicurato se P è contenuto anche all'interno dell'intervallo $[B_I ; B^I]$.

A questo punto Coulomb trae le sue conclusioni: "per unire insieme tutte le condizioni, se A_I , o B_I , fossero maggiori di A^I o di B^I , l'equilibrio non potrebbe aver luogo e la volta di tali dimensioni si romperebbe necessariamente. Per ottenere i veri limiti di P è sufficiente prendere tra A_I , e B_I , la quantità più grande e, tra A^I e B^I , la quantità più piccola; ad esempio se B_I , fosse maggiore di A_I , e B^I fosse minore di A^I , B_I e B^I sarebbero i veri limiti delle forze che si possono applicare in S senza rompere la volta"¹².

Seguono due osservazioni nelle quali l'autore sottolinea il fatto che molto spesso, in pratica, le condizioni sono le più significative; esse si riconnettono, del resto, ai metodi di calcolo già proposti dal Couplet e da altri che facevano appello, seppur implicitamente, a simili meccanismi di rottura. Tuttavia, il procedimento indicato da Coulomb consente di rimuovere l'arbitraria ipotesi secondo la quale la rottura si verificherebbe per un giunto inclinato a 45°; anzi, la ricerca del massimo e del minimo condurrà alla determinazione delle sezioni realmente più deboli individuando così il vero comportamento limite della

¹² *Sur une application de règles de maximis et minimis à quelques problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture*, pp. 379-380, C. Coulomb. Cit.

volta. Di più Coulomb non dice; egli suggerisce soltanto di operare per tentativi, iterando i conteggi su diverse posizioni del giunto Mm. Buona parte degli studi ottocenteschi avrà appunto l'obiettivo di condurre a termine la via da lui intrapresa.

Infine, al termine della sua Memoria, lascia cadere tra le righe un'ultima osservazione preziosissima ai fini del corretto calcolo a rottura: *"Ora per poco che uno vi faccia attenzione, si vede che se si divide la parte superiore della volta verso la chiave e si suppone che la volta stessa si rompa in quattro parti anziché in tre, la forza di pressione delle parti superiori sarà spesso assai maggiore di quella che si determina col metodo del Signor De La Hire e le dimensioni dei piedritti fissate dal suo metodo saranno insufficienti"*¹³.

Per quanto sia una convenzione ormai acquisita il fatto che l'esposizione di Coulomb sulle volte dotate di attrito e coesione costituisca la soluzione generale per l'analisi a collasso dell'arco murario, il suo uso del metodo dei massimi e dei minimi non è corretta (12). La logica di tale metodo è quella di determinare quattro valori di spinta al variare della posizione angolare del giunto e di selezionare quelli che corrispondono al massimo, quando l'equilibrio del concio è fatto rispetto a movimenti di caduta verso l'interno, e al minimo, quando l'equilibrio è fatto rispetto a movimenti di sollevamento verso l'esterno.

Nulla viene però detto da Coulomb riguardo al punto di applicazione della spinta B^1 corrispondente al minimo valore per l'equilibrio con rotazione verso l'esterno. Due allora sono le possibilità: o essa è applicata allo spigolo di estradosso, caso in cui sarebbe possibile un meccanismo congruente a cinque cerniere alternate, però mancherebbe il meccanismo opposto per cui la soluzione del problema non è completa; oppure essa è applicata allo spigolo di intradosso, caso in cui non ha senso parlare di un meccanismo perché si dovrebbero avere due cerniere in chiave.

L'incompletezza è stata superata con la trattazione di Persy del 1825, Navier nel 1826, e Michon del 1857, con la trattazione esaustiva degli otto modi di collasso per un arco simmetrico.

Il contributo teorico dei tre autori può essere riassunto nel fatto che essi introdussero un nuovo parametro, cioè, appunto, quello della posizione della spinta. In questo modo essi definirono otto modi, corrispondenti ai quattro modi di Coulomb con la spinta all'estradosso più gli stessi quattro modi con la spinta all'intradosso.

¹³ Ibidem, p.382.

È quello di Coulomb, comunque, il primo concreto accenno all'esigenza di abbandonare il popolare metodo di De la Hire e con esso la lettura dell'arco come un cuneo spingente sui rinfianchi, per affrontare l'analisi rigorosa del cinematismo di collasso rappresentato nella Figura I-28. Tale analisi però, non è ascrivibile ai meriti di Coulomb; sarà un celebre scienziato illuminista italiano, l'abate Mascheroni, a svolgerla con chiarezza ed efficace operatività.

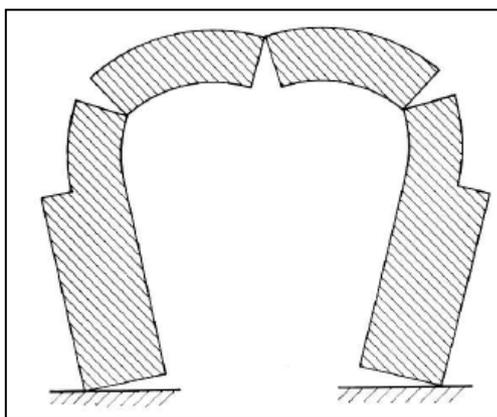


Figura I-28 - Nuovo meccanismo di rottura "flessionale" ipotizzato da Coulomb e sviluppato da Mascheroni.

I.10 Le "nuove ricerche" di Lorenzo Mascheroni

Nello scenario di ricerca sulle possibilità di rottura degli archi in muratura, Mascheroni si pone, usando un termine di Poncelet (1835), come un "avant-Coulomb". Nonostante i suoi scritti siano stati pubblicati, infatti, un decennio dopo quelli di Coulomb, egli sembra aver portato avanti i propri studi eclissando sul principio dei massimi e minimi, approfondito e sviluppato dagli studiosi "post-Coulomb", e riprendendo, invece, l'accenno al principio dei lavori virtuali dell'opera dell'autore francese.

Il suo contributo sull'analisi delle strutture voltate è contenuto nelle *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte* pubblicate nel 1785(13). La sua analisi si può facilmente riassumere in pochi passaggi da cui si evince la grande forza delle argomentazioni di Mascheroni.

È possibile, infatti, riassumere in modo schematico i passaggi analitici del suo discorso che approda ad una logica conclusione sulla possibilità di individuare il modo di collasso di un arco simmetrico. Il suo studio, articolato in tre fondamentali sezioni, *"Equilibrio delle rette"* (Capo I), *"Equilibrio delle volte"* (Capo II), *"Della grossezza degli archi"* (Capo III), si sviluppa per gradi: prima analizza i cinematismi possibili per i sistemi di aste incernierate, poi utilizza questo approccio per lo studio del comportamento cinematico

dell'arco ed infine passa all'analisi delle volta, definendone i meccanismi di rottura fino ad arrivare a comprenderne gli otto ipotetici. Egli, così, dall'analisi dei vari meccanismi con il principio dei lavori virtuali, definisce delle formule per il collasso, nelle quali compare sempre un termine comune: il meccanismo che corrisponde al valore più alto di tale termine è, secondo l'autore, quello che si verificherà nella realtà.

Nel Capo I, "Equilibrio de' rettilinei", egli prende in esame un tetto quadrangolare ABDE e uno pentagonale ABCDE (). Supponendo che esso sia caricato simmetricamente da $Q_A = Q_E$, $Q_B = Q_D$ e $2Q_C$, nei vertici rispettivamente A ed E, B e D, e C, egli arriva, tramite la "ragione delle forze", cioè il principio dei lavori virtuali, alla soluzione:

- nel primo caso quadrangolare $H_A = Q_B \tan \alpha$ e $V_A = Q_A + Q_B$;
- nel secondo caso pentagonale $H_A = (Q_B + Q_C) \tan \alpha$ e $V_A = Q_A + Q_B + Q_C$ e $Q_C \tan \beta = (Q_B + Q_C) \tan \alpha$.

Nel Capo II Mascheroni passa ad analizzare il problema del calcolo a rottura degli archi. Il meccanismo di collasso a "cuneo" ideato da De la Hire ha attinenza con il problema del tetto quadrangolare.

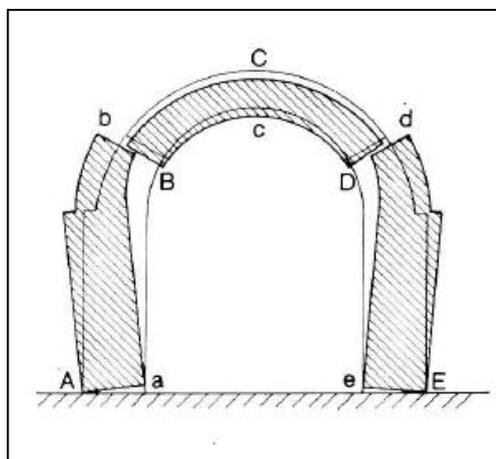


Figura I-29 - Schema di rottura a cuneo

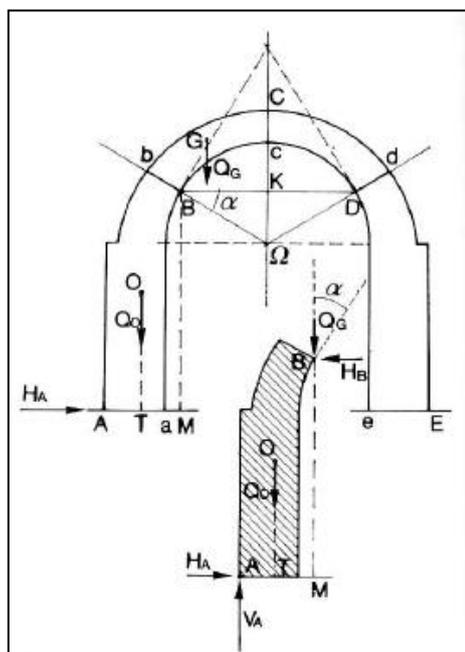


Figura I-30 - Schema per il calcolo al collasso utilizzato da Mascheroni

Le condizioni di equilibrio riguardano, quindi, lo scorrimento della base Aa sul piano di appoggio e la verifica al ribaltamento intorno ai punti estremi A ed E. Denominando con Q_0 il peso del solido AaBb applicato al suo baricentro O e con Q_G quello del solido BdCc

applicato in G, si riconosce che la reazione orizzontale in A, uguale e contraria a quella in B è data da:

$$H_A = Q_G \tan \alpha = Q_G \frac{K\Omega}{BK} \quad (1-38)$$

Mentre la reazione verticale V_A , per l'equilibrio alla traslazione verticale dovrà essere:

$$V_A = Q_0 + Q_G \quad (1-39)$$

L'equilibrio allo scorrimento si risolve scrivendo $H_A = f_s V_A$ e quello al ribaltamento risulta essere:

$$Q_0 AT + Q_G AM - H_B BM = 0 \quad (1-40)$$

Sostituendovi così le (1-38) e (1-39) si ottiene l'equazione che descrive il meccanismo, da confrontare poi con le altre per determinare quello effettivo:

$$f_s Q_0 = Q_G \left(\frac{K\Omega}{BK} - f_s \right) \quad Q_0 \frac{AT}{BM} = Q_G \left(\frac{K\Omega}{BK} - \frac{AM}{BM} \right) \quad (1-41)$$

Egli continua supponendo che il collasso avvenga, invece, secondo il meccanismo già presagito da Coulomb: quello flessionale con cerniere in A, B, D, C e D. procedendo analogamente al caso appena esposto egli arriva di nuovo alle equazioni che descrivono il meccanismo ed in particolare scrive:

$$f_s Q_0 = Q_G \left(\frac{BR}{CK} - f_s \right) \quad Q_0 \frac{AT}{BM} = Q_G \left(\frac{BR}{CK} - \frac{AM}{BM} \right) \quad (1-42)$$

Il parametro che egli utilizza per confrontarli $Q_0 \frac{AT}{BM}$, che a sua volta è funzione, però di altri parametri, quale ad esempio l'unico che cambia tra le due formule $\frac{K\Omega}{BK}$ o $\frac{BR}{CK}$.

Il confronto alla fine porta l'autore a scrivere che:

- se $\frac{BR}{CK} > \frac{K\Omega}{BK}$ avverrà il collasso flessionale;
- se $\frac{BR}{CK} < \frac{K\Omega}{BK}$ avverrà un collasso alla la Hire.

Comparato con gli studi contemporanei, l'inquadramento dei modi di collasso offerto da Mascheroni è esemplare per generalità e chiarezza metodologica e nonostante i suoi studi non abbiano trovato seguito, non si può non ammirarne la immediata applicabilità: il progettista, infatti, senza bisogno di calcoli, poteva prendere in mano uno strumento di

misura e misurare i segmenti protagonisti delle equazioni che descrivono i vari meccanismi, determinando quello effettivo.

Per tale meccanismo poi, la verifica è automaticamente soddisfatta se la parte sinistra dell'equazione, che rappresenta la resistenza, è maggiore di quella a destra che rappresenta le sollecitazioni agenti.

I.11 I contributi dell'XIX secolo: verso l'analisi elastica

Il XIX è il secolo del cambio di rotta per lo studio della stabilità dell'arco con l'introduzione nel problema di una nuova variabile: la resistenza del materiale.

È nel 1823, infatti, che Cauchy pubblica un riassunto delle sue ricerche sui corpi elastici nel *Bulletin de la Société philomathique*, seguito dalle trattazioni di Poisson, Lamé e Clapeyron. In questo ambiente fertile nasce l'idea di Navier di considerare l'arco come un elemento elastico: *"nella realtà, non essendo i conci perfettamente rigidi"*, egli scrive, *"non è lecito ipotizzare che la spinta sui piedritti si eserciti in questo modo [...] ma sembrerebbe necessario considerare in qualche modo anche l'elasticità del materiale di cui i conci sono costituiti"*(14). Tutto quello che egli fa, però, è introdurre effettivamente una nuova variabile senza modificare altro del problema. Continua, quindi, ad usare un'analisi di equilibrio limite, rendendo solo più severa la condizione ultima con una nuova ipotesi: la spinta in chiave e in corrispondenza dei giunti di rottura dovrà essere posta in prossimità del terzo medio, rispettivamente di estradosso e di intradosso.

Chiara ed immediata è, quindi, la contraddizione di utilizzare un'analisi limite senza però che tale limite venga raggiunto, poiché, con le ipotesi da lui formulate, la muratura non esce mai dallo stato di compressione pura. L'equilibrio che analizza è, quindi, un equilibrio stabile, con il materiale sollecitato nel pieno campo di ammissibilità; la struttura è nel suo pieno funzionamento, ben lontana dallo stato limite.

Ed è qui, nell'erroneità della sua analisi, che risiede l'altra innovazione introdotta da Navier, quella dello studio dello stato di esercizio della struttura, fino ad ora mai analizzato.

Mentre nel XVII e XVIII secolo i principali obiettivi erano legati alla ricerca della corretta forma della volta, della dimensione dei piedritti e della mutua relazione tra carichi sollecitanti e curva funicolare, con Navier si apre un terzo problema, quello della ricerca della effettiva curva della pressioni, tra le infinite possibili che garantiscono l'equilibrio.

Una soluzione definitiva a questo problema sarà data cinquanta anni dopo Navier, in un contesto scientifico che, gradualmente, cercava di prendere le distanze dal modello a conci rigidi con lo scopo di aggiornare la teoria delle volte, introducendovi la considerazione delle proprietà di resistenza e deformazione dei materiali.

Nel frattempo, il primo ad introdurre i concetti di linea di resistenza e di linea di pressione è stato F.J. Gernstner nel 1831 (15): egli definisce la *linea di resistenza* come il poligono congiungente i centri di pressione sui giunti di un arco, il cui angolo con le direzioni di questi ultimi deve essere relazionato all'angolo di attrito della malta; la *linea di pressione*, invece, è il luogo dei punti di intersezione delle pressioni agenti sui giunti limitrofi, ovvero l'involuppo delle rette d'azione delle forze reattive tra giunto e giunto.

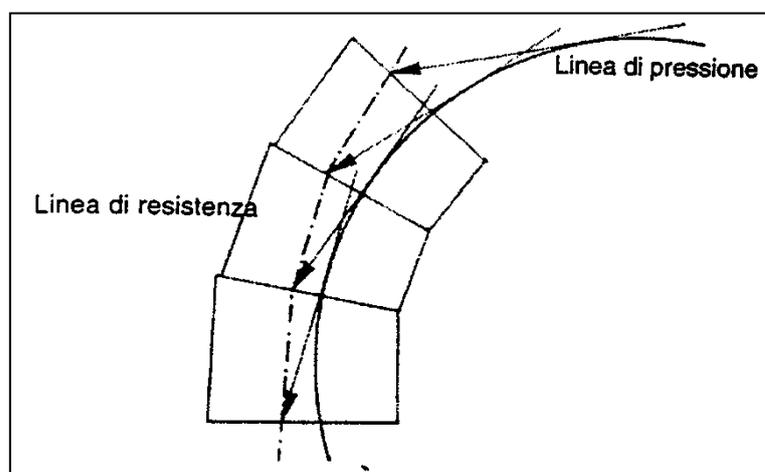


Figura I-31 – Linea di resistenza e linea di pressione definite da Gernstner

Dato il carattere iperstatico del problema, egli riconosce l'esistenza di infinite linee di resistenza, o di pressione, ammissibili per una determinata condizione geometrica o di carico, ma non riesce a trovare una metodologia per la determinazione di quella effettiva. In effetti, il semplice metodo dell'equilibrio con le sole equazioni della statica dei corpi rigidi non sono sufficienti, come sappiamo, alla risoluzione del problema.

Le pubblicazioni che seguirono furono, quindi, tutte concentrate su questo quesito, senza però arrivare ad un vero studio analitico della soluzione, ma semplicemente andando ad inserire ipotesi arbitrarie sui punti da cui la linea di pressione dovesse passare.

Tra queste, si colloca anche il celebre lavoro di Méry(16), a cui si deve, tra l'altro, l'introduzione nel 1840 del termine "curva delle pressioni". La sua ricerca era basata sull'interpretazione della stabilità (anche se, come già accennato, per lui era una condizione limite) data da Navier. Méry prevedeva che la *curva delle pressioni* dovesse

rimanere contenuta entro il terzo medio dell'arco in ogni sua sezione, e passasse in particolare dal suo estremo superiore in chiave e da quello inferiore nei "giunti di rottura"¹⁴. Essa è, quindi, una curva limite corrispondente allo stato in cui la volta tende ad aprirsi nelle sezioni critiche per l'insorgere di sforzi di trazione tali da superare l'aderenza della malta. Per la sua natura di curva limite, vicina alla rottura, Laterrade sostituì nel 1885 la curva di Méry con una differente curva "convenzionale" passante per i centri della chiave e dei giunti di rottura.

L'indeterminatezza statica che si riscontrava col principio deterministico indirizzò gli studi verso la ricerca di un nuovo principio statico atto a rimuovere le incertezze. In questa direzione un metodo sostanzialmente differente da quelli visti era già stato proposto da Moesley nel 1839, sulla base di un principio detto della minima resistenza.

Tale principio stabiliva che la linea di resistenza effettiva è quella che passa dall'estradosso in chiave e che è tangente all'intradosso alle reni, determinando la minima spinta orizzontale in chiave.

Un altro principio che rientra nei tentativi appena menzionati è il "principio di uguaglianza delle massime pressioni" di Celeste Clericetti(17), secondo il quale la linea delle pressioni si modifica fino a che la massima pressione in chiave non uguagli a quella massima all'intradosso dei giunti di rottura. Nonostante anche quest'ultimo metodo non introduca niente di nuovo e rientri tra quelli volti ad eliminare l'indeterminazione statica della curva della pressioni per mezzo di principi di natura astratta e arbitraria, esso costituì lo spunto per un ulteriore svolta, dopo la quale la teoria delle volte sarebbe diventata definitivamente la teoria dell'arco elastico: la critica di Francesco Crotti.

Il lavoro di Clericetti, infatti, rientra nell'ambito del concorso del novembre del 1873 indotto dall'Istituto Lombardo di Scienza e Lettere, nel quale gli studiosi erano invitati a "*presentare una monografia sulla stabilità delle volte [...] che [...] avrebbe costituito un notevole progresso nella conoscenza della statica delle costruzioni*"¹⁵. Crotti rispose alla monografia di Clericetti, criticando il fatto che ogni metodo che non consideri le proprietà elastiche del materiale, il grado di rigidità delle malte, e tutti gli altri fattori che contribuiscono a definire la "costituzione interna delle volte", "*è inevitabilmente fallace*

¹⁴ Secondo il "Metodo di Méry" essi si trovano in corrispondenza delle imposte per gli archi ribassati, e inclinati di 60° per quelli a tutto sesto.

¹⁵ Dai *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienza e Lettere*, p.795, 1873.

(nella determinazione della curva delle pressioni) *in quanto la vera teoria della resistenza delle volte può essere fondata sulla teoria dell'elasticità*¹⁶.

Questo approccio metodologico influenzò notevolmente gli studiosi che si accingevano ad affrontare il problema dell'arco in muratura e tra di essi merita un'attenzione particolare il contributo di Alberto Castigliano. Nell'XI capitolo del suo trattato, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques* del 1879, descrive l'arco in muratura come un sistema "imperfettamente" elastico: dopo essere stata sottoposta a sollecitazione non solo di compressione, infatti, una struttura in muratura non recupera perfettamente la forma iniziale, quando vengono rimosse le forze applicate. Se però questo materiale ha un comportamento elastico in compressione, la soluzione si potrà trovare, secondo Castigliano, applicando alle strutture che ne sono costituite le leggi e i teoremi validi per i sistemi elastici, ma avendo cura di considerare come reagente la sola parte di struttura che risulta compressa. Il calcolo sarà quindi reso più lungo semplicemente perché non si conosce a priori le dimensioni e la localizzazione della parte di struttura reagente. Ma egli non si ferma qua, ed applica, nella seconda parte del suo trattato, questa teoria a due casi studio: un ponte ad arco in muratura sull'Oglio e un ponte in pietra a Torino sul fiume Dera.

In entrambi i casi, Castigliano ricerca la soluzione del problema iperstatico utilizzando il teorema che porta il suo nome e lo stato di sollecitazione della struttura viene determinato procedendo per successive approssimazioni: ad ogni passo, cioè, la struttura viene ridotta a quella che risultava compressa al passo precedente.

Parallelamente agli studi intorno alla curva delle pressioni, la ricerca ottocentesca trattò il problema della stabilità anche dal punto di vista dell'ottimizzazione strutturale, riabbracciando così una tradizione, che aveva avuto un ruolo privilegiato negli studi settecenteschi. Molte furono le soluzioni proposte, basate su procedimenti di calcolo spesso laboriosi ma comunque forniti di abachi e tabelle per garantirne un più facile impiego. Due furono gli approcci con cui si condussero gli studi: il primo riguardava la determinazione della linea dei carichi, cercando di far coincidere la linea d'asse dell'arco con la funicolare degli stessi; il secondo, opposto al primo, si basava sulla ricerca di un profilo ottimale dell'arco che permettesse la coincidenza tra il suo asse geometrico e la curva di equilibrio.

¹⁶ Tratto da *Esame critico di una recente deliberazione dell'Istituto Lombardo delle Scienze circa la teoria delle volte, Osservazioni di Crotti Francesco*.

In questo frangente, l'unico contributo che si riporta è da attribuire a Y. Villarceau(18), la cui memoria fu presentata all'*Accadémie des Sciences* nel 1845. Egli immaginò la volta divisa in conci infinitamente piccoli con i letti normali all'estradosso, per i quali determinò i baricentri collegandoli con una curva, detta "curva dei centri di gravità".

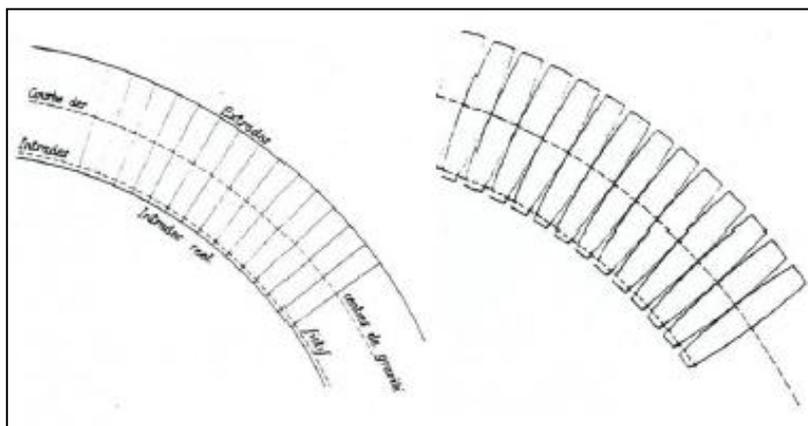


Figura I-32 – Curva dei centri di gravità di Villarceau¹⁸

Sui letti fittizi dei conci egli segnò i punti simmetrici all'estradosso rispetto alla curva, individuando così una nuova linea di intradosso; senza alterare il peso dei conci, poi, egli pensò di attribuire ad essi una forma ideale in modo da ridurre il contatto ai soli punti della curva dei centri di gravità ed eliminare, così, dallo studio del problema gli aspetti relativi all'attrito e all'aderenza della malta. Sottintesa la resistenza a compressione dei conci, Villarceau si propose di determinare analiticamente il profilo dell'intradosso fittizio, in modo da far coincidere la curva dei centri di gravità con quella delle pressioni.

Nonostante ognuno degli autori citati avesse provato in modi anche molto diversi tra loro ad individuare, per una volta assegnata, una qualsiasi situazione che soddisfi l'equilibrio e sia compatibile con la resistenza del materiale, ognuno di loro riconosceva anche la grande complessità del problema e la loro lontananza dalla soluzione effettiva.

Tenendo conto di questi aspetti nel 1867, Durand-Clayne(19) elaborò un procedimento (Figura I-33) con il quale definire, per ogni sezione dell'arco, i limiti ammissibili della spinta in chiave e della risultante al generico giunto attraverso una "area di stabilità". Studiando le condizioni di equilibrio e di resistenza per una porzione di volta compresa tra la chiave e un giunto qualsiasi, egli individuò varie aree a ridosso della chiave, all'interno delle quali doveva rientrare geometricamente il vettore della spinta in chiave per garantire l'equilibrio alla rotazione e allo scorrimento del giunto; effettuato questo per i vari giunti, in base alle relazioni tra le varie aree di stabilità così trovate si potevano trarre diverse conclusioni:

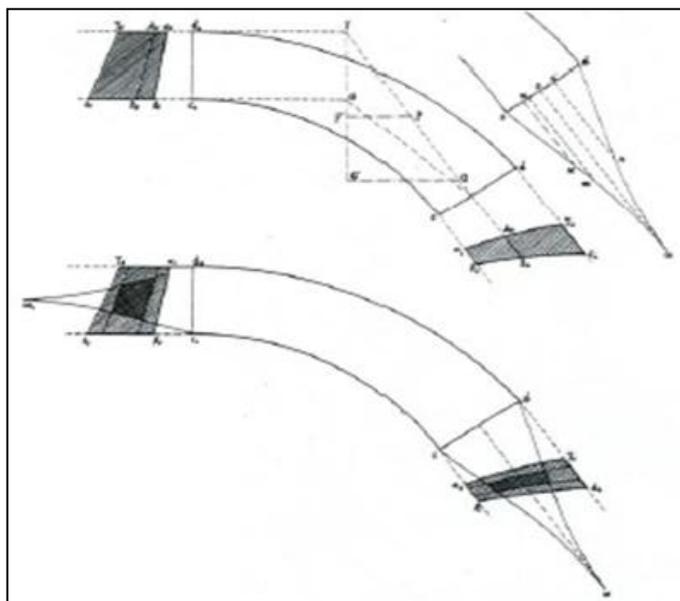


Figura I-33 – Metodo di Durand-Claye per valutare la stabilità di un arco; le aree scure indicano le soluzioni equilibrate e compatibili con il materiale

- Se queste hanno una parte in comune, in quella parte, che comprende e rappresenta tutte le soluzioni possibili, deve rientrare la spinta in chiave;
- Se le aree non si sovrappongono neanche in un punto, la volta non è stabile;
- Se l'area comune si riduce ad un punto, vi è solo una soluzione ammissibile.

Ritroveremo metodi ispirati alle “aree di stabilità” in metodi di analisi moderni nel capitolo seguente.

CAPITOLO II

Analisi di archi e volte in muratura: stato dell'arte

Un crescente interesse nella stabilizzazione, preservazione e recupero del patrimonio e delle strutture storiche ha generato un bisogno di metodi accurati ed efficienti per l'analisi delle strutture portanti in muratura. I componenti principali di tali strutture, sia che siano chiese medievali o ponti del XIX secolo, sono gli archi, le volte e i contrafforti in muratura. Anche se queste strutture hanno resistito centinaia di anni e a dispetto del fatto che siano state, come abbiamo visto, le primissime tipologie di strutture ad essere soggette a analisi strutturali e scientifiche, esse sono spesso considerate difficili da analizzare e da valutare accuratamente. Questa tendenza è dovuta soltanto in parte alle usuali incertezze caratterizzanti le strutture esistenti, come, ad esempio, alla presenza di incertezze sulle proprietà dei materiali e alla difficoltà di valutarne le condizioni senza la possibilità di ispezionare l'interno della struttura. Infatti spesso la complessità delle analisi è anche dovuta alla complessità dei sistemi di cui solitamente questi elementi fanno parte: una cattedrale medievale è un assemblaggio contorto di pilastri, volte, archi e contrafforti che lavorano insieme e per i quali i percorsi di tensione non sono così ovvi.

Gli articoli sull'argomento della fine del XX secolo erano motivati dall'interesse dei loro autori nell'architettura gotica e nel dare una spiegazione al funzionamento strutturale di tali complessi edifici.

In una decade, però, l'effetto combinato della crescente coscienza pubblica per la preservazione del patrimonio ingegneristico, di una crescita esplosiva della domanda del settore dei trasporti su strada e ferroviari e della consapevolezza della vastità del numero di ponti ad arco nelle infrastrutture stradali e ferroviarie esistenti, ha creato un bisogno pratico e reale di metodi per la valutazione e il recupero di questi elementi. La conseguenza è stata un interesse nella struttura ad arco in generale e moltissime pubblicazioni sull'argomento.

In particolare, un problema ritenuto fondamentale, nell'ambito delle ricerche sul comportamento meccanico delle strutture in muratura nel Novecento, è quello di un'adeguata modellazione del materiale di cui esse sono costituite. La muratura, infatti, è un materiale eterogeneo e anisotropo, formato di blocchi o mattoni, caratterizzati da un'elevata resistenza a compressione, che possono essere modellati sia come elementi elastici che lavorano bene a compressione e male a trazione, sia come elementi rigidi.

Gli studi sulla meccanica delle murature e sulle strutture ad arco seguono, pertanto, due principali linee di pensiero.

Nell'ambito del *primo approccio*, rivisitando le teorie settecentesche sulla statica dell'arco, vengono cercate le condizioni che portano la struttura al collasso. Si rinuncia a determinare lo stato di tensione effettivo, mentre l'interesse è rivolto al grado di stabilità globale della struttura. Tale filone, segue l'approccio inaugurato da Heyman che ha trasferito i metodi dell'analisi limite dalle strutture in acciaio a quelle in muratura.

Nell'ambito del *secondo approccio*, sviluppatosi dal filone di ricerca inaugurato da Navier nell'Ottocento, viene cercato l'effettivo stato di sollecitazione della struttura. Si cerca di descrivere adeguatamente il materiale con modelli continui e discreti e con un'appropriata legge costitutiva, inizialmente ipotizzando semplicemente il materiale non resistente a trazione, successivamente perfezionando il modello con la possibilità di introdurre una limitata resistenza a trazione.

Si procede alla stesura di un breve stato dell'arte relativo ai due filoni di analisi.

II.1 Analisi limite: i teoremi di plasticità per la muratura

Come già sottolineato, il caposcuola dell'analisi, limite per quanto riguarda la sua estensione allo studio al collasso di archi e volte, è Heyman. Tuttavia un articolo ad esso precedente e degno di nota è quello di **Pippard, Trantner e Chitty**(20) nel quale vengono presentati i risultati di indagini combinate sperimentali ed analitiche di modellazione di archi in muratura. Gli autori confermano la usuale procedura progettuale di quel tempo di confinare la linea delle pressioni all'interno del terzo medio, per assicurare la presenza di sole compressioni, motivata dalla consapevolezza che i giunti di malta sono davvero poco resistenti alla trazione.

Tuttavia si distinguono alcune intuizioni degne di nota, ed in particolare:

- l'osservazione che eccentricità maggiori possono generare una condizione simile allo sviluppo di una cerniera plastica; proprietà che sarà sfruttata, poi, per lo studio degli archi con analisi limite;
- la combinazione di osservazioni sperimentali e analisi rigorose per simulare una struttura per la quale analisi approssimate erano molto diffuse in letteratura;
- il distacco dalla completa fiducia sino ad allora attribuita alla teoria elastica per lo studio di strutture ad arco e l'uso di osservazioni sperimentali per avallare l'idea che l'equilibrio sia possibile anche con grandi eccentricità della curva delle pressioni.

Un secondo contributo degno di nota e precedente alle pubblicazioni di Heyman è una memoria di Anthony **Kooharian** (21), nella quale l'autore prende in considerazione strutture ad arco costituite da conci lapidei e le esamina secondo due metodologie differenti, fondate la prima sull' "analisi standard" e la seconda sull' "analisi limite". Una struttura ad arco di questo tipo può sopportare un grande sforzo di compressione, ma non è in grado di resistere a trazione in corrispondenza dei giunti

Supponendo di conoscere il carico a cui è sottoposto l'arco, il fattore più importante nell'analisi del problema sarà dato dal punto di applicazione della forza normale su ogni giunto. Si potranno avere tre diverse situazioni: la sezione è tutta compressa, con la normale compresa nel terzo medio; la sezione è parzializzata, con forza normale esterna al terzo medio ma interna alla sezione; la formazione di una cerniera, con la forza normale tangente all'intradosso o all'estradosso della sezione. Ciò premesso, l'analisi standard, sulle orme di Mery e dei contributi ottocenteschi, si basa sulla costruzione di un poligono funicolare sulla base dei carichi agenti. Se è possibile trovare un poligono funicolare che risulti interamente compreso all'interno della sezione, allora la condizione di carico assegnata non provocherà collasso.

In questo tipo di analisi, la scelta di un polo opportuno costituisce la maggiore difficoltà e, nonostante il metodo lasci intuire una similitudine con il teorema statico dell'analisi limite, l'assenza di una formulazione completa e sistematica di quest'ultima fa sì che l'analisi standard risulti incompleta: nel caso in cui, infatti, non si riesca a determinare un poligono funicolare ammissibile, non vi è la garanzia che il carico assegnato sia di collasso.

Il secondo metodo proposto si fonda sui due teoremi dell'analisi limite relativi ai materiali idealmente plastici. Il primo teorema riguarda la determinazione di un carico di sicurezza e stabilisce che non si ha collasso se, ad ogni incremento di carico, si riesce a trovare uno stato di sollecitazione staticamente ammissibile. Nel caso proposto da Kooharian basta, quindi, determinare un poligono funicolare per garantirne l'equilibrio. In questo modo si determinano valori di carico inferiori o al più uguali a quello di collasso.

Il secondo teorema dell'analisi limite, invece, consente di determinare valori di carico superiori o al più uguali a quello di collasso ed in particolare esso stabilisce che, se si riesce a trovare un meccanismo cinematicamente ammissibile, allora si avrà il collasso. Per cinematicamente ammissibile si intende la condizione che, in uno spostamento virtuale del meccanismo, il lavoro compiuto dai carichi interni sia maggiore o uguale a quello compiuto dalle forze interne.

Questa doppia limitazione, inferiore e superiore, consente di superare il limite dell'analisi standard e questo sarà dimostrato, in particolare, nel lavoro analizzato nel seguito.

Jacques **Heyman** nell'opera *The stone skeleton* (22) estende la teoria della plasticità e la validità dei teoremi del limite superiore ed inferiore appena enunciati anche alle strutture in muratura, mentre fino ad allora erano stati ristretti a quelle in acciaio.

Si riportano le quattro semplici ipotesi su cui si basa il suo lavoro:

- blocchi infinitamente rigidi;
- blocchi infinitamente resistenti;
- slittamento impedito;
- giunti di malta incapaci di trasmettere trazioni.

Grazie a queste ipotesi, egli dimostra essere validi i due teoremi anche per il materiale muratura, che certamente non si può definire plastico. Tuttavia, per delineare il dominio ammissibile M-N (momento flettente, sforzo normale) Heyman suggerisce di tener conto della effettiva resistenza a compressione della muratura.

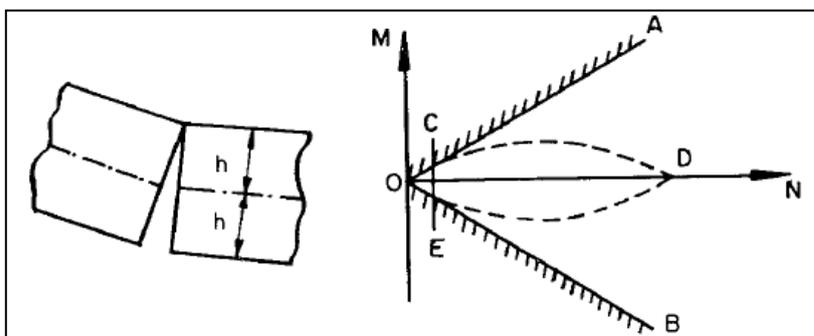


Figura II-1 – Dominio limite M-N di Heyman e condizione di cerniera in un giunto. *The Stone Skeleton*, pp. 249-279, *Inter. Journ. Of Solids and Structure*, 1966.

In tal caso, come si vede nella Figura II-1, la superficie AOB, costituita da due rette intersecanti nell'origine e relativa alle ipotesi sopracitate, sarà sostituita, nel caso reale di limitata resistenza a compressione, dalla curva OCDEO, formata da due archi di parabola.

Il documento fornisce ulteriori esempi di calcolo della condizione di equilibrio per diverse configurazioni di contrafforti in cattedrali gotiche. Per quanto riguarda la discussione di volte, egli si basa esclusivamente sull'equilibrio o analisi limite inferiore, in quanto è molto difficile tentare di risolvere la cinematica di un meccanismo di collasso per un complesso elemento tridimensionale.

Tuttavia, utilizzando le equazioni di equilibrio delle piastre, Heyman è in grado di dedurre la stabilità di un certo numero di volte tridimensionali dalla condizione di equilibrio. Un esempio delle volte semplificate considerate da Heyman è mostrato in Figura II-2.

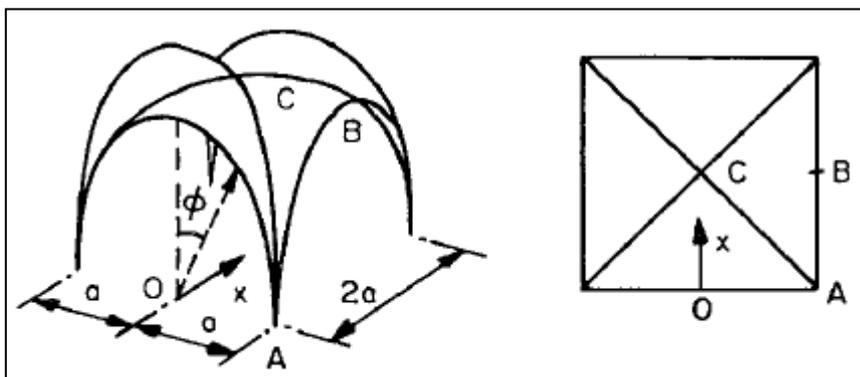


Figura II-2 – Volta semplice analizzata da Heyman. *The Stone Skeleton*, pp. 249-279, *Inter. Journ. Of Solids and Structure*, 1966.

Al contrario di ciò che accade per le volte e le cupole, l'appetibilità dell'analisi limite per lo studio di un arco è accentuata dal fatto che essa può essere ulteriormente semplificata comprendendo che:

- la condizione di ammissibilità statica può essere graficamente rappresentate da una curva delle pressioni sovrapposta al disegno della struttura portante dell'arco, imponendo che essa stia all'interno dello spessore;
- la condizione di meccanismo è anch'essa particolarmente attraente per le analisi, perché è piuttosto semplice imporre un meccanismo su un dato arco e calcolarne il lavoro virtuale.

Un altro articolo pionieristico, nel settore dell'analisi rigido plastica di archi e volte in muratura, è quello di **Livesley**, *Limit analysis of structured formed from rigid blocks* (23) in cui egli nota che l'equilibrio e la formulazione del meccanismo dell'analisi limite, applicata secondo Heyman alle volte ed agli archi, è risolvibile tramite la programmazione lineare, quando l'obiettivo sia la massimizzazione del moltiplicatore di collasso, se soggetto ai vincoli delle equazioni di equilibrio del primo ordine.

È, inoltre, il primo che tenta di allentare l'ipotesi di scorrimento nullo tra i blocchi nei giunti, ma riconosce la difficoltà computazionale di introdurre elementi soggetti a leggi di flusso non associate, quali i giunti con attrito alla Coulomb.

Molti autori, seguendo le ipotesi base stabilite da Heyman e Livesley hanno sviluppato lo studio al collasso della teoria rigido plastica.

Harvey in *Stability, strenght, elasticity and thrustlines in masonry structures* (24) discute i limiti apparenti della sua attuazione: incertezze nelle proprietà materiali e effetti del secondo ordine, in particolare quelli dovuti alle deformazioni della malta. Egli adotta, sulle orme delle "aree di stabilità" di Durand-Clayne, un approccio di equilibrio molto semplificato, permettendo alle incertezze delle analisi di essere riflesse nell'utilizzo di una zona di spinta, che è concettualmente un volume in cui la curva di pressione effettiva della struttura potrebbe essere costruita¹⁷. **Smith, Harvey e Vardy** (25) osservano che, nel contesto dell'equilibrio e, quindi, dell'analisi limite inferiore, è generalmente una questione semplice individuare le prime tre cerniere, e la struttura può, così, essere analizzata come una struttura staticamente determinata per trovare il carico al quale si forma la quarta cerniera. Essi implementano il concetto di zona di spinta sopra descritto, osservano la perdita di efficacia della sezione trasversale dell'arco a causa delle fratture per trazione e discutono ulteriormente la sensibilità di strutture ad arco all'allontanamento delle imposte.

Da notare che molti dei concetti descritti in questi due documenti sono stati implementati in un programma informatico, utilizzato tutt'oggi per l'analisi di equilibrio dei ponti ad arco [OBVIS, masonry arch analysis software].

Gilbert & Melbourne(26),(27),(28), come Livesley, pongono il problema della stabilità dell'arco in muratura come procedura matematica di massimizzazione del carico applicato, con i vincoli posti dalle restrizioni alla compenetrazione dei blocchi adiacenti. Essi adottano le ipotesi di Heyman per l'analisi di archi 2D eterogenei sottoposti a peso proprio e carichi accidentali, con l'eccezione di consentire lo scorrimento tra i conci e incorporando, così, l'attrito nelle equazioni di equilibrio sotto l'ipotesi di normalità del flusso associato.

Come ha osservato **Drucker** (29) l'ipotesi di normalità produce una soluzione limite superiore. Egli dimostra, con un banale esempio, che il teorema cinematico, così come formulato da Heyman, non è applicabile nel caso di scorrimenti con attrito alla Coulomb, nei quali alla traslazione per taglio non corrisponde una espansione di volume. Dimostra similmente anche la non validità del teorema statico, per poi formulare tre teoremi che però ne estendono la applicabilità al caso di flusso non associato:

¹⁷ Vedi anche **Smars**, *Etudies sur la stabilité des arcs et vouûtes* (163).

1. una qualsiasi configurazione di carichi che produce il collasso per la condizione di scorrimento relativo nullo nei giunti, produce il collasso anche per il caso di valori finiti di attrito;
2. una qualsiasi configurazione di carichi che non produce il collasso per la condizione di attrito nullo nei giunti, non produce il collasso nemmeno per il caso di valori finiti di attrito;
3. una qualsiasi configurazione di carichi che non produce il collasso per un insieme di corpi con interfacce ad attrito, non produce il collasso nemmeno nel caso in cui tali interfacce siano "cementate" insieme con terreno incoerente caratterizzato da un angolo $\phi = \arctan\mu$.

In conclusione, l'autore afferma che il carico limite per un insieme di corpi con interfacce ad attrito, in assenza di dilatanza, è limitato: inferiormente da quello per lo stesso sistema ma con attrito nullo; superiormente dal carico limite con giunti a scorrimento impedito, e da quello per lo stesso sistema con interfacce "cementate" da materiale privo di coesione (caratterizzato, cioè, da dilatanza).

Nell'attuazione data da Gilbert & Melbourne, il programma è linearizzato¹⁸ e il sistema viene risolto con l'algoritmo del semplice. Questa soluzione è stata implementata per la determinazione di meccanismi di collasso molto realistici di archi in mattoni multi-ring.

Boothby & Brown (30) pongono il problema dell'arco come programma matematico, sotto le ipotesi di Heyman. In questo caso, la funzione obiettivo è quello di minimizzare l'energia potenziale (il sistema è dimostrato essere conservativo) dei conci in un arco soggetta a vincoli cinematici. Sono in grado di identificare i teoremi del limite superiore e inferiore come i criteri fondamentali di stabilità, confutando l'affermazione di **Vilnay e Cheung** (31) che una analisi di stabilità a parte sia necessaria per l'analisi rigido-plastica di archi in muratura. Questi ultimi, infatti, studiano l'instabilità di un arco intesa come nascita di trazioni nei giunti, portando come esempio quello di un meccanismo a tre conci rigidi e quattro cerniere. Il loro intento è, appunto, quello di determinare l'influenza dell'instabilità sul collasso dell'arco ed, analizzando a tal fine il cambiamento dell'energia potenziale totale associata ad una modifica della configurazione dell'arco, arrivano a determinare i parametri geometrici che, con quella data configurazione e i carichi noti, determinano il collasso immediato per instabilità, e quelli che, invece, non determinano un

¹⁸ Un problema di programmazione lineare consiste nel massimizzare o minimizzare una funzione lineare definita sull'insieme delle soluzioni di un sistema di disequazioni lineari, dette vincoli.

crollo istantaneo ma potrebbero comunque portare a una progressiva degenerazione dell'equilibrio. Questo studio viene motivato dagli autori dall'assenza di precedenti studi sul collasso per instabilità dell'equilibrio di strutture ad arco, sempre analizzate da Heyman in poi con la teoria della plasticità.

Essi tuttavia, a detta degli stessi Boothby e Brown, arrivano a risultati non corretti a causa della espressione dell'instabilità dell'arco tramite lo studio della derivata seconda dell'energia potenziale, senza, però, la determinazione esplicita dell'equilibrio. Oltre alla confutazione di articoli precedenti in favore delle teorie di Heyman, i due professori statunitensi anticipano la necessità di estendere le analisi a sistemi più realistici, dato il confinamento degli studi fatti sino ad allora a archi infinitamente rigidi a geometria perfetta.

Oltre a questo limite, lo stato dell'arte di fine Novecento presenta un'altra grande mancanza. I molti articoli presenti nella letteratura del tempo e fin qui menzionati, infatti, testimoniano la grande attrattiva che il metodo dell'analisi rigido-plastica aveva per gli studiosi, ma anche la loro difficoltà ad oltrepassare i limiti dell'astrazione bidimensionale. I meccanismi delle cupole e delle volte in muratura sembrano generalmente troppo complessi per essere visualizzati e per formularne la compatibilità cinematica.

I primi che tentano una estensione del metodo a modelli tridimensionali sono **Oppenheim, Gunaratnam & Allen** (32) che hanno considerato l'analisi sia dell'equilibrio che dei meccanismi di cupole in muratura caricate simmetricamente ad un asse, considerando però la cinematica di una luna, o di un cuneo che incorpora l'apice della cupola. Nonostante gli elementi che vengono alla fine studiati siano bidimensionali, un'apertura alla consapevolezza del funzionamento tridimensionale di un elemento complesso, quale una cupola o una volta, lo si ha nel momento in cui essi incorporano nell'equilibrio del cuneo sommitale le tensioni circonferenziali di compressione che esso scambia con quelli adiacenti. Tuttavia, questo lavoro non è stato esteso ad altre forme di volta, o a carichi generici, e questa ristretta applicabilità ha fatto sì che non avesse seguito.

Un tentativo di determinare un metodo di studio più generico per strutture tridimensionali in muratura si riscontra nello studio svolto da **Lucchesi et al.** (33) nel quale viene presentato un approccio strettamente matematico per l'analisi rigido-plastica di volte in muratura, e un esempio di soluzione in forma chiusa per una specifica istanza di una volta costituita da un quadrante di un toro. Gli sviluppi di questo tentativo saranno trattati più avanti in questa tesi (§II.1.2).

Recentemente, tecniche grafiche migliorate di analisi di strutture ad arco in muratura e di volte, basati sulla combinazione degli approcci statici e cinematici, sono state presentate da **Block et al.** (34). Il loro lavoro si inserisce a metà tra la Thrust Network Analysis, presentata nel paragrafo sottostante, e l'analisi limite, facendo uso della curva delle pressioni. Una delle differenze tra i due metodi è la ristrettezza del campo di applicazione di questa seconda analisi a elementi bidimensionali. Gli autori tuttavia, tentano di allargare l'applicabilità del metodo sviluppando un software, che consente di svolgere analisi parametriche relativamente al collasso per cedimenti degli appoggi o per carichi applicati. La particolarità consiste nell'aggiornamento automatico della curva delle pressioni, nel procedimento implementato dagli autori, con la variazione dei parametri geometrici o dei carichi e spostamenti imposti, consentendo di superare la limitazione denunciata da **Ochsendorf** (35) dell'analisi limite fino ad allora sviluppata: l'autore dimostra, infatti, che i risultati ottenuti tramite l'approccio cinematico possono essere talvolta incerti, poiché, durante il collasso per spostamenti degli appoggi, la posizione delle cerniere può variare.

Per lo studio di quelli che sono, invece, le condizioni di equilibrio, e quindi per lo studio della struttura con il teorema statico, il software di Block consente di plottare agli estremi dell'arco l'area che contiene tutte le possibili combinazioni dei valori di spinta, sulle orme delle zone delle pressioni di Durand-Clayne e Harvey già accennate. In questo modo è possibile avere un'idea dell'indeterminatezza del problema statico che si va a studiare.

Mentre, quindi, le potenzialità del metodo sono legate alla estrema intuitività e snellezza computazionale, che consente analisi praticamente in tempo reale dello svolgimento dei vari meccanismi di collasso, i limiti del metodo risultano evidenti quando nell'articolo gli autori presentano l'analisi di strutture tridimensionali. Essi, infatti, hanno generato una subroutine che fornisce tutte le possibili sezioni per chiese a tre navate e applicato poi il metodo ad ognuna di queste. Si capisce immediatamente, quindi, come la velocità dell'analisi del singolo elemento bidimensionale si perda nel momento in cui per una costruzione tridimensionale essa debba essere svolta per ogni sezione. Così come si intuisce andare perduto anche il funzionamento tridimensionale dell'edificio nel suo complesso: a detta degli stessi autori, infatti, la pseudo-3D analisi effettuata fornisce risultati altamente cautelativi poiché non considera i possibili effetti benefici dovuti a interazioni tridimensionali di ogni sezione con il resto della struttura.

De Luca et al. (36), **Block** (37), **Roca et al.**(38) hanno prodotto un metodo per l'analisi grafica orientata di strutture murarie rinforzate basate sugli stessi principi.

A sostegno di questo quadro di analisi, Holzer (39) ha mostrato recentemente molto chiaramente che la capacità di carico finale di un arco è perfettamente approssimata mediante l'analisi della "zona di spinta". Holzer ha dimostrato che, al collasso, i risultati di questa rapida applicazione grafica dell'analisi limite sono praticamente identici alla soluzione ottenuta con un procedimento iterativo e lineare agli elementi finiti.

Gli studi riportati fino ad ora fanno riferimento ad un modello continuo alla Del Piero per la schematizzazione del materiale nel quale esso ha, come abbiamo visto, infinita resistenza a compressione e nessuna resistenza a trazione. Questo non è, però, l'unico approccio che si è sviluppato dalle teorie di Heyman.

Alcuni ricercatori, infatti, hanno pubblicato diversi studi in cui l'analisi limite viene applicata considerando l'arco come un sistema di elementi rigidi infinitamente resistenti a compressione, giustapposti con o senza malta, secondo un approccio discreto.

Si riportano nel seguito tali pubblicazioni, nelle quali, però, la forza dell'analisi limite, costituita dalla sua intuitività e velocità, viene spesso perduta di fronte ai problemi matematici di risoluzione.

Infatti, la formulazione dell'analisi limite per le strutture discrete, pone alcune difficoltà per quanto riguarda il trattamento della condizione di normalità. Le formulazioni standard adottano la semplice legge ad attrito di Coulomb, caratterizzata da un angolo di attrito ϕ tra le interfacce di contatto. L'applicazione della condizione di normalità (o regola di flusso associato) porta, in questo caso, ad una dilatanza fissa (separazione tra blocchi in direzione normale alla superficie di scorrimento), caratterizzata da un angolo ψ necessariamente uguale a ϕ . Dove $\tan\psi$ è il rapporto tra la deformazione normale e tangente (Figura II-3).

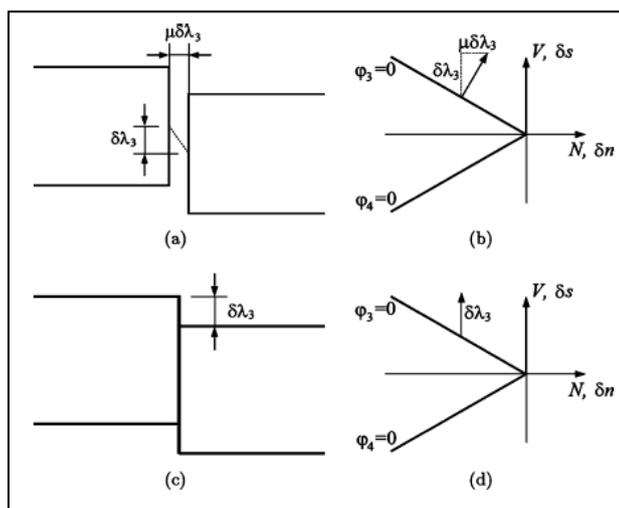


Figura II-3 – Dominio limite V-N per la legge di flusso associato (a) e (b) e non associato (c) e (d)

In realtà, nessuna condizione fisica conduce a questo valore, essendo la reale dilatanza della muratura variabile o quasi nulla in molti casi. Tuttavia, i teoremi limite di plasticità, in precedenza enunciati, sono applicabili solo quando siano adottate le regole del flusso associato (cioè, quando la condizione di normalità sussiste). L'adozione di una regola di flusso non associato porta ad analisi limite non standard per i quali i teoremi limite non sono strettamente applicabili, poiché non garantiscono l'unicità della soluzione, come chiarisce in una recente pubblicazione **Casapulla** (40), nella quale rappresenta questo fenomeno con lo schema di Figura II-4.

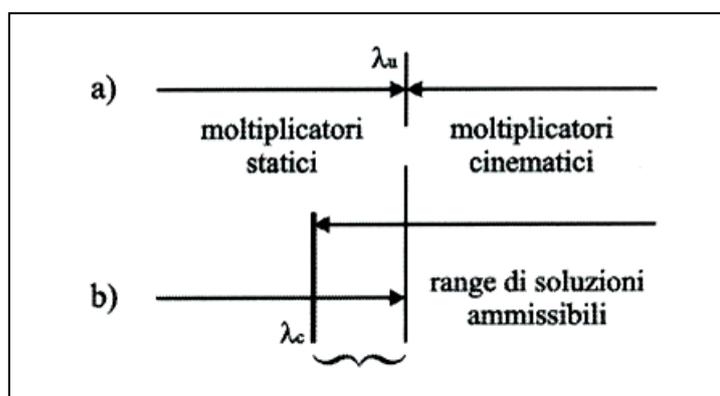


Figura II-4 – Ammissibilità statica e cinematica delle soluzioni dei modelli (a) standard e (b) non-standard secondo Casapulla.

Si rimanda, inoltre, alle pubblicazioni di **Livesley** [(41),(23)] per lo studio della unicità della soluzione in caso di plasticità non standard, nelle quali si conclude che, in funzione della geometria e del coefficiente d'attrito, l'analisi limite così svolta fornisce il corretto limite inferiore del moltiplicatore di collasso soltanto per alcuni casi specifici.

Sulle orme di Livesley, **Baggio e Trovalusci**, sviluppano analisi limite con materiale no-tension e attrito alla Coulomb. Nei loro primi lavori(42),(43)(44) utilizzano una tecnica di omogeneizzazione per mezzo di una microstruttura periodica per studiare gli effetti di scala (relazione tra le dimensioni del blocco e quelle dell'intera struttura) sulla determinazione del carico di collasso e paragonare così i risultati ottenuti con quelli ricavati da modelli discreti o da indagini sperimentali.

Nonostante il fatto che entrambi i modelli prendano in considerazione l'influenza della geometria e della disposizione dei blocchi (nel caso di modelli discreti esplicitamente, nel continuo equivalente per mezzo dei parametri costitutivi adottati) **Baggio e De Felice** (44) hanno verificato che:

- il carico di collasso dei pannelli murari ottenuto per mezzo di un modello discreto fornisce un valore che è leggermente sovrastimato, a causa delle imperfezioni della fenomenologia sperimentale;
- il carico di collasso ottenuto con un continuo equivalente eguaglia solo asintoticamente quello sperimentale, cioè considerando un numero notevole di blocchi e un fattore di scala tendente a zero.

Successivamente **Baggio e Trovalusci** (45), basandosi sui lavori di **Lo Bianco e Mazzarella** (46) e di **Boothby**, implementano una procedura computerizzata per risolvere la programmazione non lineare relativa all'analisi limite di sistemi discreti con giunti ad attrito. Attraverso queste analisi essi mostrano la grande influenza della tessitura muraria sulla resistenza ultima della struttura, analizzando, oltre a varie pareti soggette a taglio, anche una struttura ad arco tridimensionale esistente ed in particolare una volta de "I Sassi" di Matera.

I limiti del metodo però stanno proprio nella formulazione e nel procedimento risolutivo del problema; essi propongono, infatti, due strade: una prima soluzione con programmazione lineare in cui introducono la dilatanza nei giunti, e che però testano su esempi di una semplicità eccessiva, riducendo il sistema arco-piedritti ad un sistema trilitico architrave-piedritti; una seconda soluzione con programmazione non lineare e senza dilatanza, la cui strategia, però, si basa sull'eliminazione delle incognite relative ai giunti di malta inattivi e che comporta, quindi, una idea a monte di quale sarà il meccanismo di collasso. Essa risulta, inoltre, onerosa in termini di tempo e memoria richiesti.

Anche **Ferris e Tin-Loi** (47) si concentrano sulle diverse procedure di soluzione dei problemi con flusso non associato nel caso di modellazione discreta della muratura, proponendosi come obiettivo il superamento delle problematiche incontrate da Baggio e Trovalusci. Inizialmente il problema è formulato come un programma matematico che coinvolge un sistema di vettori con segno vincolato, un Mixed Complementarity Problem (MCP) che non genera però una soluzione unica. Per cercare, quindi, il corretto limite superiore del moltiplicatore di collasso essi formulano il problema di ottimizzazione come un MPEC, Mathematical Program with Equilibrium Constraints, per il quale implementano un algoritmo risolutivo. Tuttavia resta, anche in questo caso, una difficoltà e una macchinosità della procedura risolutiva che determina una forte limitazione ai possibili utilizzi del metodo. A detta degli stessi autori, infatti, nei propositi futuri, vi è il

“challenging goal”, cioè l’ambizioso obiettivo, di risolvere il problema MPEC anche per strutture con un maggior numero di blocchi rispetto a quello della singola parete da loro analizzata.

Negli stessi anni si collocano anche i lavori di **Casapulla e D’Ayala** (48), i quali, da una parte utilizzano un approccio cautelativo basato sull’identificazione di una superficie di collasso ridotta e con flusso plastico associato, che conduce, così, a soluzioni staticamente ammissibili, dall’altra danno una forma compiuta al lavoro inaugurato da Livesly, cercando di classificare le tipologie di problemi per i quali si può trovare una soluzione unica anche in assenza di normalità. In particolare per problemi simmetrici di archi bidimensionali, l’unicità era già stata dimostrata da **Sinopoli et al.** (49) e Casapulla e D’Ayala lo generalizzano a sistemi 3D.

Un ulteriore passo verso la corretta riproduzione del comportamento locale della muratura e che però riguarda soltanto pareti soggette a taglio o torsione, senza estendere i risultati ad archi e volte, viene compiuto da **Orduña e Lourenço** (50),(51) e **Gilbert et al.**(52). **Orduña e Lourenço** hanno proposto un Cap Model(53) per l'analisi limite per le strutture sia piane sia spaziali fatto di blocchi rigidi, che tenga conto delle regole di flusso non associato e limitata resistenza a compressione della muratura. I risultati ottenuti con il modello sono stati comparati con i risultati sperimentali disponibili. Un esempio riguardante una semplice parete sottoposto a carichi sismici è dato nella figura sottostante, in cui il valore della resistenza all’azione orizzontale viene misurata con il parametro α , moltiplicatore delle forze di gravità al collasso.

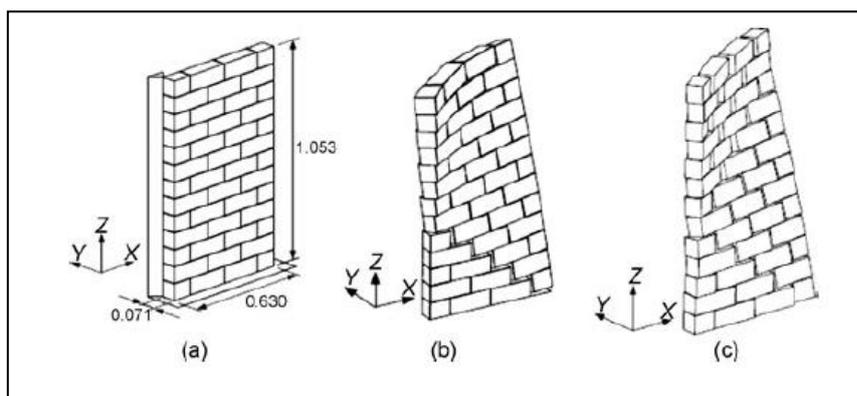


Figura II-5 – Oduna e Lourenco: Pareti caricate fuori piano; (a) modello; (b) meccanismo di collasso FEM ($\alpha=0.210$); (c) meccanismo di collasso con analisi limite ($\alpha=0.216$)

A ciò si aggiunge il fatto che considerare una resistenza a compressione finita porta anch’essa ad analisi limite non standard poiché si ricorda che le ipotesi di Heyman

implicano la resistenza illimitata a compressione. Sulle orme di Livesley, Orduña e Lourenço dimostrano che, se si cerca la soluzione riducendo al minimo i moltiplicatori ottenuti con l'approccio cinematico (teorema del limite superiore) si può, per le regole di flusso non associato, generare una grave sottostima del carico di collasso e determinare, così, meccanismi di guasto non corretti. Gli autori si propongono di superare questo problema per mezzo di percorsi di carico seguenti procedure in cui le condizioni di equilibrio e limite sono applicate prima per carichi permanenti e solo successivamente vengono introdotti i carichi accidentali. Gli autori ottengono una soluzione per l'intero insieme di equazioni considerando una piccola tensione efficace di compressione alle interfacce (cioè una forza ridotta compressione tenendo conto del cracking trasversale) ed il fattore di carico è ridotto al minimo. Poi, le soluzioni sono calcolate per successivi incrementi delle tensioni efficaci di compressione fino al raggiungimento del valore stimato.

Gilbert et al. (52), a sua volta, utilizzano un modello non associato di attrito per i giunti (una superficie di rottura di Mohr-Coulomb appositamente modificata) che viene continuamente aggiornata, in una procedura iterativa, fino ad ottenere una soluzione convergente. La procedura prevede stime ragionevoli della capacità massima per una vasta gamma di problemi, tra cui intere facciate in muratura.

Ad oggi, l'analisi limite è ancora utilizzata come rapido strumento per un primo controllo di stabilità per strutture anche complesse, quale quella del sistema di volte del Duomo di Milano, presentata da **Vasic e Coronelli** alla 9th International Conference on Structural Analysis of Historical Constructions (SAHC) del 2014 a Città del Messico (54). In questo lavoro gli autori trovano, tramite l'ausilio del teorema statico, una possibile configurazione di equilibrio che assicura, così, la stabilità del sistema. Rimandano, poi, a futuri studi con metodi agli elementi finiti, un approfondimento del comportamento strutturale dell'edificio, sottolineando, ancora una volta, come l'analisi limite sia intrinsecamente incompleta per lo studio delle condizioni di esercizio di una struttura.

Infine, si ritiene opportuno menzionare anche il contributo di un ulteriore studio presentato sempre al SAHC 2014 di **Cavalagli, Gusella e Severini** (55), nei quali il metodo dell'analisi limite viene applicato ad archi circolari e a sesto acuto, al fine di estendere i risultati di Heyman al caso di sostegni elastici e non fissi e con carichi orizzontali.

Si ricerca lo spessore minimo richiesto per l'equilibrio (o il fattore geometrico di sicurezza) sia imponendo spostamenti finiti degli appoggi, a simulazione di effetti sismici,

sia imponendo elasticità degli appoggi, a simulazione della deformabilità degli elementi di sostegno. Come era da aspettarsi, le analisi dimostrano che con l'incremento della flessibilità, lo spessore minimo richiesto per soddisfare l'equilibrio è maggiore.

II.1.1 Thrust Network Analysis: estensione grafica 3D dell'analisi limite

Dal filone di analisi rigido-plastica, ed in particolare dalla sua applicazione grafica rappresentata dalla curva delle pressioni (che come abbiamo visto rimane sostanzialmente limitata allo studio di archi bidimensionali), deriva quello della "Thrust Network Analysis", dell'analisi cioè di volte e cupole attraverso l'equilibrio di una rete di forze ad esse associate, generalmente proiettate su di una superficie target contenuta nello spessore della volta (Figura II-6).



Figura II-6 – Superficie target e soluzione best-fit per la volta dell'Abbazia di Sherborne, individuata da Block e Lachauer [Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.].

Le origini del metodo possono essere attribuite a **Dermot O'Dwyer** (56) ha introdotto l'uso di reti funicolari 3D di forze, definite nel piano. Usando il procedimento di ottimizzazione, possono essere ottenute reti di sola compressione che siano in equilibrio con le forze esterne relative sia al peso proprio che ai carichi applicati, e che rientrino nella geometria della struttura. Limitando il problema di carico verticale, e mantenendo la disposizione delle reti fissa nel piano durante la risoluzione, le altezze nodali possono

essere determinate attraverso una routine iterativa di ottimizzazione lineare passo-passo. La ricerca di O'Dwyer ha mostrato l'influenza della topologia delle reti scelte sulle soluzioni di equilibrio ottenibili, e ha introdotto le formulazioni matematiche delle diverse funzioni obiettivo rilevanti per la valutazione della muratura. Anche se la rete fissa in piano ancora rende risultati intrinsecamente conservativi, queste reti 3D forniscono una migliore comprensione del funzionamento delle volte rispetto ad analisi semplificate che combinano analisi bidimensionali della curva delle pressioni.

Una importante limitazione di questo procedimento era, comunque, la mancanza di un metodo generale per trattare l'indeterminatezza statica dell'equilibrio orizzontale di tali reti con proiezione orizzontale fissa. Questo equilibrio orizzontale doveva essere conosciuto, infatti, a priori per essere in grado di linearizzare il problema.

Oltre a ciò la soluzione dipendeva anche dal fornire valori di spinta a tutti i bordi e le applicazioni erano quindi limitate a reti, spesso simmetriche e semplici, per le quali le spinte potevano essere calcolate attraverso un'attenta ispezione della topologia di rete prescelta. E poiché le dipendenze dei valori di spinta non sono state formalizzate nell'approccio di O'Dwyer, queste variabili non possono essere incluse nel problema di ottimizzazione. Un secondo problema è che non ogni scelta di equilibrio orizzontale necessariamente porta ad una soluzione equilibrata nello spazio delle soluzioni, dato dalla sezione della volta.

Basandosi sul lavoro seminale di O'Dwyer, l'analisi della rete di spinta (TNA) ha affrontato la prima limitazione con l'introduzione di schemi di forza reciproci introdotti da **Maxwell** nel 1864 (57) (Figura II-7), che descrivono i possibili equilibri orizzontali di reti funicolari di compressione, come appunto le reti di spinta, sotto carico verticale (**Block e Ochsendorf** (58), (59); **Block** (37)).

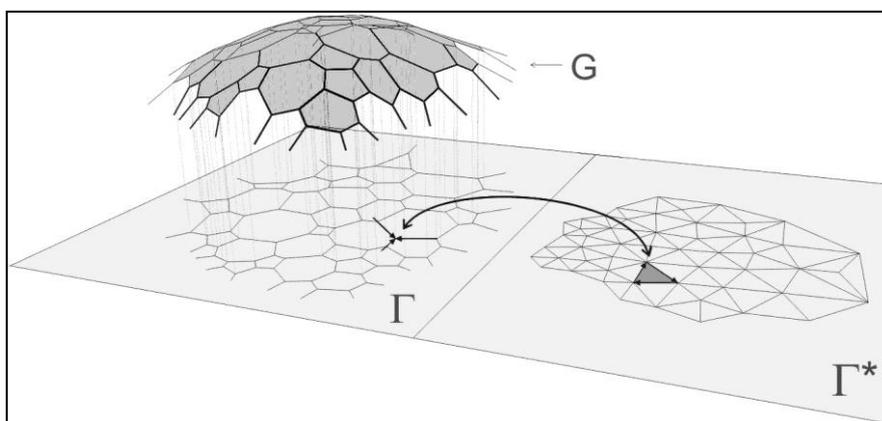


Figura II-7 -Relazione tra la rete di pressione nello spazio delle soluzioni (G), la sua proiezione planare (rete primaria Γ) e il diagramma reciproco (doppia griglia Γ^*) per determinare l'equilibrio.

Questi diagrammi consentono di calcolare, visualizzare e controllare esplicitamente l'equilibrio orizzontale, e quindi i gradi di indeterminatezza delle reti di spinta. Utilizzando le informazioni geometriche fornite da questi schemi, la TNA ha fornito un quadro generale per linearizzare le equazioni di equilibrio di O'Dwyer per qualsiasi topologia di rete, fornendo spinte equilibrate per tutti i bordi della rete.

Nel quadro originale della TNA, come presentato nei riferimenti di cui sopra, rimaneva comunque la necessità di trovare un algoritmo generale per identificare automaticamente, controllare o variare i gradi di indeterminatezza dell'equilibrio orizzontale delle reti di spinta con proiezione fissa. La manipolazione manuale dei diagrammi garantivano che tutte le soluzioni fossero in compressione, ma non è stato, sufficiente per trovare soluzioni di equilibrio specifiche, come a quelle di volte sottili in muratura a geometria complessa.

Un altro recente approccio per l'analisi limite 3D basato sulle reti funicolare è stato proposto da **Andreu, Gil, e Roca**(60),(61). Un approccio relativo alla TNA per la generazione di reti funicolari e per i casi di carico verticale è stata proposta da **Fraternali (Fraternali e Rocchetta (62); Fraternali (63))**, come una specifica estensione 3D del "metodo delle tensioni concentrate" (**Fraternali, Angelillo, e Fortunato (64)**). **Block (65)** ha dimostrato che le loro condizioni di equilibrio e l'intelaiatura globale della rete, ottenuti separando l'equilibrio orizzontale e verticale secondo l'approccio di Fraternali, presenta difficoltà rispetto alle singolarità delle condizioni al contorno e del carico, o rispetto a discontinuità nelle superfici di equilibrio, come crepe o aperture.

Più recentemente, il fondamento matematico di questo quadro, sulla base di TNA e del metodo delle tensioni concentrate, è stato formalizzata ed esteso con algoritmi risolutivi efficienti da **Vouga et al. (66)** per trovare particolari soluzioni di best-fit per le superfici bersaglio e poiché la loro strategia di risoluzione non è basata su un layout orizzontale a schema fisso, il loro metodo è in grado di catturare tratti affilati tipici di volte in muratura gotiche, come gli spigoli lungo le costole. Rimangono, comunque, problemi di convergenza.

Block e Lachauer (67) presentano una estensione non lineare della TNA. La differenza fondamentale di tale approccio non lineare è che le soluzioni di equilibrio non sono vincolate da proiezioni orizzontali fisse, grazie a quelli che gli autori definiscono de "nuovi algoritmi risolutivi robusti ed efficienti" sviluppati per consentire di trovare reti di spinta di best-fit per le volte in muratura con geometrie complesse. Queste soluzioni forniscono

buoni limiti inferiori sui fattori di sicurezza geometrici di queste strutture. Le implementazioni presentate nell'articolo possono essere viste come un incipit per una implementazione completamente in 3D dell'analisi di equilibrio delle volte in muratura.

L'approccio, pur essendo facilmente utilizzabile per nuove strutture voltate con una perfetta geometria, non fessurate e supporti controllati, necessita di ulteriori ricerca e sviluppo per essere in grado valutare una costruzione storica reale, non perfetta, in muratura.

Gli esempi illustrati dimostrano che il risultato del metodo dipende fortemente dal layout (topologia e geometria) del diagramma di forze adottato.

Anche se i risultati possono essere generati velocemente, molti autori esprimono la necessità di una strategia generale per la generazione di opportuni diagrammi di forma, poiché ad oggi questi dipendono dall'intuizione dell'analista strutturale e, come dimostrato da **Block e Lachauer**, analisi di curvatura non sono sufficienti.

Una soluzione a quest'ultimo problema è da attribuire a **Panozzo et al.** (68) ma i layout così determinati producono errate approssimazioni della geometria, causando talvolta instabilità nel risolutore lineare, o sono semplicemente infattibili: è, cioè, impossibile trovare una soluzione di equilibrio in sola compressione per il modello fornito.

Una strategia generale per la generazione dei diagrammi dovrebbe, quindi, tener conto della geometria globale della volta, della tipologia del carico, così come delle proprietà locali della tessitura muraria, come la stereotomia della volta o le patologie strutturali osservate, date da crepe, linee di cerniera o fori.

In conclusione la TNA è caratterizzata da una notevole velocità nella determinazione di diverse soluzioni di equilibrio per volte molto sofisticate e ciò rende questo approccio indicato e utile per applicazioni pratiche, in cui i vincoli di tempo e budget spesso non consentono la modellazione e l'analisi non lineare agli elementi finiti o ad elementi discreti.

Nonostante ciò, per ottenere significativi risultati sulla stabilità e sulla capacità di carico delle strutture voltate in muratura, tramite la TNA, è necessario riuscire a:

- includere nel problema altri obiettivi di ottimizzazione, come l'individuazione degli stati di massima e minima spinta, il fattore di sicurezza geometrico e il carico di collasso, ma anche ad esempio un test di inclinazione globale per

- ottenere un limite superiore della stabilità di una struttura sotto forze orizzontali, come ad esempio quelle di un evento sismico (**Block et al.**, (69));
- integrare alcuni limiti sulle soluzioni, come la limitazione delle spinte in base alla stabilità laterale dei pilastri, l'imposizione di vincoli rigidi (per esempio per vincolare soluzioni di equilibrio a passare attraverso le linee di cerniera osservate) e l'aggiunta del concetto di zona di spinta (**Smith et al.** (25)), che a sua volta potrebbe essere realizzato efficacemente mettendo vincoli sulle altezze nodali in combinazione ai valori di spinta, noti dal diagramma della reciproca forza;
 - esaminare se, come nelle analisi dell'arco bidimensionale (**Ochsendorf** (35)), queste reti di spinta siano in grado di fornire informazioni sui possibili meccanismi di collasso per i problemi completamente in 3D.

II.1.2 La “superficie delle eccentricità di massimo modulo”

Un approccio totalmente innovativo, rivolto alla estensione nel tridimensionale della curva delle pressioni e che supera i limiti della TNA, è stato formulato da **Lucchesi, Padovani e Zani** (70), in collaborazione tra l'Università di Firenze e il Consiglio Nazionale delle Ricerche di Pisa.

Il concetto sviluppato è quello della *superficie delle eccentricità di massimo modulo*. Precisamente, fissato un punto della superficie media della volta, si considera per ciascuna direzione, l'eccentricità definita come il rapporto tra il momento flettente e la forza normale in quella direzione e si determina quella che ha modulo massimo. Si individua, quindi, il punto della volta la cui distanza dalla superficie media è pari all'eccentricità di modulo massimo. Ripetendo l'operazione per un numero sufficiente di punti si costruisce una superficie, detta appunto “superficie delle eccentricità di massimo modulo” che gioca per le volte in muratura un ruolo analogo a quello svolto dalla curva delle pressioni nel caso degli archi.

In particolare, in condizioni di equilibrio, essa è interamente contenuta nello spessore della volta e pertanto può essere utilizzata per definire un fattore geometrico di sicurezza simile a quello usato da Heyman per gli archi e può dare utili informazioni nello studio del collasso di volte in muratura.

Questa superficie, oltre a consentire una visualizzazione sintetica ed efficace dei risultati delle analisi agli elementi finiti, è utile per valutare il carico di collasso, facilitando l'individuazione dei relativi meccanismi.

La superficie delle eccentricità di massimo modulo, è, quindi, una soluzione semplice ed intuitiva a quello che abbiamo visto essere il grande problema della bidimensionalità dell'analisi limite ed è uno degli strumenti presenti all'interno del codice NOSA-ITACA, che sarà utilizzato nello studio della struttura voltata oggetto di questa tesi.

II.2 Analisi incrementale: la ricerca dell'effettivo stato di sollecitazione

La muratura è caratterizzata da scarsa resistenza a trazione, differente rigidità e resistenza lungo gli assi orizzontale e verticale, e limitata duttilità.

In prima approssimazione, è possibile sintetizzare alcuni aspetti imprescindibili del comportamento della muratura:

- la risposta è lineare solo per bassi stati di sollecitazione;
- la resistenza a compressione e a trazione del materiale è molto differente, in particolare, la resistenza a trazione risulta notevolmente più bassa di quella a compressione; f
- la rigidità e la resistenza sono diverse lungo gli assi orizzontali e verticali;
- la resistenza a taglio è funzione della compressione normale agente sui giunti principali, attraverso l'attrito.

La caratteristica di prevalente non linearità del materiale è uno degli aspetti più problematici della modellazione della muratura, in quanto impone una scelta a priori sul tipo di risultati che si intendono ottenere e, quindi, sul tipo di analisi da sviluppare. Come abbiamo già spiegato all'inizio di questo capitolo, le alternative che si pongono sono due: o analizzare il comportamento della struttura al collasso, trascurando la descrizione del processo che conduce alla condizione limite; oppure tentare di descrivere il comportamento del materiale in ogni istante della sua storia dei carichi attraverso un'analisi evolutiva e in esercizio. La prima alternativa conduce *all'analisi limite*, analizzata nel paragrafo precedente ad essa dedicato; la seconda, *all'analisi incrementale*, la quale, a costo di informazioni più descrittive e di un elevato onere computazionale, ci permette di

descrivere il comportamento della struttura nelle diverse fasi della sua vita, fino anche al collasso.

Occorre sottolineare come quest'ultimo aspetto si riveli decisivo nella modellazione delle costruzioni storiche, per le quali il comportamento 'attuale' della struttura è funzione della sua vita passata e la determinazione dell'attuale stato di sicurezza ("distanza" dal carico di collasso) risulta fondamentale.

Nonostante lo scopo proposto in questo capitolo sia quello di presentare un rapido ed esaustivo stato dell'arte sulla analisi di archi e volte, in questo ambito, volto, come già specificato, allo studio dell'effettivo stato di sollecitazione del materiale, non si può prescindere da una introduzione sullo stato dell'arte relativo alla modellazione del materiale muratura in generale.

Per questo, i testi e gli articoli citati nel paragrafo seguente, non saranno strettamente inerenti alle strutture voltate.

II.2.1 Modellazione del materiale muratura: approcci continui, discreti e legami costitutivi.

Nell'ambito del primo approccio menzionato, nel quale si ricerca lo stato effettivo di sollecitazione della struttura, si sviluppano diversi filoni volti alla corretta modellazione del materiale. La presenza di vari modelli è chiaro indice della complessità del comportamento del materiale muratura e della altrettanta complessità incontrata dagli studiosi nel determinare un legame costitutivo che, da una parte, riesca a modellarla correttamente e che, dall'altra, sia abbastanza semplice da poter essere applicato nella risoluzione dei problemi al contorno, senza generare eccessiva complessità di calcolo.

Quest'ultimo tipo di analisi è stato sviluppato tramite modellazioni agli *elementi finiti* o agli *elementi discreti*, nelle quali, però, cambiano sia la modellazione del materiale come continuo o discreto, sia il legame costitutivo adottato per il continuo equivalente o per i blocchi e per la malta.

Le tecniche di modellazione maggiormente utilizzate nella pratica sono:

- Tecniche discrete
 - a. micro-modellazione di dettaglio;
 - b. micro-modellazione semplificata;
- Tecniche continue

- a. macro-modellazione;
- b. omogeneizzazione.

La micro-modellazione consiste, in generale, nel considerare separatamente blocchi e giunti alla macro-scala mentre nella macro-modellazione per tecniche continue il materiale eterogeneo è sostituito da un materiale equivalente omogeneo, di solito a comportamento ortotropo, scarsamente resistente a trazione e con distinto comportamento a trazione e compressione. Entrambe le tecniche presentano vantaggi e svantaggi: la prima consente un'analisi dettagliata del comportamento dei singoli materiali costituenti ma richiede un elevato onere computazionale, la seconda consente analisi non lineari su interi edifici ma richiede la taratura dei numerosi parametri del modello attraverso campagne sperimentali mirate. In alternativa, le tecniche di omogeneizzazione consentono di considerare separatamente i singoli materiali costituenti alla sola meso-scala (cella elementare) e di sostituire alla macro-scala il materiale eterogeneo con un continuo omogeneizzato, le cui caratteristiche meccaniche sono dedotte alla meso-scala risolvendo opportuni problemi a spostamenti al bordo assegnati.

All'interno di queste tecniche di modellazione possono poi variare, come abbiamo già spiegato, i legami costitutivi adottati.

II.2.1.1 Tecniche di micromodellazione

La muratura è un materiale composito costituito di unità e giunti di malta, normalmente disposti in maniera periodica. Utilizzando i parametri del materiale ottenuti da esperimenti e la geometria reale di entrambi i componenti, vale a dire le unità (ad esempio, mattoni, blocchi o pietre) e i giunti, è possibile riprodurre numericamente il comportamento delle strutture in muratura.

Tuttavia, la rappresentazione di ogni unità e ogni giunto diventa impraticabile nel caso di strutture murarie reali comprendenti un gran numero di unità.

E' possibile riconoscere due differenti approcci alla modellazione discreta della muratura: un approccio di dettaglio, dove i blocchi e i giunti di malta sono rappresentati attraverso elementi continui, mentre l'interfaccia malta/blocchi è modellata attraverso elementi discontinui; un approccio semplificato, dove ogni giunto, consistente nella malta e nelle due superfici di interfaccia, è condensato in un unico elemento di interfaccia,

mentre i blocchi sono dimensionalmente espansi al fine di mantenere la geometria globale invariata (Figura II-8).

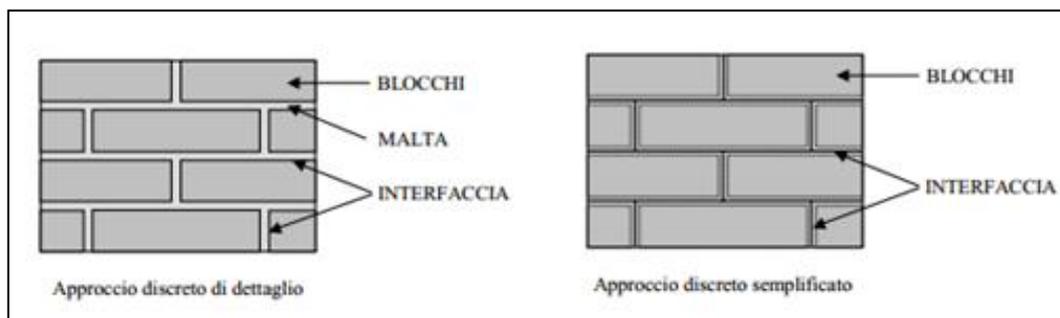


Figura II-8 – Schema degli approcci discreti di dettaglio e semplificato

Questo approccio permette di tenere in conto le caratteristiche deformative elastiche ed anelastiche sia dei blocchi che dei giunti di malta, consentendo di descrivere l'interazione tra il comportamento meccanico dei materiali costituenti. Questo tipo di modellazione, tuttavia, richiede un grande onere computazionale e può essere applicata in sole analisi di dettaglio. Essa è finalizzata soprattutto a fini di ricerca, soprattutto per analizzare alcuni meccanismi di danneggiamento della muratura nei quali l'interazione malta/blocchi è determinante. Il caso forse più significativo è quella della rottura a compressione per splitting, associata alla diversa deformabilità dei materiali, ovvero all'effetto del modulo di Poisson della malta. Per questo non ci siamo soffermati su questo primo approccio con il quale sono stati analizzati soltanto semplici pannelli murari e l'estendibilità allo studio di volte, ad oggi, è praticamente impossibile.

L'unico ambito in cui essa è utilizzabile è quello di studio della cella di partenza per la definizione di un continuo equivalente, come vedremo nel paragrafo relativo agli elementi finiti con il lavoro di Lourenço.

II.2.1.2 Tecniche di omogeneizzazione

L'alternativa è di descrivere il comportamento composito di murature in termini di sollecitazioni e deformazioni macro o medi, affinché il materiale possa essere assunto omogeneo. Questo problema può essere affrontato, essenzialmente, da due direzioni. Una possibile direzione è di raccogliere numerosi dati sperimentali su una cella base che possono essere usati con sicurezza nella definizione del continuo per le analisi. Si sottolinea che i risultati sono limitati alle condizioni in cui i dati sono ottenuti. Nuovi

materiali e/o l'applicazione di un materiale noto in diverse condizioni di carico potrebbero richiedere un diverso insieme di programmi sperimentali costosi.

Un'altra direzione è quella, appunto, di cercare un approccio più fondamentale che ricorre a *tecniche di omogeneizzazione*. Questo approccio, che mira a descrivere il comportamento del composito dalla geometria e il comportamento dell'elemento volume rappresentativo (o cella base, vedi Figura II-9), ci concede una capacità predittiva.

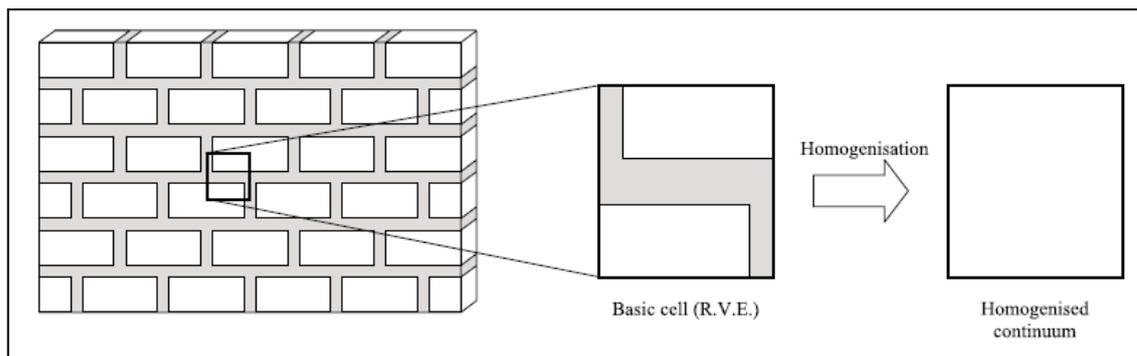


Figura II-9 – Schema di cella base e procedura di omogeneizzazione, Lourenço

La formalizzazione della tecnica dell'omogeneizzazione avvenne ad opera di **Bakhvalov e Panasenko**(71) e sta diventando sempre più popolare tra la comunità di studiosi della muratura.

Data la difficile geometria della cella base muratura, non esiste in letteratura, però, una soluzione univocamente riconosciuta del problema di omogeneizzazione, e questo porta, in sostanza, a tre diverse linee di azione.

Un primo metodo piuttosto generale e rigoroso, almeno in via teorica, consiste nell'utilizzo di un continuo generalizzato alla *Cosserat*. In quest'ambito le prime proposte sono state formulate da **Besdo** (72) e **Mühlhaus** (73). Sebbene il continuo alla Cosserat sia stato ripreso recentemente da alcuni autori (**Stefanou et al.** (74) e (75)), limitandosi generalmente al campo lineare, recentemente sono state avanzate alcune proposte per l'estensione del modello anche al campo non lineare (**Adressi**(76)). Sono state inoltre condotte alcune simulazioni, mirate al confronto tra continuo alla Cosserat e alla Cauchy (**Trovalusci e Masiani**(77), **Salerno e De Felice**(78)).

Questa soluzione elegante ed efficiente possiede una certa intrinseca complessità matematica e non è stata adottata da molti ricercatori, pur essendo in grado di gestire

bene l'interfaccia di malta e il reale comportamento discontinuo. Il passo verso l'applicazione pratica di tale approccio è ancora in fase di sviluppo.

Un secondo approccio (**Anthoine**(79),(80); **Urbanski et al**(81)) è di applicare rigorosamente la teoria di omogeneizzazione per mezzi periodici alla cella base, cioè di eseguire una singola omogeneizzazione al passo, con adeguate condizioni al contorno, geometria esatta e *sperimentazioni dirette* condotte esclusivamente sulla cella elementare. La definizione delle caratteristiche equivalenti del modello continuo avviene quindi su tali dati. Tale approccio è sicuramente molto accurato, ma non consente di ottenere le proprietà da attribuire all'equivalente continuo in una forma chiusa.

La complessità della cella base muratura implica, infatti, una soluzione numerica del problema, che è stato ottenuto con il metodo degli elementi finiti.

La teoria è stata, però, utilizzata dagli autori citati per determinare dei macro-parametri di muratura e non per effettuare analisi a livello strutturale. Infatti, l'applicazione rigorosa della teoria di omogeneizzazione al comportamento non lineare della complessa cella base di muratura implica risolvere il problema per tutte le possibili storie di carico macroscopiche, in quanto il principio di sovrapposizione degli effetti non si applica più. Pertanto, la determinazione completa del legame costitutivo omogeneizzato richiederebbe un numero infinito di calcoli.

Il terzo approccio può essere considerato come un "*approccio ingegneristico*", volto a sostituire la complessa geometria della cella base con una geometria semplificata in modo che sia possibile una soluzione in forma chiusa del problema di omogeneizzazione. Tenendo presente l'obiettivo di eseguire analisi a livello strutturale, **Pande et al.** (82), **Maier et al.** (83) vi hanno introdotto funzioni al danneggiamento, mentre **Pietruszczak e Niu** (84) vi hanno introdotto un modello fratturante, seguiti da **Lee et al.** (85). **Lourenço** (86) ha sviluppato ulteriormente la procedura, presentando una nuova formulazione matriciale che permette un'implementazione molto più chiara degli algoritmi di omogeneizzazione ed anche la relativamente semplice estensione al comportamento non lineare. Egli si avvale di un modello plastico. **Uva e Salerno** (87) introducono, invece, un modello con danno ed attrito.

In tutti questi casi l'approccio consta di due fasi: nella prima una fila di mattoni viene omogeneizzata con i giunti di malta verticali tra loro interposti, mentre nella seconda fase

le file di mattoni vengono omogeneizzate le une con le altre. Questa procedura presenta tuttavia il limite di non tenere conto dell'effettiva tessitura muraria. Sono, quindi, stati introdotti ulteriori modelli che tengono conto di una valutazione più dettagliata dell'interazione tra le diverse componenti della cella base. Tali proposte sono dovute a **Lopez et al.** (88), **van der Plujim** (89), e **Zucchini e Lourenço**(90) e (91).

Altri approcci, formulati da **Luciano e Sacco** (92)e (93), **Gambarotta e Lagomarsino** (94), **De Bujan e De Felice** (95) ed altri si basano sull'osservazione che il collasso della muratura avviene con il danneggiamento (a taglio o a fessurazione) dei giunti di malta.

Nel 2004 autori come **Carbone e Codegone**(96), avvalendosi dei principi variazionali, hanno introdotto altri approcci per la derivazione delle proprietà omogeneizzate, seppur limitando lo studio al campo elastico.

Le tecniche di omogeneizzazione, prima applicate al caso piano, sono inoltre state estese al campo tridimensionale, includendo pertanto le azioni fuori piano. Ad esempio **Cecchi**, che aveva inizialmente formulato una proposta per il comportamento con **Di Marco** (97), con **Rizzi** (98), ha successivamente esteso tale formulazione con **Sab** (99) (100) studiando il comportamento tridimensionale nel dettaglio con **Milani e Tralli** (101); un'altra proposta è infine dovuta a **Chengqing e Hong** (102).

Le tecniche di omogeneizzazione sono state inoltre estese al caso di murature non regolari, nelle quali cioè non è possibile individuare una cella base modulare (**Cluni e Gusella** (103), **Stefanou et al.** (104)).

Si riportano nel seguito i legami costitutivi più noti in letteratura, ricavati tramite le tecniche di omogeneizzazione.

II.2.1.2.1 Il modello plastico con softening di Lourenço et al.¹⁹

L'approccio proposto da Lourenço (105), applicato ad elementi curvi, è basato su legami costitutivi con softening applicati a materiali ortotropi. Vengono distinti i criteri di rottura a trazione e a compressione: per la trazione si fa riferimento al criterio di rottura di Rankine, mentre per la compressione viene utilizzato il criterio di Hill.

¹⁹ *An Anisotropic Plasticity Model for Quasi-Brittle Composite Shells*, P.B. Lourenço, Computational plasticity: fundamentals and applications, Printeridge Press, London, 1997.

Si consideri dapprima il comportamento a trazione. Con riferimento alla prima direzione principale, per tener conto del softening, la formulazione di Rankine viene così generalizzata:

$$f_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - \overline{\sigma}_t(\kappa_t)$$

in cui la funzione $\overline{\sigma}_t(\kappa_t)$ descrive il comportamento softening del materiale e lo scalare κ_t controlla il livello di softening.

L'ipotesi di comportamento isotropico non è, però, facilmente applicabile per materiali fragili o quasi-fragili, poiché questi possono essere caricati lungo una direzione fino al raggiungimento della resistenza a trazione, anche quando un danneggiamento sia già avvenuto nella direzione perpendicolare. Pertanto gli autori propongono una formulazione del criterio di Rankine estesa al caso ortotropo, utilizzando, tuttavia, un'unica variabile scalare di controllo del softening. Tale variabile indica il livello simultaneo di softening lungo le due direzioni materiali, pur considerando due distinti valori di energie di frattura nelle medesime direzioni. Introducendo allora una distinzione tra le tensioni di snervamento rispetto alle due direzioni materiali, il criterio di Rankine viene modificato come segue:

$$f_1 = \frac{(\sigma_x - \overline{\sigma}_{\alpha}(\kappa_t)) + (\sigma_y - \overline{\sigma}_{\beta}(\kappa_t))}{2} + \sqrt{\left(\frac{(\sigma_x - \overline{\sigma}_{\alpha}(\kappa_t)) - (\sigma_y - \overline{\sigma}_{\beta}(\kappa_t))}{2}\right)^2 + \alpha \cdot \tau_{xy}^2}$$

in cui α rappresenta un parametro che regola il contributo delle tensioni tangenziali al collasso e vale

$$\alpha = \frac{f_{\alpha} \cdot f_{\beta}}{\tau_{u,t}^2}$$

I parametri f_{α} , f_{β} e $\tau_{u,t}$ rappresentano rispettivamente le resistenze a trazione uniaxiali lungo le due direzioni materiali e la resistenza di puro taglio per il materiale considerato.

La funzione di softening considerata è di tipo esponenziale nel piano tensioni equivalenti-deformazioni, per entrambe le direzioni materiali, cui sono tuttavia associate differenti energie di frattura ($G_{f\alpha}$ e $G_{f\beta}$). Si ha infatti:

$$\overline{\sigma}_{\alpha} = f_{\alpha} \cdot \exp\left(-\frac{h \cdot f_{\alpha}}{G_{f\alpha}} \kappa_t\right), \quad \overline{\sigma}_{\beta} = f_{\beta} \cdot \exp\left(-\frac{h \cdot f_{\beta}}{G_{f\beta}} \kappa_t\right)$$

essendo h la *lunghezza equivalente*, corrispondente ad una dimensione rappresentativa della larghezza della discretizzazione tale che i risultati siano attendibili. Gli autori utilizzano un'espressione di h legata all'area dell'elemento A_e . In ogni caso, con riferimento all'asse materiale i , tale parametro deve rispettare la seguente condizione

$$h \leq \frac{G_{fi} \cdot E_i}{f_{ti}^2}$$

Rimane da indicare la relazione tra la funzione di softening k_t e le grandezze cinematiche. Tale valore risulta proprio pari alla deformazione principale plastica massima. In termini incrementali si ha:

$$\dot{\kappa}_t = \dot{\varepsilon}_1^p = \frac{\dot{\varepsilon}_x^p + \dot{\varepsilon}_y^p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_x^p - \dot{\varepsilon}_y^p)^2 + (\dot{\gamma}_{xy}^p)^2}$$

Per il comportamento a compressione gli autori fanno riferimento al criterio di Hill. Il dominio di Hill può essere rappresentato da un ellissoide nel piano completo delle tensioni, e assume la seguente forma:

$$f_2 = A \cdot \sigma_x^2 + B \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y + C \cdot \sigma_y^2 + D \cdot \tau_{xy}^2 - 1 = 0$$

I coefficienti dell'equazione di questo ellissoide possono essere espressi in funzione dei parametri β e γ . Il primo regola l'accoppiamento tra le tensioni normali e richiede la conoscenza della resistenza a compressione f_{45° in una prova monoassiale condotta lungo una direzione intermedia tra i due assi materiali, mentre il secondo indica il contributo delle tensioni tangenziali al collasso. Essi risultano così definiti:

$$\beta = \left(\frac{1}{f_{45^\circ}^2} - \frac{1}{f_\alpha^2} - \frac{1}{f_\gamma^2} \right) \cdot f_\alpha \cdot f_\gamma; \quad \gamma = \frac{f_\alpha \cdot f_\gamma}{\tau_{u,c}^2}$$

In funzione di questi due parametri i coefficienti dell'ellissoide risultano pari a:

$$A = 1 / \left(\overline{\sigma_\alpha}(\kappa_c) \right)^2, \quad B = \beta / \left(\overline{\sigma_\alpha}(\kappa_c) \cdot \overline{\sigma_\gamma}(\kappa_c) \right)$$

$$C = 1 / \left(\overline{\sigma_\gamma}(\kappa_c) \right)^2, \quad D = \gamma / \left(\overline{\sigma_\alpha}(\kappa_c) \cdot \overline{\sigma_\gamma}(\kappa_c) \right)$$

Le funzioni $\sigma_\alpha(\kappa_c)$ e $\sigma_\gamma(\kappa_c)$ sono, rispettivamente le tensioni di snervamento lungo i due assi materiali. La legge inelastica adottata dagli autori è di tipo parabolico nella fase di hardening, mentre nella fase di softening presenta una fase parabolica seguita da una fase esponenziale che si attesta su un valore residuo σ_{ri} pari a 1/10 di quello di picco $\sigma_{pi} = f_{ci}$. Analogamente al comportamento in trazione i indica in questo caso uno dei due assi

materiali. La resistenza di picco σ_{pi} , indipendentemente dall'asse materiale considerato, si ha in corrispondenza di un valore di k_c pari a k_p , che rappresenta un ulteriore parametro del materiale. I criteri di snervamento a trazione e compressione, nell'ipotesi che i regimi di tensione a trazione e compressione siano disaccoppiati, possono infine essere combinati in un'unica superficie di snervamento combinata.

II.2.1.2.2 Modello con danneggiamento di Zucchini e Lourenço²⁰

Si descrive brevemente di seguito un modello di danneggiamento studiato da Zucchini e Lourenço (106). Questo modello propone un elemento con caratteristiche che omogeneizzano quelle delle singole componenti della muratura (mattoni e malta) e consente pertanto una mesh meno fitta di quanto un micro modello richiederebbe.

Questo modello fa propria la teoria del danneggiamento ed in particolare risulta decisiva la definizione della funzione di danneggiamento.

Analogamente a quanto osservato per il modello proposto di plasticità con softening di Lourenço et al., in questo approccio vengono introdotte delle funzioni di danneggiamento, tuttavia in questo caso viene trascurato il comportamento ortotropo della muratura. Le proprietà meccaniche della muratura sono ricavate a partire dal comportamento delle sue componenti (mattoni e malta) attraverso una tecnica di omogeneizzazione. L'introduzione dell'ortotropia, legata sia alle proprietà insite nel materiale sia ai processi di danneggiamento, è invece rimandata dagli autori ad ulteriori studi.

La teoria di danneggiamento, scelta per la descrizione del comportamento della muratura, è quella proposta da **Mazars e Pijaudier-Cabot** (107) e da **Scotta et al.** (108). L'approccio introduce delle inevitabili approssimazioni a causa della modellazione del danneggiamento spalmata su un continuo e non puntuale. Tuttavia le tecniche di omogeneizzazione, consentendo una mesh più rada rispetto a quella reale, rendono possibili le modellazioni di strutture di dimensioni significative.

Il modello isotropico introduce un parametro di danneggiamento interno d , funzione delle effettive tensioni di trazione σ_d , e legata ad essa mediante la relazione

$$\sigma_d = (1 - d)\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = (1 - d)\boldsymbol{\sigma}$$

²⁰ A Coupled Homogenisation-Damage Model for Masonry Cracking, A. Zucchini P.B. Lourenço, 2002.

dove d è un valore scalare che varia da 0 a 1 e che rappresenta il danneggiamento locale corrente, D è la matrice elastica e ε il tensore delle deformazioni

La superficie di danneggiamento limite è data dall'equazione

$$\bar{\sigma} = \sigma_t$$

Dove $\bar{\sigma}$ è la tensione efficace equivalente, funzione della tensione di non danneggiamento e σ_t è la resistenza a trazione del materiale.

La tensione efficace equivalente è definita come la tensione principale massima (di trazione) e definita in accordo con il criterio di Rankine come:

$$\bar{\sigma} = \sigma_p$$

Come legge di evoluzione del danneggiamento, l'autore si riferisce a quella ideata da Oliver et al. (1990) per il calcestruzzo data da un legame esponenziale del tipo:

$$d = 1 - \frac{\sigma_t}{\bar{\sigma}} e^{A \left(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_t}\right)} \quad \sigma_t \leq \bar{\sigma} \leq \infty$$

Dove A è il parametro che tiene conto sostanzialmente del processo di omogeneizzazione, perché derivato dalle osservazioni sperimentali del comportamento del materiale.

L'irreversibilità del processo di danno, inoltre, è dato dall'aggiornamento del parametro di danno solo per valori crescenti dello stesso.

Anche in questo caso gli autori fanno riferimento alla correlazione tra il danno e l'energia specifica di frattura in trazione monoassiale g^I (N/m²)

$$g^I = \frac{\sigma_t^2}{E} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{A_t} \right)$$

Con E modulo di Young del materiale. Introducendo la lunghezza caratteristica della frattura $l_t = \frac{G^I}{g^I}$, con G^I l'energia di frattura del materiale (N/m² m), si ottiene con rapidi calcoli:

$$A_t = \left(\frac{G^I E}{l_t \sigma_t^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$$

Gli autori ripetono poi lo stesso procedimento per determinare il danneggiamento a taglio e il parametro A_s ad esso relativo:

$$A_s = \left(\frac{G'' G}{I_s \sigma_s^2} - \frac{1}{2} \right)^{-1}$$

Con G modulo di elasticità tangenziale e G'' l'energia di frattura per taglio del materiale.

Tramite poi 12 equazioni di equilibrio ed un algoritmo risolutivo incrementale gli autori mostrano la risoluzione di alcuni problemi non lineari, quali quello di una parete infinitamente lunga soggetta a trazione parallela ai giunti di letto.

II.2.1.3 Tecniche di macromodellazione: legami costitutivi per il continuo

Il problema della modellazione della muratura è diventato, soprattutto nell'approccio del macromodello, un problema di meccanica dei continui; solo così, infatti, le grandi difficoltà connesse alla geometria del problema possono essere eliminate. Facendo ricorso a tecniche numeriche, inoltre, è possibile ottenere informazioni, utili da un punto di vista ingegneristico, riguardanti il comportamento della struttura sotto azioni assegnate. Ciononostante, l'operazione più delicata è quella di idealizzare con un materiale omogeneo la muratura, che omogenea non è. Una tale operazione, ovviamente, ha un costo, poiché così facendo si altera la natura fisica del problema e diventano indispensabili confronti con esperimenti e simulazioni d'altro tipo.

È importante notare che un simile metodo è stato utilizzato anche per studiare altri mezzi non omogenei, come ad esempio i terreni, le pietre, il calcestruzzo e, in generale, tutti i materiali da costruzione compreso l'acciaio, sebbene su scala diversa: il continuo esiste solo in quanto idealizzazione accettabile per il corrispondente modello matematico.

Gli elementi che caratterizzano il continuo muratura sono gli stessi che di quelli della meccanica dei continui classicamente intesa: le leggi dell'equilibrio e le condizioni di congruenza devono essere rispettate in ogni punto.

Quello che contraddistingue un tipo di materiale dall'altro è il *legame costitutivo*, la legge che lega gli sforzi alla deformazione. La complessità del materiale muratura fa sì che una legge costitutiva che ne descriva in dettaglio il comportamento, risulti estremamente complicata e si scontri, così, con la semplicità propria dello spirito applicativo.

Nei paragrafi che seguono vengono descritti alcuni modelli costitutivi che sfruttano approcci differenti.

II.2.1.3.1 Il legame Drucker-Prager

Il modello Drucker-Prager è ampiamente applicato per i terreni, le rocce, il calcestruzzo e la muratura. Esso tiene conto di un comportamento isotropo con gli stessi valori limite in trazione e in compressione e della dipendenza del dominio limite dalla pressione idrostatica. Nello spazio a tre dimensioni la superficie limite ha la forma di un cono circolare con il vertice che limita il - generalmente basso - valore della tensione di snervamento in trazione.

La funzione di snervamento è la seguente:

$$f = \sqrt{J_2} - \alpha * I_1 - k = 0$$

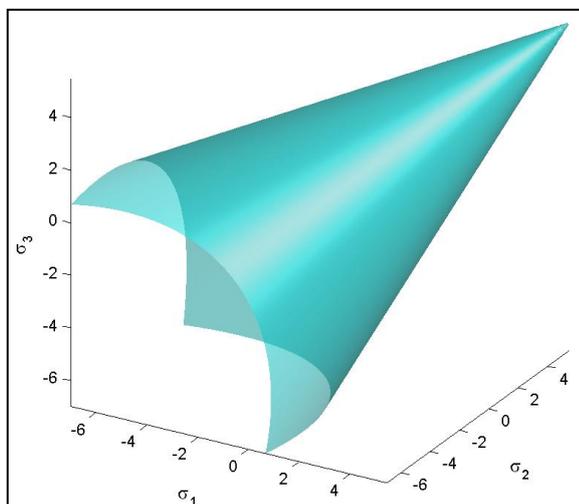


Figura II-10 - Superficie di snervamento di Drucker-Prager nello spazio delle tensioni principali

Dove J_2 è l'invariante del secondo ordine del tensore degli sforzi e I_1 è quello del primo ordine, mentre k e α possono essere espresse in funzione della coesione c e dell'angolo di attrito interno ϕ :

$$k = \frac{6 * c * \cos\phi}{\sqrt{3} * (3 - \sin\phi)} \quad \alpha = \frac{2 * \sin\phi}{\sqrt{3} * (3 - \sin\phi)}$$

Quindi il modello è descritto semplicemente dai due parametri c e ϕ e può essere facilmente applicato per modellazioni ed analisi agli elementi finiti, grazie alla forma convessa del dominio che facilita la risoluzione numerica.

In caso di flusso non associato è richiesto, però, un terzo parametro, che è appunto, la dilatanza che non sarà più uguale a ϕ .

Le applicazioni in letteratura sono vaste, tra le quali si ricordano **Pelà et al. (2009)**, **Genna et al. (1998)**, **Bayraktar et al. (2012)** e **Sevim et al. (2011)**.

Il modello Drucker-Prager comporta alcune accortezze per essere applicato alla muratura.

Esso assume un comportamento isotropo prima e dopo lo snervamento e così fallisce nel descrivere la rottura fragile della muratura in trazione, sovrastimandone la resistenza, e non tiene nemmeno conto del corretto decremento del modulo di elasticità in compressione poiché non vi è alcuna rigidità residua dopo il raggiungimento della deformazione massima.

D'altro canto, però, la dipendenza del modello dalla pressione idrostatica è adatta per materiali semi-fragili come calcestruzzo e per i laterizi, poiché il materiale non si danneggia per altri livelli di confinamento.

Tuttavia, pressioni idrostatiche molto alte introducono micro-fessurazioni nel materiale, non individuate dal modello in esame, che porta a perdite di rigidità una volta eliminata tale pressione idrostatica.

Affinché il flusso si possa considerare associato, dovrà sussistere una dilatanza che introduce aumenti di volume durante lo scorrimento del materiale per taglio, pari all'angolo ϕ . Questo determina valori di aumenti di volume non riscontrati sperimentalmente negli scorrimenti dei giunti di malta della muratura.

Per ovviare ad alcuni dei problemi legati all'applicazione di questo legame alla muratura, alcuni autori hanno studiato delle versioni modificate di Drucker-Prager, con softening post-picco e/o cut-off in trazione.

È il caso, ad esempio, del software **DIANA**, nel quale questo legame modificato è identificato con il nome di *multidirectional fixed crack* (vedi §II.2.4).

In questi casi, però, è evidente come la definizione del legame richieda la conoscenza di più parametri: la costante di cut-off, la funzione di softening, l'energia di frattura in caso di rottura per trazione e quella in caso di rottura per taglio.

II.2.1.3.2 Il legame Willam-Warnke

Un criterio simile al Drucker-Prager e che può anche essere interpretato come una combinazione di quest'ultimo e di quello Mohr-Coulomb, è il criterio Willam-Warnke(109).

Questo criterio è nato per predire la rottura del calcestruzzo e di altri materiali coesivi ad attrito, come rocce e terreno.

Formalmente esso è espresso in funzione dei tre invarianti della parte deviatorica del tensore degli sforzi di Cauchy:

$$f(I_1, J_2, J_3) = 0$$

Tre sono i parametri che devono essere determinati, prima di poter applicare questo legame: la resistenza a compressione monoassiale σ_c , la resistenza a trazione monoassiale σ_t , la resistenza a compressione biassiale σ_b .

In termini espliciti il criterio Willam-Warnke si esprime come:

$$f := \sqrt{J_2} + \lambda(J_2, J_3) \left(\frac{I_1}{3} - B\right) = 0$$

Dove λ è essa stessa una funzione che dipende da J_2 e J_3 , e dai tre parametri del materiale, mentre B dipende soltanto da questi ultimi. Essa può essere interpretata come una pressione di coesione.

In accordo con questo criterio, la prima fessurazione si determina quando la seguente equazione viene rispettata:

$$f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \sqrt{3} \frac{\tau_m}{\rho(\sigma_m, \tau_m)} - 1 = 0$$

Con ρ e θ definite come:

$$\rho(\sigma_m, \theta) = \frac{2\rho_c(\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos \theta + \rho_c(2\rho_t - \rho_c) \sqrt{4(\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos^2 \theta + 5\rho_t^2 - 4\rho_t\rho_c}}{4(\rho_c^2 - \rho_t^2) \cos^2 \theta + (\rho_c - 2\rho_t)^2}$$

$$\cos \theta = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{2\sqrt{3}\sqrt{J_2}}$$

Con σ_m tensione media, ρ_c lunghezza deviatorica per $\theta=60^\circ$, ρ_t lunghezza deviatorica per $\theta=0^\circ$ e $\tau_m = \sqrt{(2/5)J_2}$ tensione media di taglio.

II.2.1.3.3 Confronto e limiti dei due criteri: esempi in letteratura

I due criteri sono utilizzati in alcuni programmi di modellazione commerciali anche per lo studio delle murature, quali Ansys e Abaqus, con le limitazioni già chiarite nei paragrafi precedenti e riassumibili nella non corretta rappresentazione dei meccanismi fessurativi della muratura, ovviamente imprescindibile per la corretta modellazione del materiale.

Molti confronti sono stati fatti in letteratura tra questi due legami, ma per lo più applicati a rotture di pannelli piani per scorrimento tra i giunti o comunque per taglio, che non sono predominanti nelle strutture ad arco o voltate.

In un articolo, invece, pubblicato nel 2009 sulla rivista *Materials and Structures*, gli autori **Pallarés F.J., Agüero A. e Ivorra S.** (110) confrontano i due legami per lo studio della risposta sismica di una canna fumaria in muratura ad eventi sismici.

La sollecitazione predominante nell'analisi è quella flessionale, che sollecita la struttura ciclicamente, determinando tensioni di trazione e di compressione alternate ai due lati della canna fumaria.

Il confronto tra i due criteri viene effettuato relativamente alla formazione della prima frattura e al collasso.

Per quanto riguarda la prima fessurazione, essa avviene praticamente allo stesso istante di tempo per entrambi i modelli e nella stessa posizione, cioè nella zona basale della canna fumaria soggetta a trazione in quell'istante.

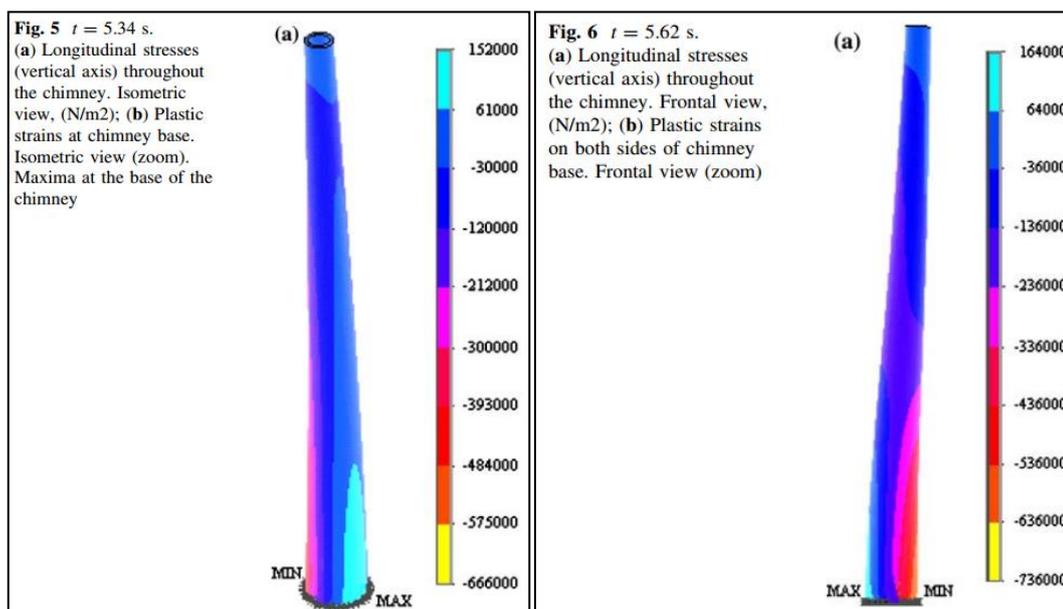


Figura II-11 – Tensioni longitudinali (asse verticale) della canna fumaria con plasticizzazione alla base

Successivamente però, i risultati divergono, poiché secondo il legame elastoplastico di Drucker-Prager il materiale mantiene una resistenza a trazione residua nella zona fessurata, cosa che invece non avviene con il Willam-Warnke.

Tenendo conto di questo, se la fessura successiva avviene in un'altra zona della struttura e con uno stato di sollecitazione tale che la resistenza a trazione della parte plasticizzata non sia richiesta, i risultati sono di nuovo in accordo.

Come si intuisce, però, allo stato ultimo, quando solitamente le zone plasticizzate/fessurate sono piuttosto estese, questo porta a valori molto discordanti,

poiché, come è facile immaginare, la resistenza residua a trazione determina una sovrastima del carico di collasso.

In generale, questo criterio richiede un tempo inferiore per l'analisi rispetto al criterio di Willam-Warnke e può dare una buona comprensione del comportamento, tenendo conto dei limiti suddetti.

In sintesi, l'impiego di tali criteri plastici, come quello Drucker-Prager impiegato dagli autori, e utilizzato in molti pacchetti software, fornisce opportune approssimazioni dei campi tensione-deformazione della fino alla comparsa delle prime fessure, anche nel caso di materiali fragili come muratura, ma può non prevedere il corretto quadro fessurativo a rottura, e non è, quindi, affidabile per questo scopo.

Secondo il criterio di Willam-Warnke, quindi, la struttura presenta una modalità di guasto data dal ribaltamento a causa della diffusione delle fessure alla base.

Il criterio W-W è, quindi, considerato come criterio di riferimento in questo studio, in quanto tiene conto propriamente del fenomeno di fessurazione, modificando la matrice di rigidità quando nascono le fessurazioni, e la modalità di collasso calcolata corrisponde bene con i modi di guasto osservati in reali canne fumarie che hanno sperimentato i terremoti.

Tuttavia questo legame, così come quello di Drucker-Prager, è caratterizzato da un criterio di rottura a rette inclinate, sulle orme del legame ad attrito di Mohr-Coulomb formulato per materiali con dilatanza (assente invece nella muratura).

Secondo tale legame, la resistenza del materiale allo slittamento sulla generica giacitura su cui si eserciti una compressione σ risulta essere

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi$$

con φ angolo di attrito interno del materiale.

Dal cerchio di Mohr relativo ad un generico stato di tensione tangente la superficie di snervamento si può esprimere il rapporto tra la tensione di rottura monoassiale a compressione σ_{rc} e quella a trazione σ_{rt} come

$$\frac{\sigma_{rc}}{\sigma_{rt}} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

Se allora facciamo tendere a zero la resistenza a trazione, valore limite che ci aspettiamo per la muratura, otteniamo

$$\frac{\sigma_{rc}}{\sigma_{rt}} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \rightarrow \infty \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Le due rette del criterio di Coulomb, inclinate di φ rispetto all'orizzontale, si porterebbero sulla verticale ed il criterio si porterebbe, così, a quello della massima tensione principale nulla o no-tension (paragrafo seguente).

La resistenza di attrito interno diventa infinitamente grande e deve essere $\sigma \leq 0$ con tensioni esclusivamente di compressione.

Anche **Genna, Di Pasqua, Veroli e Ronca** (111) confrontano alcuni legami precedentemente descritti per il continuo muratura, quale il Drucker-Prager e il modello con tension cracking e energia di frattura di Lourenço, insieme ad altri proposti dall'autore, come il De Felice modificato, il più noto Galileo-Rankine ed un legame no-tension ricavato da quest'ultimo.

La struttura analizzata è quella del corridoio del Monastero di San Faustino Maggiore a Brescia, lungo circa 87m e poggiante su diaframmi trasversali, collegati longitudinalmente da archi di luci molto diverse (Figura II-13).

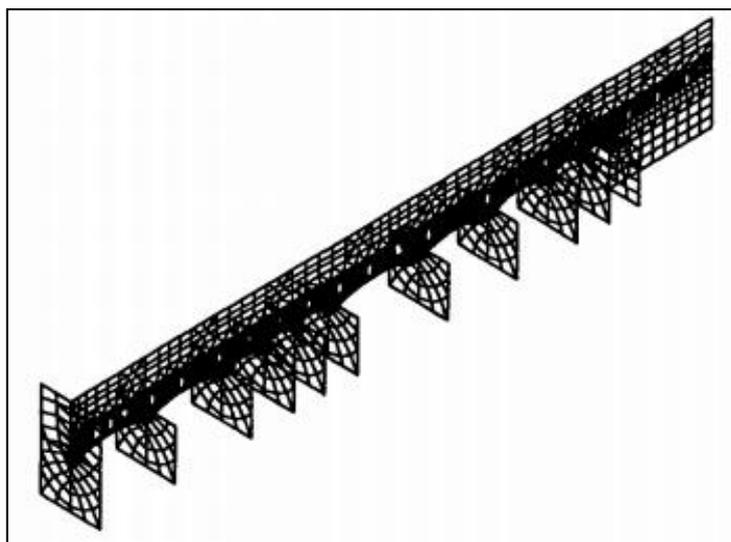


Figura II-12 – Discretizzazione tridimensionale della parete del corridoio del monastero di San Faustino

Il modello tridimensionale è stato analizzato soltanto con materiale elastico lineare, dato il grande onere computazionale altrimenti richiesto. Tramite il confronto tra tale analisi è stato tarato il modello 2D equivalente (Figura II-13).

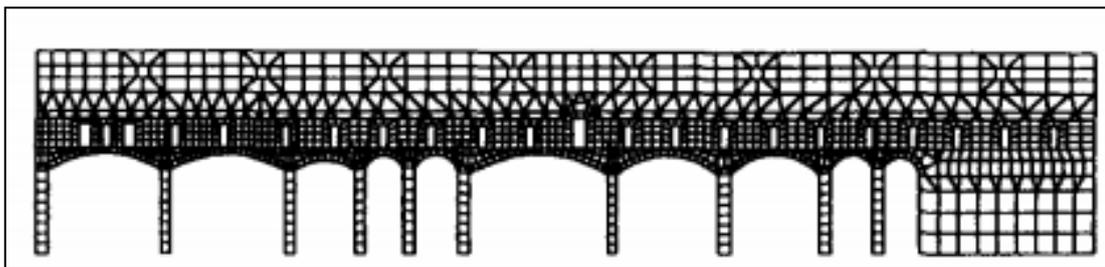


Figura II-13 – Discretizzazione piana della parete del monastero di San Faustino

Dall'analisi, infine, di quest'ultimo è stata determinata la parte di struttura da analizzare, cioè quella formata dagli ultimi due archi a sinistra in Figura II-14 (quelli con luce maggiore) e la parete ad essi sovrastante.

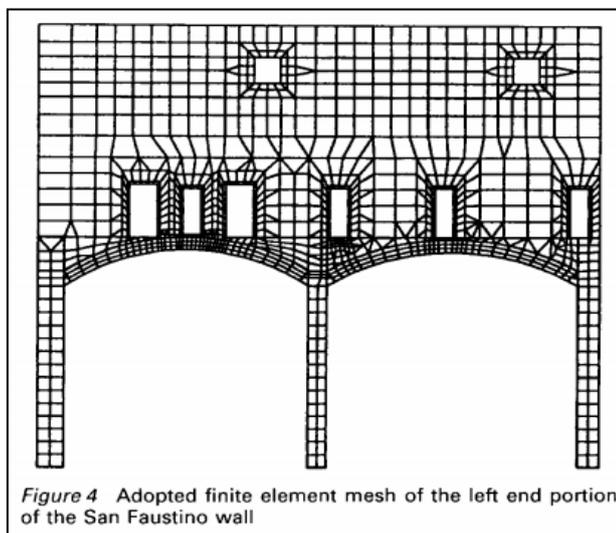


Figura II-14 – Mesh FEM adottata per la porzione sinistra della parete del corridoio del Moanastero di San Fausitino

Questo modello è stato, quindi, analizzato con i legami costitutivi non lineari precedentemente specificati, giungendo a conclusioni non particolarmente calzanti per quanto riguarda il quadro fessurativo reale della struttura, che non sembra essere correttamente predetto dalla visualizzazione delle deformazioni plastiche (o anelastiche a seconda del legame costitutivo).

I risultati delle analisi sono mostrati nelle figure Figura II-15 e Figura II-16.

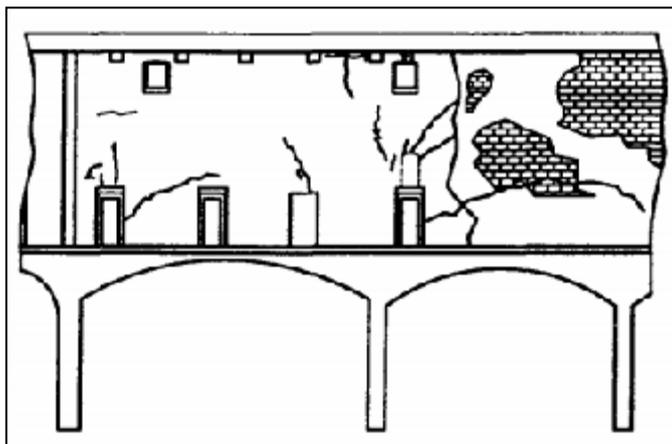


Figura II-15 – Quadro fessurativo rilevato nella parete del corridoio del monastero di San Faustino

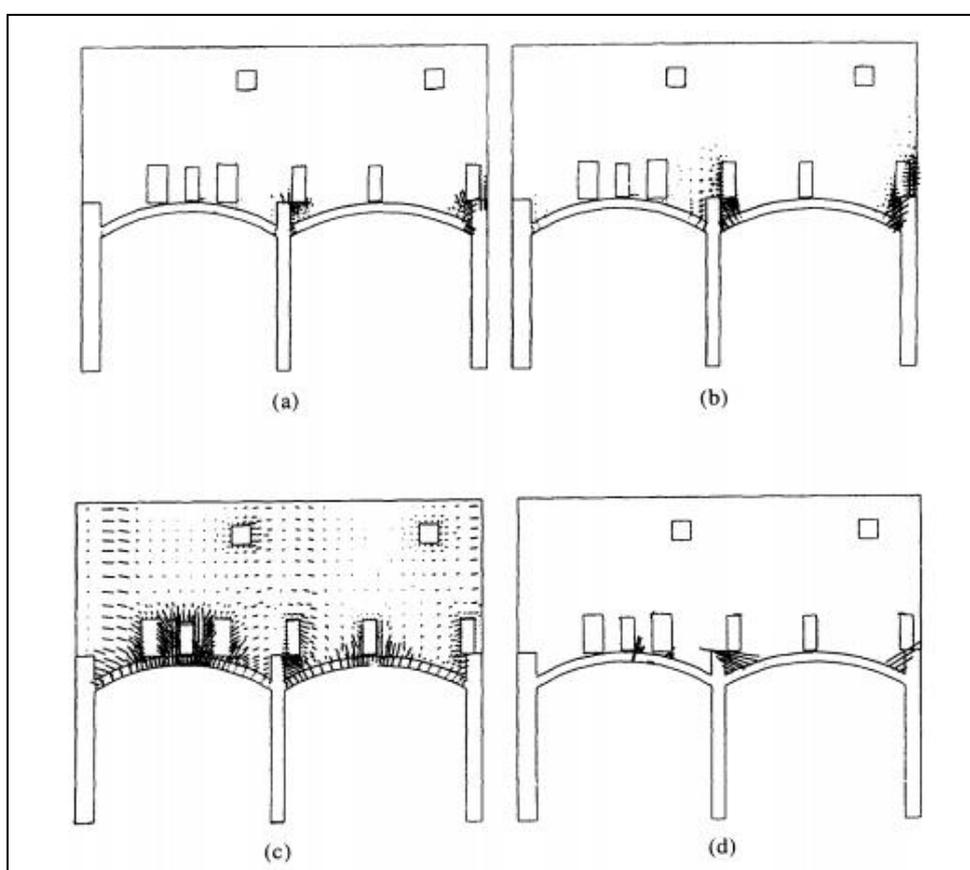


Figura II-16 – Direzione delle deformazioni plastiche principali ottenute come output dalle analisi con i legami: a) Galileo-Rankine, b) Drucker-Prager, c) Galileo Rankine modificato, d) tension cracking

Queste problematiche saranno superate dal legame masonry-like presentato nel seguito ed implementato nel codice agli elementi finiti NOSA-ITACA.

II.2.1.3.4 Il legame no-tension

Partendo dall'osservazione che materiali come le murature, così come le rocce, possono sopportare solo trazioni limitate, presentando un comportamento elastico in

compressione, numerosi studiosi hanno pensato di trascurare la scarsa resistenza a trazione della muratura nella determinazione dello stato di tensione nel continuo. Sulla base di questa ipotesi sono stati formulati diversi legami costitutivi di cui quello del cosiddetto materiale "masonry-like" è uno dei più studiati, sia per quanto riguarda gli aspetti teorici sia per le possibilità applicative.

La prima volta che la teoria dell'elasticità fu impiegata per lo studio delle murature avvenne nella seconda metà del XIX secolo, quando **Perrodil**, nel suo lavoro del 1872 (112), affrontò lo studio delle volte in muratura. Dalle esperienze condotte su un arco sottoposto a diverse condizioni di carico ed a variazioni termiche, egli constatò, infatti, l'annullarsi delle deformazioni al momento della rimozione del carico, in pieno accordo con quanto previsto dalla teoria dell'elasticità.

In Italia fu **Curioni** (113) a proporre l'utilizzo delle leggi dell'elasticità lineare nello studio delle strutture murarie; egli riteneva, infatti, di poter calcolare i valori delle componenti di tensione nel caso in cui tutte le sezioni fossero compresse o anche in presenza di zone tese, purché il valore delle trazioni fosse ammissibile per la malta impiegata nei giunti.

Nello stesso periodo **Castigliano** (114), come abbiamo visto, colse l'inadeguatezza della teoria elastica lineare per modellare il comportamento della muratura che definì "materiale imperfettamente elastico". Egli osservò, infatti, che gli elementi murari, dopo la rimozione dei carichi, non recuperano la forma originaria. In vista però del comportamento in compressione della muratura, egli ritenne di poter applicare la teoria dell'elasticità lineare limitatamente alle zone compresse, che però risultano di forma e dimensioni sconosciute a priori. Nel suo celebre studio sul famoso ponte ad arco in muratura sul fiume Dora, Castigliano risolse il problema iperstatico utilizzando il teorema che porta il suo nome e ricavò lo stato di sollecitazione con una procedura iterativa che consiste nel ridurre ad ogni passo la struttura reagente a quella effettivamente compressa.

Solo nel 1925 **Signorini** dimostrò un teorema di esistenza e unicità della soluzione in termini di tensioni per un cilindro pressoinflesso costituito da materiale elastico non lineare, assumendo l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane ed ortogonali all'asse (115) e (116). Egli suggerì inoltre un metodo di omogeneizzazione del materiale nella sezione trasversale che prevede l'alterazione delle dimensioni della zona tesa, in base al rapporto tra i moduli elastici del materiale in trazione e in compressione.

Questa teoria fu ripresa solo alla fine degli anni '70 da **Giovanni e Manfredi Romano** (117) che affrontarono lo studio di strutture monodimensionali pressoinflesse, costituite

da materiale elastico non resistente a trazione, con comportamento lineare in compressione, assumendo ancora l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane e ortogonali all'asse. La soluzione fu ricavata con tecniche variazionali, determinando il minimo dell'energia complementare con lo stesso metodo iterativo adoperato da **Castigliano**.

Nei primi anni '80 **Di Pasquale** (118) e (119) ha studiato un modello costitutivo per la muratura, considerata come materiale elastico non lineare, non resistente a trazione. Precisamente, si suppone che il tensore delle deformazioni infinitesime \mathbf{E} sia decomponibile additivamente in una parte anelastica \mathbf{E}^a , semidefinita positiva, e in una parte elastica \mathbf{E}^e ; si suppone inoltre che il tensore degli sforzi \mathbf{T} , semidefinito negativo, dipenda in modo lineare da \mathbf{E}^e e che sia ortogonale ad \mathbf{E}^a .

In particolare **Di Pasquale, Del Piero** ed altri hanno dimostrato importanti proprietà dell'equazione costitutiva e determinato condizioni per l'ammissibilità del carico. Si tratta di un materiale elastico non lineare caratterizzato da una serie di ipotesi che andiamo ad esaminare. Si premettono pertanto alcune notazioni indispensabili.

Sia \mathcal{V} lo spazio vettoriale tridimensionale e Lin lo spazio delle applicazioni lineari da \mathcal{V} in \mathcal{V} , i cui elementi sono detti tensori del second'ordine, dotato del prodotto interno definito, per \mathbf{A} e $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$, da $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B})$, con tr la traccia.

Con Sym si indica il sottospazio di Lin costituito da tensori simmetrici; un tensore simmetrico \mathbf{A} si dice semidefinito positivo se risulta $\underline{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \underline{n} \geq 0$, per ogni $\underline{n} \in \mathcal{V}$; analogamente si dice semidefinito negativo se per ogni $\underline{n} \in \mathcal{V}$ si ha $\underline{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \underline{n} \leq 0$.

E' noto che, condizione necessaria e sufficiente affinché un tensore simmetrico sia semidefinito positivo (rispettivamente negativo) è che i suoi autovalori siano tutti non negativi (risp. non positivi).

Indichiamo con Sym^+ e Sym^- i sottoinsiemi di Sym costituiti dai tensori semidefiniti positivi e negativi, rispettivamente. Per $\mathbf{A} \in Sym$, talvolta scriveremo $\mathbf{A} \leq 0$ per indicare che \mathbf{A} è un elemento di Sym^- e $\mathbf{A} \geq 0$ per indicare un elemento di Sym^+ . Due tensori simmetrici \mathbf{A} e \mathbf{B} si dicono coassiali se hanno gli stessi autovettori. E' noto che \mathbf{A} e \mathbf{B} sono coassiali se e solo se commutano, ovvero se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Siano \mathbf{T} il tensore degli sforzi di Cauchy ed \mathbf{E} il tensore delle deformazioni infinitesime, parte simmetrica del gradiente di spostamento.

- a) Il materiale non sopporta la trazione, le eventuali tensioni devono essere di compressione e quindi le tensioni principali devono essere non positive. Pertanto si richiede che sia $\mathbf{T} \leq 0$.
- b) Il tensore di deformazione \mathbf{E} può pensarsi decomposto additivamente da una quota elastica \mathbf{E}^e ed una quota anelastica \mathbf{E}^a . Poichè \mathbf{E}^a rappresenta la quota di deformazione dovuta alla presenza di fratture si richiede che sia semidefinito positivo,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^a, \quad \mathbf{E}^a \geq 0.$$

- c) Si ipotizza che sussista una relazione lineare tra il tensore degli sforzi \mathbf{T} e quello della deformazione elastica \mathbf{E}^e :

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} [\mathbf{E}^e],$$

dove \mathbf{C} , detto tensore di elasticità, è un tensore del quarto ordine definito positivo; nel caso in cui la dipendenza tra \mathbf{T} ed \mathbf{E} sia isotropa, esistono due costanti λ e μ , dette moduli di Lamè del materiale, che soddisfano la condizione

$$\mu > 0 \quad \text{e} \quad 2\mu + 3\lambda > 0,$$

tali che

$$\mathbf{T} = \mathbf{C} [\mathbf{E}^e] = 2\mu \mathbf{E}^e + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}.$$

- d) Si richiede inoltre che il lavoro necessario per la formazione di fratture sia nullo,

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^a = 0.$$

Quest'ipotesi consente di affermare che se in una direzione \underline{n} si apre una fessura, ovvero, se $\underline{n} \cdot \mathbf{E}^a \cdot \underline{n} > 0$, allora in quella direzione è nulla la componente normale dello sforzo, cioè $\underline{n} \cdot \mathbf{T} \underline{n} = 0$.

Un materiale masonry-like isotropo è quindi caratterizzato dalle seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^a \\ \mathbf{T} = 2\mu \mathbf{E}^e + \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I} \\ \mathbf{T} \leq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{E}^a \geq 0 \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^a = 0 \end{array} \right.$$

Il legame così definito risulta ben formulato nel senso che, dato comunque \mathbf{E} , esistono unici \mathbf{E}^a e \mathbf{T} che soddisfano questo sistema. Si può provare che questo materiale è iperelastico; precisamente lo sforzo è la derivata rispetto alla deformazione della funzione scalare

$\varphi(\mathbf{E})=1/2 \mathbf{T}(\mathbf{E})\cdot\mathbf{E}$; pertanto il lavoro delle forze interne è nullo in ogni ciclo chiuso di deformazione.

Inoltre \mathbf{E} , \mathbf{E}^a , \mathbf{E}^e e \mathbf{T} risultano coassiali; quest'ultima proprietà, valida solo nel caso di materiali isotropi, risulta molto utile per determinare la soluzione esplicita dell'equazione costitutiva. Le condizioni poste sui coefficienti di Lamè garantiscono che il legame tra \mathbf{T} ed \mathbf{E}^e sia invertibile; in effetti si ha:

$$\mathbf{E}^e = 1/2\mu \mathbf{T} - \lambda/2\mu(2\mu+3\lambda) (\text{tr}\mathbf{T}) \mathbf{I}.$$

Lucchesi e al. (120) hanno generalizzato l'equazione costitutiva proposta da Del Piero per tener conto del fatto che le murature reagiscono debolmente a trazione permettendo agli sforzi principali di raggiungere un valore $\sigma_t > 0$ in corrispondenza del quale si manifesta la frattura, tale valore è da ricercarsi sperimentalmente. Per semplicità il materiale così descritto verrà chiamato comunque masonry-like.

Bisogna notare tuttavia che l'applicazione di questa legge costitutiva alle murature non tiene conto del fatto che due parti di un corpo separate da una frattura non possono scambiarsi tensioni: le ipotesi assunte fanno sì che le parti continuino a trasmettersi la massima resistenza a trazione considerata.

In generale l'unicità della soluzione è garantita solo in termini di tensioni, non di spostamenti e deformazioni, vale a dire che diversi campi di spostamenti e deformazioni possono corrispondere allo stesso campo di tensioni, quindi, sotto date ipotesi, se il problema dell'equilibrio per un materiale masonry-like ammette una soluzione, questa è unica solo in termini di tensioni.

Infine la soluzione può essere determinata esplicitamente solo in casi molto semplici, perciò nelle applicazioni è necessario utilizzare tecniche numeriche.

Giusti e Giaquinta (121) hanno, dunque, considerato il problema dell'equilibrio di un solido costituito da materiale non resistente a trazione e hanno provato, nel caso piano, l'unicità della soluzione in termini di tensione.

Questi risultati sono stati estesi da **Anzellotti** (122) al caso tridimensionale.

Per quanto riguarda le deformazioni, in generale non si ha univocità perché due diverse quote di deformazione anelastica possono corrispondere allo stesso campo di tensioni.

Al termine degli anni '80 **Del Piero** (123) ha riformulato in termini di disequazioni variazionali l'equazione costitutiva proposta da Di Pasquale e ne ha dedotto alcune importanti proprietà.

Questa teoria costitutiva ha consentito sia di determinare la soluzione esplicita di alcuni problemi di equilibrio (**Di Pasquale** (124), **Bennati e Lucchesi** (125) (126), **Bennati e Padovani** (127)) sia di sviluppare metodi numerici applicati allo studio di elementi strutturali in muratura (128), (129) e (130).

Successivamente (131) l'equazione costitutiva del materiale non resistente a trazione è stata generalizzata per tener conto della limitata resistenza a compressione e questo materiale è stato chiamato elastico, non resistente a trazione e limitatamente a compressione.

Tuttavia nelle applicazioni è talvolta opportuno considerare il materiale debolmente resistente a trazione e limitatamente a compressione, oppure debolmente resistente a trazione e infinitamente a compressione. Queste possibilità, insieme a quelle descritte, sono riassunte negli schemi di Figura III-16.

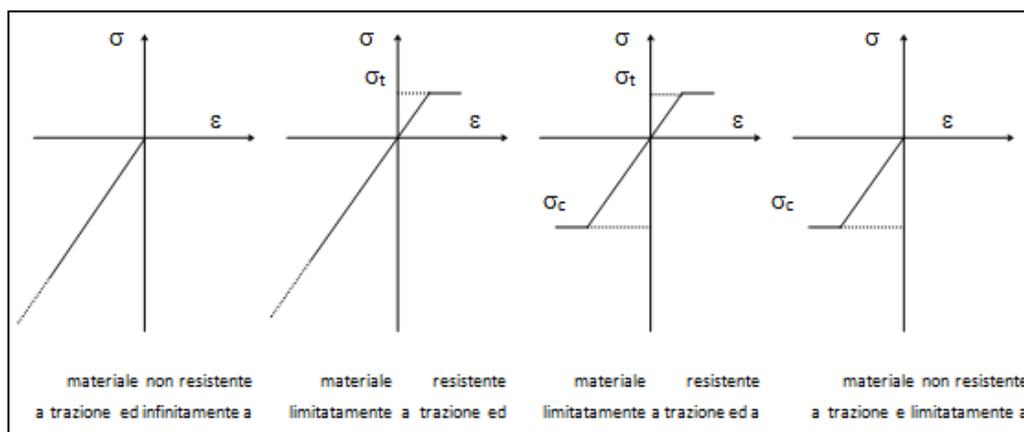


Figura II-17 - Tipi diversi di comportamento del materiale non resistente a trazione

Oltre alla possibilità di variare, quindi, le resistenze del materiale a trazione e compressione, il legame masonry-like così formulato è applicabile a qualsiasi tipo di struttura curva con qualsiasi distribuzione di carichi e ha il vantaggio di essere definibile tramite parametri del materiale noti in letteratura e forniti dalla normativa, quali le eventuali resistenze a trazione e a compressione e il modulo elastico.

Particolarmente rilevante, infine, è la capacità di tale legame di cogliere la non linearità della muratura e il meccanismo di fessurazione.

Il fatto che il lavoro necessario per la formazione delle fratture sia nullo, infatti, determina che esse si formino lungo le isostatiche di compressione, così come avviene nella realtà.

Viceversa, negli altri legami menzionati, questo non accade e non si parla nemmeno di vere e proprie fessure, ma piuttosto di zone danneggiate o plasticizzate, che si localizzano nelle aree in trazione.

Il grande vantaggio che ne deriva è la possibilità di poter validare il modello tramite chiaro riscontro con il quadro fessurativo reale della struttura.

Un esempio è fornito da **Lucchesi, Padovani, Pasquinelli e Zani** (132) nello studio della cupola della Chiesa di Santa Maria Maddalena in Morano Calabro, dove i risultati dell'analisi in termini di deformazioni di frattura, rispecchiano il quadro fessurativo attuale della volta.

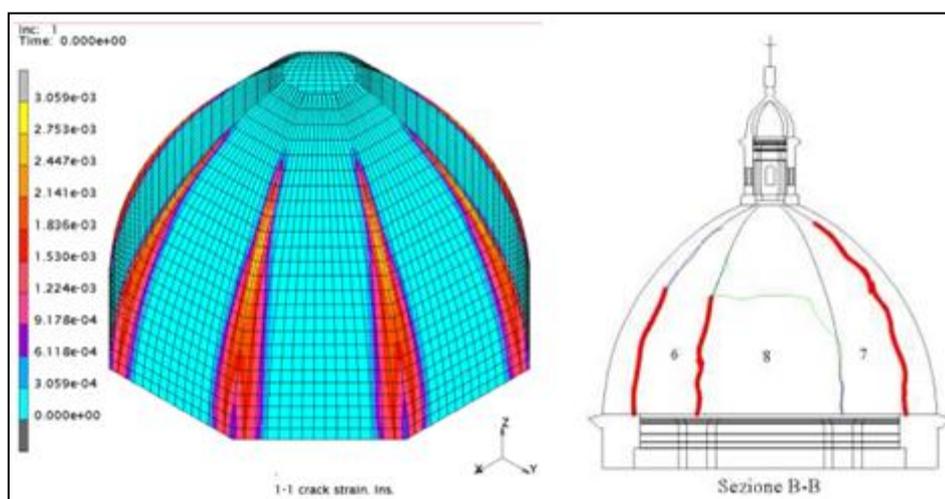


Figura II-18 - Quadro fessurativo nella cupola di S. Maria Maddalena: analisi con materiale masonry-like e rilievo

Il materiale masonry-like, appena descritto sarà maggiormente spiegato nel capitolo relativo alle analisi strutturali svolte, poiché implementato dal codice agli elementi finiti NOSA ITACA, utilizzato per le analisi sulla volta esaminata.

II.2.2 Analisi FEM elastica lineare di volte in muratura

L'analisi elastica lineare è comunemente usata nel calcolo di strutture in acciaio e in calcestruzzo. Tuttavia, la sua applicazione alle strutture in muratura è, in teoria, inadeguata, poiché non tiene conto della non resistenza a trazione e di altre caratteristiche essenziali della muratura, quali la intrinseca non linearità del suo comportamento, anche per bassi livelli di sollecitazione.

Provare ad usare questo tipo di analisi per dimensionare archi in muratura e volte porta, nella maggioranza dei casi a risultati inadeguati e conservativi, poiché essa non è in grado di stimare lo stato limite ultimo di strutture in muratura e non dovrebbe essere usato per trarre conclusioni sulla loro resistenza e sicurezza strutturale.

Nonostante ciò analisi di questo tipo sono state utilizzate, con un buon risultato, come strumento ausiliario per la diagnosi base e per considerazioni valutative di grandi strutture in muratura, dati i ridotti costi computazionali richiesti.

Alcuni esempi sono gli studi di San Marco a Venezia di **Mola e Vitaliani**(133), la Metropolitan Cathedral in Messico di **Meli e Sanchez-Ramirez**(134), e della Chiesa di Guell Colony in Barcellona di **Gonzalez et al.** (135). Un caso che ha attirato l'attenzione di molti autori è anche quello della Basilica di Santa Sofia di Istanbul, che è stata analizzata da diversi autori, quali **Mark et al.** (136),(137) e **Croci et al.** (138).

In tutti i casi menzionati, le limitazioni del metodo sono controbilanciate dalla esperienza e dalla competenza degli autori, capaci di interpretarne i risultati, non accettabili senza un'analisi critica.

Durante gli ultimi anni, le analisi non lineari stanno divenendo sempre più popolari, grazie alla diffusione di software e computer sempre più potenti. Tuttavia, l'analisi lineare è ancora utilizzata sia come indagine preliminare rispetto ad altre più sofisticate, per fornire indicazioni e linee guida per queste ultime (ad esempio dove si localizzano le tensioni e dove infittire la mesh), sia come strumento di controllo dei risultati.

Si rimanda a **Meli e Peña** (139) per una discussione esaustiva sull'argomento.

II.2.3 Analisi FEM non lineare di volte in muratura

Pochi sono gli sviluppi di analisi non lineari mirati allo studio di strutture voltate. Cupole e volte pongono notevoli difficoltà a causa del loro carattere curvo, bidimensionale e spaziale. Infatti, la maggior parte delle applicazioni per l'analisi non lineare di strutture in muratura sono orientate a problemi planari bidimensionali.

Un lavoro pionieristico si trova negli studi di **Oñate et al.** (140) delle cupole della Basilica di San Marco a Venezia. L'insieme di volte è stato modellato per mezzo di un modello continuo con danno per muratura e calcestruzzo nel caso di effetti di deterioramento meccanici e di altro tipo (chimici, fisici, biologici).

Con questa analisi, gli autori sono riusciti a determinare una caratterizzazione della condizione di sicurezza del sistema di volte.

Croci et al. (141) hanno effettuato una analisi agli elementi finiti della Cattedrale di S. Maria, a Vittoria, in Spagna. L'analisi, applicata alle principali sezioni trasversali dell'edificio ed alle volte della navata, ha seguito una strategia incrementale per tener conto delle fessurazioni per trazione o per sollecitazioni di taglio, e degli effetti del secondo ordine. Analisi simili sono state utilizzate anche per lo studio del crollo della Cattedrale di Beauvais (**Croci et al.** (142)) e gli effetti del terremoto del settembre 1997, riguardante la Basilica di Assisi (**Croci** (143)).

Barthel (144) ha elaborato modelli ad elementi finiti molto dettagliati per l'analisi di volte a crociera gotiche. I modelli sono stati utilizzati in combinazione con legami costitutivi discreti consentendo la simulazione della fessurazione della muratura e dello scorrimento ai giunti tra gli anelli dell'arco.

Cauvin e Stagnitto (145) e (146) hanno condotto studi su volte a crociera gotiche utilizzando sia l'analisi limite e l'analisi non lineare FEM. Il loro metodo è stato applicato allo studio della navata centrale della cattedrale di Reims.

Tutti questi studi si riferiscono a casi particolari ed hanno fatto uso di tecniche di analisi molto specifiche per la struttura in esame, senza minimamente cercare di generalizzare i metodi impiegati, che non hanno così avuto seguito.

Come abbiamo visto parlando dei legami costitutivi omogeneizzati per il continuo, **Lourenço** ha proposto una formulazione per lo studio della muratura spaziale e coperture curve. Esso introduce equazioni costitutive governate dalla plasticità per simulare la risposta del materiale, in combinazione con elementi di interfaccia per descrivere lo scorrimento tra i blocchi. . A nostra conoscenza, è l'unico in letteratura basato sulla tecnica di omogeneizzazione da micro-modellazione (II.2.1.2.1).

La macro-modellazione con legame di danneggiamento di **Zucchini e Lourenço** [§II.2.1.2.2], invece, è stata ampiamente utilizzata con lo scopo di analizzare strutture in muratura complesse (vedi: ponti ad arco studiati da **Pela 'et al.** (147), edifici storici da **Mallardo et al.** (148)), moschee e cattedrali (**Roca et al** (149), **Martínez et al.** (150), **Murcia-Delso et al** (151)).

Un suo svantaggio risiede nella sua descrizione del danno come una proprietà distribuita su grandi volumi della struttura. Nelle reali strutture in muratura, invece, il danno appare normalmente localizzato in grandi crepe o lesioni concentrate. Una modellazione sparsa

del danno ne fornisce una descrizione non realistica e può portare a previsioni o inesatti o difficili da associare con le osservazioni reali.

Un miglioramento interessante è stato recentemente proposto da **Clemente et al.**(152). Il metodo generico è stato modificato dall'autore con un algoritmo che simula danni più realistici, consentendo il contenimento delle fessure. Le crepe localizzate previste dal modello si comportano, in coerenza con l'analisi limite, come un insieme di cerniere che si sviluppa a poco a poco e che, infine, porta ad un meccanismo di collasso completo. Il modello è stato utilizzato per analizzare la risposta della struttura della cattedrale di **Maiorca** sotto forze di gravità e sismiche.

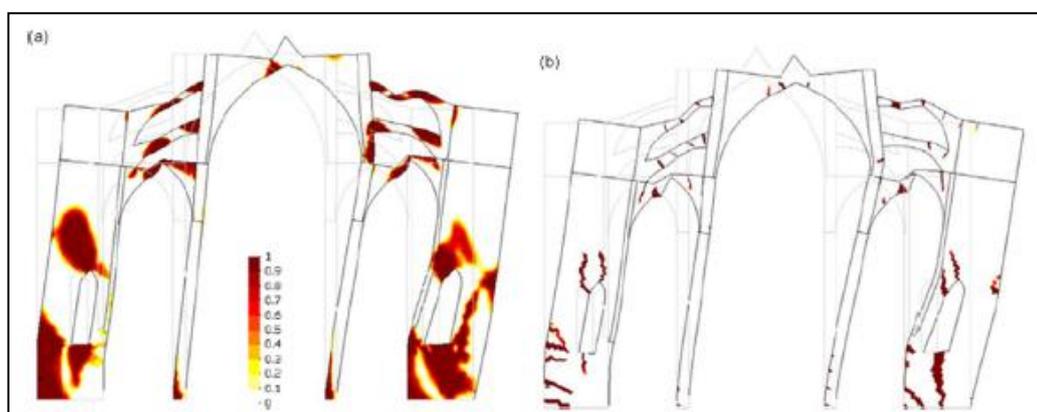


Figura II-19 - Confronto tra analisi sismica della Cattedrale di Mallorca con danneggiamento diffuso o localizzato

Recentemente (SAHC 2014) il modello di Clemente et al. è stato utilizzato da **Roca, Pelà et al.** per l'analisi strutturale del Monastero di Santa Maria di Poblet in Spagna (153).

Nonostante il quadro di danneggiamento che emerge dall'analisi sia calzante con lo stato fessurativo della struttura reale, gli studi parametrici svolti dagli autori evidenziano la forte dipendenza dei risultati dall'energia di frattura.

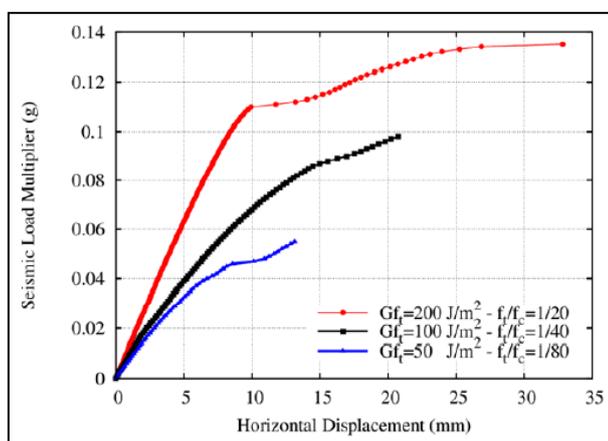


Figura II-20 - Curva di capacità ottenuta variando l'energia di frattura per il Monastero di Santa Maria di Poblet in Spagna-

Nella curva di capacità in figura si nota, infatti, come il moltiplicatore di collasso vari con l'energia di frattura G_f passando da 0,4 per $G_f = 50 \text{ J/m}^2$ a 1,4 per $G_f = 200 \text{ J/m}^2$.

Questo parametro, però, non è facilmente definibile in maniera univoca e nemmeno presente in quelli forniti dalla normativa in vigore. Per introdurlo nell'analisi si deve, quindi, fare riferimento a dati sperimentali, ricavati da campagne di indagini sulla struttura in esame o precedenti campagne svolte da altri autori su murature di natura simile.

II.2.4 Conclusioni

I legami costitutivi analizzati sono, quindi, quelli principali adottati in letteratura per lo studio di strutture in muratura. Durante i paragrafi precedenti sono stati riportati numerosi articoli che ne hanno fatto uso, con lo scopo di individuarne limiti e peculiarità che si riassumono nel seguito:

- 1) Per il continuo tramite omogeneizzazione
 - a) Legame Gambarotta - Lagomarsino: l'utilizzo di questo legame determina, rispetto a quello elastico lineare, una redistribuzione delle tensioni ammissibile rispetto alla resistenza del materiale; nessuna indicazione, però, viene fornita sul processo di fessurazione;
 - b) Legame di plasticità con softening di Lourenço: tiene conto dell'ortotropia del materiale e la fessurazione dipende dall'energia di frattura del materiale nelle due direzioni principali, parametri di difficile determinazione univoca;
 - c) Legame con danneggiamento di Zucchini e Lourenço: si ritorna ad un continuo isotropo con dipendenza della funzione di danneggiamento da un solo parametro dell'energia di frattura;
- 2) Per il continuo tramite macro-modellazione
 - a) Legame Drucker-Prager: rappresenta correttamente il comportamento del materiale fino al formarsi della prima frattura; successivamente, il materiale tende inoltre a trasferire sforzi di trazione superiori a quelli ammissibili. Le zone plasticizzate, infatti, sede delle massime tensioni tangenziali, non riproducono efficacemente il danneggiamento della muratura, che avviene principalmente con formazione di fratture sulle isostatiche di compressione.

- b) Legame Willam-Warnke: a differenza del precedente mostra di saper cogliere correttamente il carico di collasso ed il quadro fessurativo; esso non è, comunque, stato formulato per la muratura, così come quello di Drucker-Prager e considera la dilatanza del materiale per poter garantire l'ortogonalità tra il vettore delle deformazioni plastiche e la superficie di snervamento. Questo determinerebbe la presenza di un flusso non associato, con le relative complicazioni nella risoluzione dei problemi al contorno.
- c) Legame masonry-like: determina una corretta valutazione non solo della distribuzione delle sollecitazioni, ma anche del quadro fessurativo; per l'identificazione di questo legame bastano, inoltre, pochi parametri noti in letteratura e in normativa, quali la resistenza a trazione e a compressione della muratura e il modulo elastico; esso è, infine, molto versatile e modificabile per meglio approssimare il comportamento del materiale reale, con i quattro possibili casi risultanti già spiegati a seconda dei valori di resistenza forniti.

Questi legami sono anche implementati in dei software di analisi agli elementi finiti e non sono gli unici. Esistono, infatti, un buon numero di programmi commerciali FE utilizzati nella letteratura tecnica per la modellazione di strutture in muratura, con i più svariati legami costitutivi; ad esempio: **Carini e Genna** (154) e **Bagicalupo et al.**(155) hanno utilizzato ANSYS con modelli di materiale elasto-plastico (o Drucker-Prager o Willam-Wranke con bassa resistenza a trazione); **D'Ayala e Tomasoni** (156) usano Algor V21 con elementi di contatto; altri programmi come **Abaqus, Midas** (CSP-FEA) con il cosiddetto modello concreto, **ADINA**, etc. .

Nonostante i casi menzionati analizzino strutture curve o voltate, i software menzionati fino ad ora non sono stati sviluppati per lo studio di strutture curve in muratura, studio che abbiamo visto rappresentare, invece, un filone molto specifico e particolare di analisi.

A nostra conoscenza, soltanto due programmi contengono software specifici sviluppati per lo studio di strutture curve in muratura.

Il primo è il **DIANA TNO**, un software commerciale sviluppato dalla A TNO Company. In esso è stato recentemente sviluppato un pacchetto relativo allo studio di edifici storici in muratura, tra cui archi e strutture voltate.

Il software fornisce la possibilità di modellare la muratura al meso-livello, cioè a livello della cella elementare, con micro modellazione, o al macro-livello. Nel meso-livello i giunti possono essere modellati con un comportamento attritivo alla Coulomb, un

comportamento a fessurazione discreta con o senza dilatanza, un modello con effetti combinati di fessurazione, schiacciamento e scorrimento, oppure tramite subroutines introdotte dall'utente. I blocchi, invece, sono considerati come elastici o viscoelastici.

Al macro-livello il continuo può essere modellato attraverso:

- Il legame anisotropo di plasticità con softening di Lourenço;
- Il legame Drucker-Prager modificato combinato con ritiro e viscoelasticità;
- Un legame costitutivo a danneggiamento diffuso, quella quello di Zucchini e Lourenço presentato precedentemente.

Questo programma rappresenta, quindi, uno strumento molto versatile e potente per lo studio di strutture in muratura, data la possibilità di adottare diversi tipi di modellazione del materiale. Tuttavia, per quanto riguarda la meso-modellazione, sappiamo che la sua applicazione a strutture di grandi dimensioni determina un costo computazionale e un tempo di analisi eccessivamente lungo, per quanto riguarda la macro-modellazione, invece, il software si porterà dietro i limiti legati alle leggi costitutive utilizzate e già ampiamente discussi in questo capitolo.

Il secondo è il **NOSA-ITACA**, sviluppato dal **Laboratorio di Meccanica dei Materiali e delle Strutture** di ISTI-CNR, in collaborazione con il **Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale** dell'Università degli Studi di Firenze.

Il codice **NOSA-ITACA** integra il codice agli elementi finiti **NOSA** con il codice grafico interattivo *open source* **SALOME**. Il codice consente la valutazione della sicurezza statica e della vulnerabilità sismica di edifici storici e la verifica di progetti di consolidamento.

Nel codice **NOSA** è implementato il legame costitutivo masonry-like che, come abbiamo già spiegato, descrive la muratura come un materiale elastico non lineare non o limitatamente resistente a trazione, con infinita o limitata resistenza a compressione.

Negli studi fatti fino ad oggi ha consentito ai ricercatori del Laboratorio di studiare il comportamento meccanico di edifici storici, valutandone lo stato tensionale ed il quadro fessurativo, nonché l'efficacia di interventi di consolidamento. Il codice **NOSA** è stato applicato, inoltre, su incarico di vari enti pubblici, allo studio di importanti costruzioni storiche, ad alcune costruzioni di interesse storico e architettonico, tra cui la ciminiera dei Vecchi Macelli (157), l'Arsenale Mediceo (158),(159) e la chiesa di San Pietro in Vinculis (160) a Pisa, la chiesa madre di San Nicolò Motherhouse a Noto (161), il teatro Goldoni di

Livorno (162), il battistero della cattedrale di Volterra, il campanile di Buti (163), la chiesa di Santa Maria Maddalena a Morano Calabro (159), la chiesa di San Ponziano a Lucca [30], la chiesa di Santa Maria della Roccella a Roccelletta di Borgia (164) e la torre Rognosa di San Gimignano (165), (166).

Oltre a consentire accurate analisi incrementali con modello continuo validato dalle numerose applicazioni già svolte, il software prevede anche la possibilità di utilizzare uno strumento grafico di controllo sulle orme dell'analisi limite e della Thrust Network analysis: la superficie delle eccentricità di massimo modulo. Essa è stata già presentata esaurientemente nel paragrafo II.1.2 ed in pratica costituisce quel passo verso lo sviluppo tridimensionale della curva delle pressioni che abbiamo visto essere assente nella pura analisi limite e nella sua estensione grafica (TNA).

Il software NOSA-ITACA ingloba, perciò, i più recenti sviluppi teorici nell'analisi incrementale e limite di volte in muratura, configurandosi come lo strumento per la loro applicabilità pratica.

A conclusione dello stato dell'arte relativo all'analisi di volte in muratura, effettuato in questo capitolo, possiamo, quindi, affermare che il software contiene quelli che sono, ad oggi, i migliori strumenti per la modellazione, il controllo e il consolidamento del patrimonio storico murario.

CAPITOLO III

Il caso della volta di Palazzo Franchetti:

Inquadramento storico

Per la valutazione del grado di sicurezza attuale di una struttura e la progettazione di interventi di consolidamento efficaci, deve esserci una base solida da cui partire: un *modello affidabile* con il quale poter effettuare le varie verifiche che il caso richiede.

Si capisce, quindi, come sia fondamentale avere una *previsione attendibile* di quelle che sono le resistenze della struttura, da confrontare poi, nel corso della verifica, con le azioni sollecitanti: questa previsione è tanto più attendibile, quanto più il modello ricalca la struttura reale nei materiali, nella geometria e nel comportamento.

È quindi importante comprendere come gli originari costruttori concepissero le loro opere, al fine di riuscire meglio a capirne la forma e il comportamento strutturale e, in questo modo, creare un modello ad hoc. In questa ottica di comprendere la concezione originaria della volta, risulta necessario ripercorrere brevemente la storia costruttiva di Palazzo Franchetti, di cui essa è parte, e la sua evoluzione nel corso di secoli, al fine anche di comprendere scelte progettuali che altrimenti, come vedremo nel seguito, risulterebbero ingiustificate.

La sede del consorzio di Fiumi e Fossi si trova nel quartiere San Martino (Figura III-1) ed è inquadrato a Sud da via San Martino (Figura III-2), a Nord dal Lungarno Galilei (Figura III-3), a Est dalla Prioria di San Sepolcro e a Ovest dal Vicolo del Torti.



Figura III-1 - Posizione della sede di Fiumi e Fossi, da Google Earth.



Figura III-2 - facciata del palazzo lato Via San Martino.



Figura III-3 - facciata del palazzo lato Lungarni.

Il palazzo vanta un'illustre storia che è giunta a maturazione nella forma attuale dopo una serie di trasformazioni che hanno avuto luogo nel corso dei secoli. Nello status attuale presenta una conformazione particolare ed a dir poco labirintica, con una disposizione interna dei vani caratterizzata da disomogeneità consistenti sia in pianta che in altezza. Le ragioni di queste peculiarità, che influenzano ovviamente il comportamento e la risposta strutturale dell'edificio, sono da ricercare nella storia del palazzo, frutto di una serie di trasformazioni che hanno avuto luogo nel corso dei secoli.

Per queste ragioni risulta indispensabile ripercorrere brevemente le vicende che lo hanno interessato.

III.1 Palazzo Franchetti: le origini come *case-torri*

Anticamente nota come *Chinzica*, la zona in cui si inserisce il palazzo (Figura III-4) entra definitivamente a far parte dell'aggregato urbano a seguito della costruzione delle mura (1154-1161).

La storia di Pisa tra i sec. XI e XIV fu così intensa e carica di acquisizioni economiche, sociali e artistiche, da averle fatto assumere un ruolo da protagonista quasi assoluta nel Mediterraneo centro-orientale.

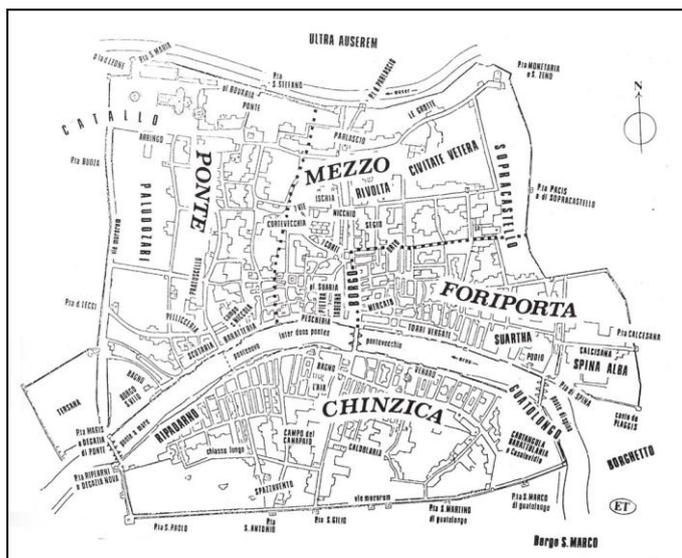


Figura III-4 - Pianta di Pisa medievale, da Tolaini - "Forma Pisarum".

Grazie, infatti, allo sviluppo dei fiorenti commerci d'oltremare, ai quali tanto spesso si collegava la partecipazione alle famose "attività" crociate, la città accumulò rapidamente enormi capitali, che le famiglie gentilizie pisane destinarono alla costruzione di abitazioni che ostentassero la loro potenza e supremazia: i meravigliosi "grattacieli" che furono le case-torri pisane.



Figura III-5 - *Borghese di Piero, "San Nicola difende Pisa dalla peste" (partic.), 1428, chiesa di San Nicola di Pisa.*

In una città in continua espansione, le torri sorgono una accanto all'altra e fanno a gara ad emergere per predominio, difesa e offesa (Figura III-5). Dai prospetti, infatti, sporgono

ballatoi lignei che, durante i conflitti, sono anche impiegati per lanciare oggetti e pietre contro vicini o passanti.

Esse furono dettate anche da motivi pratici ed economici: la necessità di continuare a costruire all'interno delle mura cittadine per ragioni difensive e l'impossibilità di reperire terreni ancora liberi, provocò uno sviluppo della città in verticale, proprio come avviene nelle metropoli moderne; inoltre, come già detto, la ricchezza delle nobili famiglie pisane si basava sul commercio e le case-torri, pur offrendo garanzie dal punto di vista difensivo, offrivano ambienti più ampi, che consentivano, ad esempio, di immagazzinare le merci e di aprire una bottega a livello della strada.

Nella casa-torre le stanze erano una sopra l'altra e comunicavano tra loro per mezzo di una scala a pioli in legno, infissa nella parete. Erano buie perché le finestre inizialmente erano piccole feritoie chiuse da sporti di legno, per rientrare c'erano due aperture: una più grande da cui passavano le merci, ed una più piccola da cui entravano le persone (il Passetto). La Cucina era in alto per permettere al fumo di uscire liberamente all'esterno.

In generale, la tipologia costruttiva fino agli inizi del XII secolo è, quindi, quella della torre in pietra, alta cinque o sei piani di circa 3,5 m ciascuno, con una pianta generalmente ristretta (Figura III-6).

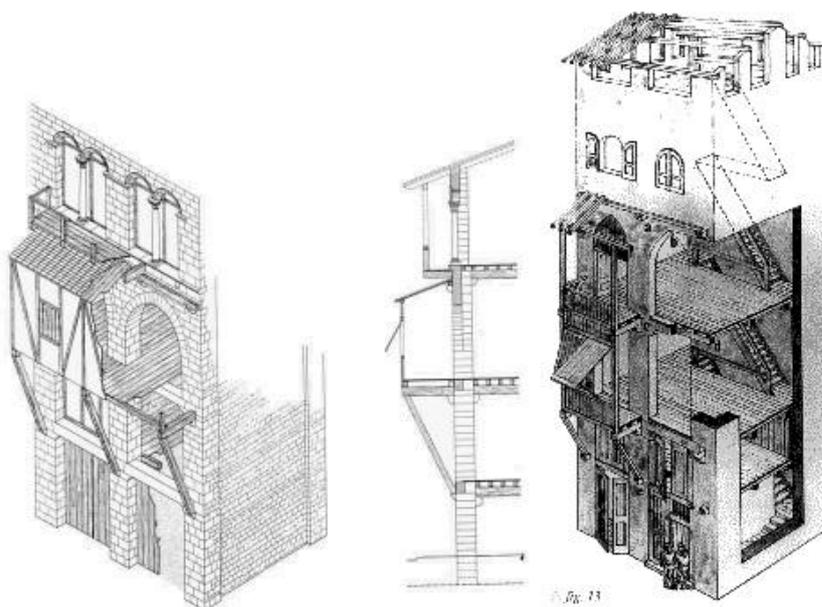


Figura III-6 - Schemi illustrativi delle case-torri.

Nel tempo le Case Torri subiscono dei cambiamenti: nel 1100 divennero più spaziose, merlate con balconi in legno all'esterno, le finestre divennero più grandi ed a arco tondo. Ma, come già accennato, i pisani erano piuttosto litigiosi e si facevano guerra anche per

avere la casa più alta, così il vescovo Daiberto diede l'ordine di non costruire oltre una certa altezza, stabilita nella torre di una importante famiglia pisana e di far scomparire le bertesche, cioè armi di offesa in legno che dall'alto della torre costituivano una minaccia per la pace cittadina. Fra il 1200 e il 1300 le Case Torri subiscono nuove lavorazioni: nel 1200 cominciano ad apparire veri e propri palazzi, le case si estendono in larghezza con strutture in aggetto in legno e paglia che, però, riducendo gli spazi tra le varie proprietà, facilitano la propagazione di incendi. Inoltre, tali strutture risultano spesso troppo basse, sono da ostacolo ai passanti e se non bene ammassate agli elementi in pietra della torre, rischiano di crollare. Per questi motivi, dopo una serie di Statuti Comunali, agli inizi del Trecento se ne sancisce la dismessa.²¹

Agli inizi del 1300 furono messi alle finestre i primi vetri che rendevano più luminosi gli spazi interni. Così, dal 1300 in poi, le Case Torri si estendono sempre più in larghezza: vengono buttate giù le pareti esterne in modo da unire due o più Case Torri, si costruiscono pilastri di sostegno e loggiati. Alcune Case Torri che sono divise da un vicolo, ma una di fianco all'altra vengono unite da un cavalcavia.

Nel 1509 Pisa venne sottomessa dalla potenza di Firenze e con il dominio dei Medici le case-torri vennero intonacate perché Pisa cambiasse il suo volto. Con l'ordine dei Medici furono abbassate ed il materiale ricavato servì ad unirle e colmare i vuoti che erano tra una torre e l'altra e così si formarono i Palazzi sui Lungarni che vediamo oggi.

Ed è questo ciò che avvenne anche ai tre palazzi cinquecenteschi, prima case-torri: quelli dei Lanfranchi, dei Del Torto e dei Mannaioni, che andarono ad essere unificati formando l'attuale sede di Fiumi e Fossi.

In particolare, nella creazione della forma attuale di palazzo Franchetti, possiamo individuare tre successive fasi storiche: quella medievale, quella tardo rinascimentale e quella ottocentesca. In fase medievale quest'ultimo era suddiviso in cinque *domus*, o case-torri, tra le quali, come è possibile vedere nella Figura III-7, si trovava anche un vicolo, il Vicolo Mozzo. Seguendo il processo storico appena descritto, le *domus* vennero ingrandite ed unificate fino a formare, in età tardo rinascimentale, i tre palazzi appena menzionati (Figura III-8).

²¹ F. Redi, Dalla torre al palazzo: forme abitative signorili e organizzazione dello spazio urbano a Pisa dall'XI al XV secolo, in Atti del III Convegno di studi sulla storia dei ceti dirigenti in Toscana – Firenze, 5-7 dicembre 1980, Monterolo Impruneta, F. Papafava editore, 1983, pp.271-274.

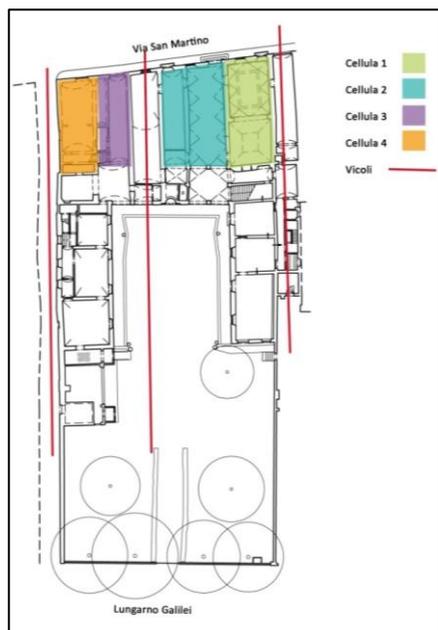


Figura III-7 - Medioevo, ipotesi della suddivisione in cellule abitative su pianta attuale.

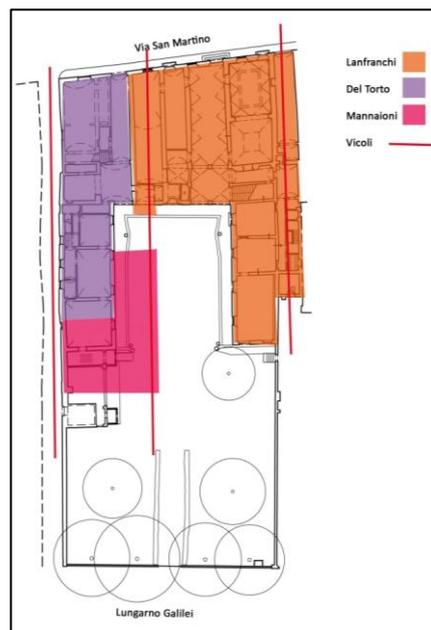


Figura III-8 - Tardo rinascimento (1580 ca.), suddivisione delle proprietà su pianta attuale.

Questa tesi, oltre ad avere riscontri nella letteratura storica e archivistica, ha trovato anche riscontri pratici nel rilievo termografico effettuato sulla sede di Fiumi e Fossi dalla ditta Studio Thermo Tech nel 2012. In esso, infatti, è emersa la struttura delle case-torri originarie inglobata in quella attuale.

Ad esempio, nel rilievo effettuato su Via San Martino con modalità infrarosso si notano significativi elementi architettonici sotto intonaco in varie zone della facciata (Figura III-9).

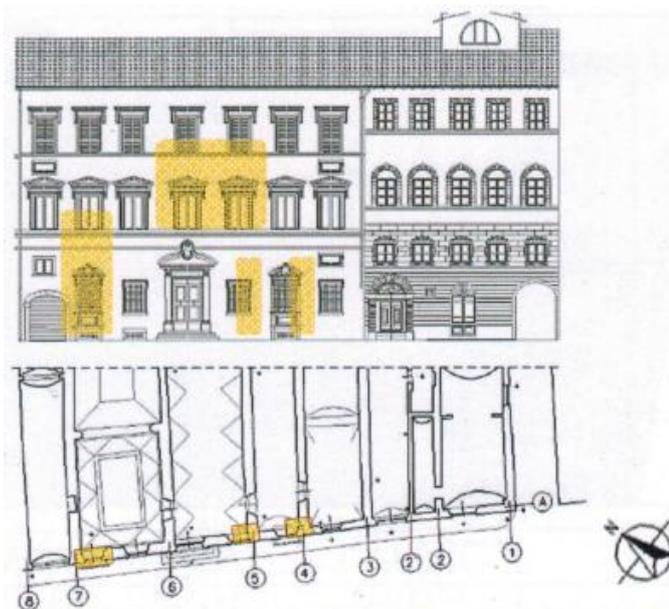


Figura III-9 - Riferimento rilievo: prospetto e pianta piano terra.

Ad esempio, in corrispondenza della quarta e quinta finestra da destra al livello del primo piano, si rilevano due archi a tutto sesto impostati su tre massicci pilastri (Figura III-10).

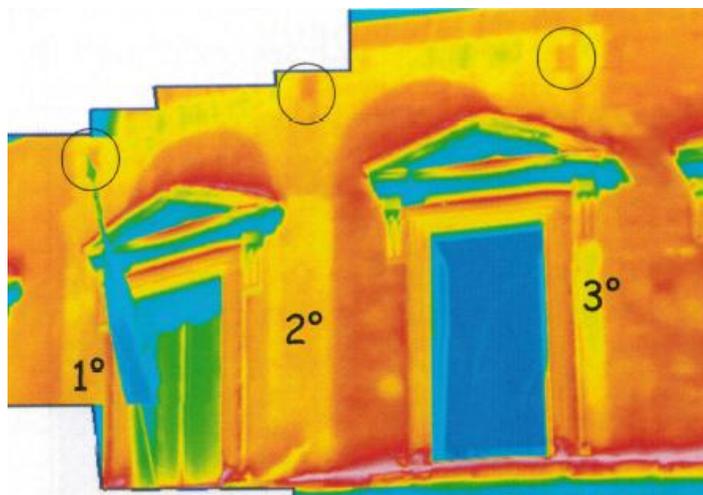


Figura III-10 - Rilievo termografico della facciata in Via San Martino, piano I: rappresentazione in falsi colori.

Compaiono in maniera evidente anche tre particolari, cerchiati nella soprastante figura, aventi forma rettangolare e caratterizzati da valori maggiori di temperatura: ciò fa presumere si tratti di legno o aria.

La stessa struttura caratterizza anche la facciata del palazzo di fronte, che si affaccia sempre su via San Martino, con piedritti e mensoloni in pietra e i tre monconi delle travi in legno, riquadrati in Figura III-11. Questi ultimi sono la conferma dell'antica presenza degli ampliamenti con strutture in aggetto in legno e paglia già menzionati.



Figura III-11 - Facciata del palazzo di fronte a Palazzo Franchetti in Via San Martino.

Continuando il rilievo a piano terra, si nota come il secondo piedritto continui anche a questo piano. In particolare, grazie all'induzione di un debole stimolo termico mediante termoconvettore, è stato possibile far emergere internamente, in corrispondenza del

fianco sinistro del portone d'ingresso (Figura III-12), il particolare in Figura III-13, caratterizzato di nuovo da minori valori di temperatura.

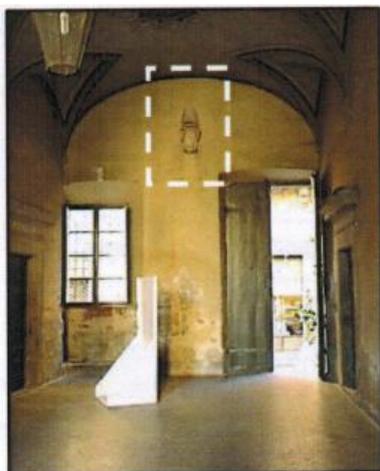


Figura III-12 - Posizione del rilievo del secondo piedritto effettuato a piano terra.

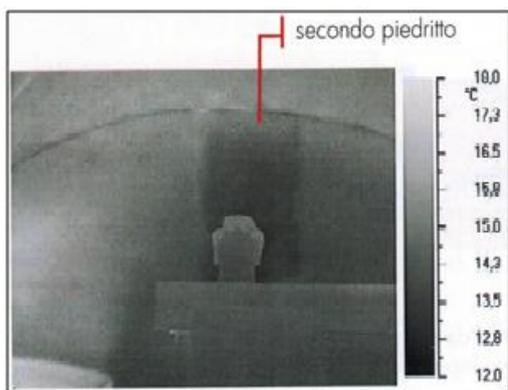


Figura III-13 - Rilievo termografico del secondo piedritto a piano terra dall'interno dell'edificio.

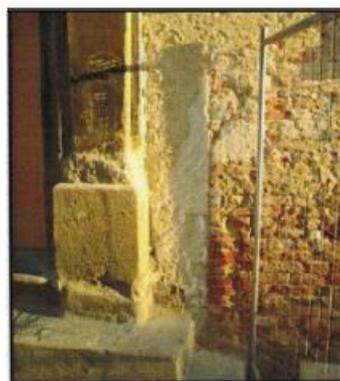


Figura III-14 - Stonacatura della facciata esterna, particolare del secondo piedritto.

Procedendo, inoltre, ad una ulteriore verifica tramite parziale stonacatura della facciata, è stata confermata la tesi che fosse un piedritto lapideo, continuo del secondo pilastro al primo piano (Figura III-14).

Analogamente è stato riscontrato il proseguimento del terzo piedritto in pietra, immediatamente a destra del portone di ingresso al Consorzio (Figure Figura III-15, Figura III-16 e Figura III-17).

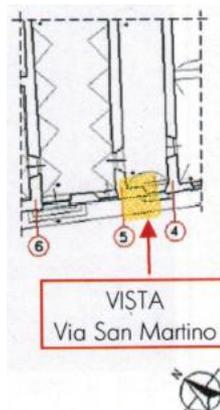


Figura III-15 - Posizione del rilievo del terzo piedritto effettuato a piano terra.

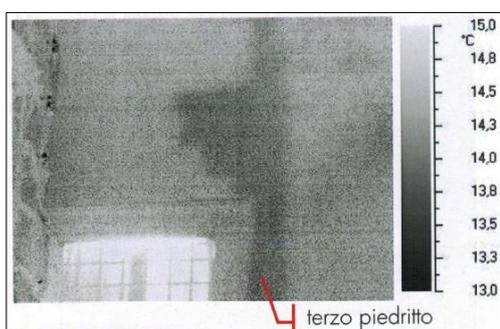


Figura III-16 - Rilievo termografico del terzo piedritto a piano terra dall'esterno dell'edificio.

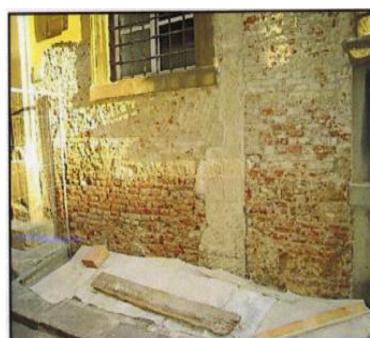


Figura III-17 - Stonatura della facciata esterna, particolare del terzo piedritto.

Proseguendo sono stati riscontrati a piano terra altri tre piedritti: il quarto, quinto e sesto riscontrati in facciata (figure Figura III-18Figura III-19).

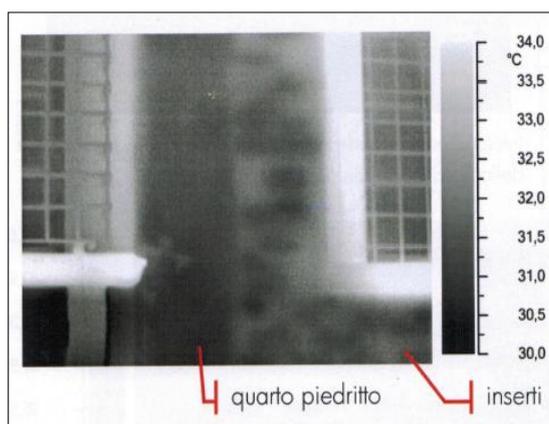


Figura III-18 - Rilievo termografico del quarto piedritto a piano terra dall'esterno dell'edificio.



Figura III-19 - Rilievo termografico del quarto piedritto a piano terra dall'esterno dell'edificio.

Osservando, infine, il riepilogo delle anomalie riscontrate in facciata in un'unica immagine (Figura III-20), si individuano facilmente gli scheletri lapidei delle antiche case-torri in cui il palazzo era suddiviso.

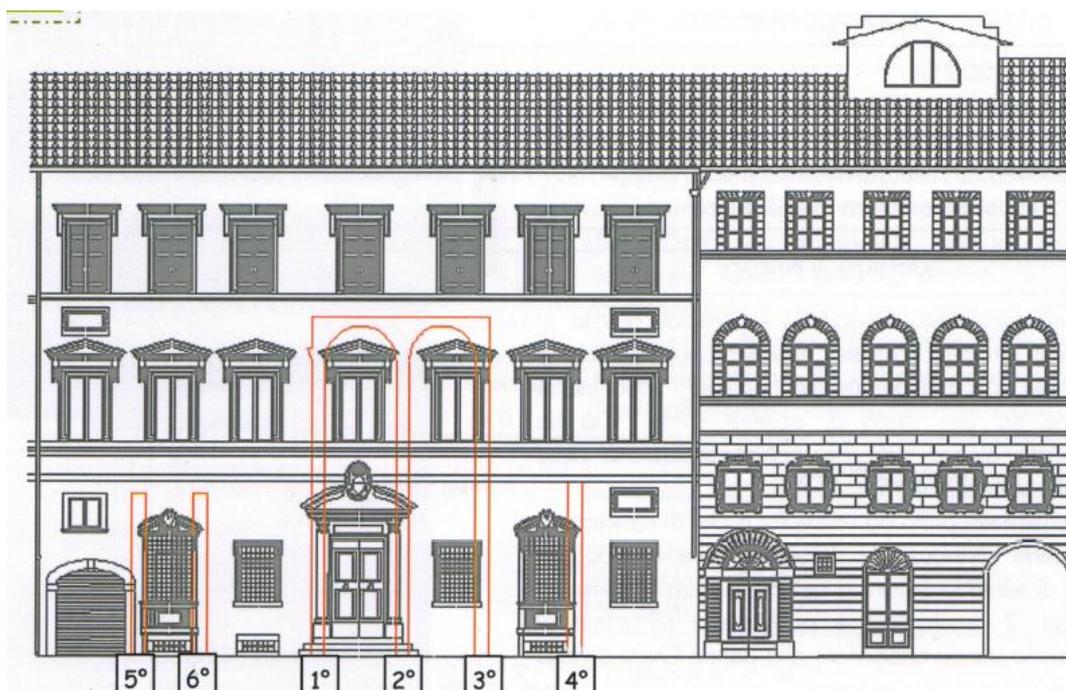


Figura III-20 – Schema riepilogativo del report termografico della facciata in Via San Martino

Successivamente i Lanfranchi andarono ad inglobare nel proprio palazzo anche il Vicolo Mozzo (Figura III-8) e ampliarono il lato nord con un loggiato, avviando la planimetria del piano terra verso la sua configurazione cinquecentesca.

Dalla pianta riportata in Figura III-21, infatti, oltre alla presenza del loggiato, si nota un vestibolo con volta a botte lunettata che occupa l'intera profondità della fabbrica e va a terminare nella loggia. Accanto al vestibolo, sulla sinistra, c'è un ampio salotto con volta "a specchio" lunettata e affrescata. È la *Sala delle Ninfe*, che confina con la rimessa per le carrozze. Alla destra del vestibolo centrale, invece, si ritrovano ambienti di servizio quali cucina, dispensa, e pile per l'acqua. L'ala posteriore, con affaccio sul cortile, è utilizzata come rimessa e stalla, mentre al primo piano è riservata alla servitù. Anche i mezzanini sono ad uso di servizi e dei domestici²².

²² E. Karwacka Codini (a cura di), *Architettura a Pisa nel primo periodo mediceo*, cit., pag. 181.

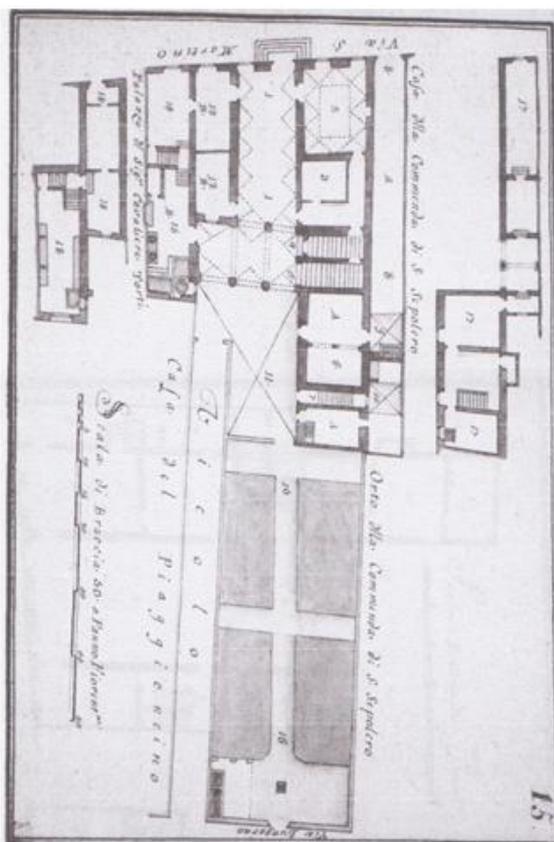


Figura III-21 - Archivio Nazionale Praga, Archivio familiare Asburgo Lorena, Racc. mappe, ins.717, pianta n°15 Piano terra palazzo Lanfranchi, da "Architettura a Pisa nel primo periodo mediceo", p.182 di E. Karwacka.

Nella Figura III-22 si può notare come la struttura ad archi del piano terra sia ripresa anche nel primo piano, la differenza sta nei capitelli che al piano inferiore sono tuscanici mentre qui si ritrovano capitelli ionici al di sopra dell'ordine tuscanico, che danno maggiore slancio alle volte. Dalla pianta, inoltre, si nota come gli ambienti dell'abitazione nobile gravitano intorno al grande salone centrale, a doppia altezza e con volta a padiglione lunettata affrescata.

Al secondo piano (Figura III-22) risiedono gli ambienti di servizio e un terrazzo, individuato in pianta col n. 9, corrispondente alle logge sottostanti. L'impianto attuale conserva quasi del tutto la morfologia cinquecentesca.

Le modifiche effettuate sul palazzo riguardano, oltre che gli ambienti interni, anche le facciate. L'obiettivo delle famiglie pisane, in questo periodo, è quello di affermare la propria immagine arricchendo l'edificio di elementi architettonici. L'abitazione diventa di rappresentanza, andando a completare il processo di rivalsa già iniziato nel corso del Trecento e che culminerà nel progetto ottocentesco di palazzo Franchetti, firmato Alessandro Gherardesca.

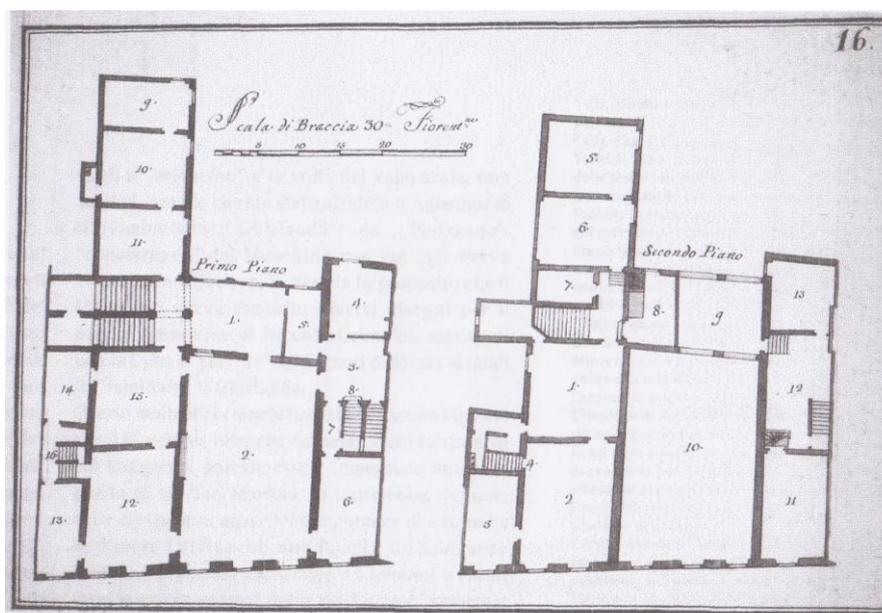


Figura III-22 - Archivio Nazionale Praga, Archivio familiare Asburgo Lorena, Racc. mappe, ins.717, pianta n°15 Piano primo e secondo palazzo Lanfranchi, da *"Architettura a Pisa nel primo periodo mediceo"*, p.182 di E. Karwacka.

III.2 L'unificazione degli edifici

Dopo aver analizzato la fase medievale, con l'evoluzione delle case-torri e quella tardo rinascimentale, con palazzi in continua espansione, siamo arrivati agli inizi dell'età ottocentesca, e il lotto nel quale sarebbe sorto il palazzo Franchetti risulta suddiviso in tre distinte proprietà: i Consoli del Mare, i del Torto e Antonio Mannaioni.

III.2.1 Palazzo del Torto

I del Torto, originari di Lari, erano dei pellicciai che avevano assunto straordinario rilievo nel XV secolo grazie ai profitti ricavati dalle attività mercantili.

Nel XVI secolo il patriziato pisano, sempre attento a manifestare la propria ricchezza, potenza e cultura, dava una nuova forma più preziosa alle proprie abitazioni²³, che, a differenza di quelle precedenti, risultato di aggregazioni poco uniformi, si caratterizzavano per un modello omogeneo che veniva sempre seguito. Era necessario anche tener presente il forte vincolo costituito dalle preesistenti strutture medievali, e la scarsa disponibilità di risorse dei committenti pisani. Ecco perché gli interventi erano parziali e

²³ M.T. Lazzaroni - R. Lorenzi, *Il palazzo signorile a Pisa tra '500 e '600*, in *Pisa e Livorno: due città nella politica dei Medici*, Pisa 1980, pp. 260-275.

per lo più “volti all’abbellimento”; ed è proprio su questo elemento che l’ultima erede dei del Torto rivolse la propria attenzione.

Nelle note delle spese, risalenti al 25 marzo 1595, la vedova annotava di aver terminato la facciata del suo palazzo su via San Martino e di aver fatto realizzare a uno scalpellino cinque finestre al terzo piano, tre al centro, quattro mezzanini e altre quattro finestre al primo piano²⁴.

Nella descrizione si ritrovano quelle che sono le attuali aperture del terzo piano, conservatesi nel numero, nella forma e nella cornice di rifinitura in pietra serena. La pietra serena era l’elemento caratterizzante dell’architettura pisana nel XVI secolo che, non ancora sensibile alla moda delle facciate decorate a graffito, si distingueva per la raffinata sobrietà del rapporto tra i pochi elementi decorativi in pietra o in marmo e l’uniformità dell’intonaco. L’assenza, sulla facciata, di una perfetta simmetria, speculare rispetto all’asse verticale centrale, confermava la presenza di vincoli di strutture preesistenti.

Il palazzo rimase di proprietà della famiglia del Torto fino al 1818, a tale data risultava composto da «tre piani con mezzanini, un terrazzo sopra al tetto, la stalla, la rimessa e il chiostro con fonte, pozzo e pila». Un braccio di fabbrica univa, all’altezza del primo piano, il palazzo del Torto con quello della famiglia dal Borgo, separati dal vicolo del Torti con una volta a botte, che sosteneva la struttura. A causa di gravi problemi economici e ingenti ipoteche l’ultima erede del Torto, Anna del Torto del Mosca, alienava il palazzo alla famiglia Della Fanteria²⁵.

III.2.2 Palazzo Lanfranchi

Il palazzo di Curtio Lanfranchi, situato tra via San Martino e Lungarno, testimoniava in pieno la volontà del proprietario di trasformare la sua antica residenza, frutto probabilmente dell’unione di due case-torri, in una dimora di rappresentanza. Un edificio a tre piani fuori terra, con due mezzanini, e un seminterrato, costituito da una serie di ambienti coperti con volte a mattoni. C’era un equilibrio perfetto tra i pieni e i vuoti, con sette aperture che si ripetevano in tutti e tre i piani, e le ornamentazioni di nuovo in pietra serena fiorentina, che scandivano i contorni delle aperture in modo da alleggerirne i profili fino alla sommità dell’edificio. Il tutto era coronato dallo stemma dei Lanfranchi al di sopra

²⁴ ASPi, *Archivi privati, Del Torto, fas. 1, ins. 3*. Memorie riguardanti la casa di Via San Martino.

²⁵ ASPi, *Catasto Leopoldino*, n. 508.

della porta e dalle due anfore sul timpano spezzato delle finestre inginocchiate (Figura III-23, Figura III-24, Figura III-25).



Figura III-23 - Finestra inginocchiata e ingresso di Palazzo Lanfranchi.



Figura III-24 - anfora sul timpano della finestra, particolare di facciata.



Figura III-25 - Stemma dei Lanfranchi su portale d'ingresso, particolare di facciata.

Nella corsa al prestigio e all'adeguamento con il fasto fiorentino la famiglia Lanfranchi commissionò, inoltre, ad Agostino Ghirlanda le decorazioni interne della volta della sala al pian terreno e di quella al piano nobile, raffiguranti rispettivamente il *Bagno delle Ninfe* e *l'Olimpo con gli Dei*.

A ulteriore prova che la corsa all'abbellimento degli edifici fosse pura ostentazione di fasto e non amore per l'arte ed il bello, vi è il fatto che Curtio Lanfranchi non risiedeva nel proprio palazzo, non godeva della quotidiana visione delle sue bellezze artistiche: egli ne deteneva solo la proprietà ed imponeva il pagamento di un affitto ai residenti della sua dimora.

Nel XVII secolo il palazzo veniva alienato più volte e addirittura contemporaneamente fino agli inizi del XVIII secolo, quando il palazzo divenne sede della magistratura dei Consoli del Mare. In una descrizione dell'epoca risultava costituito da «due piani con mezzanini intermedi, cortile, orto, fonte, pozzo, pila, stalla e rimessa, e duplice ingresso da via San Martino e da Lungarno», confinante a levante con vicolo Mozzo detto dei Consoli e con il palazzo di Battista e Antonio del Torto.

III.2.3 Palazzo *Mannaioni*

Antonio Mannaioni Inghirlani, nel 1783 possedeva due case in cura di San Martino in Kinzica, confinanti con il Lungarno e con il vicolo del Torti. Una era a due piani, con pozzo e pila, e rimaneva sul retro di un piaggione. L'intera proprietà, piaggione e casa, confinava a nord con via Lungarno, a ovest con vicolo Mozzo detto dei Consoli, a sud con il Cavalier Giovanni Battista e Antonio del Torto, infine a est con vicolo detto del Torti⁴. L'altra casa di sua proprietà a due piani con terrazzino, orto, fonte, pozzo, pila, rimessa e stalla, sempre sul Lungarno, era separata dalla precedente dal vicolo del Torti, e confinava con il palazzo dei dal Borgo, e col vicolo dal Borgo.

Ad Antonio Mannaioni Inghirlani, succedeva nel 1818 Ferdinando Sbrana, che stipulava un contratto con una servitù che consisteva nella promessa da parte di Ferdinando Sbrana e dei suoi futuri eredi, di non innalzare i muri che cingevano il piaggioncino e di non edificare niente sullo stesso, inoltre questa sarebbe rimasta in vigore fino a quando fossero esistiti eredi dal Borgo, come confinanti con la di lui proprietà.

III.2.4 Riunificazione sotto i Franchetti

Nei primi decenni del 1800 si vede la comparsa a Pisa della famiglia Franchetti, commercianti ebrei residenti a Livorno. Infatti sempre nell'ottica di dimostrare alle altre famiglie la loro ricchezza e potenza, la famiglia iniziò ad acquistare beni immobiliari attigui tra loro da unificare e rinnovare. Abram e Isach Franchetti rivolsero, quindi, le loro attenzioni all'ex palazzo dei Consoli del Mare, adesso in mano alla famiglia Galli, che acquistarono nel 1833, seguito dalla proprietà degli Sbrana, l'abitazione con ingresso sul vicolo del Torti e il piaggione posto sul lato Nord confinante con il Lungarno.

Qualche tempo dopo i due fratelli Franchetti completavano il loro progetto acquistando l'ex palazzo del Torto dai della Fanteria, a cui era passato nel 1833, e il vicolo Mozzo, detto dei Consoli, dal Comune. La funzione di quest'ultimo, infatti, era consentire l'accesso alle proprietà Sbrana e della Fanteria, riunificate dai Franchetti con palazzo Lanfranchi che aveva già gli accessi sul Lungarno e su via San Martino: esso non aveva, quindi, più ragione di esistere. La facciata su via San Martino si presentava, infine, come formata da due diversi blocchi, il palazzo Lanfranchi e quello del Torto (Figura III-26).

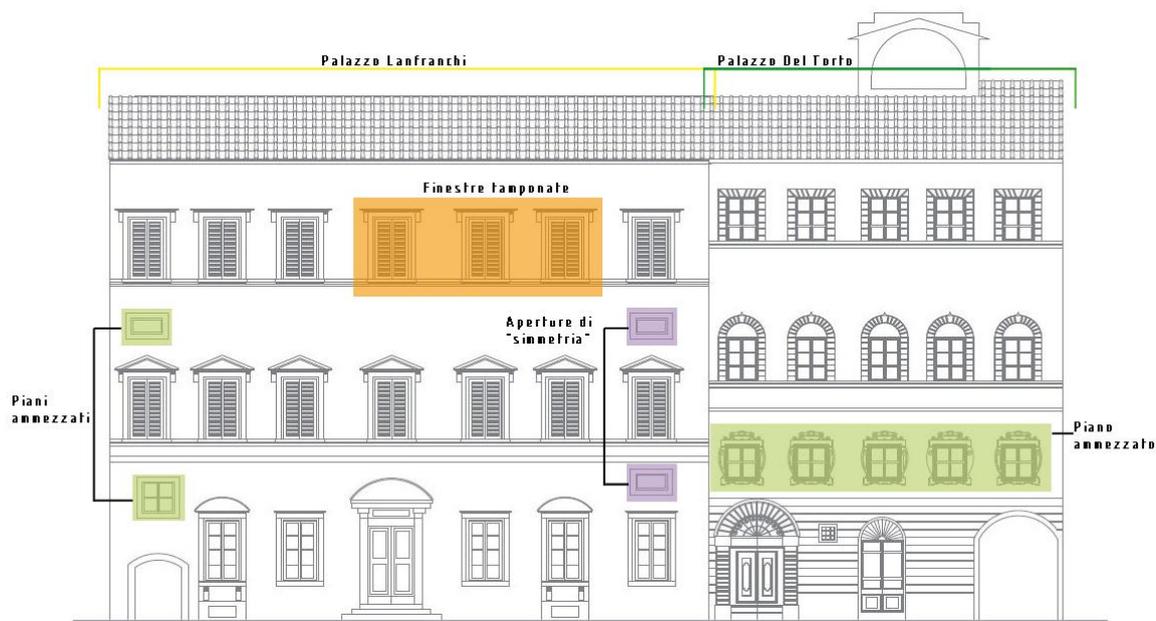


Figura III-26 - Facciata dei Palazzi Lanfranchi e del Torto in via Santa Maria

Come è possibile vedere in figura, il primo si configura come una grande superficie scandita da tre ordini di finestre e quattro aperture più piccole: le due a sinistra del prospetto denunciano la presenza di due piani ammezzati, mentre le due a destra sono state aperte solo per mantenerne la simmetria.

La ricchezza artistica del palazzo risiede nelle decorazioni del portone d'ingresso con lo stemma di famiglia e in quelle delle finestre inginocchiate con anfore (Figura III-23Figura III-24Figura III-25). Le finestre del primo piano sono ornate da timpani regolari, mentre quelle del secondo da semplici cornici, e una parte di esse è tamponata fino a circa metà per la presenza della volta del Salone, a testimonianza della già menzionata irregolarità in altezza dell'edificio.



Figura III-27 - Prospetto di palazzo del Torto su via San Martino, anni 1980, *ASPi*.

La facciata di palazzo dei del Torto, invece, è non solo in diverso materiale ma ha anche una diversa distribuzione delle finestre: vi sono sempre tre ordini di finestre, ma sfalsate rispetto a quelle di Palazzo Lanfranchi, poiché come primo piano vi è un mezzanino (riconoscibile dalle aperture più piccole Figura III-28). Diverse sono anche le decorazioni: la porta è incorniciata da due piedistalli di strette bugne, che in sommità si collegano a formare la ghiera dell'arco (Figura III-29).



Figura III-28 - Apertura del mezzanino di palazzo del Torto, lato via San Martino, particolare.



Figura III-29 - Portone di palazzo del Torto, lato via San Martino, particolare.

L'elemento ricorrente in facciata è, infine, il bugnato, che incornicia le aperture ai piani alti, e si ripropone nell'intonaco di piano terra e di primo piano.

III.3 Dal progetto di Alessandro Gherardesca allo stato attuale

Le tre proprietà acquisite erano perciò talmente dissimili tra loro da necessitare un intervento notevole, che le riunificasse in progetto architettonico omogeneo ed armonico.

Per questo i Franchetti si affidarono ad uno dei più illustri architetti pisani del tempo, Alessandro Gherardesca.

L'intervento di Alessandro Gherardesca interessa principalmente il prospetto sul Lungarno, mentre lascia inalterata la facciata su via San Martino. Gherardesca rende la facciata verso il fiume più organica, demolisce alcune parti di scarso valore architettonico, inserisce due ali laterali al corpo centrale e conforma l'edificio ad una più moderna forma ad "U" che racchiude una grande area verde.

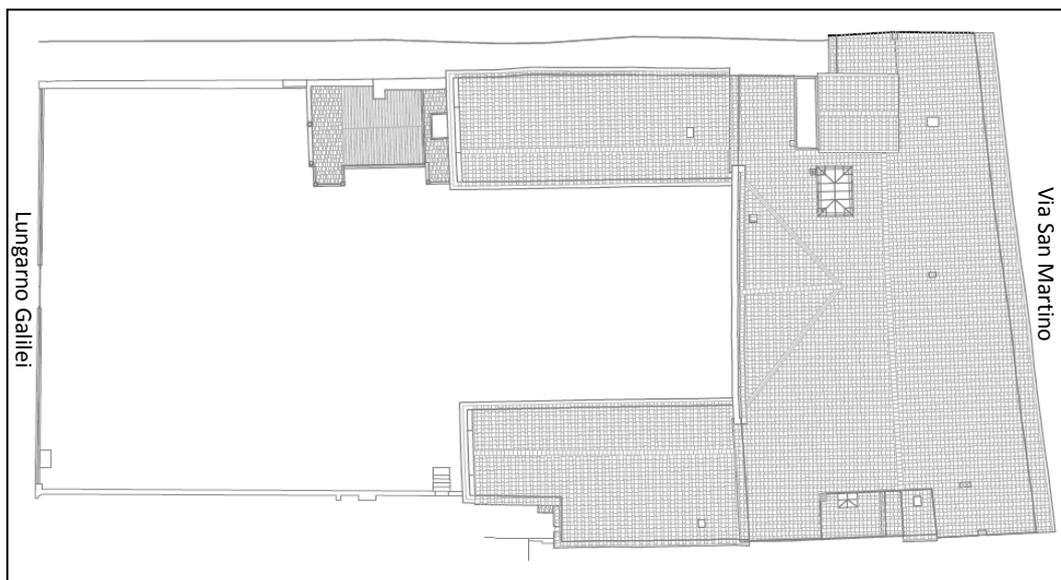


Figura III-30 - Pianta di copertura di Palazzo Franchetti, stato attuale

Il piano terra del prospetto sul Lungarno unifica i due palazzi e i rispettivi ingressi con una soluzione che vede quattro aperture ad arco interrotte da una nicchia centrale di maggiore dimensione che ospita una statua in terracotta. Anche qui si ritrova un piano ammezzato sul lato sinistro del prospetto denunciato dalla presenza di una piccola apertura. Sul lato sinistro, venendo dal Lungarno, si trova la ex limonaia, probabilmente voluta da Curzio Lanfranchi. Al di sotto delle finestre del primo piano si trovano decorazioni affrescate ad un livello di intonaco inferiore rispetto all'attuale (Figura III-31).

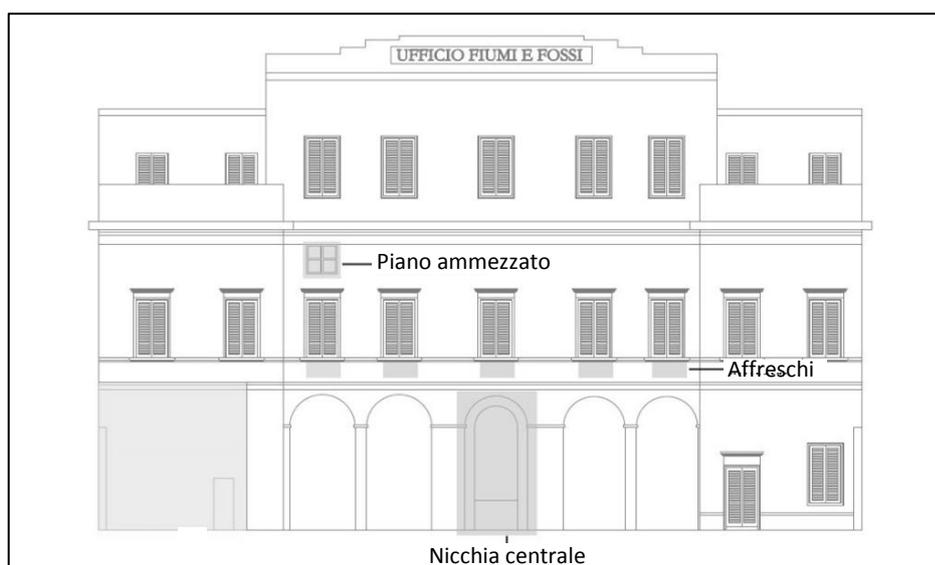


Figura III-31 - Facciata di Palazzo Franchetti sul Lungarno, schema.

Nel 1888, l'erede dei Franchetti rinuncia al palazzo che viene venduto a Vincenzo Ciampolini, ricco imprenditore fiorentino, che ne affitta separatamente i locali. Nel 1908 il

proprietario inizia le trattative di vendita dell'intero palazzo, ad esclusione degli affreschi al piano terra, al Consorzio dei Fiumi e Fossi, che vi si era già insediato nel 1899. Gli affreschi restano quindi fuori dalla trattativa, e, qualora il Ministero della Pubblica Istruzione ne avesse concesso il distacco, Ciampolini si sarebbe impegnato a ridipingere la volta rimasta priva dall'affresco, in caso contrario, il Consorzio l'avrebbe acquistato²⁶. Il Palazzo e le decorazioni, diventano proprietà del Consorzio nel 1914, quando si raggiunge un accordo con Ciampolini che lo cede in cambio dell'estinzione del debito accumulato a causa di un'ipoteca accesa per la prima volta nel 1818 in favore dei dal Borgo, che avevano diritto a una "servitù di prospetto e di luce".

I diversi lavori effettuati sul palazzo per riparare i danni dovuti allo scoppio di mine, sul lato che dà sul vicolo del Torti nel 1944, restituiscono un edificio profondamente cambiato, passando da una nobile abitazione ottocentesca a sede di uffici e appartamenti.

Ad oggi il complesso può essere diviso in quattro porzioni: le due ali verso il Lungarno, di realizzazione più recente, e il corpo principale, a sua volta divisibile nella porzione ex Lanfranchi ed ex Del Torto. La strutture verticali sono in muratura con elementi lapidei. Sotto il piano terra del corpo principale sono presenti locali, oggi non fruibili per l'acqua di falda affiorante.

Gli orizzontamenti sono in parte a volta, specie nella porzione ex Lanfranchi, ed ospitano affreschi cinquecenteschi e decorazioni Sette - Ottocentesche. Le volte sono principalmente a padiglione o a specchio, realizzate in modi diversi, si ritrovano infatti volte con mattoni posizionati di coltello e volte in folio, in alcuni casi sono presenti anche costoloni di rinforzo, frenelli o contrafforti murari. Altra tipologia di orizzontamenti presente è quella con struttura lignea, con travi, travicelli e mezzane. Tale tipologia si ritrova ai mezzanini e al secondo piano della porzione ex Del Torto. Altre sale sono controsoffittate. La copertura del corpo principale è stata interessata quasi interamente da un importante intervento di ristrutturazione negli anni settanta, in cui alla struttura lignea è stato sostituito un sistema di travi in calcestruzzo armato precompresso e tavelle, creando dei cordoli in c. a. a coronamento delle pareti di spina. In alcuni casi, sono presenti elementi trasversali di sostegno. La copertura delle due ali, invece, è in legno.

Notevole è la presenza di elementi di pregio. Oltre agli elementi architettonici, già individuati nelle descrizioni dei prospetti, la presenza di volte affrescate arricchisce il valore storico e artistico di questa costruzione. La Sala delle Ninfe, al pian terreno della

²⁶ M. Giraldo, *Palazzo Franchetti, una dimora sul Lungarno pisano*, cit., pp. 262 - 263

porzione ex Lanfranchi, presenta, come detto, una volta “a specchio” o “a schifo”, con lunette su tutto il perimetro. Le decorazioni ad affresco sono presenti su tutta la superficie della volta, inquadrate da cornici in stucco, e nella strombatura delle finestre. Il pavimento è in graniglia di marmo e presenta la scritta “SALVE” in corrispondenza della prima porta. Lo scalone monumentale, che porta al primo piano, presenta rampe in pietra serena e volta a botte affrescata a grottesche, mentre i pianerottoli sono voltati con strutture a crociera, anch’esse affrescate. Sia l’ala Ovest che quella Est dell’edificio presentano decorazioni ad affresco sulle pareti e sulle volte. Alcune sono state ritinteggiate, ma saggi stratigrafici ne testimoniano la presenza. Anche la Sala del Presidente presenta una struttura voltata affrescata con balza e motivi di corone floreali. È da notare anche la presenza in questa sala del camino in marmo e le decorazioni parietali scialbate.

Al piano primo della porzione ex Lanfranchi, nel grande salone, si ritrova la volta oggetto di questa tesi, volta a padiglione lunettata ed affrescata, formata da una testa di mattoni. Risulta interessante anche la fattura della struttura, visibile all’estradosso. I mattoni sono disposti di coltello e, tra la parte centrale e le teste di padiglione, sono presenti setti di rinfianco sormontati da catene metalliche.

CAPITOLO IV

Il caso della volta di Palazzo Franchetti: Analisi Strutturali

Le valutazioni strutturali effettuate consistono in una serie di analisi statiche ed un'analisi dinamica.

Le analisi statiche sono state svolte con il solo peso proprio o con peso proprio e sovraccarico dato dal materiale di rinfiando e l'iter di analisi seguito è stato un percorso progressivo da un modello più semplice, ma più lontano dal comportamento della struttura reale, ad un modello finale che sembra, invece, rispecchiarlo in modo apprezzabile. Tra le varie analisi sono state cambiate non solo le condizioni al contorno, ma anche la modellazione del materiale.

Nelle prime analisi, infatti, è stato considerato un materiale elastico lineare omogeneo equivalente mentre nella ricerca di un modello più raffinato, esso è stato rimpiazzato dal legame costitutivo masonry-like, già precedentemente trattato (§II.2.1.3.4) e ampiamente spiegato nel seguito.

L'analisi dinamica è stata svolta a completamento dello studio delle criticità della struttura.

I programmi utilizzati principalmente sono *Rhinoceros 4.0*, per la modellazione e la creazione della mesh, e il codice di calcolo *NOSA*, per le vere e proprie analisi e il cui algoritmo è illustrato nel paragrafo seguente.

Lo scopo degli studi effettuati è quello di capire il funzionamento della struttura, valutare la minima resistenza a trazione richiesta per garantire l'equilibrio secondo diverse ipotesi di condizioni al contorno e tarare il modello tramite confronto con il quadro fessurativo reale, per garantire l'adeguatezza dei risultati che si ottengono con il codice *NOSA*, nell'ottica di futuri interventi o adeguamenti.

IV.1 Il materiale masonry-like e il codice NOSA

IV.1.1 Il legame costitutivo

Come già ampiamente chiarito, le murature possono essere modellate come materiali purché si tenga adeguatamente conto della loro eterogeneità, anisotropia e della dipendenza del comportamento dalle tecniche costruttive utilizzate. La difficoltà del modellarlo sta, quindi, da una parte nel determinare un legame costitutivo che tenga conto di tutte queste caratteristiche e dall'altra nel renderlo sufficientemente semplice da poter risolvere gran parte dei problemi al contorno che si incontrano nella pratica.

Si può tuttavia osservare che materiali come le murature, così come le rocce, che presentano un comportamento elastico in compressione, presentano una resistenza a trazione molto limitata: per questo, come abbiamo appena visto, molti studiosi hanno pensato di trascurare la scarsa capacità di sopportare sforzi di trazione nella determinazione del continuo.

Sulla base di questa ipotesi sono stati formulati diversi legami costitutivi, tra i quali quello del cosiddetto materiale masonry-like, che è uno di quelli più studiati (Di Pasquale e Del Piero) ed è utilizzato dal codice di calcolo NOSA.

Si tratta di un materiale elastico non lineare, caratterizzato da alcune ipotesi che esamineremo nel seguito; prima, però, è necessario spiegare una serie di notazioni che abbiamo utilizzato nella trattazione.

Sia \mathcal{V} lo spazio vettoriale tridimensionale e Lin lo spazio delle applicazioni lineari²⁷ da \mathcal{V} a \mathcal{V} , i cui elementi sono detti tensori del secondo ordine e dotato del prodotto interno definito $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B})$, con \mathbf{A} e $\mathbf{B} \in \mathcal{V}$, con tr che indica la traccia.

Con Sym si indica il sottospazio di Lin costituito da tensori simmetrici; un tensore simmetrico si dice semidefinito positivo se risulta $\underline{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \underline{n} \geq 0, \forall \underline{n} \in \mathcal{V}$; analogamente, esso si dice semidefinito negativo se risulta $\underline{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \underline{n} \leq 0, \forall \underline{n} \in \mathcal{V}$.

È noto dalla algebra lineare che, condizione necessaria e sufficiente affinché un vettore sia semidefinito positivo (negativo) è che i suoi autovalori siano \longrightarrow tutti non negativi

²⁷ Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo K . Una funzione $f : V \rightarrow W$ è una trasformazione lineare se soddisfa le seguenti proprietà: $f(X+Y)=f(X)+f(Y)$ e $f(aX)=af(X)$, per ogni coppia di vettori X e $Y \in V$ e per ogni scalare $a \in K$.

(non positivi).

Indichiamo inoltre con Sym^+ e Sym^- i sottoinsiemi di Sym costituiti dai tensori simmetrici semidefiniti rispettivamente positivi e negativi e l'appartenenza di un tensore \mathbf{A} al primo o al secondo è indicata con $\mathbf{A} \geq 0$ e $\mathbf{A} \leq 0$ rispettivamente.

Infine, due tensori simmetrici si dicono coassiali se hanno gli stessi autovettori e se e solo se commutano, ovvero $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Passiamo adesso ad indicare le ipotesi per la determinazione del legame costitutivo.

Siano \mathbf{T} il tensore degli sforzi di Cauchy e \mathbf{E} il tensore delle deformazioni infinitesime, parte simmetrica del gradiente di spostamento, allora:

- 1) Il materiale non sopporta la trazione, le eventuali tensioni devono essere di compressione e quindi le tensioni principali devono essere non positive. Pertanto si richiede che sia $\mathbf{T} \leq 0$.
- 2) Il tensore di deformazione \mathbf{E} può pensarsi composto da due parti, una quota elastica \mathbf{E}^e e una anelastica \mathbf{E}^a .

Poiché \mathbf{E}^a rappresenta la quota di deformazione dovuta all'insorgere di fratture, si richiede che sia semidefinito positivo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^a, \text{ con } \mathbf{E}^a \geq 0.$$

- 3) Si ipotizza che sussista una relazione lineare tra il tensore degli sforzi \mathbf{T} e quello della deformazione elastica \mathbf{E}^e :

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}(\mathbf{E}^e)$$

dove \mathbf{C} è detto tensore di elasticità. È un tensore del quarto ordine definito positivo e che, nel caso di materiale isotropo, diventa esprimibile come:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}(\mathbf{E}^e) = 2\mu \mathbf{E}^e + \lambda \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}$$

con μ e λ moduli di Lamé del materiale, t.c. $\mu > 0$ e $+2\mu + 3\lambda \geq 0$.

Si richiede, inoltre, che il lavoro necessario alla formazione di fratture sia nullo, cioè che $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^a = 0$; questa ulteriore ipotesi consente di affermare che, se in una direzione \underline{n} si apre una fessura, ovvero se $\underline{n} \cdot \mathbf{E}^a \cdot \underline{n} > 0$, allora in quella direzione è nulla la componente normale dello sforzo, cioè $\underline{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \underline{n} = 0$.

Riassumendo un materiale masonry-like isotropo è, quindi, caratterizzato dalle seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^a \\ \mathbf{T} = 2\mu \mathbf{E}^e + \lambda \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I} \\ \mathbf{T} \leq 0 \text{ e } \mathbf{E}^a \geq 0 \\ \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^a = 0 \end{array} \right.$$

Questa definizione del legame costitutivo porta all'unicità dei tensori \mathbf{T} e di \mathbf{E}^e che soddisfano questo sistema. Si può inoltre dimostrare che questo materiale è iperelastico²⁸; in particolare lo sforzo è la derivata rispetto alla deformazione della funzione scalare $\varphi(\mathbf{E}) = 1/2 \mathbf{T}(\mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}$; pertanto, il lavoro delle forze interne è nullo ad ogni ciclo chiuso di deformazione. Inoltre \mathbf{E} , \mathbf{E}^e , \mathbf{E}^a e \mathbf{T} risultano coassiali; quest'ultima proprietà, valida solo nel caso di materiali isotropi, risulta molto utile per determinare la soluzione esplicita dell'equazione costitutiva. Le condizioni poste sui coefficienti di Lamé garantiscono che il legame sia invertibile; in effetti, si ha:

$$\mathbf{E}^e = 1/2\mu \mathbf{T} - \lambda/2(2\mu + 3\lambda) (\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I}$$

Questo tipo di legame costitutivo può essere applicato a quattro diversi casi, a seconda che si consideri la non o limitata resistenza a trazione e la illimitata o limitata resistenza a compressione. Fino ad ora abbiamo visto il caso di non resistenza a trazione e illimitata resistenza a compressione: analizziamo gli altri tre casi.

IV.1.1.1 Materiale non resistente a trazione e limitatamente a compressione

Si indicano nel seguito le ipotesi valide per questo caso:

- 1) Esiste una costante del materiale positiva σ chiamata "massima resistenza a compressione" tale che $\mathbf{T} \in \text{Sym}^-$ e che $(\mathbf{T} + \sigma \mathbf{I}) \in \text{Sym}^-$;
- 2) Il tensore delle deformazioni infinitesime totali $\mathbf{E} \in \text{Sym}$ può essere diviso in tre quote, date da quella elastica \mathbf{E}^e e da altre due quote mutuamente ortogonali

²⁸ Alla relazione costitutiva di lineare elasticità è possibile associare una funzione scalare definita energia specifica (o potenziale elastico di deformazione, misurabile in J/m^3 o FL/L^3) che è appunto l'energia che bisogna spendere per deformare un determinato materiale d'una quantità unitaria. Si dimostra che il lavoro per deformare di una certa quantità un solido linearmente iperelastico (lavoro in un cammino deformativo) è proprio pari alla variazione di potenziale elastico. Quindi se questa energia esiste, essa è unica.

\mathbf{E}^t e \mathbf{E}^c , rispettivamente delle deformazioni da frattura e di schiacciamento; $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^t + \mathbf{E}^c$ con $\mathbf{E}^t \in \text{Sym}^+$, $\mathbf{E}^c \in \text{Sym}^-$ e $\mathbf{E}^t \cdot \mathbf{E}^c = 0$.

- 3) $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{E}^e + \lambda \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}$ con le stesse condizioni su λ e μ già enunciate;
- 4) La condizione di normalità del flusso è data dalle due equazioni $(\mathbf{T} + \sigma \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}^c = 0$, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^c = 0$;

dato \mathbf{E} , esiste un'unica soluzione $(\mathbf{T}, \mathbf{E}^e, \mathbf{E}^t, \mathbf{E}^c)$.

IV.1.1.2 Materiale debolmente resistente a trazione e limitatamente a compressione

Analogamente al caso precedente:

- 1) Esistono due costanti del materiale positive σ^t e σ^c chiamate "massima resistenza a trazione" e "massima resistenza a compressione" tale che $(\mathbf{T} + \sigma^c \mathbf{I}) \in \text{Sym}^+$ e che $(\mathbf{T} - \sigma^t \mathbf{I}) \in \text{Sym}^-$;
- 2) Il tensore delle deformazioni infinitesime totali $\mathbf{E} \in \text{Sym}$ può essere diviso in tre quote, date da quella elastica \mathbf{E}^e e da altre due quote mutuamente ortogonali \mathbf{E}^t e \mathbf{E}^c , rispettivamente delle deformazioni da frattura e di schiacciamento; $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^t + \mathbf{E}^c$ con $\mathbf{E}^t \in \text{Sym}^+$, $\mathbf{E}^c \in \text{Sym}^-$ e $\mathbf{E}^t \cdot \mathbf{E}^c = 0$.
- 3) $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{E}^e + \lambda \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}$ con le stesse condizioni su λ e μ già enunciate;
- 4) La condizione di normalità del flusso è data dalle due equazioni $(\mathbf{T} + \sigma^c \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}^c = 0$, $(\mathbf{T} - \sigma^t \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}^t = 0$;

dato \mathbf{E} , esiste un'unica soluzione $(\mathbf{T}, \mathbf{E}^e, \mathbf{E}^t, \mathbf{E}^c)$.

IV.1.1.3 Materiale debolmente resistente a trazione e infinitamente a compressione

Analogamente al caso precedente:

- 1) Esiste una costante del materiale positiva σ chiamata "massima resistenza a trazione" tale che $(\mathbf{T} - \sigma \mathbf{I}) \in \text{Sym}^-$;

2) Il tensore di deformazione \mathbf{E} può pensarsi composto da due parti, una quota elastica \mathbf{E}^e e una anelastica \mathbf{E}^a , con \mathbf{E} , \mathbf{E}^a e Sym ;

Poiché \mathbf{E}^a rappresenta la quota di deformazione dovuta all'insorgere di fratture, si richiede di nuovo che sia semidefinito positivo:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^a, \text{ con } \mathbf{E}^a \geq 0.$$

3) $\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{E}^e + \lambda \text{tr}(\mathbf{E}^e) \mathbf{I}$ con le stesse condizioni su λ e μ già enunciate;

4) La condizione di normalità del flusso è data dall'equazione $(\mathbf{T} - \sigma \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}^a = 0$;

dato \mathbf{E} , esiste un'unica soluzione $(\mathbf{T}, \mathbf{E}^e, \mathbf{E}^a)$, e si può dimostrare che \mathbf{T} e \mathbf{E}^a sono coassiali poiché commutano.

Le condizioni imposte sulle costanti di Lamé consentono di invertire la condizione 3) e di ricavare:

$$\mathbf{E}^e = \frac{1}{2\mu} \mathbf{T} - \frac{1}{2\mu(2\mu+3\lambda)} (\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I}$$

Da cui, ponendo $\mathbf{E}^e = \mathbf{E} - \mathbf{E}^a$ e $\mathbf{T} = \mathbf{S} + \sigma \mathbf{I}$ si ha:

$$\mathbf{E} - \frac{\sigma(\mu+\lambda)}{2\mu+3\lambda} \mathbf{I} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{S} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} (\text{tr } \mathbf{S}) \mathbf{I} + \mathbf{E}^a.$$

Essendo \mathbf{T} , \mathbf{E} , \mathbf{E}^e , \mathbf{E}^a e \mathbf{S} coassiali, l'equazione costitutiva può essere scritta rispetto alla base ortonormale di autovettori comuni $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$. Allo scopo indichiamo con $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ e $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3\}$ gli autovalori rispettivamente di \mathbf{T} , \mathbf{E} , \mathbf{E}^a e \mathbf{S} , dove $s_i = t_i - \sigma$.

Detto ciò le relazioni:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^a \text{ con } \mathbf{E}, \mathbf{E}^a \in Sym \text{ ed } \mathbf{E}^a \geq 0$$

$$(\mathbf{T} - \sigma \mathbf{I}) \in Sym$$

$$\mathbf{E} - \frac{\sigma(\mu+\lambda)}{2\mu+3\lambda} \mathbf{I} = \frac{1}{2\mu} \mathbf{S} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\lambda)} (\text{tr } \mathbf{S}) \mathbf{I} + \mathbf{E}^a$$

Sono equivalenti al sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \check{\mathbf{e}} = \mathbf{D}\mathbf{s} + \mathbf{a} \\ \mathbf{s} \leq 0 \\ \mathbf{a} \leq 0 \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{a} = 0 \end{array} \right. \quad (IV-1)$$

con $\check{\mathbf{e}} = \left(e_1 - \frac{\sigma(\mu+\lambda)}{2\mu+3\lambda}, e_2 - \frac{\sigma(\mu+\lambda)}{2\mu+3\lambda}, e_3 - \frac{\sigma(\mu+\lambda)}{2\mu+3\lambda} \right)$, $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$ ²⁹ e con D matrice simmetrica definita positiva³⁰ data da:

$$D = \frac{(\mu + \lambda)}{\mu(2\mu + 3\lambda)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} & -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \\ \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} & 1 & -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} \\ -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} & -\frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} & 1 \end{bmatrix}$$

Per il calcolo degli a_i e dei t_i come funzioni di e_i è necessario operare una suddivisione dello spazio dei tensori simmetrici in quattro sottoinsiemi, che rappresentano i possibili valori dei t_i :

- 1) \mathcal{R}_1 , in cui $t_1 \leq 0$, $t_2 \leq 0$, $t_3 \leq 0$. In questo sottospazio le tensioni sono tutte di compressione e il materiale è, quindi, governato dal legame elastico lineare, senza deformazioni anelastiche.

Riscrivendo t_1, t_2, t_3 in termini di E e σ , possiamo definire:

$$\mathcal{R}_1 = \{ \mathbf{E} \in \text{Sym}; 2e_1 + \alpha(\text{tr}\mathbf{E}) - \varepsilon \leq 0; 2e_2 + \alpha(\text{tr}\mathbf{E}) - \varepsilon \leq 0; 2e_3 + \alpha(\text{tr}\mathbf{E}) - \varepsilon \leq 0 \}, \text{ con } \alpha = \lambda/\mu \text{ e } \varepsilon = \sigma/\mu.$$

- 2) \mathcal{R}_2 , in cui $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_3 \geq 0$. In questo sottospazio le tensioni sono tutte di trazione e, se esse superano il valore limite, il materiale sarà fuori esercizio, non potendo sopportare trazioni superiori. Le deformazioni anelastiche saranno presenti in tutte e tre le componenti.

Essendo $t_1 \leq t_2 \leq t_3$, basta imporre $t_1 \geq 0$, da cui definiamo

$$\mathcal{R}_2 = \{ \mathbf{E} \in \text{Sym}; e_1 \geq \frac{\varepsilon}{2+3\alpha} \}.$$

- 3) \mathcal{R}_3 , in cui $t_1 \leq 0$, $t_2 \geq 0$, $t_3 \geq 0$. La tensione minima è ora l'unica di compressione.

Esprimiamo di nuovo in termini di \mathbf{E} e σ e otteniamo

$$\mathcal{R}_3 = \{ \mathbf{E} \in \text{Sym}; e_1 \geq \frac{\varepsilon}{2+3\alpha}, \alpha e_1 + 2(1+\alpha)e_2 - \varepsilon \geq 0 \}.$$

- 4) \mathcal{R}_4 , in cui $t_1 \leq 0$, $t_2 \leq 0$, $t_3 \geq 0$. Abbiamo infine il caso in cui soltanto la tensione massima sia di trazione. Esprimiamo di nuovo in termini di \mathbf{E} e σ e otteniamo

$$\mathcal{R}_4 = \{ \mathbf{E} \in \text{Sym}; \alpha e_2 + 2(1+\alpha)e_1 - \varepsilon \geq 0, \alpha e_1 + 2(1+\alpha)e_2 - \varepsilon \geq 0, 2e_3 + \alpha(\text{tr}\mathbf{E}) - \varepsilon \geq 0 \}.$$

²⁹ Le componenti dei tre vettori sono espresse rispetto alla base ortonormale $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$.

³⁰ Grazie alle condizioni imposte sulle costanti di Lamé.

Risolvendo il sistema (IV-1) in ognuno dei quattro campi si possono calcolare le componenti principali di \mathbf{E}^a :

$$\begin{aligned} 1) \text{ Se } \mathbf{E} \in \mathcal{R}_1, \text{ allora} & \quad a_1 = 0 \\ & \quad a_2 = 0 \\ & \quad a_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Se } \mathbf{E} \in \mathcal{R}_2, \text{ allora} & \quad a_1 = e_1 - \frac{\varepsilon}{2+3\alpha} \\ & \quad a_2 = e_2 - \frac{\varepsilon}{2+3\alpha} \\ & \quad a_3 = e_3 - \frac{\varepsilon}{2+3\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Se } \mathbf{E} \in \mathcal{R}_3, \text{ allora} & \quad a_1 = 0 \\ & \quad a_2 = e_2 + \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} e_1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\alpha)} \\ & \quad a_3 = e_3 + \frac{\alpha}{2(1+\alpha)} e_1 - \frac{\varepsilon}{2(1+\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ Se } \mathbf{E} \in \mathcal{R}_4, \text{ allora} & \quad a_1 = 0 \\ & \quad a_2 = 0 \\ & \quad a_3 = e_3 + \frac{\alpha}{2+\alpha} (e_1 + e_2) - \frac{\varepsilon}{2+\alpha} \end{aligned}$$

Trovate le componenti del tensore delle deformazioni anelastiche a_i , è possibile calcolare gli sforzi principali:

$$\begin{aligned} 1) \text{ Se } \mathbf{E} \in \mathcal{R}_1, \text{ allora} & \quad t_1 = (2\mu+\lambda)e_1 + \lambda(e_2 + e_3) \\ & \quad t_2 = (2\mu+\lambda)e_2 + \lambda(e_1 + e_3) \\ & \quad t_3 = (2\mu+\lambda)e_3 + \lambda(e_1 + e_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ Se } \mathbf{E} \in \mathcal{R}_2, \text{ allora} & \quad t_1 = \mu \varepsilon = \sigma \\ & \quad t_2 = \mu \varepsilon = \sigma \\ & \quad t_3 = \mu \varepsilon = \sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Se } \mathbf{E} \in \mathcal{R}_3, \text{ allora} & \quad t_1 = \frac{\mu}{1+\alpha} \{(2+3\alpha)e_1 + \alpha\varepsilon\} \\ & \quad t_2 = \mu \varepsilon = \sigma \\ & \quad t_3 = \mu \varepsilon = \sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ Se } \mathbf{E} \in \mathcal{R}_4, \text{ allora} & \quad t_1 = \frac{\mu}{2+\alpha} \{4(1+\alpha)e_1 + 2\alpha e_2 + \alpha\varepsilon\} \\ & \quad t_2 = \frac{\mu}{2+\alpha} \{4(1+\alpha)e_2 + 2\alpha e_1 + \alpha\varepsilon\} \\ & \quad t_3 = \mu \varepsilon = \sigma \end{aligned}$$

IV.2 Il problema al contorno

L'esistenza della soluzione del problema al contorno per materiale modellato con il legame costitutivo masonry-like dipende molto dalla natura dei carichi e l'unico teorema di esistenza, formulato da E. Giusti e M. Giaquinta, è stato dimostrato con ipotesi molto restrittive e vale soltanto per il campo delle tensioni.

Resta, infatti, una certa indeterminatezza per le deformazioni e gli spostamenti, anche una volta determinate univocamente le tensioni, poiché esse hanno un legame diretto ed univoco con la quota elastica delle deformazioni, ma non con quella anelastica di cui, a parità di stato tensionale, non è garantita, quindi, l'unicità.

Si consideri ad esempio il caso di un solido non sollecitato da forze esterne ed in assenza di forze di massa: se il materiale fosse elastico lineare la soluzione sarebbe univoca e data da un campo tensionale e deformativo nullo in ogni punto dell'elemento; nel caso di materiale masonry-like, invece, la quota anelastica delle deformazioni è indeterminata e ciò comporta l'esistenza di infinite soluzioni che rispettino il problema al contorno e il legame costitutivo.

Viceversa si ipotizzi di dover risolvere il caso di un solido masonry-like sollecitato da forze esterne orizzontali simmetriche e verticali, distribuite in modo tale da confinare il solido: la soluzione in questo caso è univocamente determinata anche in termini di deformazioni e spostamenti e coincide con quella elastica.

Consideriamo, invece, i casi intermedi, cioè di sollecitazione esclusivamente verticale o orizzontale asimmetrica: nel primo caso, il problema è univocamente determinato in termini di sforzi e deformazioni verticali, ma è indeterminato per quanto riguarda la deformazione anelastica orizzontale; nel secondo caso, invece, non è garantita l'esistenza della soluzione, poiché non è possibile trovare una distribuzione degli sforzi che rispetti la limitata resistenza a trazione per ogni carico orizzontale.

In conclusione, al variare dei carichi con continuità da una condizione all'altra si nota che la soluzione può essere unica, indeterminata, o cessare di esistere.

Per chiarire ulteriormente le caratteristiche del modello si consideri il sistema in Figura IV-1, soggetto alle diverse condizioni di carico, in assenza di forze di massa.

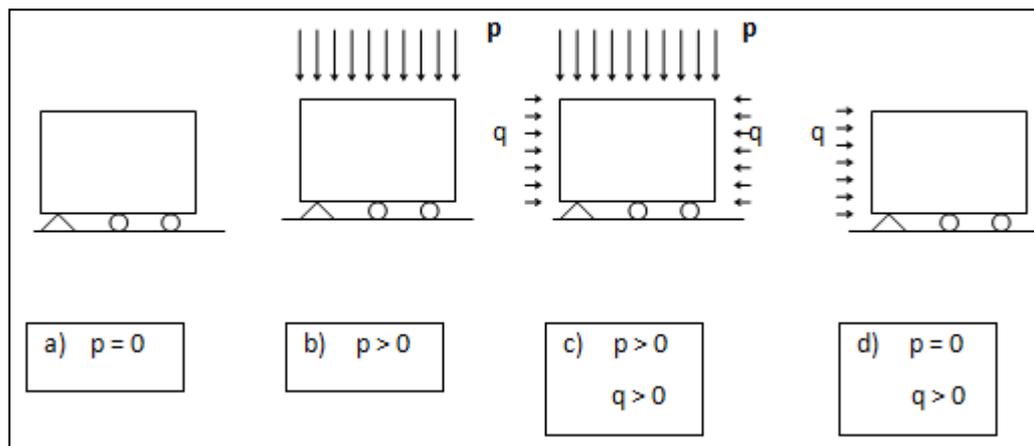


Figura IV-1 – Modello soggetto a diverse condizioni di carico in assenza di forze di massa

Nel caso a) se il materiale fosse elastico lineare la soluzione sarebbe quella identicamente nulla negli sforzi e nelle deformazioni. Per il materiale masonry-like, invece, le componenti su x e su y della deformazione anelastica risultano indeterminate, rimanendo nulle le tensioni e la quota elastica delle deformazioni. Il corpo può espandersi liberamente ed ha infinite configurazioni di equilibrio.

Nel caso b) la soluzione è unica negli sforzi e nelle deformazioni verticali e coincide con quella elastica lineare, restando indeterminata per quanto riguarda la quota anelastica di deformazione orizzontale.

Nel caso c) la soluzione coincide con quella elastica, è unica e determinata in ogni suo termine per ogni $q > 0$.

Nel caso d) infine la soluzione non sempre esiste in quanto non è possibile trovare una distribuzione equilibrata degli sforzi che, per ogni $q > 0$, rispetti la condizione di limitata resistenza a trazione.

Vediamo come si esprime, quindi, il problema al contorno per un materiale masonry-like e dimostriamo l'unicità della soluzione almeno in termini tensionali.

Sia \mathcal{B} un solido costituito da materiale masonry-like; consideriamo due sottoinsiemi complementari del contorno di $\delta\mathcal{B}$ di \mathcal{B} , \mathcal{S}_u dove è assegnato il campo di spostamenti $\hat{\mathbf{u}}$ e \mathcal{S}_f dove è assegnato il campo di forze superficiali \mathbf{s}_0 . Su \mathcal{B} agiscono, inoltre, le forze di massa \mathbf{b} .

Assegnati, quindi, $\hat{\mathbf{u}}$, \mathbf{b} , e \mathbf{s}_0 , si definisce soluzione regolare del problema al contorno, l'insieme $[\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}]$, con \mathbf{u} continuo fino al secondo ordine di derivazione, tale che soddisfi le relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{E} = 1/2 (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) & \text{su } \mathcal{B} \\ \mathbf{T} = \mathbf{C}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^a) & (\mathbf{T} - \sigma \mathbf{I}) \in \text{Sym}^-, \mathbf{E}^a \in \text{Sym}^+, (\mathbf{T} - \sigma \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}^a = 0 \\ \text{Div } \mathbf{T} + \mathbf{b} = 0 & \text{su } \mathcal{B} \\ \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \text{ e } \mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{s}_0 & \text{su } \mathcal{S}_u \text{ e } \mathcal{S}_f \text{ rispettivamente} \end{array} \right. \quad (\text{IV-2})$$

dove \mathbf{n} è la normale esterna a \mathcal{S}_f e $\mathbf{C} = 2\mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$ il tensore di elasticità.

Un carico $(\mathbf{b}, \mathbf{s}_0)$ definito in $\mathcal{B} \times \mathcal{S}_f$ con valori in $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ si dice *ammissibile* se il relativo problema al contorno ha una soluzione regolare.

È, quindi, semplice dimostrare che se $(\mathbf{b}, \mathbf{s}_0)$ è un carico ammissibile e $(\mathbf{u}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{T}_1)$ e $(\mathbf{u}_2, \mathbf{E}_2, \mathbf{T}_2)$ sono due possibili soluzioni regolari allora $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ in ogni punto di \mathcal{B} .

Infatti detta $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{T}})$ una combinazione lineare delle due precedenti del tipo $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$, $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2$, si dimostra facilmente che essa soddisfa il sistema (IV-2) con $\mathbf{s}_0 = 0$, $\mathbf{b} = 0$ e $\hat{\mathbf{u}} = 0$.

In accordo con l'ipotesi di regolarità della soluzione e per il principio dei lavori virtuali possiamo scrivere:

$$\int_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{E}} dV = 0 \quad (\text{IV-3})$$

Sostituendo $\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}^e + \mathbf{E}_1^a - \mathbf{E}_2^a$ con $\bar{\mathbf{E}}^e = \mathbf{E}_1^e - \mathbf{E}_2^e$ nella (IV-3) si ottiene:

$$\int_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot (\bar{\mathbf{E}}^e + \mathbf{E}_1^a - \mathbf{E}_2^a) dV = 0 \quad (\text{IV-4})$$

Da cui:

$$\int_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^e dV = \int_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{E}_2^a - \mathbf{E}_1^a) dV \quad (\text{IV-5})$$

Aggiungendo e togliendo $\sigma \mathbf{I}$ a $\bar{\mathbf{T}}$ esplicitando quest'ultimo si arriva alla:

$$\int_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^e dV = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{T}_1 - \sigma \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}_2^a + (\mathbf{T}_2 - \sigma \mathbf{I}) \cdot \mathbf{E}_1^a dV \quad (\text{IV-6})$$

Analizzando separatamente i due membri dell'equazione possiamo scrivere:

$$1) \quad \int_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{E}}^e dV = \int_{\mathcal{B}} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{C}^{-1}[\bar{\mathbf{T}}] dV \geq 0 \quad \text{poiché } \mathbf{C} \text{ è definito positivo;}$$

$$2) \int_{\mathcal{B}} (\bar{T}_1 - \sigma I) \cdot E_2^a + (\bar{T}_2 - \sigma I) \cdot E_1^a dV \leq 0 \text{ poiché } (T_1 - \sigma I) \text{ e } (T_2 - \sigma I) \in \text{Sym}^- \\ E_2^a, E_1^a \in \text{Sym}^+.$$

Affinché sia, quindi, verificata l'uguaglianza (IV-6) dovrà essere $\bar{T} \cdot C^{-1}[\bar{T}] dV = 0$ in ogni punto di \mathcal{B} e dunque $\bar{T} = 0$, da cui segue che $T_1 = T_2$ in ogni punto di \mathcal{B} .

Per maggior chiarezza, si esamina il problema dell'equilibrio nel piano, per un corpo costituito da materiale non resistente a trazione e infinitamente a compressione.

Per corpi costituiti da materiale di questo tipo, struttura e costruzione non coincidono, cioè le porzioni interessate dal carico non coincidono con la forma della costruzione. Volendo individuare la struttura, si procede considerando un problema piano. Sia dato il tensore degli sforzi in un certo punto del corpo

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

in cui valgono le equazioni indefinite di equilibrio e quelle di congruenza enunciate nel sistema (IV-2).

Nel caso di solidi non resistenti a trazione, però, le deformazioni non rispettano la condizione di congruenza e quel che va modificato si ricava osservando il cerchio di Mohr, mostrato in Figura IV-2.

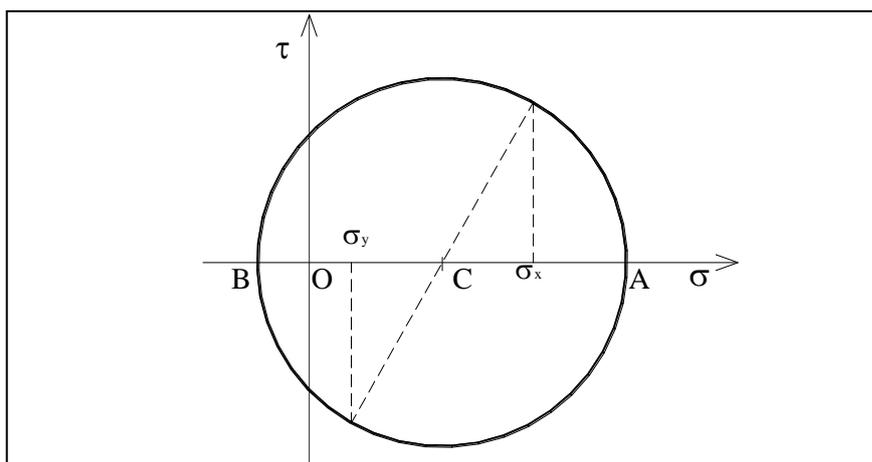


Figura IV-2 – Cerchio di Mohr dello stato di tensione individuato dal tensore T nel sistema di riferimento dato

In generale si ha

$$OA = \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

$$OB = \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

Dovendo verificarsi la non resistenza a trazione, il cerchio di Mohr deve essere tale che C si trovi dalla parte delle σ negative, cioè deve essere

$$OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} < 0.$$

Essendo $\text{tr}T = \sigma_x + \sigma_y$, la relazione precedente si traduce in

$$\text{tr}T < 0.$$

Se il materiale non resiste a trazione deve, dunque, accadere che $\text{tr}T < 0$: questa relazione costituisce, quindi, una condizione necessaria, ma non sufficiente, poiché, rispettandola, il cerchio di Mohr possa assumere la posizione indicata in Figura IV-3.

Se il materiale non resiste a trazione, la tensione principale massima deve essere minore o, al più, uguale a zero, quindi

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \leq 0,$$

da cui, risolvendo la disequazione, si ottiene la condizione

$$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 \geq 0.$$

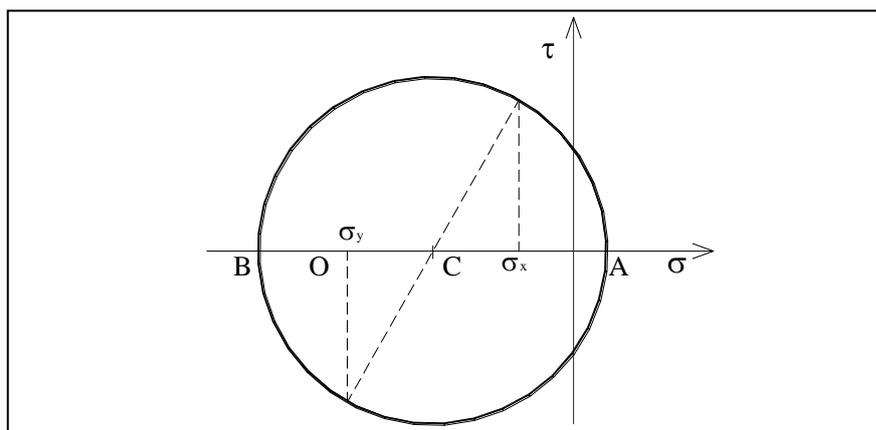


Figura IV-3 – Posizione del cerchio di Mohr nel caso in cui si ponga la condizione $\text{tr}T < 0$

Dunque, se il materiale non è resistente a trazione, si ha

- 1) $\text{tr}T < 0$,

2) $\det T \geq 0$.

Come abbiamo spiegato, al variare del segno e dell'entità delle tensioni principali, all'interno del corpo si possono individuare tre zone:

– σ_1 e $\sigma_2 < 0$ **zona \mathcal{R}_1**

se ambedue le tensioni principali sono di compressione, il materiale si comporta come se fosse elastico lineare e le condizioni 1 e 2 risultano automaticamente soddisfatte.

– σ_1 e $\sigma_2 > 0$ **zona \mathcal{R}_2**

se il materiale fosse elastico lineare, ambedue le tensioni principali sarebbero di trazione. Ma questo è incompatibile con le ipotesi fatte sulla natura del materiale che risulta quindi fuori esercizio.

– $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_2 < 0$ **zona \mathcal{R}_3 (e \mathcal{R}_4)**

una sola tensione principale è diversa da zero ed è negativa, quindi risulta verificata la condizione 1 e la 2 vale con il segno di uguaglianza.

Spieghiamo adesso le conseguenze nei vari sottoinsiemi appena descritti.

Le incognite del problema elastico sono 3: σ_x , σ_y , τ_{xy} . Le due equazioni indefinite di equilibrio in direzione x e y, insieme alla condizione $\det T = 0$ costituiscono un sistema di tre equazioni e tre incognite

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho_x = 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \rho_y = 0, \\ \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0. \end{cases}$$

In questo caso il sistema può essere risolto senza il ricorso alle condizioni di congruenza, normalmente necessarie nel caso di elasticità lineare nel piano. Senza la terza equazione, determinata dal fatto che il materiale non è resistente a trazione, il sistema avrebbe avuto le sole equazioni di equilibrio in direzione x e y nelle tre incognite σ_x , σ_y , τ_{xy} . In questo caso non ne sarebbe stata possibile la risoluzione senza il ricorso alle equazioni di congruenza e costitutive.

Questo consente di affermare che in R_2 la condizione di congruenza può essere violata; ne consegue che in questa zona si ammette la formazione di fessure.

Dalla Figura IV-4 si comprende quanto sopra.

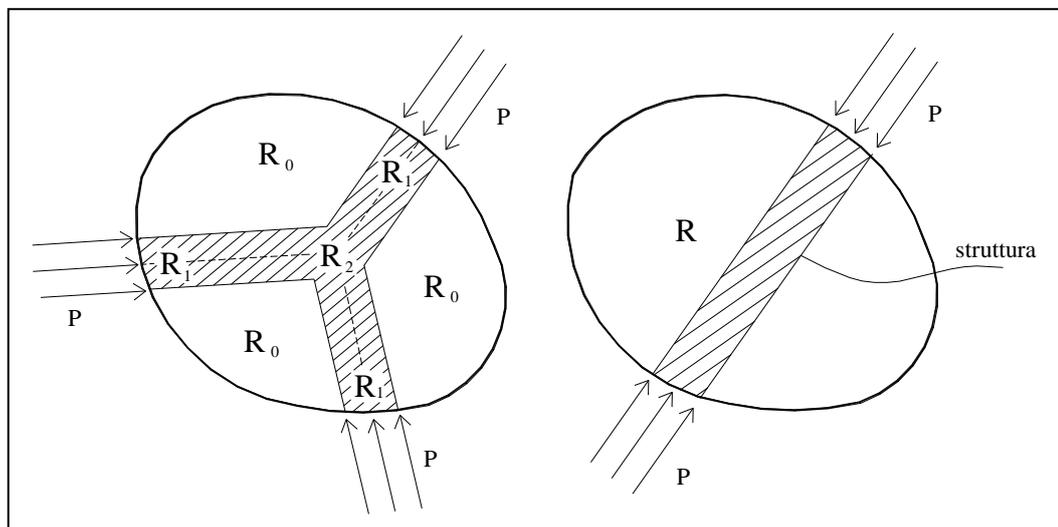


Figura IV-4 – Identificazione nel corpo del flusso degli sforzi per un materiale non resistente a trazione

Dalle equazioni di equilibrio in R_1 si ricavano i valori di σ_x , σ_y , τ_{xy} , da cui si ricavano i tre valori per le deformazioni ε_x , ε_y , γ_{xy} , ottenuti, per definizione, da un'opportuna combinazione lineare con coefficienti le costanti di elasticità:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\tau_{xy} + a_{13}\sigma_y \\ \gamma_{xy} = a_{21}\sigma_x + a_{22}\tau_{xy} + a_{23}\sigma_y \\ \varepsilon_y = a_{31}\sigma_x + a_{32}\tau_{xy} + a_{33}\sigma_y \end{cases}$$

$a_{ij} = a_{ji}$ sono generici coefficienti di elasticità.

Dalle tensioni si possono dunque ricavare le deformazioni, quindi, integrandole, gli spostamenti. Ma se gli spostamenti sono 2, u e v , e le equazioni sono 3, il problema non è risolubile in termini di spostamenti. Dunque non c'è più congruenza tra le espressioni geometriche delle deformazioni e quelle elastiche. Bisogna pertanto ammettere la presenza di distorsioni, in particolare fratture che si creano a lavoro nullo in direzione ortogonale a quella dello sforzo.

IV.3 Il metodo degli elementi finiti

Il metodo agli elementi finiti è una tecnica del tutto generale per approssimare la soluzione di equazioni o di sistemi di equazioni differenziali definite su un continuo, trasformandole in un sistema di equazioni algebriche con un numero finito di incognite. Esso si è ormai affermato come uno degli strumenti maggiormente versatili per la soluzione di problemi strutturali, grazie alla facilità con cui le tecniche numeriche che lo caratterizzano possono essere tradotte in programmi di calcolo.

Il metodo nasce nel 1960 e ha uno sviluppo rapidissimo, di pari passo con la disponibilità crescente di calcolatori sempre più potenti. Tra gli anni sessanta e settanta si rileva una grande quantità di pubblicazioni dedicate al tema, con la sua grande diffusione anche in altri ambiti scientifici, quali la fisica e la matematica applicata.

Nei problemi strutturali, il continuo viene *discretizzato* in una serie finita di elementi, connessi ad un numero finito di punti, detti nodi; i valori nodali degli spostamenti o degli sforzi sono le incognite del problema e, una volta determinate, vengono interpolate tramite le cosiddette funzioni di forma, per determinarne il valore in ogni punto del continuo.

Altri metodi per la risoluzione di equazioni differenziali, come quello alle differenze finite, approssimano l'operatore derivata con quozienti di differenze dei valori assunti dalla funzione incognita nei nodi; il metodo agli elementi finiti, invece, presuppone la *riformulazione* delle equazioni del sistema in un equivalente sistema *variazionale*, in cui l'ordine delle derivate viene opportunamente abbassato a l'approssimazione della soluzione effettuata con funzioni interpolanti definite a tratti sul dominio.

La formulazione in termini variazionali si basa sull'osservazione che, per una classe molto vasta di problemi, le equazioni differenziali di equilibrio possono essere ricavate cercando il minimo di un opportuno funzionale sul dominio della soluzione. In particolare, nel caso di problemi di equilibrio di corpi elastici lineari, tale funzionale è l'energia potenziale totale del sistema. Vediamo come riformulare, quindi, le equazioni di equilibrio nel caso in cui le incognite siano gli spostamenti nodali.

Si consideri un corpo continuo di volume totale V ; sia S la superficie del corpo caricata da una distribuzione di forze q e siano p le forze di massa per unità di volume dell'elemento.

L'energia potenziale totale del sistema può essere scritta come somma dell'energia interna di deformazione e dei lavori delle forze di massa e di quelle distribuite sulla superficie:

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\sigma}]^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V [\boldsymbol{\delta}]^T \boldsymbol{p} dV - \int_S [\boldsymbol{\delta}]^T \boldsymbol{q} dS \quad (IV-7)$$

con $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ i vettori di tensione e deformazione rispettivamente e $\boldsymbol{\delta}$ il vettore di spostamento in ogni punto.

Introducendo le funzioni di interpolazione \mathbf{N} , posso esprimere lo spostamento di ogni punto del continuo in funzione degli incogniti spostamenti nodali $\boldsymbol{\delta}^e$:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\delta}^e$$

Esprimendo anche le deformazioni all'interno dell'elemento (e quindi anche le tensioni) in funzione delle incognite si può scrivere:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta}^e \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\delta}^e$$

con \mathbf{B} matrice di deformazione generalmente costituita dalle derivate delle funzioni di forma e \mathbf{D} matrice di elasticità.

L'energia potenziale totale è esprimibile, quindi, come somma dei contributi dei singoli elementi:

$$\boldsymbol{\pi} = \sum_e \boldsymbol{\pi}_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} [\boldsymbol{\delta}^e]^T [\mathbf{B}]^T \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}^e dV - \int_{V_e} [\boldsymbol{\delta}^e]^T [\mathbf{N}]^T \boldsymbol{p} dV - \int_{S_e} [\boldsymbol{\delta}^e]^T [\mathbf{N}]^T \boldsymbol{q} dS$$

dove V_e è il volume dell'elemento e S_e l'area della superficie caricata.

Minimizzando l'energia dell'elemento e , rispetto al vettore degli spostamenti risulta:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\pi}_e}{\partial \boldsymbol{\delta}^e} = \frac{1}{2} \int_{V_e} ([\mathbf{B}]^T \mathbf{D} \mathbf{B}) \boldsymbol{\delta}^e dV - \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \boldsymbol{p} dV - \int_{S_e} [\mathbf{N}]^T \boldsymbol{q} dS = \mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e - \mathbf{F}^e$$

dove

$$\mathbf{F}^e = \int_{V_e} [\mathbf{N}]^T \boldsymbol{p} dV - \int_{S_e} [\mathbf{N}]^T \boldsymbol{q} dS \quad \text{è la forza nodale equivalente dell'elemento;}$$

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e} [\mathbf{B}]^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad \text{è la matrice di rigidezza dell'elemento.}$$

Uguagliando a zero la somma dei termini $\mathbf{K}^e \boldsymbol{\delta}^e - \mathbf{F}^e$ per tutti gli elementi, si ottiene un sistema algebrico lineare che esprime l'equilibrio per tutto il continuo.

Risolvendo tale sistema si ricavano, poi, gli spostamenti nodali $\boldsymbol{\delta}$ da cui, come abbiamo già visto, è immediato ricavare le deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$ e quindi le tensioni $\boldsymbol{\sigma}$.

IV.3.1 Il codice NOSA

Per quanto la soluzione del problema dell'equilibrio per il materiale masonry-like possa talvolta essere trovata in forma esplicita, essa è in generale molto complessa e richiede l'utilizzo di tecniche numeriche di risoluzione.

L'algoritmo implementato dal codice agli elementi finiti NOSA (Nonlinear Structural Analysis), sviluppato dal Laboratorio di Meccanica dei Materiali e delle Strutture dell'ISTI-CNR, permette di risolvere numericamente una gamma più vasta di problemi di equilibrio di solidi in masonry-like.

Per risolvere tali problemi è spesso necessario, per ragioni di risoluzione numerica, assegnare i carichi in maniera incrementale. A questo proposito, quindi, anche se il materiale è considerato iperelastico, noi dobbiamo scegliere un percorso di carico e risolvere il problema incrementale di equilibrio ad esso associato.

Il percorso di carico risulta essere a discrezione del progettista, per cui la dipendenza dei risultati dell'analisi dal processo di carico scelto, genererebbe diversi risultati per la stessa struttura con lo stesso problema al contorno, andando a minare l'affidabilità del codice di calcolo. Per prima cosa si intende, quindi, dimostrare l'indipendenza della soluzione numerica dal particolare percorso di carico scelto.

Ipotizziamo un percorso di carico $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$, con $\tau \in [0; \tau_1]$, è una funzione di tre variabili:

$$\boldsymbol{\gamma}(\tau) = (\hat{\mathbf{u}}(\cdot, \tau), \hat{\mathbf{s}}(\cdot, \tau), \mathbf{b}(\cdot, \tau)), 0 \leq \tau \leq \tau_1$$

con $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{s}}$ e \mathbf{b} definiti rispettivamente sui domini $\delta\mathcal{B}_u \times [0; \tau_1]$, $\delta\mathcal{B}_s \times [0; \tau_1]$, $\mathcal{B} \times [0; \tau_1]$, differenziabili a tratti rispetto a τ , e tali che $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0, 0)$.

Il processo di carico $\boldsymbol{\gamma}$ si dice *ammissibile* se:

- 1) $\forall \tau$, $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$ è un carico ammissibile (già definito nel precedente paragrafo);
- 2) Almeno una delle soluzioni del sistema (IV-2), corrispondente al problema al contorno rappresentato da $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$, è *regolare*, cioè differenziabile a tratti rispetto a τ .

Sia, quindi, $\boldsymbol{\gamma}$ un percorso di carico ammissibile, e $(\hat{\mathbf{u}}(\cdot, \tau), \hat{\mathbf{s}}(\cdot, \tau), \mathbf{b}(\cdot, \tau))$ una curva regolare; quest'ultima è una soluzione incrementale del problema al contorno, che si ottiene differenziando il sistema (IV-2), se $\forall \tau \in [0; \tau_1]$, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{E}} = 1/2 (\nabla \dot{\mathbf{u}} + (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T) \\ \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{D}_E \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}(\tau)) [\dot{\mathbf{E}}] \\ \text{Div } \dot{\mathbf{T}} + \dot{\mathbf{b}} = 0 \\ \dot{\mathbf{u}} = \dot{\hat{\mathbf{u}}} \text{ e } \dot{\mathbf{T}} \mathbf{n} = \dot{\hat{\mathbf{s}}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{su } \mathcal{B} \\ \text{su } \delta \mathcal{B}_u \text{ e } \delta \mathcal{B}_s \text{ rispettivamente} \end{array} \quad (\text{IV-8})$$

e $\mathbf{u}(x,0) = 0$, $\mathbf{E}(x,0) = 0$, $\mathbf{T}(x,0) = 0$ su \mathcal{B} .

Si specifica che il punto indica la derivazione rispetto a τ .

Ricordiamo che data l'ipotesi di ammissibilità del percorso di carico γ , allora la curva regolare $(\hat{\mathbf{u}}(\cdot, \tau), \hat{\mathbf{s}}(\cdot, \tau), \mathbf{b}(\cdot, \tau))$ che è soluzione per il (IV-8) era già soluzione anche per il sistema (IV-2). D'altra parte, ogni soluzione incrementale del problema al contorno è soluzione anche per il problema di equilibrio corrispondente (IV-2).

Infatti se $(\hat{\mathbf{u}}(\tau), \hat{\mathbf{s}}(\tau), \mathbf{b}(\tau))$ è una curva regolare di soluzioni per il sistema (IV-2), differenziando le equazioni che lo compongono rispetto a τ si può verificare immediatamente che $(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T})$ soddisfa le equazioni del sistema (IV-8).

D'altra parte, se $(\hat{\mathbf{u}}(\tau), \hat{\mathbf{s}}(\tau), \mathbf{b}(\tau))$ è una soluzione incrementale, integrando le equazioni del sistema incrementale su $[0; \tau_1]$ e considerando che su \mathcal{B} $\mathbf{u}(x,0) = 0$, $\mathbf{E}(x,0) = 0$, $\mathbf{T}(x,0) = 0$, si deduce che $(\hat{\mathbf{u}}(\tau), \hat{\mathbf{s}}(\tau), \mathbf{b}(\tau))$ soddisfa anche il sistema iniziale $\forall \tau \in [0; \tau_1]$.

Da ciò seguono due conclusioni:

- 1) Se γ è un processo ammissibile, esiste almeno una soluzione incrementale per il problema al contorno;
- 2) La soluzione del problema incrementale, se esiste, è unica in termini di tensioni; siano, infatti γ_1 e γ_2 due percorsi di carico ammissibili su $[0; \tau_1]$, e tali che il carico finale sia il medesimo ($\gamma_1(\tau_1) = \gamma_2(\tau_1)$), e siano $(\hat{\mathbf{u}}_1(\tau), \hat{\mathbf{s}}_1(\tau), \mathbf{b}_1(\tau))$ e $(\hat{\mathbf{u}}_2(\tau), \hat{\mathbf{s}}_2(\tau), \mathbf{b}_2(\tau))$ due curve di soluzioni regolari per il problema incrementale corrispondente rispettivamente a γ_1 e γ_2 , allora

$$\mathbf{T}_1(x, \tau_1) = \mathbf{T}_2(x, \tau_1)$$

Questo ultimo risultato, in particolare garantisce che la soluzione del problema incrementale non dipende dal percorso di carico scelto, ma solo dal carico finale assegnato.

Continuiamo adesso ad analizzare il procedimento di risoluzione con il codice NOSA.

Ipotizziamo di aver scelto un processo di carico $\boldsymbol{\gamma}$ e che a questo sia, quindi, soggetto il corpo \mathcal{B} . Il nostro obiettivo è quello di determinare la terna $(\hat{\mathbf{u}}(\tau), \hat{\mathbf{s}}(\tau), \mathbf{b}(\tau))$ che soddisfi il problema dell'equilibrio, espresso nel sistema (IV-2) $\forall \tau \in [0; \tau_1]$.

Consideriamo uno spostamento virtuale \mathbf{w} , tale che $\mathbf{w} = 0$ su $\delta\mathcal{B}_u$. È possibile, quindi, riscrivere il sistema suddetto in forma debole scrivendo il teorema dei lavori virtuali:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV = \int_{\partial\mathcal{B}} \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{w} \, dA + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, dA \quad (\text{IV-9})$$

con $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E})$. Differenziando l'equazione (IV-9) rispetto a τ , otteniamo l'equazione di equilibrio incrementale:

$$\int_{\mathcal{B}} D_E \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{E}) \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV = \int_{\partial\mathcal{B}} \dot{\hat{\mathbf{s}}} \cdot \mathbf{w} \, dA + \int_{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{w} \, dA \quad (\text{IV-10})$$

con il punto che indica sempre la derivazione rispetto a τ .

Suddiviso poi il dominio della soluzione in una griglia, mesh, costituita da m elementi finiti per un numero complessivo di n nodi, è possibile approssimare la funzione \mathbf{w} con le espressioni $\mathbf{w} = \sum_i \mathbf{w}_i \boldsymbol{\varphi}_i$ con \mathbf{w}_i i valori incogniti della funzione nei nodi e $\boldsymbol{\varphi}_i$ le funzioni interpolanti dette di forma, diverse da zero solo in un piccolo intorno del nodo a cui si riferiscono in cui hanno valore unitario, e nulle sulla restante parte del dominio.

In virtù dell'arbitrarietà dei valori \mathbf{w}_i , l'espressione (IV-10) può essere ricondotta al sistema algebrico:

$$[\mathbf{K} \{\mathbf{u}\}] \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (\text{IV-11})$$

e il sistema (IV-10) nel sistema non lineare

$$[\mathbf{K}_T] \{\dot{\mathbf{u}}\} = \{\dot{\mathbf{f}}\} \quad (\text{IV-12})$$

con: $\{\mathbf{u}\}$ e $\{\dot{\mathbf{u}}\}$ gli spostamenti e le velocità nodali; $\{\mathbf{f}\}$ e $\{\dot{\mathbf{f}}\}$ i vettori delle forze nodali e delle loro derivate rispetto al tempo; \mathbf{K} matrice quadrata di dimensione $3n \times 3n$ (nell'ipotesi che a ciascun nodo della mesh siano associati 3 gradi di libertà), chiamata matrice di rigidezza e \mathbf{K}_T matrice di rigidezza tangente.

Quest'ultima è ottenuta assemblando le matrici di rigidezza tangenti di ogni elemento, definite come:

$$w_e [K_e^T] \{\dot{\mathbf{u}}_e\} = \int_{\mathcal{B}} D_E \hat{\mathbf{T}}(\dot{\mathbf{E}}) \cdot \nabla \mathbf{w} \, dV \quad (\text{IV-13})$$

dove \mathbf{w}_e e $\dot{\mathbf{u}}_e$ sono i vettori degli spostamenti nodali e delle velocità nodali dell'elemento e e $D_E \hat{\mathbf{T}}(\dot{\mathbf{E}})$ è la derivata del tensore \mathbf{T} rispetto alla deformazione totale \mathbf{E} , la procedura di calcolo è riportata al paragrafo seguente.

Analogamente si costruisce il vettore dei carichi nodali da quelli dei singoli elementi definiti come:

$$w_e \{\dot{f}_e\} = \int_{\partial B} \dot{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{w} \, dA + \int_B \dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{w} \, dV \quad (\text{IV-14})$$

Dopo aver assemblato la matrice di rigidezza e il vettore dei carichi nodali, assegniamo il primo incremento di carico $\{\Delta f\}$, definito dalla relazione:

$$w_e \{\Delta f_e\} = \int_{\partial B_e \cap \partial B_s} (\hat{\mathbf{s}}(\tau + \Delta\tau) - \hat{\mathbf{s}}(\tau)) \cdot \mathbf{w} \, dA + \int_{B_e} (\mathbf{b}(\tau + \Delta\tau) - \mathbf{b}(\tau)) \cdot \mathbf{w} \, dV \quad (\text{IV-15})$$

Il sistema da risolvere per il primo incremento è, perciò, il seguente:

$$[\mathbf{K}_T] \{\Delta \mathbf{u}\} = \{\Delta \mathbf{f}\} \quad (\text{IV-16})$$

Tale sistema è immediatamente risolvibile per un materiale elastico lineare, perché la matrice di rigidezza dipende solo dalle caratteristiche elastiche e geometriche del modello. Per un materiale elastico non lineare, quale quello masonry-like, \mathbf{K} dipende a sua volta dagli spostamenti \mathbf{u} e il sistema (IV-16) deve essere risolto per iterazioni.

Il metodo di risoluzione è la procedura iterativa di Newton-Raphson, descritta nel seguito.

Il procedimento inizia con un valore nullo degli spostamenti nodali $\mathbf{u}_0 = 0$, per cui la matrice $D(\mathbf{u})$ coincide con la matrice $D(0)$ dei moduli elastici costante. La matrice di rigidezza \mathbf{K}_0 viene calcolata di conseguenza e, dato il vettore dei carichi nodali $\{\mathbf{f}\}$, il sistema viene risolto calcolando $\Delta \mathbf{u}_0 = \mathbf{K}_0^{-1} \cdot \mathbf{f}$.

Si determina, così, $\mathbf{u}_1 = \Delta \mathbf{u}_0$, da cui si ricava $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{B} \Delta \mathbf{u}_0$ e, di conseguenza, $\boldsymbol{\sigma} = \Delta \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0$.

A questo punto si verifica l'equilibrio e si calcola la differenza tra le forze nodali esterne iniziali del primo incremento di carico ($\{\mathbf{f}^{(0,1)}\}$) e quelle interne dovute allo spostamento calcolato come prima soluzione dell'iterazione nulla ($\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u}_0$), che in questo caso vale:

$$\{\mathbf{f}^{(0,1)}\} - [\mathbf{K}_T \{\mathbf{u}^{(1,1)}\}] \{\Delta \mathbf{u}^{(1,1)}\} = \{\Delta \mathbf{f}^{(1,1)}\}. \quad (\text{IV-17})$$

Si valuta, infine, la accettabilità della soluzione così ottenuta, verificando il criterio di convergenza espresso da:

$$\frac{\{\Delta \mathbf{f}^{(1,1)}\}}{\{\mathbf{f}^{(0,1)}\}} \leq \xi_C \quad (\text{IV-18})$$

con ξ_C parametro assegnato dall'utente.

Se la relazione (IV-18) risulta verificata, allora la soluzione \mathbf{u}_1 è stata raggiunta e il processo viene interrotto, passando al successivo incremento di carico. In caso contrario, allora l'equilibrio non è "sufficientemente" verificato ed è necessario considerare di nuovo il sistema di partenza in cui, al posto del vettore dei carichi nodali $\mathbf{f}^{(0,1)}$, poniamo $\Delta \mathbf{f}^{(1,1)}$.

Si procede, quindi, alla ricerca di $\Delta \mathbf{u}_1$, così da determinare lo spostamento relativo alla seconda iterazione $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1 + \Delta \mathbf{u}_1$, utilizzando questa volta la matrice di rigidezza $\mathbf{K}_1(\mathbf{u}_1)$ calcolata appunto in funzione degli spostamenti \mathbf{u}_1 determinati nell'iterazione precedente.

In generale, quindi, supponendo durante il j-esimo incremento di carico, di aver calcolato, nel modo precedentemente mostrato, gli spostamenti $\{\mathbf{u}^{(i,j)}\}$, la matrice di rigidezza tangente $[\mathbf{K}_T\{\mathbf{u}^{(i,j)}\}]$ e i carichi nodali equivalenti $\{\mathbf{f}^{(i,j)}\}$, relativi alla i-esima iterazione.

Dobbiamo, allora, procedere alla soluzione del sistema

$$[\mathbf{K}_T\{\mathbf{u}^{(i,j)}\}] \{\Delta \mathbf{u}^{(i,j)}\} = \{\mathbf{f}^{(i,j)}\} \quad (\text{IV-19})$$

per determinare, così, gli spostamenti nodali $\{\mathbf{u}^{(i+1,j)}\} = \{\mathbf{u}^{(i,j)}\} + \{\Delta \mathbf{u}^{(i,j)}\}$, relativi alla i+1-esima iterazione. Si procede al calcolo delle tensioni $\{\boldsymbol{\sigma}^{(i+1,j)}\}$ e della matrice $\{\mathbf{D}^{(i+1,j)}\}$, che servirà per la iterazione o per l'incremento seguenti.

Infine si calcola il vettore dei carichi nodali residui dato da:

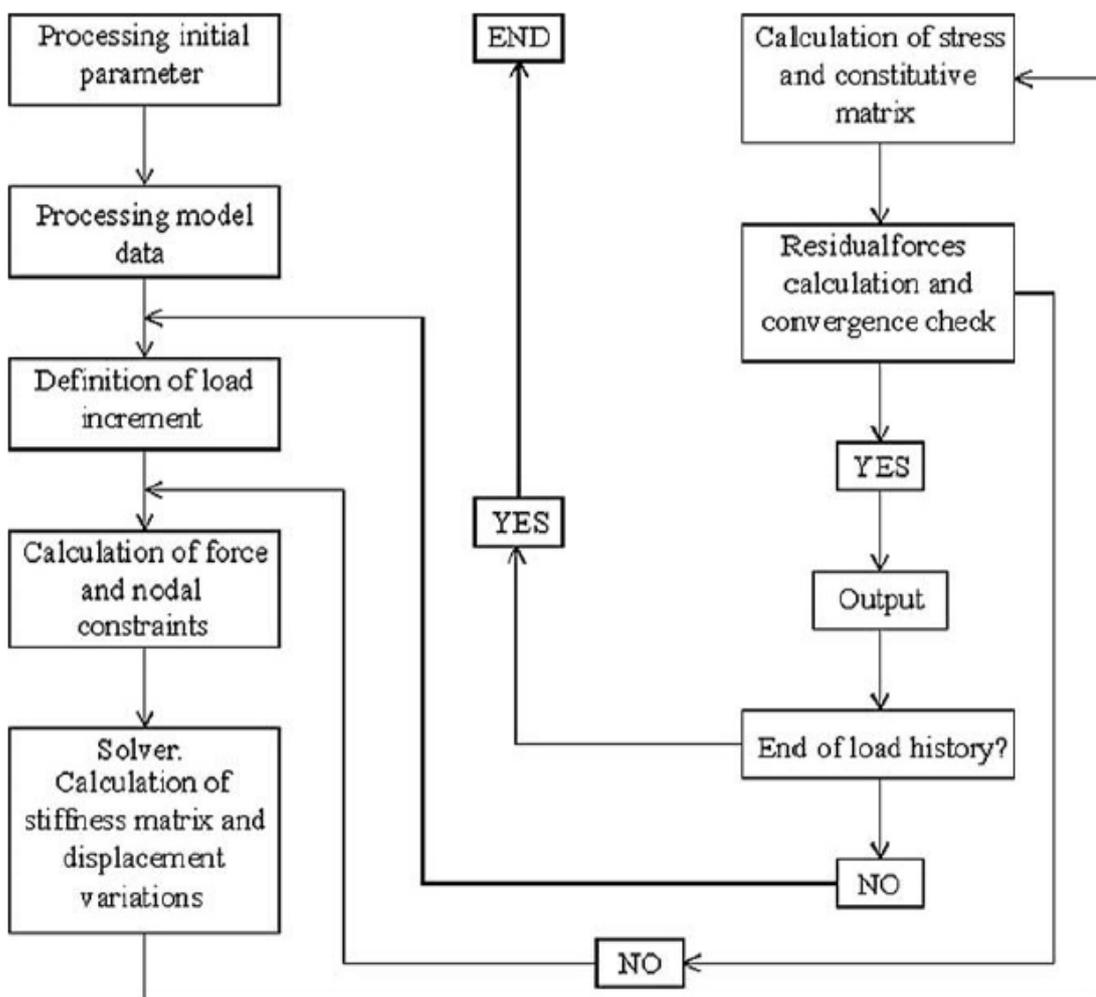
$$\sum_{k=1}^j \{\mathbf{f}^{(0,k)}\} - [\mathbf{K}_T\{\mathbf{u}^{(i+1,j)}\}] \{\Delta \mathbf{u}^{(i+1,j)}\} = \{\Delta \mathbf{f}^{(i+1,j)}\}. \quad (\text{IV-20})$$

con $\sum_{k=1}^j \{\mathbf{f}^{(i,j)}\}$ il vettore dei carichi nodali equivalenti di tutti i carichi, incluse le reazioni vincolari, fino al j-esimo incremento.

Non rimane altro che da verificare la convergenza:

$$\frac{\{\Delta \mathbf{f}^{(i+1,j)}\}}{\sum_{k=1}^j \{\mathbf{f}^{(0,k)}\}} \leq \xi_C \quad (\text{IV-21})$$

Si riporta nel seguito un diagramma di flusso esplicativo del procedimento risolutivo incrementale col codice NOSA appena spiegato.



IV.3.1.1 Calcolo della derivata del tensore degli sforzi rispetto alle deformazioni totali

Come premesso, per la determinazione in forma esplicita della matrice di rigidezza, è necessario il calcolo della derivata dello sforzo \mathbf{T} rispetto alla deformazione totale \mathbf{E} .

Sia Sym^+ il sottoinsieme di Sym di tutti i tensori simmetrici aventi autovalori distinti. Dato allora $A \in Sym^+$, siano $\mathbf{a}_1 < \mathbf{a}_2 < \mathbf{a}_3$ i suoi autovalori e $\mathbf{g}_1 < \mathbf{g}_2 < \mathbf{g}_3$ una terna di corrispondenti autovettori normalizzata.

Per comodità di notazione poniamo:

$$G_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1)$$

$$G_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_1)$$

$$G_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_2)$$

Si dimostrano sotto le ipotesi suddette le seguenti identità:

$$D_A \mathbf{a}_1 = \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 \quad (\text{IV-22})$$

$$D_A \mathbf{a}_2 = \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 \quad (\text{IV-23})$$

$$D_A \mathbf{a}_3 = \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3 \quad (\text{IV-24})$$

$$D_A \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 = \frac{1}{a_1 - a_2} G_{12} \otimes G_{12} + \frac{1}{a_1 - a_3} G_{13} \otimes G_{13} \quad (\text{IV-25})$$

$$D_A \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 = \frac{1}{a_2 - a_1} G_{12} \otimes G_{12} + \frac{1}{a_2 - a_3} G_{23} \otimes G_{23} \quad (\text{IV-26})$$

$$D_A \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 = \frac{1}{a_3 - a_1} G_{13} \otimes G_{13} + \frac{1}{a_3 - a_2} G_{23} \otimes G_{23} \quad (\text{IV-27})$$

Dimostriamo nel seguito la (IV-22) e la (IV-25), poiché le altre si dimostrano analogamente.

Siano \mathbf{A} e \mathbf{H} e Sym e $\alpha \in \mathbb{R}$; siano poi $\mathbf{a}_1(\alpha)$ e $\mathbf{g}_1(\alpha)$ rispettivamente i più piccoli autovalore e autovettore di $\mathbf{A} + \alpha \mathbf{H}$:

$$(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{H}) \mathbf{g}_1(\alpha) = \mathbf{a}_1(\alpha) \mathbf{g}_1(\alpha) \quad (\text{IV-28})$$

Linearizzando rispetto all'origine si può scrivere:

$$\mathbf{a}_1(\alpha) = \mathbf{a}_1(0) + \dot{\mathbf{a}}_1(0) \cdot (\alpha - 0) \quad (\text{IV-29})$$

$$\mathbf{g}_1(\alpha) = \mathbf{g}_1(0) + \dot{\mathbf{g}}_1(0) \cdot (\alpha - 0) \quad (\text{IV-30})$$

con il punto che indica la derivata rispetto ad α e valide a meno di un $o(\alpha)$.

Sostituendo le due relazioni (IV-29) e (IV-30) nella (IV-28) e semplificando α si ottiene:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{g}}_1(0) + \mathbf{H} \mathbf{g}_1(0) = \dot{\mathbf{a}}_1(0) \mathbf{g}_1(0) + \mathbf{a}_1(0) \dot{\mathbf{g}}_1(0) \quad (\text{IV-31})$$

Sfruttando, poi, l'ortonormalità degli autovettori, tale che $\mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_1 = 1$ e $\dot{\mathbf{g}}_1(0) \cdot \mathbf{g}_1 = 0$, si moltiplicano entrambi i membri per $\mathbf{g}_1(0)$ e otteniamo:

$$\mathbf{g}_1(0) \cdot \mathbf{H} \mathbf{g}_1(0) = \dot{\mathbf{a}}_1(0) \quad (\text{IV-32})$$

Per le proprietà del prodotto tensoriale

$$\dot{\mathbf{a}}_1(0) = \mathbf{g}_1(0) \cdot \mathbf{H} \mathbf{g}_1(0) = \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{H} \quad (\text{IV-33})$$

Essendo, $\forall \mathbf{H}$ e Sym ,

$$\dot{\mathbf{a}}_1(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} (\mathbf{a}_1(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{H}) - \mathbf{a}_1(\mathbf{A})) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{a}_1(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{H})|_{\alpha=0} = D_A \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{H}$$

Sostituendo nella (IV-33) e semplificando \mathbf{H} si arriva infine all'identità (IV-22):

$$D_A \mathbf{a}_1 = \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1.$$

Passiamo alla dimostrazione dell'altra identità.

Per il calcolo della derivata di $\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1$ bisogna calcolare la derivata di \mathbf{g}_1 ; per farlo sostituiamo la (IV-33) nella (IV-31) e otteniamo:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{g}}_1(0) + \mathbf{H} \mathbf{g}_1(0) = (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{H}) \mathbf{g}_1(0) + \mathbf{a}_1(0) \dot{\mathbf{g}}_1(0) \quad (\text{IV-34})$$

Sempre per l'ortonormalità degli autovettori, possiamo esprimere $\dot{\mathbf{g}}_1(0)$ come combinazione lineare di \mathbf{g}_2 e \mathbf{g}_3 con coefficienti ξ e χ dipendenti da \mathbf{A} . Così facendo, la (IV-34) diventa:

$$\mathbf{A}(\xi \mathbf{g}_2 + \chi \mathbf{g}_3) + \mathbf{H} \mathbf{g}_1(0) = (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{H}) \mathbf{g}_1(0) + \mathbf{a}_1(0)(\xi \mathbf{g}_2 + \chi \mathbf{g}_3) \quad (\text{IV-35})$$

$$\xi (\mathbf{A} \mathbf{g}_2 - \mathbf{a}_1 \mathbf{g}_2) + \chi (\mathbf{A} \mathbf{g}_3 - \mathbf{a}_1 \mathbf{g}_3) = (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{H}) \mathbf{g}_1(0) - \mathbf{H} \mathbf{g}_1(0) \quad (\text{IV-36})$$

Cioè, per la definizione di autovettore:

$$\xi (\mathbf{a}_2 \mathbf{g}_2 - \mathbf{a}_1 \mathbf{g}_2) + \chi (\mathbf{a}_3 \mathbf{g}_3 - \mathbf{a}_1 \mathbf{g}_3) = (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{H}) \mathbf{g}_1(0) - \mathbf{H} \mathbf{g}_1(0) \quad (\text{IV-37})$$

Moltiplicando prima per \mathbf{g}_2 e poi per \mathbf{g}_3 , si determinano i due coefficienti:

$$\xi = \frac{1}{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{H}$$

$$\chi = \frac{1}{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{H}$$

Dunque

$$\dot{\mathbf{g}}_1(0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{g}_1(\mathbf{A} + \alpha \mathbf{H}) \Big|_{\alpha=0} = D_A \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{H} = \xi \mathbf{g}_2 + \chi \mathbf{g}_3 = \quad (\text{IV-38})$$

$$= \left(\frac{1}{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{H} \right) \mathbf{g}_2 + \left(\frac{1}{\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3} \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{H} \right) \mathbf{g}_3 = \quad (\text{IV-39})$$

$$\left(\frac{1}{2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)} \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_2 + \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{g}_1 \right) [\mathbf{H}] + \left(\frac{1}{2(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3)} \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_3 + \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{g}_1 \right) [\mathbf{H}] \quad (\text{IV-40})$$

Una volta noto il valore della derivata di \mathbf{g}_1 rispetto ad \mathbf{A} possiamo finalmente scrivere, per le proprietà del prodotto tensoriale:

$$D_A \mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{g}_1[\mathbf{H}] = D_A \mathbf{g}_1[\mathbf{H}] \otimes \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_1 \otimes D_A \mathbf{g}_1[\mathbf{H}] \quad (\text{IV-41})$$

Effettuata questa premessa sulle derivate degli autovettori di uno spazio simmetrico, possiamo passare al calcolo della derivata del tensore degli sforzi rispetto alla deformazione totale $D_E \mathbf{T}$.

Ovviamente dovremo di nuovo differenziare il calcolo nei quattro sottospazi di \mathbf{R} precedentemente definiti, in cui è stato diviso il dominio degli autovalori di \mathbf{E} .

Consideriamo la base ortonormale di Sym :

$$\mathbf{O}_1 = \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{O}_2 = \mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_2$$

$$\mathbf{O}_3 = \mathbf{q}_3 \otimes \mathbf{q}_3$$

$$\mathbf{O}_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_1)$$

$$\mathbf{O}_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_3 \otimes \mathbf{q}_1)$$

$$\mathbf{O}_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_3 \otimes \mathbf{q}_2)$$

In questo modo \mathbf{T} può essere scritto con la sua rappresentazione spettrale:

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 t_i \mathbf{O}_i$$

Il calcolo da effettuare è, quindi, il seguente:

$$D_E \mathbf{T}(\mathbf{E}) = D_e t_1 \otimes \mathbf{O}_1 + t_1 \otimes D_e \mathbf{O}_1 + D_e t_2 \otimes \mathbf{O}_2 + t_2 \otimes D_e \mathbf{O}_2 + D_e t_3 \otimes \mathbf{O}_3 + t_3 \otimes D_e \mathbf{O}_3$$

In cui le derivate degli autovettori devono essere calcolate come precedentemente mostrato e agli autovalori devono essere sostituite le loro espressioni in ogni regione.

In particolare:

$$D_E e_1 = \mathbf{O}_1, D_E e_2 = \mathbf{O}_2, D_E e_3 = \mathbf{O}_3$$

$$D_E \mathbf{O}_1 = \frac{1}{e_1 - e_2} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \frac{1}{e_1 - e_3} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13}$$

$$D_E \mathbf{O}_2 = \frac{1}{e_2 - e_1} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \frac{1}{e_2 - e_3} \mathbf{O}_{23} \otimes \mathbf{O}_{23}$$

$$D_E \mathbf{O}_3 = \frac{1}{e_3 - e_1} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13} + \frac{1}{e_3 - e_2} \mathbf{O}_{23} \otimes \mathbf{O}_{23}$$

Distinguiamo i quattro casi:

1) Se $\mathbf{E} \in \mathbf{R}_1$

$$D_E \mathbf{T} = \mathbf{C} = 2\mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$$

2) Se $\mathbf{E} \in \mathbf{R}_2$

$$D_E \mathbf{T} = \sigma \left(\frac{1}{e_1 - e_2} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \frac{1}{e_1 - e_3} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13} \right) + \sigma \left(\frac{1}{e_2 - e_1} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \frac{1}{e_2 - e_3} \mathbf{O}_{23} \otimes \mathbf{O}_{23} \right) + \sigma \left(\frac{1}{e_3 - e_1} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13} + \frac{1}{e_3 - e_2} \mathbf{O}_{23} \otimes \mathbf{O}_{23} \right) = \mathbf{0}$$

3) Se $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_3$

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{E}}\mathbf{T} &= \frac{\mu}{1+\alpha} \{(2+3\alpha)\mathbf{O}_1\} \otimes \mathbf{O}_1 + \frac{\mu}{1+\alpha} \{(2+3\alpha)e_1 + \alpha\epsilon\} \left(\frac{1}{e_1-e_2} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \frac{1}{e_1-e_3} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13} \right) + \\
 &\quad \sigma \left(\frac{1}{e_2-e_1} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \frac{1}{e_2-e_3} \mathbf{O}_{23} \otimes \mathbf{O}_{23} \right) + \sigma \left(\frac{1}{e_3-e_1} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13} + \frac{1}{e_3-e_2} \mathbf{O}_{23} \otimes \mathbf{O}_{23} \right) = \\
 &= \frac{\mu}{1+\alpha} \{(2+3\alpha)\} \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} \left\{ \frac{\mu}{1+\alpha} [(2+3\alpha)e_1 + \alpha\epsilon] \frac{1}{e_1-e_2} - \frac{\mu\epsilon}{e_1-e_2} \right\} + \\
 &\quad + \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13} \left\{ \frac{\mu}{1+\alpha} [(2+3\alpha)e_1 + \alpha\epsilon] \frac{1}{e_1-e_3} - \frac{\mu\epsilon}{e_1-e_3} \right\} = \\
 &= \mathbf{E} \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \frac{\mu}{1+\alpha} [(2+3\alpha)e_1 - \epsilon] \frac{1}{e_1-e_2} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \frac{\mu}{1+\alpha} [(2+3\alpha)e_1 - \epsilon] \frac{1}{e_1-e_3} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13}
 \end{aligned}$$

Da cui:

$$D_{\mathbf{E}}\mathbf{T} = \mathbf{E} \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \frac{\mu}{1+\alpha} [(2+3\alpha)e_1 - \epsilon] \frac{1}{e_1-e_2} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \frac{\mu}{1+\alpha} [(2+3\alpha)e_1 - \epsilon] \frac{1}{e_1-e_3} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13}$$

4) Se $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_4$

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{E}}\mathbf{T} &= \frac{\mu}{2+\alpha} \{4(1+\alpha)\mathbf{O}_1 + 2\alpha\mathbf{O}_2\} \otimes \mathbf{O}_1 + \frac{\mu}{2+\alpha} \{4(1+\alpha)e_1 + 2\alpha e_2 + \alpha\epsilon\} \left(\frac{1}{e_1-e_2} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{e_1-e_3} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13} \right) + \frac{\mu}{2+\alpha} \{4(1+\alpha)\mathbf{O}_2 + 2\alpha\mathbf{O}_1\} \otimes \mathbf{O}_1 + \frac{\mu}{2+\alpha} \{4(1+\alpha)e_2 + 2\alpha e_1 + \\
 &\quad + \alpha\epsilon\} \left(\frac{1}{e_2-e_1} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \frac{1}{e_2-e_3} \mathbf{O}_{23} \otimes \mathbf{O}_{23} \right) + \sigma \left(\frac{1}{e_3-e_1} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13} + \frac{1}{e_3-e_2} \mathbf{O}_{23} \otimes \mathbf{O}_{23} \right) = \\
 &= \frac{4\mu(1+\alpha)}{2+\alpha} \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \frac{2\alpha\mu}{2+\alpha} \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_1 + \frac{4\mu(1+\alpha)}{2+\alpha} \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2 + \frac{2\alpha\mu}{2+\alpha} \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_2 + \\
 &\quad + \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} \left\{ \frac{\mu}{2+\alpha} \frac{4(1+\alpha)e_1 + 2\alpha e_2 + \alpha\epsilon - 4(1+\alpha)e_2 + 2\alpha e_1 - \alpha\epsilon}{e_1-e_2} \right\} + \\
 &\quad + \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13} \left\{ \frac{\mu}{2+\alpha} \frac{4(1+\alpha)e_1 + 2\alpha e_2 + \alpha\epsilon - (2+\alpha)\epsilon}{e_1-e_3} \right\} + \\
 &\quad + \mathbf{O}_{23} \otimes \mathbf{O}_{23} \left\{ \frac{\mu}{2+\alpha} \frac{4(1+\alpha)e_2 + 2\alpha e_1 + \alpha\epsilon - (2+\alpha)\epsilon}{e_2-e_3} \right\}.
 \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
 D_{\mathbf{E}}\mathbf{T} &= \frac{4\mu(1+\alpha)}{2+\alpha} \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_1 + \frac{4\mu(1+\alpha)}{2+\alpha} \mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_2 + \frac{2\alpha\mu}{2+\alpha} (\mathbf{O}_2 \otimes \mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_1 \otimes \mathbf{O}_2) + \\
 &\quad + \frac{\mu}{2+\alpha} \frac{2(2+\alpha)(e_1-e_2) - \alpha\epsilon}{e_1-e_2} \mathbf{O}_{12} \otimes \mathbf{O}_{12} + \frac{2\mu}{2+\alpha} \frac{2(1+\alpha)e_1 + \alpha e_2 - \epsilon}{e_1-e_3} \mathbf{O}_{13} \otimes \mathbf{O}_{13} + \\
 &\quad + \frac{2\mu}{2+\alpha} \frac{2(1+\alpha)e_2 + \alpha e_1 - \epsilon}{e_2-e_3} \mathbf{O}_{23} \otimes \mathbf{O}_{23}.
 \end{aligned}$$

IV.4 La volta: geometria e scelta dei vincoli

La volta oggetto di analisi è la volta del Salone al primo piano di Palazzo Franchetti a Pisa. Essa è una volta a botte con teste di padiglione, lunettata, in muratura ad una testa. Ha una estensione piuttosto ampia, con uno sviluppo in pianta di oltre 118m^2 e uno sviluppo longitudinale e trasversale massimo rispettivamente di 14.17m e di 8.80m . L'altezza dal solaio del salone è di oltre $8,20\text{m}$.

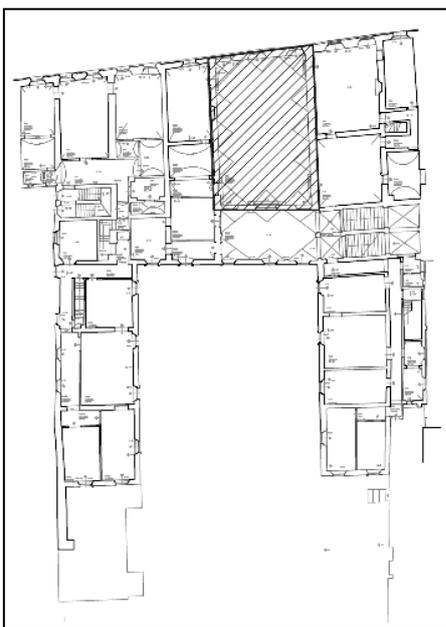


Figura IV-5 - Pianta piano primo di palazzo Franchetti: posizione del Salone

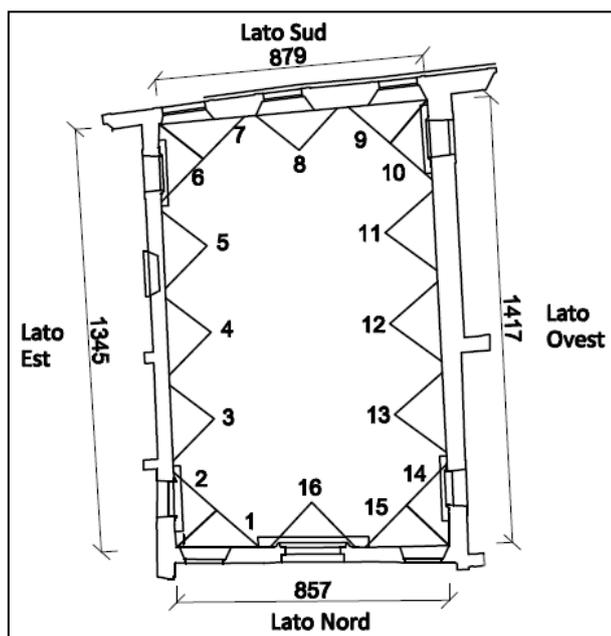
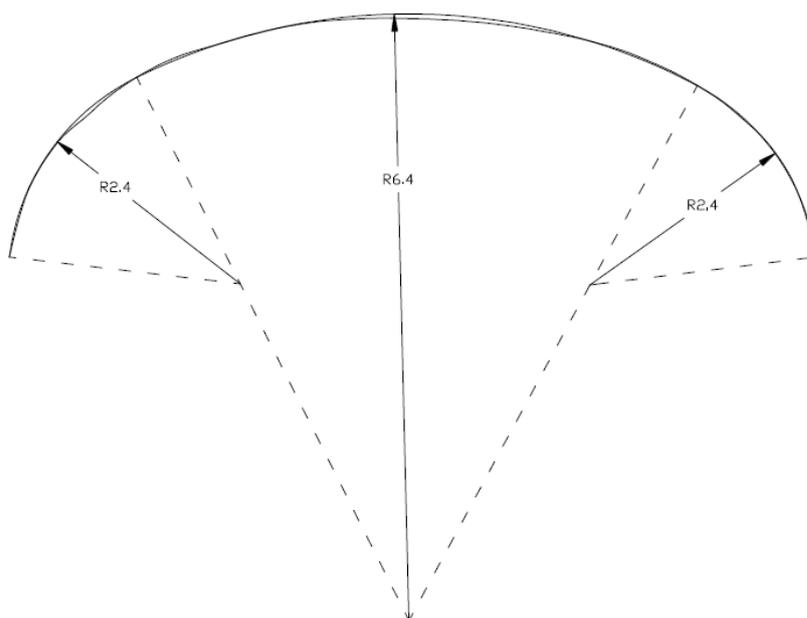


Figura IV-6 - Pianta della volta del Salone con numerazione unghie

Le 16 unghie hanno una pianta triangolare con intersezione a cuspidi con la volta.

L'intradosso è totalmente affrescato e l'ornamento, raffigurante l'Olimpo degli Dei e realizzato dal pittore Agostino Ghirlanda da Fivizzano, risale al XIV secolo. La volta si presume, perciò, essere stata costruita intorno al 1500 e presenta una sezione trasversale tricentrica secondo l'uso dell'epoca.



In direzione trasversale la volta presenta una sezione a curvatura molto marcata, mentre in direzione longitudinale essa è praticamente orizzontale.

Le pareti laterali del Salone corrono oltre la volta, che non è, quindi, di copertura e ciò ha determinato una buona conservazione della muratura della volta e un maggiore contenimento della stessa, che risulta essere inglobata nella struttura circostante.

L'estradosso della volta è visibile, ma non praticabile e nei sopralluoghi effettuati è stato possibile individuare la presenza di un riempimento in materiale incoerente, fino al completo ricoprimento delle unghie, e di due muretti trasversali di rinfiacco a filo di estradosso, dello spessore di circa 30cm, posti ai lati Nord e Sud della volta analogamente a dei frenelli. Ognuno di essi è sormontato da una catena che sembra essere stata introdotta al tempo della costruzione della volta: nella parte centrale, infatti, le due catene divengono solidali con i due muretti e l'estradosso della struttura, mentre lateralmente si inseriscono nei muri Est ed Ovest.

Numerosi sono, quindi, gli elementi che concorrono a dare stabilità alla volta e per valutarne l'efficacia e la necessità si è deciso di utilizzare più modelli.

I modelli sono stati tutti ottenuti con il programma Rhinoceros 4.0, con elementi shell prevalentemente quadrangolari. Il codice NOSA, infatti, non prevede l'uso di elementi triangolari, che, nel caso siano presenti considera come elementi quadrangolari collassati, con il quarto nodo coincidente con uno dei tre dell'elemento triangolare.

IV.4.1 Modello I

Un primo modello è quello della semplice volta, spogliata di pareti laterali, muretti di rinfianco e catene.

Questo modello è composto da 15520 elementi e 15407 nodi ed è stato ricostruito sulla base della nuvola di punti ricavata dal rilievo con stazione totale effettuato dai colleghi del corso di Restauro, ai fini della mappatura dell'affresco. Per approssimare al meglio la forma irregolare e curva della volta, è stata scelta una dimensione massima di 10 cm per il lato degli elementi che compongono la mesh. Essi sono, infatti, elementi prevalentemente piani con cui si cerca di approssimare, però, una struttura curva e irregolare: si capisce che più sono di estensione limitata e più si adeguano alla geometria reale della volta; tutto questo, ovviamente, compatibilmente con un accettabile onere computazionale.

La mesh così ottenuta è mostrata nella seguente figura.

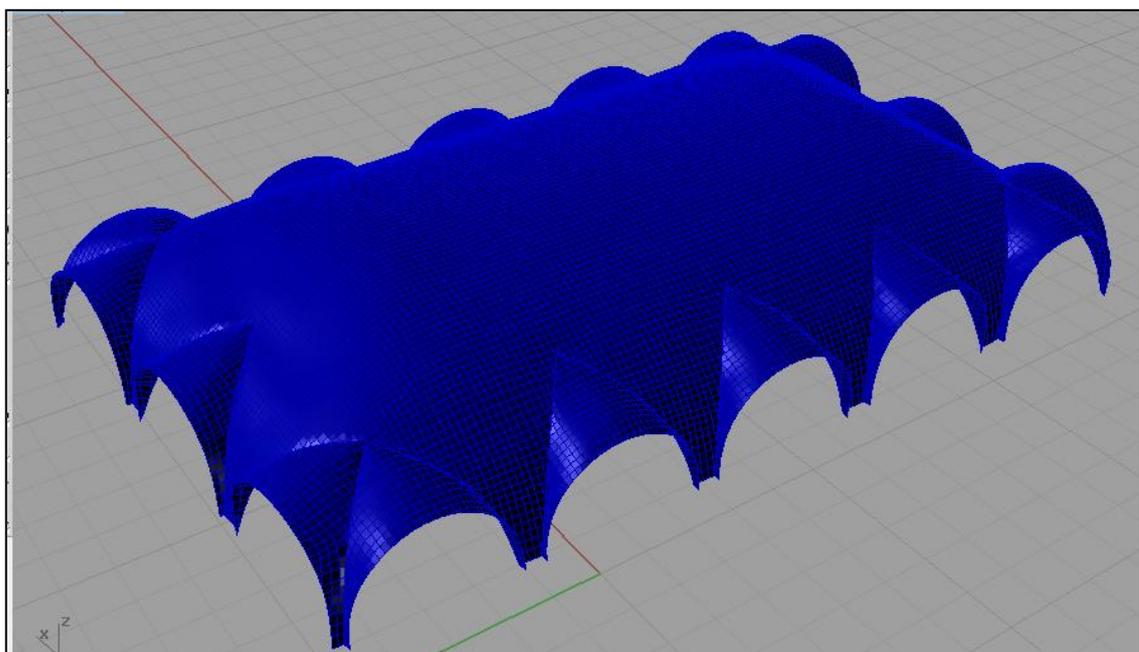


Figura IV-7 - Mesh modello I ottenuta con Rhinoceros 4.0

Andando ad analizzarne meglio il profilo in direzione trasversale, si nota un avvallamento nella zona centrale di circa 4mm, con una configurazione della sezione che sembra “appendersi” nelle due zone laterali in cui la volta appare indeformata.

In queste zone, infatti, si innestano i due muretti trasversali con le catene, che hanno impedito evidentemente alla volta di abbassarsi.

Questo modello è stato studiato con le seguenti condizioni di vincolo:

1. semplice appoggio alla base: $U_x = 0$, $U_y = 0$ $U_z = 0$;

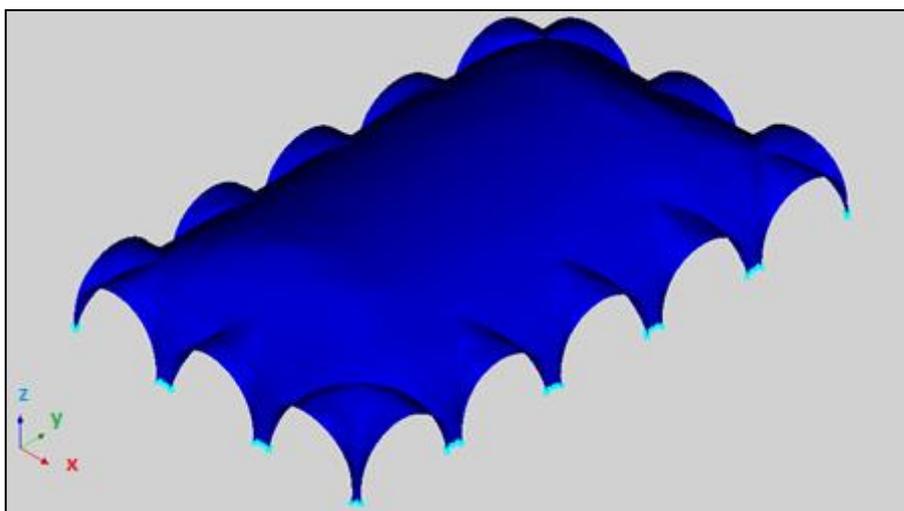


Figura IV-8 - Punti vincolati per la condizione di vincolo di semplice appoggio alla base

2. semplice appoggio alla base e carrelli verticali su tutto il perimetro laterale delle unghie: questa condizione di vincolo è volta alla schematizzazione di quella offerta dalle pareti laterali e per questo il vincolo orizzontale, per ogni lato, è stato imposto con la direzione vincolata ortogonale alla parete ad esso relativa (Figura IV-9 e Figura IV-10).

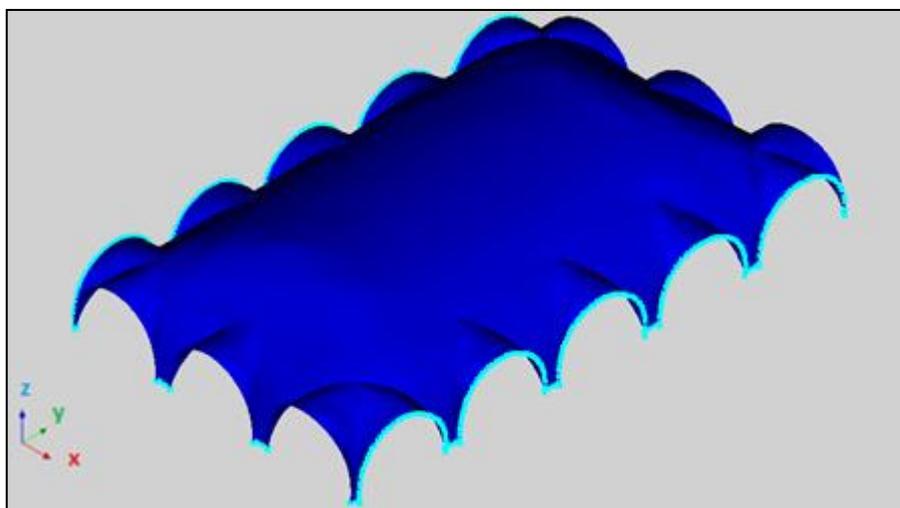


Figura IV-9 – Lati con vincolo fisso in direzione trasversale: $U_x = 0$

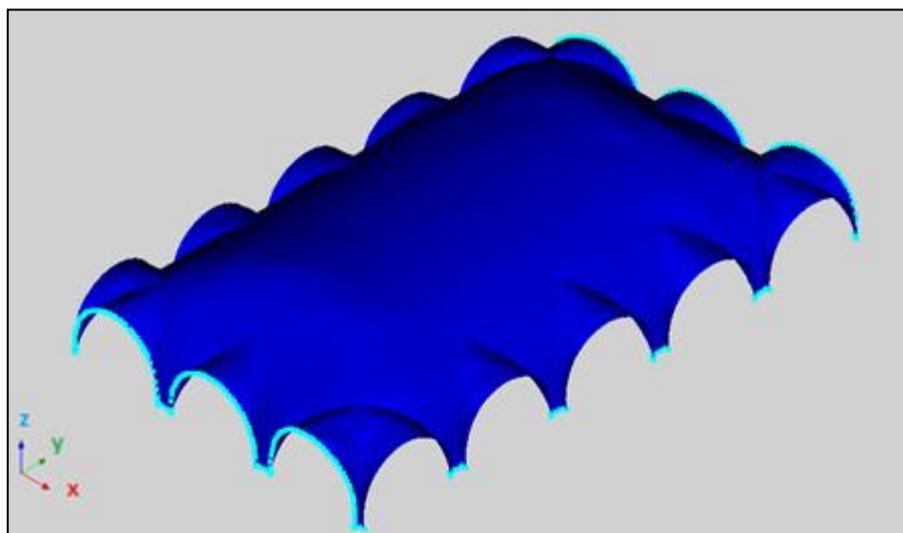


Figura IV-10 – Lati con vincolo fisso in direzione longitudinale $U_y = 0$

IV.4.2 Modello II

Il secondo modello è stato ricavato dal precedente inserendovi i muretti trasversali e ottenendo una nuova mesh formata da 16199 elementi e da 16341 nodi.

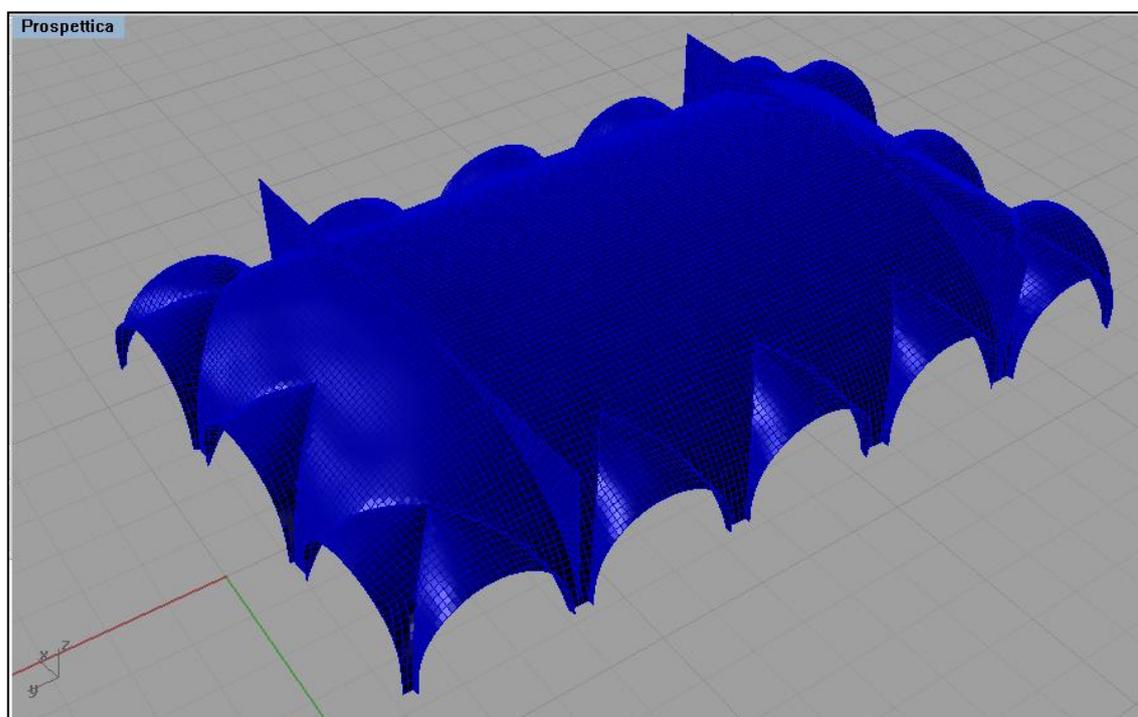


Figura IV-11 - Mesh modello II ottenuta con Rhinoceros 4.0

Questo modello è stato studiato con le seguenti condizioni di vincolo:

1. Semplice appoggio alla base (Figura IV-8);

2. semplice appoggio alla base e carrelli verticali in corrispondenza dei lati Est e Ovest dei muretti, a schematizzarne il collegamento con le pareti;

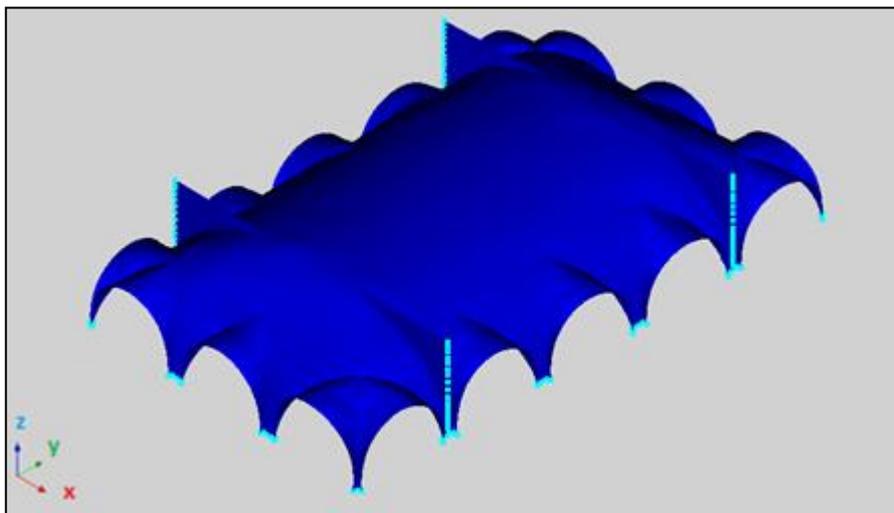


Figura IV-12 - Punti vincolati per la base e per i muretti

3. semplice appoggio alla base e carrelli verticali su tutto il perimetro laterale delle unghie e dei muretti: vale ciò che è stato spiegato per il modello precedente (vedere pag.151).

IV.4.3 Modello III

Nel terzo modello sono state inserite le pareti laterali del salone su cui poggia la volta, per tutto il loro sviluppo, dal piano terra alla copertura. Le pareti sono state suddivise in elementi di dimensioni maggiori rispetto a quelli della volta: esse sono strutture piane e, al contrario di quanto spiegato precedentemente per la volta, la corretta approssimazione della loro geometria non dipende dalla dimensione degli elementi; la loro rappresentazione nel modello, inoltre, non è legata alla volontà di studiarle nel dettaglio, ma alla corretta rappresentazione della loro deformabilità, ai fini dello studio degli effetti sulla volta. È stata scelta, quindi, una dimensione massima del lato degli elementi di 50cm, salvo, poi, infittire la mesh nelle zone di collegamento con la volta.

Il modello ottenuto è formato da 25851 elementi e da 24999 nodi ed è mostrato nel seguito.

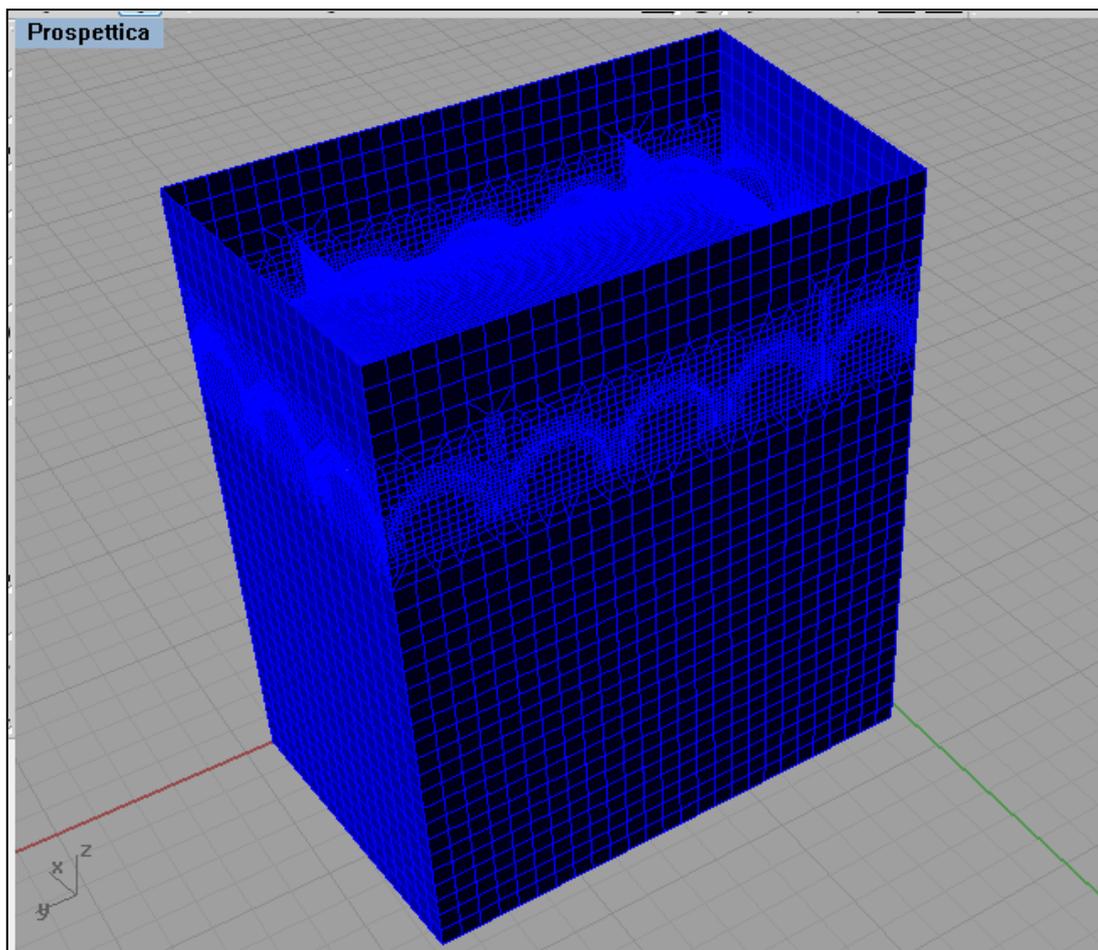


Figura IV-13 -Mesh modello III ottenuta con Rhinoceros 4.0

Questo modello è stato studiato con due condizioni di vincolo: quella allo stato attuale e quella all'ipotetico stato originario della volta.

In entrambi i casi si è cercato di schematizzare l'interazione con la struttura circostante

Per quanto riguarda lo stato attuale, esse sono state ricavate dalle sezioni gentilmente fornite da Maurizio Sguazzino, che ha svolto una Tesi relativa al Palazzo Franchetti di cui la volta fa parte. Le condizioni di vincolo sono riassunte nel seguito:

1. incastro alla base: vincolo offerto dalle fondazioni della struttura;
2. appoggi orizzontali, in direzione ortogonale alle pareti, in corrispondenza dei vari solai ad esse adiacenti;
3. appoggi verticali in direzione trasversale, a schematizzazione del vincolo offerto dalle pareti trasversali adiacenti quella Nord e quella Est;
4. appoggi elastici in corrispondenza dell'intersezione della parete Sud, con la Est e la Ovest ad essa trasversali, per schematizzare la rigidezza offerta dalle pareti adiacenti la parete Sud, non riportate nel modello.

La condizione finale di vincolo è raffigurata nelle immagini seguenti:

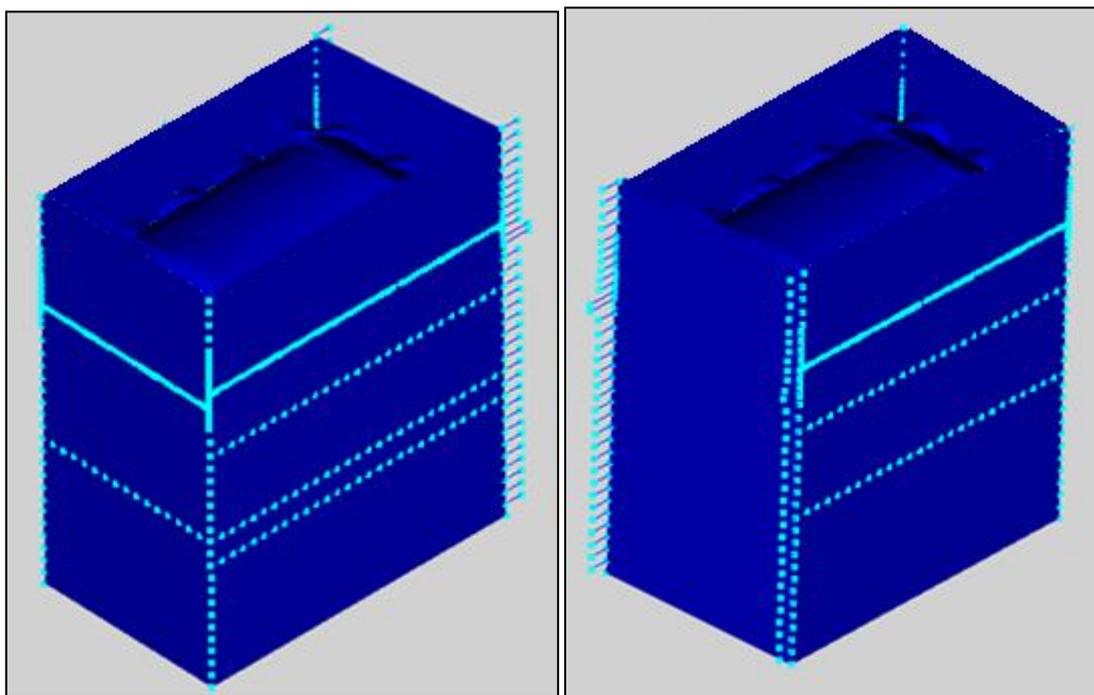


Figura IV-14 - Condizioni di vincolo con viste rispettivamente Nord-Ovest e Sud-Est

Si ritiene opportuno spiegare il punto 4. Nel modello in esame sono state rappresentate solo le pareti che racchiudono la volta, ma in realtà queste fanno parte del complesso più ampio costituito dall'intero edificio. La parete Sud è quella della facciata su Via San Martino ed è continua per tutto lo sviluppo dell'edificio, mentre nel modello ne è stata inserita solo la parte relativa al Salone della volta. Il maggiore sviluppo in pianta determina una maggiore rigidità della parete in generale, ed in particolare anche al ribaltamento fuori piano, che è il meccanismo che ne caratterizza il comportamento sotto l'azione di spinta della volta. Per tenere conto di questo effetto irrigidente è stato realizzato un modello della intera facciata sul programma SAP2000. Essa è stata incastrata agli estremi e caricata con forze unitarie su tutta l'altezza, in corrispondenza delle ascisse di intersezione della facciata con le pareti Est e Ovest del Salone. I risultati dell'analisi in termini di spostamento medio in quelle due sezioni della parete è stato utilizzato per determinare la rigidità offerta dalla situazione reale, ed per inserire nel modello della volta molle di rigidità equivalente distribuite su tutta l'altezza della parete (Figura IV-14).

La seconda condizione di vincolo per il modello III è stata ricavata dalla precedente, eliminando i vincoli relativi alla parete Est, poiché facciata esterne della cellula abitativa di cui la volta faceva parte nel periodo di datazione della volta (cellula 2 della Figura III-7),

cioè precedentemente alla espansione nei tre palazzi Franchetti, Mannaioni e Del Torto (Figura III-8).

La condizione finale risultante è mostrata nel seguito.

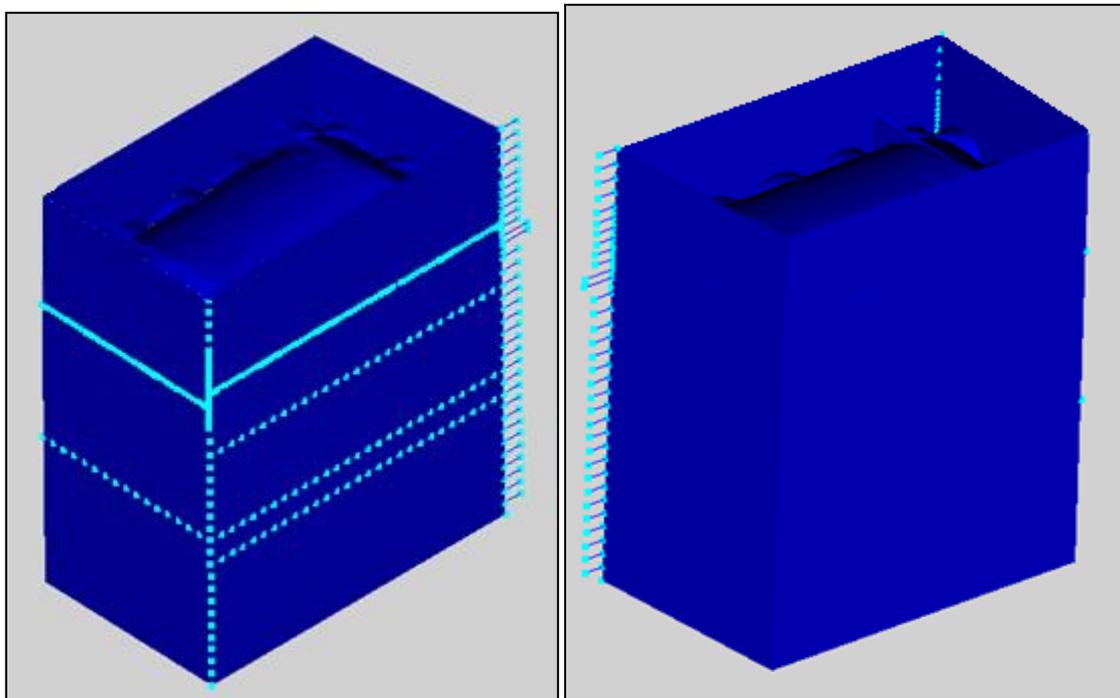


Figura IV-15 - Condizioni di vincolo con viste rispettivamente Nord-Ovest e Sud-Est

Si riportano, infine, gli spessori utilizzati per i vari elementi costituenti i tre modelli:

- la volta: essendo ad una tesa è stato scelto uno spessore di 15 cm, costante in ogni parte, essendo essa priva di stucchi o cornici in spessore;
- i muretti: dai sopralluoghi effettuati all’estradosso della volta è stato determinato uno spessore di 30cm;
- le pareti: dalle sezioni è stato ricavato uno spessore di 40cm per le pareti interne (lati nord, est e ovest) e di 65cm per quella esterna (lato sud).

IV.5 Quadro fessurativo

La volta, come già affermato, è totalmente affrescata all’intradosso, per cui non è stato così immediato il rilievo delle fessure presenti: è stato necessario distinguere, infatti, tra quelle strutturali e quelle legate alle giornate dell’affresco, dovute alle riprese successive dell’elemento pittorico.

Effettuata questa distinzione è stato possibile rilevare un quadro fessurativo caratterizzato da diffuse fessure nella zona delle unghie e fessurazioni praticamente assenti nella volta.

Le zone delle unghie di appoggio alle pareti Est e Sud risultano, in particolare, totalmente fessurate, come se ci fosse stato un distacco tra le due strutture.

Nella Figura IV-16 è riportato il quadro fessurativo rilevato, nel quale le fratture più importanti sono state evidenziate con uno spessore maggiore del tratto.

Osservando le pareti su cui poggia la volta, si notano fessurazioni verticali piuttosto diffuse nelle lunette, che spesso si estendono all'interno della parete sottostante, e una fessurazione orizzontale che corre lungo le tracce dell'impianto elettrico, congiungendo le scatole di derivazione, designate con la S nelle figure seguenti.

La fessurazione diffusa delle pareti Est ed Ovest (Figura IV-18 e Figura IV-19) è probabilmente riconducibile alla storia di formazione del Palazzo, caratterizzata da successive modifiche ed accorpamenti.

Infatti la facciata Sud presenta chiare fessure dovute alla storia evolutiva di casa torre che ha contraddistinto questo edificio: si notano, infatti fessure che seguono il contorno degli antichi piedritti ed archi in pietra (Figura IV-17), che sono stati evidenziati, come abbiamo visto, anche dal rilievo termografico. Esse sono dovute al diverso coefficiente di dilatazione termica che caratterizza, quindi, la pietra e la muratura di cui è costituita la restante parte della parete.

Sono state individuate anche lesioni all'incastro tra la parete Sud e quelle ad essa ortogonali che denotano la tendenza di questa a strapiombare verso Via San Martino.

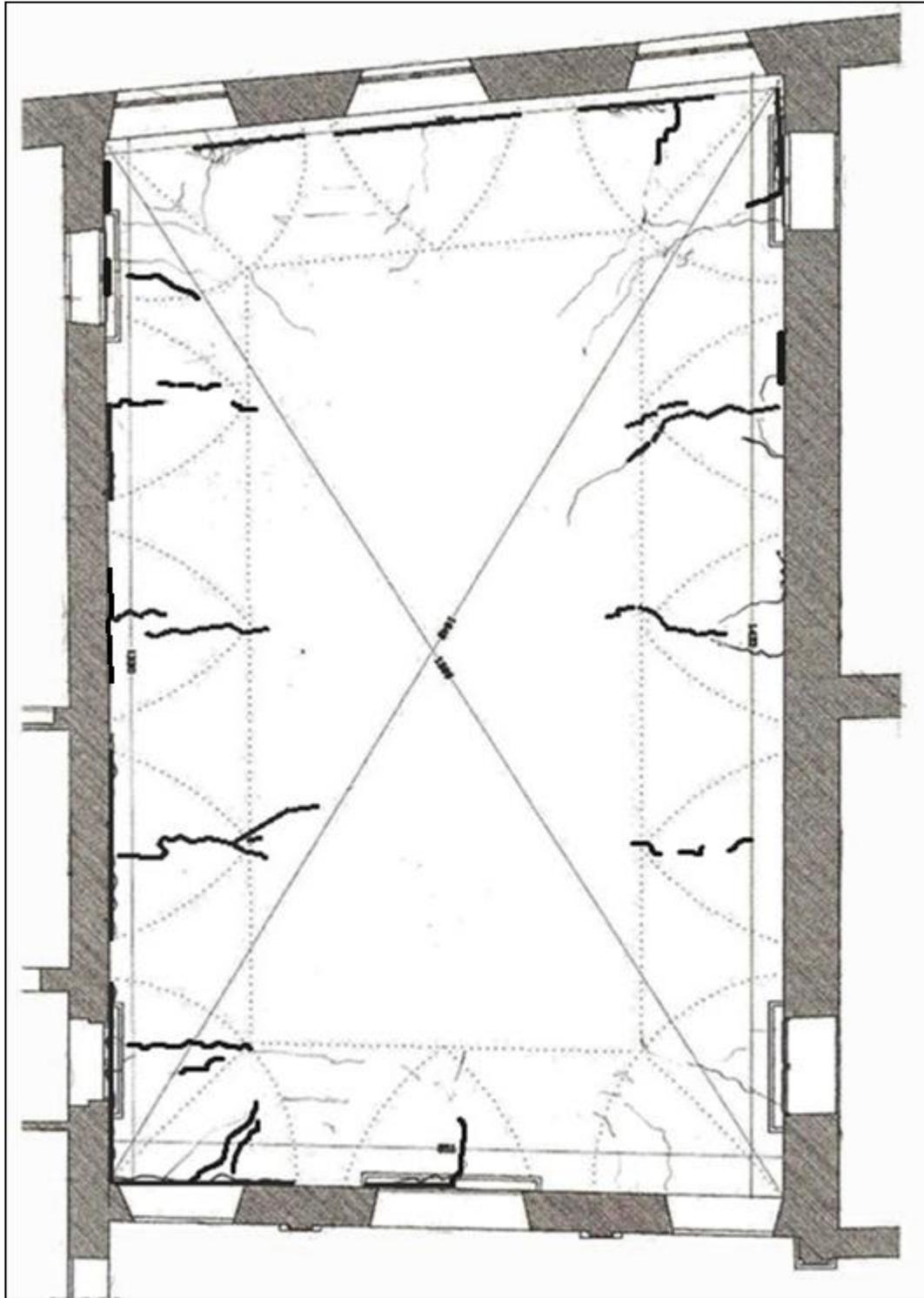


Figura IV-16 – Rilievo visivo del quadro fessurativo della volta (vista in pianta)

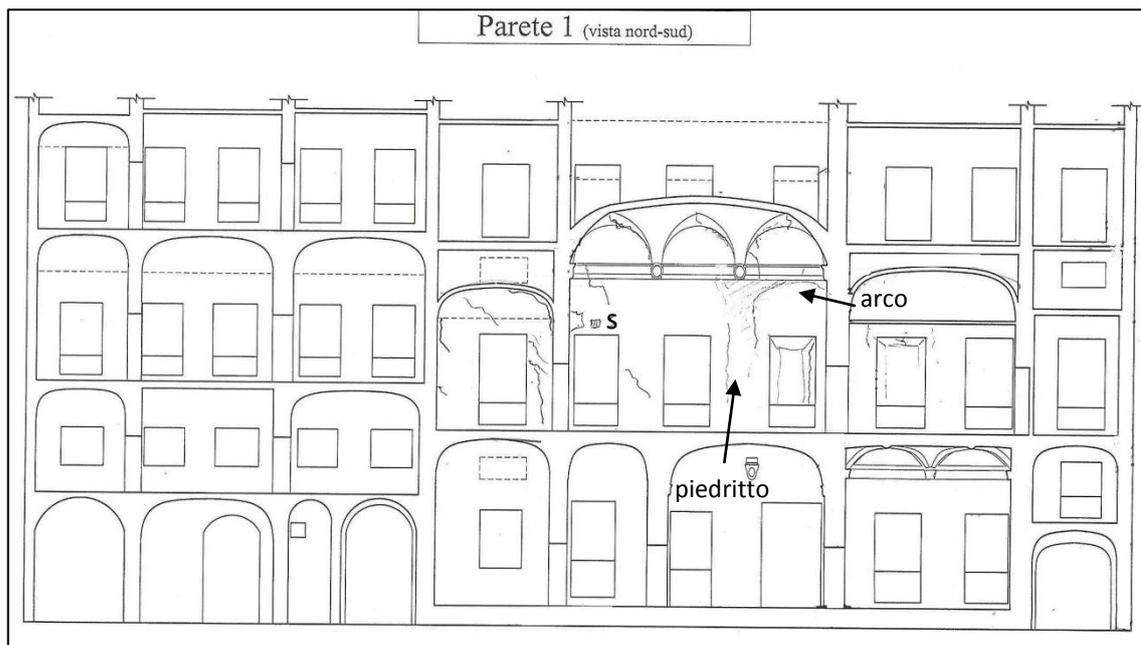


Figura IV-17 – Rilievo visivo del quadro fessurativo della parete Sud

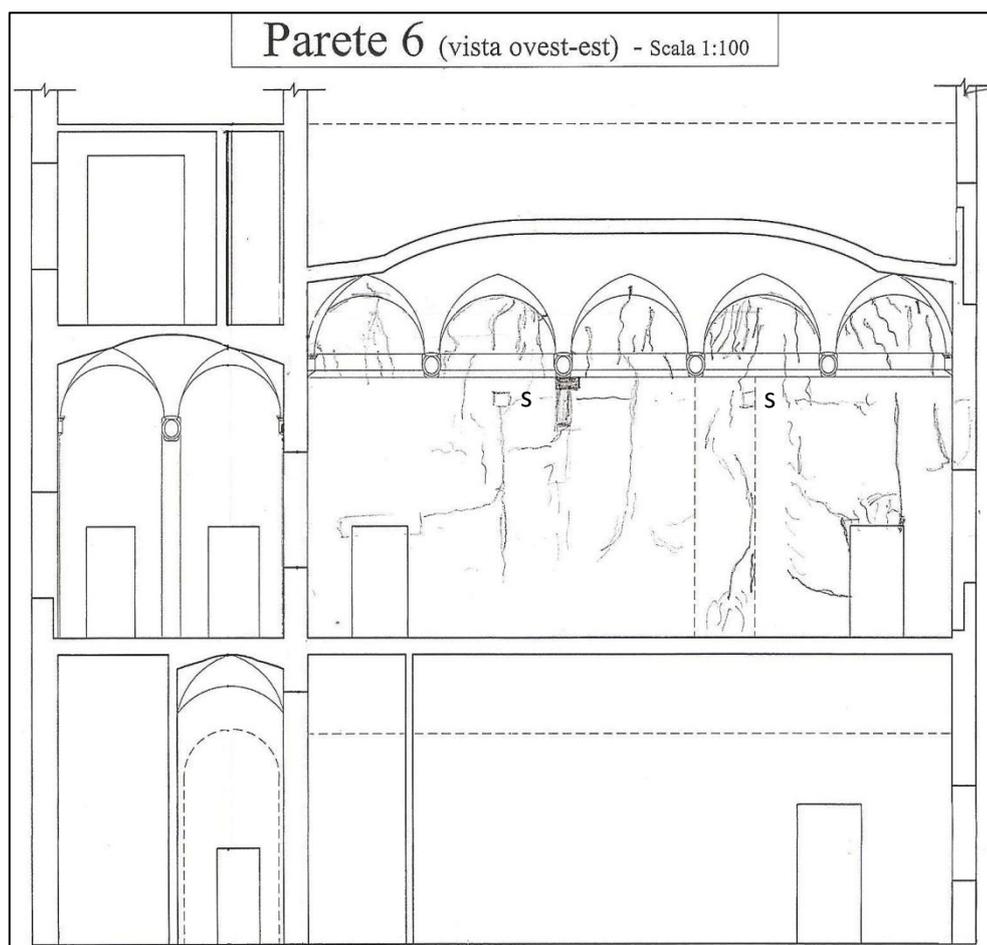


Figura IV-18 – Rilievo visivo del quadro fessurativo della parete Est

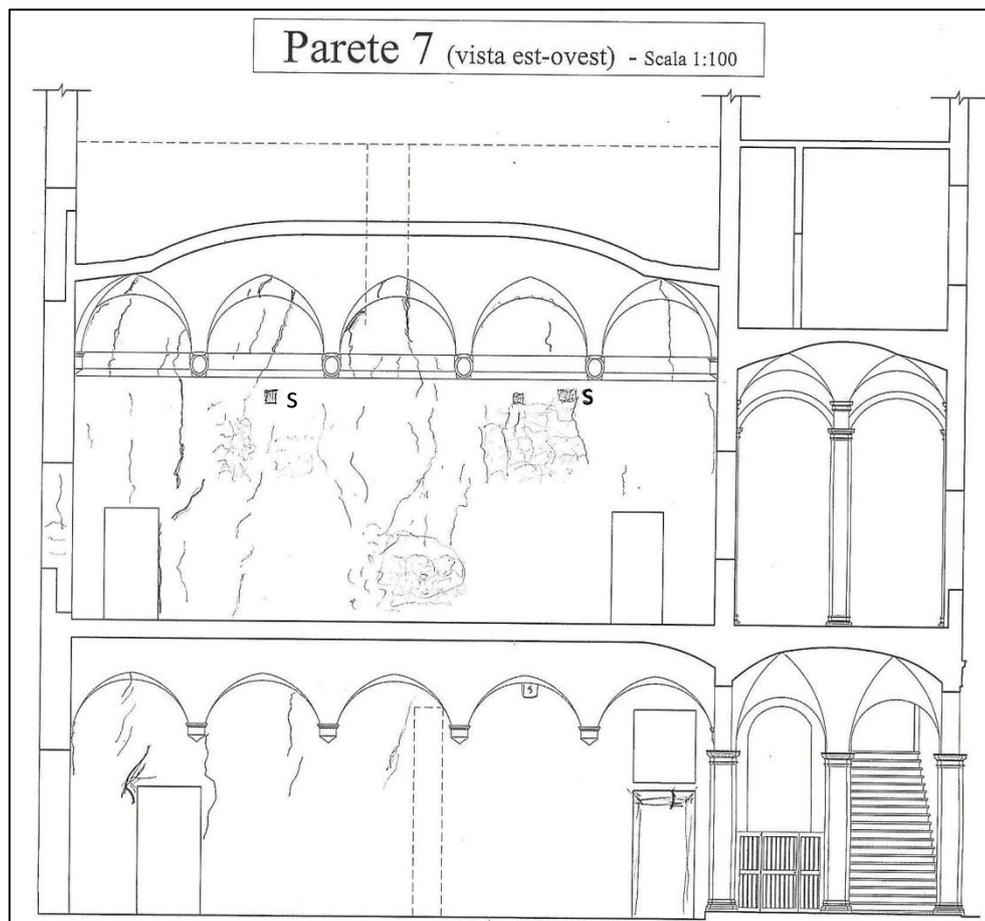


Figura IV-19 – Rilievo visivo del quadro fessurativo della parete Ovest

La parete Nord non presenta, al contrario delle altre, fessurazioni visibili.

IV.6 Scelta del materiale

Le prime analisi di ogni modello sono state svolte con materiale elastico lineare, al fine di verificare la correttezza della mesh e confrontare poi i risultati ottenuti con il materiale elastico non lineare o masonry-like.

Come già ampiamente spiegato, grazie all'utilizzo di questo legame per il continuo, pochi sono i parametri da scegliere per schematizzare un materiale altrimenti molto complesso quale la muratura:

1. il modulo elastico E ;
2. il modulo di Poisson ν ;
3. la densità ρ ;
4. la resistenza a trazione $\sigma_{t,max}$;

5. la resistenza a compressione $\sigma_{c,min}$ (nel caso si voglia utilizzare un legame costitutivo limitatamente resistente a compressione).

Vi è anche la possibilità di inserire il coefficiente di dilatazione termica se si volessero studiare effetti dovuti a variazioni di temperatura ma non è il nostro caso.

Per i primi tre parametri, che sono gli unici da introdurre come input nel caso di materiale elastico lineare, sono stati scelti valori convenzionalmente adottati per la muratura:

1. $E = 3000\text{N/mm}^2$;
2. $\nu = 0.22$
3. $\rho = 1800\text{ kg/m}^3$.

Non avendo svolto indagini sul materiale della struttura in esame, rimangono delle incertezze sul modulo elastico e sulla densità, poiché per questi in letteratura vi è un range di variazione molto ampio.

Per quanto riguarda la densità, essa non entra comunque in gioco nelle analisi effettuate poiché il peso proprio non viene assegnato attraverso il valore ρ , ma come peso uniformemente distribuito sugli elementi, il cui valore viene assegnato manualmente dall'operatore. Per quanto riguarda, invece, il modulo elastico, esso non influisce particolarmente sul comportamento del modello e sui risultati, se non per quanto concerne gli spostamenti. Variando E il valore di questi ultimi resta, comunque, un valore accettabile e non incide sulla convergenza che è studiata in termini di equilibrio.

I parametri la cui scelta risulta, quindi, condizionante, ai fini dei risultati delle analisi e della convergenza del modello, sono quelli di resistenza, per i quali non si è considerato un valore univoco.

Il materiale è stato considerato, in quasi tutte le analisi, non resistente a trazione e infinitamente resistente a compressione, tranne che nel caso di primo e secondo modello con semplice appoggio alla base: il modello con il legame sopracitato non riusciva a trovare la convergenza ed è stato introdotto un materiale debolmente resistente a trazione e infinitamente a compressione, con resistenza a trazione incrementata fino alla convergenza (§IV.10.1);

IV.7 Carichi applicati

In ogni analisi effettuata è stato considerato il peso proprio del materiale, come carico gravitazionale distribuito dovuto alla densità scelta, pari a 1800kg/m^3 . Il carico risultante è, quindi, di circa 18000N/m^3 per un valore complessivo risultante diverso nei tre modelli e pari a:

- Modello I: 384'136N;
- Modello II: 427'579N;
- Modello III: 6'355'882N.

Questi valori sono stati forniti come output dal programma e verificati con calcolo manuale, a conferma del corretto inserimento dell'input del carico.

Un ulteriore sovraccarico considerato è quello del materiale incoerente di rinfiacco.

Esso va a riempire le zone comprese tra la volta ed i muri perimetrali fino a ricoprire interamente le unghie, che non compaiono, infatti, all'estradosso. Per inserire questo carico nell'analisi è stato necessario formulare una *forcem*, una routine che nel programma Nosaltaca è necessaria per l'introduzione di carichi che non siano distribuiti in modo uniforme. In essa è stata inserita la funzione che consenta al programma di considerare il carico in modo corretto.

Esso, infatti, è un carico gravitazionale ma che agisce soltanto al di sotto di una certa quota e che è proporzionale alla distanza dell'elemento mesh da tale quota.

In particolare è stata scelta come quota massima di riempimento quella minima necessaria al ricoprimento di tutte le unghie, pari a 7,62m per i modelli I e II, e 14,12m per il modello III (le quote sono riferite al sistema di riferimento globale del programma).

Tale quota è stata identificata come Z_{vtop} .

Definito il parametro *deltaZ* come la differenza tra Z_{vtop} e la quota del generico elemento della mesh, si forniscono le istruzioni al programma come segue:

- se $\text{deltaZ} \geq \text{fuz}$ allora applica una *forza distribuita* = $-\rho \cdot \text{deltaZ}$;
- se $\text{deltaZ} \leq \text{fuz}$ allora applica una *forza distribuita* = 0.

Il parametro *fuz* indica la tolleranza ed è pari a $1\text{e-}05$, mentre ρ è il peso per unità di volume del materiale di rinfiacco, considerato pari a $20'000\text{N/m}^3$.

In questo modo, a tutti gli elementi della mesh che hanno una quota del baricentro inferiore a Z_{vtop} è applicata una forza gravitazionale distribuita sulla superficie di estradosso pari a $\rho \cdot \delta z$.

Il valore totale del carico dovuto al materiale di rifianco è pari, in tutti e tre i modelli a 832'608N.

IV.8 Elementi finiti utilizzati

Il programma NOSA-ITACA ha una gamma 17 tipologie di elementi per modellare il continuo in elementi finiti: piani o tridimensionali, con funzioni interpolanti lineari o quadratiche e anche diverse per spostamenti e rotazioni.

L'elemento scelto per il modello in esame è il numero 10, denominato *thick shell*, isoparametrico e bilineare. Questo elemento è quadrilatero e formato da quattro nodi, corrispondenti ai vertici dell'elemento (Figura IV-20).

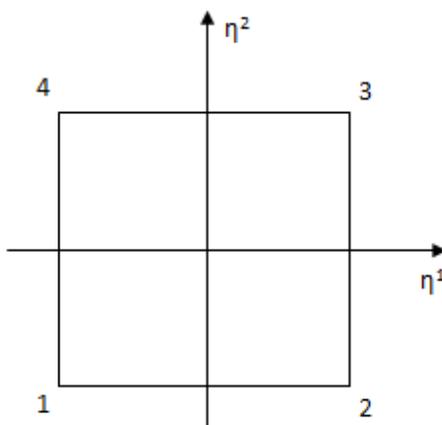


Figura IV-20 – Numerazione elemento thick shell (#10) e sistema locale di riferimento

Gli spostamenti e le rotazioni sono espressi in un sistema di riferimento locale (E_1 , E_2 e N), con gli assi individuati rispettivamente dalla direzione congiungente i nodi 1-2, i nodi 2-3, e dal completamento ortogonale della terna.

In essa le posizioni dei punti del continuo sono individuate dalla terna (η^1, η^2, ζ) con η^1 e η^2 coordinate curvilinee che esprimono la posizione del punto nella superficie media dell'elemento shell e ζ è la distanza del punto da quest'ultima. La dipendenza degli spostamenti da ζ è esplicita per questo elemento, cosicché le funzioni di forma usate sono dipendenti dalle sole due variabili η^1 e η^2 e bilineari:

$$\phi_i(\eta^1, \eta^2) = \frac{1}{4} (1 + \eta^1 \eta_i^1)(1 + \eta^2 \eta_i^2) \text{ con } i=1, \dots, 4.$$

Dette, quindi, $\bar{\psi}$ e $\bar{\theta}$ le rotazioni della normale N alla superficie media dell'elemento, rispetto agli altri due assi della terna (Figura IV-21) e sotto l'ipotesi di piccoli spostamenti si può scrivere: $U^1 = u^1 + \zeta\bar{\theta}$; $U^2 = u^2 + \zeta\bar{\psi}$; $U^3 = u^3$.

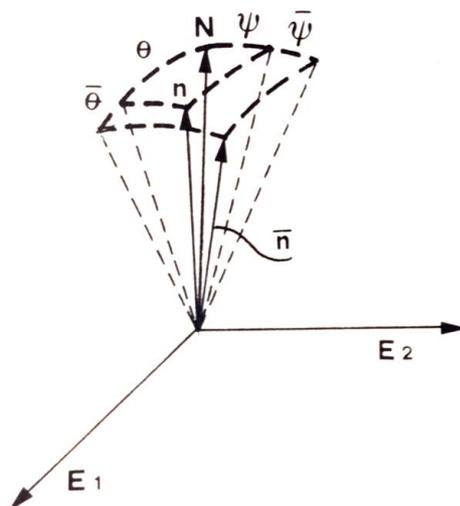


Figura IV-21 – Rotazioni della normale dell'elemento nelle altre due direzioni locali

U^1 , U^2 e U^3 rappresentano gli spostamenti del generico punto dell'elemento nel riferimento locale e devono essere espressi in funzione degli spostamenti u_i^1 , u_i^2 , u_i^3 dei quattro nodi dell'elemento, che sono le effettive incognite del problema di equilibrio e, quindi, il primo output dell'analisi.

Interpolando gli spostamenti nodali tramite le funzioni di forma le equazioni appena scritte diventano:

$$U^1 = \sum_i \phi_i u_i^1 + \zeta \sum_i \phi_i \bar{\theta}_i$$

$$U^2 = \sum_i \phi_i u_i^2 + \zeta \sum_i \phi_i \bar{\psi}_i$$

$$U^3 = \sum_i \phi_i u_i^3$$

Da queste le deformazioni sono ricavate come segue:

$$\varepsilon_{11} = \sum_i \phi_{i,1} u_i^1 + \zeta \sum_i \phi_{i,1} \bar{\theta}_i$$

$$\varepsilon_{22} = \sum_i \phi_{i,2} u_i^2 + \zeta \sum_i \phi_{i,2} \bar{\psi}_i$$

$$\varepsilon_{12} = \sum_i (\phi_{i,2} u_i^1 + \phi_{i,1} u_i^2) + \zeta \sum_i (\phi_{i,2} \bar{\theta}_i + \phi_{i,1} \bar{\psi}_i)$$

IV.9 Analisi elastico lineari

Come abbiamo già osservato nel capitolo relativo allo stato dell'arte sullo studio di volte e archi in muratura, l'analisi elastica lineare è spesso utilizzata come strumento di valutazione preliminare della struttura. Anche in questo lavoro si è ricorsi all'ausilio di questo tipo di analisi per indagare sulla correttezza della mesh e su quali fossero, di tutti gli elementi strutturali che concorrono a stabilizzare la volta (catene, muretti, rinfiaccio, pareti) quelli che maggiormente ne influenzano il comportamento, così da poter indirizzare e ridurre le successive analisi elastico non lineari a quelle di effettivo interesse.

IV.9.1 Modello I: Semplice appoggio alla base

La prima analisi che è stata fatta con il programma Nosa è quella della volta semplicemente appoggiata alla base, per verificare che il programma non mostrasse errori per la presenza di zone della mesh non ben connesse o di elementi dalla geometria sbagliata.

In effetti questo caso non si è verificato e il modello è andato a convergenza, ovviamente in una iterazione, dato che siamo in ambito elastico lineare.

A dispetto di quanto ci si potesse aspettare dal quadro deformativo riscontrato durante il rilievo, la volta così analizzata presenta una tendenza allo "spanciamento" laterale in direzione trasversale.

Osservando la sezione trasversale della volta questo comportamento potrebbe sembrare teoricamente corretto, data la notevole curvatura e la posizione di intersezione con le unghie che le rende dei perfetti contrafforti.

Nel quadro fessurativo, invece, le lunette si presentano totalmente staccate dai muri perimetrali, lasciando pensare ad una deformata trasversale nella quale la sommità della volta si abbassa, portandosi dietro le unghie che ruotano sugli appoggi verso l'interno della volta stessa.

La tendenza risultante dall'analisi è visibile chiaramente nella Figura IV-22 sottostante, nella quale sono riportate la configurazione deformata in modalità wireframe e quella indeformata entrambe riquadrate: il rettangolo che circonda la configurazione deformata è, infatti più basso dell'altro e sporge ai lati a causa dell'evidente movimento delle unghie.

La scala della rappresentazione è 100:1.

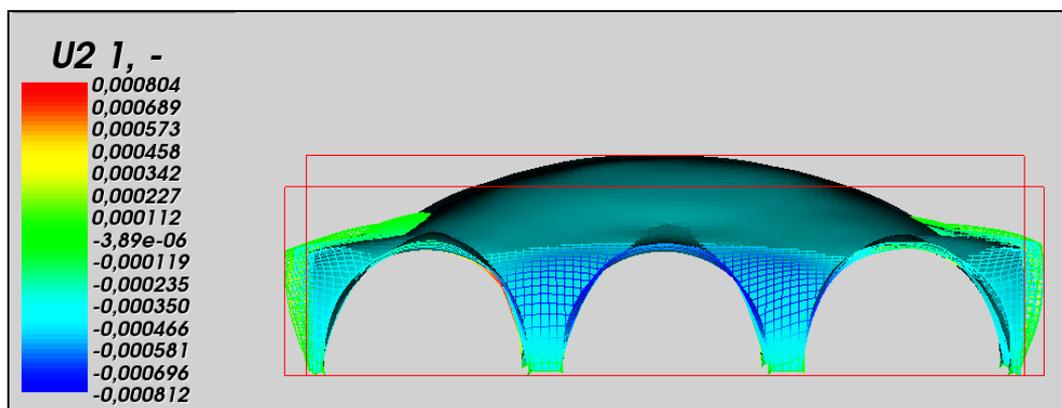


Figura IV-22 - Configurazione deformata (wireframe con scala cromatica) ed indeformata sovrapposte nel modello con semplice appoggio alla base.

In realtà il comportamento deformativo è, ovviamente, il risultato di una serie di concause (quali l'effettivo comportamento dei materiali, la presenza dei muri perimetrali, muri di rinfiango, catene, ecc.) che sono assenti in questo modello iniziale e che saranno poi ritrovate nei successivi modelli.

Lo spostamento in direzione verticale (Figura IV-23) è comunque uno spostamento accettabile, poiché dell'ordine dei 5mm; rapportandolo, infatti, alla luce anche minima della volta esso fornisce un valore di abbassamento dello 0,6%.

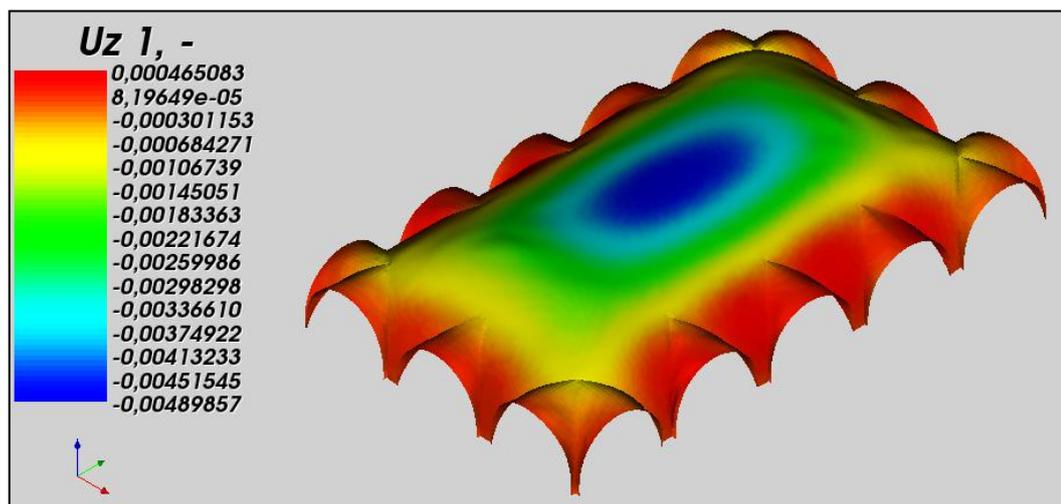


Figura IV-23 - Spostamenti verticali nel modello I con solo appoggio alla base.

Inoltre, come era da aspettarsi, esso si concentra nella zona centrale che, in direzione longitudinale, è praticamente piana. Si nota anche una tendenza della zona delle unghie a rialzarsi, con uno spostamento verticale verso l'alto comunque decisamente trascurabile (si parla di 0,5mm).

Per quanto riguarda, invece, il quadro tensionale esso, a differenza degli spostamenti, lascia presagire una non corretta modellazione della volta, o comunque una carenza di resistenza con queste condizioni al contorno (appoggio semplice alla base).

Se si osserva, infatti, in Figura IV-24 il valore delle tensioni di trazione che si sviluppano, ad esempio, all'intradosso, esso è pari agli 5daN/cm^2 notevolmente superiore all'ordine di resistenza a trazione che ancora potrebbe sussistere in una muratura cinquecentesca, per quanto ben conservata (massimo circa $0,1\text{daN/cm}^2$).

Nell'immagine sottostante si può vedere la distribuzione delle tensioni massime all'intradosso della volta, che nella zona centrale e per la maggior parte del suo sviluppo, tranne che negli appoggi, risultano di trazione.

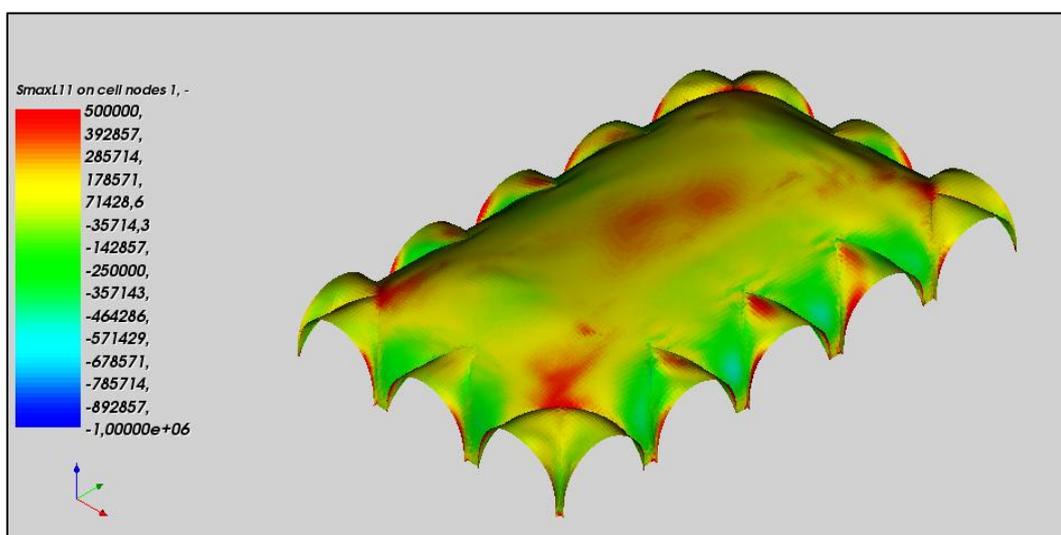


Figura IV-24 – Tensioni massime all'intradosso nel modello I con semplice appoggio alla base

Di per sé, comunque la presenza di tali tensioni di trazione nell'analisi elastico lineare, non implica che, imponendo la non resistenza a trazione del materiale, il modello non converga: cambiando il comportamento del materiale, infatti, vi sarà una ridistribuzione delle tensioni che potrebbe portare la volta a trovare, comunque, una configurazione di equilibrio. Nel caso, vedremo tali nuove configurazioni nelle analisi muratorie.

Analizzando ora la tensione principale minima di intradosso (Figura IV-25) si osserva come le trazioni siano ovviamente di intensità quasi dimezzata, e come, a differenza delle tensioni di trazione, le tensioni di compressione si mantengano nel range di accettabilità, con valori dell'ordine di 10daN/cm^2 .

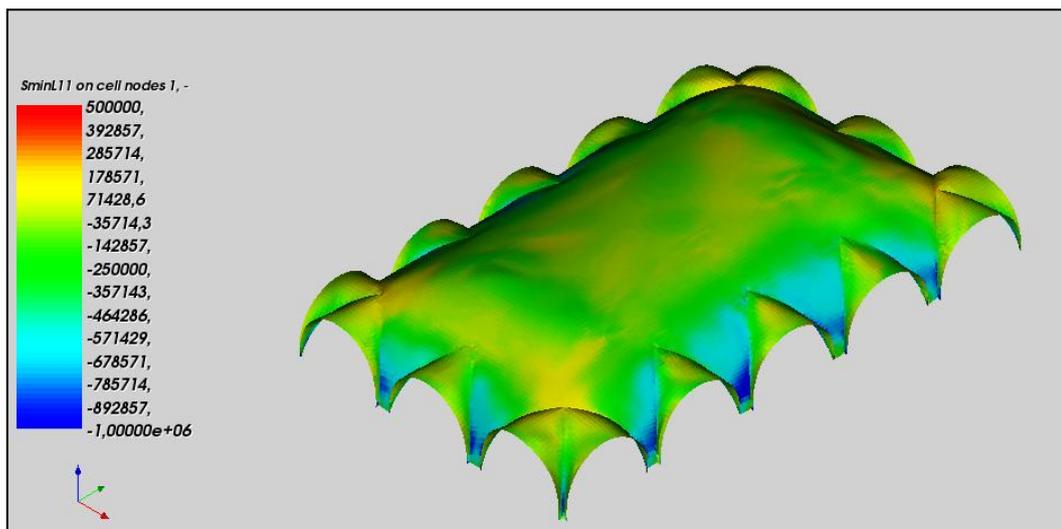


Figura IV-25 - Tensioni principali minime di intradosso nel modello con solo appoggio alla base.

Si riporta anche il quadro della tensione principale massima e minima di estradosso nelle figure seguenti, da dove si evincono picchi di compressione ancora superiori, dell'ordine di $8,5 \text{ daN/cm}^2$.

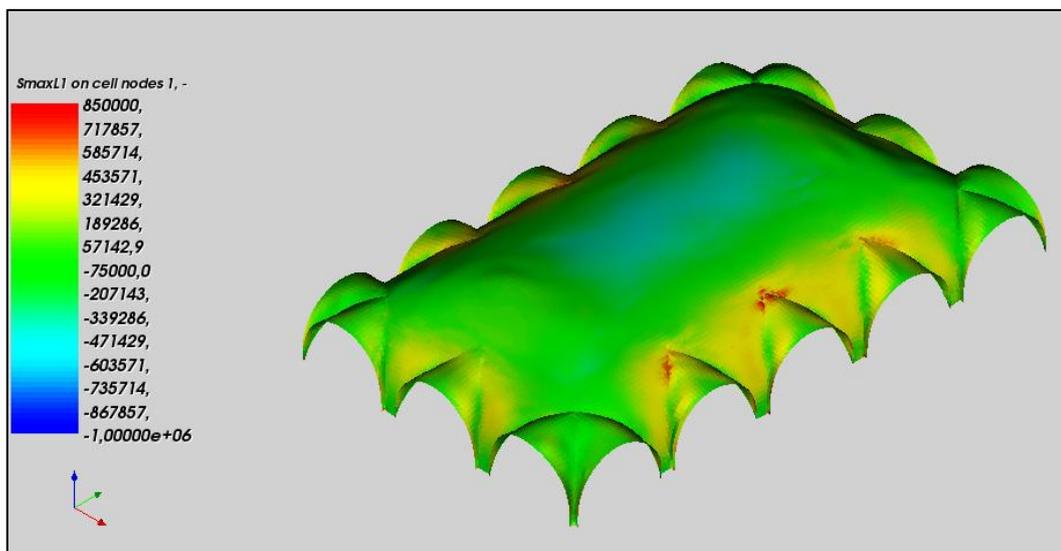


Figura IV-26 - Tensioni principali massime di estradosso nel modello con solo appoggio alla base.

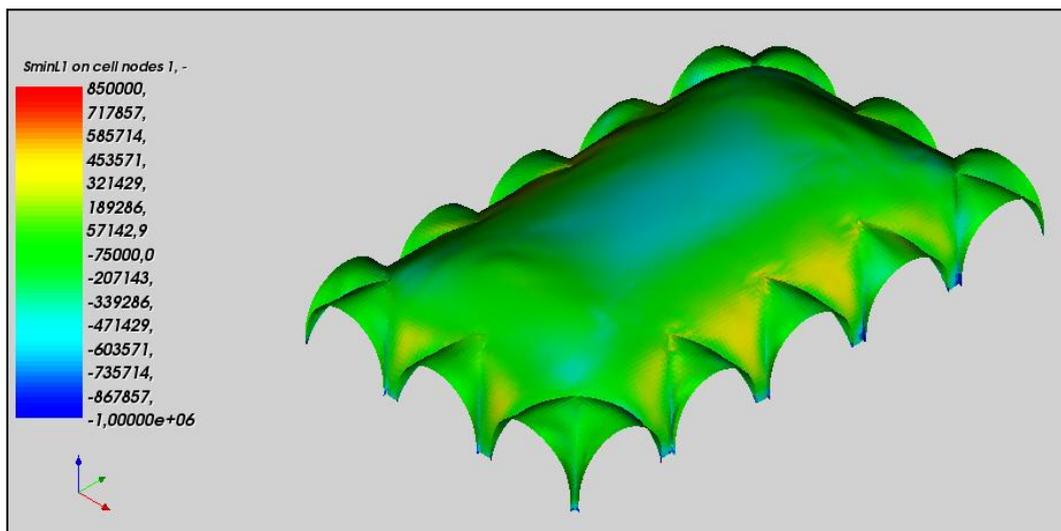


Figura IV-27- Tensioni principali minime di estradosso nel modello con solo appoggio alla base.

L'andamento è praticamente speculare: nella zona centrale l'intradosso risultava teso, mentre l'estradosso risulta compresso, mentre nelle zone comprese tra le unghie succede l'inverso. Questo risultato risulta compatibile con l'andamento della curva delle pressioni ricavata come sezione trasversale delle eccentricità di massimo modulo.

Nella zona centrale essa fuoriesce dalla sezione dalla parte dell'estradosso della volta, mentre presso le reni dell'arco, ricavato come sezione trasversale di quest'ultima, la curva della pressioni fuoriesce dallo spessore all'intradosso.

Se la struttura fosse stata bidimensionale, avremmo individuato la formazione di tre cerniere plastiche e la tendenza al meccanismo a 5 cerniere tipico delle strutture ad arco che abbiamo visto inaugurare da Couplet col "collasso flessionale". Per la formazione di tale meccanismo servirebbe la tangenza della curva delle pressioni all'estradosso anche nella zona degli appoggi, dove invece essa si "ricentra".

Essendo questa una struttura tridimensionale, non possiamo affermare la formazione delle cerniere, ma confermare la tendenza allo spanciamento della volta, che poi altro non è se non lo sviluppo tridimensionale del meccanismo delle 5 cerniere.

Nella figura seguente è mostrata la pseudo curva delle pressioni ricavata per questo modello, nella quale si evince anche una conferma di quella che avevamo detto essere l'ipotesi sbagliata di Couplet relativa alla posizione delle cerniere plastiche, che egli aveva posto non alle reni ma a sezioni a 45° con l'orizzontale.

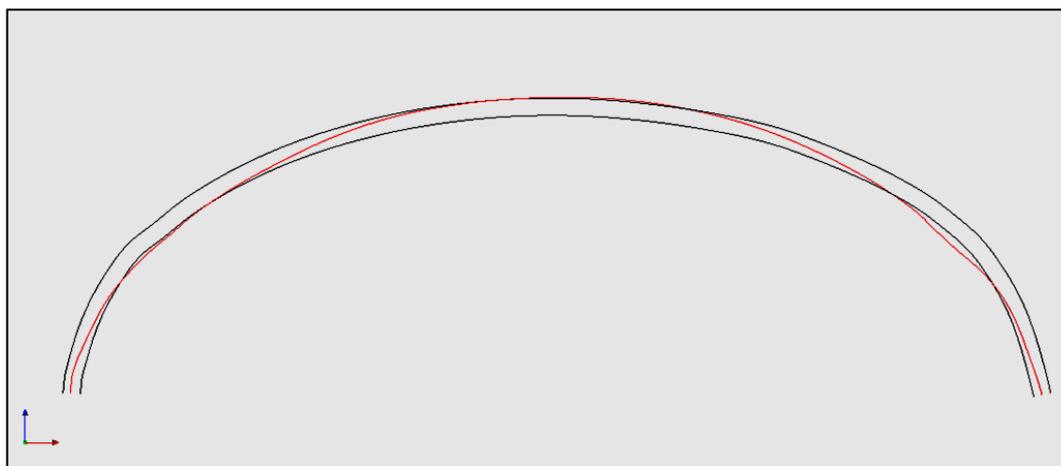


Figura IV-28 – Curva delle pressioni del modello I con semplice appoggio alla base

La deformata della volta chiarifica ulteriormente ciò che la curva delle pressioni implicitamente mostrava. Essa risulta, infatti, (Figura IV-29) concava nella zona centrale (con intradosso teso e estradosso compresso) e convessa nella zona delle unghie (con intradosso compresso ed estradosso teso).

Nell'immagine è rappresentato un tratto di volta sezionato trasversalmente in cui la deformata è quella colorata e rappresentata in scala 200:1. La legenda di valori a fianco e i relativi colori nella deformata, rappresentano lo spostamento orizzontale in direzione trasversale alla volta. È stata ritenuta opportuna questa rappresentazione poiché evidenzia le tendenze delle unghie ad allontanarsi, quindi quella della volta a “spanciare”: l'unghia colorata in rosso, presenta, infatti, valori di spostamento positivi dell'ordine di 1,7mm, mentre quella colorata in azzurro presenta spostamenti negativi dell'ordine di 1,5mm, per uno spostamento relativo totale dell'ordine di tre millimetri.

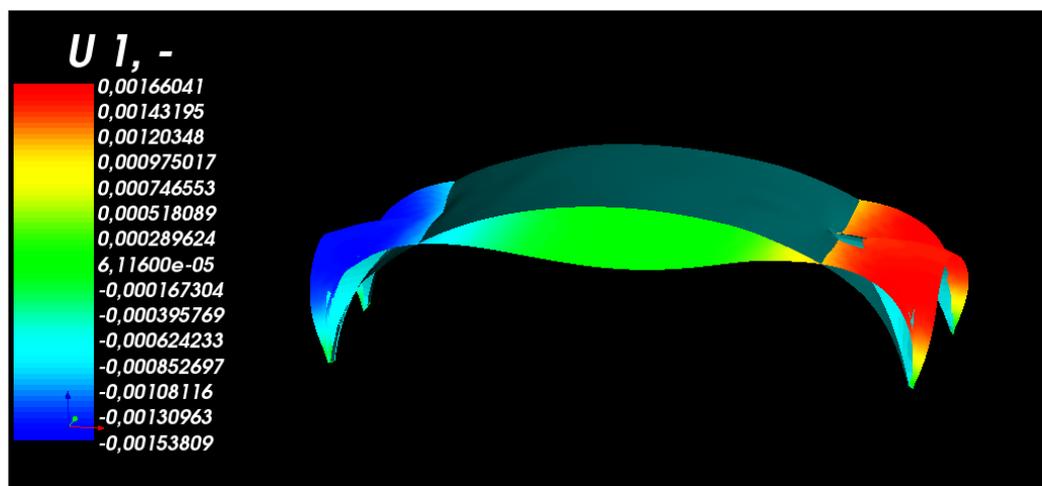


Figura IV-29 - Configurazioni deformata (con scala cromatica) ed indeformata sovrapposte: sezione trasversale in corrispondenza dell'unghia centrale

Questa tendenza è sempre visibile, ma in modo meno marcato, in direzione longitudinale dove la scarsa curvatura della volta fa sì che essa possa abbassarsi senza spingere troppo sulle unghie (Figura IV-30).

La legenda di valori a fianco e i relativi colori nella deformata, rappresentano in questo caso lo spostamento orizzontale in direzione longitudinale. L'unghia colorata in rosso, presenta valori di spostamento positivi dell'ordine di 0,8mm, così come quella in azzurro ma diretti in direzione opposta e di segno, quindi, negativo, per uno spostamento relativo totale dell'ordine di 1,6mm, la metà dello spostamento relativo in direzione trasversale.

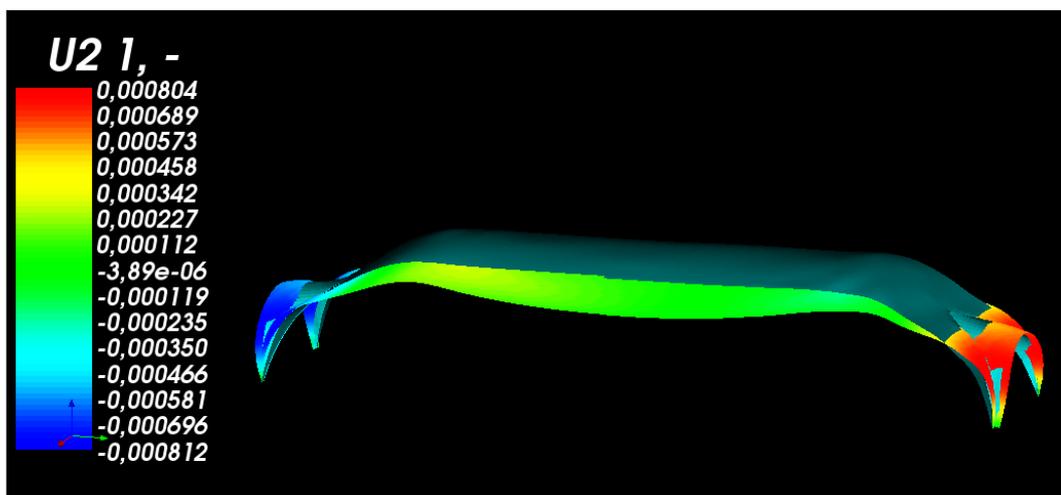


Figura IV-30 - Configurazioni deformata (con scala cromatica) ed indeformata sovrapposte: sezione longitudinale in corrispondenza dell'unghia centrale

Per quanto riguarda le reazioni vincolari, sono decisamente maggiori le loro componenti in pianta, piuttosto che in altezza e soprattutto in direzione trasversale. Ciò denota la forte spinta che la volta, se fosse di copertura senza alcun altro elemento vincolante, eserciterebbe sulla sommità dei muri perimetrali, pari a:

- 137.66kN in direzione longitudinale;
- 219.81kN in direzione trasversale.

Anche questo risultato, così come l'eccessiva resistenza a compressione richiesta, la curva delle pressioni esterna alla volta e la non conformità della deformata del modello con il quadro fessurativo, indica chiaramente la necessità di ulteriori vincoli e di una diversa modellazione affinché il modello rispecchi adeguatamente il comportamento della volta ed essa stessa possa considerarsi stabile sotto l'azione del peso proprio.

IV.9.2 Modello I: Semplice appoggio alla base e vincoli laterali fissi

Il secondo caso che è stato considerato è quello della volta con semplice appoggio alla base ed appoggio orizzontale applicato ai nodi perimetrali delle lunette; questa condizione di vincolo, spiegata nel paragrafo relativo al modello I, si riassume nei tre seguenti punti:

- tutti i nodi alla base sono stati vincolati con appoggi fissi;
- per le lunette dei lati Est e Ovest è stata vincolata soltanto la direzione X;
- per le lunette dei lati Nord e Sud è stata vincolata soltanto la direzione Y.

Le direzioni di vincolo sono state scelte, cioè, in direzione ortogonale alle pareti che circondano la volta nella realtà, in modo da schematizzarne l'azione di confinamento.

Le altre caratteristiche sono state lasciate invariate rispetto al modello precedente.

I risultati dell'analisi mostrano degli evidenti cambiamenti rispetto al caso di semplice appoggio alla base precedentemente analizzato.

Il campo di spostamenti verticali, ad esempio, mostra la totale assenza di quella tendenza al sollevamento che, invece, si aveva in corrispondenza delle unghie nel caso precedente (Figura IV-31).

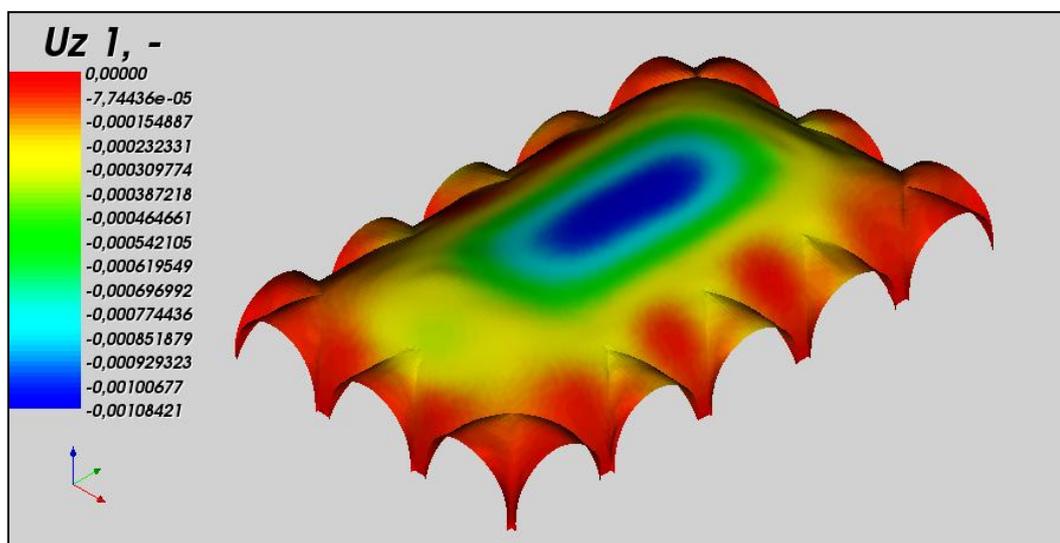


Figura IV-31 – Campo di spostamenti verticali del modello I con appoggio alla base e vincoli laterali fissi

La tendenza all'abbassamento centrale è riscontrabile anche in questo caso, come era da aspettarsi, poiché è una tendenza insita nella volta a causa, come già accennato, della sua scarsa curvatura in direzione longitudinale.

Il valore massimo di spostamento si è tuttavia ridotto da 4,9mm a 1,1mm: questo rialzamento della deformata nella zona centrale indica chiaramente la grande azione di

confinamento svolta dai muri perimetrali, grazie ai quali le unghie diventano dei veri e propri contrafforti per la volta. Questo meccanismo è relativo, però, solo alle unghie delle pareti Est e Ovest, poiché in direzione longitudinale il meccanismo deformativo denotava già nel caso precedente la tendenza contraria: essendo la volta molto piatta essa tende ad abbassarsi nel tratto centrale senza spingere le unghie contro le pareti. In questo modello tale tendenza è ulteriormente accentuata, poiché le reazioni vincolari in sommità delle unghie delle pareti Nord e Sud sono di trazione. Nella Figura IV-32 sottostante si nota chiaramente nella lunetta centrale del lato Nord della volta dove il colore blu e la stessa direzione delle frecce indicano delle reazioni di trazione.

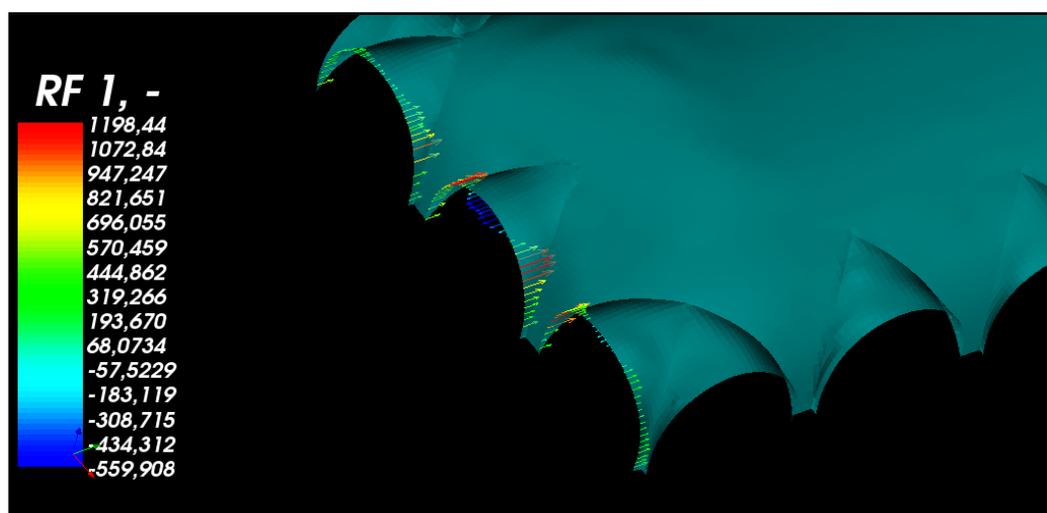


Figura IV-32 – Particolare delle reazioni vincolari di trazione nel lato Nord del modello I con appoggio alla base e vincoli laterali fissi

Lo stesso fenomeno, anche se meno marcato, si nota nella lunetta centrale del lato Sud. Si specifica che in questo caso, i colori con cui sono rappresentate le reazioni di trazione e quelle di compressione si invertono: dal verde al rosso per quelle di trazione, dal celeste al blu per quelle di compressione. Questo avviene perché il programma fornisce i risultati con il segno dato dal loro verso rispetto all'asse Y e non come uscenti o entranti nel vincolo.

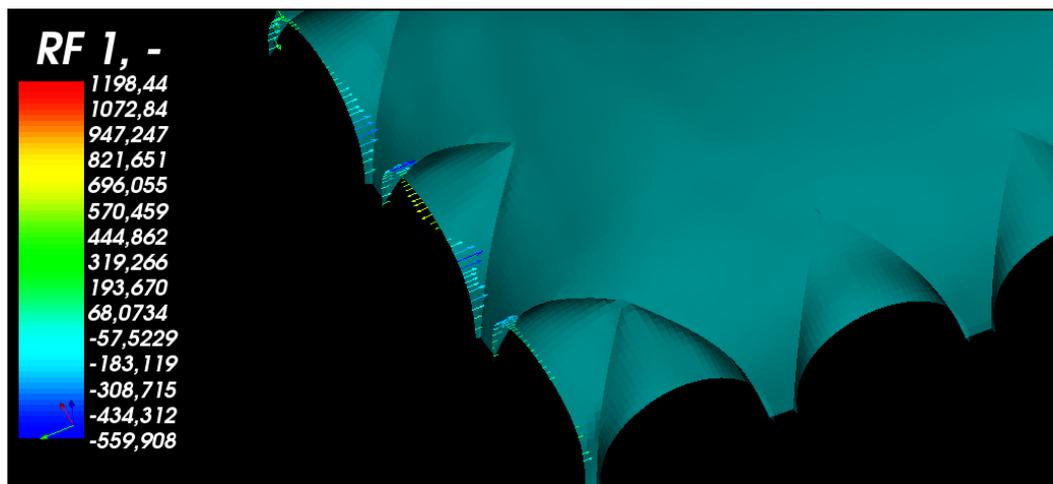


Figura IV-33 – Particolare delle reazioni vincolari di trazione nel lato Sud del modello I con appoggio alla base e vincoli laterali fissi

Per quanto riguarda le tensioni, analizziamo per prime quelle di intradosso.

Osservando il range di variazione che il programma fornisce nella legenda di valori in Figura IV-35, Figura IV-36, Figura IV-37 e Figura IV-38, sia per la tensione principale massima che per quella minima, notiamo come queste siano più contenute e rientrano maggiormente nel campo di ammissibilità.

Ciò è confermato anche dalla curva delle pressioni che, come si osserva nella Figura IV-34 – Curva delle pressioni del modello I con appoggio alla base e vincoli laterali fissi è tutta contenuta all'interno della sezione trasversale della volta.

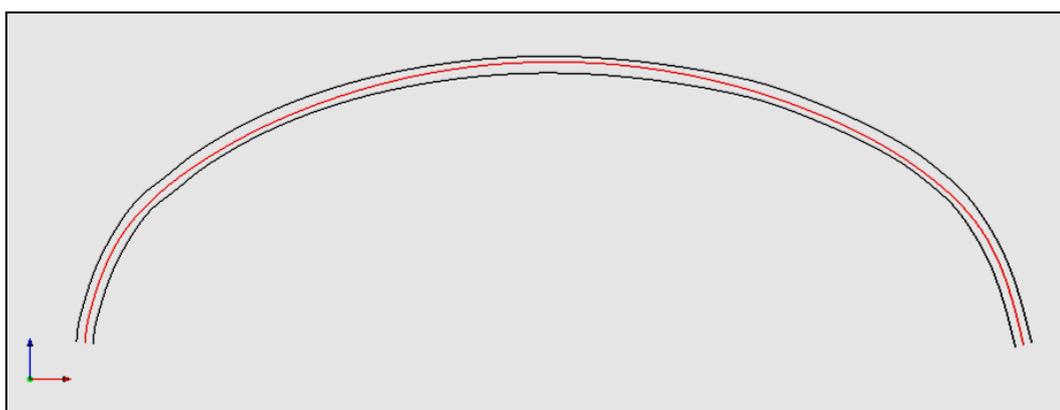


Figura IV-34 – Curva delle pressioni del modello I con appoggio alla base e vincoli laterali fissi

Anche da questa analisi si rileva una differenza notevole tra la spinta trasversale e quella longitudinale, pari rispettivamente a 154.85kN e a 72.91kN. In entrambe le direzioni essa è, comunque, diminuita notevolmente, rispetto al caso di semplice appoggio alla base, in cui avevamo determinato dei valori di 137.66kN in direzione longitudinale e di 219.81kN in direzione trasversale.

Lo stesso vale per la resistenza a trazione richiesta per la muratura, che risulta molto ridotta rispetto al caso precedente, assumendo valori dell'ordine di $0,5 \text{ daN/cm}^2$, comunque elevati per il materiale.

Anche in questo modello notiamo, comunque, la tendenza della volta ad una deformata a doppia curvatura, con l'intradosso teso nella zona centrale e compresso alle reni, mentre l'estradosso compresso al centro e teso tra le unghie.

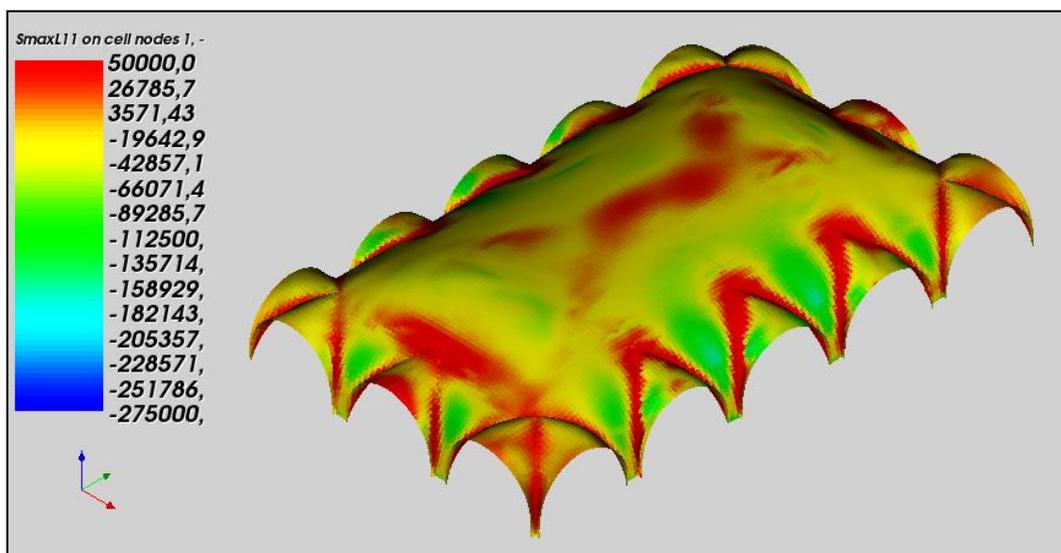


Figura IV-35 – Tensioni principali massime di intradosso del modello I con appoggio alla base e vincoli laterali fissi

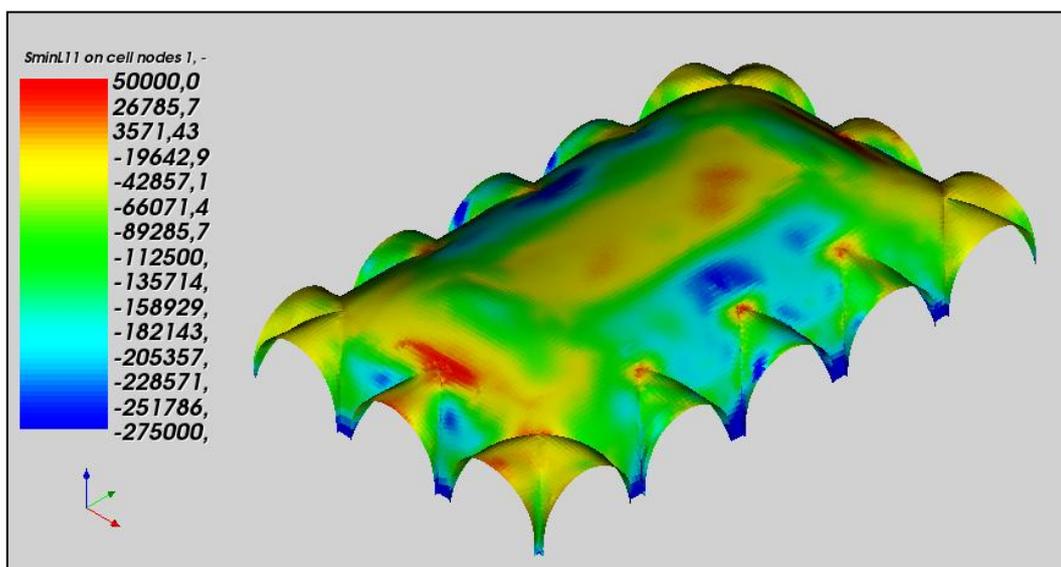


Figura IV-36 – Tensioni principali minime di intradosso del modello I con appoggio alla base e vincoli laterali fissi

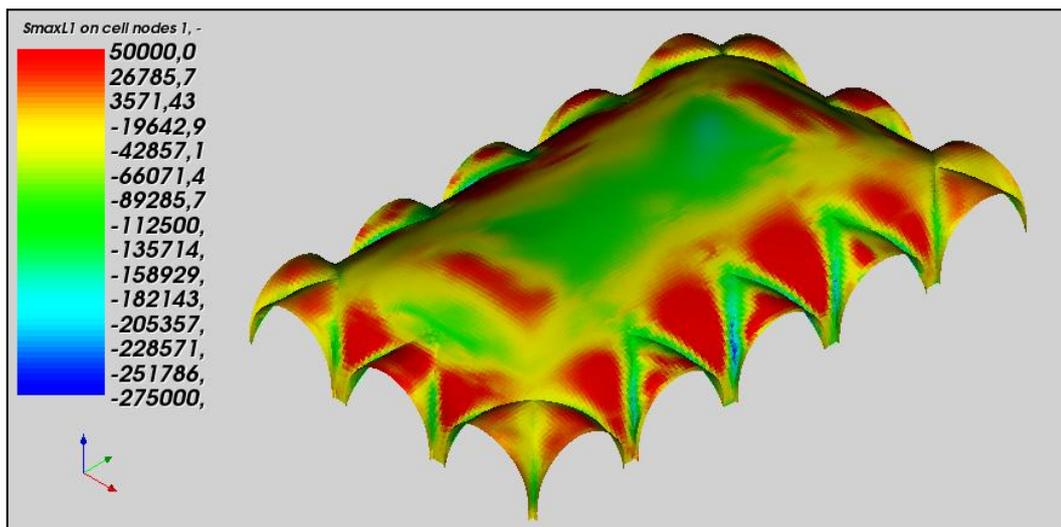


Figura IV-37 – Tensioni principali massime di estradosso del modello I con appoggio alla base e vincoli laterali fissi

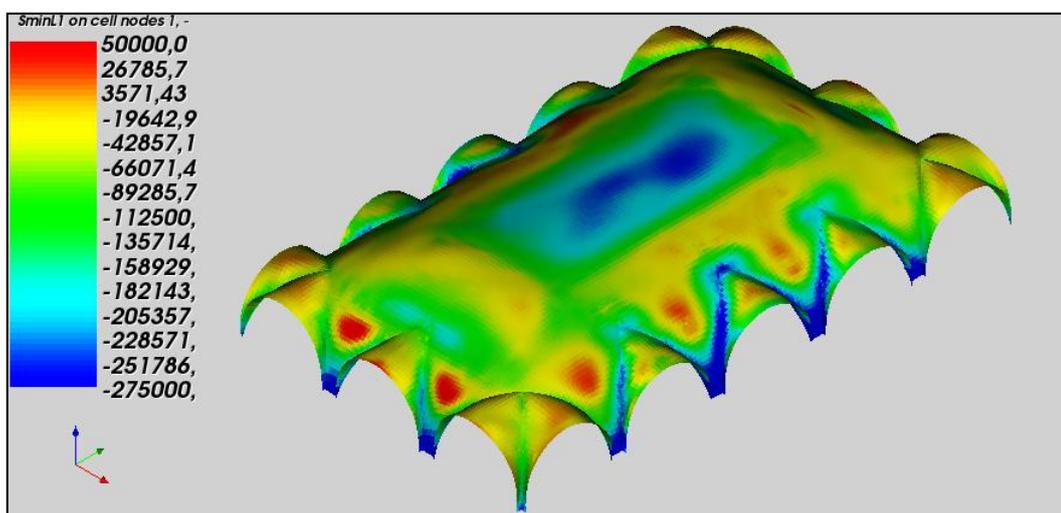


Figura IV-38 – Tensioni principali minime di estradosso del modello I con appoggio alla base e vincoli laterali fissi

Osservando, infatti, le immagini relative alle tensioni di intradosso e a quelle di estradosso notiamo:

- per la tensione principale massima: all'intradosso (Figura IV-35) la zona centrale è di colore rosso (tensioni di trazione) mentre tra le unghie abbiamo il colore azzurro (che denota compressione); all'estradosso, invece, (Figura IV-37) nella zona centrale abbiamo il colore verde (compressione), che diviene rosso (trazione) nelle zone tra le unghie.
- per la tensione principale minima, le due immagini sono ancor più speculari di quelle relative alla distribuzione della tensione principale massima: all'intradosso (Figura IV-36) si ha un rettangolo centrale giallo-rosso (trazione) ben marcato, contornato dalle zone verdi-blu (compressione) delle unghie; all'estradosso (Figura

IV-38) la situazione è esattamente il contrario, con un rettangolo centrale verde-blu (compressione), circondato dalle zone giallo-rosse delle unghie (in trazione).

In entrambi i casi, comunque, restano rosse, e quindi in trazione, le zone delle unghie delle pareti Nord e Sud, mentre per quelle delle pareti Est e Ovest si nota una tendenza alla trazione nella zona sommitale, lasciando presagire la possibile formazione di deformazioni di frattura con l'introduzione del materiale masonry-like

I picchi di compressione (zone azzurre in Figura IV-36) non si hanno, infatti, in chiave alle lunette, ma in zone più ribassate. Ciò lascia ben sperare sulla correttezza del modello: se il punto massimo in cui esse spingono fosse situato in sommità, sarebbe chiara la tendenza delle unghie a ruotare verso l'esterno e la necessità del completo appoggio di queste alle pareti che circondano la volta; il fatto che esse, invece, spingano ad una certa quota, per poi allentare questa spinta, fa pensare ad un comportamento deformativo diverso e lascia presagire la possibilità di arrivare al risultato di distacco di queste dalle pareti in sommità, in conformità con il quadro fessurativo effettivo.

Le prossime analisi saranno proprio finalizzate allo studio di questo aspetto, e proseguiranno iterativamente svincolando i vincoli di volta in volta soggetti a trazione, sperando di arrivare a svincolare le lunette sopraccitate.

IV.9.3 Modello I: Semplice appoggio alla base e vincoli laterali parziali

Con la prima iterazione le cose non cambiano molto, con una diminuzione delle reazioni delle lunette centrali sulle pareti Est e Ovest dell'ordine dello 0,04%, con il passaggio della reazione massima riscontrata nel nodo 15221, da 2292,25N a 2291,37N.

Data la scarsa variazione dei risultati si è ritenuto opportuno, prima di procedere ad una analisi parametrica, vedere se il distacco completo delle lunette dalle pareti Nord e Sud comporti una qualche variazione nelle reazioni delle lunette che restano vincolate.

È stata fatta, quindi, l'analisi di un modello in cui è stato schematizzato soltanto il contenimento trasversale effettuato dalle pareti Est e Ovest.

Si è visto che le reazioni, invece che diminuire, aumentano del 6% fino a raggiungere, nel nodo 15221 della reazione massima il valore di 2428,12N in compressione. Questi

risultati ci portano a concludere che non sia questo il parametro da variare per modificare il comportamento deformativo del modello.

Il passo successivo è quello di inserire i muretti di rinfiango, passando al modello II.

IV.9.4 Modello II: Semplice appoggio alla base

In questo modello gli appoggi orizzontali sono localizzati soltanto in corrispondenza dell'attacco alla parete dei due muretti di rinfiango presenti, come già specificato, perpendicolarmente alla volta e situati prima delle ultime lunette delle pareti Est e Ovest.

Il risultato, visibile nella Figura IV-39 sottostante, è un contenimento alquanto localizzato; data la luce longitudinale di oltre 13m della volta, i due muretti di 30cm di spessore hanno poco effetto sulla zona centrale, nella quale l'effetto di "spanciamento" resta marcato. Sicuramente questo viene ridotto da 1,5mm a circa 1mm, come è possibile vedere dall'immagine sovrastante nella quale i colori delle due zone sono più chiari.

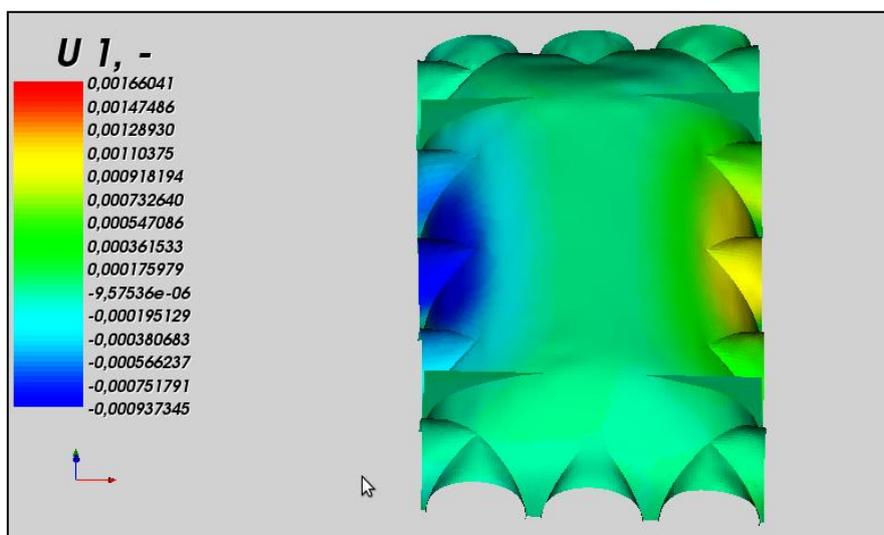


Figura IV-39 - Spostamenti trasversali nel modello II con semplice appoggio alla base

Tuttavia quello ottenuto è un effetto minore di quello che avrebbe avuto l'inserimento dei due muretti nella zona a fianco delle unghie centrali, dove in realtà questo fenomeno si accentua maggiormente, come visibile nel caso di modello I (senza muretti) e semplice appoggio alla base (Figura IV-40).

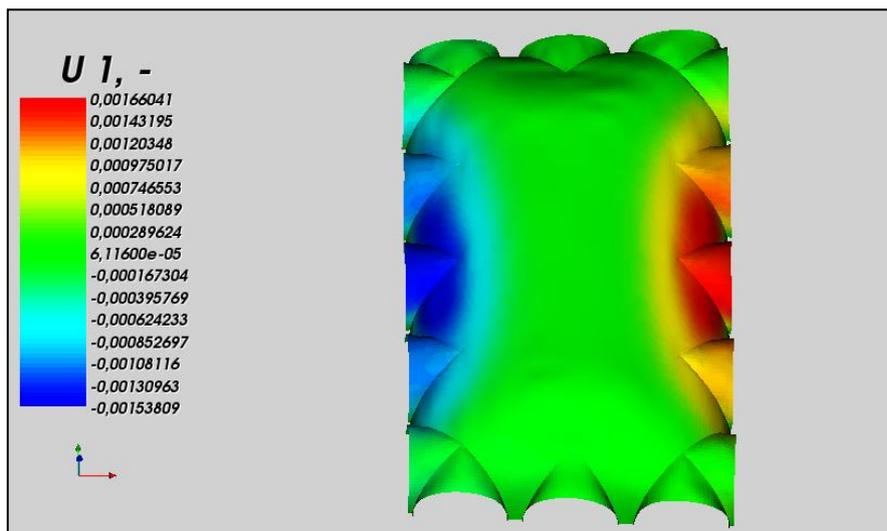


Figura IV-40 - Spostamento trasversale nel modello I con semplice appoggio alla base

Osservando la curva delle pressioni relativa ad una sezione della volta nella zona centrale e quella relativa alla sezione della volta in corrispondenza dei muretti, si nota come questi ultimi ricentrino la curva (Figura IV-41 e Figura IV-42); l'effetto dei muretti di rinfilanco è, quindi, un effetto benefico per la struttura, ma molto localizzato e, come abbiamo già precedentemente osservato, introdotto in una zona troppo "periferica" rispetto alle necessità della volta.

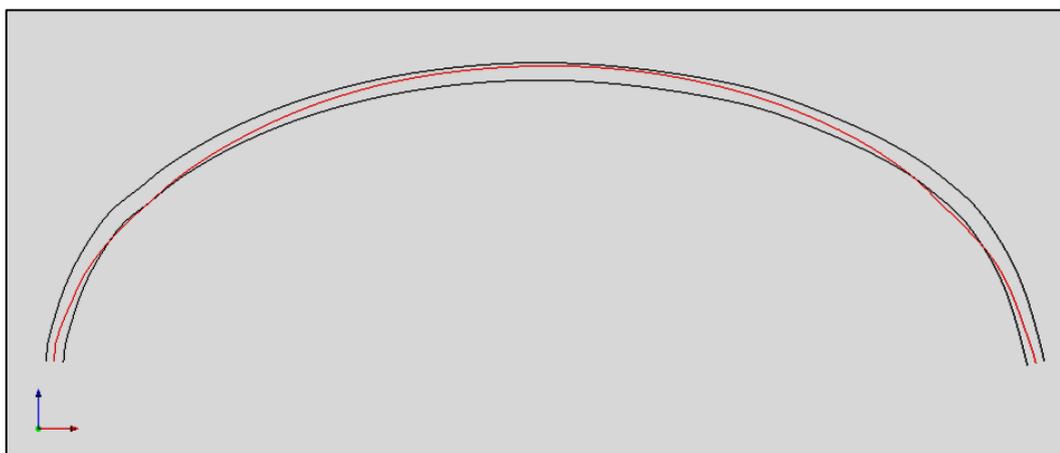


Figura IV-41 – Curva delle pressioni nella zona centrale della volta

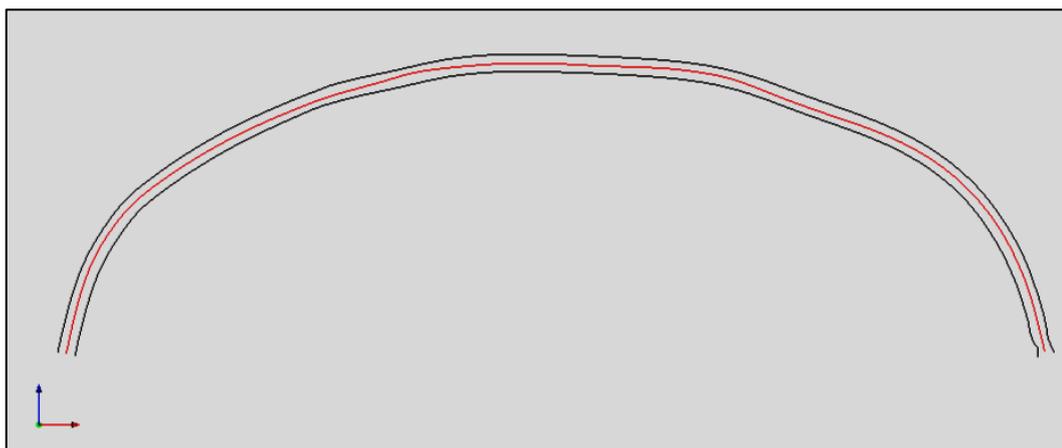


Figura IV-42 – Curva delle pressioni in corrispondenza del muretto di rinfiacco Nord

Mentre, quindi, la localizzazione di questi frenelli risulta una scelta progettuale non troppo azzeccata, l'inserimento, invece, della catena al di sopra di essi risponde effettivamente alle necessità della struttura.

Andando ad osservare, infatti, non solo la distribuzione delle tensioni (Figura IV-43), ma anche le reazioni vincolari in corrispondenza degli appoggi muretti-parete (Figura IV-44), si nota come in sommità si abbiano tensioni di trazione localizzate che renderebbero inefficace i muretti in tali zone.

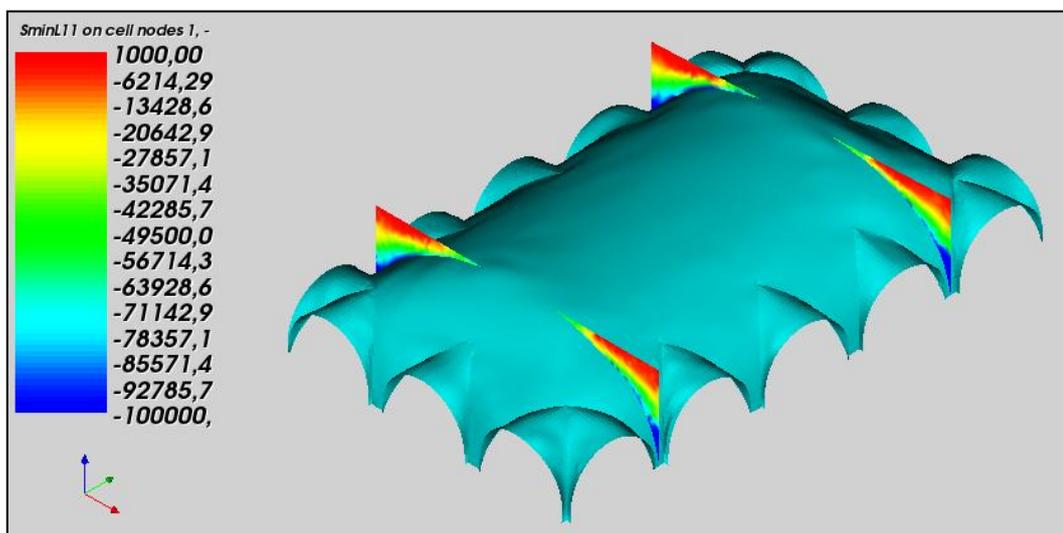


Figura IV-43 – Stato tensionale dei muretti di rinfiacco

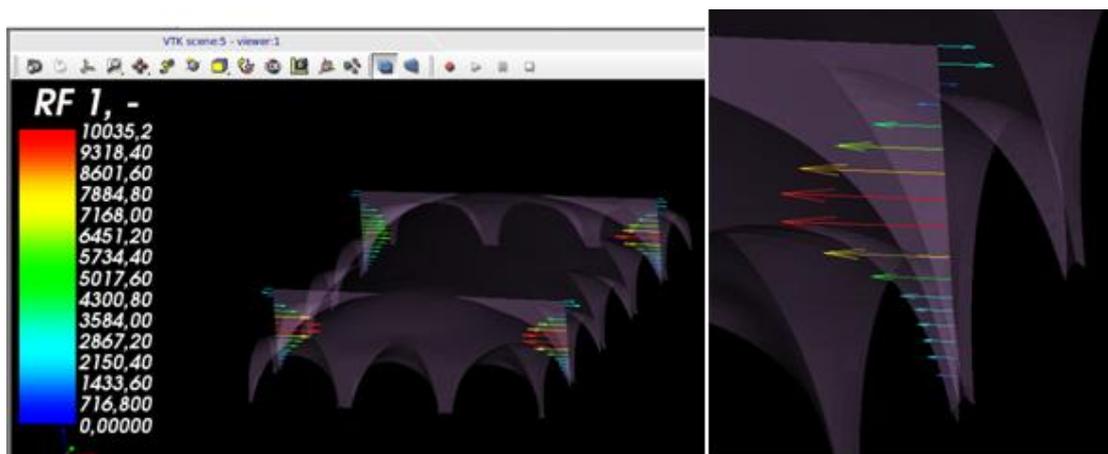


Figura IV-44 - Reazioni vincolari agli appoggi dei muretti con particolare del muretto Nord-Est

L'inserimento delle catene, viceversa, crea un ulteriore confinamento dei muretti, generando un meccanismo tirante-puntone che ne aumenterà l'efficacia, garantendo anche la stabilità delle pareti: esse, infatti, fino ad ora sono state schematizzate come appoggi fissi orizzontali, senza considerarne la deformabilità sotto l'azione della spinta esercitata dalla volta. Quando questo sarà fatto vedremo la funzione di tali catene.

Per completezza si riportano nel seguito anche i campi delle tensioni principali massima e minima in corrispondenza della superficie media della volta. Analogamente al caso di modello I con semplice appoggio alla base, si notano sollecitazioni di trazione eccessive per il materiale, con picchi massimi di 4daN/cm^2 .

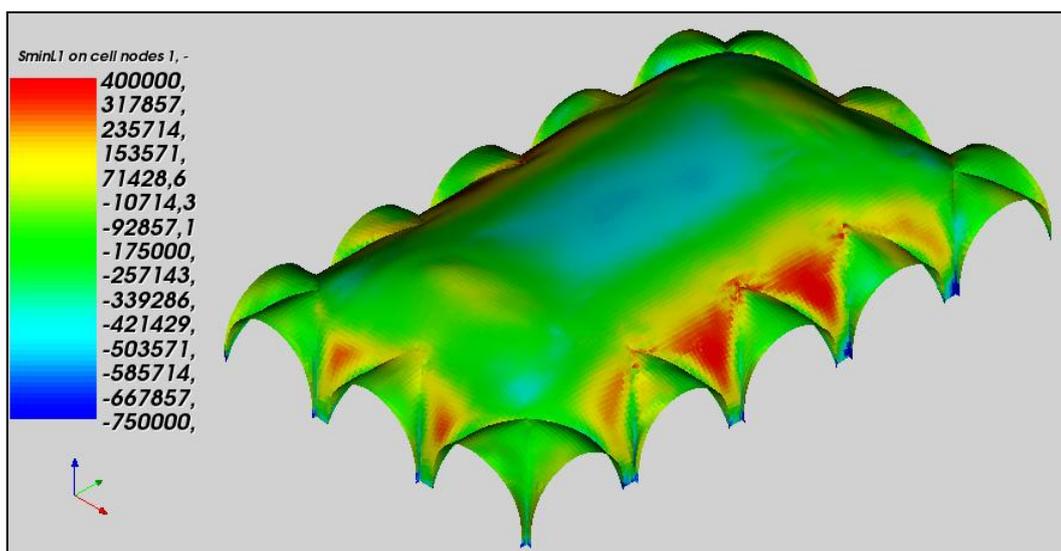


Figura IV-45 – Campo delle tensioni minime

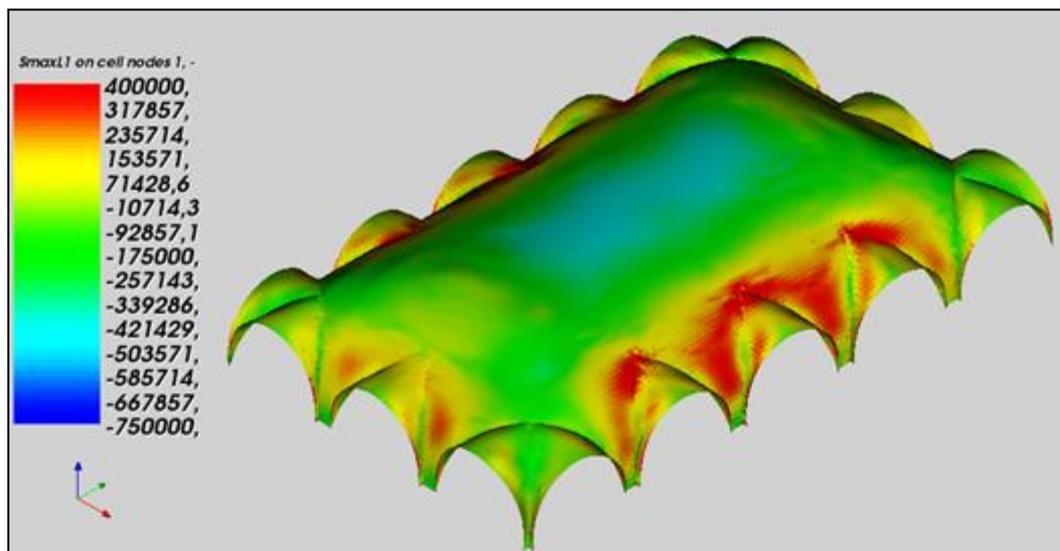


Figura IV-46 – Campo delle tensioni massime

IV.9.1 Modello II: Semplice appoggio alla base e vincoli laterali fissi

Effettuando l'analisi della volta con sia l'appoggio dei muretti che in corrispondenza delle lunette, la situazione resta praticamente identica a quella del caso senza frenelli: come è possibile vedere nelle figure di confronto sottostanti (Figura IV-47, Figura IV-48, Figura IV-49, Figura IV-50), infatti, né gli spostamenti né le tensioni hanno significative variazioni di distribuzione o di valore.

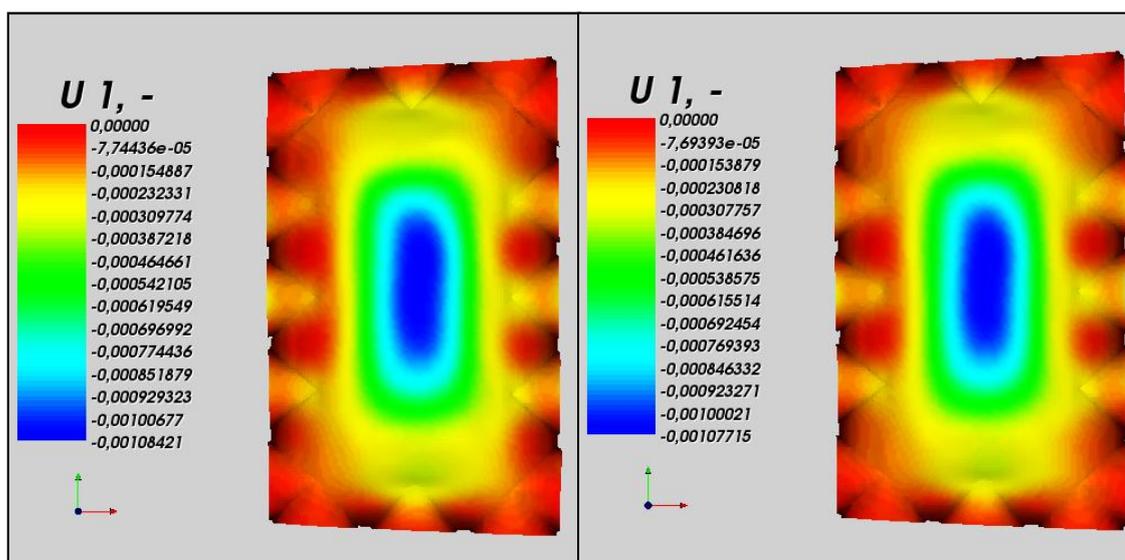


Figura IV-47 - Spostamento verticale nel modello senza muretti

Figura IV-48 - Spostamento verticale nel modello con muretti

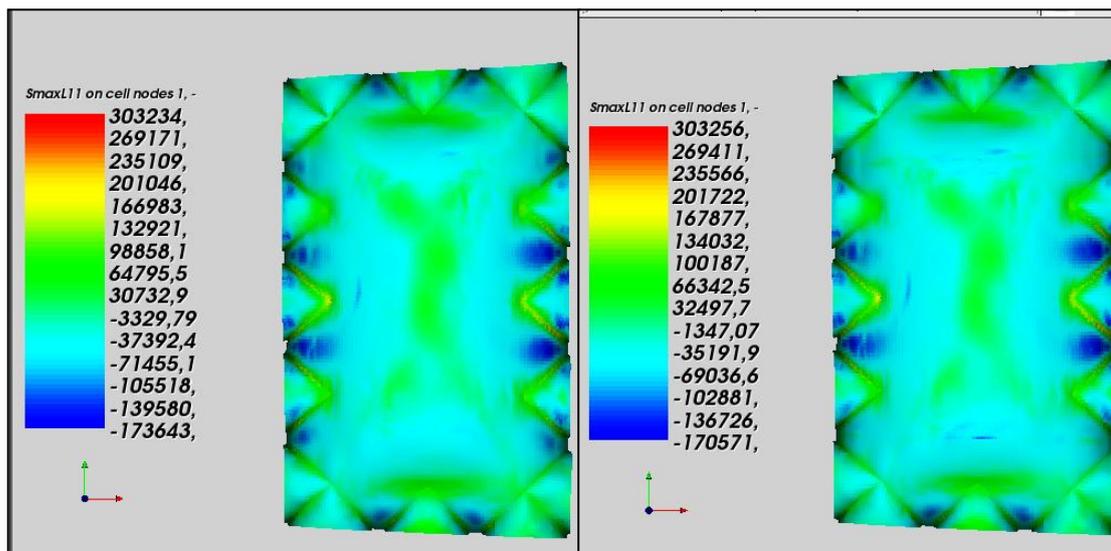


Figura IV-49 - Tensione principale massima di intradosso nel modello senza muretti

Figura IV-50 - Tensione principale massima di intradosso nel modello con muretti

Anche i valori della spinta della volta nelle due direzioni sono analoghi al caso di modello I con appoggio alla base e vincoli laterali fissi e risultano pari a:

- 179.14kN in direzione trasversale;
- 73.05kN in direzione longitudinale.

Questa analogia tra i due modelli è rapidamente spiegabile se si pensa di nuovo all'effetto limitato dei muretti in assenza della catena che abbiamo già spiegato precedentemente. Nel caso che abbiamo analizzato di modello con soli muretti appoggiati e, quindi, reagenti, essi avevano comunque una minima azione di confinamento, rispetto al caso di semplice appoggio alla base. Se invece si considera di inserirli quando già la volta è modellata come circondata dalle pareti essi non hanno praticamente alcun effetto.

La loro efficacia, come già accennato, si ritroverà più avanti in questo lavoro, quando inseriremo nel modello le pareti e le catene.

A differenza del caso di modello II con semplice appoggio alla base e carrello orizzontale in corrispondenza dei muretti, in cui la curva delle pressioni nella zona centrale mostrava il limitato confinamento dato da questi elementi, in questo modello essa si mostra interamente contenuta all'interno della sezione anche nelle zone centrali della volta, a conferma dell'effetto globale dei vincoli fissi laterali.

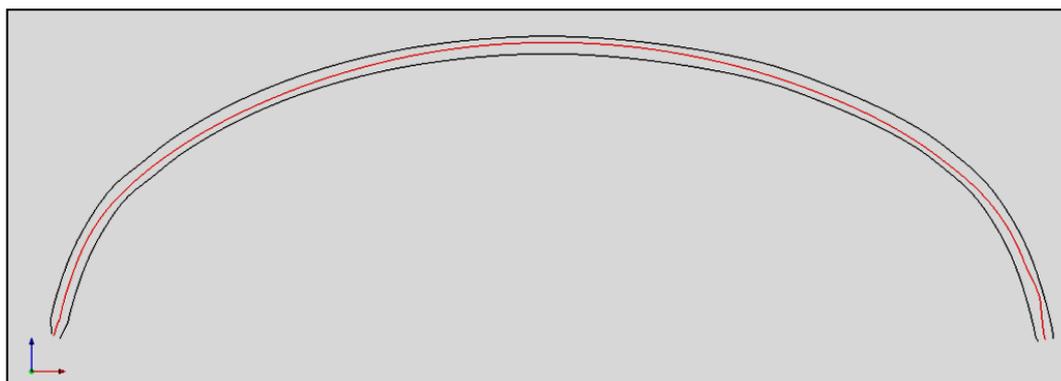


Figura IV-51 – Curva delle pressioni nella zona centrale

IV.9.2 Modello II: appoggio alla base, vincoli laterali fissi e materiale di rinfiacco

La volta presenta un ulteriore elemento di confinamento, il rinfiacco con materiale incoerente.

Esso va a riempire le zone comprese tra la volta ed i muri perimetrali fino a ricoprire interamente le unghie, che non compaiono, infatti, all'estradosso. Per inserire questo carico nell'analisi è stato necessario formulare una *forcem*, una routine che nel programma Nosaltaca è necessaria per l'introduzione di carichi che non siano distribuiti in modo uniforme e spiegata nel paragrafo relativo ai carichi applicati (§IV.7). I risultati dell'analisi hanno sottolineato come questo carico influenzi notevolmente il comportamento della volta. Basti pensare al valore totale di questo carico, pari a 832'608N, che è praticamente il doppio del valore totale del peso proprio della volta, pari a 427'579N.

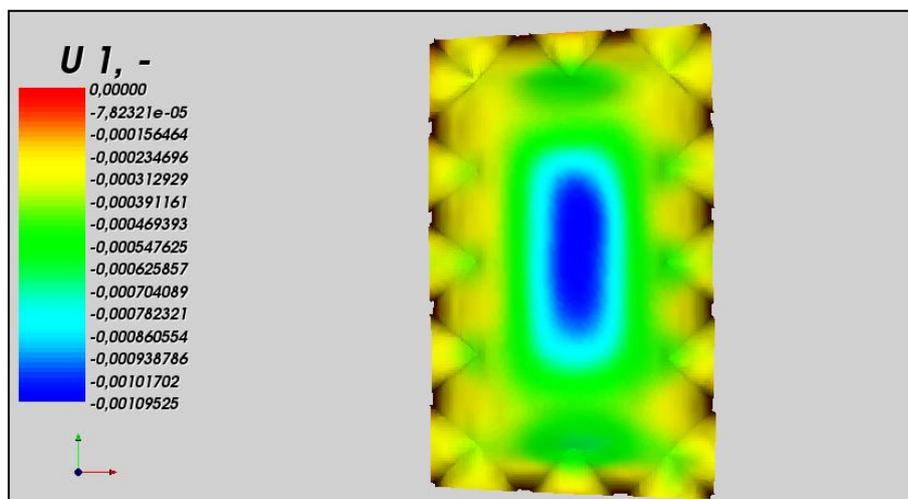


Figura IV-52 - Spostamenti verticali nel modello II con rinfiacco.

Analizzando il campo di spostamenti che interessano la struttura, notiamo, per la prima volta dall'inizio delle analisi, una tendenza di tutta la volta ad abbassarsi, e non soltanto della parte centrale: in particolare non vi è un grande cambiamento nel valore dello spostamento massimo della zona centrale, ma, osservando la Figura IV-52, si ha l'idea di un cambiamento nel comportamento deformativo, con le zone laterali che, mentre nelle analisi precedenti erano caratterizzate da spostamenti nulli o addirittura dalla tendenza a rialzarsi, in questo caso si spostano verso il basso.

Se si visualizzano, inoltre, gli spostamenti in direzione trasversale, considerando lo stesso range di valori per i colori indicatori utilizzati nell'immagine Figura IV-40, si vede chiaramente il grande effetto di confinamento che i muretti non erano, invece, stati in grado di fornire. Lo "spanciamento" della volta risulta, quindi, contenuto.

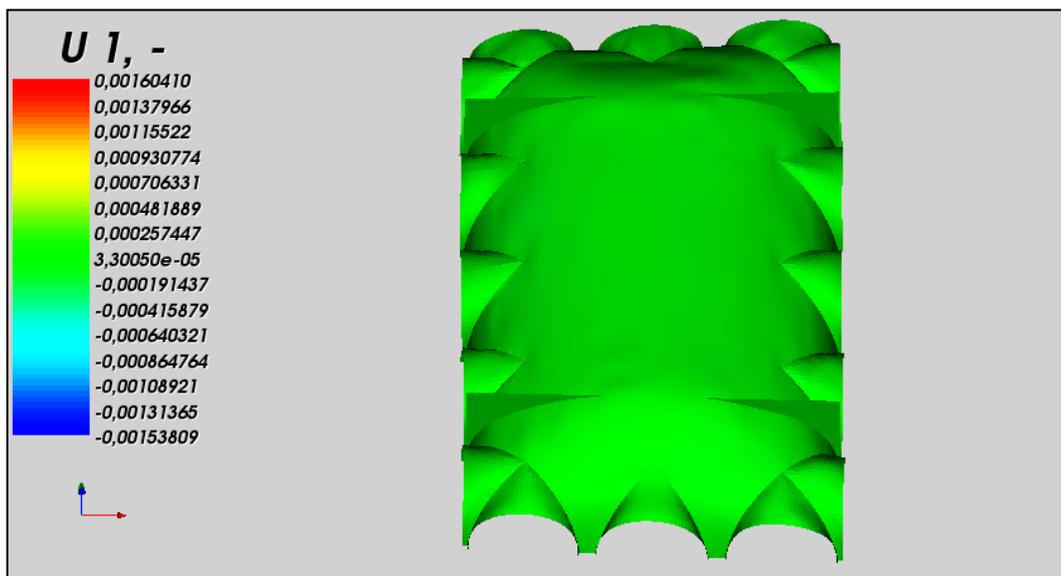


Figura IV-53 - Spostamenti trasversali nel modello con rinfienco.

Se visualizziamo, infatti, la deformata della volta sovrapposta alla configurazione indeformata, notiamo come questa si abbassi anche nella zona, appunto, delle unghie, con una tendenza di queste a ruotare verso l'interno della struttura, lasciando presagire quelle fessure all'attacco con le pareti già menzionate e presenti nel quadro fessurativo.

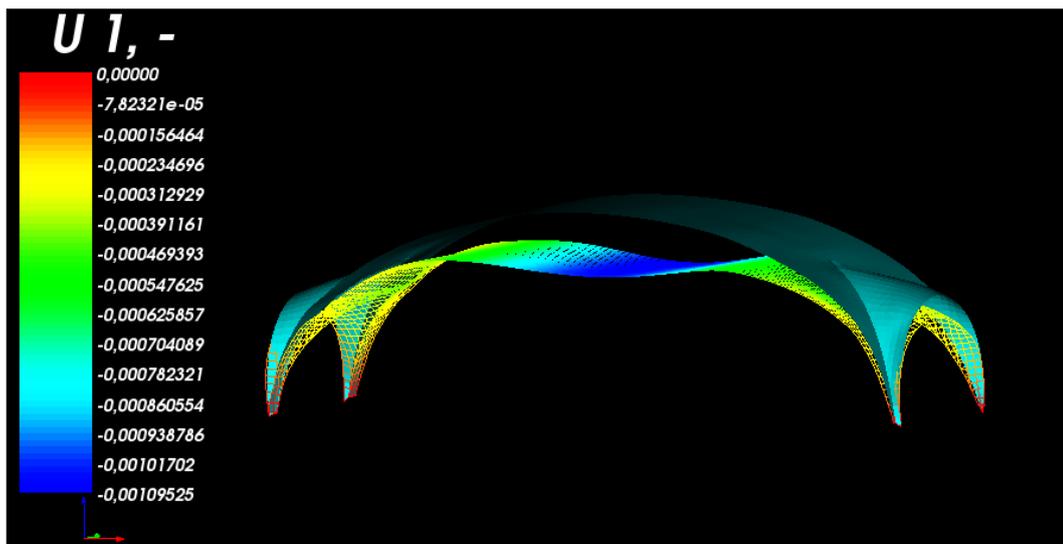


Figura IV-54 - Porzione centrale della volta sezionata trasversalmente con configurazione deformata ed indeformata nel modello con rinfianco.

A conferma di ciò, vi è la distribuzione delle reazioni vincolari delle pareti, nella quale si notano evidenti diminuzioni delle reazioni di compressione, con la nascita di trazioni in chiave alle lunette.

Si riportano, ad esempio, nella figura seguente (Figura IV-55), le reazioni vincolari viste in pianta della parete Est, nelle quali si nota chiaramente l'inversione del segno delle reazioni nella zona centrale.

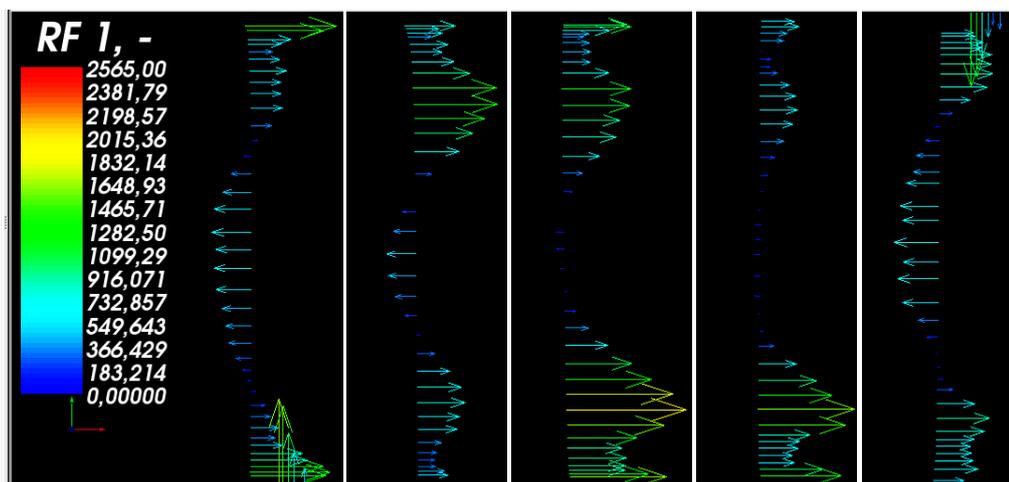


Figura IV-55 - Andamento in pianta delle reazioni vincolari delle lunette nel modello con rinfianco

Anche nelle tensioni principali minime di intradosso e di estradosso si nota (Figura IV-56) una nuova predominanza del colore giallo (di trazione) nella zona delle unghie, nella quale, fino ad ora, era stata predominante la colorazione azzurra (di compressione).

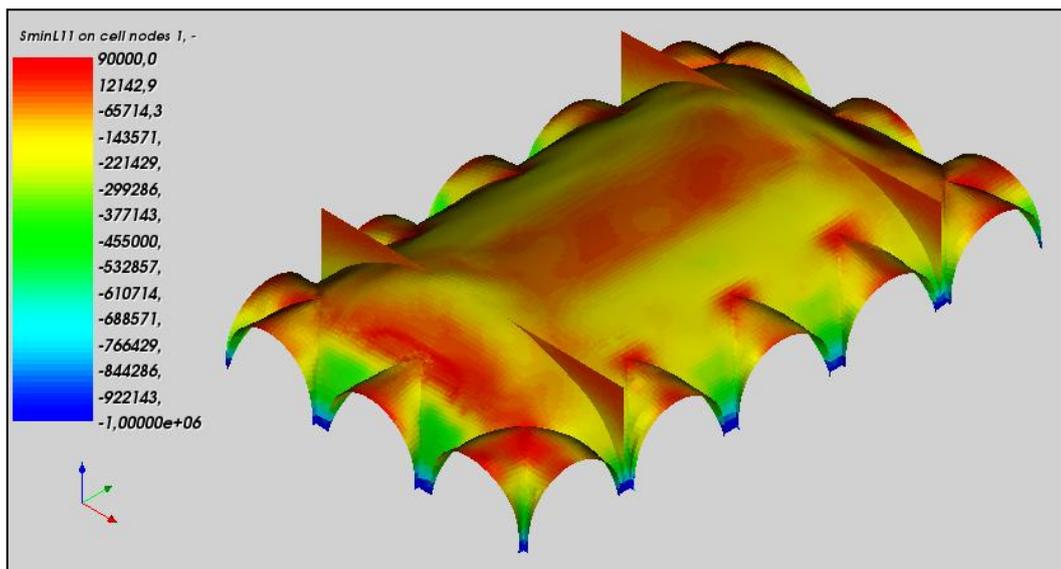


Figura IV-56 - Tensioni principali minime all'intradosso nel modello II con rinfianco

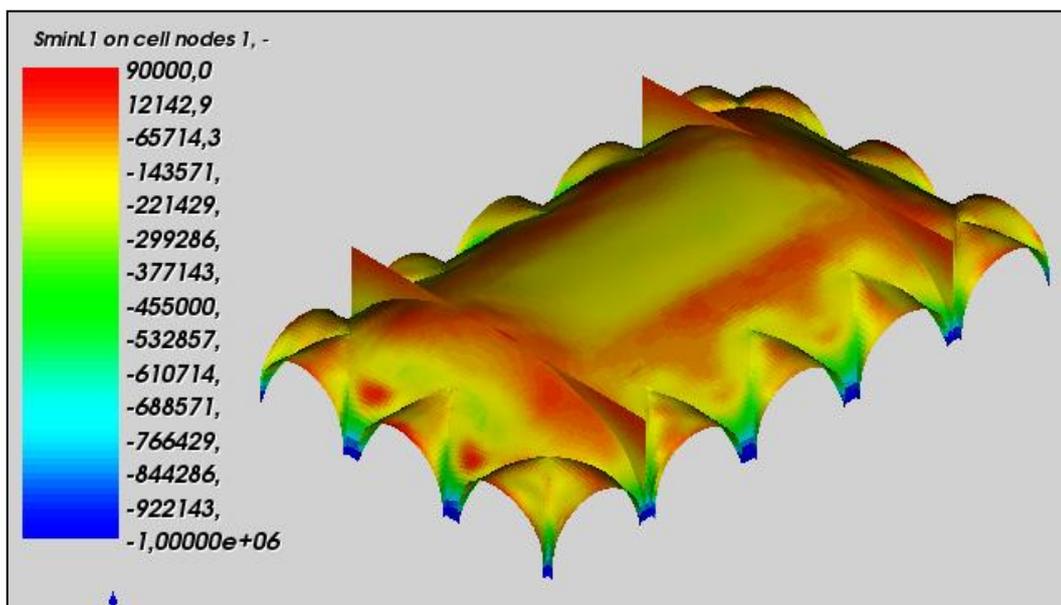


Figura IV-57 – Tensioni principali minime all'estradosso nel modello II con rinfianco

Il materiale di rinfianco è, quindi, l'elemento che governa il comportamento deformativo della volta e non sembra avere un effetto stabilizzante poiché sembra concorrere al distacco delle lunette dai sostegni, cioè dalle pareti. Tuttavia anche in questo modello, come nel caso analogo ma senza il carico del rinfianco, la curva delle pressioni risulta interna alla sezione (Figura IV-58).

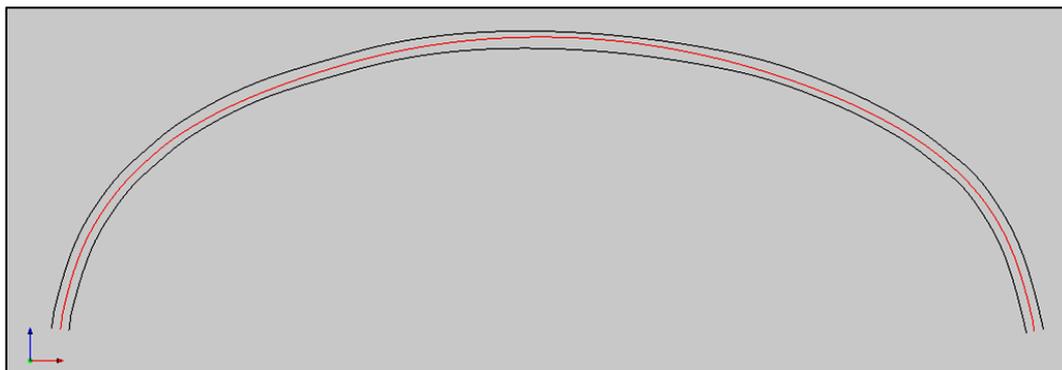


Figura IV-58 – Curva delle pressioni del modello II con rinfianco

Non bisogna, però, dimenticare che all'aumento del carico verticale sulle strutture voltate e sugli archi, corrisponde un aumento della spinta orizzontale che questi esercitano sui piedritti, lo spostamento dei quali è uno dei dissesti principali che possono portare all'instabilità di questi elementi.

In particolare in questo caso si passa da 179.14kN del caso senza rinfianco (§IV.9.1) a 258.56kN di questo modello, in direzione longitudinale, e da 73.05kN a 148.01kN, in direzione trasversale.

Nel caso in esame le pareti su cui poggia la volta sono quasi tutte ben confinate lateralmente dalle restanti parti dell'edificio, tranne la parete Sud, che si affaccia su Via San Martino. Per quanto la spinta che agisce su tale parete sia quella longitudinale, e, quindi, quella di minore entità, lo schema statico a mensola e l'altezza della parete di oltre 14m, lascia presagire una possibile situazione critica. Verificheremo questa ipotesi nel Modello III in cui sono presenti anche le pareti.

Infine, le resistenze richieste a trazione per questa configurazione di equilibrio della volta sono ancora troppo elevate, con picchi di $2,5 \text{ daN/cm}^2$, riscontrabili nelle tensioni principali massime di intradosso ed estradosso (Figura IV-59 – Tensioni principali massime all'intradosso nel modello II con rinfianco Figura IV-60, Figura IV-59).

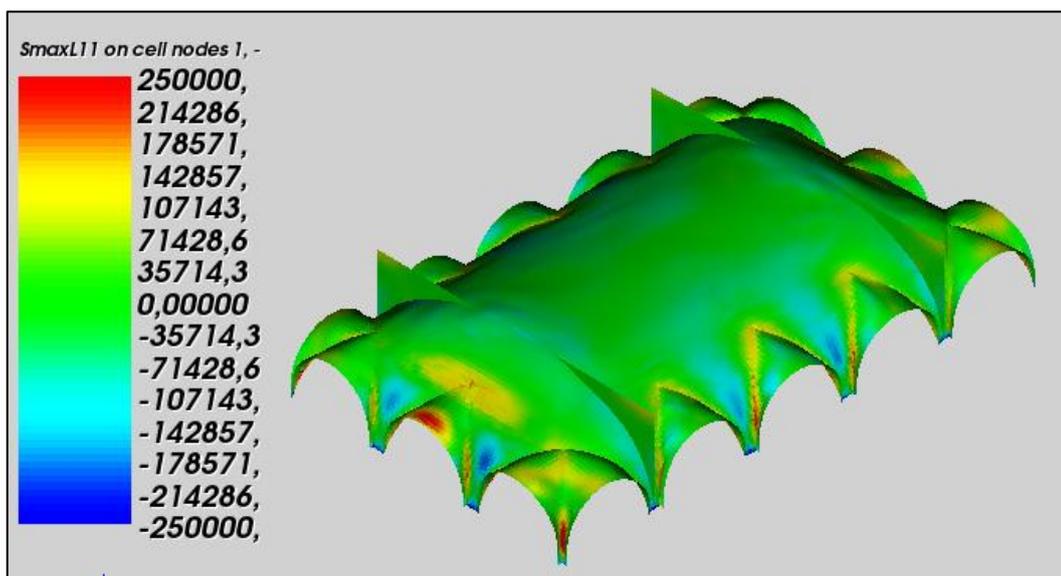


Figura IV-59 – Tensioni principali massime all'intradosso nel modello II con rinfianco

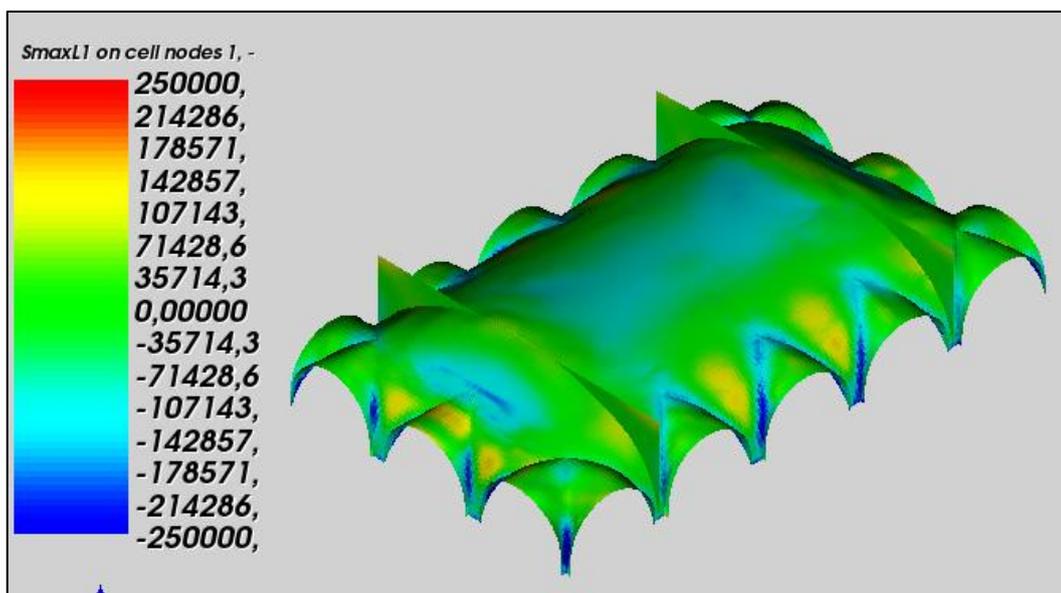


Figura IV-60 – Tensioni principali massime all'estradosso nel modello II con rinfianco

Questo problema sarà superato nelle prossime analisi, con l'introduzione del materiale masonry-like, già ampiamente spiegato nei paragrafi precedenti.

IV.10 Analisi elastico-non lineari

IV.10.1 Modello I: Semplice appoggio alla base

Nella prima analisi che è stata svolta è stato considerato il modello con semplice appoggio alla base e il materiale come non resistente a trazione e infinitamente a compressione, con le seguenti tensioni limite:

- $\sigma_{\text{cmax}} = 1\text{e}20\text{daN/cm}^2$ (valore con cui si intende, ovviamente, identificare una illimitata resistenza a compressione)
- $\sigma_{\text{tmax}} = 0$

A differenza dei modelli con materiale elastico lineare, come abbiamo visto, il problema al contorno con materiale masonry-like, deve essere risolto iterativamente per ogni incremento di carico, poiché anche la matrice di rigidezza è funzione degli spostamenti.

In questa prima analisi effettuata, il codice di risoluzione non è riuscito ad andare a convergenza e questo può essere dovuto a due motivi: il primo è che la volta, modellata con un materiale no-tension non riesca effettivamente a ritrovare l'equilibrio; il secondo è la mancata suddivisione del carico assegnato in incrementi, cosa che abbiamo già detto essere spesso necessaria per la convergenza del codice agli elementi finiti.

Osservando, però, i risultati dello stesso modello con materiale elastico lineare, avevamo già osservato come le tensioni di trazione richieste per l'equilibrio fossero molto elevate, dell'ordine di $8,5\text{daN/cm}^2$.

Per questo, il primo tentativo che è stato effettuato è quello di provare ad attribuire una resistenza a trazione diversa da zero al materiale, passando, quindi, dal legame costitutivo elastico non lineare non resistente a trazione a quello elastico non lineare debolmente resistente a trazione, già entrambi ampiamente trattati nei paragrafi precedenti. La resistenza scelta è la minima che si ipotizza che il materiale possa ancora sviluppare, pari, come già detto a $0,1\text{daN/cm}^2$.

Le nuove caratteristiche del materiale sono le seguenti:

- $\sigma_{\text{cmin}} = 1\text{e}20\text{daN/cm}^2$
- $\sigma_{\text{tmax}} = 0,1\text{daN/cm}^2$

Il codice di risoluzione, dopo 100 iterazioni (valore che era stato fornito al programma come numero massimo) non trova ancora la convergenza, anche se si nota una progressiva riduzione del residuo.

Si procede, quindi, ad aumentare la resistenza a trazione, per verificare quanta resistenza risulta essere necessaria affinché la volta riesca a trovare una configurazione di equilibrio:

- analisi con $\sigma_{tmax} = 0,2 \text{ daN/cm}^2$: non converge;
- analisi con $\sigma_{tmax} = 0,3 \text{ daN/cm}^2$: non converge;
- analisi con $\sigma_{tmax} = 0,4 \text{ daN/cm}^2$: non converge;
- analisi con $\sigma_{tmax} = 0,5 \text{ daN/cm}^2$: converge.

Un'ultima analisi con $0,5 \text{ daN/cm}^2$ di resistenza a trazione, arriva rapidamente a convergenza ma i risultati ottenuti lasciano capire che la configurazione delle tensioni che ha acquisito la volta, non è comunque una configurazione ammissibile nella realtà.

Analizziamo i risultati dell'analisi.

Il campo di spostamenti in direzione verticale ha un andamento simile al caso elastico lineare, con abbassamenti concentrati nella zona centrale praticamente piana e sollevamenti nella zona delle unghie. Tuttavia esso presenta valori nettamente superiori al primo caso:

- lo spostamento massimo positivo (abbassamento) è di un ordine di grandezza superiore rispetto al caso elastico-lineare, pari cioè a 4,2cm rispetto ai 5mm di quest'ultimo;
- lo spostamento minimo negativo (sollevamento) è di ben due ordini di grandezza superiore (in modulo) rispetto al caso elastico-lineare, pari cioè a 1,1cm rispetto ai 5mm di quest'ultimo;

Il comportamento deformativo di “spanciamento” a cui avevamo accennato è, quindi, in questo modello notevolmente accentuato e mentre nel caso lineare si è fatto riferimento ad una *tendenza* al sollevamento (0,5mm), in questa analisi si può parlare di effettivo rialzamento delle zone delle unghie con spostamenti massimi pari a oltre 1cm.

Si prosegue il confronto tra i due modelli riportando nell'immagine sottostante una vista analoga a quella della analisi elastico-lineare, con una porzione della volta sezionata trasversalmente nella configurazione deformata (a colori) e in quella in deformata (Figura

IV-61). Da notare che, mentre nella Figura IV-22 la scala utilizzata era 100:1, in questa è 20:1, data l'entità degli spostamenti.

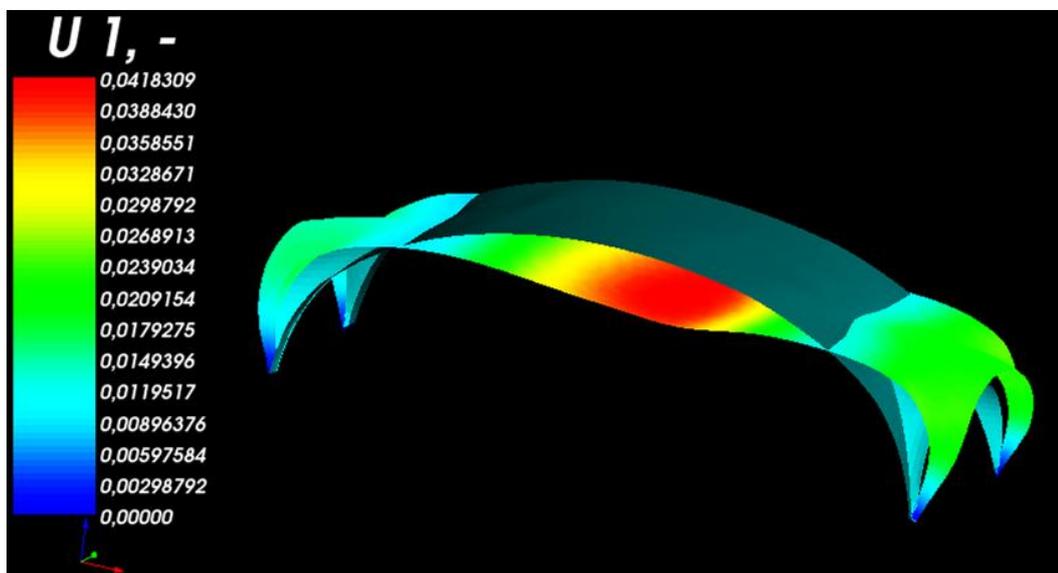


Figura IV-61 – Configurazioni deformata (con scala cromatica) ed indeformata sovrapposte: sezione trasversale in corrispondenza dell'unghia centrale

Questo aumento esponenziale dei valori del campo di spostamento è dovuto alla quota anelastica delle deformazioni: nel materiale no-tension, infatti, il legame costitutivo vede le deformazioni totali come somma di due contributi, uno elastico ed uno anelastico o di frattura.

Si riporta nel seguito (Figura IV-62) il campo delle deformazioni di frattura all'intradosso, che rispecchia molto bene il quadro fessurativo reale della Figura IV-16, con fessure che corrono dall'interno delle unghie alla zona centrale della volta.

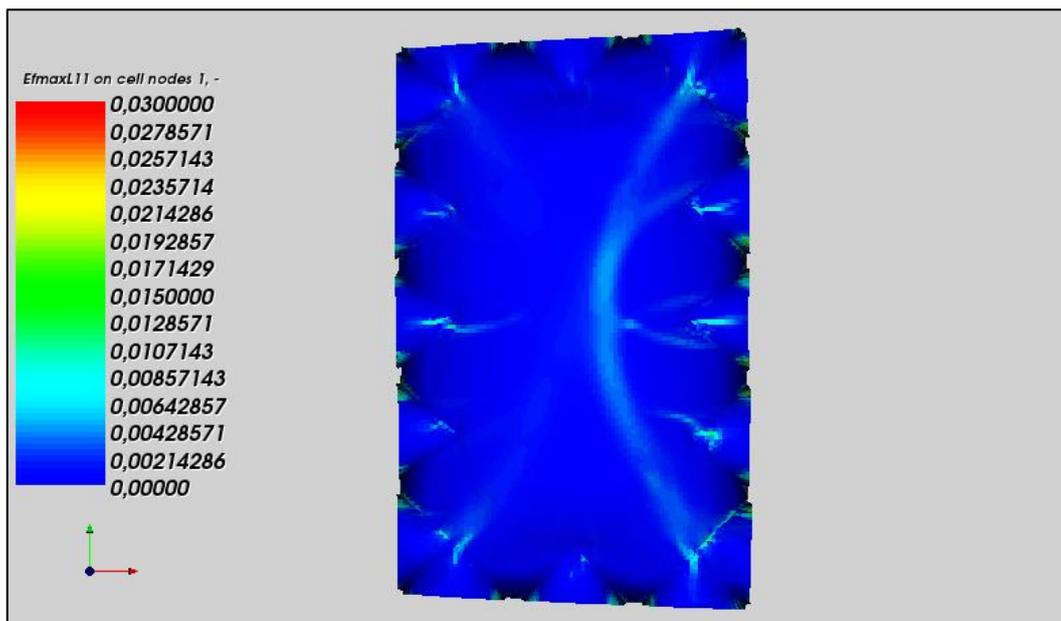


Figura IV-62 – Deformazioni principali massime di frattura all'intradosso del modello I con appoggio alla base e limitata resistenza a trazione ($0,5 \text{ kg/cm}^2$)

La corrispondenza del quadro fessurativo trovato in quest'ultima analisi con limitata resistenza a trazione e semplice appoggio alla base, lascia intuire la possibilità che tali fessure siano da imputare ai momenti successivi allo scasso della volta, quando ancora la malta possedeva una certa resistenza a trazione e la volta non si era ancora adagiata sui sostegni (cioè sulle pareti). Nel modello successivo studieremo, quindi, il caso di appoggio alla base e in corrispondenza dei muretti di rinfiacco, per riprodurre tale situazione originaria.

Analizziamo, infine, i campi delle tensioni principali minime all'estradosso e all'intradosso riportati nelle seguenti figure (Figura IV-63 e Figura IV-64).

Nella prima sono visualizzate le tensioni di intradosso con un range che comprenda la tensione minima, pari a circa 40 daN/cm^2 . In questa immagine, però, non si distinguono le zone in trazione della volta, poiché l'intervallo di valori utilizzato è troppo ampio, andando dai 40 daN/cm^2 a 0.5 daN/cm^2 . Nella immagine sottostante, quindi, si è ristretto il range per evidenziare le zone in trazione, e sono stati riportati anche a fianco i risultati, sempre in termini di tensioni minime di intradosso, dell'analisi elastico lineare. Dal confronto tra le immagini, si nota chiaramente la nuova distribuzione delle tensioni a cui il materiale fa ricorso per ritrovare l'equilibrio con questo nuovo legame costitutivo.

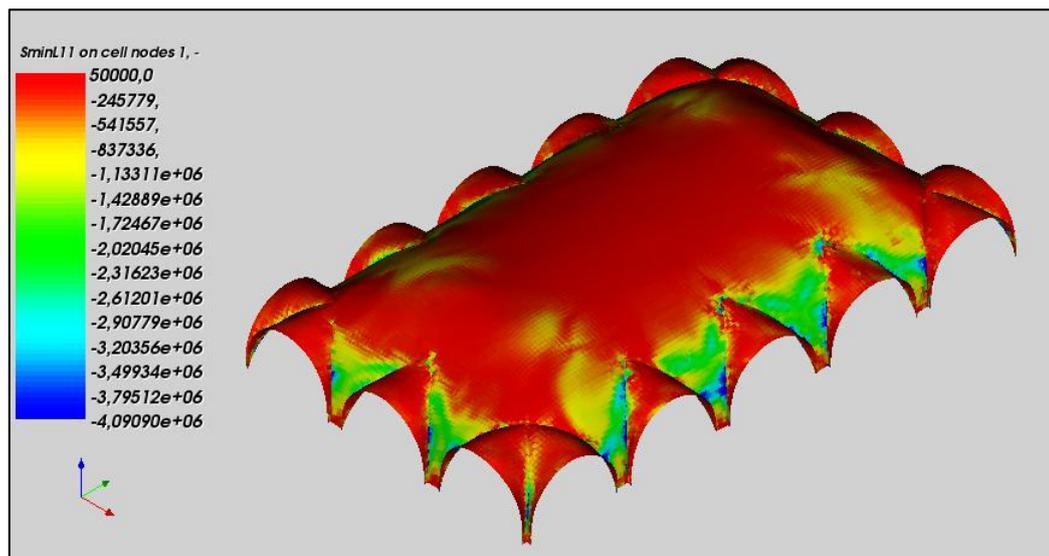


Figura IV-63 – Tensioni principali minime di intradosso del modello I con appoggio alla base e limitata resistenza a trazione ($0,5 \text{ kg/cm}^2$)

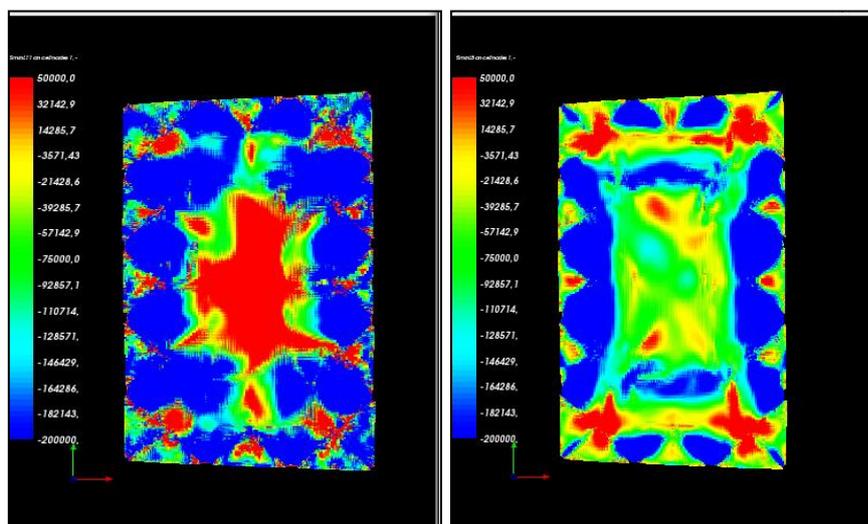


Figura IV-64 – Confronto tra la distribuzione delle tensioni all'intradosso con modello I elastico lineare e modello I con limitata resistenza a trazione ($0,5 \text{ kg/cm}^2$); vincolo di semplice appoggio alla base

Nella figura successiva si riportano, invece, le tensioni minime di estradosso, nelle quali si rileva una tensione di compressione massima pari a circa 20 daN/cm^2 , molto inferiore rispetto all'intradosso.

Come si osservava nell'analisi elastica lineare, anche in questo caso, si rileva una certa specularità tra le tensioni di intradosso ed estradosso, maggiormente marcata se si osservano la Figura IV-64 e la Figura IV-65, con gli intervalli dei valori di legenda ridotti in modo da evidenziare le zone in trazione e quelle in compressione.

Si riporta di nuovo l'immagine del campo delle tensioni minime di estradosso dell'analisi elastico-lineare, per confrontarle con quelle che si instaurano con il materiale no-tension.

Si nota una maggiore somiglianza rispetto al caso dell'intradosso, da attribuire all'assenza di fessure all'estradosso tranne quelle non "patologiche" in corrispondenza delle intersezioni unghie-volta. Il materiale si è mantenuto per lo più, quindi, in ambito elastico lineare.

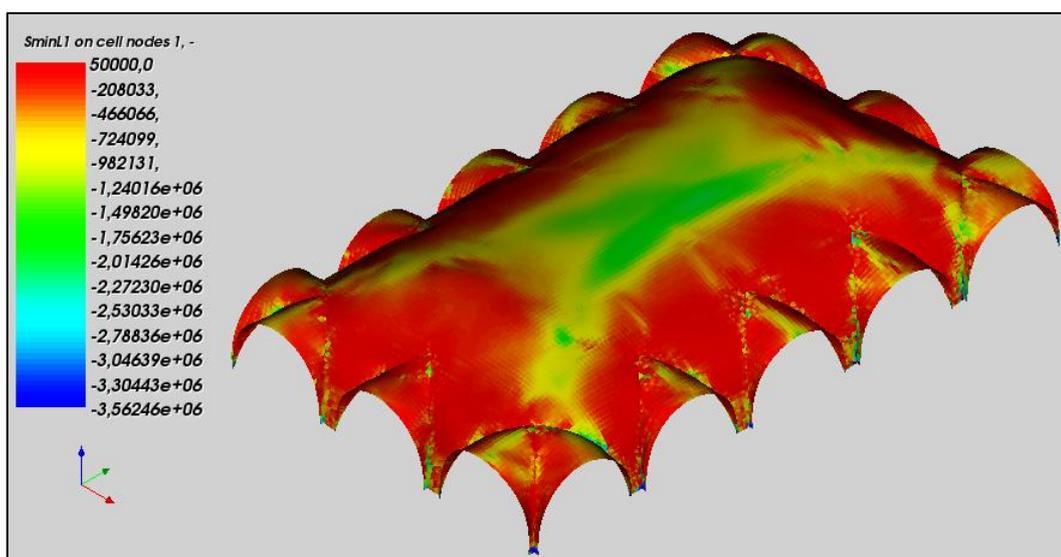


Figura IV-65 – Tensioni principali minime di estradosso del modello I con appoggio alla base e limitata resistenza a trazione ($0,5 \text{ kg/cm}^2$)

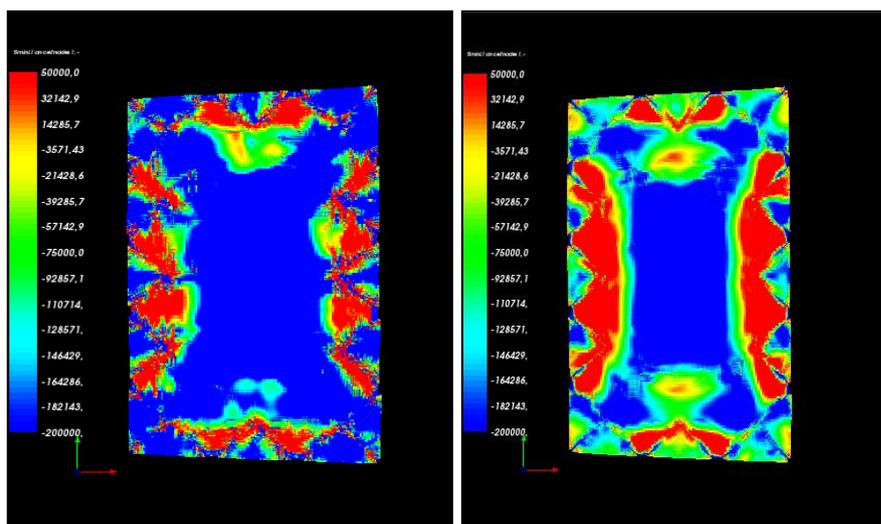


Figura IV-66 – Confronto tra la distribuzione delle tensioni all'estradosso con modello I elastico lineare e modello I con limitata resistenza a trazione ($0,5 \text{ kg/cm}^2$); vincolo di semplice appoggio alla base

Con tale valore di resistenza a trazione il codice riesce a risolvere il problema al contorno. Analizzando, però, il campo degli spostamenti verticali si nota subito un valore eccessivo dello spostamento verticale massimo, che abbiamo visto essere nella zona centrale, pari ad oltre 4cm. Di per sé, data la luce della volta, potrebbe sembrare accettabile, ma non bisogna dimenticare che la configurazione introdotta nel modello, non è quella di progetto, ma quella attuale, e cioè già assestata per il carico peso proprio, che è l'unico fino ad ora inserito nell'analisi.

Di per sé, però, i valori di spostamento non possono essere ritenuti indici di una soluzione non ammissibile o non corretta, poiché, come già spiegato, il campo degli spostamenti, determinato come soluzione del problema al contorno con materiale masonry-like, non è univoco data la sua dipendenza dalle deformazioni anelastiche.

Si procede ad osservare, quindi, il campo delle tensioni minime intradossali ed estradossali, nelle quali, Figura IV-65 , si hanno zone con compressioni dell'ordine di 40daN/cm^2 . Poiché la soluzione del tensore \hat{T} delle tensioni è univoca, possiamo adesso affermare che la ridistribuzione necessaria all'equilibrio determina valori di compressione non ammissibili per il materiale.

Anche la curva delle pressioni mostra che la struttura si trova in condizioni limite, con la tangenza della curva all'estradosso in chiave alla sezione, e la fuoriuscita di questa alle reni, verso l'intradosso.

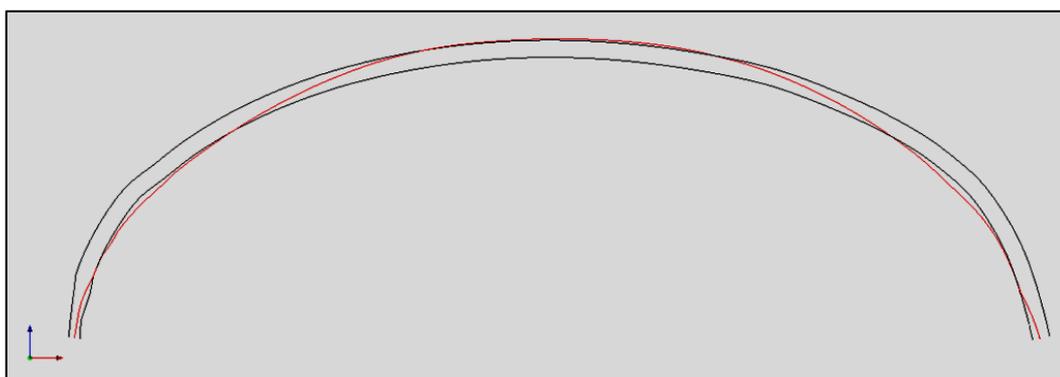


Figura IV-67 Curva delle pressioni del modello I, semplice appoggio alla base e materiale masonry-like

A differenza dei modelli precedenti, in cui si aveva una forte differenza tra la spinta longitudinale e quella trasversale, in questo modello esse praticamente si equivalgono, con valori rispettivamente di 355.51kN e di 350.74kN.

IV.10.2 Modello I: Semplice appoggio alla base e materiale di rinfiacco

Come avevamo visto nelle analisi elastico-lineari, il materiale di rinfiacco aveva diminuito notevolmente la tendenza della volta allo “spanciamento” con un effetto di confinamento molto marcato. Per questo sono state ripetute le analisi con semplice appoggio alla base inserendo il carico fornito dal materiale di rinfiacco tramite la *forcem* già spiegata precedentemente.

La prima prova effettuata è stata quella con materiale elastico non lineare non resistente a trazione che, come abbiamo visto non andava a convergenza.

A nuova conferma dell'effetto di confinamento del riempimento che già avevamo notato durante le analisi elastiche lineari, il modello con semplice appoggio alla base, che senza rinfiacco convergeva solo con almeno $0,5\text{daN/cm}^2$ di resistenza a trazione, con l'introduzione di questo nuovo carico, raggiunge la convergenza anche con il legame puramente no-tension.

Nel seguito si analizzano i risultati ottenuti.

Per quanto riguarda il campo di spostamenti (Figura IV-68), essi sono analoghi al caso di modello in semplice appoggio e con rinfiacco del modello elastico-lineare, anche se lo spostamento massimo totale è decisamente superiore e dell'ordine di 1,2cm. Inoltre si nota una tendenza al sollevamento della zona delle unghie, che invece si era persa nel caso di introduzione del rinfiacco per lo stesso modello con materiale elastico-lineare.

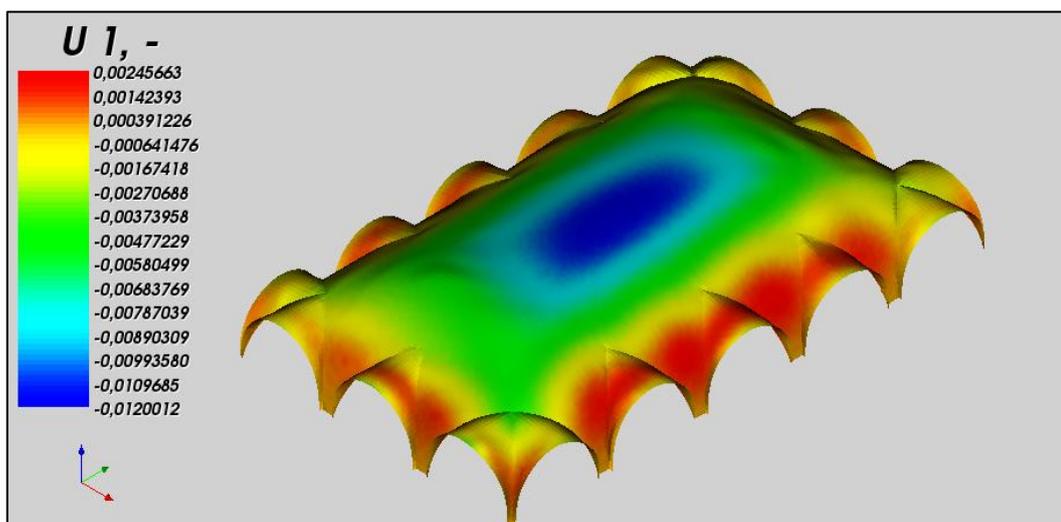


Figura IV-68 – Spostamenti verticali del modello I con rinfiacco

Per quanto riguarda, invece, il campo delle deformazioni anelastiche (Figura IV-69), si nota che, sia all'intradosso che all'estradosso, esse sono presenti in corrispondenza dei bordi delle unghie, denotando la presenza di zone fessurate. Come abbiamo più volte ribadito, questo era il risultato a cui ci aspettavamo di arrivare con l'introduzione del legame costitutivo no-tension, e cioè la corrispondenza tra le deformazioni anelastiche risultanti dal modello e il quadro fessurativo rilevato nella realtà (Figura IV-16).

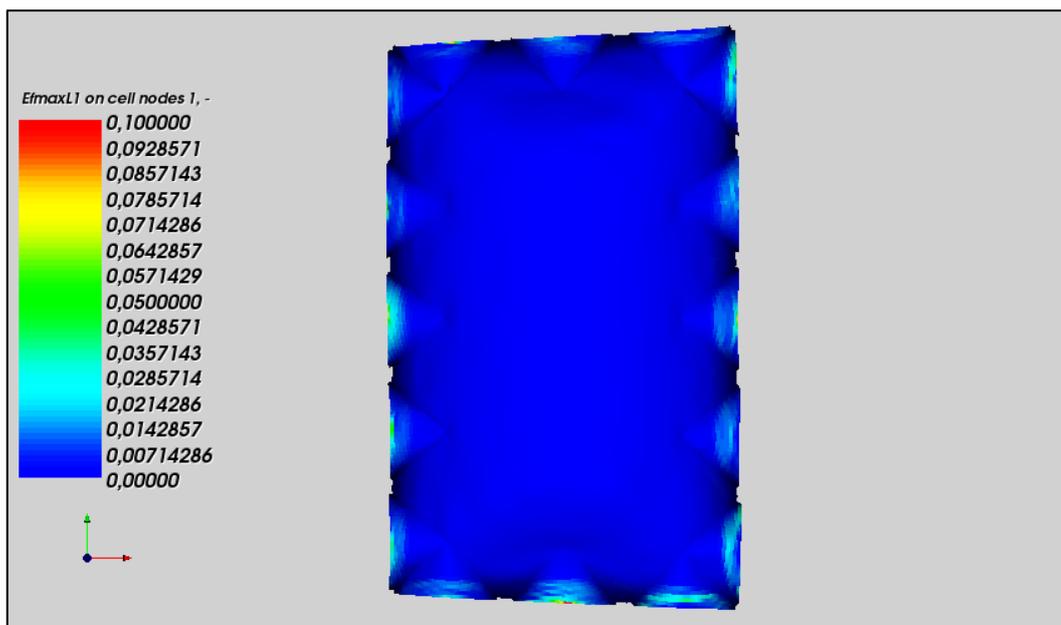


Figura IV-69 – Deformazioni principali massime di frattura all'estradosso nel modello I con rinfianco

Per completezza si riporta nell'immagine seguente il campo delle tensioni principali minime relative alla superficie media della volta, in cui si notano ancora picchi di compressioni all'intradosso ed all'estradosso di circa 50 daN/cm^2 .

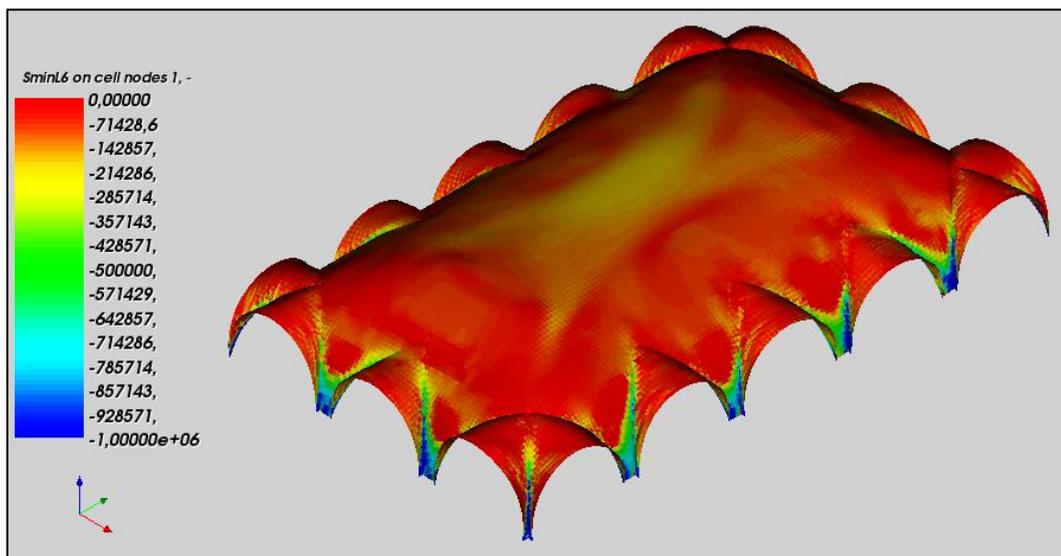


Figura IV-70 – Tensioni principali minime del modello I con rinfiacco

La marcata sollecitazione della volta si nota anche osservando la sezione trasversale della superficie delle eccentricità di massimo modulo, che risulta quasi tangente all'estradosso della sezione in chiave e all'intradosso alle reni.

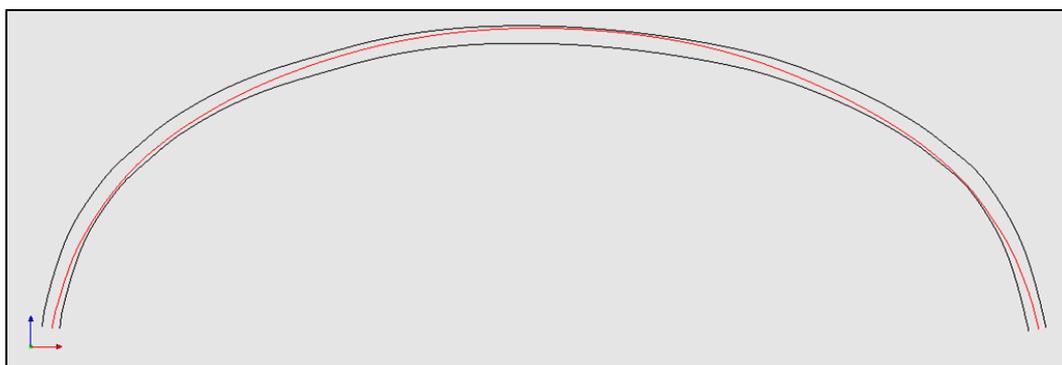


Figura IV-71 – Curva delle pressioni de modello I con rinfiacco

Anche in questo caso, come nel caso precedente e a differenza di quanto si evinceva dalle analisi elastico lineari, la spinta in direzione trasversale e quella in direzione longitudinale sono molto prossime, con valori rispettivamente di 279.14kN e di 266.72kN.

IV.10.3 Modello II: Semplice appoggio alla base

Nel caso di materiale elastico lineare avevamo visto come il grado di confinamento laterale offerto dai muretti di rinfiacco fosse poco efficace a causa della loro posizione decentrata. La forma della volta, infatti, come già ampiamente spiegato, determina una

tendenza allo “spanciamento” trasversale concentrata nella zona centrale, mentre i muretti sono posizionati nelle zone più esterne.

Essi, inoltre, sono sormontati nella realtà dalle due catene che non sono state fino ad ora inserite nel modello, poiché assenti in esso i muri su cui esse si innestano. Saranno inserite nel III modello, con la modellazione delle pareti adiacenti la volta.

Ci chiediamo adesso se la loro funzione nel caso di materiale masonry-like resti comunque marginale.

Il modello II con semplice appoggio alla base e materiale non resistente a trazione non riesce comunque ad andare a convergenza. Tuttavia, la resistenza a trazione necessaria affinché la volta riesca di nuovo a trovare una configurazione equilibrata è di $0,1\text{daN/cm}^2$, molto minore e più plausibile del valore di $0,5\text{daN/cm}^2$ necessario nel modello I, cioè in assenza dei muretti di rinfiacco.

Come nel caso precedente, di appoggio alla base con rinfiacco e muretti, la curva delle pressioni denota una situazione critica: essa di nuovo tange la sezione della volta all’estradosso in chiave e all’intradosso alle reni.

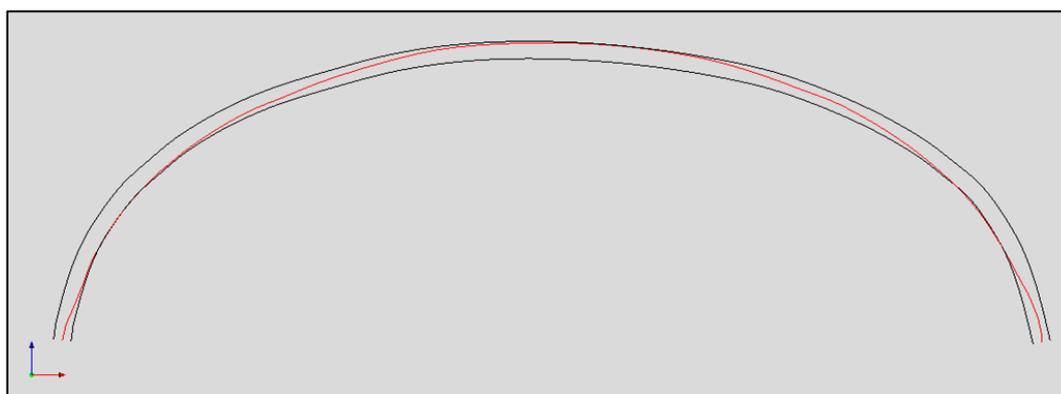


Figura IV-72 – Curva delle pressioni relativa al modello II con semplice appoggio alla base

I risultati in termini di deformazioni di frattura sono molto calzanti con parte del quadro fessurativo rilevato, in particolare relativamente alle fessure che corrono trasversalmente dalle unghie verso il centro della volta.

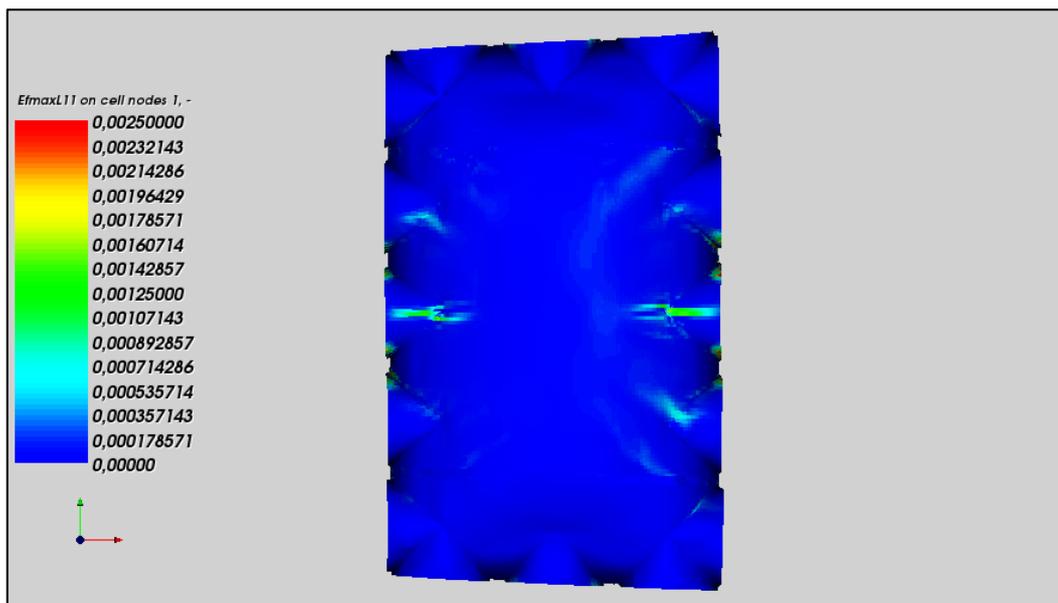


Figura IV-73 – Deformazioni di frattura del modello II con appoggio alla base e materiale masonry-like

Possiamo, quindi, affermare che tali fessure siano relative alle origini della volta, al periodo precedente alla perdita, da parte della malta, della propria resistenza a trazione. Successivamente lo scassero, infatti, la volta era sostenuta dai muretti con le catene e dalla propria resistenza a trazione, perdendo la quale essa si è progressivamente adagiata, iniziando a spingere sulle pareti ed arrivando alla configurazione odierna.

Si riportano nel seguito le distribuzioni delle tensioni principali minime di intradosso ed estradosso.

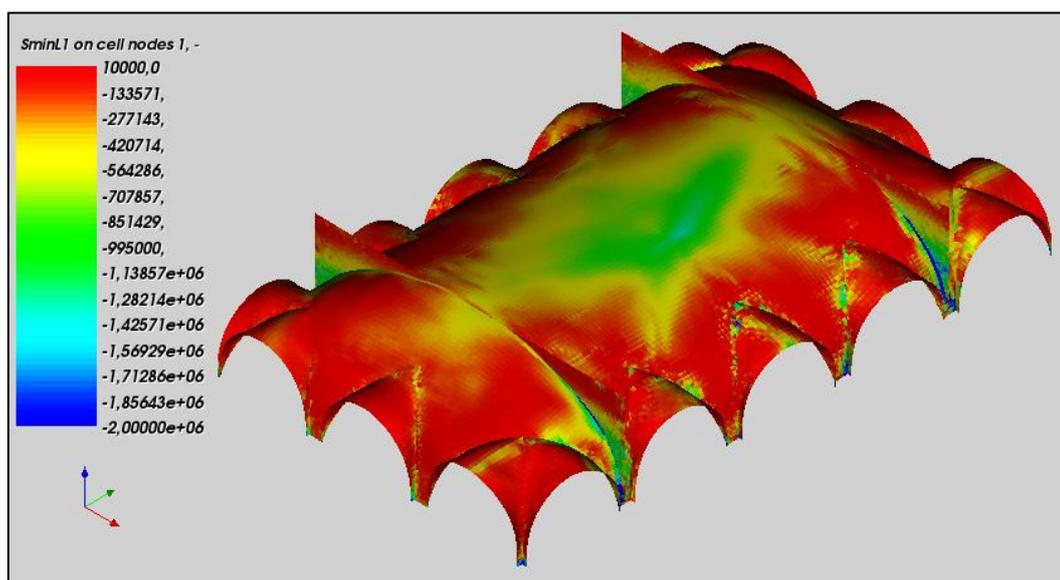


Figura IV-74 – Tensioni principali minime all'estradosso del modello II con appoggio alla base e dei muretti

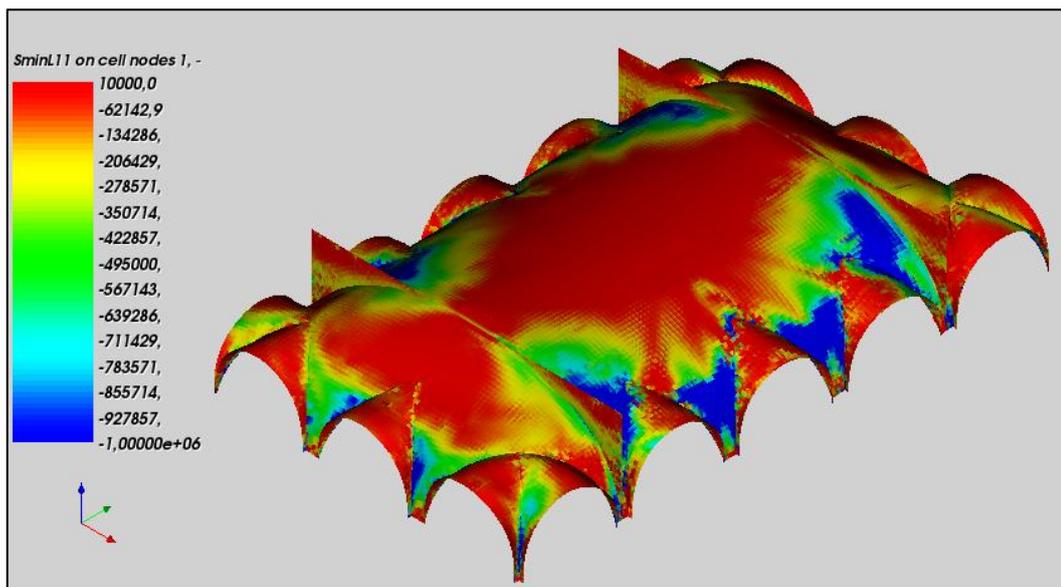


Figura IV-75 – Tensioni principali minime all'intradosso del modello II con appoggio alla base e in corrispondenza dei muretti

Infine si riportano i valori della spinta che la volta esercita sui vincoli, pari a:

- 317.47kN in direzione trasversale;
- 223.71kN in direzione longitudinale.

Notiamo come in questo modello la differenza tra i due valori di spinta sia più marcata, sulle orme di quelli che erano stati i risultati delle analisi elastico lineari.

IV.10.4 Modello II: Semplice appoggio alla base, materiale di rinfiacco e vincoli laterali fissi

Come abbiamo già osservato nello stesso modello con il materiale elastico lineare, l'inserimento dei vincoli fissi in corrispondenza delle lunette determina il confinamento laterale totale della volta. Questo determina una possibilità di deformazione decisamente ridotta e, quindi, un quadro fessurativo praticamente assente, se non nelle zone di intersezione tra la volta e le unghie, nelle quali, come abbiamo già spiegato, esse sono dovute alla discontinuità geometrica del modello e alle conseguenti concentrazioni di tensione.

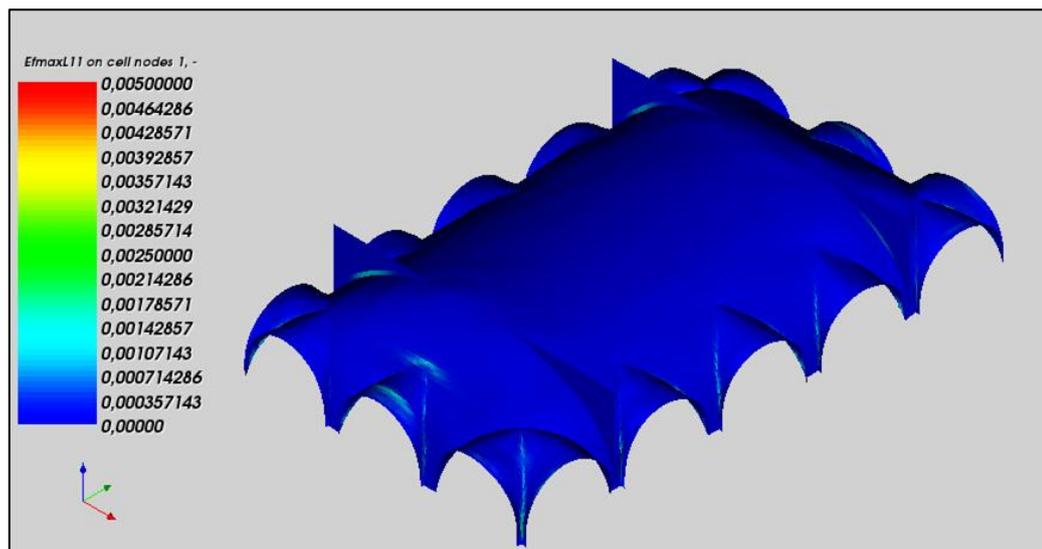


Figura IV-76 – Campo delle tensioni principali massime di frattura all'intradosso

Per quanto riguarda le tensioni principali, invece, l'appoggio laterale consente alla volta di portare il peso proprio ed il peso del materiale di rinfiacco senza violare l'ammissibilità in compressione. Come è possibile osservare nella Figura IV-77, infatti, la tensione di compressione massima che risulta dalle analisi è pari a circa 18 daN/cm^2 , ben più bassa dei 50 daN/cm^2 del caso relativo al semplice appoggio (§IV.10.2).

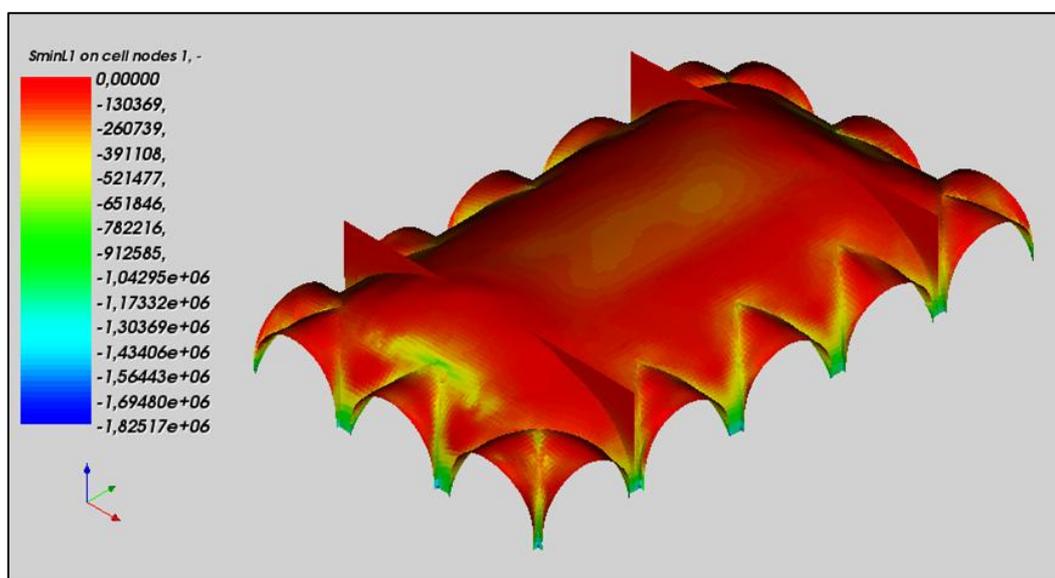


Figura IV-77 – Campo delle tensioni principali minime all'estradosso

La Figura IV-77 rende difficile l'individuazione dell'effettiva distribuzione delle tensioni, in quanto si è lasciato invariato il range automatico di output del programma per evidenziare la tensione minima risultante. Nelle figure successive, al fine di distinguere

meglio le zone tese e compresse della volta, si è ristretto l'intervallo di valori, ponendo una tensione massima di 10daN/cm^2 .

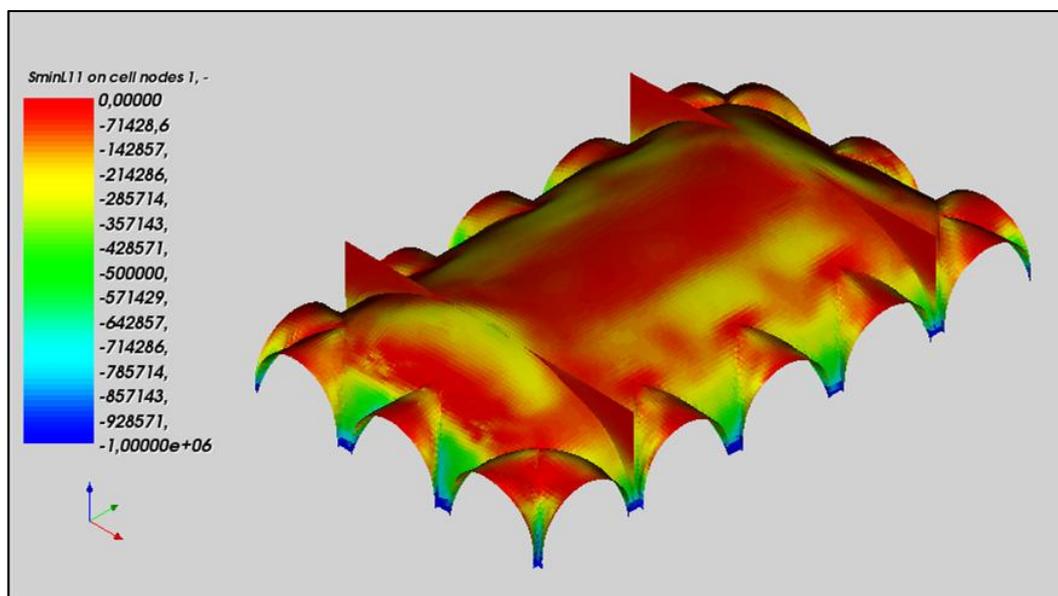


Figura IV-78 – Campo delle tensioni principali minime all'intradosso con range ridotto

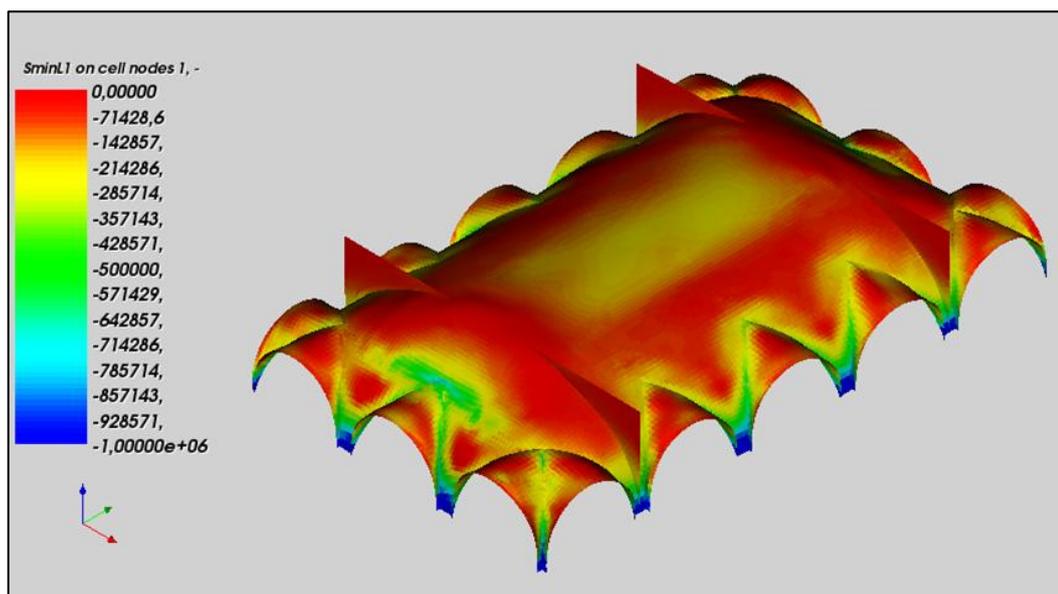


Figura IV-79 – Campo delle tensioni principali minime all'estradosso con range ridotto

Anche la curva delle pressioni conferma lo stato di ammissibilità delle sollecitazioni, presentandosi come centrata all'interno della sezione della volta (Figura IV-80).

Come conseguenza anche i valori della spinta risultano molto ridotti, se confrontati con i valori ottenuti nei precedenti modelli con rinfianco: 208.92kN in direzione trasversale e 108.91kN in direzione longitudinale.

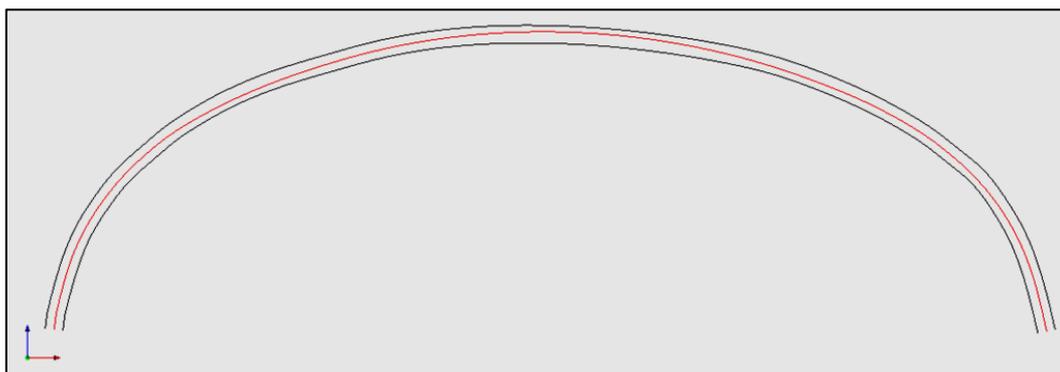


Figura IV-80 – Curva delle pressioni del modello II con vincoli laterali fissi, appoggio alla base e rinfiacco

Da notare come il confinamento dato dai vincoli fissi laterali influenzi anche il campo degli spostamenti. Mentre nel modello precedente, infatti, lo spostamento massimo era dell'ordine di 1,2cm, con l'introduzione di questi ulteriori appoggi esso viene riportato a valori accettabili, dell'ordine di 1,1mm.

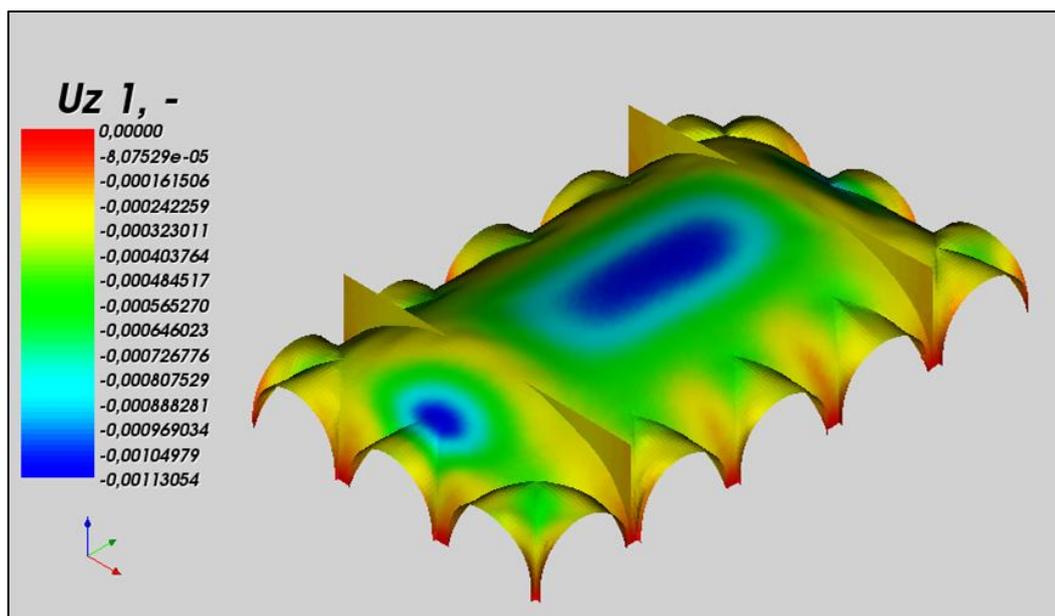


Figura IV-81 – Campo degli spostamenti verticali

IV.10.5 Modello III: stato attuale

L'ultimo modello è quello in cui si introduce nello studio la deformabilità delle pareti.

Il primo caso analizzato è quello relativo allo stato attuale della volta, cioè con muretti di rinfiacco sormontati da catene (che vengono inserite per la prima volta nel modello), materiale di rinfiacco, vincoli in corrispondenza dei solai adiacenti, incastro alla base e appoggi elastici in corrispondenza dell'intersezione tra la parete Sud e quelle ortogonali

(Est ed Ovest), a schematizzazione del contributo alla rigidità flessionale data dalla continuità della facciata (vedi §IV.4.3).

Le catene sono state introdotte come elementi *beam* di sezione $\phi 30$.

I risultati mostrano quanto la deformabilità dei vincoli, fino ad ora schematizzati come fissi, sia determinante per il comportamento della volta.

Analizzando il quadro fessurativo, si notano nuovamente le fessure di distacco delle lunette dalle pareti, effettivamente presenti nella struttura e che si erano perse nel modello precedente, analogo a questo ma con vincoli laterali fissi.

Ad esse si aggiungono quelle verticali alle intersezioni delle pareti Est ed Ovest con la facciata Sud, indici della tendenza al ribaltamento di quest'ultima. Si conferma, così, l'ipotesi fatta durante gli studi precedenti relativa alla presenza di questa possibile situazione critica e si completa il quadro fessurativo reale della struttura.

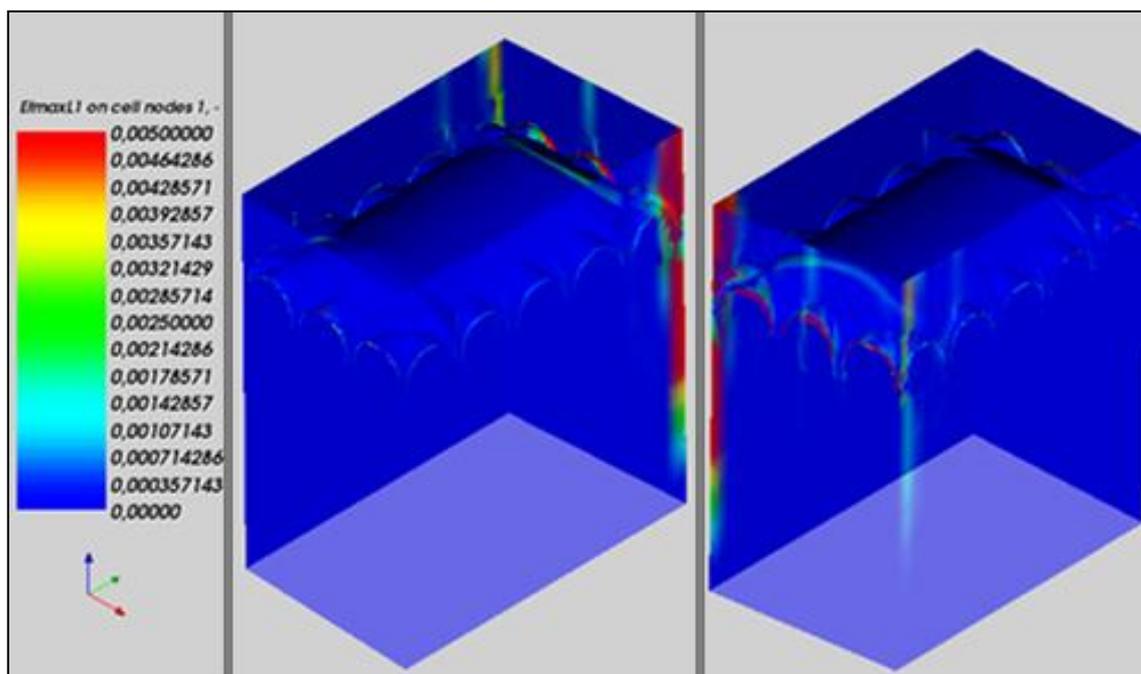


Figura IV-82 – Campo delle deformazioni principali massime di frattura, vista Nord-Ovest e Sud-Est

Osservando il campo degli spostamenti in direzione longitudinale si osserva lo spostamento massimo di circa 8mm in corrispondenza della sommità della parete Sud, lato Ovest.

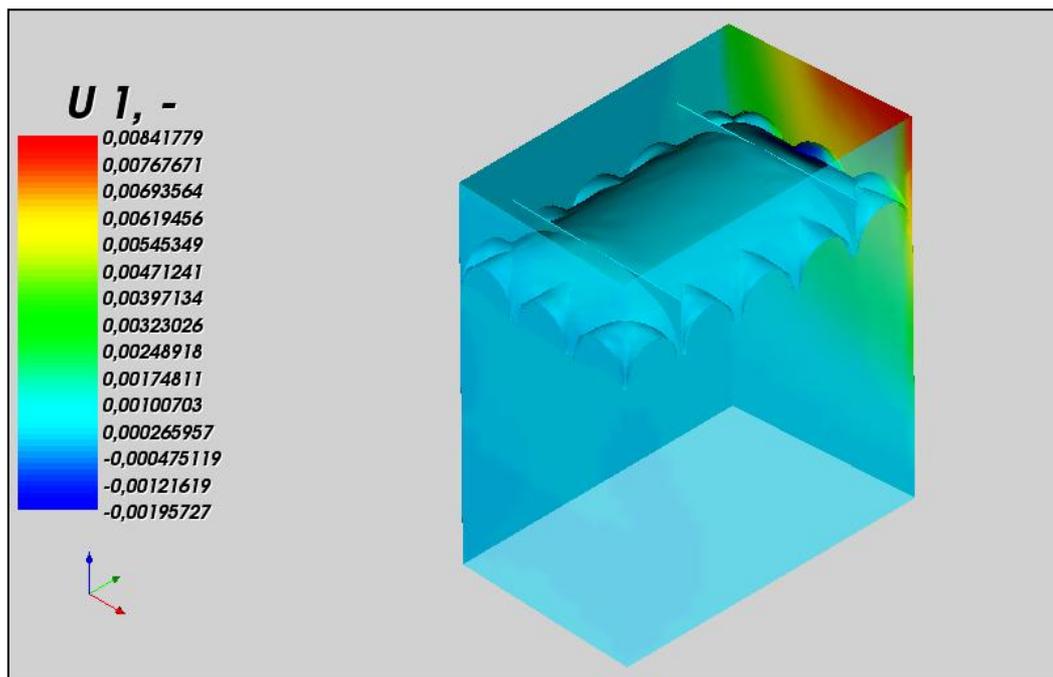


Figura IV-83 – Campo degli spostamenti longitudinali del modello III: stato attuale

La deformabilità delle pareti modifica anche la deformazione della volta in termini di abbassamento verticale. Con la rotazione della facciata, infatti, lo spostamento verticale massimo si rileva in corrispondenza della padiglione Sud della volta, e non più nella zona centrale, per quanto la differenza sia minima, con un abbassamento massimo di circa 9mm del padiglione, a fronte dei 2mm della zona centrale.

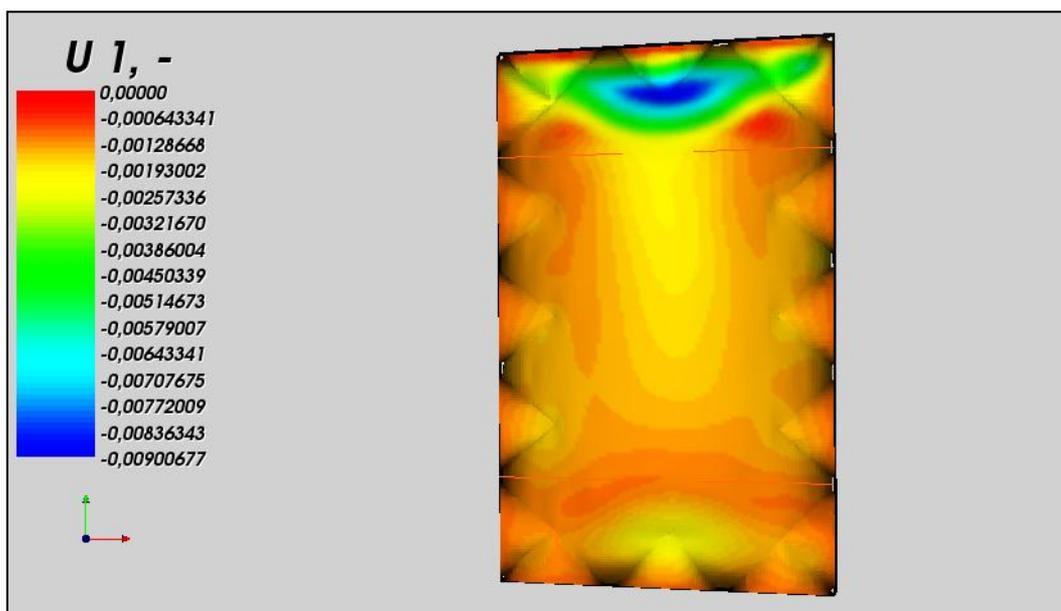


Figura IV-84 – Campo degli spostamenti verticali

Anche la distribuzione delle tensioni denota picchi di compressione nella zona del padiglione Sud, con una distribuzione non prevedibile nei modelli precedenti. La tensione di compressione massima rientra, comunque nei valori di accettabilità per il materiale, con tensioni massime in modulo di circa 7.5 daN/cm^2 .

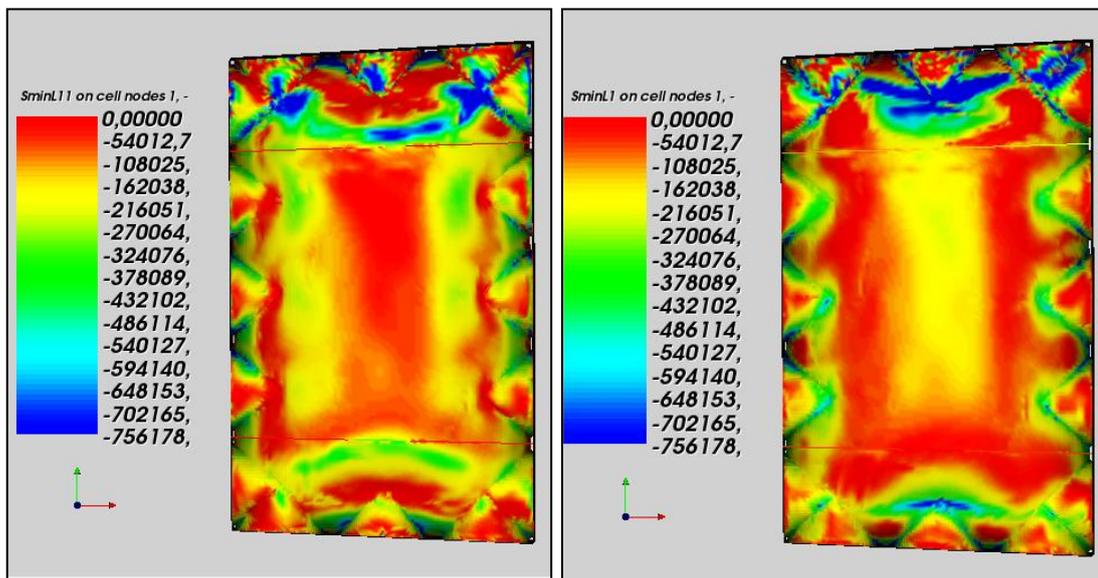


Figura IV-85 – Campo delle tensioni minime all'intradosso (SminL11) e all'estradosso (SminL1)

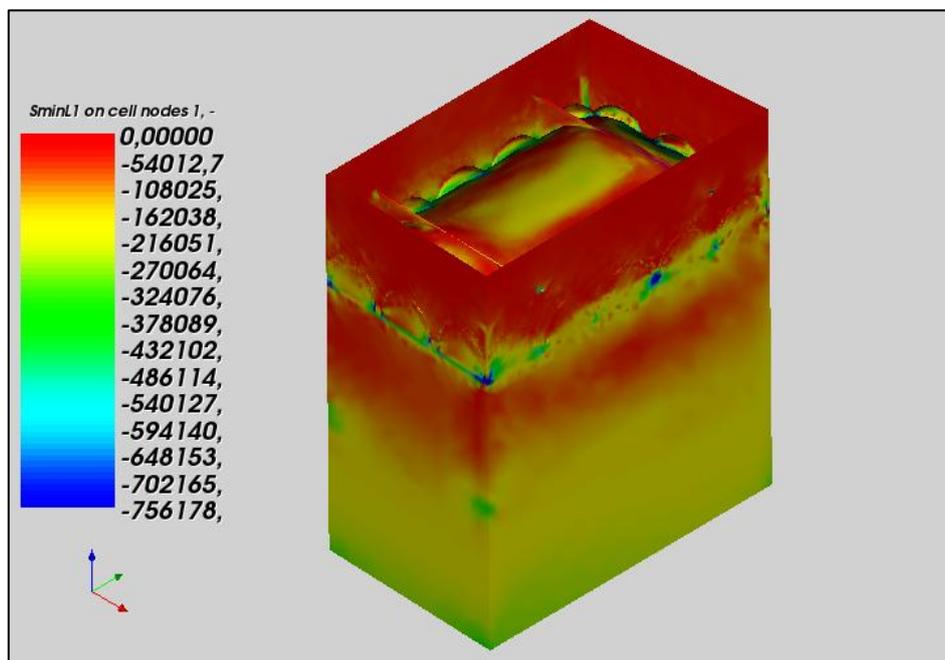


Figura IV-86 – Tensioni principali minime del modello III: stato attuale (vista globale)

Per meglio visualizzare lo stato di sollecitazione della struttura si riportano le sezioni della superficie delle eccentricità di massimo modulo in direzione trasversale (Figura IV-87) e longitudinale (Figura IV-88), comprensive delle pareti.

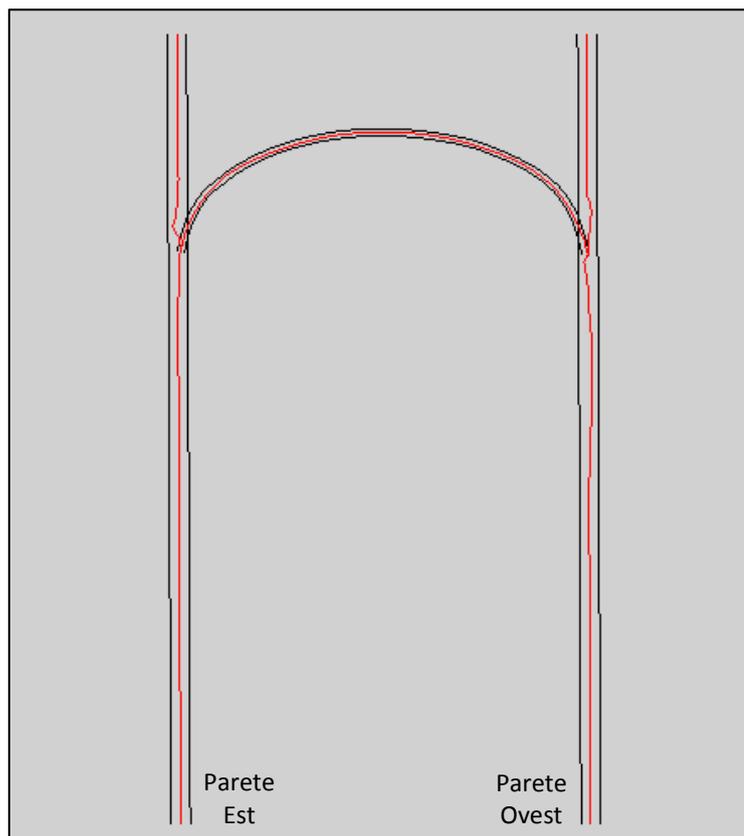


Figura IV-87 – Curva delle pressioni del modello III: stato attuale in direzione trasversale

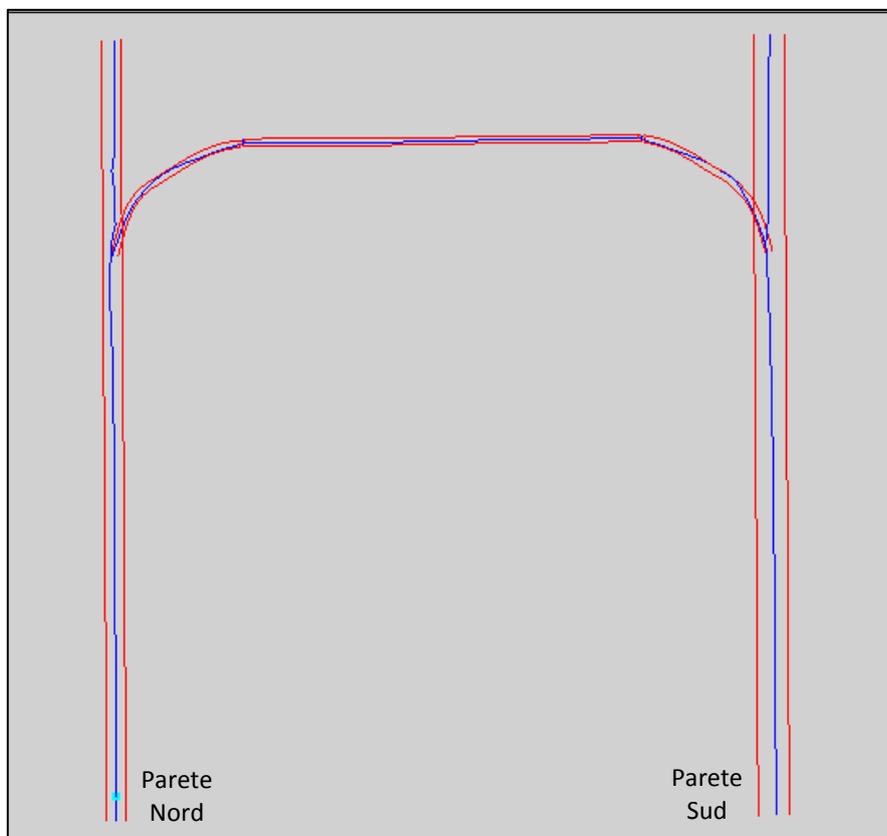


Figura IV-88 - Curva delle pressioni del modello III: stato attuale in direzione longitudinale con deformata delle parete Sud

Nelle prima sezione si evince il contenimento della curva delle pressioni all'interno degli spessori degli elementi strutturali, mentre nella seconda, benché essa si trovi ben contenuta all'interno delle pareti, nel padiglione della volta risulta tangente all'estradosso della sezione. Di nuovo, quindi, abbiamo la conferma del fatto che le criticità della volta sono legate alla direzione longitudinale, direzione in cui poggia sulla parete Sud. Da notare che, a causa della scarsa curvatura della volta in tale direzione, il meccanismo a cui essa sembra tendere, non è il tipico meccanismo ad arco, con cerniera estradosale in chiave ed intradosale alle reni, ma piuttosto il contrario.

Invece, quindi, di uno "spanciamento" si ha un collasso verso l'intradosso dei padiglioni, con cerniera intradosale nella zona centrale della volta.

Si ritiene opportuno specificare che i punti in cui la curva delle pressioni presenta picchi o discontinuità, essi sono dovuti alla presenza di elementi di forma non regolare e con le direzioni principali orientate secondo direzioni diverse da quelle degli elementi regolari adiacenti. La superficie delle eccentricità di massimo modulo, infatti, si determina, come già spiegato, calcolando per ogni direzione del piano tangente le eccentricità e considerandone il valore massimo in modulo. Essa è, quindi, definita come una deformata, con i punti che la costituiscono individuati da tale eccentricità massima rispetto alla superficie media dell'elemento.

Per determinare le eccentricità si considerano i rapporti tra i momenti flettenti e gli sforzi normali nelle varie direzioni del piano tangente, che sono definite nel sistema locale dell'elemento. Si capisce come, quindi, esse siano influenzate dalla forma stessa degli elementi.

Per quanto concerne le catene inserite nel modello, esse sono caratterizzate da uno sforzo normale massimo di 2110.89N, che denota il loro scarso caricamento. A conferma di ciò è stata effettuata un'analisi del Modello III senza catene trasversali.

Quello che si nota è la presenza di fessurazioni in corrispondenza della connessione delle zone sommitali dei muretti alle pareti, senza che però questo determini variazioni significative nei risultati dell'analisi. Lo spostamento verticale in corrispondenza delle zone vincolate dal sistema muretti-catene, infatti, subisce una variazione dell'ordine di 0,1 mm, così come quello trasversale delle pareti collegate dalle catene.

Tuttavia, abbiamo visto come la spinta in direzione trasversale della volta sia piuttosto alta (225kN) e anche notevolmente superiore a quella longitudinale (7,7kN), a causa della geometria della volta stessa, molto curva in direzione trasversale e piatta in quella

longitudinale. È questa probabilmente la ragione che ha spinto i costruttori a inserire soltanto le catene trasversali.

L'inefficacia di queste sembrerebbe legata, quindi, non ad un errore di progettazione della volta, ma alla mancata considerazione della interazione di questa con le altre parti di Palazzo Franchetti: le pareti Est e Ovest sono, infatti, vincolate trasversalmente dai solai adiacenti che già di per sé effettuano un notevole confinamento.

In realtà, osservando la storia di Palazzo Franchetti, brevemente riepilogata nel capitolo precedente, si osserva che alla data di probabile costruzione della volta la parete Est non era vincolata da alcun solaio, poiché era la parete esterna della cellula 2 che si affacciava su Vicolo Mozzo (Figura III-7).

Risale, infatti, al 1580 il primo documento comprovante l'unione delle cellule abitative nei tre Palazzi Lanfranchi, Del Torto e Mannaioni (Figura III-8).

Per analizzare, quindi, la vera funzione della introduzione delle catene trasversali dobbiamo considerare le effettive condizioni al contorno della volta al momento in cui tale scelta progettuale è stata effettuata, cioè quelle originarie di costruzione della volta.

All'analisi del probabile stato originario della volta sarà dedicato il paragrafo seguente.

Ad oggi, tuttavia, gli studi svolti hanno mostrato che molto più importante sarebbe il consolidamento della volta in direzione longitudinale.

Due possibili interventi potrebbero essere:

- l'inserimento di catene longitudinali;
- la cucitura della parete Sud a quelle ad essa perpendicolari.

La scelta del tipo di intervento è in questo caso legata al fatto che la volta, in condizioni attuali, eserciti o meno una spinta su tale parete: le due strutture potrebbero, infatti, risultare ormai distaccate e questo nuovo vincolo potrebbe portare la facciata Sud a farsi carico di spinte maggiori.

Analizzeremo l'intervento di inserimento delle catene nei paragrafi seguenti, analisi per la quale bisogna tener conto anche di un aspetto, ancora non menzionato, ma fondamentale per lo svolgimento di uno studio completo di quelle che sono le criticità della struttura: il fattore sismico. Il sisma, infatti, in particolare se di tipo sussultorio, si esplica in un aumento del carico verticale sollecitante la volta e, di conseguenza, in un aumento della spinta che essa esercita sulle pareti.

Prima di individuare, quindi, il metodo di consolidamento più idoneo, si ritiene opportuno svolgere anche un'analisi sismica mirata allo studio del possibile meccanismo di ribaltamento della parete. A questo saranno dedicati i paragrafi conclusivi.

Con il Modello III relativo allo stato attuale, invece, validato dal riscontro con il quadro fessurativo reale, procederemo, poi, al calcolo del moltiplicatore di collasso del peso proprio, per verificare il *fattore di sicurezza allo stato attuale*.

IV.10.6 Modello III: stato originario

Il modello considerato per lo studio dello stato originario della volta è il modello III con soltanto la parete Ovest vincolata orizzontalmente in corrispondenza dei solai ad essa adiacenti.

Le pareti Sud ed Est sono vincolate soltanto alle loro intersezioni dalla resistenza del materiale e alla base da un incastro schematizzante le fondazioni (vedi §IV.4.3).

Analizziamo i risultati dell'analisi nel seguito.

Come preannunciato, lo scopo di questa analisi era principalmente quello di verificare l'originaria efficacia delle catene trasversali introdotte dai costruttori e i risultati dell'analisi hanno confermato come esse fossero originariamente indispensabili per l'equilibrio della struttura: oltre a presentare in questo modello uno sforzo normale superiore al caso dello stato attuale e pari a 27233.3N, la non convergenza dello stesso modello con legame non resistente a trazione ed in assenza di catene trasversali, ne ha definitivamente attestato la necessità.

Esse, infatti, instaurano insieme ai muretti di rinfiango un meccanismo tirante-puntone fondamentale per contraffortare adeguatamente la volta e, allo stesso tempo, vincolare la parete Ovest in sommità. Questo meccanismo è chiaramente visibile nella figura in cui le tensioni nei muretti si distribuiscono in modo tale da creare il puntone compresso.

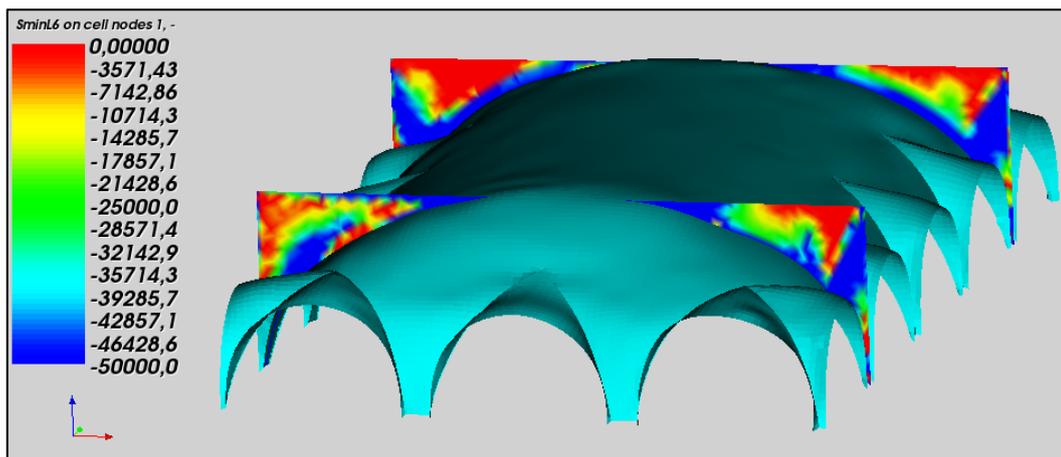


Figura IV-89 – Distribuzione delle tensioni minime nei muretti di rinfilzo nel modello III: stato originario

Analizzando i restanti risultati dell'analisi si notano spostamenti e sollecitazioni di entità notevoli, con compressioni massime di oltre 30 daN/cm^2 (Figura IV-92) e spostamenti dell'ordine dei 5cm (Figura IV-90).

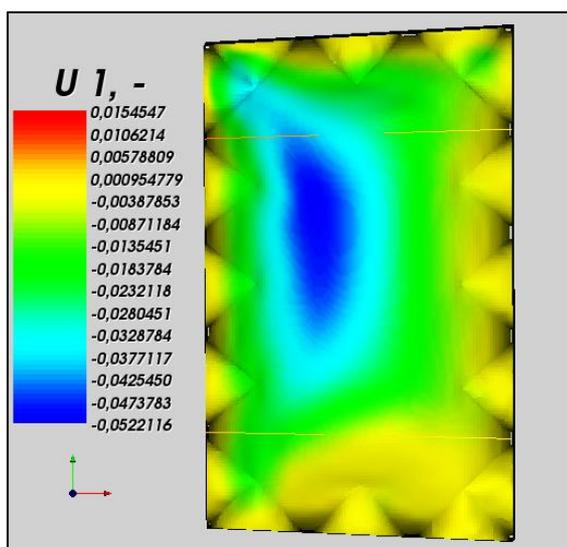


Figura IV-90 – Campo degli spostamenti verticali modello III: stato originario

Questo è dovuto all'aumento della deformabilità della parete Est, non più vincolata orizzontalmente, e che influisce anche sulle deformazioni di frattura.

Esse in particolare mostrano un distacco più marcato delle lunette lato Est e Sud e questo risulta coincidente con il quadro fessurativo reale della volta (Figura IV-16).

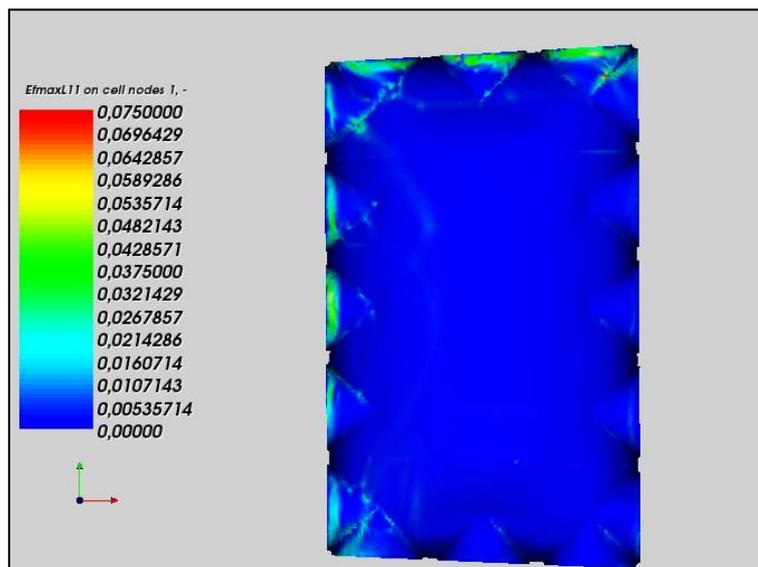


Figura IV-91 – Campo delle deformazioni di frattura del modello III: stato originario

Con queste condizioni di vincolo la volta fatica a trovare una configurazione di equilibrio, e ciò è evidenziato non solo dagli spostamenti eccessivi, che sappiamo non essere univoci nella soluzione di problemi al contorno con materiale masonry-like, ma anche dallo stato di sollecitazione della volta. Le tensioni presenti sono, infatti, eccessive (Figura IV-92) e la curva delle pressioni risulta molto decentrata alla base della parete Sud e della parete Est, con una eccentricità rispettivamente di 0.15cm e di 0.12cm, ben oltre il terzo medio della sezione di base (Figura IV-93).

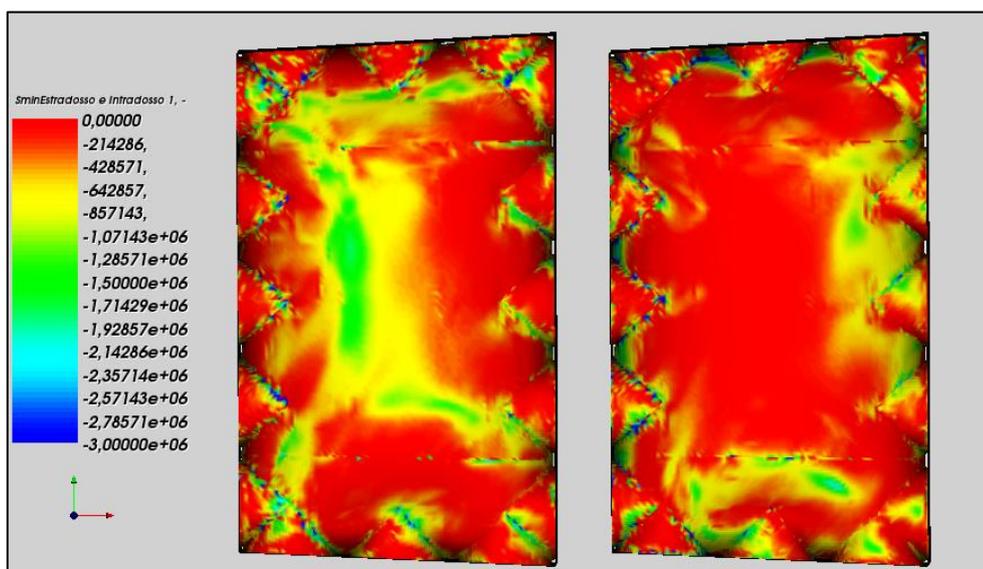


Figura IV-92 Tensioni principali minime di estradosso e di intradosso del modello III: stato originario

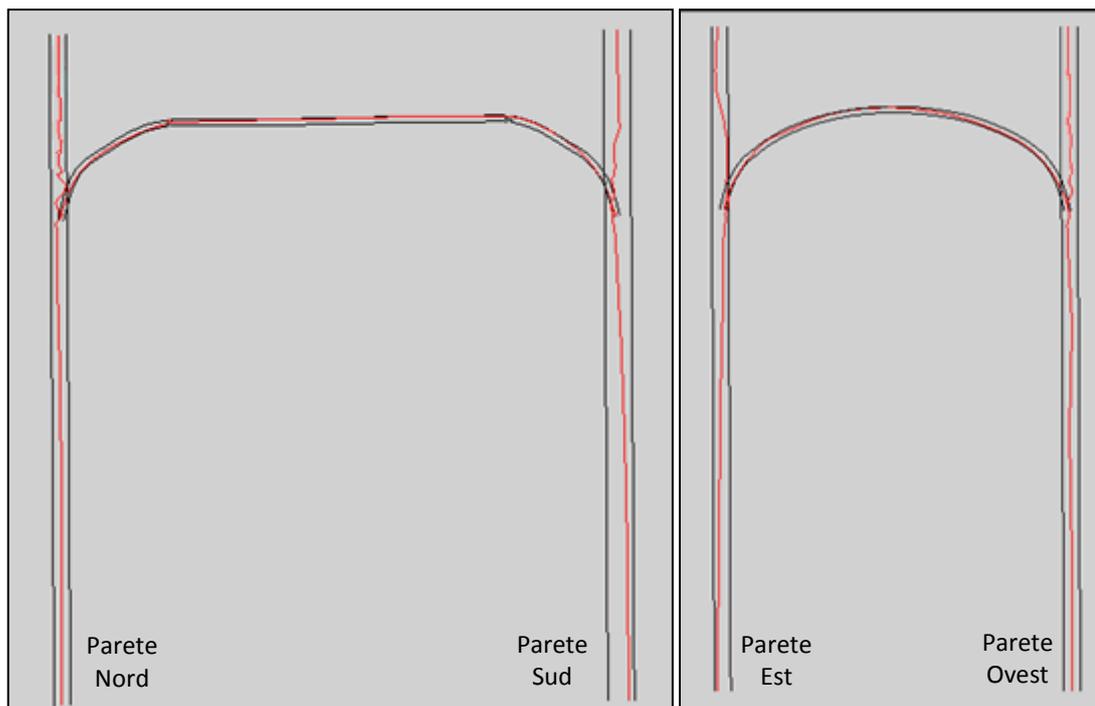


Figura IV-93 – Curva delle pressioni in direzione longitudinale e trasversale nel modello III: stato originario

Nelle sovrastanti immagini si osserva anche la presenza di altre due zone critiche, localizzate nei punti in cui la volta spinge sulle pareti Est e Nord, in cui la curva delle pressioni assume un'eccentricità rispetto alla mezzeria delle sezioni delle pareti, pari rispettivamente a 0.19m e 0.12m. da notare che nel caso della parete Est la curva è praticamente tangente la sezione (di spessore totale pari a 0.40m). Nel primo caso si ha, quindi, addirittura la fuoriuscita della curva dallo spessore della parete.

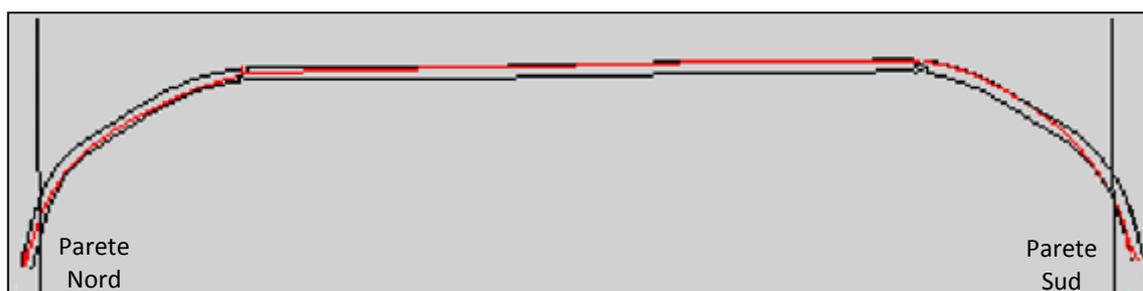


Figura IV-94 – Curva delle pressioni relativa alla singola volta, sezione longitudinale

Dal particolare della curva delle sezioni relativa alla singola volta (Figura IV-94) possiamo evincere il meccanismo de formativo della volta: il padiglione Nord si inflette ruotando verso l'intradosso, e quello Sud si "apre" abbassandosi ma ruotando verso l'estradosso della sezione.

Un altro punto critico è la zona di intersezione della parete Est con la volta, in cui la curva delle pressioni, a causa della spinta di quest'ultima, diviene tangente all'intradosso della sezione della parete, per poi ricentrarsi grazie all'effetto della catena trasversale.

Da notare il fatto che la spinta in direzione trasversale è diminuita rispetto al caso del modello allo stato attuale, passando da 225kN a 127kN. Ciò è imputabile ad una maggiore cedevolezza del vincolo offerto trasversalmente dalle pareti, che porta la struttura a ridistribuire le sollecitazioni al fine di ritrovare comunque l'equilibrio. A questo processo è imputabile anche il corrispondente aumento del valore della spinta in direzione trasversale, da 7,7kN a 25.1kN.

IV.10.7 Modello III: stato consolidato

Come abbiamo già spiegato, i possibili interventi di consolidamento relativi al meccanismo di collasso di ribaltamento della facciata Sud dell'edificio, dovuto alla spinta della volta, sono due: la cucitura della facciata alle pareti ad essa trasversali, oppure l'inserimento di catene longitudinali rispetto alla volta e che ancorino la facciata Sud alla parete Nord.

Quest'ultimo intervento di consolidamento è in fase di studio da parte della Committenza, che ha pensato di introdurre due catene longitudinali all'estradosso della volta, nella zona superiore alle unghie e a filo delle pareti Est ed Ovest (figura).

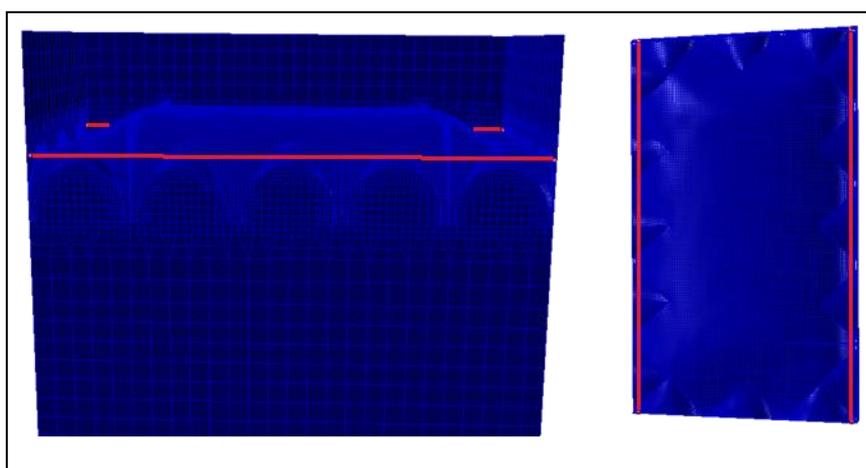


Figura IV-95 - Posizionamento catene di consolidamento

In ambito di questa tesi, si è ipotizzato di introdurvi 2 ϕ 30 di acciaio S235, di dimensioni, cioè, analoghe a quelle trasversali già presenti.

I risultati dell'analisi sono riportati nel seguito.

Analizzando il campo degli spostamenti risultanti si evince un miglioramento generale delle condizioni di stabilità della struttura. Il campo degli spostamenti trasversali mostra valori ridotti sia in direzione verticale (da 9mm a 3,5mm), che in direzione longitudinale, con spostamenti della sommità della parete Sud di soli 2mm, rispetto agli 8mm risultanti dall'analisi della situazione attuale.

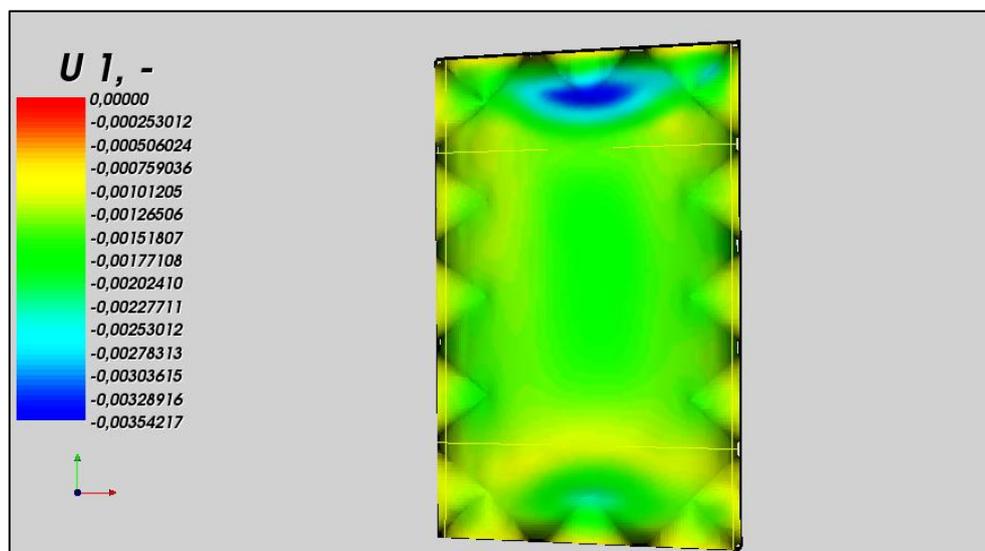


Figura IV-96 - Spostamenti verticali modello III: stato consolidato

Al di là del campo degli spostamenti, per i quali non si possono fare confronti diretti, dato che in realtà la situazione di partenza, in cui le catene saranno messe in opera, non sarà quella indeformata, ma quella deformata allo stato attuale, ci interessiamo allo stato di sollecitazione della struttura. Abbiamo già dimostrato, infatti, che, data l'unicità dei risultati in termini di sforzi, la soluzione del problema incrementale non dipende dal percorso di carico scelto, ma solo dal carico finale assegnato.

Ciò detto, la condizione finale di sollecitazione della struttura, indipendentemente da quella esistente allo stato attuale, sulla quale si inserisce l'effetto delle nuove catene, sappiamo con certezza essere quella risultante da questa analisi.

I campi delle tensioni restano praticamente invariati rispetto ai risultati ottenuti allo stato attuale, con solo piccole diminuzioni di intensità. Si riportano i risultati delle due analisi a confronto con lo stesso range della scala cromatica.

Stato attuale	Stato modificato
---------------	------------------

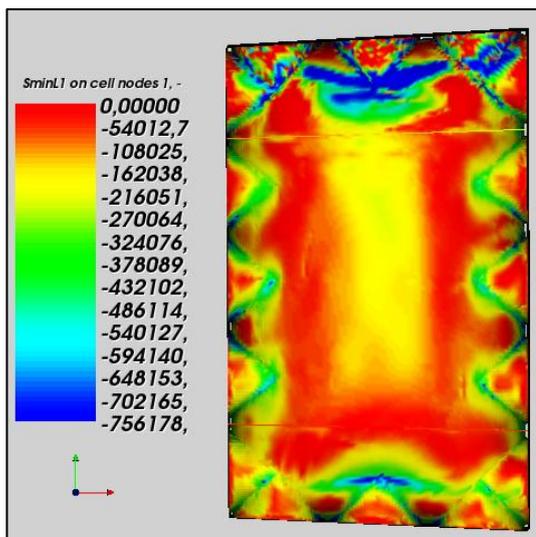


Figura IV-97 – Tensioni principali minime estradossali

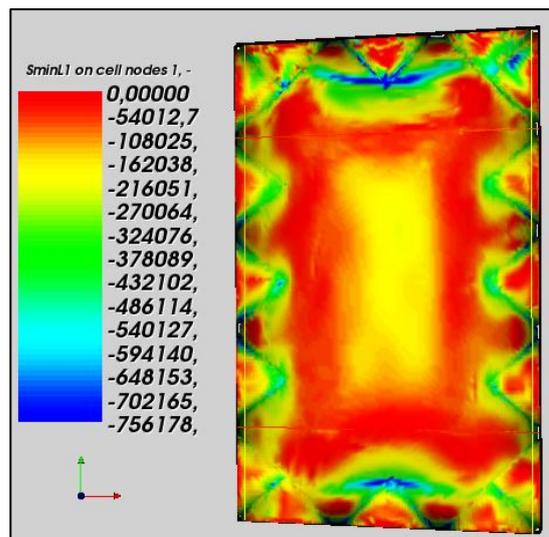


Figura IV-98 – Tensioni principali minime estradossali

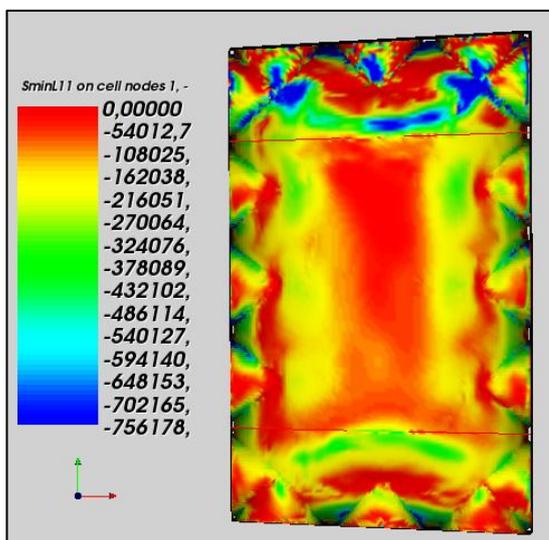


Figura IV-99 – Tensioni principali minime intradossali

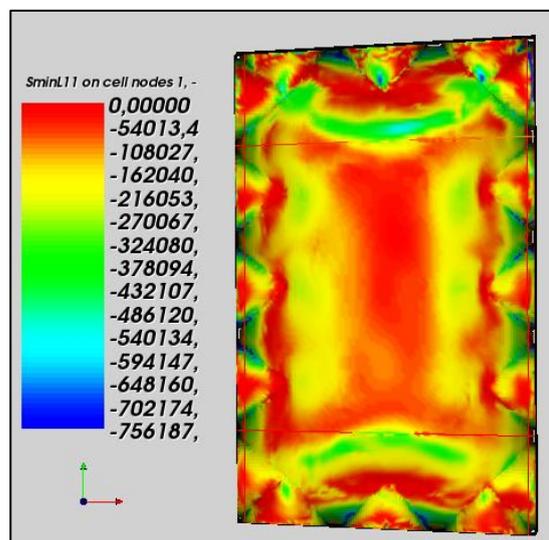


Figura IV-100 – Tensioni principali minime intradossali

Le tensioni minime sono, dunque accettabili e la stabilità dell'equilibrio si evince anche dalle sezioni trasversali e longitudinali della superficie delle eccentricità di massimo modulo, anch'esse sostanzialmente uguali a quelle ottenute allo stato attuale (Figura IV-101).

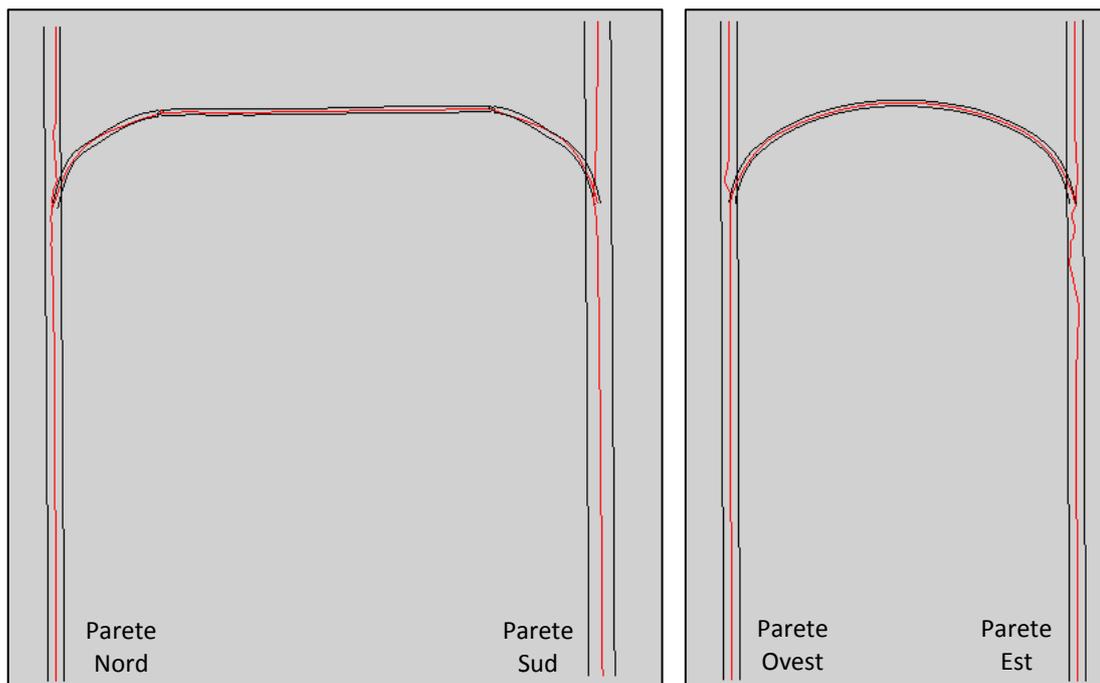


Figura IV-101 – Curve delle pressioni in direzione longitudinale e trasversale del modello III: stato modificato

Per quanto riguarda la spinta, invece, si ha una variazioni apprezzabile del valore relativo all'azione che la volta esercita sulla parete Sud, da 7,7kN dello stato attuale a 1,1kN al modello con le catene longitudinali, le quali concorrono, ovviamente, a tale riduzione contrastando buona parte della spinta.

Il tiro in queste ultime risulta, infine, essere di 9908,76N, con tensioni di trazione di 14.01N/mm^2 , ben al di sotto delle resistenza del materiale.

La criticità del consolidamento tramite inserimento di catene longitudinali, come abbiamo già spiegato nei paragrafi precedenti, potevano essere quelle legate ad un aumento sostanzioso della spinta sulla parete Sud, poiché di nuovo vincolata alla volta. Dato che, invece, essa risulta diminuita non si ritiene sconsigliabile tale intervento.

L'inserimento, però, delle catene potrebbe sembrare un intervento pleonastico per la risoluzione della criticità relativa al ribaltamento della parete Sud, poiché non cambia sostanzialmente il comportamento della struttura, ma la sua funzione si esplica soltanto in vincolo cinematico.

È probabile, però, che questi nuovi elementi assumano un ruolo fondamentale nell'avvicinarsi della struttura allo stato ultimo, quando le sollecitazioni e la spinta della volta sulla parete potrebbero aumentare notevolmente.

Per questo si procede, nel paragrafo seguente, allo studio di un'analisi incrementale al collasso, per verificare che sia effettivamente il ribaltamento della parete il meccanismo che determina la crisi della struttura.

Per poter poi affermare definitivamente la bontà dell'intervento dobbiamo, infine, verificare la situazione nel caso di sollecitazioni di tipo sismico, a cui sarà dedicato l'ultimo paragrafo di questa tesi.

IV.11 Analisi incrementale al collasso

L'analisi al collasso della struttura è stata condotta utilizzando un carico di superficie uniformemente distribuito crescente con incrementi pari a circa 1/5 del peso proprio della volta.

Il modello e le condizioni di vincolo considerate sono quelli relativi allo stato attuale, e per questo nel seguito considereremo l'incremento numero 12 come quello iniziale, poiché esso corrisponde al numero di incrementi utilizzati per l'inserimento del peso proprio e del carico di rifianco, e, quindi, alla condizione odierna.

In tutto sono stati inseriti 18 incrementi da 75.15kN per un totale di 31 incrementi.

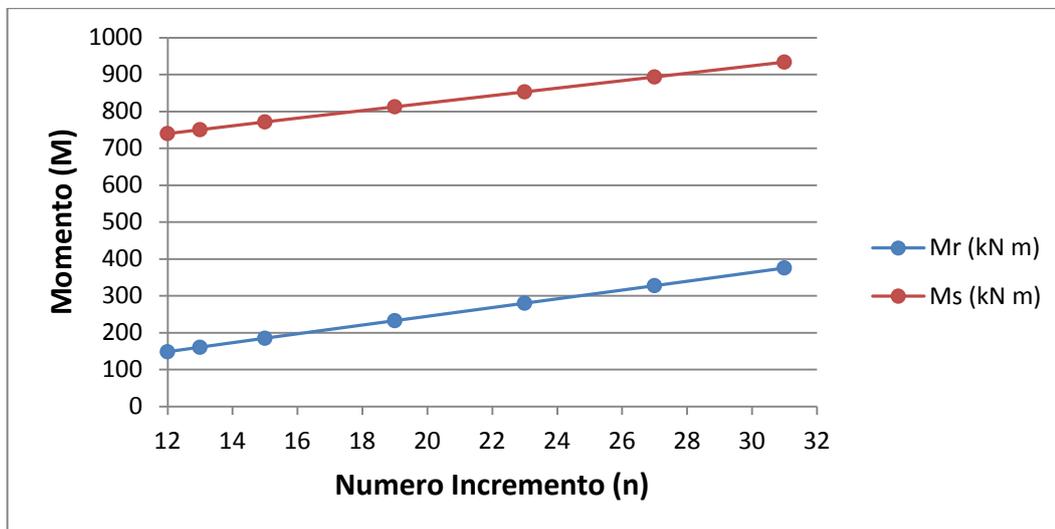
Il sovraccarico così ottenuto è pari a 3,4 volte il peso proprio della volta, per un valore totale pari a circa 1281kN.

Le analisi svolte hanno mostrato la tendenza della struttura a trovare la convergenza ben oltre i moltiplicatori di collasso che ci saremmo potuti aspettare. Nei primi studi effettuati, è stato infatti raggiunto un sovraccarico pari a 3,4 volte il peso proprio della volta, per un valore totale pari a circa 1280 kN (18 incrementi da circa 75 kN per un totale di 31 incrementi). In questa condizione di carico il programma di calcolo continua a trovare la convergenza dell'equilibrio. Questa prima prova è servita ad orientare ulteriori analisi che non sono state però effettuate per l'eccessivo onere computazionale.

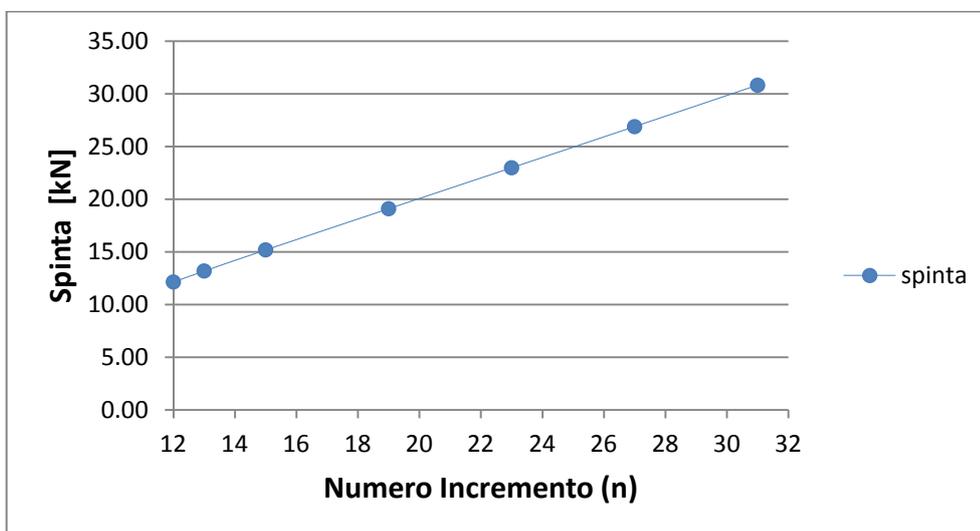
Poiché il collasso è stato inizialmente identificato nel ribaltamento della parete Sud, come ci si può a prima vista attendere in presenza di un elemento spingente quale la volta estremamente ribassata, è stato effettuato l'equilibrio di tale parete, dal quale sono stati desunti gli andamenti del momento ribaltante e del momento stabilizzante in funzione dei successivi incrementi di carico.

Tali risultati sono raffigurati nel grafico sottostante, in cui sono state riportate le due curve del momento stabilizzante, legato alla presenza dei carichi permanenti, e di quello

ribaltante, legato alla spinta della volta. Si osserva una netta tendenza di queste a convergere all'aumentare del carico, con incrementi maggiori delle sollecitazioni ribaltanti rispetto a quelle stabilizzanti.

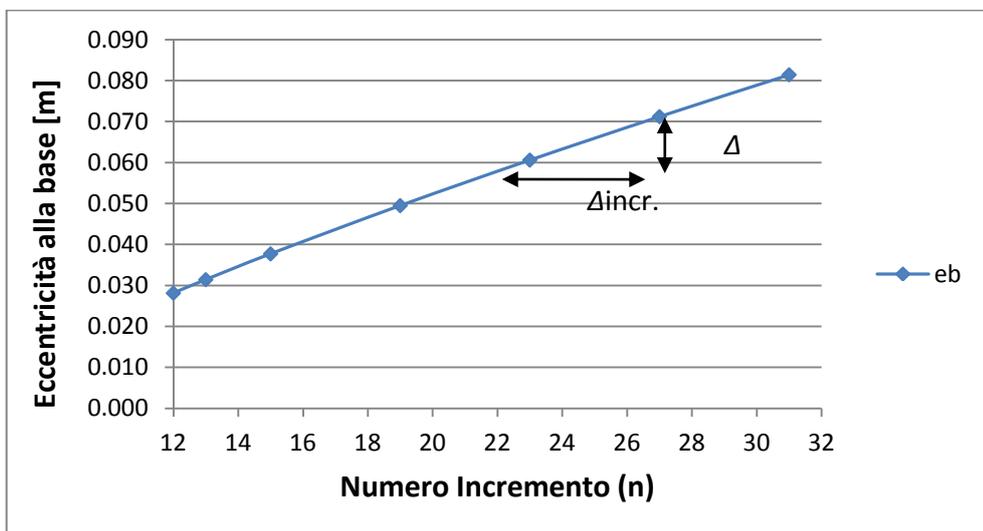


Analogamente al momento, anche la spinta presenta un andamento crescente linearmente con gli incrementi del carico.



Al fine di ricavare il valore del moltiplicatore del carico verticale che conduce al collasso della parete, il parametro più rilevante è tuttavia l'eccentricità e_b della risultante alla base. L'andamento lineare della spinta non implica, infatti, un andamento analogo della eccentricità alla base, poiché all'incremento del sovraccarico corrisponde, come abbiamo potuto osservare nel primo grafico, anche un incremento delle azioni stabilizzanti non proporzionale a quelle ribaltanti.

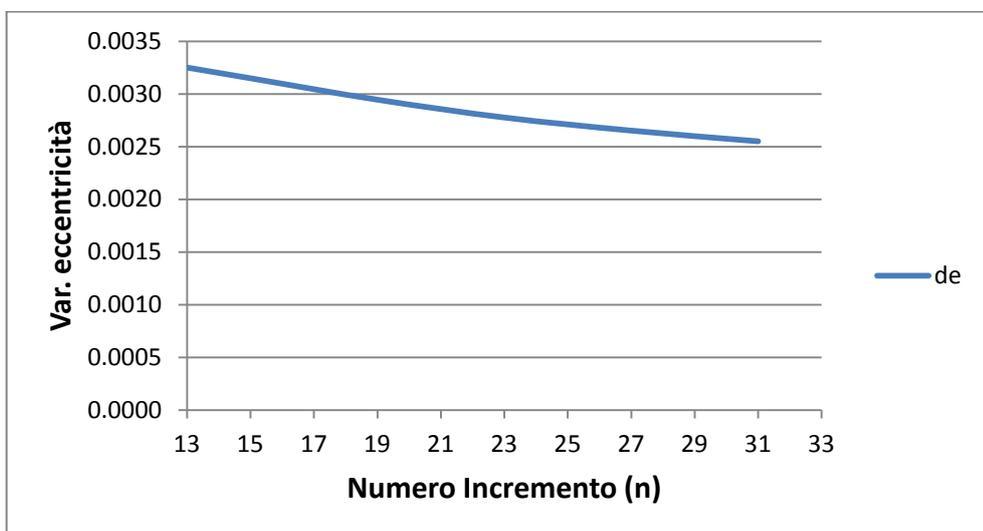
È stato, quindi, determinato anche l'andamento dell'eccentricità di base al crescere del carico, anch'essa identificata da una funzione crescente: questo è in accordo con il grafico precedente ed in particolare con l'andamento altrettanto crescente dello scarto tra il momento sollecitante e quello stabilizzante.



In particolare, è stato ritenuto opportuno studiare la variazione de attraverso il rapporto tra la variazione di eccentricità per ogni intervallo di incrementi considerato e il numero di incrementi che rientrano in tale intervallo.

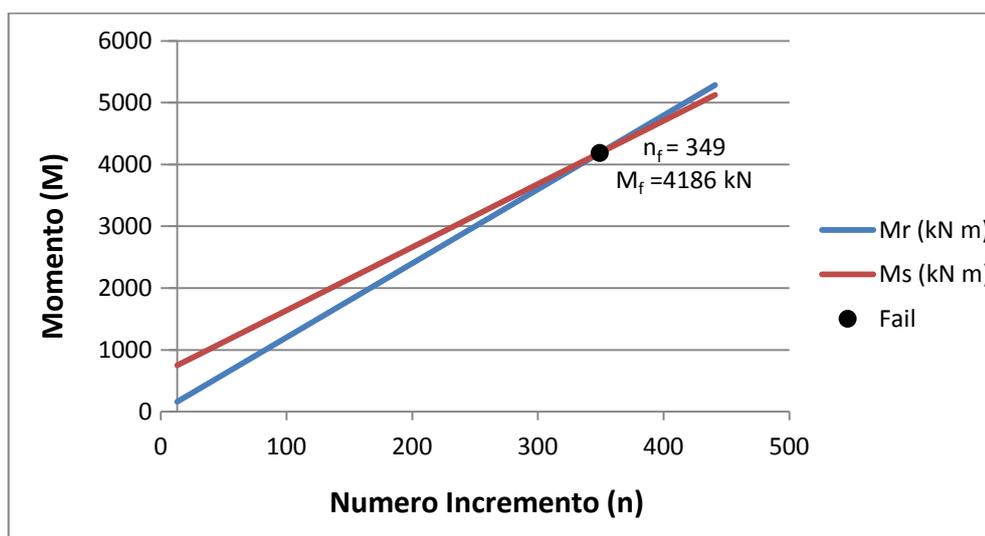
In generale $de_i = (e_{i+1} - e_i) / (n_{i+1} - n_i)$ con n = numero dell'incremento.

Il grafico così ottenuto evidenzia la tendenza di questo parametro a diminuire. Ciò significa che, all'aumentare del carico sovrainposto, l'aumento della spinta sulla parete diminuisce.



La diminuzione di de con l'aumento del numero di incrementi è, però, molto lenta, per cui è lecito ipotizzare che la struttura arriverà a collasso per ribaltamento della parete Sud prima che la spinta si stabilizzi.

Tramite interpolazione lineare delle curve ottenute per le sollecitazioni ribaltante e stabilizzante si è, quindi, determinato l'incremento al quale i due momenti si eguagliano.



È quello l'incremento relativo ad un sovraccarico tale da spostare la risultante delle sollecitazioni sul punto esterno della sezione di base della parete Sud: un ulteriore aumento del carico comporterà la fuoriuscita dalla sezione di base, con conseguente ribaltamento della facciata.

Il sovraccarico di collasso corrisponde, dunque, a **23918 kN**, pari a circa 62 volte il peso proprio della volta, per un moltiplicatore di collasso finale del carico peso proprio, pari a $\alpha = 63$. Il valore così ottenuto è, ovviamente, un valore poco plausibile.

Non bisogna tuttavia dimenticare che, nonostante il legame utilizzato per le analisi rispecchi a pieno il comportamento della struttura in esercizio, l'illimitata resistenza a compressione può condurre a situazioni non ammissibili per il materiale reale.

La zona in cui si collocano le criticità è quella della testa di padiglione adiacente alla parete soggetta allo strapiombo fuori piano. In particolare, si nota la tendenza al formarsi di un avvallamento che genera forti compressioni all'estradosso, che si incrementano notevolmente all'aumentare del carico verticale.

L'individuazione precisa dell'incremento di collasso non è semplice poiché necessita di valutazioni di natura qualitativa. Ci limitiamo, quindi, a riportare nel seguito lo sviluppo del fenomeno fino a quando esso determina valori palesemente non ammissibili.

La progressione del fenomeno è chiaramente evidenziata nelle immagini sottostanti, in cui si evince il progressivo estendersi della zona compressa. Da notare che come valore limite del range delle tensioni abbiamo imposto il valore di resistenza a compressione della muratura, pari a 24 daN/cm².

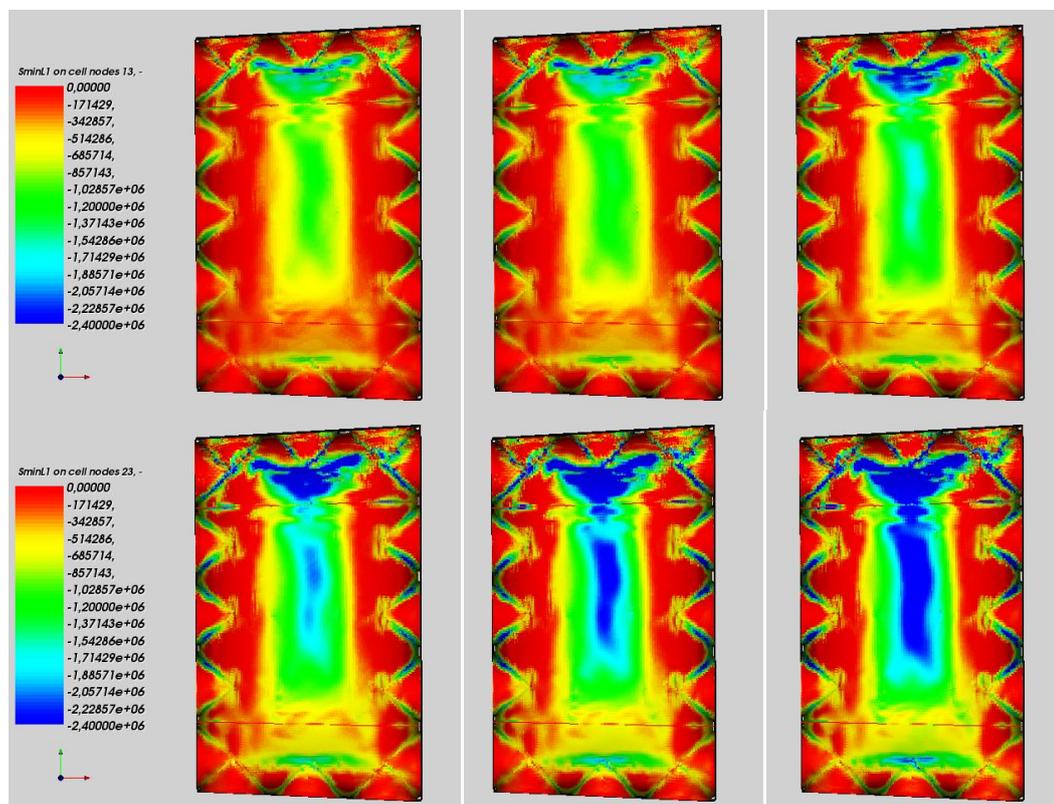


Figura IV-102 – Progressiva diffusione della zona caratterizzata da compressioni limite

Analizzando più nel dettaglio l'area compressa, si notano già al 27esimo incremento zone con valori di tensione superiori a 30 daN/cm². È stato ritenuto opportuno, quindi, non procedere oltre con le analisi e considerare tale incremento come determinante il collasso della struttura che in questa condizione può entrare in crisi in compressione e generare la rottura della zona centrale del padiglione, con conseguente perdita dell'equilibrio, in vista delle notevoli deformazioni che si generano. Il valore della risultante del carico di collasso è quindi pari a 1067 kN (2,8 P.P.), corrispondenti ad una spinta della volta sulla parete di 31 kN.

Questo studio ha, dunque, evidenziato che il collasso della struttura non si esplica nel ribaltamento fuori piano della facciata sud dell'edificio ma è preceduto da meccanismi locali che non si colgono con questa modellazione nell'ipotesi di illimitata resistenza a compressione del materiale. In effetti, in questo tipo di strutture questo fenomeno risulta

frequente poiché esse, essendo molto iperstatiche, tendono a ritrovare una configurazione di equilibrio senza più gravare sull'appoggio cedevole.

Ripetendo, invece, il calcolo in vista della limitata resistenza a compressione, a prescindere dalla maggior difficoltà nel calcolo per la convergenza del programma, l'analisi si sarebbe arrestata al raggiungimento della compressione limite in zone poco significative, come l'appoggio dei peducci della volta, dove il superamento del limite a compressione non pregiudica però l'equilibrio della struttura con formazione di meccanismi.

Interessante, inoltre, al fine di comprendere la tendenza asintotica delle azioni ribaltanti, è la visualizzazione dei sistemi resistenti che si instaurano nella struttura all'incremento del sovraccarico. In particolare, nelle immagini sottostanti si osserva il puntone che si sviluppa nelle pareti longitudinali al fine, evidentemente, di assorbire la spinta della volta e di sopperire, così, alla progressiva diminuzione del contrasto in direzione orizzontale offerto dalla parete Sud. Quest'ultima risulta anche sensibilmente meno interessata dalle azioni verticali rispetto alle adiacenti (immagini seguenti).

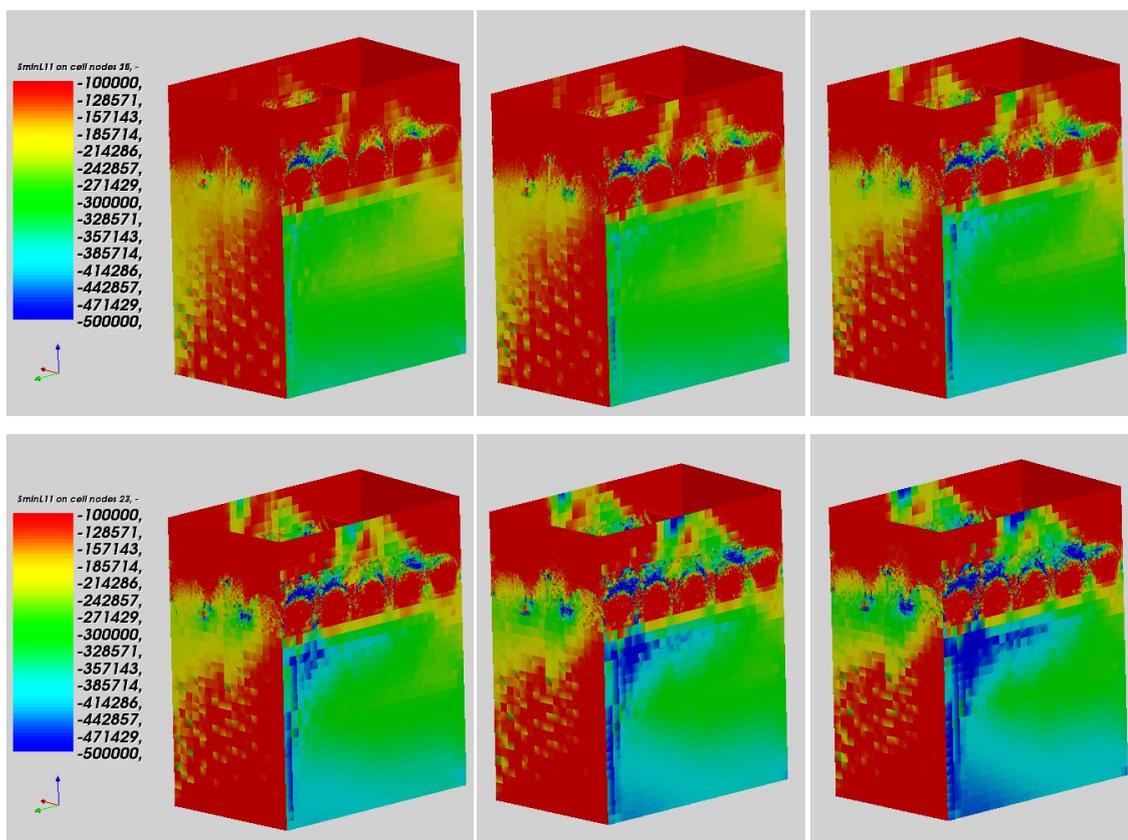


Figura IV-103 – Progressiva formazione del puntone compresso al lato Sud della parete Ovest

La redistribuzione delle tensioni nella struttura è anche evidenziata dai valori delle spinte nei vari modelli analizzati:

- Modello con vincoli fissi: i valori della spinta in direzione trasversale e longitudinale sono praticamente equivalenti, con valori rispettivamente di 355kN e di 350kN. Questo è riconducibile al fatto che gli appoggi fissi offrono vincoli di rigidità equivalente nelle due direzioni.
- Modello con le pareti allo stato attuale: la cedevolezza del vincolo offerto dalla parete Sud è contrastata dalla struttura con una redistribuzione drastica della spinta, pari a soli 3kN in direzione longitudinale e a 225kN in direzione trasversale.
- Modello con le pareti al collasso (incr. 27): il fenomeno di redistribuzione si accentua con valori ancora più discordanti delle due spinte, pari a 31kN in direzione longitudinale e a 1113kN in quella trasversale.

Alla luce dei risultati ottenuti, si evince come l'intervento di consolidamento ipotizzato con l'inserimento di catene longitudinali risulti poco efficace al fine di inibire la spinta della volta in direzione longitudinale, sia in condizioni di esercizio che al collasso. La bassa rigidità delle catene ($\phi 30$) presenta, infatti, un vincolo debole per la volta, che può scongiurare però il ribaltamento della parete verso l'esterno in caso di sisma, i cui effetti sulla struttura saranno analizzati nel seguente paragrafo.

IV.12 Analisi dinamica

L'ultima analisi effettuata è un'analisi di tipo sismico, imprescindibile per uno studio della struttura che possa dirsi esaustivo.

Il primo passo è stato quello di analizzare i modi di vibrare del modello III complessivo, quindi, della rigidità effettiva delle pareti.

Osservando i risultati è stato possibile individuare immediatamente il modo di vibrare più importante. Nel secondo modo, infatti, si riscontra una massa partecipante in direzione Y, quindi, longitudinale della volta, pari al 46% di quella totale.

Nell'immagine seguente è mostrata, in scala 300:1, la deformata relativa al modo di vibrare considerato. Si nota l'abbassamento della volta e la spinta sulle pareti Nord e Sud in direzione, appunto, longitudinale.

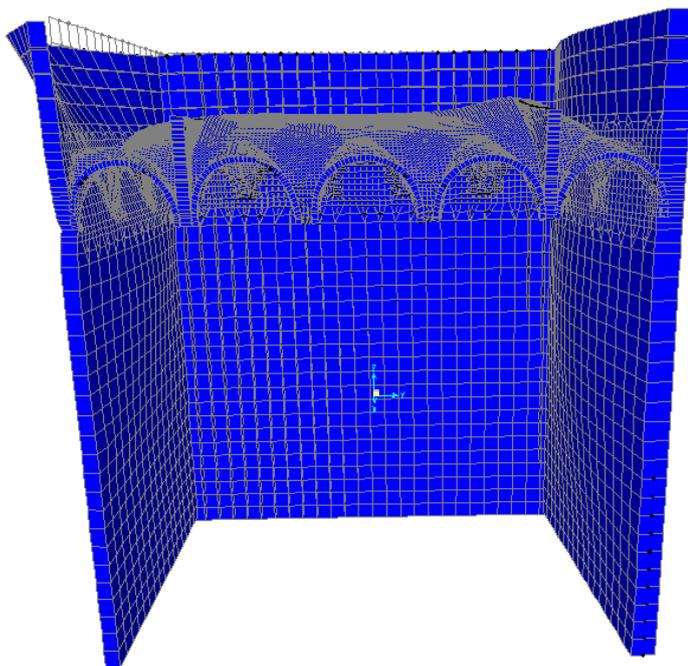


Figura IV-104- Deformata del modo di vibrare considerato per l'analisi spettrale (parete Ovest non in vista)

Osservando l'immagine si evince che il movimento relativo a questo modo di vibrare della struttura è quello sussultorio.

Per le strutture spingenti il sisma di questo tipo può rappresentare una criticità poiché porta ad incrementi di carico verticali che ha come conseguenza immediata l'aumento dell'azione orizzontale che tali strutture esercitano sui sostegni.

In particolare in questo caso, esso andrebbe ad agire su una realtà già di per sé precaria, dato lo strapiombo già in atto della parete Sud, su cui si concentra, appunto, la spinta in direzione longitudinale.

Il passo successivo è stato, quindi, quello di effettuare un'analisi spettrale relativa a questo solo modo di vibrare della struttura per isolarne i risultati.

Lo spettro utilizzato è relativo allo stato limite SLV: procediamo con la determinazione di tale spettro secondo NTC2008.

Il sito di riferimento è, ovviamente Pisa e per la classe d'uso scelta ($C_U = II$), il rispetto dei vari stati limite si considera conseguito [7.1-NTC] nei confronti di tutti gli stati limite ultimi, qualora siano soddisfatte le verifiche relative al solo SLV.

Le probabilità di superamento nel periodo di riferimento PVR, cui riferirsi per individuare l'azione sismica agente è $P_{VR} = 10\%$.

Nota il PVR, il periodo di ritorno dell'azione sismica TR, espresso in anni, è pari a

Coordinate Geografiche	Latitudine [DEG centesimali]	N	43.7118
	Longitudine [DEG centesimali]	E	10.4147
Suolo e Topografia	Categoria suolo di fondazione		C
	Categoria topografica		T1
	Coeff. di amplificazione topografica	S_T	1
Varie	Vita nominale dell'opera (10,50,100)	V_N [anni]	50
	Classe d'uso (I, II, III, IV)		II
	Coefficiente d'uso	C_U	1.00
	Periodo di riferimento	V_R [anni]	50
Struttura	Descrizione	Costr. in muratura ordinaria	
	Classe di duttilità	B	
	Costruzioni in muratura ordinaria non armata a più piani	α_u/α_1	1.8
	Fattore riduttivo	k_W	1.00
	Massimo fattore di struttura	q_0	3.6
	Coefficiente riduttivo per regolarità	K_R	0.8
	Fattore di struttura	q	2.88
	Coeff. di smorzamento viscoso equiv.	ξ	5%
	Fattore di smorzamento viscoso	η	1.00
	Inverso fattore di struttura	$1/q$	0.347
Descrizione suolo di fondazione: Categoria C	Depositi di terreni a grana grossa mediamente addensati o terreni a grana fina mediamente consistenti con spessori superiori a 30 m, caratterizzati da un graduale miglioramento delle proprietà meccaniche con la profondità e da valori di $V_{s,30}$ compresi tra 180 m/s e 360 m/s (ovvero $15 < NSPT, 30 < 50$ nei terreni a grana grossa e $70 < c_u, 30 < 250$ kPa nei terreni a grana fina).		

$$T_R = -V_R / \ln(1 - P_{VR}) = -475 \text{ anni}$$

Le equazioni che definiscono lo spettro di risposta elastico sono le seguenti:

$$0 \leq T < T_B \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \cdot \left[\frac{T}{T_B} + \frac{1}{\eta \cdot F_0} \left(1 - \frac{T}{T_B} \right) \right]$$

$$T_B \leq T < T_C \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0$$

$$T_C \leq T < T_D \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \cdot \left(\frac{T_C}{T} \right)$$

$$T_D \leq T \quad S_e(T) = a_g \cdot S \cdot \eta \cdot F_0 \cdot \left(\frac{T_C \cdot T_D}{T^2} \right)$$

dove:

- S , è il coefficiente che tiene conto della categoria del sottosuolo e delle condizioni topografiche mediante la relazione $S = S_S \cdot S_T$, essendo S_S il coefficiente di amplificazione stratigrafica e S_T il coefficiente di amplificazione topografica;

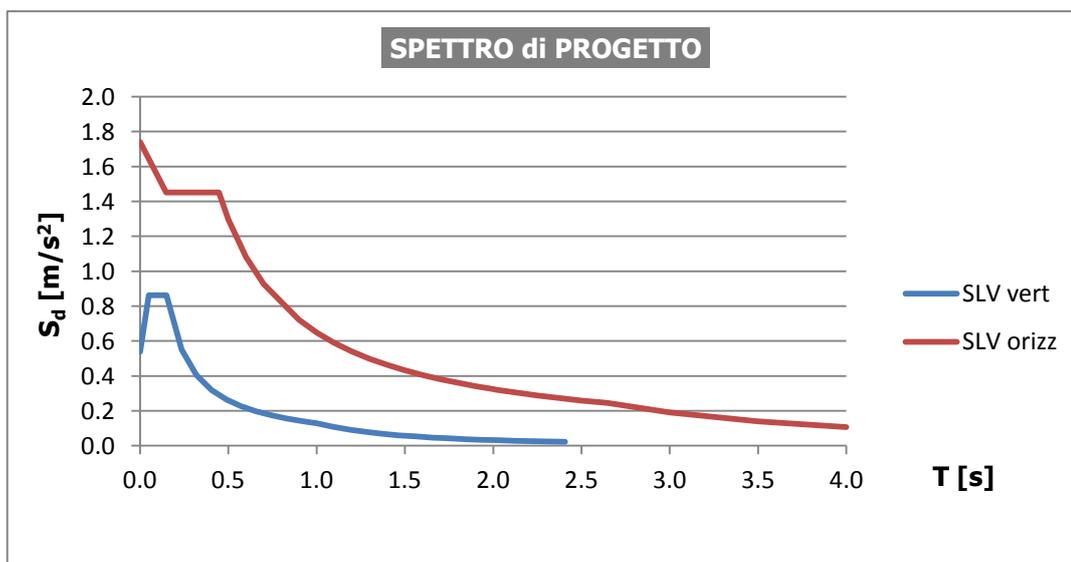
- T_C , è il periodo corrispondente alla fine del tratto di accelerazione costante dello spettro, dato da $T_C = C_C \cdot T^* C$ in cui C_C è funzione della categoria del sottosuolo;
- T_B , è il periodo corrispondente all'inizio del tratto dello spettro ad accelerazione costante, pari a $T_B = T_C/3$;
- T_D , è il periodo corrispondente all'inizio del tratto a spostamento costante dello spettro espresso in secondi mediante la relazione $T_D = 4,0 \cdot (a_a / g) + 1,6$.

In maniera analoga sono stati calcolati i parametri relativi alla componente verticale dello spettro.

Si riporta di seguito i valori dei parametri presi in considerazione e gli spettri ricavati:

Gli spettri di progetto per le verifiche allo SLV sono stati ricavati riducendo le ordinate degli spettri elastici, sostituendo nelle formule che lo definiscono η con $1/q$.

Seguono riassunti i dati spettrali e il grafico dello spettro SLV.



Analizzando i risultati dell'analisi si evince un aumento di spinta notevole in entrambe le direzioni: la componente trasversale è praticamente aumentata di un ordine di grandezza rispetto allo stato attuale, raggiungendo valori totali di circa 2200kN; l'aumento è ancora maggiore per quanto riguarda la spinta in direzione longitudinale che è arrivata ad assumere sulla parete Sud il valore di 226kN.

Nel modello, che abbiamo studiato con materiale elastico lineare, gli spostamenti massimi in sommità della parete raggiungono valori non eccessivamente alti, considerando la spinta notevole che agisce su una parete sostanzialmente libera. Nonostante non si

possa confermare con un'analisi con materiale masonry-like, che non è stata svolta nel corso di questa tesi, si ritiene che con tale legame costitutivo sarebbe emersa la difficoltà della struttura a trovare l'equilibrio se sottoposta a questo tipo di azioni.

A conclusione, comunque, del breve studio spettrale condotto, possiamo affermare che l'introduzione delle catene in direzione longitudinale risulta chiaramente l'intervento più consono a contenere le spinte che eventi eccezionali, quale quello schematizzato in questa analisi, possono indurre sulla struttura.

CONCLUSIONI

In conclusione possiamo affermare che il codice NOSA-ITACA è un software nel quale sono racchiuse le più avanzate tecniche attuali di studio per le strutture ad arco e voltate in muratura, anche dalla geometria complessa.

In esso è implementato il legame costitutivo masonry-like, con il quale è possibile svolgere analisi incrementali che, alla luce dell'analisi limite, determinano soluzioni staticamente ammissibili, dal momento che la convergenza dell'algoritmo è basata sull'equilibrio.

Il caso pratico della volta di Palazzo Franchetti ha costituito l'occasione per constatare la capacità del codice di cogliere il comportamento peculiare della muratura nelle strutture voltate, con quadri fessurativi congruenti con quelli realmente rilevati.

In particolare la struttura è stata analizzata nello stato attuale e in una situazione ipotetica originaria, con modelli che la schematizzano in diverse situazioni di vincolo allo scopo di conoscerne il comportamento e il ruolo degli elementi strutturali componenti, valutando l'entità della resistenza a trazione richiesta al materiale per garantire l'equilibrio nelle diverse configurazioni.

Se la validazione dell'equilibrio e della soluzione trovata è garantita dalla convergenza del programma, la rispondenza del modello alla realtà è stata constatata dalla similitudine del campo di deformazioni di frattura con il quadro fessurativo reale.

Una volta constatata la situazione tensionale nello stato attuale, è stata effettuata un'analisi incrementale attraverso la quale è stato determinato il coefficiente di sicurezza al collasso.

Infine, grazie allo studio delle deformazioni di frattura e delle soluzioni ottenute dalle varie analisi, sono state rilevate le criticità della struttura e l'efficacia di un eventuale intervento di consolidamento.

Un ringraziamento sincero all'Ing. De Falco per la passione che pone nei lavori di Tesi che segue e l'infinita pazienza che dimostra con noi studenti.

Ringrazio, inoltre, il Prof. Lucchesi, l'Ing Pellegrini e tutti i ricercatori del Laboratorio di Meccanica dei Materiali e delle Strutture del CNR di Pisa, il cui supporto e la cui disponibilità hanno reso possibile lo svolgimento di questo lavoro di Tesi.

BIBLIOGRAFIA

1. **Trevisan, Camillo.** *Per la storia della stereotomia. Geometrie, metodi e costruzioni.* s.l. : Aracne Editrice, 2011.
2. **de Honnecourt, V.** *Livre de Portraiture.* XIII sec.
3. **Freziér, A.F.** *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture.* inizi del XVIII sec.
4. **Viollet-Le-Duc, E.** *Dictionnaire de l'architecture française du XI au XVI siècle.* Parigi : s.n., 1854-1868 (ried.1967).
5. **De La Hire, P.** *Traité de Méchanique.* Parigi : Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1730.
6. —. *Sur la construction des voûtes dans les édifices.* Parigi : Bibliothèque de l'Institut de France, 1712.
7. **Bernoulli, J.** *Problema de Curvatura fornicis, cuius partes se mutuo proprio pondere suffulciunt sine opere caement.* s.l. : Opera Omnia Genève, 1744.
8. **Couplet, C.A.** *De la poussées des voutes.* Parigi : in: "Mémoires de l'Académie Royale des Sciences", 1731.
9. —. *Seconde partie de l'examen de la poussées des voutes.* Parigi : in: "Mémoires de l'Académie Royales des Sciences", 1732.
10. **Bossut, C.** *Recherches sur l'équilibre des voutes.* Parigi : Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1778.
11. **Coulomb, C.** *Sur une application de règles de maximis et minimis à quelques problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture.* Parigi : Mémoires de Mathématique et de Physique présentes à l'Académie Royale des Sciences, 1773.
12. **Foce, F.** *Sulla teoria dell'arco murario. Una rilettura storico-critica di F.Foce .* Venezia : in *Degli archi e delle volte: arte del costruire tra meccanica e stereotomia* di F.Foce, 2002.
13. **Mascheroni, M.** *Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte.* Bergamo : Locatelli, 1785.
14. *Mémoire sur le lois del'équilibre et du mouvement des solides élastiques.* **Navier, C.L.H.M.** s.l. : "Mém. Ist. Nat", 1827.
15. **Gernstner, F.J.** *Handbuch der Mechanik.* Praga : Spurny, 1831.

16. **Méry, E.** *Sur l'équilibre des voutes en berceau.* s.l. : in: "Annales des Ponts et des Chaussées", 1840.
17. **Clericetti, C.** *Il principio della cerniera neele volte. Osservazioni sperimentali e deduzioni.* s.l. : in: "Il Politecnico", 1873.
18. **Villarceau, Y.** *Sur l'établissement des arches et des ponts.* Parigi : Académie des Sciences de l'Institut de France, 1854.
19. **Durand-Clayne, A.** *Sur la vérification de la stabilité des voûtes en maçonnerie et sur l'emploi des courbess de pression.* s.l. : p. 66, Annales des Ponts et Chaussées, 1867.
20. **Tranter, E., Pippard, A.J.S. e Chitty, L.** The mechanic of the voussoir arch. *Journal of the Institution of Civil Engineer.* 1936.
21. **Kooharian, A.** A limit analysis of voussoirs and concrete arches. *Journal of the American Concrete Institute.* 1952.
22. **Heyman, J.** The Stone Skeleton. *International Journal of Solids and Structures.* 1966.
23. **Livesley, R.K.** Limit analysis of structures formed from rigid blocks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 1978.
24. **Harvey, W.J.** Stability, strenght, elasticity and thrustlines in masonry structures. *The Structural Engineer.* 1991.
25. **Smith, F.W., Harvey, W.J. e Vardy, A.E.** Three-hinge analysis of masonry arches. *The Structural Engineer.* 1991.
26. **Gilbert, M. e Melbourne, C.** Rigid-block analysis of masonry strustures. *The Structural Engineer.* 1994.
27. —. The behavior of multi-ring brickwork arch bridges containing ring separation . *Proc. British Masonry Society.* 1994.
28. **Melbourne, C. e Gilbert, M.** The application of limit analysis techniques to masonry arch bridges. *Bridges assessment, management and design.* 1994.
29. **Drucker, D.C.** Coulomb fiction, plasticity and limit loads. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers.* 1953.
30. **Boothby, T.E. e Brown, C.B.** Stability of masonry piers and arches. *Journal of Engineering Mechanics.* 1992.
31. **Vilnay, O. e Cheung, S-S.** Satbility of masonry arches. *Journal of Structural Engineering.* 1986.
32. **Oppenheim, I.J., Gunaratnam, D.J. e Allen, R.H.** Limit state analysis of masonry domes. *Journal of Structural Engineering.* 1989.

33. **Lucchesi, M., et al.** The maximum modulus eccentricities for masonry vaults and limit analysis. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 1989.
34. **Block, P. et al.** Real time analysis of vaulted masonry buildings. *Computers and Structures*. 2006.
35. **Ochsendorf, J.A.** Collapse of masonry structures. *PhD Thesis, Cambridge University*. 2004.
36. **De Luca, A., Giordano, A. e Mele, E.** A simplified procedure for assessing the seismic capacity of masonry arches. *Engineering Structures*. 2004.
37. **Block, P.** Equilibrium systems. *Studies in masonry structures. MIT*. 2005.
38. **Roca, P. et al.** Limit analysis of reinforced masonry vaults. *Engineering Structures*. 2007.
39. **Holzer, S.M.** Numerical arch and vault analysis. *Proceedings of the 8th International Conference on Structural Analysis of Historic Constructions*. 2012.
40. **Casapulla, C.** Capacità sismica negli edifici in muratura. *ReLUIS*. 2011.
41. **Livesley, R.K.** A computational model for the limit analysis of three-dimensional masonry structures. *IASBE Symposium*. 1993.
42. **Baggio, C. e Trovalusci, P.** Discrete model for jointed block masonry walls. *Proc. 6th NAMC*. 1993.
43. **Baggio, C. e Trovalusci, P.** Stone assemblies under in-plane static actions. Comparison between non-linear discrete approaches. *Computer Methods in Structural Masonry*. 1995.
44. **Baggio, C. e De Felice, G.** Effetti di scala sul carico di collasso di murature a blocchi. *Atti del convegno Nazionale, Messina*. 1996.
45. **Baggio, C. e Trovalusci, P.** Limit analysis for no tension and frictional three-dimensional discrete systems. *Mechanics and Structures and Machines*. 1998.
46. **Lo Bianco, M. e Mazzarella, C.** Sulla sicurezza sismica delle strutture in muratura a blocchi. *Atti del Conv. Stato dell'arte in Italia sulla meccanica delle murature*. 1994.
47. **Ferris, M. e Tin-Loi, F.** Limit analysis of frictional block assemblies as mathematical program with complementarity constraints. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2001.
48. **Casapulla, C. e D'Ayala, D.** Lower bound approach to the limit analysis of 3D vaulted block masonry structures. *STRUMAS, V, Roma*. 2001.

49. **Sinopoli, A. et al.** Modern formulation of pre-elastic theories on masonry arches. *Journal of Engineerings Mechanics*. 1997.
50. **Orduña, A. e Lourenço, P.B.** Three dimensional limit analysis of rigid block assemblages. Part. I. *International Journal of Solids and Structures*. 2005.
51. —. Three dimensional rigid analysis of rigid block assemblages. Part II. *International Journal of Solids and Structures*. 2005.
52. **Gilbert, M., Casapulla, C. e Ahmed, H.M.** Limit analysis of masonry block structures with non-associative frictional joints using linear programming. *Computers and Structures*. 2006.
53. **Orduña, A. e Lourenço, P.B.** Cap model for limit analysis and strengthening of masonry structures. *Journal of Structural Engineering*. 2003.
54. **Vasic, M. e Coronelli, D.** Limit analysis of the Duomo di Milano vaulting system. *SAHC*. 2014.
55. **Cavalagli, N., Gusella, V. e Severini, L.** Limit analysis in large displacements of masonry arches subjected to vertical and horizontal loads. *SAHC*. 2014.
56. **O'Dwyer, D.** Funicular analysis of masonry vaults. *Computers and Structures*. 1999.
57. **Maxwell, J.C.** On reciprocal figures and diagrams of forces. *Philosophical Magazine and Journal Series*. 1864.
58. **Block, P. e Ochsendorf, J.** Thrust network analysis: A new methodology for three-dimensional equilibrium. *Journal of the IASS*. 2007.
59. —. Lower bound analysis of masonry vaults. *SAHC*. 2008.
60. **Andreu, A., Gil, L. e Roca, P.** Computational analysis of masonry structures with a funicular model. *Journal of Engineer Mechanics*. 2007.
61. —. Analysis of masonry structures by funicular networks. *Journal of Engineer Mechanics*. 2010.
62. **Fraternali, F. e Rocchetta, G.** Shape optimization of masonry vaults. *2nd International Conference on Advances in Structural Engineering and Mechanics*. 2002.
63. **Fraternali, F.** A thrust network approach to the equilibrium problem of unreinforced masonry vaults via polyhedral stress function. *Mechanics Research Communications*. 2010.
64. **Fraternali, F., Angelillo, M. e Fortunato, A.** A lumped stress method for plane elastic problems and the discrete-continuum approximation. *International Journal of Solids and Structures*. 2002.

65. **Block, P.** Thrust network analysis: Exploring three-dimensional equilibrium. *MIT*. 2009.
66. **Vouga, E. et al.** Design of self-supporting Surfaces. *SIGGRAPH2012 Conference Proceedings*. 2012.
67. **Block, P e Lachauer, L.** Three-dimensional equilibrium analysis of gothic masonry vaults. *International Journal of Architectural Heritage*. 2013.
68. **Panozzo, D. e Block, P.** Designing unreinforced masonry models. *SIGGRAPH2013 Conference Proceedings*. 2013.
69. **Block, P., Ochsendorf, J. e Ciblac, T.** As hangs the flexible line: Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Network Journal*. 2006.
70. **Lucchesi, M., Padovani, C. e Zani, N.** Modellazione numerica di antiche costruzioni in muratura.
71. **Bakhvalov, N.S. e Panasenko, G.** Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media. *Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials*. 1989.
72. **Besdo, D.** Inelastic behaviour of plane frictionless block systems described as Cosserat media. *Arch. Mech.* 1985.
73. **Mühlhaus, Dr.Ing. habil. H. B.** Application of Cosserat theory in numerical solutions of limit load problems. *Ingenieur Archiv*. 1993.
74. **Stefanou, I. et al.** Three-dimensional Cosserat homogenization of masonry structures: elasticity. *Acta Geotechnica*. 2008.
75. **Stefanou, I., Sulemb, J., Vardoulakisa, I.** Homogenization of interlocking masonry structures using a generalized differential expansion technique. *International Journal of Solids and Structures*. 2010.
76. **Addressi, D., Sacco, E. e Paolone, A.** Cosserat model for periodic masonry deduced by nonlinear homogenization. *European Journal of Mechanics and Solids*. 2010, Vol. 29, 4.
77. **Masiani, R. e Trovalusci, P.** Cosserat and Cauchy materials as continuum models of brick masonry. *Meccanica*. 1996, Vol. 31, 4.
78. **Salerno, G. e De Felice, G.** Continuum modeling of periodic brickwork. *International Journal of Solids and Structures*. 2009, Vol. 46, 5.
79. **Anthoine, A.** Derivation of in plane elastic characteristic of masonry through homogenization theory. *International Journal of Solids and Structures*. 1995, Vol. 32 .

80. **Anthoine, A.** Homogenization of periodic masonry: plane stress, generalized plane strain or 3D modelling? *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 1997, Vol. 13, 5.
81. **Urbanski, A.** Finite element modelling of the behaviour of the masonry walls and columns by homogenisation approach. *Computer Methods in Structural Masonry - 4: Fourth International Symposium*. Proceedings of XIIPCCMM, Poznah, Poland, 1995.
82. **Pande, G. N., Liang, J. X., and Middleton, J.** Equivalent elastic moduli for brick masonry. *Computers and Geotechnics*. 1989, Vol. 8.
83. **Maier, G., Papa, E. e Nappi, A.** On damage and failure of unit masonry. *Experimental and numerical methods in earthquake engineering*. 1991.
84. **Pietruszczak, S. e Niu, X.** A mathematical description of macroscopic behavior of brick masonry. *International Journal of Solids and Structures*. 1992, Vol. 29, 5.
85. **Lee, J. S., et al.** Numerical Modelling of Brick Masonry Panels Subject to Lateral Loadings. *Computers and structures*. 1996, Vol. 61, 4.
86. **Lourenço, P.B.** *Computational strategies for masonry structures, Dissertation*. The Netherlands : Delft University of Technology, Delft University Press, 1966.
87. **Uva, G. e Salerno, G.** Towards a multiscale analysis of periodic masonry brickwork: a FEM algorithm with damage and friction. *International Journal of Solids and Structures*. 2006, Vol. 43, 13.
88. **Lopez, J., et al.** A homogeneous constitutive model for masonry. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46. 1999.
89. **Van der Pluijm, R.** *Out-of-plane Bending of Masonry: Behaviour and Strength*. 1999.
90. **Zucchini, A., Lourenço, P.B.** A micro-mechanical model for the homogenization of masonry. *International Journal of Solids and Structures* 39. 2002.
91. —. A micro-mechanical homogenisation model for masonry: Application to shear walls. *International Journal of Solids and Structures*. 2009.
92. **Luciano, R., Sacco, E.** Homogenization technique and damage model for old masonry material. *Int. J. Solids and Structures*. 1997.
93. —. Damage of masonry panels reinforced by FRP sheets. *International Journal of Solids and Structures*. 1998.
94. **Gambarotta, L., Lagomarsino, S.** Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II. *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*. 1997.

95. **De Buhan, P., De Felice, G.** A homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry. *Journal for the Mechanics and Physics of Solids*. 1997.
96. **Carbone, V.I., Codegone M.** Homogenization process of stratified masonry. *Mathematical and Computer Modelling*. 2004.
97. **Cecchi, A., Di Marco, R.** Homogenization of masonry walls with a computationally oriented procedure. Rigid or elastic block. *European Journal of Mechanics A-Solids*. 2000.
98. **Cecchi, A., Rizzi, N.** Heterogeneous elastic solids: a mixed homogenization--rigidification technique. *International Journal of Solids and Structures*. 2001.
99. **Cecchi, A., Sab, K.** A multi-parameter homogenization study for modeling elastic masonry. *European Journal of Mechanics A-Solids*. 2002.
100. **Cecchi, A. e Sab, K.** Out of plane model for heterogeneous periodic materials: the case of masonry. *European Journal of Mechanics and Solids*. 2002, Vol. 21, 5.
101. **Cecchi, A., Milani, G., Tralli, A.** Validation of analytical multiparameter homogenisation models for out-of-Plane Loaded Masonry Walls by means of finite element method. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 2005.
102. **Chengqing, W., Hong, H.** Derivation of 3D masonry properties using numerical homogenization technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2006.
103. **Cluni, F., Gusella, V.** Homogenization of non-periodic masonry structures. *International Journal of Solids and Structures*. 2004.
104. **Stefanou, I., Sulem, J. e Vardoulakis, I.** Three-dimensional Cosserat homogenization of masonry structures: elasticity. *Acta Geotechnica*. 2008, Vol. 3, 1.
105. **Lourenço, P.B.** *An Anisotropic Plasticity Model for Quasi-Brittle Composite Shells, Computational plasticity: fundamentals and applications*, . London : Printeridge Press, 1997.
106. **Zucchini, A. e Lourenço, P.B.** A Coupled Homogenisation-Damage Model for Masonry Cracking. *International Journal of Solids and Structures* . 2002.
107. **Mazars, J . e Pijaudier-Cabot, G .** From damage to fracture mechanics and conversely: a combined approach. *International Journal of Solids and Structures*. 1989.
108. **Scotta, R., et al.** A scalar damage model with a shear retention factor for the analysis of reinforced concrete structures: theory and validation. *Computers and Structures*. 2001, Vol. 79.

109. **Willam, K.J. e Warnke, E.D.** Constitutive model for the triaxial behaviour of concrete. *Proceedings of the International Association for Bridge and Structural Engineering*. 1975.
110. **Pallarés, F.J., Agüero, A. e Ivorra, S.** Seismic behaviour of industrial masonry chimneys. *Int. J. Solids and Structures*. 2006, Vol. 43, 7-8.
111. **Genna, F., et al.** Numerical Analysis of old masonry buildings: a comparison between constitutive models. *Engineering Structures*. 1998, Vol. 20, 1-2.
112. **Perrodil, F.** *Applications des équations du problème général de la résistance des matériaux au problème de la stabilité d'une voûte d'épaisseur variable traitée comme un monolithe homogène*. s.l. : "Annales des Ponts et Chaussées", vol. 4, 1872.
113. **Curioni e G.** *L'elasticità nella teoria dell'equilibrio e della stabilità delle volte*. s.l. : "Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino", ser. II, vol. 27, 1875.
114. **Castigliano, C.A.P.** *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*. Torino : Negro, 1880.
115. **Signorini, A.** *Sulla pressoflessione delle murature*. s.l. : Rend. Accad. Naz. Lincei 2: 484-489., 1925.
116. —. *Un teorema di esistenza ed unicità nella statica dei materiali poco resistenti a trazione*. s.l. : Rend. Accad. Naz. Lincei 2: 401-406, 1925.
117. **Romano, G. e Romano, M.** *Sulla soluzione di problemi strutturali in presenza di legami costitutivi unilaterali*. s.l. : Rend. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze e fisiche, matematiche e naturali, , serie VIII, vol 67, 104-113, 1979.
118. *Questioni di meccanica dei solidi non reagenti a trazione*. **Di Pasquale, S.** Genova : Atti VI Convegno Nazionale AIMETA, 1982.
119. *Questione concernenti la meccanica di mezzi non reagenti a trazione*. **Di Pasquale, S.** Trieste : Atti VII Convegno Nazionale AIMETA, vol. V, pp.227-238, 1984.
120. **Lucchesi, M., Padovani, C. e Pasquinelli, G.** On the numerical solution of equilibrium problems of elastic solids with bounded tensile strength. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1995, Vol. 127.
121. **Giaquinta, M e Giusti, E.** Reserches on the equilibrium of masonry structures. *Archive of Rational Mechanics and Analysis*. 1985, Vol. 88, pp.259-392.
122. **Anzellotti, G.** A class of convex non-coercive frictional and masonry-like materials. *"Annales Institute Henry Poincaré"*. 1985, Vol. II, 4.

123. **Del Piero, G.** Constitutive equation and compatibility of the external loads for linearly-elastic masonry-like materials. *Meccanica*. pp.150-162, 1989, Vol. 24 .
124. **Di Pasquale, S.** New trends in the analysis of masonry structures. *Meccanica*. 1992, Vol. 27, pp. 173-184.
125. *Elementary solutions for equilibrium problems of masonry-like materials.* **Bennati, S. e Lucchesi, M.** s.l. : "Proc. of IV Congress on Unilateral in Struct. Analysis", 1989.
126. —. **Bennati, S. e Lucchesi, M.** s.l. : Int. Series of Numerical Mathematics, Birkhauser, Basel, 1991.
127. **Bennati, S. e Padovani, C.** Soluzioni esplicite per problemi di equilibrio di solidi non resistenti a trazione. *Mech. Struct. & Mach.* 1997, Vol. 25, pp.243-266.
128. **Lucchesi, M, Padovani, C. e Pagni, A.** A numerical method for solving equilibrium problems of masonry-like solids. *Meccanica*. 1994, Vol. 24, pp. 175-193.
129. **Padovani, C., Pasquinelli, G. e Zani, N.** A numerical method for solving equilibrium problems of no-tension solids subjected to thermal loads. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2000, Vol. 190, pp. 55-73.
130. **Lucchesi, M., et al.** Static analysis of masonry vaults, constitutive model and numerical analysis. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2007, Vol. 2, pp. 221-244.
131. **Lucchesi, M., Padovani, C. e Zani, N.** Masonry-like materials with bounded compressive strength. *Int. J. Solids Structures*. pp. 1961-1994, 1996., Vol. 33.
132. **Lucchesi, M., et al.** Static analysis of masonry vaults, constitutive model and numerical analysis. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2007.
133. *Analysis, diagnosis and preservation of ancient monuments: the St.Mark's Basilica in Venice.* **Mola, F. e Vitaliani, R.** Barcellona : I CIMNE, 1995.
134. *Structural aspects of the rehabilitation of the Mexico City Cathedral.* **Meli, R. e Sanchez-Ramirez, A.R.** Barcellona : I CIMNE, 1995.
135. *Studies of Gaudi's Cripta de la Colonia Güell.* **Gonzalez, A., Casals, A. e Roca, P.** Rome : IABSE Symposium, 1993.
136. *Modelling and monitoring of the Hagia Santa Sophia in Istanbul structural.* **Mark, R. et al.** Zurigo : Preservation of the architectural Heritage, 1993.
137. **Mark, R. et al.** Structural analysis of Hagia Sophia: a historical perspective. *Computational Mechanics Publications*. UK, 1993.

138. **G., Croci, M., Cerone e A., Viskovic.** *Analysis from a historical and structural point of view of the domes of Pantheon, Hagia Sophia and St Peter.* Istanbul : YTU Faculty of Architecture Publication, 1998.

139. *On elastic models for evaluation of the seismic vulnerability of masonry churches.* **Peña, F. e Meli, R.** s.l. : Structural analysis of historical constructions, pp.1121-1131, 2004.

140. *Structural analysis and durability assessment of historical constructions using a finite element damage model.* **Oñate, E., et al.** s.l. : CIMNE, 1995.

141. *Analisis estructural de la Catedral de Santa Maria Vieja de Vitoria.* **Croci, G. et al.** Vittoria, Spagna : I Congresso Europeo sulle cattedrali gotiche, 1998.

142. *Analisis matematico del derrumbamiento de bovedas en la catedral de San Pedro de Beauvais.* **Croci, G. et al.** Vittoria, Spagna : I Congresso Europeo sulle cattedrali gotiche, 1998.

143. **Croci, G.** [The Basilica of St. Francis of assisi after the September 1997 earthquake. *Struct. Eng. Int.* 1998.

144. *Rissbildung in gemauerten Kreuzgewölben.* **Barthel, R.** Zurigo : IABSE, 1993.

145. *Problems concerning strength assessment and repair of Historical Vaulted Structures.* **Cauvin, A. e Stagnitto, G.** Istanbul : IASS, 1993.

146. **Cauvin, A. e Stagnitto, G.** *Criteria of design and methods of structural analysis of Gothic ribbed vaults using traditional and computer methods.* Padova : SGE editoriali, 1995.

147. **Pelà, L., Aprile, A. e Benedetti, A.** Seismic assessment of masonry arch bridges. *Engineering Structures.* 2008.

148. **Mallardo, V., et al.** Seismic vulnerability of historical masonry buildings: a case study in Ferrara. *Eng Struct* . 2008.

149. *Structural analysis of Küçük Ayasofya Mosque in İstanbul.* **Roca, P., et al.** Balkema, Amsterdam : SAHC IV, 2004.

150. **Martínez G, Roca P, Caselles O, Clapés J.** Characterization of the dynamic response for the structure of Mallorca Cathedral. [aut. libro] P.B. Lourenço, et al. *Structural analysis of historical constructions.* New Delhi, India : s.n., 2006.

151. *Seismic safety analysis of historical masonry structures using a damage constitutive model.* **Murcia-Delso, J., et al.** s.l. : Thematic conference on computational methods in structural dynamics and earthquake engineering, 2009.

152. *Damage model with crack localization - application to historical buildings*. **Clemente, R. et al.** New Delhi : SAHC, 2006.
153. *Numerical analysis of structural damage in the church of the Poblet Monastery*. **Roca, P. e Pelà, L. et al.** Città del Messico : SAHC, 2014.
154. **Carini, A. e Genna, F.** Stability and strength of old masonry vaults under compressive longitudinal loads: Engineering analyses of a case study. *Engineering Structures*. 2012, Vol. 40.
155. **Bacigalupo, A., Brencich, A. e L., Gambarotta.** A simplified assessment of the dome and drum of the Basilica of S. Maria Assunta in Carignano in Genoa. *Engineering Structures*. 2013, Vol. 56.
156. **D'Ayala, D. F. e Tomasoni, E.,.** Three-dimensional analysis of masonry vaults using limit state analysis with finite friction. *International Journal of Architectural Heritage*. 2, 2011, Vol. 5.
157. **Lucchesi, M. e Zani, N.** *Analisi sismica di tipo statico della ciminiera dei Vecchi Macelli, Via Nicola Pisano (Pisa)*. s.l. : Relazione Tecnica Consorzio Pisa Ricerche, 29/04/1997.
158. —. *Analisi sismica di tipo statico dell'arsenale mediceo situato in Pisa, lungarno Simonelli*. s.l. : Relazione Tecnica Consorzio Pisa Ricerche, 12/11/1996.
159. **Lucchesi, M., et al.** *Masonry constructions: mechanical models and numerical applications, Series: Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. s.l. : Vol. 39, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2008.
160. **Bernardeschi, K., Padovani, C. e Pasquinelli, G.** Studio del comportamento statico del muro della navata destra della chiesa di San Pietro in Vinculis a Pisa. *Bollettino Ingegneri*. 2003, Vol. 8/9, pp. 9-17.
161. **Lucchesi, M., Padovani, C. e Zani, N.** *Studio del comportamento statico di alcuni elementi strutturali della Chiesa Madre S. Nicolò di Noto*. s.l. : Relazione Tecnica Consorzio Pisa Ricerche, 09/03/1998.
162. **Lucchesi, M., De Falco, A. e Zani, N.** *Studio del comportamento statico dell'arco scenico del Teatro Goldoni di Livorno*. s.l. : Relazione Tecnica Consorzio Pisa Ricerche, 20/05/1998.
163. **Bernardeschi, K., Padovani, C. e Pasquinelli, G.** Numerical modelling of the structural behaviour of Buti's bell tower. *International Journal of Cultural Heritage*. 2004, Vol. 5(4), pp. 371-378.

164. **Girardi, M., et al.** *Analisi strutturale della chiesa di Santa Maria di Roccella*. s.l. : Technical Report n° cnr.isti/2009-TR-051, 2009.
165. **Girardi, M., et al.** Numerical modeling of masonry towers: the case study of the Rognosa Tower in San Gimignano. *Advances and Trends in Structural Engineering, Mechanics and Computation*. s.l. : A. Zingoni (Editor), CRC Press/Balke.
166. *The Rognosa Tower in San Gimignano: digital acquisition and structural analysis*. **Callieri, M., et al.** s.l. : CST 2010 – Proceedings of The Tenth International Conference on Computational Struc.
167. **Smars, P.** Etudies sur la stabilité des arcs et voutes. *PhD Thesis, Leuven Katholieke Universiteit*. 2000.
168. **Benvenuto, E.** *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo storico*. Firenze : Sansoni, 1981.
169. —. *An introduction to the History of Structural Mechanics*. New York : Springer Verlag, 1991.
170. **Arch. Aita, D.** *Analisi elastica non lineare e collasso di strutture ad arco in muratura*. s.l. : ThD Thesis, Marzo 2003.