Università degli Studi di Pisa
Facoltà di Lettere e Filosofia
Corso di Laurea Magistrale in Filosofia e Forme del Sapere

Per una caratterizzazione formale della conoscenza di individui concreti

Un'analisi del problema di onniscienza logica

RELATORE:
Prof. Enrico MORICONI

CANDIDATA:
Costanza LARESE

RELATORE:
Prof. Massimo MUGNAI

ANNO ACCADEMICO 2013-2014

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Questa tesi consiste in un'analisi del problema di onniscienza logica motivata dall'intenzione di fornire una caratterizzazione formale della conoscenza propria di individui concreti. La domanda centrale che si pone questo lavoro è quindi la seguente: che cosa potrebbe e dovrebbe conoscere un individuo concreto che dispone di informazioni incomplete? In questa introduzione chiarisco i termini che definiscono il problema ed esplicito la struttura del testo.

L'obiettivo di questo elaborato è una caratterizzazione formale della conoscenza proposizionale che agenti individuali concreti potrebbero e dovrebbero ottenere tramite il ragionamento deduttivo applicato a un insieme di informazioni incomplete.

Come sottolineato da Hendricks e Symons (2006), l'impiego di strumenti formali per lo studio della conoscenza è giustificato dal riconoscimento di certe regolarità e di determinati aspetti sistematici che caratterizzano questa attitudine proposizionale.

La conoscenza proposizionale è indicata da espressioni del tipo "S sa che p", dove S denota il soggetto e p rappresenta una proposizione, e si distingue dalla conoscenza oggettuale, che si presenta quando si fa la conoscenza diretta di qualcosa o di qualcuno, e dalla conoscenza competenziale, che si dà invece quando si possiede la capacità di fare qualcosa.

Il ragionamento è il processo che forma argomenti, e cioè che deriva conclusioni da insiemi di premesse. Fissare la relazione tra premesse e conclusioni accettabili equivale a definire una specifica forma di ragionamento. Un sistema logico è una formalizzazione di una determinata forma di ragionamento. Il tipo di ragionamento oggetto di questa tesi è esclusivamente il ragionamento deduttivo: un argomento è deduttivo se la conclusione non può essere contraddetta da nuove conoscenze che non contraddicono le premesse. Le premesse da cui muove il ragionamento deduttivo di un agente sono interpretate come le informazioni eventualmente incomplete di cui dispone l'agente. Il ragionamento deduttivo si distingue dalle forme di ragionamento quasi-deduttivo e a-deduttivo: secondo la classificazione di Flach (2002), le prime includono il ragionamento controfattuale, che assume premesse di cui si conosce la falsità, e il ragionamento plausibile, che consiste nel ragionamento condotto attraverso casi generali ed eccezioni; le seconde includono il ragionamento per induzione, che generalizza osservazioni specifiche formulando regole generali, e per abduzione, che deriva la spiegazione pù probabile dai fatti noti.

Affinché sia in grado di svolgere un ragionamento deduttivo e di raggiungere certe conoscenze, un agente deve disporre di determinate risorse computazionali. Su questa base, si possono distinguere due tipi di agenti: da un lato, gli agenti idealizzati, cioè entità immaginarie che dispongono di capacità computazionali illimitate; dall'altro, gli agenti concreti o reali, i quali sono invece caratterizzati da determinati limiti sulle risorse di cui dispongono. I soggetti interessati da questa analisi sono gli agenti concreti individuali.

Le logiche epistemiche classiche, insieme alle teorie tradizionali della razionalità, sono caratterizzate da assunzioni irrealistiche sulla capacità di ragionamento degli agenti considerati. In particolare, questi sistemi assumono i principi di onniscienza logica che impongono agli individui di conoscere tutte le conseguenze di ciò che conoscono e che non possono essere soddisfatti da agenti concreti.

Una caratterizzazione della conoscenza ottenuta tramite il ragionamento deduttivo condotto da individui concreti deve quindi muovere da un'analisi e da una soluzione del problema di onniscienza logica. Il lavoro è organizzato come segue.

Il Capitolo 2 espone i principi di onniscienza logico-deduttiva assunti dalla caratterizzazione formale standard del concetto di conoscenza. L'idea alla base delle logiche epistemiche classiche è di misurare la conoscenza di un agente tramite le situazioni che l'individuo ritiene possibili (Sezione 2.1). La conoscenza è rappresentata formalmente attraverso la semantica a mondi possibili di Kripke (Sezione 2.2). Questi sistemi risultano essere delle estensioni conservative del sistema di logica modale normale K interpretato in chiave epistemica e differiscono tra loro per le proprietà con cui caratterizzano il concetto di conoscenza (Sezione 2.3). Tuttavia, le assunzioni di onniscienza escludono l'applicabilità delle logiche epistemiche classiche al ragionamento proprio degli individui concreti, dal momento che possono essere soddisfatti soltanto da agenti ideali (Sezione 2.4).

Il Capitolo 3 descrive il problema di onniscienza logica come una divergenza tra alcuni aspetti della logica epistemica tradizionale e l'applicazione di questa ad agenti concreti ed esamina due metodi di risoluzione. Il primo, che consiste nell'investimento delle logiche epistemiche classiche di un ruolo normativo per il ragionamento degli individui concreti, è criticato sulla base del principio di "contenimento del disordine" elaborato da Harman (1986) (Sezione 3.1). Il secondo, che consiste nell'elaborazione di sistemi logici non standard che attenuano o escludono le assunzioni di onniscienza logica, è esemplificato tramite l'esposizione delle logiche basate sui mondi impossibili, del sistema NPL e delle logiche della consapevolezza (Sezione 3.2). Infine, sono discusse e confrontate le intuizioni alla base dei tre sistemi presentati (Sezione 3.3).

Il Capitolo 4, basandosi sul percorso indicato da D'Agostino (2013 b), propone un'indagine storico-filosofica del problema di onniscienza logica. L'onniscienza è descritta come una variante modale del paradosso dell'inferenza, di cui sono esaminate due soluzioni classiche: la prima, di natura psicologista, è diffusa in ambienti neoempiristi (Sezione 4.1); la seconda, formulata da Wittgenstein, consiste nell'elaborazione di un linguaggio logico perfetto (Sezione 4.2). Entrambe le soluzioni assumono il principio tradizionale, sostenuto in particolare dai neoempiristi, secondo cui le verità della logica sono analitiche e tautologiche (Sezione 4.3). Il principio di analiticità è chiarito attraverso l'individuazione di tre accezioni del termine "analitico" (Sezione 4.4).

Il Capitolo 5 esamina due critiche al carattere tautologico delle inferenze logiche. La prima, elaborata da Hintikka (1973), muove dal risultato di indecidibilità della logica classica del prim'ordine e consiste nella definizione di una classe di verità logiche sintetiche a priori (Sezione 5.1). La seconda, ripresa da D'Agostino e Floridi (2009) e formulata dalla teoria della complessità computazionale, consiste nel riconoscimento della probabile indecidibilità pratica della logica proposizionale classica. Questa congettura chiarisce il motivo dell'impossibilità per gli agenti concreti di raggiungere l'onniscienza (Sezione 5.2).

Il Capitolo 6 espone la recente proposta di D'Agostino e Floridi (2009) di un approccio incrementale alla caratterizzazione della logica proposizionale classica, la quale risulta come limite di una sequenza di logiche più deboli e trattabili chiamate logiche booleane a profondità limitata. Questo approccio traccia una chiara demarcazione tra inferenze analitiche e sintetiche: nelle prime la conclusione dipende soltanto dal significato informazionale degli operatori logici che occorrono nelle premesse; le seconde sono invece caratterizzate dall'impiego di informazioni virtuali da cui dipende l'aumento della complessità computazionale della deduzione.

Il Capitolo 7 presenta la proposta originale di una logica epistemica a profondità limitata che intende definire la conoscenza di un individuo concreto che dispone di informazioni incomplete e di risorse computazionali limitate. L'approccio esposto consiste in una combinazione della semantica a mondi possibili della logica epistemica classica e della semantica delle logiche booleane a profondità limitata. In questo sistema, un individuo è caratterizzato dalle informazioni di cui dispone, che costituiscono il suo stato informativo iniziale eventualmente incompleto, e da un grado di profondità, e cioè dal numero di informazioni virtuali innestate che l'individuo è capace di immaginare e di adoperare nel suo ragionamento. Questo sistema assume un punto di vista prescrittivo e tiene conto dei limiti computazionali degli individui che considera: in particolare, le assunzioni di onniscienza logica non risultano problematiche, dal momento che un individuo dovrebbe conoscere soltanto le conseguenze analitiche di ciò che conosce.

Il Capitolo 8 suggerisce un'applicazione della caratterizzazione del ragionamento di individui concreti nel contesto sociale. La teoria classica elaborata da List e Pettit (2002) (Sezione 8.1) incontra almeno due difficoltà nel trattare l'aggregazione di giudizi su proposizioni fattuali (Sezione 8.2): in primo luogo essa considera agenti altamente idealizzati (Sezione 8.3); in secondo luogo, come osserva Goldman (2004), la conoscenza della collettività non rappresenta un *desideratum* del modello (Sezione 8.4). Si indicano alcune ragioni per ritenere che la caratterizzazione degli agenti limitati proposta in questa tesi possa essere impiegata efficacemente per risolvere queste due difficoltà e si individuano alcune questioni che dovrebbero essere affrontate per formulare un modello di aggregazione di giudizi espressi nelle logiche a profondità limitata.

Il Capitolo 9 conclude la tesi riassumendo i risultati raggiunti e indicando possibili sviluppi del lavoro.

Capitolo 2

Logiche epistemiche classiche

Questo capitolo espone i principi di onniscienza logico-deduttiva assunti dalle logiche epistemiche classiche, le quali costituiscono l'approccio formale standard alla caratterizzazione del concetto di conoscenza. L'idea alla base delle logiche epistemiche classiche è di misurare la conoscenza di un agente tramite le situazioni che l'individuo ritiene possibili (Sezione 2.1). La conoscenza è rappresentata formalmente attraverso la semantica a mondi possibili di Kripke (Sezione 2.2): di conseguenza, questi sistemi risultano essere delle estensioni conservative del sistema di logica modale normale interpretato in chiave epistemica K e differiscono tra loro per le proprietà con cui caratterizzano il concetto di conoscenza (Sezione 2.3). I principi di onniscienza logica sono validi in tutte le logiche epistemiche classiche e sembrano delle conseguenze inevitabili dell'impiego della semantica alla Kripke per caratterizzare la nozione di conoscenza. Tuttavia, le assunzioni di onniscienza escludono l'applicabilità delle logiche epistemiche classiche al ragionamento proprio degli individui concreti, dal momento che possono essere soddisfatti soltanto da agenti ideali (Sezione 2.4).

2.1 Conoscenza e situazioni possibili

L'idea fondamentale delle logiche epistemiche classiche consiste nel rappresentare l'ignoranza di un individuo i tramite il fatto che i ritiene possibili diverse situazioni. In altri termini, ciò che i ignora è indicato dalle situazioni che i considera possibili e, viceversa, ciò che i conosce è indicato dalle situazioni che i considera impossibili. Per chiarire questa affermazione presento l'esempio seguente, formulato a partire da una proposta di Meyer (2001):

Esempio 2.1. Supponiamo che Alice e Luca, trovandosi in vacanza a Roma, si stiano chiedendo se a Palermo e a Milano stia piovendo o meno. Alice, che ha telefonato ad un amico, ha l'informazione che a Milano piove, mentre Luca non sa nulla sulle condizioni meteorologiche delle due città. Assumiamo che i due agenti non dispongano di ulteriori informazioni a riguardo.

Date le informazioni di cui (non) dispone, Luca considera possibili quattro situazioni: s_1, in cui piove sia a Milano che a Palermo; s_2, in cui piove a Milano, ma non a Palermo; s_3, in cui piove a Palermo, ma non a Milano; s_4, in cui in entrambe le città non piove. Alice, che a differenza di Luca è stata informata del fatto che a Milano piove, considera possibili soltanto le due situazioni compatibili con le informazioni di cui dispone, e cioè s_1 e s_2.

Il numero delle situazioni che un agente considera possibili è direttamente proporzionale all'ignoranza dell'agente: minore è il numero di situazioni che un individuo considera possibili, minore è la sua incertezza e quindi maggiore è la sua conoscenza. Nell'esempio appena proposto, Alice, che non dispone di informazioni riguardo ad una proposizione, considera possibili due situazioni, mentre Luca, che non conosce il valore di verità di due proposizioni, considera possibili quattro situazioni. In generale, un individuo che ignora il valore di verità di n proposizioni considererà possibili 2^n situazioni.

Le situazioni che un individuo ritiene possibili sono chiamate "alternative epistemiche" dell'agente, dal momento che scaturiscono da determinate lacune nella conoscenza del soggetto. Inoltre si dice che "un individuo non è in grado di distinguere tra le proprie alternative epistemiche": con ciò non si intende affermare che l'agente non coglie le differenze tra le situazioni che ritiene possibili (nell'esempio, Alice sa che la situazione s_1 differisce da s_2 per il tempo atmosferico a Palermo), quanto piuttosto che le informazioni dell'individuo non sono in grado di distinguere quale, tra le sue alternative epistemiche, rappresenti il mondo attuale (Alice infatti non sa se la situazione attuale sia rappresentata da s_1 o s_2, perché non ha l'informazione sulle condizioni atmosferiche di Palermo).

2.2 Approccio modale alla conoscenza

L'idea di considerare diverse alternative epistemiche nel caso in cui un agente non possiede informazioni complete sulla situazione attuale è rappresentata formalmente impiegando la semantica a mondi possibili alla Kripke. Con logiche epistemiche classiche si indica infatti una classe di logiche modali normali che risultano da una estensione del sistema modale normale K e da una interpretazione in chiave epistemica degli operatori modali. L'esposizione delle logiche epistemiche classiche in questa sezione e nella successiva segue i lavori di Fagin, Halpern, Moses e Vardi (1995), Priest (2008), Meyer (2001), van Ditmarsch, van der Hoek e Kooi (2007) e van Harmelen, Lifschitz e Porter (2008).

Il linguaggio del sistema K interpretato in senso epistemico è costituito da un insieme finito di agenti $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n\}$; un insieme non vuoto e numerabile di proposizioni atomiche $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots\}$; un insieme di connettivi $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$; un insieme di operatori modali $\mathcal{O} = \{\Box_i \mid i \in \mathcal{A}\} \cup \{\Diamond_i \mid i \in \mathcal{A}\}$; un insieme di simboli ausiliari $\mathcal{S} = \{(,)\}$. Gli operatori modali, spesso indicati con K_i e M_i, sono interpretati in chiave epistemica in modo tale che $\Box_i p$ significa che "l'agente i sa che p" e $\Diamond_i p$ è letto "l'agente i non esclude che p".

L'insieme $\mathcal{L}$ degli enunciati del linguaggio è definito ricorsivamente come segue:

- $\mathcal{L}^0 = \mathcal{P}$
- $\mathcal{L}^{n+1} = \{\neg B, \Box_i B, \Diamond_i B, B \vee C, B \supset C, B \wedge C | B, C \in \mathcal{L}^n \text{ e } i \in \mathcal{A}\}$
- $\mathcal{L} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n$

Un'interpretazione per il sistema K è una struttura di Kripke $\mathfrak{M} = \langle S, v, R_1, R_2, \ldots, R_n \rangle$, tale che:

- S è un insieme non vuoto di situazioni o stati;
- v è una valutazione proposizionale relativa ad ogni stato che assegna a ciascuna formula atomica un valore di verità tra vero e falso: $\forall s \in S, v_s : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{T}$, dove $\mathcal{T} = \{t, f\}$;
- Per qualunque agente $i \in \mathcal{A}$, R_i è una relazione di accessibilità definita come una relazione binaria sugli stati: $\forall i \in \mathcal{A}, R_i \subseteq S \times S$.

Una struttura di Kripke è in grado di rappresentare le alternative epistemiche di un agente in un determinato stato: data una certa situazione (rappresentata da uno stato $s \in S$), le alternative epistemiche dell'individuo i sono date dall'insieme $\{u \in S \mid R_i(u, s)\}$, e cioè da tutti i mondi possibili u che sono accessibili da s attraverso la relazione R_i.

Una valutazione proposizionale v relativa ad uno stato s è estesa in modo univoco all'insieme $\mathcal{L}$ delle formule ben formate del linguaggio attraverso un insieme ricorsivo di regole, costituito dalle condizioni per i connettivi e dalle condizioni sugli operatori modali.

Le condizioni per i connettivi sono quelle della logica proposizionale classica, ad eccezione del fatto che ciascuna valutazione è relativa ad un determinato stato: di conseguenza, i connettivi sono verofunzionali e seguono il principio di composizionalità, per cui il valore di verità di un enunciato è determinato soltanto dai valori di verità dei suoi componenti e dalle regole usate per combinarli.
Per ogni $s \in S$:

$$v_s(\neg B) = \begin{cases} t & \text{se} \quad v_s(B) = f \\ f & \text{se} \quad v_s(B) = t \end{cases}$$

$$v_s(B \wedge C) = \begin{cases} t & \text{se} \quad v_s(B) = t \text{ e } v_s(C) = t \\ f & \text{se} \quad v_s(B) = f \text{ o } v_s(C) = f \end{cases}$$

$$v_s(B \vee C) = \begin{cases} t & \text{se} \quad v_s(B) = t \text{ o } v_s(C) = t \\ f & \text{se} \quad v_s(B) = f \text{ e } v_s(C) = f \end{cases}$$

$$v_s(B \supset C) = \begin{cases} t & \text{se} \quad v_s(B) = f \text{ o } v_s(C) = t \\ f & \text{se} \quad v_s(B) = t \text{ e } v_s(C) = f \end{cases}$$

Le condizioni sugli operatori modali stabiliscono che l'agente i sa che B se e solo se B è vero in tutti gli stati che i considera possibili e l'agente i non esclude che B se e solo se B è vero in almeno uno stato che i considera possibile. Gli operatori modali, a differenza dei connettivi, fanno riferimento a diversi stati.
Per ogni $i \in \mathcal{A}$ e $s \in S$:

$$v_s(\Box_i B) = \begin{cases} t & \text{se} \quad \forall u \in S \text{ tale che } (s,u) \in R_i, v_u(B) = t \\ f & \text{se} \quad \exists u \in S \text{ tale che } (s,u) \in R_i, v_u(B) = f \end{cases}$$

$$v_s(\Diamond_i B) = \begin{cases} t & \text{se} \quad \exists u \in S \text{ tale che } (s,u) \in R_i, v_u(B) = t \\ f & \text{se} \quad \forall u \in S \text{ tale che } (s,u) \in R_i, v_u(B) = f \end{cases}$$

La definizione dell'operatore di conoscenza afferma che in un mondo possibile s, l'agente i sa che l'enunciato B è vero se e solo se B è vero in tutti i mondi u che i considera come alternative epistemiche. In altri termini, sebbene possa essere incerto sulla natura del mondo attuale (se ritiene che più alternative epistemiche siano possibili), l'agente non ha alcun dubbio sul valore di verità della formula B, perché B è vera in tutte le sue alternative epistemiche. In questo senso, si può davvero affermare che l'agente sa che l'enunciato B è vero.

Un'inferenza è detta valida se preserva la verità in tutti i mondi e in tutte le interpretazioni. Dati un insieme di enunciati $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$ e una formula $B \in \mathcal{L}$, le nozioni di conseguenza logica e di verità logica sono definite come segue:

- B è una conseguenza logica di Γ, scritto $\Gamma \vDash B$, se e solo se per ogni interpretazione $\mathfrak{M}$ e ogni stato $s \in S$, se $v_s(C) = t$ per ogni $C \in \Gamma$, allora $v_s(B) = t$;

- B è una verità logica, scritto $\vDash B$, se e solo se $\varnothing \models B$, e cioè per ogni interpretazione $\mathfrak{M}$ e ogni stato $s \in S$, $v_s(B) = t$.

Infine, il sistema K ammette una assiomatizzazione alla Hilbert corretta e completa rispetto alla classe di tutti i modelli alla Kripke. Questa assiomatizzazione consiste negli assiomi seguenti:

- P) Qualunque assiomatizzazione per la logica proposizionale classica;

- K) $\vdash_{\mathsf{K}} \Box_i(B \supset C) \supset (\Box_i B \supset \Box_i C)$;

e nelle regole seguenti:

- MP) Se $\vdash_{\mathsf{K}} B \supset C$ e $\vdash_{\mathsf{K}} B$, allora $\vdash_{\mathsf{K}} C$;

- N) Se $\vdash_{\mathsf{K}} B$, allora $\vdash_{\mathsf{K}} \Box_i B$.

L'assioma K, detto assioma di distributività, richiede la chiusura della conoscenza rispetto all'implicazione materiale, mentre la regola N, detta regola di necessitazione o di generalizzazione, afferma che ogni agente conosce tutti i teoremi. I due principi saranno discussi nella Sezione 2.4.

Per illustrare le definizioni proposte, mostro come il semplice caso esposto nell'Esempio 2.1 (Sezione 2.1) possa essere opportunamente rappresentato da un modello di Kripke.

Esempio 2.1.1. Assumiamo che m rappresenti la proposizione "Piove a Milano" e p la proposizione "Piove a Palermo". Supponiamo che la situazione attuale, di cui gli agenti non hanno informazione completa, sia la situazione in cui piove sia a Milano che a Palermo. Questa situazione è rappresentata dallo stato $s_1 \in S$, nel quale $v_{s_1}(m) = t$ e $v_{s_1}(p) = t$. L'insieme degli stati è $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, dove s_2 è tale che $v_{s_2}(m) = t$ e $v_{s_2}(p) = f$; s_3 è tale che $v_{s_3}(m) = f$ e $v_{s_3}(p) = t$; infine, s_4 è tale che $v_{s_4}(m) = f$ e $v_{s_4}(p) = f$. La relazione di accessibilità dell'agente 1,

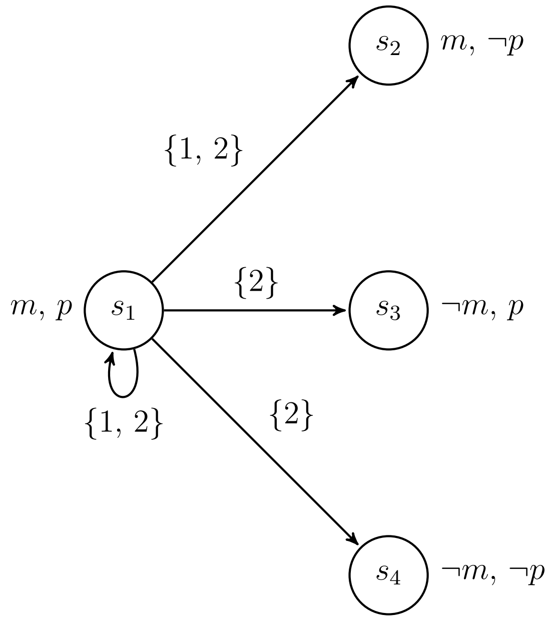

Figura 2.1: Rappresentazione in forma di grafo etichettato dell'Esempio 2.1.

Alice, è $R_1 = \langle (s_1, s_1), (s_1, s_2) \rangle$. La relazione di accessibilità dell'agente 2, Luca, è $R_2 = \langle (s_1, s_1), (s_1, s_2), (s_1, s_3), (s_1, s_4) \rangle$. Alice sa che a Milano piove perché in tutte le situazioni che ritiene possibili a Milano sta piovendo: $v_{s_1}(\Box_1 m) = t$ perché le alternative epistemiche di Alice sono due, s_1 e s_2, e $v_{s_1}(m) = v_{s_2}(m) = t$. Luca non esclude che a Palermo piova perché ritiene possibile una situazione in cui a Palermo piove: $v_{s_1}(\Diamond_2 p) = t$ dal momento che $(s_1, s_3) \in R_2$ e $v_{s_3}(p) = t$.

Le strutture di Kripke possono essere rappresentate da un grafo etichettato nei nodi e negli archi. Ciascun nodo rappresenta uno stato $s \in S$ in corrispondenza del quale sono indicati i letterali veri in s. Su ciascun arco è segnato un insieme di agenti: l'etichetta dell'arco dallo stato s allo stato u include $i \in \mathcal{A}$ se e solo se $(s, u) \in R_i$. La Figura 2.1 rappresenta il grafo che descrive l'esempio.

2.3 I sistemi T, S4 e S5

Le logiche epistemiche classiche sono delle estensioni conservative del sistema K e differiscono tra loro per le proprietà che ciascuna di esse assume per caratterizzare la nozione di conoscenza. Queste proprietà sono espresse estendendo il sistema assiomatico per K tramite l'introduzione di nuovi assiomi. Si può mostrare che l'introduzione di nuovi assiomi equivale a imporre determinati requisiti sulla relazione di accessibilità. Imporre determinati requisiti sulla relazione di accessibilità determina la restrizione della classe delle interpretazioni ammissibili in K e l'aumento della classe delle inferenze valide in K. Di conseguenza, tutte le interpretazioni delle estensioni sono valide anche in K, ma non viceversa; mentre tutte le inferenze valide in K sono valide anche nelle sue estensioni, ma non viceversa. In ciò che segue introduco i caratteri fondamentali di alcuni tra i sistemi più noti di logica epistemica classica, ossia T, $\mathsf{S4}$ e $\mathsf{S5}$.

Tradizionalmente[1], una delle proprietà che definiscono la conoscenza della proposizione B da parte del soggetto S è, insieme alla convinzione e alla giustificazione, la verità di B: se S sa che B è vero, allora B è vero. Questa caratteristica è ciò costituisce la differenza principale tra le nozioni di conoscenza e di credenza: mentre la credenza può riguardare proposizioni false, la conoscenza richiede la veridicità di ciò che è conosciuto[2]. Come afferma Rescher (2002), sebbene molte cose che riteniamo vere risultino in realtà false, è contraddittorio chiedere ad un individuo di fornire un esempio di un enunciato che l'individuo accetta come vero, ma che in realtà non lo è. In altri termini, gli agenti razionali sono tenuti a ritenere che la propria conoscenza sia conoscenza vera: nessun individuo sa di sbagliare riguardo a qualcosa di concreto che ritiene di conoscere.

Tuttavia, questa proprietà della conoscenza non è valida nel sistema K. Il sistema T, ritenuto il più debole sistema modale normale di interesse epistemico, è ottenuto da K aggiungendo l'assioma T, detto di conoscenza o verità, che richiede la verità di ciò che è conosciuto e che equivale ad imporre che la relazione di accessibilità soddisfi il requisito ρ di riflessività:

- Assioma T: $\vdash_{\mathsf{T}} \Box_i B \supset B$;
- Requisito ρ: $\forall s \in S, (s, s) \in R_i$.

Un'altra proprietà desiderabile per la definizione della conoscenza è che la conoscenza stessa sia conosciuta: se un individuo conosce che un enunciato è vero, allora sa di sapere che quell'enunciato è vero. Di nuovo, questa proprietà non

[1] Il riferimento è all'analisi tripartita della conoscenza come convinzione vera e giustificata (*Knowledge = Justified True Belief*). Come osservano Ichikawa e Steup (2014), la condizione di verità, che è quella menzionata in questo contesto, è comunemente accettata anche da coloro che criticano i restanti due requisiti: la maggior parte degli epistemologi trova infatti altamente plausibile che non si possa conoscere ciò che è falso.

[2] Questa differenza sarà ripresa nella Sezione 8.2, dove sarà impiegata per distinguere tra aggregazione di conoscenza e aggregazione di credenze.

è catturata dal sistema K, ma può essere ottenuta aggiungendovi l'assioma 4, detto di introspezione positiva, che richiede appunto la conoscenza di ciò che è conosciuto e che equivale ad imporre che la relazione di accessibilità soddisfi il requisito τ di transitività:

- Assioma 4: $\vdash_{\mathsf{S4}} \Box_i B \supset \Box_i \Box_i B$;
- Requisito τ: $\forall s, t, u \in S$, se $(s, t) \in R_i$ e $(t, u) \in R_i$, allora $(s, u) \in R_i$.

Il sistema $\mathsf{S4}$ è ottenuto da K imponendo che la relazione di accessibilità soddisfi i requisiti ρ e τ e aggiungendo gli assiomi T e $S4$.

Nella scienza informatica e in intelligenza artificiale, dove la logica epistemica è impiegata per descrivere la "conoscenza" di sistemi artificiali, quali sistemi di informazione e sistemi di calcolo distribuiti, si usa richiedere che gli agenti soddisfino anche la proprietà di introspezione negativa, per cui se un agente non conosce un enunciato, allora sa di non conoscere quell'enunciato. È piuttosto improbabile invece che la conoscenza degli individui reali soddisfi questa proprietà: è ragionevole pensare piuttosto che una persona non abbia neppure consapevolezza e, di conseguenza, non conosca ciò che non sa. Questa proprietà, che non è valida nel sistema di logica K, caratterizza invece il sistema $\mathsf{S5}$. $\mathsf{S5}$ è ottenuto da K aggiungendo, oltre agli assiomi T e 4, anche l'assioma 5 di introspezione negativa e imponendo non solo i requisiti ρ e τ sulla relazione di accessibilità, ma anche la condizione σ di simmetria. L'assioma 5 e la condizione σ sono definiti come segue:

- Assioma 5: $\vdash_{\mathsf{S5}} \neg\Box_i B \supset \Box_i \neg\Box_i B$;
- Requisito σ: $\forall s, t \in S$, se $(s, t) \in R_i$, allora $(t, s) \in R_i$.

Il sistema $\mathsf{S5}$ risulta particolarmente semplice e intuitivo perché le relazioni di accessibilità possono essere interpretate nei termini di relazioni di equivalenza. Le relazioni di equivalenza dividono l'insieme degli stati possibili in classi di equivalenza, i membri delle quali sono mutualmente accessibili. Ciascuna classe di equivalenza rappresenta un insieme di mondi che sono alternative epistemiche l'uno dell'altro. Infine, il sistema $\mathsf{S5}$ come è stato presentato in questa sezione contiene delle ridondanze: in particolare, l'assioma 4 può essere derivato dagli altri assiomi e dalle regole del sistema.

2.4 I principi di onniscienza logica

Le logiche epistemiche classiche rendono validi alcuni principi, detti di onniscienza logica o deduttiva, che costituiscono delle assunzioni sulle capacità di ragionamento degli agenti considerati. Questi principi non derivano dalle condizioni imposte sulla relazione di accessibilità (come i requisiti ρ, σ e τ) o dagli assiomi che definiscono particolari proprietà della nozione di conoscenza (come gli assiomi T, 4 e 5): essi discendono dalla stessa semantica a mondi possibili e quindi appartengono al sistema K e a tutte le sue estensioni epistemiche.

Van Ditmarsch, van der Hoek e Kooi (2007) definiscono formalmente il concetto di onniscienza logica individuando il seguente gruppo di proposizioni valide in tutti i sistemi di logica epistemica classica:

- **OL1)** $\vdash_{\mathsf{K}} (\Box_i B \wedge \Box_i(B \supset C)) \supset \Box_i C$
  Chiusura rispetto all'implicazione materiale.

- **OL2)** Se $\vdash_{\mathsf{K}} B$, allora $\vdash_{\mathsf{K}} \Box_i B$
  Conoscenza di formule valide.

- **OL3)** Se $\vdash_{\mathsf{K}} B \supset C$, allora $\vdash_{\mathsf{K}} \Box_i B \supset \Box_i C$
  Chiusura rispetto all'implicazione valida.

- **OL4)** Se $\vdash_{\mathsf{K}} B \equiv C$, allora $\vdash_{\mathsf{K}} \Box_i B \equiv \Box_i C$
  dove $B \equiv C$ significa $(B \supset C) \wedge (C \supset B)$
  Chiusura rispetto all'equivalenza valida.

- **OL5)** $\vdash_{\mathsf{K}} (\Box_i B \wedge \Box_i C) \supset \Box_i(B \wedge C)$
  Chiusura rispetto alla congiunzione.

- **OL6)** $\vdash_{\mathsf{K}} \Box_i B \supset \Box_i(B \vee C)$
  Chiusura rispetto alla disgiunzione.

Queste assunzioni di onniscienza deduttiva sono una conseguenza inevitabile dell' impiego di logiche modali normali per modellare la nozione di conoscenza: infatti, OL1 è una proposizione equivalente dell'assioma di distributività[3] e OL2 è la regola

[3] Il modo più immediato per verificare questa equivalenza è quello di porre $\varphi = \Box_i B$, $\psi = \Box_i(B \supset C)$, $\vartheta = \Box_i C$ e quindi di dimostrare l'equivalenza logica, ad esempio tramite le tavole di verità, tra $(\varphi \wedge \psi) \supset \vartheta$, che rappresenta OL1, e $\psi \supset (\varphi \supset \vartheta)$, che rappresenta l'assioma di distributività.

di necessitazione, mentre OL3-OL6 seguono dalla combinazione delle prime due proposizioni.

Qual è il significato di queste assunzioni di onniscienza logica? OL1 afferma che se un individuo i conosce un enunciato B e sa che B implica un altro enunciato C, allora i conosce anche C. Dato che i sistemi di logica epistemica classica soddisfano il teorema di deduzione[4], OL1 equivale ad affermare che se C è conseguenza logica di B e l'individuo i conosce B, allora i conosce anche C. Generalizzando questa proposizione, e cioè sostituendo a B un insieme di enunciati Γ, si ottiene che se C è conseguenza logica di Γ e l'individuo i conosce tutti gli enunciati in Γ, allora i conosce anche C. In altri termini, per le logiche epistemiche classiche, OL1 equivale alla seguente proposizione generale:

> **OL)** Se $\Box_i B$ per ogni $B \in \Gamma$ e $\Gamma \vdash_{\mathsf{K}} C$, allora $\Box_i C$

la quale, espressa in termini intuitivi, consiste nell'assunzione del seguente principio:

> **Onniscienza logica)** Ogni individuo conosce tutte le conseguenze logiche di ciò che conosce.

OL2 assume che ogni individuo conosce tutte le verità logiche: questa proposizione rappresenta il caso speciale di OL in cui l'insieme Γ è vuoto e quindi B è una tautologia. Le proposizioni OL3-OL6 assumono rispettivamente che ogni individuo conosce tutte le implicazioni valide, conosce tutti gli enunciati equivalenti a quelli che conosce, conosce la congiunzione di due enunciati che conosce e conosce tutte le disgiunzioni di cui conosce almeno un disgiunto.

L'onniscienza deduttiva è un insieme di assunzioni sulle capacità di ragionamento degli attori di una certa teoria: il punto di vista di questi principi è soggettivo. I requisiti di onniscienza deduttiva portano i sistemi che li assumono ad escludere tutti quegli agenti che non sono in grado di soddisfarli. Tra gli agenti che non sono deduttivamente onniscienti sono inclusi tutti gli individui reali: è un dato di fatto unanimemente accettato che nessuna persona è in grado di conoscere tutte le verità logiche o tutte le conseguenze logiche di ciò che sa. Per fare qualche esempio, un individuo può conoscere le regole degli scacchi senza sapere se il bianco ha una strategia vincente (Fagin, Halpern, Moses e Vardi (1995)) o ancora può conoscere gli assiomi dell'aritmetica di Peano senza conoscerne tutti

[4]Il teorema di deduzione afferma che $B \vdash_{\mathsf{K}} C$ se e solo se $\vdash_{\mathsf{K}} B \supset C$.

i teoremi (D'Agostino (2010)). Dalla Sezione 5.2 di questa tesi emergerà che la ragione profonda dell'impossibilità per gli individui reali di soddisfare i requisiti di onniscienza deduttiva consiste nella complessità computazionale della logica proposizionale classica.

Le logiche epistemiche classiche, assumendo l'onniscienza deduttiva, escludono dal campo della loro applicabilità tutti i soggetti reali: esse caratterizzano un tipo di conoscenza possibile solo per individui ideali privi di alcun limite computazionale.

Capitolo 3

L'onniscienza come problema e metodi di risoluzione

Sebbene siano adeguati allo scopo di descrivere il ragionamento di individui ideali, i principi di onniscienza logica risultano problematici se le logiche epistemiche classiche intendono fornire una definizione del concetto di conoscenza propria degli individui reali: il punto di vista logico suppone che gli individui siano onniscienti, mentre, di fatto, nessun individuo concreto lo è.

Il "problema dell'onniscienza logica" consiste dunque in una divergenza tra alcuni aspetti della logica epistemica tradizionale e l'applicazione di questa ad agenti concreti: il modello formale richiede che gli individui della sua applicazione intesa soddisfino certe proprietà quando è comunemente accettato che essi non siano in grado di soddisfarle.

Ci sono quindi almeno due modi per affrontare il problema dell'onniscienza logica. In primo luogo, è possibile applicare la logica epistemica classica ad agenti ideali, cioè a entità immaginarie prive di limitazioni di risorse, di tempo, di memoria e di capacità computazionali, ed eventualmente sostenere una sua utilità, seppur indiretta, alla comprensione del ragionamento degli individui reali. In secondo luogo, è possibile modificare l'approccio formale classico al concetto di conoscenza e introdurre così nuovi modelli privi di assunzioni di onniscienza logica e quindi atti a caratterizzare la conoscenza propria di agenti concreti.

3.1 Normatività

La Sezione 2.4 ha mostrato che le logiche epistemiche classiche, assumendo l'onniscienza deduttiva, escludono dal campo della loro applicabilità tutti i soggetti reali per caratterizzare il ragionamento proprio di agenti idealizzati. Stalnaker (1991) discute alcune motivazioni che possono supportare le assunzioni di onniscienza logica e la scelta degli agenti ideali come soggetti dei sistemi di logica epistemica classica. Due tra queste ragioni per compiere l'idealizzazione degli agenti sembrano affermare un'utilità, seppur indiretta, delle logiche epistemiche classiche anche per lo studio del ragionamento degli individui reali. Siccome lo scopo di questa tesi esplicitato nell'introduzione consiste nell'analisi della conoscenza dei soggetti concreti, in questa sezione analizzo quali possano essere i collegamenti indiretti tra agenti reali e logiche epistemiche classiche.

In primo luogo, afferma Stalnaker (1991), l'analisi della conoscenza degli agenti ideali permette di comprendere ciò che gli individui concreti raggiungerebbero senza l'interferenza di fattori esterni. In termini generali, un'idealizzazione è interpretata come lo stato di equilibrio che un sistema concreto raggiungerebbe se fosse privo della pressione di forze estrinseche. Un oggetto di studio può essere pensato come costituito da diverse componenti che nel mondo concreto non sono mai isolate: tuttavia, per riuscire a comprendere veramente le peculiarità di ciascuna di esse, può essere opportuno analizzare ogni elemento separatamente. Il sistema ideale ottenuto tramite l'isolamento di un elemento sarebbe privo di fattori marginali e rappresenterebbe l'equilibrio verso cui tende il sistema reale. Questa è la ragione che giustifica, ad esempio, lo studio dei piani senza attrito in fisica. Le assunzioni di onniscienza logica possono essere concepite negli stessi termini: gli agenti reali possono fallire nella derivazione delle conseguenze di ciò che conoscono a causa di impedimenti esterni, quale ad esempio l'arrivo di nuove informazioni, ma ogni individuo concreto tenderebbe a soddisfare i principi di onniscienza deduttiva in situazioni ottimali.

In secondo luogo, dice Stalnaker (1991), il comportamento di agenti ideali potrebbe costituire l'ideale normativo a cui gli individui concreti dovrebbero tentare di approssimarsi: la divergenza tra ideale e reale sarebbe un difetto che le persone concrete dovrebbero minimizzare. Secondo la prospettiva normativa sulla logica epistemica, se gli agenti ideali sono deduttivamente onniscienti, allora gli individui concreti dovrebbero conoscere tutte le conseguenze logiche di ciò che conoscono.

Entrambi i punti di vista sopra esposti affermano che il motivo della idealizzazione degli agenti delle logiche epistemiche classiche è la loro utilità per l'analisi del ragionamento di agenti concreti: nel primo caso, il sistema risultante rappresenta ciò verso cui gli individui reali tenderebbero se fossero privi di impedimenti esterni; nel secondo caso, il sistema risultante rappresenta un ideale normativo per il comportamento degli individui concreti.

Queste due prospettive risultano però problematiche proprio a causa dei principi di onniscienza logica per almeno due ragioni. La prima, che sarà esposta nella Sezione 5.2, consiste nel riconoscere che gli individui concreti non soltanto non sono onniscienti, ma non possono neppure esserlo per delle limitazioni oggettive sulle loro capacità computazionali. Questi limiti non possono essere considerati parte delle forze esterne che, secondo il primo dei punti di vista esaminati, impedirebbero agli individui concreti di raggiungere l'onniscienza: questi limiti computazionali sembrano piuttosto inerire alla natura stessa delle persone reali che pertanto non sono onniscienti a causa di aspetti strutturali e non estrinseci. Il fatto che le persone reali non possano oggettivamente diventare onniscienti esclude che le logiche epistemiche classiche rappresentino lo stato di equilibrio del sistema reale.

Per quanto riguarda la seconda motivazione discussa da Stalnaker, l'osservazione sull'impossibilità oggettiva per gli individui concreti di raggiungere l'onniscienza fa sì che quest'ultima non possa fungere da norma per il ragionamento delle persone reali. Infatti, una norma deve implicare la possibilità della sua attuazione. Tuttavia, si potrebbe continuare a sostenere che gli individui concreti dovrebbero assumere i principi di onniscienza come ideale regolativo che, sebbene irraggiungibile, sia in grado di guidare il ragionamento umano. Anche questa riformulazione del ruolo normativo delle logiche epistemiche classiche risulta problematico: l'onniscienza deduttiva è davvero una proprietà desiderabile? MacFarlane (2004) dubita sull'affermatività della risposta a questa domanda:

> Even if a genie could grant us the capacity for arithmetical omniscience, it's not clear we'd have reason to accept it. Only a small number of the theorems are likely to be of any practical or theoretical use to us; why must we clutter up our minds with all the rest? [MacFarlane (2004), pag. 11)]

Il principio di "clutter avoidance", o contenimento del disordine, elaborato da Harman (1986) a supporto del suo rifiuto del carattere normativo della logica per il ragionamento umano, sostiene che un agente non dovrebbe affollare la propria mente con le conseguenze banali derivate dall'insieme di enunciati che conosce.

Harman sottolinea soprattutto le ragioni pratiche, piuttosto che le ragioni teoretiche, per respingere l'onniscienza logica come ideale normativo: queste motivazioni risiedono nei limiti relativi a ciò che è possibile ricordare e nei limiti relativi a ciò che è possibile recuperare dalla memoria. L'aspetto pratico del principio di contenimento del disordine è stato sottolineato anche da Gabbay e Woods (2003). I due autori affermano che la validità logica di un principio non è una giustificazione sufficiente per la sua normatività e, per quanto riguarda l'onniscienza logica, scrivono:

> Consider the case in which John comes home and sees smoke pouring from an open door (S, for short). John then reasons as follow: "Since S, then S or 2+2=4; since S or 2+2=4, then S or Copenhagen is the capital of Denmark". Meanwhile John's house burns to the ground. [Gabbay e Woods (2003), pag. 608]

Il principio di contenimento del disordine è una ragione per escludere che i principi di onniscienza possano fungere da ideale normativo per gli individui concreti e, di conseguenza, è una ragione anche per rifiutare il ruolo normativo delle logiche epistemiche classiche per il pensiero umano.

L'analisi condotta in questa sezione porta a concludere che idealizzare gli agenti tramite le assunzioni di onniscienza non si qualifica come un metodo efficace per lo studio della conoscenza propria degli individui concreti: la proprietà di onniscienza logica infatti non soltanto non è raggiungibile per gli agenti concreti, ma ci sono buone ragioni per credere che non sia neppure una caratteristica desiderabile.

3.2 Logiche non standard

Nella sezione precedente è stato mostrato che, date le assunzioni di onniscienza deduttiva, le logiche epistemiche classiche considerano soltanto agenti idealizzati e non rappresentano un ideale normativo raggiungibile, e forse neppure desiderabile, per gli individui concreti. Esistono tuttavia diversi sistemi di logiche non standard che ambiscono a caratterizzare il tipo di conoscenza proprio di individui limitati. Data la scelta dei soggetti da rappresentare, questi sistemi non standard intendono attenuare o annullare le assunzioni di onniscienza deduttiva impiegando diverse strategie. Dal momento che i principi di onniscienza logica derivano dalla definizione di conoscenza come vero in tutti i mondi possibili, le strategie adottate propongono definizioni non standard di verità o di mondo possibile. I risultati differiscono per la radicalità nel rifiuto dell'onniscienza: alcuni sistemi sono completamente privi dei principi OL1-OL6 esposti nella Sezione 2.4; altri li ammettono comunque, ma questa volta le assunzioni vengono formulate rispetto ad una logica non standard, generalmente più debole rispetto a quella classica.

Seguendo principalmente le esposizioni di Fagin, Halpern, Moses e Vardi (1995) e di Meyer (2001), in questa sezione presento e discuto le strategie e gli aspetti formali essenziali di tre sistemi epistemici non standard particolarmente interessanti: le logiche basate sui mondi impossibili, il sistema NPL e le logiche della consapevolezza. Queste tre proposte risulteranno utili termini di confronto per i sistemi di logica che introduco in seguito.

3.2.1 Mondi impossibili

L'onniscienza logica è una proprietà che deriva dalla definizione di conoscenza come vero in tutti i mondi possibili. Per evitare le assunzioni di onniscienza deduttiva, i sistemi elaborati da Rantala (1982) modificano la nozione di mondo possibile, inserendo tra gli stati un insieme di mondi detti impossibili o non normali anticipati da Hintikka (1975). In questi ultimi, le regole logiche classiche non valgono e qualunque cosa può accadere. Per esempio, può darsi il caso che in un mondo impossibile gli enunciati B e C siano veri, ma la loro congiunzione $B \wedge C$ sia falsa. L'intuizione alla base dei modelli di Rantala è che anche se questi mondi sono logicamente impossibili, un individuo concreto può ritenerli viceversa possibili. I mondi impossibili sono interpretati come una finzione prodotta dall'immaginazione dell'agente e sono impiegati soltanto come alternative epistemiche, mentre le nozioni di conseguenza logica e di validità sono definite soltanto rispetto ai mondi normali.

Formalmente, una struttura per i mondi impossibili è definita da $\mathfrak{M} = \langle S, N, v, R_1, \ldots, R_n \rangle$, dove $\langle S, v, R_1, \ldots, R_n \rangle$ è una struttura di Kripke (Sezione 2.2) e $N \subseteq S$ è l'insieme dei mondi normali. La valutazione è definita in modo standard soltanto rispetto ai mondi normali (Sezione 2.2); in particolare, in un mondo normale, un individuo conosce un enunciato se e solo se quest'ultimo è vero in tutte le alternative epistemiche (normali e non) dell'individuo:

$$\forall s \in N,\, v_s(\Box_i B) = t \text{ se e solo se } \forall u \in S \text{ tale che } (s,u) \in R_i,\, v_s(B) = t.$$

La valutazione relativa ai mondi impossibili o non normali può invece comportarsi in modo completamente arbitrario.

Mentre gli individui possono considerare anche gli stati impossibili nel determinare la propria conoscenza, le nozioni di conseguenza logica e validità sono definite soltanto rispetto ai mondi normali:

- $\Gamma \vDash B$ se e solo se per ogni struttura $\mathfrak{M}$ e ogni mondo normale $s \in N$, se $v_s(C) = t$ per ogni $C \in \Gamma$, allora $v_s(B) = t$;
- $\vDash B$ se e solo se per ogni struttura $\mathfrak{M}$ e ogni mondo normale $s \in N$, $v_s(B) = t$.

Di conseguenza, le assunzioni di onniscienza logica non valgono. Supponiamo infatti che un individuo conosca l'enunciato B e che C segua logicamente da B. Siccome l'agente conosce B, B è vero in tutte le sue alternative epistemiche e tuttavia, in un mondo non normale, C può essere falso nonostante B sia vero.

L'approccio a mondi impossibili è molto generale, può catturare diverse proprietà della conoscenza tramite l'imposizione di opportune condizioni sulla valutazione relativa ai mondi impossibili ed è privo di assunzioni di onniscienza logica.

3.2.2 Il sistema NPL

Il sistema *Nonstandard Propositional Logic* o NPL, formulato da Fagin, Halpern, Vardi (1995), nasce come un tentativo di attenuare gli aspetti "logici" del problema dell'onniscienza logica. NPL modifica la nozione di verità classica attraverso una logica proposizionale non standard, strettamente legata alle logiche rilevanti e alle logiche a quattro valori, ma contemporaneamente mantiene la definizione tradizionale di conoscenza come verità in tutti i mondi possibili: il risultato di questa operazione è un sistema che assume i principi di onniscienza logica, i quali però sono relativi ad una logica non standard.

L'idea centrale del sistema NPL è quella di escludere il principio di *ex falso quodlibet* assumendo che il valore di verità di un enunciato A non dipenda dal valore di verità dell'enunciato $\neg A$: questa intuizione risulta utile, ad esempio, per rappresentare banche dati in cui la possibilità di inserire informazioni contraddittorie non determina la possibilità di derivare da queste qualunque fatto arbitrario. Si può pensare alla verità di un enunciato A come al fatto che A appartiene al database di formule vere e alla verità di $\neg A$ come al fatto che A appartiene al database di formule false. Dal momento che A può appartenere ad entrambi i database, è possibile che sia A che $\neg A$ siano vere; analogamente, è possibile che A non appartenga ad alcun database e che quindi né A né $\neg A$ sia vera.

Una struttura per il sistema NPL è definita da $\mathfrak{M} = \langle S, v, R_1, \ldots, R_n, *\rangle$, dove $\langle S, v, R_1, \ldots, R_n\rangle$ è una struttura di Kripke (Sezione 2.2), mentre $*$ è una funzione che assegna uno stato ad ogni stato ($* : S \longrightarrow S$) tale che per ogni $s \in S$, $*(*(s)) = s$. La funzione $*$ è introdotta per fornire alla negazione una semantica analoga a quella delle logiche rilevanti: invece di definire $\neg A$ vero in s se e solo se A è falso in s, $\neg A$ è detto vero in s se e solo se A è falso in $*(s)$. Formalmente:

$$v_s(\neg A) = t \text{ se e solo se } v_{*(s)}(A) = f$$

Intuitivamente, si può pensare che ciascuno stato s sia costituito da una coppia di database $\langle B_T, B_F\rangle$, dove B_T è il database delle formule vere e B_F è il database delle formule false. Lo stato $*(s)$ è la coppia $\langle \overline{B_T}, \overline{B_F}\rangle$, dove, se X è un insieme di formule, allora $\overline{X}$ è l'insieme delle formule che non sono contenute in X.

Sebbene in questa semantica il comportamento di negazione, congiunzione e disgiunzione preservi le leggi di De Morgan e le leggi di distributività, l'implicazione si comporta in modo non standard: in particolare, sia A che $A \rightarrow B$ possono essere veri nello stato s senza che B lo sia. Il sistema definito in questo modo rifiuta non soltanto i principi di *ex falso quodlibet* e di *modus ponens*, ma anche l'esistenza di qualunque formula valida. Per questa ragione, gli autori introducono un nuovo connettivo, che chiamano "implicazione forte", tale che $A \hookrightarrow B$ è vero se ogni volta che A è vero anche B è vero. Formalmente:

$$v_s(A \hookrightarrow B) = t \text{ se e solo se } v_s(B) = t \text{ ogni volta che } v_s(A) = t.$$

Il connettivo $\hookrightarrow$, che riprende alcune proprietà dell'implicazione rilevante, è più forte dell'implicazione materiale: se $A \hookrightarrow B$ è valida in una struttura per NPL, allora $A \supset B$ è valida in una struttura di Kripke standard, ma non vale il viceversa. L'introduzione dell'implicazione forte comporta l'esistenza di numerose formule valide.

Le proprietà della conoscenza possono essere caratterizzate attraverso una assiomatizzazione corretta e completa del linguaggio così costruito. In particolare, questa assiomatizzazione è ottenuta da quella per le logiche epistemiche classiche (Sezione 2.2) sostituendo il ragionamento proposizionale standard con quello non standard e l'implicazione materiale con quella forte. Da questa assiomatizzazione risulta che tutti i principi di onniscienza deduttiva OL1-OL6 (Sezione 2.4) opportunamente modificati sono validi. Tuttavia, lo scopo di questo sistema è stato raggiunto: gli aspetti "logici" del problema dell'onniscienza logica sono stati indeboliti, per cui un agente considerato da questa teoria è onnisciente secondo una logica non standard e quindi, ad esempio, non è tenuto a conoscere tutte le tautologie classiche, ma solo quelle non standard.

3.2.3 Consapevolezza

Per evitare le assunzioni di onniscienza logica, i sistemi di consapevolezza (*awareness*) proposti da Fagin e Halpern (1987) assumono che la verità in tutti i mondi possibili sia condizione necessaria, ma non sufficiente per la conoscenza. L'idea centrale è infatti che un agente può conoscere soltanto ciò di cui è consapevole o di cui ha coscienza: per poter conoscere un concetto è necessario in primo luogo averne consapevolezza.

La nozione di consapevolezza è introdotta sintatticamente da un nuovo operatore modale $\mathbf{C}_i$ per ogni agente i. L'interpretazione intesa per $\mathbf{C}_i A$ è "l'agente i è consapevole di A". Alla nozione di consapevolezza non è attribuito alcun significato cognitivo precisato: $\mathbf{C}_i A$ può significare che i ha familiarità con tutte le proposizioni in A, oppure che i è in grado di verificare il valore di verità di A o, infine, che i è in grado di calcolare la verità di A in un dato intervallo di tempo T.

Per rappresentare la conoscenza di un agente i, si utilizzano due operatori modali: $\mathbf{K}_i$, che indica la "conoscenza implicita" di i, e $\mathbf{E}_i$, che indica invece la "conoscenza esplicita" di i. La conoscenza implicita coincide con la nozione di conoscenza propria delle logiche epistemiche classiche: l'agente i conosce implicitamente che A se e solo se A è vero in tutti i mondi che i considera possibili. La conoscenza esplicita è definita tramite la nozione di consapevolezza: un agente i conosce esplicitamente che A se e solo se i è consapevole di A e i conosce implicitamente che A.

Una struttura per la logica della consapevolezza è definita da $\mathfrak{M} = \langle S, v, R_1, \ldots, R_n, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle$, dove $\langle S, v, R_1, \ldots, R_n \rangle$ è una struttura di Kripke (Sezione 2.2) e, per ogni agente i, $\mathcal{C}_i$ è una funzione che assegna ad ogni stato l'insieme di enunciati di cui i è consapevole ($\mathcal{C}_i : S \longrightarrow \wp(\mathcal{L})$). Le formule che appartengono a $\mathcal{C}_i(s)$ sono quegli enunciati di cui l'agente i è consapevole allo stato s, e non necessariamente quelli che i conosce: l'insieme di formule di cui un agente è consapevole può essere infatti arbitrario.

Le condizioni di verità degli operatori modali sono quindi definite come segue:

- $v_s(\mathbf{C}_i A) = t$ se e solo se $A \in \mathcal{C}_i(s)$;
- $v_s(\mathbf{K}_i A) = t$ se e solo se per ogni $u \in S$ tale che $(s, u) \in R_i$, $v_u(A) = t$;
- $v_s(\mathbf{E}_i A) = t$ se e solo se $v_s(\mathbf{C}_i A) = t$ e $v_s(\mathbf{K}_i A) = t$.

Da queste definizioni segue immediatamente che la formula $\mathbf{E}_i A \equiv \mathbf{C}_i A \wedge \mathbf{K}_i A$ è valida e cioè che non si può avere conoscenza esplicita senza consapevolezza.

Per poter catturare delle nozioni specifiche di consapevolezza, è possibile imporre determinati vincoli sulla funzione di consapevolezza: ad esempio, si potrebbe richiedere che la consapevolezza di un agente soddisfi la proprietà di introspezione positiva o che includa un determinato sottoinsieme di proposizioni atomiche; o, ancora, che la consapevolezza di un agente sia chiusa rispetto alle sottoformule.

La logica della consapevolezza riduce il numero di formule che possono essere conosciute esplicitamente tramite la funzione di consapevolezza: in questo modo, questo sistema è in grado di respingere le formule OL1 - OL6 di onniscienza deduttiva (Sezione 2.4) che invece sono valide nelle logiche epistemiche classiche. Questo è chiaro se si considera un modello che contiene uno stato s in cui la formula che si vuole respingere, diciamo A, non appartiene all'insieme degli enunciati di cui l'agente i è consapevole: se $\mathbf{C}_i A$ è falsa in s, allora anche $\mathbf{E}_i A$ è falsa in s.

3.3 Osservazioni metodologiche

Come esplicitato nell'introduzione, questa tesi è interessata ad analizzare il ragionamento proprio degli agenti concreti e a definire una nozione di conoscenza che questo tipo di soggetti potrebbe e dovrebbe ricavare da un certo insieme di informazioni.

L'indagine condotta nella Sezione 3.1 espone alcune ragioni che inducono a scartare l'ipotesi di lavoro che consiste nello studio delle logiche epistemiche classiche, e quindi degli agenti idealizzati, con lo scopo di esaminare il ragionamento degli individui concreti. Esclusa la prima ipotesi di lavoro, il metodo che seguo in questa tesi sarà quello di elaborare un nuovo sistema formale in cui le assunzioni di onniscienza logica non siano incompatibili con l'applicazione intesa.

I sistemi presentati nella Sezione 3.2, pur mantenendo gli elementi fondamentali della semantica alla Kripke, risultano da intuizioni differenti. I modelli di Rantala distinguono il punto di vista del teorico da quello del soggetto: sebbene il primo sappia che il mondo attuale soddisfa le leggi logiche, l'individuo può confondersi e considerare nel proprio ragionamento alternative epistemiche che in realtà risultano impossibili. Da un punto di vista concettuale, i modelli di Rantala ammettono che un individuo possa non essere onnisciente e spiegano la sua eventuale ignoranza riguardo ad una conseguenza logica di ciò che conosce nei termini di un errore: questo errore consiste nel ritenere possibili situazioni logicamente impossibili. A questa spiegazione della non-onniscienza come errore, si contrappone la spiegazione della non-onniscienza come inconsapevolezza che emerge invece dal lavoro di Fagin e Halpern (1987): la ragione per cui una persona, pur conoscendo gli assiomi dell'aritmetica di Peano, non conosce una delle loro conseguenze è individuata dai modelli di Rantala nel fatto che l'individuo considera possibile una situazione in cui gli assiomi di Peano sono veri e quella loro conseguenza è falsa, mentre è identificata dalle logiche della consapevolezza nel fatto che l'individuo non è consapevole di quella determinata conseguenza.

La spiegazione di Fagin e Halpern (1987) da un punto di vista intuitivo è più accurata rispetto a quella dei mondi impossibili. Inoltre, essa permette di assumere una prospettiva prescrittiva sulla conoscenza di un determinato enunciato basata non soltanto sul tipo di regole impiegate per determinare la verità di quell'enunciato, ma anche sull'insieme degli enunciati di cui un agente ha consapevolezza: ad esempio, si potrebbe richiedere che un individuo, che conosce gli assiomi dell'aritmetica di Peano e che ha coscienza di un dato enunciato che segue da questi assiomi, conosca esplicitamente quell'enunciato. Tuttavia, una questione che l'approccio di Fagin e Halpern (1987) lascia volutamente aperta, ma la cui soluzione è essenziale per una prospettiva che non sia puramente descrittiva sul ragionamento degli agenti, riguarda il requisito di razionalità minimo per la consapevolezza di un individuo. Le considerazioni condotte nei Capitoli 6 e 7 possono essere interpretate come un tentativo di stabilire un requisito del genere.

Infine, il sistema NPL sostituisce la semantica proposizionale alla base delle logiche epistemiche classiche con una semantica non standard per attenuare in questo modo gli aspetti logici delle assunzioni di onniscienza. Come emergerà dal Capitolo 6, anche D'Agostino e Floridi (2009) formulano una semantica proposizionale non standard per risolvere una variante non modale del problema di onniscienza logica costituito dal paradosso dell'inferenza discusso nel capitolo successivo.

Capitolo 4

Il paradosso dell'inferenza e l'analiticità della logica

Il capitolo precedente ha scartato l'ipotesi di impiegare le logiche epistemiche classiche per studiare indirettamente il ragionamento degli individui concreti e ha discusso alcuni sistemi non standard che attenuano o annullano le assunzioni di onniscienza logica. Condizione essenziale per l'elaborazione di un nuovo sistema formale in grado di studiare il comportamento degli agenti reali è l'identificazione delle cause e delle conseguenze delle assunzioni di onniscienza logico-deduttiva.

Questo capitolo propone un'indagine storico-filosofica del problema dell'onniscienza logica e si basa sul percorso e sugli autori indicati dall'analisi di D'Agostino (2013 b). L'onniscienza logica è descritta come una variante modale del paradosso dell'inferenza che afferma che la conclusione di un'inferenza logica non apporta alcuna novità alle informazioni contenute nelle premesse (Sezione 4.1). Soluzioni e cause del paradosso dell'inferenza possono quindi essere interpretate, *mutatis mutandis*, come soluzioni e cause del problema dell'onniscienza logica.

In particolare, sono esaminate due soluzioni classiche al paradosso dell'inferenza: la prima, di natura psicologista (Sezione 4.1), è diffusa in ambienti neoempiristi; la seconda, di natura non psicologista, è elaborata da Wittgenstein nel *Tractatus* (Sezione 4.2). Entrambe le soluzioni assumono il principio tradizionale, sostenuto in modo deciso dai neopositivisti, che afferma che le verità della logica sono analitiche e tautologiche (Sezione 4.3). Questo dogma neoempirista, preservato persino dalle critiche di Quine, può essere interpretato come la causa prima del paradosso dell'inferenza. La Sezione 4.4 chiarisce il principio di analiticità della logica distinguendo tre accezioni del termine "analitico".

4.1 Il paradosso dell'inferenza

Nel capitolo precedente il problema dell'onniscienza logica è stato caratterizzato come una divergenza tra le assunzioni delle logiche epistemiche classiche e il ragionamento degli agenti concreti: questo scarto è determinato dall'impossibilità per gli individui reali di conoscere tutte le conseguenze logiche di ciò che conoscono. Secondo D'Agostino (2013 b), il problema dell'onniscienza logica può essere interpretato come una traduzione in termini modali del "paradosso dell'inferenza".

Il paradosso dell'inferenza consiste nell'affermare che la conclusione di un'inferenza valida non apporta alcuna informazione nuova rispetto al contenuto delle premesse. Cohen e Nagel (1934) analizzano il paradosso nei termini dell'incompatibilità di due proprietà che apparentemente ineriscono o dovrebbero inerire alle inferenze deduttive, la validità e l'utilità:

> If in an inference the conclusion is not contained in the premises, it cannot be valid; and if the conclusion is not different from the premises, it is useless; but the conclusion cannot be contained in the premises and also possess novelty; hence inferences cannot be both valid and useful. [Cohen e Nagel (1934), pag. 173]

Da un lato, se la conclusione di un'inferenza valida non fosse contenuta nelle premesse, essa sarebbe arbitraria; dall'altro lato però, se la conclusione di un'inferenza non differisse dalle premesse, essa sarebbe inutile in quanto non permetterebbe di accrescere l'informazione di partenza.

Il paradosso dell'inferenza è risolto tradizionalmente individuando un'ambiguità verbale che chiarisce il motivo per cui esso, pur non essendo fallace, appare contrario all'opinione comune. Ad essere equivoca è l'affermazione che la conclusione di un'inferenza deve apportare novità rispetto alle informazioni contenute nelle premesse. Come sottolineano gli stessi Cohen e Nagel (1934), è essenziale distinguere la novità psicologica dalla novità logica della conclusione di un'argomentazione. La validità di un'inferenza è incompatibile con la sua novità logica, non con quella psicologica. Un teorema matematico non asserisce nulla che sia logicamente, oggettivamente o teoreticamente nuovo, ma enuncia una verità di cui prima non si aveva consapevolezza.

Il fatto stesso che gli uomini non riconoscano la conclusione di un argomento con la sola ispezione delle sue premesse è una giustificazione della pratica deduttiva: la logica e la matematica sono interpretate come gli strumenti che permettono esplicare in modo chiaro l'intero contenuto informativo di certi enunciati. Questa posizione è esposta in termini decisi da Hempel (1945):

> Logical deduction — which is the one and only method of mathematical proof — is a technique of conceptual analysis: it discloses what assertions are concealed in a given set of premises, and it makes us realize to what we committed ourselves in accepting those premises; but none of the results obtained by this technique ever goes by one iota beyond the information already contained in the initial assumptions. [Hempel (1945), pag. 20]

Questa soluzione è di natura psicologista e riformula il paradosso nell'affermazione meno controversa che la conclusione di un'inferenza valida non è oggettivamente nuova rispetto alle sue premesse: essa può apparire informativa agli esseri umani sebbene teoreticamente non lo sia. Le inferenze sono valide in virtù della relazione oggettiva di conseguenza logica: gli individui producono inferenze, ma essi scoprono e non producono relazioni di conseguenza logica. L'incompatibilità tra validità e novità di un'inferenza è risolta a scapito della seconda.

Il paradosso dell'inferenza è una variante del problema dell'onniscienza logica perché se tutte le inferenze valide non aumentano le informazioni contenute nelle premesse, allora un agente che conosce tutte le premesse di una certa inferenza non può non conoscerne anche la conclusione. La soluzione psicologista al paradosso dell'inferenza, se tradotta in termini modali, suggerisce che le logiche epistemiche classiche caratterizzano un tipo di agente che non ha alcun limite nel derivare da un insieme di premesse note tutte le sue conseguenze e che per questo non percepisce alcuna novità nelle conclusioni che deriva. La soluzione alla Hempel coincide con la scelta del primo dei due metodi esposti nel Capitolo 3 per colmare la divergenza dell'onniscienza logica tra sistema formale e ragionamento umano, e cioè nel mantere la logica epistemica classica, prendere atto della sua applicabilità ad agenti idealizzati e della sua dubbia utilità in quanto ideale normativo per lo studio degli individui concreti.

La soluzione alla Hempel per il paradosso dell'inferenza è stata criticata da Hintikka (1973) che, dopo aver esposto il paradosso dell'inferenza e averlo rinominato "scandalo della deduzione" in analogia allo scandalo dell'induzione, si sofferma sulle sue conseguenze. In particolare, l'autore si scaglia contro il ruolo che questa soluzione attribuisce alle scienze deduttive:

> If no objective, non-psychological increase of information takes place in deduction, all that is involved is merely psychological conditioning, some sort of intellectual psychoanalysis, calculated to bring us to see better and without inhibitions what objectively speaking is already before our eyes. Now most philosophers have not taken to the idea that philosophical activity is a species of brainwashing. They are scarcely any more favourably disposed towards the much far-fetched idea that all the multifarious activities of a contemporary logician or mathematician that hinge on deductive inference are as many therapeutic exercises calculated to ease the psychological blocks and mental cramps that initially prevented us from being, in the words of one of these candid positivists, 'aware of all that we implicitly asserted' already in the premises of the deductive inference in question. [Hintikka (1973), pag. 233]

Il "candido positivista" in questione è Hans Hahn e, per le ragioni che si vedranno nella Sezione 4.3, è proprio l'empirismo logico l'obiettivo polemico di Hintikka.

4.2 Wittgenstein: notazione perfetta

Un altro tentativo, questa volta di natura non psicologista, per evitare il paradosso dell'inferenza consiste nell'indicare una ragione oggettiva in grado di spiegare perché gli individui ritengono che la conclusione di un'inferenza apporti nuove informazioni rispetto a quelle contenute nelle premesse. Una motivazione del genere è stata individuata nell'imperfezione del linguaggio logico.

Nel *Tractatus logico-philosophicus*, Wittgenstein (1921) solleva il problema della "notazione adeguata", vale a dire di una notazione in cui la struttura grammaticale e la struttura logica di un enunciato coincidono. Ciascun enunciato espresso tramite una notazione adeguata sarebbe in grado, secondo Wittgenstein, di mostrare il proprio significato e cioè le condizioni nelle quali esso è vero o falso. La notazione adeguata dovrebbe indicare le condizioni di verità di ogni enunciato in modo esplicito e, di conseguenza, il riconoscimento delle tautologie e delle inferenze valide sarebbe immediato. In questo modo, la deduzione logica sarebbe ridotta alla sola ispezione degli enunciati. Dice Wittgenstein (1921):

> 5.13. Che la verità d'una proposizione segua dalla verità d'altre proposizioni, lo si vede dalla struttura delle proposizioni.

> 6.122. [...] In una notazione rispondente, noi possiamo riconoscere le proprietà formali delle proposizioni per mera ispezione delle proposizioni stesse.
> 6. 127. [...] Ogni tautologia mostra da sé che è una tautologia.
> [Wittgenstein (1921), pagg. 66, 95, 98]

Come suggeriscono Carapezza e D'Agostino (2010), Wittgenstein propone una notazione adeguata formulando il metodo delle tavole di verità. Il *Tractatus* distingue tra proposizioni elementari e proposizioni complesse, costituite da proposizioni elementari: mentre la verità di una proposizione elementare consiste nell'esistenza o nell'inesistenza di certi fatti del mondo, il valore di verità di una proposizione complessa dipende dalle relazione tra i costituenti elementari che essa contiene. La tavola di verità di una proposizione complessa mostra esplicitamente le sue condizioni di verità nei termini della verità e della falsità delle proposizioni elementari che vi occorrono. Wittgenstein ritiene che le stesse tavole di verità siano dei "segni proposizionali", vale a dire configurazioni di segni che fungono da proposizioni.

La soluzione psicologista alla Hempel per il paradosso dell'inferenza nega un'utilità oggettiva del ragionamento deduttivo, ma accetta che la conclusione di una inferenza possa risultare psicologicamente nuova rispetto alle premesse. La proposta di Wittgenstein invece è quella di esprimere il linguaggio logico attraverso una notazione adeguata: in questo modo, la conclusione di un'inferenza non risulta né oggettivamente nuova, né psicologicamente nuova rispetto alle premesse. La soluzione di Wittgenstein sembra quindi negare ogni possibile utilità del ragionamento deduttivo: una volta che sia stato espresso in un linguaggio logico perfetto, esso si ridurrebbe alla mera ispezione della proposizione. Tradotta in termini modali per risolvere il problema dall'onniscienza logica, la proposta di Wittgenstein equivale ad affermare che in un linguaggio logico perfetto la conoscenza di un insieme di premesse porterebbe immediatamente, tramite la sola ispezione, alla conoscenza della conclusione di un'inferenza.

Tuttavia, il ragionamento di Wittgenstein risulta problematico per almeno due aspetti. In primo luogo, la possibilità di trovare un analogo linguaggio logico perfetto per la logica del prim'ordine è esclusa dal teorema di indecidibilità di Church e Turing. Come sarà mostrato nella Sezione 5.1, Hintikka elabora una nozione di informazione di superficie in grado di aumentare con il ragionamento deduttivo proprio a partire dall'osservazione sull'indecidibilità della logica del prim'ordine e dalla critica nei confronti di misure di informazione non effettivamente calcolabili.

In secondo luogo, con il metodo delle tavole di verità, il numero delle combinazioni possibili dei valori di verità aumenta esponenzialmente al crescere del numero delle proposizioni elementari che occorrono nella proposizione complessa: di conseguenza, le tautologie più complicate non possono essere tradotte in pratica nella notazione adeguata. Questa osservazione sarà chiarita nella Sezione 5.2, in cui si mostreranno la probabile intrattabilità della logica proposizionale classica e le conseguenze di questa congettura sull'idea di un linguaggio logico perfetto.

4.3 Le verità logiche sono analitiche e tautologiche

Come è stato mostrato nella Sezione 4.1, il paradosso dell'inferenza è l'incompatibilità di due proprietà desiderabili per le inferenze logiche: da un lato, la validità come "contenimento" della conclusione nelle premesse; dall'altro, l'utilità come informazione oggettivamente nuova apportata dalla conclusione rispetto alle premesse. Le due soluzioni esaminate, quella psicologista alla Hempel e quella del linguaggio logico perfetto di Wittgenstein, rappresentano le risposte più coerenti e dirette al paradosso per coloro che definiscono la validità di un'inferenza nei termini del contenimento della conclusione nelle premesse.

Anzi, come sostiene D'Agostino (2013 b), sono il paradosso dell'inferenza e il problema dell'onniscienza logica a configurarsi come conseguenze indesiderate del principio tradizionale di analiticità della logica. Questo principio, insieme alla conseguente soluzione alla Hempel per lo scandalo della deduzione, costituisce una delle dottrine fondamentali del positivismo logico il quale, proprio per questa ragione, rappresenta l'obiettivo polemico di Hintikka come indicato nella Sezione 4.1.

Il manifesto del Circolo di Vienna, intitolato *Wissenschaftliche Weltauffassung: der Wiener Kreis* e composto nel 1929 soprattutto da Carnap, Hahn e Neurath, enuncia i principi fondamentali e i temi centrali del movimento. In questo testo la metafisica è criticata per due errori principali: l'uso ingannevole del linguaggio e la confusione sui risultati logici del pensiero. Per quanto attiene al secondo punto, secondo i neoempiristi, la metafisica tradizionale sostiene che la ragion pura, senza alcun ricorso al materiale empirico, è in grado di condurre ad una conoscenza incondizionatamente valida e ritiene che le inferenze che assumono un certo stato di cose sono capaci di apportare nuovi contenuti.

Gli empiristi moderni si oppongono totalmente a questa prospettiva metafisica: da un lato, rifiutano l'esistenza di giudizi sintetici a priori; dall'altro, sostengono il carattere non informativo della logica. La concezione scientifica del mondo classifica quindi tutti gli enunciati dotati di significato in due classi. La prima classe include gli enunciati empirici e verificabili; la seconda gli enunciati analitici della logica e della matematica:

> Logical investigation [...] leads to the result that all thought and inference consists of nothing but a transition from statements to other statements that contain nothing that was already in the former (tautological transformation) [...]
>
> It is precisely in the rejection of the possibility of synthetic knowledge a priori that the basic thesis of modern empricism lies. The scientific world-conception knows only empirical statements about things of all kinds, and analytical statements of logic and mathematics [...]
>
> The conception of mathematics as tautological in character, which is based on the investigation of Russell and Wittgenstein, is also held by the Vienna Circle. [Carnap, Hahn e Neurath (1929), pagg. 308, 311]

Il carattere tautologico della matematica dipende dal carattere analitico della logica e dal grandioso tentativo di Russell di realizzare nei *Principia Mathematica* il sogno fregeano di una fondazione logica della matematica. Le verità della logica, in quanto necessarie e indipendenti dall'esperienza, non possono che essere a priori e quindi, dato il rifiuto dei giudizi sintetici a priori, esse sono analitiche.

Secondo gli empiristi moderni, le verità e le inferenze logiche[1] sono analitiche, cioè vere in virtù del linguaggio, e tautologiche, cioè prive di contenuto informativo. La posizione a cui pervengono gli empiristi moderni discende immediatamente dal paradigma filosofico tradizionale sull'argomento: lo statuto epistemologico di logica e matematica è apparso da subito differente rispetto a quello delle altre discipline. A proposito della logica, Leibniz parla di verità di ragione, Hume di relazioni tra idee e Kant di giudizi analitici a priori. Frege, che contribuisce allo sviluppo degli strumenti formali, non modifica lo statuto analitico della logica,

[1] La giustificazione per l'uso interscambiabile in questo contesto di "verità logiche" e "inferenze logiche" è data dal teorema di deduzione.

che cerca invece di estendere anche alla matematica tramite il suo programma riduzionista. Carnap aveva studiato con Frege e molti tra i membri del Circolo di Vienna partivano da posizioni neokantiane: l'adesione dei positivisti all'assunto sull'analiticità della logica sembra naturale.

L'attacco più deciso nei confronti dell'epistemologia neopositivistica è elaborato da Quine (1951) nel celebre articolo intitolato *Two dogmas of empiricism.* I due principi in oggetto sono la distinzione tra analitico e sintetico e il riduzionismo. A proposito del primo dogma, Quine scrive:

> Statements which are analytic by general philosophical acclaim [...] fall into two classes. Those of the first class, which may be called *logically true*, are typified by: (1) No unmarried man is married. The relevant feature of this example is that it is not merely true as it stands, but remains true under any and all reinterpretations of 'man' and 'married'. [...] In general a logical truth is a statement which is true and remains true under all reinterpretations of its components other than the logical particles.
>
> But there is also a second class of analytic statements, typified by: (2) No bachelor is married. The characteristic of such a statement is that it can be turned into a logical truth by putting synonyms for synonyms; thus (2) can be turned into (1) by putting 'unmarried man' for its synonym 'bachelor'.
>
> We still lack a proper characterization of this second class of analytic statements, and therewith of analyticity generally, inasmuch as we have had in the above description to lean on a notion of synonymy which is no less in need of clarification than analyticity itself. [Quine (1951), pag. 23]

La celebre critica di Quine sulla distinzione degli enunciati analitici da quelli sintetici non si applica quindi allo statuto delle verità della logica: nei *Due dogmi*, l'autore sostiene, in linea con gli empiristi moderni, che le asserzioni della logica sono analitiche. Le obiezioni di Quine nei confronti dell'analiticità in generale discendono dall'impossibilità di dare una definizione non circolare della seconda classe di enunciati analitici: per questi ultimi, il concetto di analiticità, cioè di vero in virtù del significato, presuppone quello di sinonimia, mentre questo, a sua volta, non è definibile senza il ricorso alla nozione di analiticità. L'insostenibilità della distinzione generale tra analitico e sintetico deriva anche dalla critica al riduzionismo, la tesi cioè che ogni asserzione sia associata a un insieme di esperienze in grado di verificarla o di falsificarla. In opposizione al riduzionismo neoempirista, Quine afferma l'idea per cui le teorie scientifiche sono connesse all'esperienza soltanto nella loro interezza e non asserzione per asserzione. In questa prospettiva olistica, il tentativo di suddividere gli enunciati tra una classe di asserzioni strettamente empiriche e un'altra classe di asserzioni analitiche non soltanto è vano, ma è anche errato.

D'Agostino (2013 b) nota che Quine (1974), nel suo testo *Roots of Reference*, mostra alcune aperture verso la possibilità dell'esistenza di inferenze logiche sintetiche. Il dubbio riguardo all'analiticità di tutte le leggi logiche sorge per Quine osservando il disaccordo che permane riguardo alla validità di alcune di esse, come, ad esempio, la critica degli intuizionisti nei confronti del principio del terzo escluso. Tuttavia, l'ultimo Quine non sviluppa questa intuizione degli anni Settanta: al contrario, nell'articolo del 1991, *Two dogmas in retrospet*, l'autore ribadisce il carattere analitico di tutte le leggi logiche. Pertanto, si può concludere che anche il critico più noto e acuto del dogma neoempirista di una netta divisione tra enunciati analitici e sintetici, Quine appunto, non ha posto in discussione il principio tradizionale per cui tutte le verità logiche sono analitiche e tautologiche

4.4 Analiticità

La sezione precedente ha esaminato il principio neoempirista per cui le verità della logica sono analitiche. D'Agostino e Floridi (2009), riprendendo il lavoro di Hintikka (1973), distinguono alcune accezioni in cui il termine "analitico" può essere impiegato per qualificare il ragionamento logico deduttivo:

i. *Accezione informazionale.* Un'inferenza è detta analitica se l'informazione conferita dalla sua conclusione è "contenuta" nelle informazioni conferite dalle sue premesse.

ii. *Accezione semantica.* Un'inferenza è detta analitica se la sua correttezza dipende soltanto dal significato degli operatori logici che occorrono nelle sue premesse e nella sua conclusione.

iii. *Accezione sintattica.* Una deduzione formale è detta analitica se rispetta il principio della sottoformula, per cui ogni formula che occorre nella deduzione è una sottoformula del teorema che deve essere dimostrato.

Nella sua prima accezione, il termine "analitico" sembra significare semplicemente "non informativo" e "tautologico". Le citazioni riportate nelle sezioni precedenti, in particolare i passi di Cohen e Nagel (1934), Hempel (1945) e Carnap, Hahn e Neurath (1929), suggeriscono la diffusione del senso informazionale del termine "analitico" e della sua caratteristica metafora di "contenimento" delle premesse nella conclusione.

L'impiego della nozione di analiticità in senso informazionale dovrebbe però essere accompagnato da una teoria dell'informazione semantica che specifichi la nozione di contenuto informativo di un enunciato. Una teoria del genere per la logica classica è stata formulata, ad esempio, da Bar-Hillel e Carnap (1953). Nella "Teoria dell'informazione semantica debole", il contenuto semantico (CONT) di un enunciato B è definito come il complemento della probabilità a priori di B:

$$\text{CONT } (B) = 1 \text{ - } Pr(B)$$

CONT non soddisfa i requisiti di addittività e condizionalizzazione, i quali però sono soddisfatti dalla seguente misura di informatività (INF):

$$\text{INF } (B) = \log \frac{1}{1 - \text{CONT } (B)} = 1 \text{ - } \log Pr(B)$$

L'approccio modale interpreta la misura di informazione semantica di un enunciato B nei termini delle possibilità che esso esclude. Ogni inferenza della logica classica equivale, tramite il teorema di deduzione, ad una tautologia. Le tautologie però non consentono di escludere alcuna possibilità, perché, per definizione, esse sono vere in tutti i mondi possibili. Di conseguenza, tutte le inferenze valide non hanno alcun contenuto informativo e sono analitiche in senso informazionale.

Oltre alla versione informazionale del paradosso dell'inferenza appena esposta, la teoria dell'informazione semantica debole porta ad un'altra conseguenza indesiderata, che Floridi (2004) chiama "paradosso di Bar-Hillel e Carnap". Dato che minore è la probabilità di un enuciato B, maggiore è l'informazione che B conferisce, le contraddizioni contengono la quantità massima di informazione semantica: CONT $(\perp) = 1$. Questo aspetto della teoria è però paradossale, perché nessun individuo sarebbe disposto ad accettare un'informazione contraddittoria. Di qui la proposta di Floridi di una teoria dell'informazione semantica forte che si basa sull'assunzione che "l'informazione racchiude la verità" e che quindi non esiste informazione falsa, ma solo disinformazione o misinformazione. La teoria di Floridi risolve il paradosso di Bar-Hillel e Carnap, ma accetta l'analiticità informazionale delle deduzioni logiche come una conseguenza inevitabile di ogni teoria quantitativa dell'informazione semantica.

La seconda accezione del termine "analitico" è solitamente accompagnata da una teoria sul significato degli operatori logici. Ad esempio, per la logica proposizionale classica, il significato dei connettivi, e quindi la loro definizione, può essere specificato tramite le tavole di verità.

L'accezione semantica del termine "analitico", che è alla base della suddivisione delle verità analitiche in logiche e non-logiche evidenziata da Quine (1951) ed esaminata nella Sezione 4.3, risale a Frege. In *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege sviluppa e precisa la nozione kantiana di analiticità, enunciata nei termini del "contenimento" del predicato nel soggetto, tramite i nuovi strumenti della logica simbolica moderna. Il linguaggio formale distingue tra costanti logiche, che non hanno un significato se considerate isolatamente, e termini non-logici, come gli enunciati. È questa articolazione del linguaggio a permettere la definizione delle verità logiche come enunciati veri indipendentemente dalle espressioni non-logiche che vi occorrono e la definizione delle verità analitiche e non-logiche come enunciati che possono essere convertiti in verità logiche sostituendo termini con sinonimi. La verità degli enunciati analitici, dato che non dipende dal significato delle proposizioni presenti in essi, discende soltanto dal significato degli operatori logici che vi occorrono.

Il terzo senso del termine "analitico", quello sintattico, è il più chiaro, in quanto dipende da nozioni tecniche, quale la definizione di sottoformula. Intuitivamente, una deduzione è analitica se e solo se è costituita soltanto da passaggi analitici. I passaggi di una deduzione sono analitici se, invece di introdurre concetti o individui nuovi, scompongono le premesse nei loro elementi di base, i quali poi vengono ricombinati per ottenere il teorema finale.

Chiaramente, il significato del concetto di analiticità sintattica dipende dal metodo di deduzione impiegato. Ad esempio, il calcolo dei sequenti LK per la logica classica, introdotto da Gentzen (1934), assicura la validità dell'*Hauptsatz*: ciascuna dimostrazione può cioè essere trasformata in una dimostrazione in cui non è impiegata la regola del taglio. La regola del taglio è definita come segue:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad A, \Sigma \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Pi} \text{ (T)}$$

Il punto è che nella regola (T) la formula A che occorre nelle premesse, detta formula di taglio, può non essere una sottoformula delle formule in $\Gamma, \Sigma \Rightarrow \Delta, \Pi$. Viceversa, le dimostrazioni in cui non è impiegata la regola del taglio soddisfano il principio della sottoformula, vale a dire ogni sequente nella dimostrazione contiene soltanto sottoformule del sequente da dimostrare. Quindi, tutte le deduzioni del sistema LK possono essere trasformate in deduzioni in cui non occorre la regola del taglio: queste ultime sono deduzioni analitiche in senso sintattico.

Come affermano D'Agostino e Floridi (2009), le inferenze della logica proposizionale classica sono analitiche in tutte e tre le accezioni appena discusse: l'analiticità informazionale è mostrata dalle teorie classiche dell'informazione semantica, l'analiticità semantica dalla definizione degli operatori logici e l'analiticità sintattica da sistemi di prova come il calcolo dei sequenti LK.

Capitolo 5

Critiche al carattere tautologico delle inferenze logiche

Come osserva D'Agostino (2013 b) sulla scorta di Dummett (1991), il principio di analiticità della logica è la fondazione più forte per la pratica deduttiva: la deduzione logica è un metodo infallibile per trasmettere la verità delle premesse alla conclusione per la semplice ragione che la conclusione non aggiunge nulla di nuovo alle informazioni contenute nelle premesse. Tuttavia, questa giustificazione del metodo deduttivo comporta la rinuncia al carattere informativo della logica.

Viceversa, una apertura nei confronti della possibilità di inferenze sintetiche in logica, come quella esibita da Quine in *Roots of Reference* (Sezione 4.3), permetterebbe di risolvere il paradosso dell'inferenza a favore del secondo corno del dilemma e cioè riconoscendo il carattere informativo delle inferenze logiche.

Il lavoro di Hintikka, raccolto perlopiù nella seconda parte del testo del 1973 *Logic, Language Games and Information. Kantian Themes in the Philosophy of Logic*, può essere interpretato come un tentativo di individuare una classe di verità logiche sintetiche a priori, il cui riconoscimento comporta un aumento dell'informazione iniziale. Questa sfida al principio di analiticità della logica consiste nella definizione di una nozione di informazione, detta di superficie, che può essere accresciuta dal ragionamento deduttivo. Dal momento che muove dal risultato di indecidibilità della logica classica del prim'ordine, la proposta di Hintikka include nella classe delle verità logiche sintetiche a priori soltanto alcune formule con predicati poliadici, ma ribadisce il carattere tautologico e analitico di tutte le verità della logica proposizionale classica (Sezione 5.1).

Tuttavia, mentre la logica del prim'ordine è indecidibile, la logica booleana è con ogni probabilità praticamente indecidibile. Quest'ultima osservazione è una conseguenza della congettura, formulata nell'ambito della teoria della complessità computazionale, che nega l'identità tra le classi di complessità **P** e **NP** (Sezione 5.2). La (probabile) indecidibilità della logica proposizionale classica è una ragione per negarne il carattere analitico e tautologico: se la logica proposizionale classica è molto probabilmente intrattabile, come è possibile sostenere che le sue inferenze non siano informative? Questa congettura induce perciò a ritenere che la proposta di Wittgenstein (Sezione 4.2) non sia applicabile e che la proposta di Hintikka sia incompleta.

5.1 Hintikka: informazione di superficie

Sebbene l'idea di Wittgenstein di un linguaggio logico perfetto sembri funzionare per la logica proposizionale classica, il teorema di Church e Turing sull'indecidibilità della logica classica del prim'ordine suggerisce l'inesistenza di un algoritmo in grado di tradurre ogni enunciato in una notazione adeguata che permetta di decidere immediatamente tutte le verità logiche. Hintikka (1973) critica la teoria dell'informazione semantica di Bar-Hillel e Carnap proprio perché essa impiega misure di informazione che non sono effettivamente calcolabili:

> But measures of information which are not effectively calculable are well-nigh absurd. What realistic use can there be for measures of information which are such that we in principle cannot always know (and cannot have a method of finding out) how much information we possess? One of the purposes the concept of information is calculated to serve is surely to enable us to review what we know (have information about) and what we do not know. Such a review is in principle impossible, however, if our measures of information are non-recursive. [Hintikka (1973), pag. 228]

Hintikka propone quindi un'alternativa alla teoria classica dell'informazione semantica e distingue due significati di informazione entrambi assolutamente oggettivi e non psicologici. Da un lato, l'"informazione profonda" che coincide con l'informazione semantica di Bar-Hillel e Carnap; dall'altro, l'"informazione di superficie" che nella logica poliadica del prim'ordine può essere accresciuta tramite il ragionamento deduttivo ed è effettivamente computabile. Mentre l'informazione profonda giustifica il carattere tradizionalmente tautologico della logica, l'informazione di superficie rivendica l'intuizione opposta.

La proposta di Hintikka è l'unica tra quelle finora esaminate che cerca di risolvere il paradosso dell'inferenza ammettendo che esiste un senso oggettivo e non psicologico in cui la deduzione accresce l'informazione di partenza, vale a dire in cui la conclusione di un'inferenza è teoreticamente nuova rispetto alle sue premesse.

5.1.1 La teoria delle forme normali distributive

Le nozioni di informazione profonda e di superficie sono introdotte da Hintikka (1973) tramite la teoria delle forme normali distributive, di cui espongo l'idea fondamentale.

L'informazione di una formula F della logica poliadica del prim'ordine è determinata dalle possibilità riguardo al mondo che questa esclude e, per contrapposizione, dalle possibilità che F ammette. Quest'ultimo insieme è ciò che rappresenta la forma normale di F, vale a dire le possibilità mutualmente esclusive rappresentate dai suoi costituenti. In altri termini, la forma normale distributiva di F è la disgiunzione dei suoi costituenti, e cioè è la disgiunzione delle descrizioni dei mondi possibili in cui F è vero.

Un costituente della forma normale di un enunciato poliadico del prim'ordine è determinato da tre parametri: P1) l'insieme di tutti i predicati presenti in esso; P2) l'insieme di tutti i simboli individuali liberi presenti in esso; e P3) la sua profondità definita come la lunghezza massima delle successioni di quantificatori incassati presenti in esso o, equivalentemente, come il numero di strati di quantificatori che esso contiene.

Ciascun costituente di profondità d, $C^{(d)}$, può essere espresso da una disgiunzione di costituenti subordinati di profondità $d + 1$, $C_i^{(d+1)}$ introducendo un quantificatore esistenziale e sostituendo un individuo libero con una variabile vincolabile.

Il teorema di completezza per le forme normali distributive, dimostrato da Hintikka (1973) nei paragrafi 15-17 dell'XI Capitolo, indica che l'inconsistenza di un costituente può essere sempre resa manifesta aumentandone la profondità: esso afferma infatti che esiste una profondità $e \geq d$ in cui può essere riconosciuta l'inconsistenza di tutti i costituenti di un insieme X e questo avviene quando tutti i costituenti subordinati di profondità e sono banalmente inconsistenti. Nella transizione dalla profondità d alla profondità e, le possibilità inconsistenti (che sono elementi di X) sono riconosciute come possibilità meramente apparenti. Tuttavia, a causa dell'indecidibilità del calcolo poliadico dei predicati, non si può sapere a quale profondità è necessario espandere un costituente per rendere banale la sua inconsistenza.

Hintikka definisce quindi la nozione di informazione profonda attraverso la nozione di probabilità profonda e la nozione di informazione di superficie attraverso la nozione di probabilità di superficie.

La misura della probabilità profonda assegnata ad un costituente $C^{(d)}$ viene distribuita tra tutti i costituenti consistenti subordinati a $C^{(d)}$ di profondità $d + 1$. L'informazione profonda di un enunciato non è effettivamente calcolabile dal momento che non è possibile isolare i costituenti inconsistenti del calcolo dei predicati. Infatti, la capacità di isolare i costituenti inconsistenti del calcolo dei predicati equivarrebbe alla decidibilità del calcolo dei predicati, esclusa dal teorema di Church e Turing.

La misura della probabilità di superficie assegnata ad un costituente $C^{(d)}$ è distribuita invece tra tutti i costituenti subordinati consistenti e non-banalmente inconsistenti. L'informazione di superficie è quindi il tipo di informazione che risulta dal riconoscimento delle possibilità inconsistenti come possibilità meramente apparenti e quindi dall'eliminazione dei costituenti non-banalmente inconsistenti.

5.1.2 La doppia natura dell'informazione di superficie

Hintikka sostiene una doppia natura dell'informazione di superficie: da un lato, essa è informazione sulla realtà perché consente di escludere l'esistenza di individui in determinati rapporti con altri individui; dall'altro lato, essa è informazione concettuale perché l'esistenza di costituenti non-banalmente inconsistenti è una caratteristica del sistema concettuale, cioè del rapporto fra gli enunciati del prim'ordine e la realtà di cui essi parlano. Di conseguenza, l'informazione di superficie sembra sintetica per il fatto che concerne la realtà e a priori per la sua natura concettuale:

> When we use a first-order language to communicate, to register, or to store information about some aspects of reality, certain merely apparent alternatives concerning the world are normally involved. Eliminating some of them at one stroke enhances *both* our appreciation of

> the reality *and* our appreciation of our own conceptual system. The deep fact here is that we are relying on the mediation of a certain conceptual system in order to 'reach' the reality. The better we know the way this conceptual system works, the more efficiently we can *ipso facto* use it to discuss (describe, anticipate, etc.) the reality. [...] The inevitability of this dual nature of surface information is due to the undecidability of first-order logic. What this undecidability shows is that it is impossible to master the conceptual system once and for all so as to be able to concentrate exclusively on purely factual information (depth information). [Hintikka (1973), pagg. 234-235]

Lo statuto epistemologico dell'informazione di superficie si oppone alla tesi fondamentale dei neoempiristi che rifiuta la possibilità di una conoscenza sintetica a priori e rappresenta una soluzione al paradosso dell'inferenza priva di accenti psicologisti e tutta in favore di un'utilità oggettiva del ragionamento deduttivo.

Tuttavia, i limiti della soluzione proposta da Hintikka risultano evidenti osservando che nel caso della logica proposizionale classica le due nozioni di informazione coincidono: di conseguenza, nella logica proposizionale classica, l'informazione di superficie non può essere accresciuta dal ragionamento deduttivo.

Hintikka sostiene, seguendo in questo i neopositivisti, che le verità della logica proposizionale sono tautologie che non conferiscono alcuna informazione e coerentemente afferma che nelle inferenze logicamente valide della logica proposizionale l'informazione conferita dalle conclusioni è minore o uguale a quella conferita dalle premesse. Analogo è il caso della logica monadica del prim'ordine: i costituenti inconsistenti cominciano ad apparire soltanto quando il grado di un costituente è maggiore o uguale a due; quando questo grado è uno, la situazione è uguale a quella della logica proposizionale classica.

5.2 La (probabile) intrattabilità della logica proposizionale classica

Le proposte non psicologiste di Wittgenstein e di Hintikka per risolvere il paradosso dell'inferenza non scalfiscono il principio neoempirista che afferma il carattere analitico e tautologico di tutte le inferenze della logica proposizionale classica.

Tuttavia, come notano D'Agostino e Floridi (2009), vi è una ragione molto forte per ritenere che la conclusione di un'inferenza della logica proposizionale classica apporti nuove informazioni non contenute nelle premesse. Questa motivazione proviene dalla teoria della complessità computazionale: una congettura ampiamente accettata sostiene infatti che il problema di determinare la soddisfacibilità o la tautologicità di un enunciato booleano è molto probabilmente intrattabile o praticamente indecidibile: ciò significa che qualunque individuo reale, provvisto di un computer che esegue la procedura di decisione per la logica booleana, è in grado di riconoscere soltanto in teoria, ma non in pratica, le conclusioni di un insieme di premesse. La (probabile) intrattabilità della logica proposizionale classica esprime in termini chiari l'intuizione che esistono alcune inferenze logiche tanto difficili da non poter essere risolte nella pratica.

5.2.1 La congettura

Sulla base del testo di Garey e Johnson (1979), presento ora la congettura dell'intrattabilità della logica proposizionale classica per poterne sottolineare l'opposizione al presunto carattere tautologico delle inferenze proposizionali classiche.

In generale, un problema di decisione è una domanda che ammette una risposta positiva o negativa ed è rappresentato da una classe di stringhe di simboli, dove ciascuna stringa identifica una istanza particolare del problema. Ad esempio, il problema della tautologia (TAUT) è rappresentato dall'insieme di formule ben formate di un linguaggio logico standard, ogni enunciato è un'istanza del problema la cui soluzione è positiva (indicata da 1) se la stringa in questione è una tautologia oppure una risposta negativa (0) se non lo è.

Un algoritmo è una procedura meccanica che risolve un problema di decisione se fornisce una soluzione per ogni istanza del problema. Il fattore principale per determinare l'efficienza di un algoritmo è il tempo necessario per eseguirlo. La funzione di complessità temporale di un algoritmo misura il numero massimo di passi che l'algoritmo deve eseguire per ogni possibile lunghezza dell'input. La lunghezza dell'input di un'istanza di un problema è definita dal numero di simboli che codificano l'istanza in questione.

Una funzione $f(n)$ è $\mathcal{O}(g(n))$ ogni volta che esiste una costante c tale che $|f(n)| \leq c|g(n)|$ per ogni $n \geq 0$. Un algoritmo è detto di tempo polinomiale se la sua funzione di complessità temporale è $\mathcal{O}(p(n))$ per qualche funzione polinomiale p, dove n rappresenta la lunghezza dell'input. Qualunque algoritmo la cui funzione di complessità temporale non può essere rappresentata in questo modo è detto di tempo esponenziale.

Un problema di decisione è detto trattabile, e cioè risolvibile in pratica, se può essere risolto da un algoritmo di tempo polinomiale; altrimenti è detto intrattabile. **P** è la classe di tutti i problemi di decisione che possono essere risolti in tempo polinomiale da algoritmi deterministici, e cioè da algoritmi che definiscono, ad ogni passo dell'esecuzione, una e una sola operazione da svolgere al passo successivo.

Complementare al problema della tautologia è il problema della soddisfacibilità (SAT): data una formula booleana che esprime un enunciato B, SAT consiste nel determinare se esiste una valutazione delle proposizioni atomiche che occorrono in B tale che B sia vero. Dato che una formula è vera se e solo se la sua negazione è falsa, una formula è soddisfacibile se e solo se la sua negazione non è una tautologia.

Per risolvere un'istanza del problema SAT, è necessario impiegare un algoritmo non deterministico, e cioè un algoritmo costituito da due fasi separate: la prima, detta fase di supposizione, assegna una valutazione casuale alle proposizioni atomiche dell'enunciato in questione; la seconda, detta fase di controllo, verifica se tale valutazione rende vero l'enunciato. La funzione di complessità temporale di un algoritmo non deterministico misura il numero massimo di passi che l'algoritmo deve eseguire per ogni possibile lunghezza dell'input, nel caso in cui le supposizioni conducono a fornire una risposta positiva al problema. **NP** è la classe dei problemi di decisione che possono essere risolti in tempo polinomiale da un algoritmo non deterministico: intuitivamente, **NP** include tutti i problemi per cui è possibile verificare in tempo polinomiale la correttezza di una presunta prova che la soluzione sia positiva. Il problema della soddisfacibilità appartiene a **NP**: una valutazione che rende vero un enunciato è interpretata come una prova della soddisfacibilità dell'enunciato in questione, la cui correttezza può essere verificata in tempo polinomiale.

La relazione che sussiste tra le classi **P** e **NP** è la più grande delle questioni irrisolte nella teoria della complessità computazionale. Da un lato, è chiaro che tutti i problemi di decisione appartenenti alla classe **P** sono inclusi in **NP**, perché qualunque algoritmo deterministico può essere impiegato come fase di controllo di un algoritmo non deterministico. Dall'altro lato però non è stato ancora dimostrato né che $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$, né che $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$. Tuttavia, la maggior parte dei ricercatori assume che $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ e impiega questa congettura come se fosse stata dimostrata: ciò significa che comunemente si assume che non sia possibile trovare, per ogni problema in **NP**, un algoritmo deterministico in grado di risolverlo in tempo polinomiale.

Ciò vale in particolare per i problemi **NP**- completi, ossia i problemi più difficili della classe **NP**. Un problema di decisione Π è detto **NP**-completo se e solo se Π appartiene a **NP** e ogni problema di decisione $\Pi' \in \mathbf{NP}$ può essere trasformato in tempo polinomiale in Π, vale a dire esiste un algoritmo di tempo polinomiale per tradurre ogni istanza I' di Π' in un'istanza I di Π in modo tale che I' è un'istanza positiva di Π' se e solo se I è un'istanza positiva di Π. I problemi **NP**-completi sono equivalenti nel senso che possono essere mutualmente trasformati in tempo polinomiale.

Di conseguenza, se si riuscisse a trovare un algoritmo deterministico di tempo polinomiale in grado di risolvere un problema **NP**-completo, e cioè se un problema **NP**-completo appartenesse a **P** e fosse quindi trattabile, allora si potrebbe concludere l'appartenenza di tutti i problemi di **NP** in **P**, vale a dire si potrebbe dedurre la trattabilità di tutti i problemi di **NP**. Tuttavia, la congettura $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ porta ad assumere che tutti i problemi **NP**-completi siano intrattabili.

Cook (1971) fonda la teoria della completezza **NP** dimostrando che in un linguaggio booleano standard il problema della soddisfacibilità è **NP**-completo. È quindi altamente probabile che SAT sia un problema intrattabile. Inoltre, dato che un enunciato è una tautologia se e solo se la sua negazione non è soddisfacibile, anche il problema della tautologia è verosimilmente intrattabile, cioè non risolvibile nella pratica, dal momento che appartiene alla classe di problemi co-**NP**-completi.

5.2.2 Conseguenze

La presunta intrattabilità della logica proposizionale classica è un argomento molto forte contro il carattere tautologico della logica proposizionale classica: il fatto che, con ogni probabilità, un individuo non possiede realmente l'informazione che la conclusione di un'inferenza è vera ogni volta che possiede l'informazione che le sue premesse sone vere esclude che la conclusione di un'inferenza non aggiunga alcuna informazione alle premesse.

La probabile complessità computazionale della logica proposizionale classica chiarisce e rivendica le due intuizioni che nei capitoli precedenti abbiamo mostrato essere in contrasto con il principio di analiticità della logica: la prima intuizione consiste nel considerare le deduzioni logiche utili proprio in quanto aumentano l'informazione di partenza; la seconda intuizione consiste nel riconoscere l'impossibilità per gli individui concreti di raggiungere l'onniscienza logica.

Se si nega il carattere tautologico della logica proposizionale classica, è possibile risolvere lo scandalo della deduzione sostenendo che le inferenze valide (e non analitiche) possono accrescere l'informazione di partenza. In modo analogo, il problema dell'onniscienza logica può essere risolto affermando che un agente è tenuto a conoscere soltanto le conseguenze logiche trattabili di ciò che conosce.

D'Agostino e Floridi (2009) ritengono che questa obiezione di natura computazionale al principio di analiticità della logica mostri anche l'inefficacia delle soluzioni proposte da Wittgenstein e da Hintikka.

Infatti, come affermano Carapezza e D'Agostino (2010), se in un linguaggio logico perfetto LP le tautologie possono essere riconosciute tramite la sola ispezione, e cioè se esiste perlomeno un algoritmo di tempo polinomiale per poter compiere un tale riconoscimento, allora, dati il teorema di Cook e la congettura $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$, è altamente improbabile che esista una traduzione fattibile dal linguaggio logico ordinario a LP. Infatti, la sua esistenza, continuano gli autori, implicherebbe l'esistenza di un algoritmo deterministico di tempo polinomiale in grado di risolvere il problema della tautologia nel linguaggio logico standard, ma ciò è escluso dalla congettura corrente.

Hintikka respinge la tautologicità della logica del prim'ordine sulla base della sua indecidibilità. Tuttavia, sostengono D'Agostino e Floridi (2009), la tautologicità della logica proposizionale classica, ammessa dalla proposta di Hintikka, è viceversa da respingere sulla base della sua probabile indecidibilità pratica. Gli autori riformulano quindi l'obiezione di Hintikka nei confronti della tautologicità della logica del prim'ordine (Sezione 5.1) ottenendo una critica al risultato stabilito dallo stesso Hintikka nel campo della logica proposizionale classica:

> Measures of information which are not *feasibly* calculable are well-nigh absurd. What realistic use can there be for measures of information which are such that we *in practice* cannot always know (and cannot have a method of finding out) how much information we possess? One of the purposes the concept of information is calculated to serve is surely to enable us to review what we know (have information about) and what we do not know. Such a review is *practically* impossible, however, if our measures of information are *intractable*. [D'Agostino e Floridi (2009), pag. 279]

Il lavoro di Hintikka muove dalla considerazione dei problemi indecidibili e non di quelli praticamente indecidibili. Di conseguenza, la misura dell'informazione di superficie non aumenta con le inferenze proposizionali in quanto non tiene conto della questione dell'intrattabilità del calcolo proposizionale classico.

Capitolo 6

Logiche booleane a profondità limitata

6.1 Una nozione di informazione trattabile

Nella Sezione 5.2 è stato mostrato il contrasto, che emerge nel paradosso dell'inferenza, tra il principio tradizionale per cui le inferenze logiche sono analitiche e tautologiche e la probabile intrattabilità della logica proposizionale classica: se la logica proposizionale classica è (molto probabilmente) intrattabile, come è possibile sostenere che le sue inferenze non siano informative? D'Agostino e Floridi (2009) propongono una nozione di informazione che si fonda sul principio seguente, detto "requisito di manifestazione forte":

> *Strong Manifestability.* If an agent a grasps the meaning of a sentence φ, then a should be able to tell, in practice and not only in principle, whether or not (s)he holds the information that φ is true, or the information that φ is false or neither of them. [D'Agostino (2013 b), pag. 49]

Questo principio assume che qualunque agente abbia un controllo totale del proprio stato informativo, e cioè che ciascun individuo abbia un accesso reale alle informazioni in esso contenute. Gli autori formulano una teoria semantica, detta "semantica informazionale", che soddisfa il principio di manifestazione forte dal momento che il significato degli operatori logici è specificato esclusivamente nei termini delle informazioni di cui un agente dispone realmente.

La semantica informazionale, opponendosi al dogma neoempirista sull'analiticità di tutte le verità logiche, traccia una chiara demarcazione tra inferenze analitiche e inferenze sintetiche. Nelle prime la conclusione dipende soltanto dal significato informazionale degli operatori logici che occorrono nelle premesse. Le seconde sono invece caratterizzate da un impiego di alcune intuizioni, dette "informazioni virtuali", che rappresentano il tipo di assunzioni temporanee e necessarie in ogni ragionamento per casi. Le informazioni virtuali, non essendo contenute nelle premesse, vanno oltre il significato informazionale degli operatori logici: le inferenze sintetiche, di conseguenza, comportano un aumento della conoscenza iniziale.

La nozione di inferenza sintetica è graduale: un'inferenza può essere detta sintetica di grado k se e solo se k è il numero minimo di informazioni virtuali innestate necessarie per ottenere la conclusione dalle sue premesse. Il grado di sinteticità di un'inferenza è una traduzione formale dell'idea intuitiva di grado di difficoltà logica di un'inferenza e dipende quindi dallo sforzo cognitivo e dalle risorse computazionali necessarie per riconoscerne la validità. L'idea fondamentale degli autori è che è proprio l'uso delle informazioni virtuali nelle regole che definiscono gli operatori logici a determinare l'intrattabilità del loro significato classico.

Da un punto di vista formale, l'approccio di D'Agostino e Floridi (2009) è costituito dalla formulazione di nuovi sistemi logici, chiamati "logiche booleane a profondità limitata", che costituiscono un approccio incrementale alla caratterizzazione della logica proposizionale classica, la quale risulta come limite di una sequenza infinita di logiche più deboli e trattabili. Questa gerarchia di logiche rappresenta livelli crescenti di profondità o di informatività del ragionamento classico: l'aumento del grado di complessità computazionale è associato al grado di profondità in cui è permesso l'impiego di informazioni virtuali.

L'approccio delle logiche booleane a profondità limitata risolve il paradosso dell'inferenza impiegando la stessa strategia generale adottata da Hintikka (1973) (Sezione 5.1): anche D'Agostino e Floridi partono da una nozione di informazione pratica e, come Hintikka, distinguono diversi gradi di profondità informazionale. Nell'approccio degli autori infatti il livello di profondità maggiore coincide con l'informazione semantica di Bar-Hillel e Carnap: è intrattabile e non può essere aumentata tramite il ragionamento deduttivo. Al contrario, il livello più superficiale, caratterizzato dalla logica booleana a profondità zero, è trattabile e può crescere tramite il ragionamento deduttivo. Tuttavia, se la proposta di Hintikka si applica soltanto ad una classe definita di predicati poliadici del prim'ordine, le logiche booleane a profondità limitata sono invece proposizionali.

Da un punto di vista formale, le logiche booleane a profondità limitata risolvono il paradosso dell'inferenza restringendo progressivamente la nozione classica di conseguenza logica in analogia alla proposta di Fagin, Halpern, Vardi (1995) (Sezione 3.2.2). Tuttavia, mentre esiste una procedura di decisione in tempo polinomiale per il frammento CNF del linguaggio del sistema NPL, il problema di decisione per il linguaggio di NPL nel suo complesso è **NP**-completo. Inoltre, il sistema NPL, essendo strettamente legato alle logiche rilevanti, respinge la validità del sillogismo disgiuntivo, ammesso invece in tutte le logiche booleane a profondità limitata. Infine, il sistema NPL, a differenza delle logiche booleane a profondità limitata, non ammette una classificazione delle inferenze in base alla loro difficoltà computazionale.

Inoltre, ciascuna logica booleana a profondità limitata può essere interpretata come l'imposizione di un requisito sulla funzione di consapevolezza dell'agente definita nei sistemi di consapevolezza formulati da Fagin e Halpern (1987) (Sezione 3.2.3). Il requisito di razionalità minimo sulla funzione di consapevolezza di un agente sarebbe rappresentato quindi dal riconoscimento delle conseguenze analitiche o delle conseguenze logiche a profondità zero (Sezione 6.2.1).

In questo capitolo, presento la semantica (Sezione 6.2) e il sistema di deduzione naturale (Sezione 6.3) per le logiche a profondità limitata: mi soffermo soprattutto sulle motivazioni e le idee fondamentali degli autori e propongo soltanto gli elementi formali essenziali alla comprensione di quest'approccio. In particolare, per rendere più esplicito il confronto con il caso classico, non introduco le formule segnate adoperate perlopiù nei lavori originali. Le logiche booleane a profondità limitata che espongo in questo capitolo sono formulate, motivate e discusse nei seguenti articoli: D'Agostino e Floridi (2009), D'Agostino (2010), D'Agostino (2013 a), D'Agostino (2013 b), D'Agostino, Finger e Gabbay (2013) e D'Agostino (2014).

6.2 Semantica informazionale

6.2.1 Inferenze analitiche: la logica booleana a profondità zero

Con "semantica informazionale", D'Agostino e Floridi indicano una teoria del significato degli operatori logici che si basa su due nozioni epistemiche primitive: "l'agente a possiede realmente l'informazione che B è vero" e "l'agente a possiede realmente l'informazione che B è falso".

In accordo con il principio di manifestazione forte (Sezione 6.1), affermando che "l'agente a possiede realmente l'informazione che B è vero", si intende asserire che l'agente a ha una procedura realizzabile per ottenere questa informazione e che B è praticamente disponibile per a e rappresenta un'informazione con cui a è in grado di operare.

Il significato degli operatori logici deve quindi essere fissato da condizioni appropriate espresse esclusivamente nei termini dello stato informativo di un agente, in modo tale che si possa assumere che l'agente in questione abbia il pieno controllo di questo significato. Queste condizioni devono specificare cosa significhi per un agente a possedere realmente l'informazione che un enunciato complesso B è vero (o falso) nei termini delle informazioni di cui a dispone realmente riguardo alle sottoformule immediate di B. La semantica informazionale degli operatori logici si basa quindi sul principio seguente:

> *Informational semantics.* The meaning of an n-ary logical operator $\star$ is determined by specifying the necessary and sufficient conditions for an agent a to actually hold the information that a sentence of the form $\star(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ is true, respectively false, in terms of the information that a actually holds about the truth or falsity of $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. [D'Agostino (2013 b), pag. 50]

Secondo gli autori, la semantica della logica proposizionale classica non soddisfa il principio appena esposto, perché il significato classico degli operatori logici è specificato nei termini delle nozioni aletiche di verità e falsità che prescindono dal contenuto informativo degli enunciati.

La logica classica, come si è visto per il caso modale nella Sezione 2.2, si fonda infatti sul principio di bivalenza che, interpretato in termini informazionali,

$\neg$	
1	0
0	1
$*$	$*$

$\wedge$	1	0	$*$
1	1	0	$*$
0	0	0	0
$*$	$*$	0	$*$,0

$\vee$	1	0	$*$
1	1	1	1
0	1	0	$*$
$*$	1	$*$	$*$,1

$\rightarrow$	1	0	$*$
1	1	0	$*$
0	1	1	1
$*$	1	$*$	$*$,1

Figura 6.1: Matrici informazionali a tre valori per gli operatori booleani D'Agostino (2013 a), pag. 39.

impone che per ogni enunciato B, ogni agente o possiede realmente l'informazione che B è vero o possiede realmente l'informazione che B è falso.

Inoltre, come è stato sottolineato di nuovo nella Sezione 2.2 per il contesto modale, la semantica classica degli operatori logici è composizionale. La verofunzionalità è una proprietà indesiderata per una semantica informazionale. Ciò è chiaro, sostengono gli autori, considerando le condizioni necessarie e sufficienti, interpretate in senso informazionale, per la verità di una disgiunzione: 1) se un agente a possiede realmente l'informazione che $B \vee C$ è vero, allora a possiede realmente l'informazione che B è vero o che C è vero; e 2) se a possiede realmente l'informazione che B è vero o che C è vero, allora a possiede realmente l'informazione che $B \vee C$ è vero. Mentre la seconda clausola rispetta la nozione epistemica fondamentale di "possedere realmente un'informazione", la prima condizione risulta controintuitiva: come sottolineano gli autori, è possibile affermare che un agente a possiede realmente l'informazione che l'enunciato "la pallina della roulette si fermerà o su un settore rosso o su un settore nero" è vero sebbene a non possiede realmente l'informazione della verità di alcun disgiunto. Ragionamenti analoghi possono essere condotti sulle condizioni di falsità di una congiunzione e di verità di un'implicazione.

Di conseguenza, il significato informazionale degli operatori logici è espresso da una semantica trivalente, non composizionale e più debole rispetto a quella classica. Le matrici informazionali a tre valori, anticipate dalla teoria disposizionale degli operatori logici di Quine (1974), sono riportate nella Figura 6.1. Il rifiuto del principio di bivalenza è indicato dal terzo valore di verità, "$*$", che indica che l'agente a non possiede realmente l'informazione che l'enunciato B è vero e non possiede realmente l'informazione che B è falso. La non-composizionalità è data dal carattere non-deterministico delle matrici: in alcune celle, i valori ammissibili sono due. Infine, il fatto che il significato informazionale degli operatori sia più debole rispetto a quello classico emerge notando che le matrici informazionali sono un'estensione di quelle booleane.

Sia $\mathcal{L}$ l'insieme degli enunciati della logica proposizionale classica. Una valutazione non-deterministica a tre valori (detta "valutazione 3ND"), definita da D'Agostino (2013 a), pag. 39, è una funzione $v : \mathcal{L} \longrightarrow \{1, 0, *\}$ che soddisfa le seguenti condizioni per ogni $B, C \in \mathcal{L}$:

i. $v(\neg B) = \hat{f}_{\neg}(v(B))$

ii. $v(B \circ C) \in \hat{f}_{\circ}(v(B), v(C))$[1]

dove $\circ$ rappresenta $\wedge, \vee$ oppure $\rightarrow$; $\hat{f}_{\neg}$ è la funzione di verità deterministica definita dalla matrice informazionale a tre valori per $\neg$ (Figura 6.1); $\hat{f}_{\circ}$ è la funzione di verità non deterministica definita dalla matrice informazionale a tre valori per $\circ$ (Figura 6.1).

Una valutazione 3ND rappresenta uno "stato informativo a profondità zero" o "stato informativo di superficie", vale a dire uno stato informativo chiuso rispetto alle informazioni implicite che risultano dal significato informazionale degli operatori logici. La tesi degli autori è che uno stato informativo di superficie contiene le informazioni di cui un agente a dispone realmente e con cui è in grado di operare, dato che esiste una procedura di decisione fattibile con cui a può indicare se la verità o la falsità di un enunciato B qualunque appartiene al suo stato informativo o meno.

D'Agostino e Floridi (2009), pag. 300, definiscono quindi le nozioni di conseguenza logica e di inconsistenza a profondità zero. Un enunciato C è conseguenza a profondità zero di un insieme di enunciati Γ, scritto $\Gamma \vDash_0 B$, se e solo se $v(C) = 1$ per ogni stato informativo di superficie v tale che $v(B) = 1$ per ogni $B \in \Gamma$. La relazione di conseguenza logica a profondità zero è tarskiana (vale a dire soddisfa le proprietà di riflessività, monotonia e transitività) ed è invariante a meno di sostituzioni uniformi. Inoltre, $\Gamma \vDash_0$ se non esiste alcuno stato informativo di superficie v tale che $v(B) = 1$ per ogni $B \in \Gamma$: in questo caso, Γ è detto inconsistente a profondità zero.

La logica $\vDash_0$, ossia la logica booleana a profondità zero, è l'elemento base della gerarchie di logiche a profondità limitata che approssima la logica proposizionale classica. $\vDash_0$ permette di non impiegare alcuna informazione virtuale e

[1]Nella seconda clausola, il simbolo di appartenenza è giustificato dal carattere non deterministico delle matrici informazionali a tre valori per gli operatori booleani binari. Ad esempio, supponiamo che $v(B) = v(C) = *$; seguendo la clausola ii., $v(B \vee C) \in \hat{f}_{\vee}(*, *)$, dove $\hat{f}_{\vee}(*, *) = \{*, 1\}$. Ciò significa che, in questo caso, i valori ammessi da v per $B \vee C$ sono due, e cioè $*$ e 1.

quindi contiene tutte le inferenze che possono essere dedotte in virtù del significato informazionale degli operatori logici. In altri termini, le inferenze valide in $\vDash_0$ sono analitiche in senso strettamente informazionale perché dipendono soltanto dal significato informazionale degli operatori logici.

Inoltre, D'Agostino e Floridi (2009) dimostrano che questa logica è trattabile e cioè che esiste una procedura di decisione fattibile per stabilire se C è una conseguenza analitica o a profondità zero di un insieme di premesse Γ. Questo risultato induce gli autori a suggerire che il riconoscimento delle conseguenze della logica a profondità zero potrebbe rappresentare il requisito di razionalità minimo per un agente o, per riprendere la logica non standard esaminata nella Sezione 3.2.3, per la consapevolezza di un individuo.

Nella logica a profondità zero vale il principio dell'*ex falso quodlibet*: se Γ è un insieme di formule inconsistente a profondità zero, allora $\Gamma \vDash_0 C$ per qualunque enunciato C. Tuttavia, come nota D'Agostino (2013 b), un'inconsistenza a profondità zero può essere individuata con maggiore facilità rispetto ad un'inconsistenza classica. La logica $\vDash_0$ non ha tautologie, come del resto la logica di Kleene forte K_3 e il sistema FDE di Anderson e Belnap (Priest (2008)): infatti, una tautologia è una conseguenza logica dell'insieme vuoto di assunzioni e pertanto, per stabilirne la verità, è necessario impiegare informazioni virtuali. Infine, $\vDash_0$ verifica numerosi schemi classici di inferenza, quali il *modus ponens*, il *modus tollens* e il sillogismo disgiuntivo.

6.2.2 Informazioni virtuali e inferenze sintetiche: le logiche booleane a profondità k

Nella sezione precedente è stato notato che la logica booleana a profondità zero è più debole rispetto a quella proposizionale classica: ciò significa che alcune inferenze classicamente valide non sono valide in $\vDash_0$. Tra queste vi sono tutte le tautologie, cioè le inferenze dall'insieme vuoto di premesse: mentre $\vDash_C p \vee \neg p$, dove $\vDash_C$ denota la relazione di conseguenza logica classica, $\nvDash_0 p \vee \neg p$, perché negli stati informativi di superficie v in cui $v(p) = *$, $v(p \vee \neg p) = *$.

Analogamente, mentre $p \vee q, \neg p \vee q \vDash_C q$, l'inferenza da $p \vee q, \neg p \vee q$ a q non è valida in $\vDash_0$: un controesempio è dato da qualunque valutazione 3ND in cui $v(p \vee q) = v(\neg p \vee q) = 1$ e $v(p) = v(q) = *$. Sebbene non discenda immediatamente dal significato informazionale degli operatori logici che occorrono nelle premesse, la verità di q sembra essere implicitamente contenuta nella verità di $p \vee q$ e di

$\neg p \vee q$. Per ottenere l'informazione che q è vera, un agente è costretto ad andare temporaneamente aldilà delle informazioni che possiede sul valore di verità delle premesse e a ragionare per casi, assumendo temporaneamente che p sia vero e quindi che p sia falso ed esaminando in ciascuno dei due casi il valore di verità di q. In termini più espliciti, il tipo di ragionamento per casi a cui è tenuto un agente è espresso da D'Agostino (2010), pagg. 258-259, come segue:

i. p è oggettivamente vero o oggettivamente falso, sebbene questa informazione non sia disponibile.

ii. Assumo che p sia vero. Di conseguenza, $\neg p$ è falso. Dato che $\neg p \vee q$ è vero e $\neg p$ è falso, allora q è vero;

iii. Assumo che p sia falso. Dato che $p \vee q$ è vero e p è falso, allora q è vero.

iv. In entrambi i casi esaminati q è vero, indipendentemente dal valore oggettivo di p: l'informazione che q è vero è implicitamente contenuta nelle premesse.

Il senso in cui la verità di q è "implicitamente contenuta" nella verità di $p \vee q$ e di $\neg p \vee q$ differisce dal senso in cui, ad esempio, la verità di b è "implicitamente contenuta" nella verità di $a \vee b$ e $\neg a$. In questo secondo caso, b è una conseguenza analitica in senso strettamente informazionale delle premesse, ossia discende soltanto dal significato informazionale degli operatori $\neg$ e $\vee$ che occorrono nelle premesse. Nel primo caso invece la verità di q è ottenuta introducendo due informazioni virtuali (nei passaggi ii. e iii.) e cioè assumendo temporaneamente la verità di p e la falsità di p. Dice D'Agostino (2010):

> These steps [ii. - iii.] cannot be internally justified on the basis of the agent's actual information state, but involve simulating the possession of definite information about the objective truth-value of p, by enumerating the two possible outcomes of the process of acquiring such information, *neither of which* is deterministically dictated by v. The inference displays, intuitively, a deeper reasoning process than the one displayed by disjunctive syllogism, and we relate this depth to the necessity of manipulating virtual information concerning p. [D'Agostino (2010), pag. 259]

Lo statuto epistemologico delle inferenze che impiegano informazioni virtuali è quello di inferenze sintetiche a priori: esse infatti non ricorrono all'esperienza, ma aumentano l'informazione di partenza richiedendo l'impiego di alcune intuizioni, le informazioni virtuali appunto, che vanno oltre il significato degli operatori logici e che sono essenziali per ottenere la conclusione.

La nozione di inferenza sintetica ammette una caratterizzazione graduale che traduce formalmente l'idea intuitiva di grado di difficoltà logica di un'inferenza o di profondità del processo deduttivo. L'inferenza dalla verità di $p \vee q$ e di $\neg p \vee q$ alla verità di q necessita dell'impiego di una informazione virtuale, quella riguardo al valore oggettivo di p, e risulta valida perché $p, p \vee q, \neg p \vee q \vDash_0 q$ e $\neg p, p \vee q, \neg p \vee q \vDash_0 q$: la profondità di questa inferenza è uno, perché uno è il numero di informazioni virtuali necessarie per ottenere la conclusione. Se i passaggi ii. e iii. impiegassero a loro volta un'informazione virtuale per ottenere una conclusione comune, allora il processo di inferenza che ne risulta avrebbe profondità due. Reiterando questo ragionamento, D'Agostino e Floridi ottengono una classificazione delle inferenze secondo la loro profondità logica o il loro grado di sinteticità.

Da un punto di vista formale, gli autori introducono ricorsivamente la nozione di relazione di conseguenza logica a profondità k, indicata con $\vDash_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Nella logica a profondità k sono valide tutte le inferenze analitiche in senso strettamente informazionale e le inferenze sintetiche che impiegano al più k informazioni virtuali innestate. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, un enunciato C è conseguenza logica a profondità k di un insieme di enunciati Γ, scritto $\Gamma \vDash_k B$, se e solo se esiste una lettera proposizionale p tale che $\Gamma \cup \{p\} \vDash_{k-1} B$ e $\Gamma \cup \{\neg p\} \vDash_{k-1} B$. Di nuovo, la relazione di conseguenza logica a profondità k è tarskiana e invariante a meno di sostituzioni uniformi. Inoltre, $\Gamma \vDash_k$ se esiste una lettera proposizionale p tale che $\Gamma \cup \{p\} \vDash_{k-1}$ e $\Gamma \cup \{\neg p\} \vDash_{k-1}$.

Dal momento che $\vDash_0$ è monotona, $\vDash_j \subseteq \vDash_k$ per ogni $j \leq k$. La transizione da $\vDash_k$ a $\vDash_{k+1}$ corrisponde all'aumento della profondità a cui è permesso l'impiego di informazioni virtuali. Inoltre, ad ogni logica a profondità k corrisponde un insieme di tautologie a profondità k: in particolare, se B è una tautologia classica in cui occorrono k lettere proposizionali, allora B è una tautologia a profondità k. Ad esempio, il principio del terzo escluso è una tautologia a profondità uno: $\vDash_1 p \vee \neg p$, perché è necessario l'impiego di una informazione virtuale, quella concernente p, per inferirne la verità a partire dall'insieme vuoto di premesse. Gli autori dimostrano inoltre che la deducibilità di grado k, per ogni k fissato, è un problema trattabile e cioè è un problema praticamente decidibile, sebbene la sua complessità aumenti al crescere di k.

Infine, la logica proposizionale classica è definita come il limite della sequenza infinita di logiche a profondità k, ciascuna delle quali è trattabile e più debole rispetto alla successiva:

$$\vDash_C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \vDash_k .$$

La logica proposizionale classica infatti permette un uso illimitato di informazioni virtuali.

6.3 Deduzione naturale per le logiche booleane a profondità limitata

6.3.1 Deduzioni analitiche

D'Agostino e Floridi (2009) formulano sistemi di dimostrazione adeguati alle logiche booleane a profondità limitata: i sistemi di deduzione naturale per queste logiche risultano da progressivi indebolimenti del sistema di deduzione naturale per la logica proposizionale classica.

Nella Sezione 6.2.1 sono state esposte le ragioni per cui la semantica della logica proposizionale classica non si qualifica come una semantica informazionale. In modo analogo, gli autori notano che i sistemi di prova per la logica classica permettono un utilizzo illimitato di informazioni virtuali attraverso alcune regole, dette "regole di scaricamento", che consentono di assumere temporaneamente alcuni enunciati, salvo poi scaricarli prima che la dimostrazione sia giunta al termine. Esempi di regole di scaricamento nel sistema di deduzione naturale alla Gentzen sono le regole di eliminazione della disgiunzione ($\vee\mathcal{E}$) e di introduzione dell'implicazione ($\supset \mathcal{I}$):

$$\dfrac{\begin{matrix}\Gamma \\ \Pi_0 \\ A \vee B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Delta, [A]^x \\ \Pi_1 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Lambda, [B]^y \\ \Pi_2 \\ C\end{matrix}}{C}\ {\scriptstyle \vee\mathcal{E}(x,y)} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [A]^w \\ \Pi_0 \\ B\end{matrix}}{A \supset B}\ {\scriptstyle \supset\mathcal{I}(w)}$$

Gli enunciati posti nelle parentesi quadre ($[A]$ e $[B]$) rappresentano informazioni che non sono contenute nelle premesse disponibili all'agente (Γ, Δ e Λ). Le regole di scaricamento qualificano come sintetiche a priori tutte le deduzioni in cui sono impiegate e non sono quindi adatte per caratterizzare il ragionamento deduttivo analitico in cui non è permesso il ricorso alle informazioni virtuali.

Al contrario, le "regole *intelim*", formulate dagli autori e riportate nelle Figura 6.2, definiscono un sistema di deduzione naturale adeguato alla logica booleana a profondità zero. Le regole *intelim* sono infatti le regole di introduzione e di eliminazione per un sistema di deduzione naturale che riflette il significato informazionale degli operatori logici, in modo analogo a quello in cui il sistema NK di Gentzen riflette il significato classico degli operatori logici. Le regole miste per $\vee$ e $\wedge$ sono necessarie ma non derivabili dalle precedenti. La nozione formale di deducibilità a profondità zero, indicata con $\vdash_0$, è introdotta tramite il concetto di sequenza a profondità zero.

Una sequenza a profondità zero basata su un insieme di enunciati Γ è una sequenza di formule $A_1, \ldots, A_n$ tale che ciascun elemento della sequenza A_i:

i. appartiene a Γ, oppure;

ii. risulta dagli elementi che lo precedono nella sequenza tramite l'applicazione di una delle regole *intelim* riportate in Figura 6.2.

Una deduzione a profondità zero dell'enunciato C dall'insieme di enunciati Γ è una sequenza a profondità zero basata su Γ che termina con C. L'enunciato C è deducibile a profondità zero (o analiticamente deducibile) dall'insieme di enunciati Γ, scritto $\Gamma \vdash_0 C$, se esiste una deduzione a profondità zero di C da Γ.

Una sequenza a profondità zero è chiusa se contiene sia A sia $\neg A$ per qualche $A \in \mathcal{L}$; altrimenti è detta aperta. Una refutazione a profondità zero di un insieme di enunciati Γ è una sequenza a profondità zero chiusa basata su Γ. L'insieme di enunciati Γ è sintatticamente inconsistente a profondità zero, scritto $\Gamma \vdash_0$, se esiste una refutazione a profondità zero di Γ.

Di seguito riporto, a titolo d'esempio, la deduzione a profondità zero del principio di *ex falso quodlibet* ($p \wedge \neg p \vdash_0 q$):

1.	$p \wedge \neg p$	Premessa
2.	p	$\wedge\mathcal{E}1\,(1)$
3.	$\neg p$	$\wedge\mathcal{E}2\,(1)$
4.	$p \vee q$	$\vee\mathcal{I}1\,(2)$
5.	q	$\vee\mathcal{E}1\,(3,4)$

D'Agostino (2010), pag. 265, dimostra che la nozione di deduzione a profondità zero è adeguata per la logica a profondità zero. Infatti, per ogni insieme finito di

Regole di introduzione per i connettivi

$$\frac{\neg A}{A \to B}\ {\to}\mathcal{I}1 \qquad \frac{B}{A \to B}\ {\to}\mathcal{I}2 \qquad \frac{\begin{array}{c}A\\ \neg B\end{array}}{\neg(A \to B)}\ {\to}\mathcal{I}3$$

$$\frac{A}{A \vee B}\ {\vee}\mathcal{I}1 \qquad \frac{B}{A \vee B}\ {\vee}\mathcal{I}2 \qquad \frac{\begin{array}{c}\neg A\\ \neg B\end{array}}{\neg(A \vee B)}\ {\vee}\mathcal{I}3$$

$$\frac{\begin{array}{c}A\\ B\end{array}}{A \wedge B}\ {\wedge}\mathcal{I}1 \qquad \frac{\neg A}{\neg(A \wedge B)}\ {\wedge}\mathcal{I}2 \qquad \frac{\neg B}{\neg(A \wedge B)}\ {\wedge}\mathcal{I}3$$

$$\frac{A}{\neg\neg A}\ \neg\mathcal{I}$$

Regole di eliminazione per i connettivi

$$\frac{\begin{array}{c}A \to B\\ A\end{array}}{B}\ {\to}\mathcal{E}1 \qquad \frac{\begin{array}{c}A \to B\\ \neg B\end{array}}{\neg A}\ {\to}\mathcal{E}2 \qquad \frac{\neg(A \to B)}{A}\ {\to}\mathcal{E}3 \qquad \frac{\neg(A \to B)}{\neg B}\ {\to}\mathcal{E}4$$

$$\frac{\begin{array}{c}A \vee B\\ \neg A\end{array}}{B}\ {\vee}\mathcal{E}1 \qquad \frac{\begin{array}{c}A \vee B\\ \neg B\end{array}}{A}\ {\vee}\mathcal{E}2 \qquad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A}\ {\vee}\mathcal{E}3 \qquad \frac{\neg(A \vee B)}{\neg B}\ {\vee}\mathcal{E}4$$

$$\frac{A \wedge B}{A}\ {\wedge}\mathcal{E}1 \qquad \frac{A \wedge B}{B}\ {\wedge}\mathcal{E}2 \qquad \frac{\begin{array}{c}\neg(A \wedge B)\\ A\end{array}}{\neg B}\ {\wedge}\mathcal{E}3 \qquad \frac{\begin{array}{c}\neg(A \wedge B)\\ B\end{array}}{\neg A}\ {\wedge}\mathcal{E}4$$

$$\frac{\neg\neg A}{A}\ \neg\mathcal{E}$$

Regole miste per $\vee$ e $\wedge$

$$\frac{A \vee A}{A}\ {\vee}\mathcal{E}5 \qquad \frac{\neg(A \wedge A)}{\neg A}\ {\wedge}\mathcal{E}5$$

Figura 6.2: Regole intelim *adattate per formule non segnate da D'Agostino (2010), pag. 264.*

formule Γ e ogni formula C risulta che $\Gamma \vDash_0 C$ se e solo se $\Gamma \vdash_0 C$ e che $\Gamma \vDash_0$ se e solo se $\Gamma \vdash_0$.

La nozione di deduzione a profondità zero ammette una procedura di normalizzazione particolarmente forte, di cui tralascio i dettagli: tutte le deduzioni a profondità zero che non impiegano premesse esplicitamente contraddittorie (a differenza, ad esempio, della deduzione del principio di *ex falso quodlibet* appena esplicitata) sono analitiche in senso sintattico, perché rispettano il principio della sottoformula.

Infine, D'Agostino e Floridi (2009), pag. 296, dimostrano il loro risultato principale: la deducibilità e la refutabilità a profondità zero sono problemi trattabili. Il problema di decidere se una formula C è o non è deducibile a profondità zero da un insieme finito di formule Γ e il problema di decidere se Γ è o non è refutabile a profondità zero sono entrambi problemi che possono essere decisi in tempo $\mathcal{O}(n^2)$.

6.3.2 Deduzioni sintetiche

Nella Sezione 6.2.2, le logiche booleane a profondità $k > 0$ sono state introdotte a partire dalla logica booleana a profondità zero consentendo l'impiego di al più k informazioni virtuali innestate. Analogamente, i sistemi di deduzione naturale per le logiche a profondità $k > 0$ risultano dal sistema a profondità zero appena esposto insieme ad una clausola ricorsiva che permette, in qualunque punto della deduzione, l'innesto di sequenze ausiliarie di profondità $k-1$ ciascuna delle quali è introdotta da un'informazione virtuale.

Formalmente, per ogni $k \in \mathbb{N}$, una sequenza a profondità k basata su un insieme di enunciati Γ è una sequenza di formule $A_1, \ldots, A_n$ tale che ciascun elemento della sequenza A_i:

i. appartiene a Γ, oppure;

ii. è deducibile a profondità $k-1$ da $A_1, \ldots, A_{i-1}, p$ e $A_1, \ldots, A_{i-1}, \neg p$ per qualche lettera proposizionale p, oppure;

iii. è deducibile a profondità $k-1$ da $A_1, \ldots, A_{i-1}, p$ per qualche lettera proposizionale p tale che $A_1, \ldots, A_{i-1}, \neg p$ è sintatticamente inconsistente a profondità $k-1$; oppure è deducibile a profondità $k-1$ da $A_1, \ldots, A_{i-1}, \neg p$ per qualche lettera proposizionale p tale che $A_1, \ldots, A_{i-1}, p$ è sintatticamente inconsistente a profondità $k-1$.

Le definizioni di deducibilità e di refutabilità a profondità k sono generalizzate come segue. Una deduzione a profondità k dell'enunciato C dall'insieme di enunciati Γ è una sequenza a profondità k basata su Γ che termina con C. L'enunciato C è deducibile a profondità k dall'insieme di enunciati Γ, scritto $\Gamma \vdash_k C$, se esiste una deduzione a profondità k di C da Γ.

Una sequenza a profondità k $A_1, \ldots, A_n$ è chiusa se, per qualche lettera proposizionale p, esistono sequenze a profondità $k-1$ chiuse sia per $A_1, \ldots, A_{i-1}, p$ che per $A_1, \ldots, A_{i-1}, \neg p$. Una refutazione a profondità k di un insieme di enunciati Γ è una sequenza a profondità k chiusa basata su Γ. L'insieme di enunciati Γ è sintatticamente inconsistente a profondità k, scritto $\Gamma \vdash_k$, se esiste una refutazione a profondità k di Γ.

Riporto, a titolo d'esempio, la deduzione a profondità uno dell'inferenza discussa nella Sezione 6.1.2: $\neg p \vee q, p \vee q \vdash_1 q$. I riquadri indicano le sequenze ausiliarie di profondità maggiore di zero, uno in questo caso, necessarie per stabilire la verità di q:

1.	$\neg p \vee q$	Premessa		
2.	$p \vee q$	Premessa		
3.	p	Assunzione virtuale	$\neg p$	Assunzione virtuale
4.	$\neg\neg p$	$\neg\mathcal{I}\,(3)$	q	$\vee\mathcal{E}1\,(2,3)$
5.	q	$\vee\mathcal{E}1\,(1,4)$		
6.	q			

D'Agostino (2010), pag. 269, dimostra che la nozione di deduzione a profondità k è adeguata per la logica a profondità k. Infatti, per ogni insieme finito di formule Γ e ogni formula C: $\Gamma \vDash_k C$ se e solo se $\Gamma \vdash_k C$ e $\Gamma \vDash_k$ se e solo se $\Gamma \vdash_k$.

Infine, D'Agostino e Floridi (2009), pag. 303, dimostrano che la deducibilità e la refutabilità a profondità k sono problemi trattabili per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato. In particolare, il problema di decidere se una formula C è o non è deducibile a profondità k da un insieme finito di formule Γ e il problema di decidere se un insieme di formule Γ è o non è refutabile a profondità k sono entrambi problemi che possono essere decisi in tempo $\mathcal{O}(n^{2k+2})$.

Le logiche booleane a profondità limitata risolvono il paradosso dell'inferenza definendo classi di inferenze sintetiche a priori: queste inferenze sono valide, ma contemporaneamente sono utili, in quanto aumentano l'informazione di partenza. Queste logiche sono proposizionali e risolvono la variante proposizionale del problema di onniscienza logica, e cioè il paradosso dell'inferenza. Nel capitolo successivo, propongo un sistema che risulta dalla combinazione della semantica a mondi possibili e delle logiche booleane a profondità limitata e che, in quanto logica modale, intende affrontare direttamente la questione dell'onniscienza logica.

Capitolo 7

Logica epistemica a profondità limitata

7.1 Motivazioni e esempio

In questo capitolo, presento la mia proposta di una logica epistemica a profondità limitata che intende rispondere alla seguente domanda: che cosa conosce un individuo concreto che dispone di informazioni incomplete e di risorse computazionali limitate? Presento subito un esempio per illustrare la classe dei casi che discuto.

Esempio 7.1. Supponiamo che, durante una partita di scacchi, le informazioni di cui dispone chi guarda la scacchiera siano le seguenti:

1. Se il Nero non vuole subire lo scacco matto, allora il Nero muove il cavallo o muove l'alfiere.

2. Se il Nero muove il cavallo, allora la torre bianca cattura il cavallo nero.

3. Se il Nero muove l'alfiere, allora la regina bianca cattura l'alfiere nero.

4. Se il Nero non muove il cavallo, allora non è possibile che il Nero muova l'alfiere e che la regina bianca catturi l'alfiere nero.

5. Se il Nero non muove l'alfiere, allora non è possibile che il Nero muova il cavallo e che la torre bianca catturi il cavallo nero.

A queste informazioni, è necessario aggiungere la seguente, desunta dalle regole e dallo scopo del gioco:

6. Il Nero non vuole subire lo scacco matto.

Che cosa potrebbero e dovrebbero conoscere gli individui che sono provvisti delle informazioni 1.-6. e che dispongono di risorse computazionali limitate?

7.2 Struttura dell'approccio formale

Da un punto di vista formale, la logica epistemica a profondità limitata consiste in una combinazione della semantica a mondi possibili della logica epistemica classica (Capitolo 2) e della semantica delle logiche booleane a profondità limitata (Capitolo 6).

Come è stato mostrato nel Capitolo 2, la logica epistemica classica caratterizza ciò che dovrebbe conoscere un agente ideale che dispone di informazioni incomplete e di risorse computazionali illimitate. L'incompletezza delle informazioni in possesso di un agente è rappresentata dall'incertezza dell'individuo nel riconoscimento del mondo attuale: i mondi possibili rappresentano alternative epistemiche e la relazione di accessibilità di un agente indica quali sono le alternative epistemiche dell'agente.

Nell'approccio che propongo, le informazioni di cui dispone un agente costituiscono il suo stato informativo iniziale: l'eventuale incompletezza delle informazioni disponibili ad un individuo è rappresentata dalla possibile incompletezza del suo stato iniziale. A differenza dei mondi possibili della logica epistemica classica, in cui ogni enunciato del linguaggio è valutato, ciascuno stato informativo può infatti contenere delle lacune epistemiche, e cioè enunciati non valutati, che rappresentano le informazioni che un agente non possiede realmente.

Se nella logica epistemica classica i mondi possibili e le relazioni di accessibilità sono impiegati per descrivere l'ignoranza di un agente, nella logica epistemica a profondità limitata, in cui le lacune informative sono rappresentate dall'incompletezza dello stato informativo iniziale, lo strumentario della semantica a mondi possibili può essere adoperato per uno scopo differente: invece di servire per esprimere l'incompletezza delle informazioni di un agente, esso risulterà utile per caratterizzare le risorse computazionali disponibili all'individuo. E a questo punto subentrano le logiche booleane a profondità limitata (Capitolo 6).

Ogni individuo sarà caratterizzato, oltre che, come nel caso classico, dalle informazioni di cui dispone, anche dal grado di profondità, e cioè dal numero delle informazioni virtuali innestate, nell'accezione introdotta da D'Agostino e

Floridi (2009), che l'individuo è capace di immaginare e di adoperare nel suo ragionamento. La profondità di un agente è quindi una misura delle capacità computazionali dell'agente.

La profondità di un agente che dispone di certe informazioni incomplete è descritta dall'insieme degli stati informativi a cui è in grado di accedere: questi sono tutti e soli gli stati informativi che includono lo stato informativo iniziale e al più il numero di informazioni virtuali che l'agente è in grado di gestire. Da un lato quindi i mondi possibili della logica epistemica classica diventano stati informativi progressivamente sempre più completi, vale a dire che, oltre alle informazioni iniziali, includono un numero gradualmente più alto di informazioni virtuali. Le alternative epistemiche di un agente sono gli stati informativi accessibili all'agente con il numero più alto di enunciati valutati o, equivalentemente, gli stati informativi più completi tra quelli accessibili. Dall'altro lato la relazione di accessibilità di un agente della logica epistemica classica diventa la relazione di accessibilità a profondità limitata dell'agente, dove la profondità è determinata dalle risorse computazionali dell'individuo. In altri termini, la relazione di accessibilità a profondità limitata definisce quali sono gli stati informativi a cui un agente con una data profondità è in grado di accedere.

Inoltre, la conoscenza stessa sarà caratterizzata in modo graduale: dicendo che un agente, provvisto di date informazioni, conosce un enunciato ad una certa profondità, si indica che l'agente in questione dispone delle risorse computazionali necessarie per ricavare la verità dell'enunciato dalle informazioni di cui è provvisto. Di conseguenza, maggiori sono le risorse computazionali di un individuo, maggiore è il numero degli stati informativi a cui è in grado di accedere. E ancora, maggiore è il grado di completezza delle alternative epistemiche dell'individuo, maggiore è la profondità della sua conoscenza.

Questo sistema assume un punto di vista prescrittivo, e cioè caratterizza il tipo di conoscenza che un individuo razionale potrebbe e dovrebbe possedere date alcune informazioni di partenza. Questa caratterizzazione tiene conto dei limiti computazionali e cognitivi degli individui che considera e quindi, a differenza della logica epistemica classica, non rappresenta un ideale normativo irraggiungibile per i soggetti concreti. In particolare, le assunzioni di onniscienza logica non risultano problematiche: un individuo dovrebbe conoscere soltanto le conseguenze logiche che è in grado di derivare da ciò che conosce. Questa caratterizzazione non è quindi descrittiva: non si guarda a ciò che le persone concrete conoscono realmente, ma a ciò che esse potrebbero, e quindi dovrebbero, conoscere.

La logica epistemica a profondità limitata è una logica epistemica modale perché caratterizza la nozione di conoscenza attraverso una semantica alla Kripke con relazioni di accessibilità e insiemi di stati. Il sistema che propongo è allo stesso tempo anche una logica a profondità limitata perché caratterizza la nozione di conoscenza in modo graduale sulla base della capacità computazionale degli individui considerati. Il rapporto tra il lavoro di D'Agostino e Floridi (2009) e il presente è che la logica epistemica a profondità limitata può essere interpretata come una versione modale della gerarchia di logiche booleane a profondità limitata.

Le differenze tra i due approcci sono le seguenti. Innanzitutto, è attuato uno spostamento dall'oggetto al soggetto: se nelle logiche booleane a profondità limitata l'attenzione è posta sull'oggettiva difficoltà di una inferenza, nella logica epistemica a profondità limitata l'interesse è centrato sulla conoscenza del soggetto. Quindi, mentre le logiche booleane a profondità limitata risolvono il paradosso dell'inferenza, il presente sistema vorrebbe qualificarsi come una soluzione del problema dell'onniscienza logica. Come è stato sottolineato nella Sezione 4.1, l'onniscienza logica è una variante modale del paradosso dell'inferenza: una soluzione del problema dell'onniscienza può essere ottenuta formulando una variante modale della soluzione al paradosso dell'inferenza. Di conseguenza, il presente approccio introduce, accanto alla nozione proposizionale di informazione reale, una nozione modale di conoscenza esplicitamente posseduta da un individuo. Infine, il sistema che propongo unifica in un'unica logica la gerarchia infinita delle logiche booleane a profondità limitata proprio attraverso l'impiego della semantica a mondi possibili.

7.3 Semantica

7.3.1 Linguaggio

Il linguaggio della logica epistemica a profondità limitata è un linguaggio modale con un numero infinito di operatori epistemici che rappresentano i diversi gradi di profondità di conoscenza.

Definizione 1. Il *linguaggio* $\mathbb{L}$ è costituito da: un insieme numerabile di proposizioni atomiche $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$, un insieme di connettivi $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, un insieme di simboli ausiliari $\mathcal{S} = \{(\ ,\ )\}$, un insieme di prefissi $\mathcal{T} = \{t, f\}$ e un insieme di operatori epistemici $\mathcal{O} = \{\Box_j \mid j \geq 0\}$.

Definizione 2. L'insieme degli enunciati del linguaggio $\mathcal{L}$ è definito ricorsivamente come segue:

- $\mathcal{L}^0 = \mathcal{P}$
- $\mathcal{L}^{n+1} = \{\neg B, \Box_j B, B \vee C, B \rightarrow C, B \wedge C | B, C \in \mathcal{L}^n \text{ e } j \geq 0\}$
- $\mathcal{L} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}^n$

Come suggeriscono D'Agostino e Floridi (2009), impiego, in ciò che segue, formule segnate, e cioè espressioni del tipo tB e fB dove B è un qualunque enunciato appartente a $\mathcal{L}$. I segni t e f non sono degli operatori logici: essi infatti non possono essere adoperati all'interno di enunciati né possono essere reiterati. I simboli t e f possono essere usati soltanto come prefissi di enunciati: essi sono posti davanti all'enunciato e il loro scopo è l'intero enunciato che segue. Il loro significato intuitivo è il seguente: tB indica che il valore di verità di verità assegnato a B è vero e fB indica che il valore di verità assegnato a B è falso. La definizione formale è come segue:

Definizione 3. L'*insieme degli enunciati segnati basato sull'insieme degli enunciati* $\mathcal{L}$, denotato da $\mathcal{L}^s$, è l'insieme di tutte le espressioni della forma sB, tali che $B \in \mathcal{L}$ e $s \in \{t, f\}$. Il coniugato di sB, $\bar{s}B$, è fB se $s = t$ e tB se $s = f$.

Definizione 4. Un *insieme coerente* Γ è un sottoinsieme di $\mathcal{L}^s$ ($\Gamma \subseteq \mathcal{L}^s$), e cioè è un insieme di formule segnate della forma sB, tale che per nessun B, sB e $\bar{s}B$ appartengono entrambe a Γ. $\mathbb{G}$ è l'insieme degli insiemi coerenti Γ.

Un insieme coerente Γ può essere rappresentato in modo equivalente da una valutazione parziale v, e cioè da un insieme di coppie ordinate della forma $\langle B, s\rangle$, con $B \in \mathcal{L}$ e $s \in \{t, f\}$ e tale che per nessun $C \in \mathcal{L}$, $\langle C, t\rangle$ e $\langle C, f\rangle$ appartengono entrambe a v. Un insieme coerente $\Gamma \in \mathbb{G}$ è un insieme di enunciati non immediatamente contraddittorio.

Affinché un insieme coerente sia ammissibile è necessario che esso violi tutti i requisiti di inammissibilità riportati di seguito:

Definizione 5. Un *insieme ammissibile* Γ è un elemento di $\mathbb{G}$ tale che per nessun $B, C \in \mathcal{L}$ e per nessun j:

1. $t\neg B \in \Gamma$ e $tB \in \Gamma$
2. $f\neg B \in \Gamma$ e $fB \in \Gamma$
3. $fB \in \Gamma$, $fC \in \Gamma$ e $tB \vee C \in \Gamma$
4. $tB \in \Gamma$ e $fB \vee C \in \Gamma$
5. $tC \in \Gamma$ e $fB \vee C \in \Gamma$
6. $tB \in \Gamma$, $tC \in \Gamma$ e $fB \wedge C \in \Gamma$
7. $fB \in \Gamma$ e $tB \wedge C \in \Gamma$
8. $fC \in \Gamma$ e $tB \wedge C \in \Gamma$
9. $tB \in \Gamma$, $fC \in \Gamma$ e $tB \to C \in \Gamma$
10. $fB \in \Gamma$ e $fB \to C \in \Gamma$
11. $tC \in \Gamma$ e $fB \to C \in \Gamma$
12. $t\Box_j B \in \Gamma$ e $fB \in \Gamma$
13. $f\Box_j B \in \Gamma$ e $tB \in \Gamma$

$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{G}$ è l'insieme degli insiemi ammissibili Γ.

Le condizioni 1.-11. rappresentano le assegnazioni di valori di verità immediatamente escluse dal significato informazionale degli operatori logici definito tramite le matrici informazionali a tre valori riportate nella Figura 6.1 (Sezione 6.2.1). Queste condizioni riformulano quindi le definizioni informazionali dei connettivi proposte da D'Agostino e Floridi (2009): mentre le valutazioni 3ND presentate nella Sezione 6.2.1 forniscono il significato informazionale degli operatori logici definendo le condizioni ammissibili per formule non segnate, i requisiti 1.-11. indicano quali sono le combinazioni di formule segnate escluse dal significato informazionale degli operatori logici.

I requisiti 12.-13. sono il naturale completamento delle condizioni precedenti nel contesto modale. Il requisito 12. equivale a caratterizzare gli operatori $\Box_i$

in senso epistemico: affermando che è inammissibile una situazione in cui B è falso e B è conosciuto, la condizione 12. richiede la veridicità della conoscenza in analogia al vincolo posto dall'assioma T nella logica epistemica classica (Sezione 2.3). Il requisito 13. invece equivale ad escludere l'ignoranza di fatti veri, in analogia alla regola di necessitazione per la logica epistemica classica (Sezione 2.3). Sebbene possa apparire un vincolo eccessivamente impegnativo, il requisito 13. corrisponde semplicemente alla richiesta che un agente conosca (alla profondità di cui è capace) tutti gli enunciati veri esplicitamente contenuti nelle informazioni di cui dispone. Per riprendere l'Esempio 2.1 (Sezione 2.1), nell'insieme delle informazioni pervenuto ad Alice è incluso il fatto che è vero che a Milano piove: nella logica epistemica classica, questa informazione è rappresentata affermando che l'enunciato m è vero in tutti i mondi possibili e che Alice sa che a Milano piove. Analogamente, il requisito 13. afferma che, dato che tra le informazioni incomplete di cui dispone l'enunciato m è incluso in modo esplicito, è inammissibile che Alice non sappia che a Milano piove.

Ciascuna condizione indica un caso di inconsistenza esplicita o analitica, e cioè un'inconsistenza che è riconosciuta come tale e immediatamente da qualunque agente in grado di comprendere il significato informazionale dei connettivi e degli operatori. In altre parole, ciascuna condizione rappresenta un'inconsistenza per il riconoscimento della quale non sono necessarie informazioni virtuali.

La seguente proposizione enuncia le proprietà di riflessività e di monotonia per insiemi ammissibili:

Proposizione 1. Per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}^s$ e per ogni $B \in \mathcal{L}$:

1. se $sB \in \Gamma$, allora $\Gamma \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}$;
2. se $\Gamma \cup \{sB\} \notin \mathbb{A}$, allora $\Gamma \cup \Delta \cup \{sB\} \notin \mathbb{A}$.

Segue ora la definizione dell'insieme degli enunciati segnati derivabili analiticamente da un insieme di informazioni ammissibili Γ: $\mathsf{W}(\Gamma)$ include tutti quegli enunciati che discendono da Γ attraverso passaggi giustificabili soltanto attraverso il significato informazionale dei connettivi e degli operatori precisato nella Definizione 5. Di conseguenza, $\mathsf{W}(\Gamma)$ può essere interpretato come la naturale estensione in campo epistemico della nozione di stato informativo di superficie proposta da D'Agostino e Floridi (2009) e presentata nella Sezione 6.2.1.

Definizione 6. Per ogni $\Gamma \in \mathbb{A}$, $\mathsf{W}(\Gamma)$ è il sottoinsieme di $\mathcal{L}^s$ definito ricorsivamente come segue:

- $\mathsf{W}_0(\Gamma) = \{sB \mid \Gamma \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}\}$
- $\mathsf{W}_{n+1}(\Gamma) = \{sB \mid \mathsf{W}_n(\Gamma) \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}\}$
- $\mathsf{W}(\Gamma) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{W}_n(\Gamma)$

Si consideri l'insieme $\Lambda = \{tp \wedge q, t\neg p\}$. $\Lambda \in \mathbb{A}$, in quanto Λ non soddisfa alcuna condizione di inammissibilità della Definizione 5. Tuttavia, $\mathsf{W}(\Lambda) \notin \mathbb{A}$. Infatti, $fp \in \mathsf{W}_0(\Lambda)$ perché $\Lambda \cup \{tp\} \notin \mathbb{A}$ dato che $tp \in \Lambda \cup \{tp\}$ e $t\neg p \in \Lambda \cup \{tp\}$ soddisfano la condizione 1. di inammissibilità. Tuttavia, $\mathsf{W}_0(\Lambda) \notin \mathbb{A}$, perché $fp \in \mathsf{W}_0(\Lambda)$ e $tp \wedge q \in \mathsf{W}_0(\Lambda)$ soddisfano la condizione 7 di inammissibilità. Dalla proprietà di monotonia degli insiemi inammissibili (Proposizione 1.2) segue che $\mathsf{W}(\Lambda) \notin \mathbb{A}$. Questo è un esempio di un insieme ammissibile il cui insieme di conseguenze analitiche è inammissibile. La seguente proposizione mostra che da insiemi del genere, e cioè da insiemi analiticamente inconsistenti, è derivabile qualunque enunciato:

Proposizione 2. Per ogni $\Gamma \subseteq \mathbb{A}$, se $\mathsf{W}(\Gamma) \notin \mathbb{A}$, allora $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ per $B \in \mathcal{L}$ qualunque.

Di seguito enuncio alcune proprietà di $\mathsf{W}(\Gamma)$: la prima proposizione chiarisce un aspetto della sua struttura; la seconda invece stabilisce le proprietà di riflessività, monotonia e transitività.

Proposizione 3. Per ogni $\Gamma \subseteq \mathbb{A}$, $B \in \mathcal{L}$ e $j \geq 0$, se $sB \in \mathsf{W}_j(\Gamma)$, allora $sB \in \mathsf{W}_{j+1}(\Gamma)$.

Proposizione 4. Per ogni $\Gamma, \Gamma \cup \Delta, \Gamma \cup \{sB\} \in \mathbb{A}$ e $B, C \in \mathcal{L}$:

1. se $sB \in \Gamma$, allora $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ (proprietà di riflessività)
2. se $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$, allora $sB \in \mathsf{W}(\Gamma \cup \Delta)$ (proprietà di monotonia)
3. se $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ e $sC \in \mathsf{W}(\Gamma \cup \{sB\})$, allora $sC \in \mathsf{W}(\Gamma)$ (proprietà di transitività)

Con le definizioni seguenti distinguo l'insieme degli enunciati contingenti e l'insieme degli enunciati a profondità k per ogni $k \geq 0$:

Definizione 7. Con $\mathcal{L}_c$ indichiamo l'*insieme degli enunciati contingenti*, e cioè l'insieme degli enunciati in cui non compaiono operatori epistemici. Formalmente:

- $\mathcal{L}_c^0 = \mathcal{P}$
- $\mathcal{L}_c^{n+1} = \{\neg B, B \vee C, B \to C, B \wedge C | B, C \in \mathcal{L}_c^n\}$
- $\mathcal{L}_c = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_c^n$

$\mathcal{L}_c^s$ è l'*insieme degli enunciati segnati basato su* $\mathcal{L}_c$, e cioè l'insieme di tutte le espressioni della forma sB, tali che $B \in \mathcal{L}_c$ e $s \in \{t, f\}$.
$\mathbb{A}_c$ è l'insieme di insiemi ammissibili Γ tali che $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_c^s$.

$\mathcal{L}_c$ rappresenta il linguaggio in cui sono epresse le informazioni pervenute all'agente attraverso mezzi esterni affidabili. Dal momento che la conoscenza dipende dalle capacità del soggetto e differisce tra gli individui, il linguaggio delle informazioni è privo di operatori epistemici. In questo sistema, i mondi possibili saranno rappresentati da insiemi ammissibili di enunciati espressi nel linguaggio delle informazioni.

Definizione 8. Analogamente, con $\mathcal{L}_k$ indichiamo l'*insieme degli enunciati a profondità* k, e cioè l'insieme di tutti e soli gli enunciati in cui o non occorre alcun operatore epistemico oppure gli unici operatori epistemici che occorrono appartengono a $\mathcal{O}_k = \{\Box_j : 0 \leq j \leq k\}$. Formalmente:

- $\mathcal{L}_k^0 = \mathcal{P}$
- $\mathcal{L}_k^{n+1} = \{\neg B, \Box_j B, B \vee C, B \to C, B \wedge C | B, C \in \mathcal{L}_k^n \text{ e } 0 \leq j \leq k\}$
- $\mathcal{L}_k = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_k^n$

$\mathcal{L}_k^s$ è l'*insieme degli enunciati segnati basato su* $\mathcal{L}_k$, e cioè l'insieme di tutte le espressioni della forma sB, tali che $B \in \mathcal{L}_k$ e $s \in \{t, f\}$.

Per ogni $k \geq 0$, $\mathcal{L}_k$ rappresenta l'insieme degli enunciati che un agente a profondità k è in grado di comprendere. L'Osservazione 1, che segue per costruzione, indica in particolare che ogni agente comprende il linguaggio delle informazioni e che ogni agente con una certa profondità comprende tutti gli enunciati compresi da agenti con profondità uguale o minore.

Osservazione 1.

1. Per ogni $k \geq 0$, $\mathcal{L}_c \subseteq \mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{L}_{k+1} \subseteq \mathcal{L}$

2. $\mathbb{A}_c \subseteq \mathbb{A}$

Per chiarire le definizione di questa sezione, formalizzo l'Esempio 7.1 come segue:

Esempio 7.1.1. Innanzitutto esplicito le proposizioni atomiche del linguaggio. $\mathcal{P} = \{p, q, r, u, v\}$, dove:

- $p =$ "Il Nero non vuole subire lo scacco matto";
- $q =$ "Il Nero muove il cavallo";
- $r =$ "Il Nero muove l'alfiere";
- $u =$ "La torre bianca cattura il cavallo nero";
- $v =$ "La regina bianca cattura l'alfiere nero".

Le informazioni 1.-6. sono rappresentate dal seguente insieme $\Sigma = \{t(p \to (q \vee r)), t(q \to u), t(r \to v), t(\neg q \to \neg(r \wedge v)), t(\neg r \to \neg(q \wedge u)), t(p)\}$.

Σ è un insieme coerente, poiché per nessun enunciato B sia sB che $\bar{s}B$ appartengono entrambi a Σ, ed è anche un insieme ammissibile, perché Σ viola tutti i requisiti di inammissibilità. Σ è inoltre espresso nel linguaggio delle informazioni, perché in esso non compaiono operatori epistemici. Infatti, le informazioni pervenute attraverso la scacchiera o attraverso le regole del gioco sono indipendenti dal soggetto che le ottiene: le informazioni fornite da mezzi esterni affidabili e rappresentate da insiemi che, come Σ, appartengono a $\mathbb{A}_c$, sono oggettive e precedono l'elaborazione degli individui.

Indico ora alcuni enunciati tra quelli analiticamente inclusi nello stato informativo iniziale Σ:

- La falsità dell'enunciato "Il Nero vuole subire uno scacco matto" è analiticamente contenuta in Σ, e cioè $f(\neg p) \in \mathsf{W}(\Sigma)$. Infatti $\Sigma \cup \{t(\neg p)\} \notin \mathbb{A}$, perché $t(p)$ e $t(\neg p)$ appartengono a $\Sigma \cup \{t(\neg p)\}$ che quindi soddisfa il requisito 1. di inammissibilità. Per la Definizione 6, segue che $f(\neg p) \in \mathsf{W}_0(\Sigma)$ e quindi che $f(\neg p) \in \mathsf{W}(\Sigma)$.

- La verità dell'enunciato "Il Nero muove il cavallo o il Nero muove l'alfiere" è analiticamente contenuta in Σ, e cioè $t(q \vee r) \in \mathsf{W}(\Sigma)$. Infatti $\Sigma \cup \{f(q \vee r)\} \notin \mathbb{A}$, perché $t(p)$, $f(q \vee r)$ e $t(p \rightarrow (q \vee r))$ appartengono a $\Sigma \cup \{f(q \vee r)\}$ che quindi soddisfa il requisito 9. di inammissibilità. Per la Definizione 6, segue che $t(q \vee r) \in \mathsf{W}_0(\Sigma)$ e quindi che $t(q \vee r) \in \mathsf{W}(\Sigma)$.

- La verità della conoscenza a profondità $j \geq 0$ dell'enunciato "Il Nero muove il cavallo o il Nero muove l'alfiere" è analiticamente contenuta in Σ, e cioè $t\Box_j(q \vee r) \in \mathsf{W}(\Sigma)$. Infatti $\mathsf{W}_0(\Sigma) \cup \{f\Box_j(q \vee r)\} \notin \mathbb{A}$, perché $t(q \vee r)$, $f\Box_j(q \vee r)$ appartengono a $\mathsf{W}_0(\Sigma) \cup \{f\Box_j(q \vee r)\}$ che quindi soddisfa il requisito 13. di inammissibilità. Per la Definizione 6, $t\Box_j(q \vee r) \in \mathsf{W}_1(\Sigma)$ e quindi che $t\Box_j(q \vee r) \in \mathsf{W}(\Sigma)$.

  Anticipo un aspetto della Definizione 13. Enunciati del tipo $t\Box_j(q \vee r)$, pur essendo conseguenze analitiche di un insieme di informazioni Σ, non sono soddisfatti dalle interpretazioni di Σ date da agenti con profondità $m \leq j$: la ragione di questo è che ad un individuo con profondità m, non è dato conoscere a profondità maggiore di j, dato che un agente con profondità m non comprende un enunciato in cui occorre un operatore a profondità $j \geq m$, e cioè se $m \leq j$, allora $t\Box_m(q \vee r) \notin \mathcal{L}_j$.

7.3.2 Interpretazione

Per rappresentare l'interpretazione di un insieme di informazioni data da un agente con una certa profondità, definisco una nozione formale di interpretazione, dopo aver precisato alcune nozioni preliminari. Innanzitutto, seguendo D'Agostino (2010), pag. 261, definisco un raffinamento di un insieme ammissibile e un raffinamento di un insieme ammissibile su un certo numero di enunciati:

Definizione 9.

1. Per $\Gamma \in \mathbb{A}$, diciamo che Δ *è un raffinamento di* Γ, e scriviamo $\Gamma \sqsubseteq \Delta$, se e solo se $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\Delta \in \mathbb{A}$.

2. Per $\Gamma, \Delta \in \mathbb{A}$ e per ogni insieme (eventualmente vuoto) $J = \{B_1, B_2, \ldots, B_j\} \in \wp(\mathcal{L})$, diciamo che Δ *è un raffinamento di* Γ *su* J se e solo se $\Gamma \sqsubseteq \Delta$ e $s_1B_1, s_2B_2, \ldots, s_jB_j \in \Delta$ per $s_i \in \{t, f\}$.

La nozione di raffinamento è essenziale per la definizione di accessibilità a profondità limitata:

Definizione 10. Sia $\{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$ un insieme (eventualmente vuoto) di j proposizioni atomiche del linguaggio. Per ogni $\{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$ e per ogni $\Gamma \in \mathbb{A}_c$, una *relazione di accessibilità a* Γ *di profondità* j, denotata da $\mathsf{R}_\Gamma^{\{q_1,\ldots,q_j\}}$, è un sottoinsieme di $\mathbb{A}_c$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1. Se $\Gamma' \in \mathsf{R}_\Gamma^{\{q_1,\ldots,q_j\}}$, allora Γ' è un raffinamento di Γ su $\{q_1, \ldots, q_j\}$ (condizione di monotonia).

2. Se Γ' è un raffinamento di Γ su $\{q_1, \ldots, q_j\}$, allora $\Gamma' \in \mathsf{R}_\Gamma^{\{q_1,\ldots,q_j\}}$ (condizione di completezza).

$\mathsf{R}_\Gamma^{\{q_1,\ldots,q_j\}}$ specifica tutti e soli i raffinamenti di Γ sull'insieme di proposizioni atomiche $\{q_1, \ldots, q_j\}$.

La condizione di monotonia cattura l'idea per cui qualunque agente può soltanto aggiungere nuove informazioni a quelle iniziali e non perdere o modificare quelle già acquisite. In altre parole, il valore di verità di enunciato stabilito dalle informazioni di partenza permane inalterato in tutti gli stati informativi accessibili a quello iniziale. Questa condizione è analoga alla regola di ereditarietà per la logica intuizionista: quando qualcosa è stato dimostrato, il risultato ottenuto resta invariato e indipendente dalla scoperta di nuovi teoremi. La condizione di monotonia evidenzia la motivazione che muove alla costruzione di questo sistema, ossia il tentativo di comprendere il ragionamento di un agente concreto basato su un insieme di informazioni e non la revisione delle informazioni incluse nello stato informativo di partenza.

La condizione di completezza, impiegata in forma diversa anche da Flaminio, Godo e Hosni (2014), sembra imporre all'agente di accedere a tutti i raffinamenti dell'insieme di informazioni iniziali. La completezza è una richiesta forte: senza ulteriori specificazioni, essa equivarrebbe a richiedere ad ogni individuo una capacità illimitata nell'uso delle informazioni virtuali. Questo è evitato dalla seguente definizione:

Definizione 11. Per ogni $k \geq 0$ e per ogni $\Gamma \in \mathbb{A}_c$, un *insieme di relazioni di accessibilità a* Γ *di profondità* k, denotato da $\mathbb{R}_\Gamma^k$, è un insieme di sottoinsiemi di $\mathbb{A}_c$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1. Se $\mathsf{R}_\Gamma^{\{q_1,\ldots,q_j\}} \in \mathbb{R}_\Gamma^k$, allora $\{q_1,\ldots,q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$ e $0 \leq j \leq k$.
2. Se $\{q_1,\ldots,q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$ e $0 \leq j \leq k$, allora $\mathsf{R}_\Gamma^{\{q_1,\ldots,q_j\}} \in \mathbb{R}_\Gamma^k$.

$\mathbb{R}_\Gamma^k$ specifica quali sono gli stati informativi accessibili a quello attuale rappresentato da Γ per un agente con profondità k: questi sono tutti e soli i raffinamenti dello stato iniziale su al più k proposizioni atomiche che rappresentano le informazioni virtuali.

La Proposizione 5 enuncia alcune proprietà della relazione di accessibilità a profondità limitata che saranno utili per ciò che segue. In particolare, sono stabilite le proprietà di riflessività, monotonia e transitività:

Proposizione 5. Siano $J = \{q_1,\ldots,q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$, $L = \{r_1,\ldots,r_l\} \in \wp(\mathcal{P})$ e $N = \{r_1,\ldots,r_l,r_{l+1},\ldots,r_n\} \in \wp(\mathcal{P})$, con $L \subseteq N$. Per ogni $\Gamma, \Gamma \cup \{sA\}, \Delta, \Lambda \in \mathbb{A}_c$ e per ogni $A \in \mathcal{L}_c$:

1. $\Gamma \in \mathsf{R}_\Gamma^{\varnothing}$.
2. Se $\Delta \in \mathsf{R}_{\Gamma\cup\{sA\}}^J$, allora $\Delta \in \mathsf{R}_\Gamma^J$.
3. Se $\Delta \in \mathsf{R}_\Gamma^N$, allora $\Delta \in \mathsf{R}_\Gamma^L$.
4. Se $\Delta \in \mathsf{R}_\Gamma^J$ e $\Lambda \in \mathsf{R}_\Delta^L$, allora $\Lambda \in \mathsf{R}_\Gamma^J$, $\Lambda \in \mathsf{R}_\Gamma^L$ e $\Lambda \in \mathsf{R}_\Gamma^{J\cup L}$.

A questo punto, è possibile definire l'interpretazione di un mondo ad una certa profondità:

Definizione 12. Per ogni $k \geq 0$ e per ogni $\Gamma \in \mathbb{A}_c$, un'*interpretazione di* Γ *a profondità* k è una tripla $\mathsf{I}_\Gamma^k = \langle \Gamma, \mathbb{A}_c, \mathbb{R}_\Gamma^k \rangle$.
Con $\mathbb{I}_\Gamma$ indicheremo l'insieme di tutte le interpretazioni di Γ a qualsiasi profondità: $\mathbb{I}_\Gamma = \{\mathsf{I}_\Gamma^k \mid k \geq 0\}$.
Con $\mathbb{I}^k$ indicheremo l'insieme di tutte le interpretazioni a profondità k di qualunque insieme di informazioni ammissibili: $\mathbb{I}^k = \{\mathsf{I}_\Gamma^k \mid \Gamma \in \mathbb{A}_c\}$.
Con $\mathbb{I}$ indicheremo l'insieme di tutte le interpretazioni a qualsiasi profondità di qualunque insieme di informazioni ammissibili: $\mathbb{I} = \{\mathsf{I}_\Gamma^k \mid k \geq 0 \text{ e } \Gamma \in \mathbb{A}_c\}$.

Per chiarire le definizione di questa sezione, considero nuovamente l'Esempio 7.1:

Esempio 7.1.2. Supponiamo che Alice e Luca siano informati delle proposizioni in Σ e che la profondità di Alice sia uguale a zero, mentre quella di Luca sia uno. Ciò significa che, mentre Alice non è in grado di adoperare nel suo ragionamento alcuna informazione virtuale, Luca accede a tutti quegli stati informativi che includono al più una assunzione temporanea sul valore di verità oggettivo di una proposizione atomica. Di conseguenza, l'interpretazione di Alice delle informazioni in Σ è rappresentata da $\mathsf{I}^0_\Sigma = \langle \Sigma, \mathbb{A}_c, \mathbb{R}^0_\Sigma \rangle$, mentre l'interpretazione di Luca della scacchiera e delle regole del gioco è data da $\mathsf{I}^1_\Sigma = \langle \Sigma, \mathbb{A}_c, \mathbb{R}^1_\Sigma \rangle$.

Analizzo le interpretazioni dei due individui, I^0_Σ e I^1_Σ. $\mathbb{R}^0_\Sigma \in \mathsf{I}^0_\Sigma$ include soltanto $\mathsf{R}^{\varnothing}_\Sigma$, perché $\varnothing$ è l'unico sottoinsieme di $\mathcal{P}$ con zero elementi. $\mathbb{R}^1_\Sigma \in \mathsf{I}^1_\Sigma$ è costituito da $\mathsf{R}^{\varnothing}_\Sigma \cup \mathsf{R}^{\{p\}}_\Sigma \cup \mathsf{R}^{\{q\}}_\Sigma \cup \mathsf{R}^{\{r\}}_\Sigma \cup \mathsf{R}^{\{u\}}_\Sigma \cup \mathsf{R}^{\{v\}}_\Sigma$, perché $\varnothing, \{p\}, \{q\}, \{r\}, \{u\}$ e $\{v\}$ sono gli unici sottoinsiemi di $\mathcal{P}$ che contengono al più un elemento.

Esamino quindi quali sono gli stati informativi inclusi in $\mathsf{R}^{\varnothing}_\Sigma$, $\mathsf{R}^{\{p\}}_\Sigma$ $\mathsf{R}^{\{q\}}_\Sigma$, $\mathsf{R}^{\{r\}}_\Sigma$, $\mathsf{R}^{\{u\}}_\Sigma$ e $\mathsf{R}^{\{v\}}_\Sigma$. Per ragioni di chiarezza espositiva, esamino soltanto i raffinamenti minimi di Σ, e cioè gli stati informativi che raffinano Σ soltanto sulle proposizioni atomiche indicate e non su altri enunciati.

- L'unico raffinamento minimo in $\mathsf{R}^{\varnothing}_\Sigma$ è Σ stesso: per la Proposizione 5.1 infatti $\Sigma \in \mathsf{R}^{\varnothing}_\Sigma$.

- L'unico raffinamento minimo in $\mathsf{R}^{\{p\}}_\Sigma$ è ancora Σ stesso. Infatti, gli insiemi che dobbiamo considerare sono $\Sigma \cup \{tp\}$ e $\Sigma \cup \{fp\}$: tuttavia, mentre il primo è uguale a Σ perché $tp \in \Sigma$, il secondo non è coerente, perché include sia tp che fp, quindi non è ammissibile e di conseguenza non è un raffinamento.

- Gli unici raffinamenti minimi inclusi in $\mathsf{R}^{\{q\}}_\Sigma$ sono $\Delta_1 = \Sigma \cup \{tq\}$ e $\Delta_2 = \Sigma \cup \{fq\}$, entrambi ammissibili.

- Gli unici raffinamenti minimi inclusi in $\mathsf{R}^{\{r\}}_\Sigma$ sono $\Lambda_1 = \Sigma \cup \{tr\}$ e $\Lambda_2 = \Sigma \cup \{fr\}$, entrambi ammissibili.

- Gli unici raffinamenti minimi inclusi in $\mathsf{R}^{\{u\}}_\Sigma$ sono $\Omega_1 = \Sigma \cup \{tu\}$ e $\Omega_2 = \Sigma \cup \{fu\}$, entrambi ammissibili.

- Gli unici raffinamenti minimi inclusi in $\mathsf{R}^{\{v\}}_\Sigma$ sono $\Pi_1 = \Sigma \cup \{tv\}$ e $\Pi_2 = \Sigma \cup \{fv\}$, entrambi ammissibili.

I raffinamenti minimi a cui accedono gli agenti possono essere rappresentati dal grafo riportato in Figura 7.1. analogo a quello per la logica epistemica classica

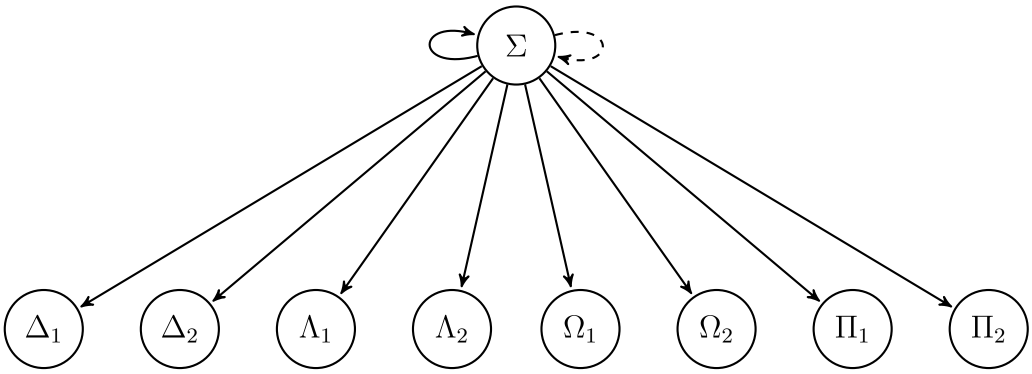

Figura 7.1: Il grafo rappresenta i raffinamenti minimi a cui accedono gli agenti di profondità zero e uno nella situazione illustrata dall'Esempio 7.1.

mostrato nella Sezione 2.2: la linea tratteggiata indica i raffinamenti minimi di un agente a profondità zero come Alice, mentre la linea continua indica i raffinamenti minimi di un agente a profondità uno come Luca.

7.3.3 Soddisfazione

Le formule soddisfatte dall'interpretazione di un certo stato informativo a una data profondità sono gli enunciati che un agente con una certa profondità potrebbe e dovrebbe derivare e conoscere date le informazioni di cui dispone:

Definizione 13. Per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma \in \mathbb{I}$, si dice che *l'interpretazione* I^k_Γ *soddisfa l'enunciato* $sB \in \mathcal{L}^s$ o che *l'enunciato* $sB \in \mathcal{L}^s$ *è conseguenza logica dell'interpretazione* I^k_Γ, scritto $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$, se e solo se:

1. Per $B \in \mathcal{L}$ del tipo $p, \neg C, C \vee D, C \wedge D, C \to D$ con $p \in \mathcal{P}$ e $C, D \in \mathcal{L}$:

   $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ se e solo se:

   a) $B \in \mathcal{L}_k$ e

   b) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$

2. Per $\Box_j C \in \mathcal{L}$ con $C \in \mathcal{L}$ e $j \geq 0$:

   $s\Box_j C \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ se e solo se

   a) $C \in \mathcal{L}_k$ e

   b) esiste un insieme $\{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$ tale che:

i. $\mathsf{R}_\Gamma^{\{q_1,\ldots,q_j\}} \in \mathbb{R}_\Gamma^k$ e

ii. per ogni $\Gamma' \in \mathbb{A}_c$, se $\Gamma' \in \mathsf{R}_\Gamma^{\{q_1,\ldots,q_j\}}$, allora $sC \in \mathsf{W}(\Gamma')$.

Un enunciato che non comincia con un operatore epistemico è soddisfatto dall'interpretazione di Γ data da un agente a profondità k se e solo se l'agente comprende l'enunciato e questo può essere dedotto da Γ soltanto tramite passaggi analitici. Un enunciato che comincia con un operatore epistemico a profondità j è soddisfatto dall'interpretazione di Γ data da un agente a profondità k se e solo se l'agente comprende l'enunciato; esiste un insieme J di j proposizioni atomiche, tale che l'agente accede a tutti gli stati Γ' in cui J è valutato e l'enunciato in questione può essere dedotto dalle informazioni di ogni stato Γ' soltanto tramite passaggi analitici.

L'Osservazione 2 segue dalla definizione precedente e specifica i casi in cui un agente non conosce il valore di verità di un enunciato:

Osservazione 2. $s\Box_j C \notin Cn(\mathsf{I}_\Gamma^k)$ se e solo se:

a) $C \notin \mathcal{L}_k$ oppure

b) per ogni insieme $\{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$ si ha almeno una tra:

i. $\mathsf{R}_\Gamma^{\{q_1,\ldots,q_j\}} \notin \mathbb{R}_\Gamma^k$ oppure

ii. esiste $\Gamma' \in \mathbb{A}_c$ tale che: $\Gamma' \in \mathsf{R}_\Gamma^{\{q_1,\ldots,q_j\}}$ e $sC \notin \mathsf{W}(\Gamma')$.

Osservazione 3. Come indicato nell'Esempio 7.1.2, i raffinamenti minimi di Σ su $J \in \wp(\mathcal{P})$ sono quegli stati informativi ammissibili che raffinano Σ su J e non su altri enunciati. Se per ogni raffinamento minimo Φ di Σ su J, $sC \in \mathsf{W}(\Phi)$, allora per ogni raffinamento Λ di Σ su J, $sC \in \mathsf{W}(\Lambda)$. Infatti, per ogni Λ esiste un Φ tale che $\Phi \subseteq \Lambda$ e l'osservazione segue dalla Proposizione 4.2. Ciò significa che, per esaminare se un enunciato sC è conseguenza analitica di tutti i raffinamenti di un certo Γ su un dato J, è sufficiente analizzare se sC è analiticamente derivabile in tutti i raffinamenti minimi di Γ su J.

La nozione di conseguenza logica di un'interpretazione proposta nella Definizione 13 soddisfa le proprietà di riflessività, monotonia e transitività:

Proposizione 6. Per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma, \mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}} \in \mathbb{I}$, $A \in \mathcal{L}_c$ e $B \in \mathcal{L}$:

1. Se $sA \in \Gamma$, allora $sA \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ (proprietà di riflessività).
2. Se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$ (proprietà di monotonia).
3. Se $sA \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ e $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ (proprietà di transitività).

La proposizione seguente enuncia alcune proprietà interessanti che formalizzano determinate intuizioni sulla conoscenza a profondità differenti:

Proposizione 7. Per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma, \mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}} \in \mathbb{I}$, $A, D \in \mathcal{L}_c$ e $B, C \in \mathcal{L}$:

1. Per $0 \leq k < m$: $s\Box_m B \notin Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$.
2. Per $0 \leq j \leq l \leq k$: se $s\Box_j B \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$, allora $s\Box_l B \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$.
3. Per ogni $j \geq 0$: se $s\Box_j A \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ e $sD \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$, allora $s\Box_j D \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$.
4. Per $0 \leq j+l \leq k$: se $s\Box_j A \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ e $s\Box_l B \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$, allora $s\Box_{j+l} B \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$.
5. Se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^{k+1}_\Gamma)$.
6. $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$ se e solo se $s\Box_0 B \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$.

In primo luogo, un agente non può conoscere qualcosa ad una profondità maggiore rispetto a quella di cui è capace.

In secondo luogo, se un agente conosce ad una certa profondità un enunciato, allora conosce quello stesso enunciato a qualunque profondità (maggiore della prima) di cui è capace.

In terzo luogo, se un agente conosce a profondità j che A è vera date le informazioni in Γ e da Γ, insieme all'informazione che A è vera, è possibile derivare analiticamente che l'enunciato contingente D è vero, allora l'agente conosce a profondità j che D è vera.

In quarto luogo, se un agente conosce a profondità j che l'enunciato contingente A è vero date le informazioni in Γ e conosce a profondità l che l'enunciato B è vero date le informazioni in Γ insieme all'informazione che A è vero, allora l'agente conosce a profondità $j + l$ che l'enunciato B è vero date le sole informazioni in Γ.

In quinto luogo, un agente con una certa profondità date informazioni in Γ deriva tutte le conseguenze che un individuo con profondità minore è in grado di derivare da Γ.

Infine, un enunciato è una conseguenza analitica compresa da un agente a profondità zero se e solo se l'agente conosce a profondità zero quell'enunciato. Da un punto di vista formale l'equivalenza di sB e $s\Box_0 B$ decreta la ridondanza dell'operatore $\Box_0$: tuttavia, preferisco mantenere l'operatore a profondità zero perché esso permette di richiedere a ciascun individuo di conoscere, almeno a profondità zero, tutte le informazioni di cui dispone insieme a ciò che è derivabile analiticamente da queste ultime.

La Definizione 13 e le proposizioni enunciate di seguito permettono di rispondere alla domanda posta all'inzio di questo capitolo, indicando che cosa potrebbe e dovrebbe conoscere un individuo che dispone di informazioni incomplete e di risorse computazionali limitate. In particolare, tornando all'Esempio 7.1, specifico di seguito gli enunciati conosciuti da Alice e Luca:

Esempio 7.1.3. Gli enunciati $f\neg p$ e $t(q \vee r)$ sono soddisfatti dall'interpretazione di Alice indicata da I^0_Σ. Infatti, come mostrato nell'Esempio 7.1.1, i due enunciati appartengono a $\mathsf{W}(\Sigma)$ e $\neg p$ e $(q \vee r)$ appartengono a $\mathcal{L}_0$.

L'enunciato $t\Box_0(q \vee r)$ è soddisfatto da I^0_Σ. Infatti, $(q \vee r) \in \mathcal{L}_0$ e per $\varnothing \in \wp(\mathcal{P})$, $\mathsf{R}^\varnothing_\Sigma \in \mathbb{R}^0_\Sigma$ e per ogni $\Sigma' \in \mathbb{A}_c$, se $\Sigma' \in \mathsf{R}^\varnothing_\Sigma$, allora $t(q \vee r) \in \mathsf{W}(\Sigma')$. Il raffinamento minimo di Σ su $\varnothing$ è Σ stesso e $t(q \vee r) \in \mathsf{W}(\Sigma)$. Al contrario, l'enunciato $t\Box_8(q \vee r)$ non è soddisfatto da I^0_Σ, perché $\Box_8(q \vee r) \notin \mathcal{L}_0$.

Per la Proposizione 7.5, tutti gli enunciati soddisfatti dall'interpretazione di Alice sono soddisfatti anche da quella di Luca e quindi $f\neg p, t(q \vee r), t\Box_0(q \vee r) \in Cn(\mathsf{I}^1_\Sigma)$. Inoltre, per la Proposizione 7.3, $t\Box_1(q \vee r) \in Cn(\mathsf{I}^1_\Sigma)$.

Luca, a differenza di Alice, sa a profondità uno che se il Nero non vuole subire lo scacco matto, allora il Nero muove il cavallo e muove l'alfiere e la torre bianca cattura il cavallo nero e la regina bianca cattura l'alfiere nero. La conoscenza di questo enunciato, non disponibile per Alice, permette a Luca di conoscere quali sono le mosse successive del Nero per poter evitare lo scacco matto. Mostro quindi che $t\Box_1(p \to (q \wedge r \wedge u \wedge v)) \in Cn(\mathsf{I}^1_\Sigma)$. Innanzitutto, $\Box_1(p \to (q \wedge r \wedge u \wedge v)) \in \mathcal{L}_1$. Come si è visto nell'Esempio 7.1.2, Δ_1 e Δ_2 sono i raffinamenti minimi di Σ su q e appartengono a $\mathbb{R}^1_\Sigma$: data l'Osservazione 3, è sufficiente mostrare che $t(p \to (q \wedge r \wedge u \wedge v))$ è una conseguenza analitica sia di Δ_1 che di Δ_2.

Per dimostrare che $t(p \to (q \wedge r \wedge u \wedge v)) \in \mathsf{W}(\Delta_1)$ è necessario svolgere il seguente ragionamento:

- $tu \in \mathsf{W}_0(\Delta_1)$, infatti $\Delta_1 \cup \{fu\}$ soddisfa il requisito 9. di inammissibilità perché $tq, fu, t(q \to u) \in \Delta_1 \cup \{fu\}$;
- $t(q \wedge u) \in \mathsf{W}_1(\Delta_1)$, infatti $\mathsf{W}_0(\Delta_1) \cup \{f(q \wedge u)\}$ soddisfa il requisito 6. di inammissibilità perché $tu, tq, f(q \wedge u) \in \mathsf{W}_0(\Delta_1) \cup \{f(q \wedge u)\}$;
- $f\neg(q \wedge u) \in \mathsf{W}_2(\Delta_1)$, infatti $\mathsf{W}_1(\Delta_1) \cup \{t\neg(q \wedge u)\}$ soddisfa il requisito 1. di inammissibilità perché $t\neg(q \wedge u), t(q \wedge u) \in \mathsf{W}_1(\Delta_1) \cup \{t\neg(q \wedge u)\}$
- $f\neg r \in \mathsf{W}_3(\Delta_1)$, infatti $\mathsf{W}_2(\Delta_1) \cup \{t\neg r\}$ soddisfa il requisito 9. di inammissibilità perché $t\neg r, t(\neg r \to \neg(q \wedge u)), f\neg(q \wedge u) \in \mathsf{W}_2(\Delta_1) \cup \{t\neg r\}$
- $tr \in \mathsf{W}_4(\Delta_1)$, infatti $\mathsf{W}_3(\Delta_1) \cup \{fr\}$ soddisfa il requisito 2. di inammissibilità perché $f\neg r, fr \in \mathsf{W}_3(\Delta_1) \cup \{fr\}$
- $tv \in \mathsf{W}_5(\Delta_1)$, infatti $\mathsf{W}_4(\Delta_1) \cup \{fv\}$ soddisfa il requisito 9. di inammissibilità perché $fv, t(r \to v), tr \in \mathsf{W}_4(\Delta_1) \cup \{fv\}$
- $t((q \wedge u) \wedge r) \in \mathsf{W}_5(\Delta_1)$, infatti $\mathsf{W}_4(\Delta_1) \cup \{ft((q \wedge u) \wedge r)\}$ soddisfa il requisito 6. di inammissibilità perché $t(q \wedge u), tr, f((q \wedge u) \wedge r) \in \mathsf{W}_4(\Delta_1) \cup \{f((q \wedge u) \wedge r)\}$
- $t(((q \wedge u) \wedge r) \wedge v) \in \mathsf{W}_6(\Delta_1)$, infatti $\mathsf{W}_5(\Delta_1) \cup \{f(((q \wedge u) \wedge r) \wedge v)\}$ soddisfa il requisito 6. di inammissibilità perché $t((q \wedge u) \wedge r), tv, f(((q \wedge u) \wedge r) \wedge v) \in \mathsf{W}_5(\Delta_1) \cup \{f(((q \wedge u) \wedge r) \wedge v)\}$
- $tp \to (((q \wedge u) \wedge r) \wedge v) \in \mathsf{W}_7(\Delta_1)$, infatti $\mathsf{W}_6(\Delta_1) \cup \{fp \to (((q \wedge u) \wedge r) \wedge v)\}$ soddisfa il requisito 9. di inammissibilità perché $tp, t(((q \wedge u) \wedge r) \wedge v), fp \to (((q \wedge u) \wedge r) \wedge v) \in \mathsf{W}_6(\Delta_1) \cup \{fp \to (((q \wedge u) \wedge r) \wedge v)\}$
- Per la Definizione 6, $t(p \to (q \wedge r \wedge u \wedge v)) \in \mathsf{W}(\Delta_1)$.

Un ragionamento analogo a quello appena condotto mostra che $\mathsf{W}(\Delta_2) \notin \mathbb{A}$. In particolare, tv e fv appartengono entrambi a $\mathsf{W}(\Delta_2)$. Per la Proposizione 2, $sB \in \mathsf{W}(\Delta_2)$ per ogni $sB \in \mathcal{L}^s$ e quindi $t(p \to (q \wedge r \wedge u \wedge v)) \in \mathsf{W}(\Delta_2)$.

7.3.4 Relazione di conseguenza

Introduco di seguito alcune definizioni fondamentali, cominciando dalla nozione di conseguenza logica di Γ a profondità k:

Definizione 14. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, sB è una *conseguenza logica di* Γ *a profondità* k se e solo se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$.

Un enunciato è conseguenza logica di Γ se può essere derivato da Γ a qualunque profondità e, in particolare, a profondità zero:

Definizione 15. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, sB è una *conseguenza logica di* Γ, scritto $sB \in Cn(\Gamma)$, se e solo se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma \in \mathbb{I}_\Gamma$.

Proposizione 8. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, sB è una conseguenza logica di Γ se e solo se $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$.

Inoltre, si dice che un enunciato è una tautologia a profondità k se può essere derivato a profondità k da qualunque insieme di informazioni e, in particolare, dall'insieme vuoto:

Definizione 16. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, sB è una *tautologia a profondità* k se e solo se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma \in \mathbb{I}^k$.

Proposizione 9. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, sB è una *tautologia a profondità* k se e solo se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$.

Infine, risulta che nessun enunciato può essere derivato qualunque sia la profondità dell'agente e qualunque siano le informazioni iniziali:

Definizione 17. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, sB è una *verità universalmente valida*, scritto $sB \in Cn(\varnothing)$, se e solo se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma \in \mathbb{I}$.

Osservazione 4. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, sB è una *verità universalmente valida* se e solo se $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\varnothing)$.

Proposizione 10. Non esistono verità universalmente valide.

Il sistema di logica epistemica a profondità limitata è stato formulato per risolvere il problema dell'onniscienza logica che, per come è stato analizzato nei capitoli precedenti, risulta dall'intrattabilità della nozione di conseguenza logica classica.

Mostro ora che la logica epistemica a profondità limitata assume il principio di onniscienza logica, ma, dato che la sua relazione di conseguenza logica è trattabile, l'assunzione di onniscienza non risulta problematica.

Il principio di onniscienza logica, per cui se sB è una conseguenza logica di Γ e un agente conosce gli enunciati in Γ, allora l'agente conosce anche sB, è espresso formalmente dalla proposizione che segue:

Proposizione 11. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, $\Gamma \in \mathbb{A}_c$ e $\mathsf{I}^k_\Sigma \in \mathbb{I}$, se $sB \in Cn(\Gamma)$ e $s_i\Box_j C_i \in Cn(\mathsf{I}^k_\Sigma)$ per ogni $s_iC_i \in \Sigma$, allora $s\Box_j B \in Cn(\mathsf{I}^k_\Sigma)$.

Dato che un enunciato sB è conseguenza logica di un insieme di enunciati Γ solo se sB è soddisfatto dall'interpretazione a profondità zero di Γ (Proposizione 8), per individuare le conseguenze logiche di un insieme di informazioni non è necessario impiegare alcuna assunzione virtuale. Dal momento che, come osservato da D'Agostino e Floridi (2009), l'intrattabilità della logica proposizionale classica è determinata da un uso illimitato di informazioni virtuali, la relazione di conseguenza logica della logica epistemica a profondità limitata è trattabile.

In particolare, il problema di decidere nella logica epistemica a profondità limitata se $sA \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$ può essere tradotto nel problema di decidere nella logica booleana a profondità zero di D'Agostino e Floridi (2009) se un certo enunciato è conseguenza logica a profondità zero di un determinato insieme di enunciati. Sia $\Gamma = \{s_1B_1, \ldots, s_nB_n\}$. Per la Definizione 10, dato che $\Gamma \in \mathbb{A}_c$, Γ non include enunciati in cui occorrono operatori epistemici. Sia $\Pi = \{C_1, \ldots, C_n\}$ un insieme di enunciati costruito a partire da Γ in questo modo: per ogni $s_iB_i \in \Gamma$, se $s_i = t$, allora $B_i = C_i \in \Pi$ e se $s_i = f$, allora $\neg B_i = C_i \in \Pi$. Sia $t\Pi = \{tC_1, \ldots, tC_n\}$. Per la Definizione 13.2, se $sA \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$, allora A contiene al più operatori epistemici di profondità zero. Data la Proposizione 7.6, ogni espressione del tipo $\Box_0 D$ che occorre in B può essere sostituita da D: sia sE il risultato di questa sostituzione e sia F uguale a E se $s = t$ oppure uguale a $\neg E$ se $s = f$.

Il problema di decidere se $sA \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$ o, equivalentemente, di decidere se $tF \in Cn(\mathsf{I}^0_{t\Pi})$, coincide con il problema di decidere se $\Pi \vDash_0 F$, dato che, se $tF \in \mathsf{W}(t\Pi)$, allora per ogni valutazione 3ND v, se $v(C_i) = 1$ per ogni $C_i \in \Pi$, allora $v(F) = 1$.

7.4 Appendice

Questa appendice include le dimostrazioni di tutte le proposizioni enunciate nella Sezione 7.3.

Proposizione 1.1. Per ogni $\Gamma \subseteq \mathcal{L}^s$ e per ogni $B \in \mathcal{L}$:

1) $sB \in \Gamma$ [Ipotesi]

2) $sB \in \Gamma \cup \{\bar{s}B\}$ e $\bar{s}B \in \Gamma \cup \{\bar{s}B\}$ [1) e costruzione]

3) $\Gamma \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{G}$ [Definizione 4 e 2)]

4) $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{G}$ [Definizione 5]

5) $\Gamma \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}$ [3) e 4)]

Proposizione 1.2. Per ogni $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{L}^s$ e per ogni $B \in \mathcal{L}$:

1) $\Gamma \cup \{sB\} \notin \mathbb{A}$ [Ipotesi]

2) $\Gamma \cup \{sB\}$ soddisfa almeno una condizione $\mathcal{C}$ tra 5.1.-5.13. per qualche $F, G \in \mathcal{L}$ [Definizione 5 e 1)]

3) $\Gamma \cup \Delta \cup \{sB\}$ soddisfa la condizione $\mathcal{C}$ per $F, G \in \mathcal{L}$ [Costruzione e 2)]

4) $\Gamma \cup \Delta \cup \{sB\} \notin \mathbb{A}$ [Definizione 5 e 3)]

Proposizione 2. Per ogni $\Gamma \in \mathbb{A}$:

1) $\mathsf{W}(\Gamma) \notin \mathbb{A}$ [Ipotesi]

2) $\exists j \geq 0 \mid \mathsf{W}_j(\Gamma) \notin \mathbb{A}$ [Definizione 6 e 1)]

3) $\mathsf{W}_j(\Gamma) \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}$ per $B \in \mathcal{L}$ qualunque [Proposizione 1.1 e 2)]

4) $sB \in \mathsf{W}_{j+1}(\Gamma)$ per $B \in \mathcal{L}$ qualunque [Definizione 6 e 3)]

5) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ per $B \in \mathcal{L}$ qualunque [Definizione 6 e 4)]

Proposizione 3. Per ogni $\Gamma \in \mathbb{A}$, $B \in \mathcal{L}$ e $j \geq 0$:

1) $sB \in \mathsf{W}_j(\Gamma)$ [Ipotesi]

2) $\mathsf{W}_j(\Gamma) \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}$ [Proposizione 1.1 e 1)]

3) $sB \in \mathsf{W}_{j+1}(\Gamma)$ [Definizione 6 e 2)]

Proposizione 4.1. Per ogni $\Gamma \in \mathbb{A}$ e $B \in \mathcal{L}$:

1) $sB \in \Gamma$ [Ipotesi]

2) $\Gamma \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}$ [Proposizione 1.1 e 1)]

3) $sB \in \mathsf{W}_0(\Gamma)$ [Definizione 6 e 2)]

4) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Definizione 6 e 3)]

Proposizione 4.2. Per ogni $\Gamma, \Gamma \cup \Delta \in \mathbb{A}$ e $B \in \mathcal{L}$:

1) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Ipotesi]

2) $\exists j \geq 0 \mid sB \in \mathsf{W}_j(\Gamma)$ [Definizione 6 e 1)]

3) $sB \in \mathsf{W}_j(\Gamma \cup \Delta)$ [Lemma 1 (seguente) e 2)]

4) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma \cup \Delta)$ [Definizione 6 e 3)]

Lemma 1. Per ogni $\Gamma, \Gamma \cup \Delta \in \mathbb{A}$, $B \in \mathcal{L}$ e $j \geq 0$, se $sB \in \mathsf{W}_j(\Gamma)$, allora $sB \in \mathsf{W}_j(\Gamma \cup \Delta)$.
Dimostrazione per induzione su $j \geq 0$:

- Passo base: $j = 0$. Dimostriamo che se $sB \in \mathsf{W}_0(\Gamma)$, allora $sB \in \mathsf{W}_0(\Gamma \cup \Delta)$.

  1) $sB \in \mathsf{W}_0(\Gamma)$ [Ipotesi]
  2) $\Gamma \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}$ [Definizione 6 e 1)]
  3) $\Gamma \cup \Delta \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}$ [Proposizione 1.2 e 2)]
  4) $sB \in \mathsf{W}_0(\Gamma \cup \Delta)$ [Definizione 6 e 3)]

- Ipotesi induttiva: $j = n$. Assumiamo che $sB \in \mathsf{W}_n(\Gamma)$, allora $sB \in \mathsf{W}_n(\Gamma \cup \Delta)$.

- Passo induttivo: $j = n + 1$. Dimostriamo che $sB \in \mathsf{W}_{n+1}(\Gamma)$, allora $sB \in \mathsf{W}_{n+1}(\Gamma \cup \Delta)$.

  1) $sB \in \mathsf{W}_{n+1}(\Gamma)$ [Ipotesi]
  2) $\mathsf{W}_n(\Gamma) \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}$ [Definizione 6 e 1)]
  3) $\mathsf{W}_n(\Gamma) \subseteq \mathsf{W}_n(\Gamma \cup \Delta)$ [Ipotesi induttiva]
  4) $\mathsf{W}_n(\Gamma \cup \Delta) \cup \{\bar{s}B\} \notin \mathbb{A}$ [Proposizione 1.2, 2) e 3)]
  5) $sB \in \mathsf{W}_{n+1}(\Gamma \cup \Delta)$ [Definizione 6 e 4)]

Proposizione 4.3. Per ogni $\Gamma, \Gamma \cup \{sB\} \in \mathbb{A}$ e $B, C \in \mathcal{L}$:

1) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Ipotesi]

2) $\exists n \geq 0 \mid sB \in \mathsf{W}_n(\Gamma)$ [Definizione 6 e 1)]

3) $sC \in \mathsf{W}(\Gamma \cup \{sB\})$ [Ipotesi]

4) $\exists k \geq 0 \mid sC \in \mathsf{W}_k(\Gamma \cup \{sB\})$ [Definizione 6 e 3)]

5) $sC \in \mathsf{W}_{n+k+1}(\Gamma)$ [Lemma 2 (seguente), 2) e 4)]

6) $sC \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Definizione 6 e 5)]

Lemma 2. Per ogni $\Gamma, \Gamma \cup \{sB\} \in \mathbb{A}$, $B, C \in \mathcal{L}$ e $n, k \geq 0$, se $sB \in \mathsf{W}_n(\Gamma)$ e $sC \in \mathsf{W}_k(\Gamma \cup \{sB\})$, allora $sC \in \mathsf{W}_{n+k+1}(\Gamma)$.
Dimostrazione per induzione su $k \geq 0$:

- Passo base: $k = 0$. Dimostriamo che se $sB \in \mathsf{W}_n(\Gamma)$ e $sC \in \mathsf{W}_0(\Gamma \cup \{sB\})$, allora $sC \in \mathsf{W}_{n+1}(\Gamma)$.

  1) $sC \in \mathsf{W}_0(\Gamma \cup \{sB\})$ [Ipotesi]
  2) $\Gamma \cup \{sB\} \cup \{\bar{s}C\} \notin \mathbb{A}$ [Definizione 6 e 1)]
  3) $sB \in \mathsf{W}_n(\Gamma)$ [Ipotesi]
  4) $\mathsf{W}_n(\Gamma) = \Gamma \cup \{sB\} \cup (\mathsf{W}_n(\Gamma) \setminus \Gamma \cup \{sB\})$ [Proposizione 4.1 e 3)]
  5) $\Gamma \cup \{sB\} \cup (\mathsf{W}_n(\Gamma) \setminus \Gamma \cup \{sB\}) \cup \{\bar{s}C\} \notin \mathbb{A}$ [Proposizione 1.2, 2) e 4)]
  6) $\mathsf{W}_n(\Gamma) \cup \{\bar{s}C\} \notin \mathbb{A}$ [4) e 5)]
  7) $sC \in \mathsf{W}_{n+1}(\Gamma)$ [Definizione 6. e 6)]

- Ipotesi induttiva: $k = m - 1$. Assumiamo che se $sB \in \mathsf{W}_n(\Gamma)$ e $sC \in \mathsf{W}_{m-1}(\Gamma \cup \{sB\})$, allora $sC \in \mathsf{W}_{n+m}(\Gamma)$.
- Passo induttivo: $k = m$. Dimostriamo che se $sB \in \mathsf{W}_n(\Gamma)$ e $sC \in \mathsf{W}_m(\Gamma \cup \{sB\})$, allora $sC \in \mathsf{W}_{n+m+1}(\Gamma)$.

  1) $sC \in \mathsf{W}_m(\Gamma \cup \{sB\})$ [Ipotesi]
  2) $\mathsf{W}_{m-1}(\Gamma \cup \{sB\}) \cup \{\bar{s}C\} \notin \mathbb{A}$ [Definizione 6 e 1)]
  3) $sB \in \mathsf{W}_n(\Gamma)$ [Ipotesi]
  4) $\mathsf{W}_{m-1}(\Gamma \cup \{sB\}) \subseteq \mathsf{W}_{n+m}(\Gamma)$ [Ipotesi induttiva]
  5) $\mathsf{W}_{n+m}(\Gamma) \cup \{\bar{s}C\} \notin \mathbb{A}$ [Proposizione 1.2, 2) e 3)]
  6) $sC \in \mathsf{W}_{n+m+1}(\Gamma)$ [Definizione 6 e 5)]

Proposizione 5.1. Per ogni $\Gamma \in \mathbb{A}_c$, $\Gamma \subseteq \Gamma$ e, per Definizione 9, Γ è un raffinamento di Γ su $\varnothing$. Da ciò, per Definizione 10.2, segue che $\Gamma \in \mathsf{R}_\Gamma^\varnothing$.

Proposizione 5.2. Per ogni $\Gamma, \Gamma \cup \{sA\}, \Delta \in \mathbb{A}_c$, $A \in \mathcal{L}_c$ e $J = \{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$:

1) $\Delta \in R^J_{\Gamma \cup \{sA\}}$ [Ipotesi]

2) Δ è un raffinamento di $\Gamma \cup \{sA\}$ su J [Definizione 10.1 e 1)]

3) $\Gamma \cup \{sA\} \subseteq \Delta$ [Definizione 9 e 2)]

4) $s_1q_1, \ldots, s_jq_j \in \Delta$ per $s_i \in \{t, f\}$ [Definizione 9 e 2)]

5) $\Gamma \subseteq \Gamma \cup \{sA\}$ [Costruzione]

6) $\Gamma \subseteq \Delta$ [3) e 5)]

7) Δ è un raffinamento di $\Gamma \cup \{sA\}$ su J [Definizione 9,4) e 6)]

8) $\Delta \in R^J_\Gamma$ [Definizione 10.2 e 7)]

Proposizione 5.3. Per ogni $\Gamma, \Delta \in \mathbb{A}_c$, $L = \{r_1, \dots, r_l\} \in \wp(\mathcal{P})$, $N = \{r_1, \dots, r_l, r_{l+1}, \dots, r_n\} \in \wp(\mathcal{P})$ con $L \subseteq N$:

1) $\Delta \in \mathsf{R}_\Gamma^N$ [Ipotesi]

2) Δ è un raffinamento di Γ su N [Definizione 10.1 e 1)]

3) $\Gamma \subseteq \Delta$ [Definizione 9 e 2)]

4) $s_1 r_1, \dots, s_l r_l, s_{l+1} r_{l+1}, \dots, s_n r_n \in \Delta$ per $s_i \in \{t, f\}$ [Definizione 9 e 2)]

5) $L \subseteq N$ [Ipotesi]

6) $s_1 r_1, \dots, s_l r_l \in \Delta$ per $s_i \in \{t, f\}$ [4) e 5)]

7) Δ è un raffinamento di Γ su L [Definizione 9, 6) e 3)]

8) $\Delta \in \mathsf{R}_\Gamma^L$ [Definizione 10.2 e 7)]

Proposizione 5.4. Per ogni $\Gamma, \Delta, \Lambda \in \mathbb{A}_c$, $J = \{q_1, \dots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$ e $L = \{r_1, \dots, r_l\} \in \wp(\mathcal{P})$:

1) $\Delta \in \mathsf{R}_\Gamma^J$ [Ipotesi]

2) Δ è un raffinamento di Γ su J [Definizione 10.1 e 1)]

3) $\Gamma \subseteq \Delta$ [Definizione 9 e 2)]

4) $s_1 q_1, \dots, s_j q_j \in \Delta$ per $s_i \in \{t, f\}$ [Definizione 9 e 2)]

5) $\Lambda \in \mathsf{R}_\Delta^L$ [Ipotesi]

6) Λ è un raffinamento di Δ su L [Definizione 10.1 e 5)]

7) $\Delta \subseteq \Lambda$ [Definizione 9 e 6)]

8) $s_1 q_r, \dots, s_l r_l \in \Lambda$ per $s_i \in \{t, f\}$ [Definizione 9 e 6)]

9) $\Gamma \subseteq \Lambda$ [3) e 7)]

10) $s_1 q_1, \dots, s_j q_j \in \Lambda$ per $s_i \in \{t, f\}$ [4) e 7)]

11) $s_1 q_1, \dots, s_j q_j, s_{j+1} r_1, \dots, s_m r_l \in \Lambda$ per $s_i \in \{t, f\}$ [8) e 10)]

12) Λ è un raffinamento di Γ su J [Definizione 9, 9) e 10)]

13) $\Lambda \in \mathsf{R}^J_\Gamma$ [Definizione 10.2 e 12)]

14) Λ è un raffinamento di Γ su L [Definizione 9, 9) e 8)]

15) $\Lambda \in \mathsf{R}^L_\Gamma$ [Definizione 10.2 e 14)]

16) Λ è un raffinamento di Γ su $J \cup L$ [Definizione 9, 9) e 11)]

17) $\Lambda \in \mathsf{R}^{J\cup L}_\Gamma$ [Definizione 10.2 e 16)]

Proposizione 6.1. Per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma \in \mathbb{I}$:

1) $A \in \mathcal{L}_c$ [Ipotesi]

2) $sA \in \Gamma$ [Ipotesi]

3) $sA \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Proposizione 4.1 e 2)]

4) $A \in \mathcal{L}_k$ [Osservazione 1.1 e 1)]

5) $sA \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Definizione 13.1, 1) e 4)]

Proposizione 6.2. Distinguiamo due casi: a) B è una tra $p, \neg C, C \vee D, C \wedge D$ e $C \to D$, per $p \in \mathcal{P}$ e $C, D \in \mathcal{L}$; b) B è $\Box_j C$ per qualunque $j \geq 0$ e $C \in \mathcal{L}$.

- Caso a)

  Per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma, \mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}} \in \mathbb{I}$ e $A \in \mathcal{L}_c$:

  1) $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Ipotesi]
  2) $B \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.1.a e 1)]
  3) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Definizione 13.1.b e 1)]
  4) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma \cup \{sA\})$ [Proposizione 4.2 e 3)]
  5) $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$ [Definizione 13.1, 2) e 4)]

- Caso b)

  Per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma, \mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}} \in \mathbb{I}$ e $A \in \mathcal{L}_c$:

  1) $s\Box_j C \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Ipotesi]
  2) $C \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.2.a e 1)]
  3) Esiste $J = \{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$ tale che:

i. $\mathsf{R}^J_\Gamma \in \mathbb{R}^k_\Gamma$ e

ii. $\forall \Delta \in \mathbb{A}_c$, se $\Delta \in \mathsf{R}^J_\Gamma$, allora $sC \in \mathsf{W}(\Delta)$ [Definizione 13.2.b e 1)]

4) $J \in \wp(\mathcal{P})$ e $0 \leq j \leq k$ [Definizione 11.1. e 3.i)]

5) $\mathsf{R}^J_{\Gamma\cup\{sA\}} \in \mathbb{R}^k_{\Gamma\cup\{sA\}}$ [Definizione 11.2 e 4)]

6) $\forall \Lambda \in \mathbb{A}_c$, se $\Lambda \in \mathsf{R}^J_{\Gamma\cup\{sA\}}$, allora $\Lambda \in \mathsf{R}^J_\Gamma$ [Proposizione 5.2]

7) $\forall \Lambda \in \mathbb{A}_c$, se $\Lambda \in \mathsf{R}^J_{\Gamma\cup\{sA\}}$, allora $sC \in \mathsf{W}(\Lambda)$ [3.ii) e 6)]

8) $s\Box_j C \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$ [Definizione 13, 2), 5) e 7)]

Proposizione 6.3. Distinguiamo due casi: a) B è una tra $p, \neg C, C \vee D, C \wedge D$ e $C \rightarrow D$, per $p \in \mathcal{P}$ e $C, D \in \mathcal{L}$; b) B è $\Box_j C$ per qualunque $j \geq 0$ e $C \in \mathcal{L}$.

- Caso a)

  Per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma, \mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}} \in \mathbb{I}$ e $A \in \mathcal{L}_c$:

  1) $sA \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Ipotesi]
  2) $sA \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Definizione 13.1.b e 1)]
  3) $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$ [Ipotesi]
  4) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma \cup \{sA\})$ [Definizione 13.1.b e 3)]
  5) $B \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.1.a e 3)]
  6) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Proposizione 4.3, 2) e 4)]
  7) $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Definizione 13.1, 5) e 6)]

- Caso b)

  1) $sA \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Ipotesi]
  2) $sA \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Definizione 13.2.b e 1)]
  3) $s\Box_j C \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$ [Ipotesi]
  4) $C \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.2.a e 3)]
  5) Esiste $J = \{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$ tale che:

     i. $\mathsf{R}^J_{\Gamma\cup\{sA\}} \in \mathbb{R}^k_{\Gamma\cup\{sA\}}$ e

     ii. $\forall \Lambda \in \mathbb{A}_c$, se $\Lambda \in \mathsf{R}^J_{\Gamma\cup\{sA\}}$, allora $sC \in \mathsf{W}(\Lambda)$ [Definizione 13.2.b e 3)]

6) $J \in \wp(\mathcal{P})$ e $0 \leq j \leq k$ [Definizione 11.1 e 5.i)]

7) Per $J = \{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$, $\mathsf{R}^J_\Gamma \in \mathbb{R}^k_\Gamma$ [Definizione 11.2 e 6)]

8) $\forall \Lambda \in \mathbb{A}_c$, se $\Lambda \in \mathsf{R}^J_{\Gamma \cup \{sA\}}$, allora Λ è della forma $\Gamma \cup s_i J \cup \{sA\} \cup \Sigma$, dove $s_i J = \{s_1 q_1, \ldots, s_j q_j\}$ con $q_1, \ldots, q_j \in J$ e $s_1, \ldots, s_j \in \{t, f\}$ e $\Sigma \subseteq \mathcal{L}^s_c$ qualsiasi [Definizioni 9 e 10.1]

9) Consideriamo i raffinamenti minimi di $\Gamma \cup \{sA\}$ su J, ossia gli insiemi $\Gamma \cup s_i J \cup \{sA\}$

10) $sC \in \mathsf{W}(\Gamma \cup s_i J \cup \{sA\})$ per ogni insieme $s_i J$ [5.ii), 8) e 9)]

11) $sA \in \mathsf{W}(\Gamma \cup s_i J)$ per ogni insieme $s_i J$ [Proposizione 4.2 e 2)]

12) $sC \in \mathsf{W}(\Gamma \cup s_i J)$ per ogni insieme $s_i J$ [Proposizione 4.3, 10) e 11)]

13) $sC \in \mathsf{W}(\Gamma \cup s_i J \cup \Phi)$ per ogni insieme $s_i J$ e per qualunque $\Phi \subseteq \mathcal{L}^s$ [Proposizione 4.2 e 12)]

14) $\forall \Delta \in \mathbb{A}_c$, se $\Delta \in \mathsf{R}^J_\Gamma$, allora Δ è della forma $\Gamma \cup s_i J \cup \Phi$ [Definizioni 9 e 10.1]

15) $\forall \Delta \in \mathbb{A}_c$, se $\Delta \in \mathsf{R}^J_\Gamma$, allora $sC \in \mathsf{W}(\Delta)$ [13) e 14)]

16) $s\Box_j C \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Definizione 13.2, 4), 7) e 15)]

Proposizione 7.1. Per la contrappositiva della Definizione 11.1, se $\{q_1, \ldots, q_m\} \in \wp(\mathcal{P})$ e $0 \leq k < m$, allora $\mathsf{R}^{\{q_1,\ldots,q_m\}}_\Gamma \notin \mathbb{R}^k_\Gamma$. Da ciò, per l'Osservazione 2, segue che per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma \in \mathbb{I}$, $s\Box_m B \notin Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$.

Proposizione 7.2. Per ogni I^k_Γ e $B \in \mathcal{L}$:

1) $s\Box_j B \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Ipotesi]

2) $B \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.2.a e 1)]

3) Esiste $J = \{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$:

   i) $\mathsf{R}^J_\Gamma \in \mathbb{R}^k_\Gamma$ e

   ii) $\forall \Delta \in \mathbb{A}_c$, se $\Delta \in \mathsf{R}^J_\Gamma$, allora $sB \in \mathsf{W}(\Delta)$ [Definizione 13.2.b e 1)]

4) $0 \leq j \leq l \leq k$ [Ipotesi]

5) Per $L = \{q_1, \ldots, q_j, q_{j+1}, \ldots, q_l\} \in \wp(\mathcal{P})$, con $L \supset J$, $\mathsf{R}^L_\Gamma \in \mathbb{R}^k_\Gamma$ [Definizione 11.2 e 4)]

6) $\forall \Lambda \in \mathbb{A}_c$, se $\Lambda \in \mathsf{R}^L_\Gamma$, allora $\Lambda \in \mathsf{R}^J_\Gamma$ [Proposizione 5.3 e 5)]

7) $\forall \Lambda \in \mathbb{A}_c$, se $\Lambda \in \mathsf{R}^L_\Gamma$, allora $sB \in \mathsf{W}(\Lambda)$ [3.ii) e 6)]

8) $s\Box_l B \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Definizione 13.2, 2), 5) e 7)]

Proposizione 7.3. Per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma, \mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}} \in \mathbb{I}$, $A, D \in \mathcal{L}_c$:

1) $s\Box_j A \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Ipotesi]

2) $A \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.2.a e 1)]

3) Esiste $J = \{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$:

   i) $\mathsf{R}^J_\Gamma \in \mathbb{R}^k_\Gamma$ e

   ii) $\forall \Delta \in \mathbb{A}_c$, se $\Delta \in \mathsf{R}^J_\Gamma$, allora $sA \in \mathsf{W}(\Delta)$ [Definizione 13.2.b e 1)]

4) $sD \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$ [Ipotesi]

5) $D \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.1.a e 4)]

6) $sD \in \mathsf{W}(\Gamma \cup \{sA\})$ [Definizione 13.1.b e 4)]

7) Se $\Gamma \subseteq \Delta$, allora $sD \in \mathsf{W}(\Delta \cup \{sA\})$ [Proposizione 4.2 e 6)]

8) $\forall \Delta \in \mathbb{A}_c$, se $\Delta \in \mathsf{R}^J_\Gamma$, allora $sD \in \mathsf{W}(\Delta \cup \{sA\})$ [Definizione 9 e 7)]

9) $\forall \Delta \in \mathbb{A}_c$, se $\Delta \in \mathsf{R}^J_\Gamma$, allora $sD \in \mathsf{W}(\Delta)$ [Proposizione 4.3, 3.ii) e 8)]

10) $s\Box_j D \in Cn(I^k_\Gamma)$ [Definizione 13.2, 3.i), 5) e 9)]

Proposizione 7.4. Per ogni $\mathsf{I}^k_\Gamma, \mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}} \in \mathbb{I}$, $A \in \mathcal{L}_c$ e $B \in \mathcal{L}$:

1) $s\Box_j A \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Ipotesi]

2) $A \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.2.a e 1)]

3) Esiste $J = \{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$:

   i) $\mathsf{R}^J_\Gamma \in \mathbb{R}^k_\Gamma$ e

   ii) $\forall \Delta \in \mathbb{A}_c$, se $\Delta \in \mathsf{R}^J_\Gamma$, allora $sA \in \mathsf{W}(\Delta)$ [Definizione 13.2.b e 1)]

4) $s\Box_l B \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$ [Ipotesi]

5) $B \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.2.a e 4)]

6) Esiste $L = \{r_1, \ldots, r_l\} \in \wp(\mathcal{P})$:

   i) $\mathsf{R}^L_{\Gamma\cup\{sA\}} \in \mathbb{R}^k_{\Gamma\cup\{sA\}}$ e

   ii) $\forall \Lambda \in \mathbb{A}_c$, se $\Lambda \cup \{sA\} \in \mathsf{R}^J_{\Gamma\cup\{sA\}}$, allora $sB \in \mathsf{W}(\Lambda \cup \{sA\})$ [Definizione 13.2.b e 4)]

7) $0 \leq j + l \leq k$ [Ipotesi]

8) Per $J \cup L \in \wp(\mathcal{P})$, $\mathsf{R}^{J\cup L}_\Gamma \in \mathbb{R}^k_\Gamma$ [Definizione 11.2, 3.i), 6.i) e 7)]

9) $\forall \Sigma \in \mathbb{A}_c$, se $\Sigma \in \mathsf{R}^{J\cup L}_\Gamma$, allora $\Sigma \in \mathsf{R}^J_\Gamma$ e $\Sigma \in \mathsf{R}^L_\Gamma$ [Proposizione 2.3]

10) $\forall \Sigma \in \mathbb{A}_c$, se $\Sigma \in \mathsf{R}^{J\cup L}_\Gamma$, allora $sA \in \mathsf{W}(\Sigma)$ e $sB \in \mathsf{W}(\Sigma \cup \{sA\})$ [3.ii), 6.ii) e 9)]

11) $\forall \Sigma \in \mathbb{A}_c$, se $\Sigma \in \mathsf{R}^{J\cup L}_\Gamma$, allora $sB \in \mathsf{W}(\Sigma)$ [Proposizione 4.3 e 10)]

12) $s\Box_{j+l}B \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Definizione 13.2, 5), 8) e 11)]

Proposizione 7.5. Distinguiamo due casi: a) B è una tra $p, \neg C, C \vee D, C \wedge D$ e $C \to D$, per $p \in \mathcal{P}$ e $C, D \in \mathcal{L}$; b) B è $\Box_j C$ per qualunque $j \geq 0$ e $C \in \mathcal{L}$.

- Caso a):

  1) $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Ipotesi]

  2) $B \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.1.a e 1)]

  3) $B \in \mathcal{L}_{k+1}$ [Osservazione 1.1 e 2)]

  4) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Definizione 13.1.b e 1)]

  5) $sB \in Cn(\mathsf{I}^{k+1}_\Gamma)$ [Definizione 13.1, 3) e 4)]

- Caso b)

  1) $s\Box_j C \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Ipotesi]

  2) $C \in \mathcal{L}_k$ [Definizione 13.2.a e 1)]

  3) $C \in \mathcal{L}_{k+1}$ [Osservazione 1.1 e 2)]

  4) Esiste $J = \{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$:

     i) $\mathsf{R}^J_\Gamma \in \mathbb{R}^k_\Gamma$ e

ii) $\forall \Delta \in \mathbb{A}_c$, se $\Delta \in \mathsf{R}^J_\Gamma$, allora $sC \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Definizione 13.2.b e 1)]

5) $0 \leq j \leq k \leq k+1$ [Definizione 11.1 e 4.i)]

6) Per $J = \{q_1, \ldots, q_j\} \in \wp(\mathcal{P})$, $\mathsf{R}^J_\Gamma \in \mathbb{R}^{k+1}_\Gamma$ [Definizione 11.2 e 5)]

7) $s\Box_j C \in Cn(\mathsf{I}^{k+1}_\Gamma)$ [Definizione 13.2, 3), 4.ii) e 6)]

Proposizione 7.6. Distinguiamo i due versi dell'equivalenza:

- Per ogni $\mathsf{I}^0_\Gamma \in \mathbb{I}$ e per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$, allora $s\Box_0 B \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$.

  1) $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$ [Ipotesi]

  2) $sB \in \mathcal{L}_0$ [Definizione 13.1.a. e 1)]

  3) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Definizione 13.1.b e 1)]

  4) Γ è l'unico raffinamento minimo di Γ su $\varnothing$ [Costruzione]

  5) Per ogni raffinamento minimo di Γ su $\varnothing$, $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [4) e 5)]

  6) Per ogni $\Lambda \in \mathbb{A}_c$, se $\Lambda \in \mathsf{R}^\varnothing_\Gamma$, allora $sB \in \mathsf{W}(\Lambda)$ [Osservazione 3 e 5)]

  7) $\mathsf{R}^\varnothing_\Gamma \in \mathbb{R}^0_\Gamma$ [Costruzione]

  8) $s\Box_0 B \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$ [Definizione 13.2, 2), 6) e 7)]

- Per ogni $\mathsf{I}^0_\Gamma \in \mathbb{I}$ e per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $s\Box_0 B \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$.

  1) $s\Box_0 B \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$ [Ipotesi]

  2) $B \in \mathcal{L}_0$ [Definizione 13.2.a e 1)]

  3) $\mathsf{R}^\varnothing_\Gamma \in \mathbb{R}^0_\Gamma$ [Definizione 13.2.b e 1)]

  4) $\forall \Lambda \in \mathbb{A}_c$, se $\Lambda \in \mathsf{R}^\varnothing_\Gamma$, allora $sB \in \mathsf{W}(\Lambda)$ [Definizione 13.2.b e 1)]

  5) $\Gamma \in \mathsf{R}^\varnothing_\Gamma$ [Proposizione 5.1]

  6) $sB \in \mathsf{W}(\Lambda)$ [4) e 5)]

  7) $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$ [Definizione 13.1 e 2) e 6)]

Proposizione 8. Distinguiamo i due versi dell'equivalenza:

- Per ogni $B \in \mathcal{L}$, se sB è una conseguenza logica di Γ, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$.

  1) sB è una conseguenza logica di Γ [Ipotesi]

  2) $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ per ogni $k \geq 0$ [Definizione 15 e 1)]

3) In particolare, per $k = 0$, $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$ [2)]

- Per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$, allora sB è una conseguenza logica di Γ.

  Per la Definizione 15, questo equivale ad affermare che per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ per ogni $k \geq 0$.

  Dimostrazione per induzione su $k \geq 0$:

  - Passo base: $k = 0$. Se $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$.
  - Ipotesi induttiva: $k = m$. Assumiamo che per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^m_\Gamma)$.
  - Passo induttivo: $k = m + 1$. Dimostriamo che per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^{m+1}_\Gamma)$.

    1) Per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^m_\Gamma)$ [Ipotesi induttiva]
    2) Per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $sB \in Cn(\mathsf{I}^m_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^{m+1}_\Gamma)$ [Proposizione 7.5]
    3) Per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^{m+1}_\Gamma)$ [1) e 2)]

Proposizione 9. Distinguiamo i due versi dell'equivalenza:

- Per ogni $B \in \mathcal{L}$, se sB è una tautologia a profondità k, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$.

  1) sB è una tautologia a profondità k [Ipotesi]
  2) $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ per ogni $\Gamma \in \mathbb{A}_c$ [Definizione 16 e 1)]
  3) $\varnothing \in \mathbb{A}_c$, perché $\varnothing \subseteq \mathcal{L}^s_c$ e $\varnothing$ non soddisfa alcuna condizione di inammissibilità [Definizione 4 e Definizione 7]
  4) $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$.

- Per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$, allora sB è una tautologia a profondità k.

  Per la Definizione 16, questo equivale ad affermare che per ogni $B \in \mathcal{L}$, se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ per ogni $\Gamma \in \mathbb{A}_c$.

  Dimostrazione per induzione su $|\Gamma| = j$.

  - Passo base: $j = 0$ e $\Gamma = \varnothing$. Se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$.
  - Ipotesi induttiva: $|\Gamma| = m$. Assumiamo che se $\Gamma \in \mathbb{A}_c$ e $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$.

- Passo induttivo: $|\Gamma \cup \{sA\}| = m+1$. Dimostriamo che se $\Gamma \cup \{sA\} \in \mathbb{A}_c$ e $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$.
  1) Se $\Gamma \in \mathbb{A}_c$ e $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Ipotesi induttiva]
  2) Se $\Gamma \cup \{sA\} \in \mathbb{A}_c$ e se $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\{sA\}})$ [Proposizione 6.2 e 1)]
  3) Se $\Gamma \cup \{sA\} \in \mathbb{A}_c$ e $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\varnothing)$, allora $sB \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [1) e 2)]

Proposizione 10. Per l'Osservazione 4, l'enunciato della Proposizione 10 è equivalente al seguente: $Cn(\mathsf{I}^0_\varnothing) = \varnothing$. Per assurdo, assumiamo che $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\varnothing)$. Distinguiamo due casi: a) B è una tra $p, \neg C, C \vee D, C \wedge D$ e $C \to D$, per $p \in \mathcal{P}$ e $C, D \in \mathcal{L}$; b) B è $\Box_j C$ per qualunque $j \geq 0$ e $C \in \mathcal{L}$.

- Caso a):
  1) $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\varnothing)$ [Ipotesi per assurdo]
  2) $sB \in \mathsf{W}(\varnothing)$ [Definizione 13.1.b e 1)]
  3) $sB \notin \mathsf{W}(\varnothing)$ [Lemma 3 (seguente)]
  4) Assurdo [2) e 3)]
- Caso b):
  1) $s\Box_j C \in Cn(\mathsf{I}^0_\varnothing)$ [Ipotesi per assurdo]
  2) Esiste $J \in \wp(\mathcal{P})$ tale che $\mathsf{R}^J_\varnothing \in \mathbb{R}^0_\varnothing$ [Definizione 13.2.b.i e 1)]
  3) $|J| = 0$ e $J = \varnothing$ [Definizione 11.1 e 2)]
  4) $\forall \Delta \in \mathbb{A}_c$, se $\Delta \in \mathsf{R}^0_\varnothing$, allora $sB \in \mathsf{W}(\Delta)$ [Definizione 13.1.b.ii e 1)]
  5) $\varnothing \in \mathsf{R}^0_\varnothing$ [Proposizione 5.1]
  6) $sB \notin \mathsf{W}(\varnothing)$ [Lemma 3 (seguente)]
  7) Per $\varnothing \in \mathbb{A}_c$, $\varnothing \in \mathsf{R}^0_\varnothing$ e $sB \notin \mathsf{W}(\varnothing)$ [5) e 6)]
  8) Assurdo [4) e 7)]

Lemma 3. $\mathsf{W}(\varnothing) = \varnothing$.
Per la Definizione 6, ciò equivale ad affermare che per ogni $j \geq 0$, $\mathsf{W}_j(\varnothing) = \varnothing$.
Dimostrazione per induzione su j:

- Passo base: j= 0. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, $\varnothing \cup \{\bar{s}B\} \in \mathbb{A}$, perché tutte le condizioni 5.1.-5.13. di inammissibilità coinvolgono almeno due enunciati. Quindi, per la Definizione 6, $\mathsf{W}_0(\varnothing) = \varnothing$.

- Ipotesi induttiva: $j = n - 1$. Assumiamo che $\mathsf{W}_{n-1}(\varnothing) = \varnothing$.

- Passo induttivo: $j = n$. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, $\mathsf{W}_{n-1}(\varnothing) \cup \{\bar{s}B\} \in \mathbb{A}$, perché, per ipotesi induttiva, $\mathsf{W}_{n-1}(\varnothing) = \varnothing$ e tutte le condizioni 5.1.-5.13. di inammissibilità coinvolgono almeno due enunciati. Quindi, per la Definizione 6, $\mathsf{W}_n(\varnothing) = \varnothing$.

Proposizione 11. Per ogni $B \in \mathcal{L}$, $\Gamma \in \mathbb{A}_c$ e $\mathsf{I}^k_\Sigma \in \mathbb{I}$:

1) $sB \in Cn(\Gamma)$ [Ipotesi]

2) $sB \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$ [Proposizione 8 e 1)]

3) $B \in \mathcal{L}_0$ [Definizione 13.1.a e 2)]

4) $sB \in \mathsf{W}(\Gamma)$ [Definizione 13.1.b e 2)]

5) $\Gamma \in \mathsf{R}^\varnothing_\Gamma$ [Proposizione 5.1]

6) $\mathsf{R}^\varnothing_\Gamma \in \mathbb{R}^0_\Gamma$ [Definizione 11]

7) $s\Box_0 B \in Cn(\mathsf{I}^0_\Gamma)$ [Definizione 13.2, Osservazione 3, 3), 4), 5) e 6)]

8) $s\Box_0 B \in Cn(\mathsf{I}^k_\Gamma)$ [Proposizione 7.5 e 7)]

9) $s\Box_0 B \in Cn(\mathsf{I}^k_{\Gamma\cup\Sigma})$ [Proposizione 6.2 e 8)]

10) $\forall s_i C_i \in \Gamma$, $s_i \Box_j C_i \in Cn(\mathsf{I}^k_\Sigma)$ [Ipotesi]

11) $s\Box_j B \in Cn(\mathsf{I}^k_\Sigma)$ [Proposizione 7.4, 9) e 10)]

Capitolo 8

Aggregazione di giudizi su proposizioni fattuali

Nel capitolo precedente ho proposto una caratterizzazione della conoscenza propria di agenti cognitivamente limitati. L'analisi condotta fino a questo punto ha considerato agenti individuali e ha escluso l'interazione tra i soggetti descritti. Il presente capitolo intende suggerire l'applicazione di questa caratterizzazione al contesto sociale di aggregazione di giudizi.

Nella Sezione 8.1 presento il problema di aggregazione di giudizi e la teoria classica elaborata da List e Pettit (2002). Nella Sezione 8.2 circoscrivo il problema all'aggregazione di giudizi su proposizioni fattuali: in questo caso, la teoria classica mostra almeno due difficoltà. In primo luogo, il modello considera agenti idealizzati (Sezione 8.3); in secondo luogo, come osserva Goldman (2004), la conoscenza della collettività non costituisce un *desideratum* della teoria. Intendo quindi mostrare che le logiche a profondità limitata possono essere efficacemente impiegate per superare entrambe le difficoltà.

8.1 La teoria classica

Il problema dell'aggregazione di giudizi riguarda gruppi chiamati ad esprimersi collettivamente su un certo numero di questioni logicamente interdipendenti, a partire dai giudizi di ciascun membro. Un agente giudica un enunciato se esprime assenso o dissenso su quell'enunciato; nella stessa accezione si afferma che l'agente accetta o rifiuta l'enunciato. L'esempio seguente illustra un caso di aggregazione di giudizi:

Esempio 8.1.1. [Dietrich (2007)] Supponiamo che la popolazione di un paese sia chiamata ad esprimere un giudizio collettivo riguardo alle questioni seguenti sulla base dell'opinione di ciascun cittadino: "il tasso di natalità è troppo basso per poter garantire stabilità economica sul lungo periodo" (prima premessa, p); "se il tasso di natalità è troppo basso per poter garantire stabilità economica sul lungo periodo, allora è necessario un aumento del tasso di immigrazione" (seconda premessa, $p \supset q$); "è necessario un aumento del tasso di immigrazione" (conclusione, q).

La teoria classica dell'aggregazione di giudizi individua due requisiti che ragionevolmente dovrebbero essere soddisfatti da un insieme di giudizi collettivi: da un lato, il requisito di razionalità chiede che i giudizi collettivi non siano irrazionali; dall'altro lato, il requisito di sensibilità impone che i giudizi collettivi dipendano e rispondano ai giudizi individuali.

L'interesse recente per il problema di aggregazione di giudizi nasce da un'osservazione cruciale: la regola di maggioranza non è in grado di soddisfare simultaneamente questi due requisiti ogni volta che il problema in questione supera un certo livello di complessità. In particolare, il giudizio collettivo che risulta dall'applicazione della procedura di maggioranza sull'insieme di giudizi individuali può risultare inconsistente sebbene tutti i giudizi collettivi soddisfino certe condizioni di razionalità. Casi del genere, identificati per la prima volta da Kornhauser e Sager (1986) in ambito giuridico, sono noti come "paradossi dottrinali" o "dilemmi discorsivi"[1]. Presento di seguito un caso di dilemma discorsivo:

[1] Il paradosso dottrinale formulato da Kornhauser e Sager (1986) è il seguente. Una corte composta da tre giudici deve decidere se l'imputato è colpevole con l'accusa di aver violato un contratto. Secondo la dottrina giuridica, "l'imputato è colpevole" (conclusione, r) se e solo se "c'era un contratto valido" (premessa, p) e "l'imputato ha violato il contratto" (premessa, q). Il giudice 1 accetta le proposizioni $p, \neg q$ e $\neg r$; il giudice 2 accetta le proposizioni $\neg p, q$ e $\neg r$; il giudice 3 infine accetta p, q e r. Applicando la regola di maggioranza su ciascuna questione, il verdetto della corte consiste nelle proposizioni p, q e $\neg r$. Il paradosso consiste nel fatto che, nonostante ogni giudice sia razionale, il verdetto è inconsistente rispetto alla dottrina giuridica ($p \wedge q \leftrightarrow r$).

Il problema sollevato dal paradosso dottrinale si presenta non soltanto nei casi in cui esiste una dottrina giuridica che stabilisce la relazione tra le questioni da giudicare, ma anche nelle situazioni in cui la stessa regola di inferenza (nel caso del paradosso dottrinale, la dottrina giuridica) può non essere accettata da tutti i componenti del gruppo. Per questo motivo, List e Pettit (2002), astraendo dalla natura giuridica del paradosso, parlano in generale di dilemma discorsivo.

Esempio 8.1.2. [Dietrich (2007)] Si consideri l'Esempio 8.1.1 e si supponga che la popolazione si divida in tre gruppi ugualmente numerosi come riportato in questa tabella:

	p	$p \supset q$	q
1: 1/3 della popolazione	Vero	Vero	Vero
2: 1/3 della popolazione	Vero	Falso	Falso
3: 1/3 della popolazione	Falso	Vero	Falso
Maggioranza	Vero	Vero	Falso

La regola di maggioranza applicata all'insieme degli insiemi consistenti di giudizi individuali produce un insieme di giudizi collettivi inconsistente ($\{p, p \supset q, \neg q\}$).

List e Pettit (2002) avviano lo studio degli aspetti logici del dilemma discorsivo elaborando una teoria formale dell'aggregazione di giudizi espressi in logica proposizionale classica. In questo modello, un problema è definito dagli elementi che seguono:

- Un insieme di individui $N = \{1, 2, \dots, n\}$ (si assume, per evitare casi banali, $n \geq 2$).
- Un insieme di formule ben formate del calcolo proposizionale classico $X = \{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ chiuso rispetto alla negazione ($A \in X \Leftrightarrow \neg A \in X$). L'insieme X è chiamato "agenda" ed è interpretato come l'insieme di enunciati sui quali il gruppo è chiamato ad esprimersi.
- Un insieme di giudizi individuali $\Phi_i \subseteq X$ per ogni individuo $i \in N$, dove Φ_i è interpretato come l'insieme di enunciati in X accettati da i. L'individuo i rifiuta l'enunciato A se e solo se $\neg A \in \Phi_i$.
- Un profilo di insiemi di giudizi individuali, cioè una N-pla $\{\Phi_i\}_{i \in N}$, contenente gli insiemi di giudizi individuali Φ_i, per ogni individuo $i \in N$.
- Un insieme di giudizi collettivi $\Phi \subseteq X$, dove Φ è interpretato come l'insieme di tutti gli enunciati in X accettati dal gruppo N.
- Una funzione di aggregazione di giudizi, cioè una funzione F che associa ad ogni profilo di insiemi di giudizi individuali un insieme di giudizi collettivi.

Il requisito di razionalità è definito da List e Pettit (2002) come segue. Un agente individuale o collettivo è razionale se e solo se l'insieme degli enunciati che accetta, Φ, soddisfa le seguenti proprietà:

R1. *Completezza*: per ogni $A \in X$, si verifica *almeno una* tra le seguenti condizioni: $A \in \Phi$ o $\neg A \in \Phi$;

R2. *Chiusura deduttiva*: per ogni $A \in X$, se Φ implica logicamente A, allora $A \in \Phi$;

R3. *Coerenza*: per ogni $A \in X$, si verifica *al più una* tra le seguenti condizioni: $A \in \Phi$ o $\neg A \in \Phi$.

Gli autori stabiliscono quindi che l'insieme di giudizi collettivi soddisfa il requisito di sensibilità se e solo se esso è ottenuto da una funzione di aggregazione che soddisfa le seguenti condizioni:

S1. *Dominio universale*: il dominio di F è l'insieme di tutti i profili logicamente ammissibili di insiemi completi, consistenti e deduttivamente chiusi di giudizi individuali.

S2. *Anonimia*: un insieme collettivo di giudizi Φ ottenuto da F non varia con la permutazione degli individui in N. Formalmente, dati $\{\Phi_i\}_{i\in N}$ e $\{\Phi'_i\}_{i\in N}$ profili di insiemi di giudizi individuali, l'uno permutazione dell'altro, $F(\{\Phi_i\}_{i\in N})$ $= F(\{\Phi'_i\}_{i\in N})$.

S3. *Composizionalità*: siano A e B in X. Se ciascun individuo in N si esprime allo stesso modo su A e B, allora il giudizio collettivo su A deve essere esattamente lo stesso di quello su B (*indipendenza*); questo criterio per determinare il giudizio collettivo deve valere allo stesso modo per qualunque profilo del dominio di F (*neutralità*). Formalmente, dati $\{\Phi_i\}_{i\in N}$ e $\{\Phi'_i\}_{i\in N}$, profili qualsiasi di giudizi individuali nel dominio di F, e $A, B \in X$, formule qualsiasi appartenenti all'agenda, $[A \in \Phi_i \Leftrightarrow B \in \Phi'_i] \Rightarrow [A \in F(\{\Phi_i\}_{i\in N}) \Leftrightarrow B \in F(\{\Phi'_i\}_{i\in N})]$.

Il dilemma discorsivo, come mostrato nell'Esempio 8.1.2, consiste nell'irrazionalità collettiva nonostante la razionalità individuale. La funzione di maggioranza infatti (formalmente, $F_{mg}(\{\Phi_i\}_{i\in N}) = \{A \in X : |\{i \in N : Ai \in \Phi_i| > n/2\})$ soddisfa il requisito di sensibilità ma, applicata ad un profilo di giudizi individuali razionali, produce un insieme di giudizi collettivi inconsistente. Il dilemma discorsivo può quindi essere interpretato come un conflitto tra il requisito di razionalità e il requisito di sensibilità. Il teorema seguente dimostra che il dilemma discorsivo non riguarda soltanto la funzione di maggioranza, ma qualunque procedura di aggregazione che soddisfa determinate condizioni:

Teorema di impossibilità sull'aggregazione di giudizi. [List e Pettit (2002)] Se X contiene almeno due proposizioni atomiche e la loro congiunzione, non esiste alcuna funzione di aggregazione F che soddisfa i requisiti S1, S2 e S3 e che produce insiemi di giudizi collettivi che soddisfano R1, R2 e R3.

Le strategie atte ad evitare la situzione descritta dal teorema di impossibilità consistono in una o più tra le seguenti operazioni: indebolire il requisito di razionalità per l'agente collettivo; attenuare le richieste imposte dalla condizione di sensibilità; ridurre la complessità dell'agenda.

Tra le strategie più note per evitare l'impossibilità figurano ad esempio la procedura basata sulle premesse, la procedura basata sulla conclusione, la procedura di unanimità e la procedura dittatoriale. La procedura basata sulle premesse, violando il requisito di composizionalità, seleziona un sottoinsieme dell'agenda, le premesse, e sulla base della maggioranza dei giudizi individuali su questo sottoinsieme, deriva il giudizio collettivo sugli elementi restanti dell'agenda, le conclusioni: nell'Esempio 8.1.2, il giudizio collettivo sulla conclusione ottenuto tramite la procedura basata sulle premesse sarebbe l'assenso a q. La procedura basata sulle conclusioni riduce l'agenda alla sola conclusione (e alla sua negazione) e ottiene il giudizio collettivo sulla questione applicando la procedura di maggioranza ai giudizi individuali: nell'Esempio 8.1.2, la popolazione esprimerebbe un rifiuto di q. La procedura di unanimità impone alla collettività di accettare tutte e sole le proposizioni accettate da tutti i membri del gruppo. Questa regola può violare il requisito di razionalità poiché ammette insiemi di giudizi collettivi incompleti: nell'Esempio 8.1.2, il giudizio collettivo sugli elementi dell'agenda coinciderebbe con l'insieme vuoto. Infine, sotto la procedura dittatoriale, la collettività accetta tutte e sole le proposizioni accettate da un individuo del gruppo, il dittatore. Questa procedura viola il requisito di sensibilità e in particolare il vincolo di anonimità: nell'Esempio 8.1.2, il giudizio collettivo sugli elementi dell'agenda ottenuto tramite la dittatura di un individuo del primo gruppo della popolazione consisterebbe nelle proposizioni $p, p \supset q$ e q.

8.2 Aggregazione di conoscenza e di credenze

La teoria dell'aggregazione di giudizi permette di analizzare un'ampia gamma di problemi di decisione collettiva: la classe dei giudizi considerati può infatti includere proposizioni che esprimono azioni ("abolire la seconda rata IMU"), desideri ("è desiderabile essere sani"), principi etici ("i condannati non possono candidarsi"), ma anche proposizioni che riguardano fatti emipirici, attraverso i quali può essere stabilita la loro verità o falsità, come ad esempio "le emissioni di anidride carbonica dovute all'uso di combustibili fossili hanno superato una certa soglia critica".

Il problema di giudicare proposizioni fattuali rientra nel dominio dell'epistemologia; mentre il compito di aggregare tali giudizi per raggiungere una convinzione collettiva, assolto ad esempio da commissioni di esperti, comitati e organizzazioni, attiene al campo dell'epistemologia sociale.

Un agente (collettivo o individuale) può giudicare una proposizione fattuale, e cioè esprimere il suo assenso o dissenso nei confronti della proposizione, in due modi: in primo luogo, un agente può accettare un enunciato se e solo se sa che questo enunciato è vero e respingerlo se e solo se sa che la sua negazione è vera; in secondo luogo, un agente può accettare un enunciato se e solo se crede che questo enunciato sia vero e respingerlo se e solo se crede che la sua negazione sia vera. Nel primo caso si parla di aggregazione di conoscenza, nel secondo caso di aggregazione di credenze. La differenza tra i due tipi di aggregazione deriva dalla distinzione tra il concetto di conoscenza e il concetto di credenza. Come osserva Meyer (2001), la credenza è tradizionalmente considerata come una forma più debole di conoscenza: la seconda implica la prima, ma in generale non vale il viceversa. La differenza cruciale tra le due nozioni è che la conoscenza richiede la veridicità di ciò che è conosciuto, mentre la credenza può riguardare proposizioni false.

Trascuro qui il dibattito su quale sia il criterio più adatto per definire quali tipi di gruppi possano essere considerati agenti epistemici e assumo, seguendo List (2005), che ogni entità, collettiva o individuale, in grado di esprimere giudizi possa essere considerata un agente epistemico.

La teoria classica elaborata da List e Pettit (2002) incontra almeno due difficoltà nel trattare l'aggregazione di giudizi su proposizioni fattuali.

In primo luogo, il modello tradizionale di aggregazione di giudizi considera agenti altamente idealizzati senza alcun limite computazionale e con informazione completa, i cui giudizi sono espressi in logica proposizionale classica, mentre, specialmente in contesti epistemici, l'interesse è generalmente indirizzato verso l'individuazione dell'insieme di giudizi che può essere ottenuto effettivamente dalla collettività.

In secondo luogo, come sostiene Goldman (2004), il modello di aggregazione di List e Pettit non caratterizza la conoscenza come un *desideratum* e l'ignoranza come un difetto, mentre, soprattutto in contesti epistemici, la veridicità del giudizio collettivo risulta chiaramente una caratteristica fondamentale.

Nelle prossime sezioni esamino queste due difficoltà, indico alcune ragioni per ritenere che la caratterizzazione degli agenti limitati proposta in questa tesi possa essere impiegata efficacemente per superarle e individuo alcune questioni che dovrebbero essere affrontate per formulare un modello di aggregazione di giudizi espressi nelle logiche a profondità limitata.

8.3 Agenti ideali e agenti limitati

Per mostrare che la condizione di razionalità proposta da List e Pettit (2002) nel modello classico di aggregazione di giudizi può essere soddisfatta soltanto da agenti ideali, discuto il significato che assumono i requisiti di completezza, chiusura deduttiva e coerenza nei contesti epistemici, cioè nei problemi di aggregazione in cui l'agenda è costituita da proposizioni fattuali e un agente accetta un enunciato se e solo se sa o crede che l'enunciato è vero.

In primo luogo, la condizione di completezza impone che un agente (individuale o collettivo) giudichi ogni enunciato dell'agenda: ciascun agente, per essere razionale, deve esprimere il proprio assenso o dissenso su ogni questione proposta e, quindi, secondo List (2006), deve essere "risoluto". Tuttavia, in situazioni reali non è raro che un individuo concreto non sia in grado di accettare o respingere un dato enunciato. Possibili ragioni dell'astensione di un individuo sono l'indifferenza nei confronti della questione sollevata, lo scarso interesse e, soprattutto in campo epistemico, l'incompletezza delle informazioni di cui dispone. Analogamente, sono piuttosto frequenti casi in cui è un gruppo a non essere in grado di giudicare tutte le questioni di un'agenda e non soltanto per eventuale disaccordo irresolubile tra le sue parti, ma anche per lacune nelle informazioni dei suoi membri.

La condizione R1, se interpretata in chiave epistemica, richiede che, per ogni agente i e ogni enunciato $B \in X$, i sa (crede) che B è vero oppure i sa (crede) che B è falso. Questa assunzione è chiaramente irrealistica e potrebbe essere interpretata come un principio di onniscienza fattuale. L'onniscienza fattuale, a differenza di quella deduttiva oggetto di questa tesi, non riguarda le capacità computazionali dei soggetti, ma la completezza delle loro informazioni.

La completezza delle informazioni, pur non essendo esclusa a priori, non concorre nelle definizioni di conoscenza esaminate fino ad ora. Per quanto attiene alle logiche epistemiche classiche infatti, l'enunciato $\Box_i B \vee \Box_i \neg B$ non è una verità logica neppure in $\mathsf{S5}$ perché, per costruire un contromodello, è sufficiente che tra le alternative epistemiche di un agente sia incluso un mondo in cui B è vero e uno in cui B è falso. Per quanto riguarda la logica epistemica a profondità limitata, il controesempio può essere esibito considerando che per $\Gamma = \varnothing$ e per $B \in \mathcal{L}$ qualsiasi, né $t\Box_0 B$ né $t\Box_0 \neg B$ appartengono a $\mathsf{W}(\Gamma)$ e di conseguenza nessuna delle due formule è inclusa in $Cn(\Gamma)$. L'assunzione di onniscienza fattuale è un principio eccessivo che non rientra nella definizione del concetto di conoscenza: a maggior ragione, esso è da escludere dalla caratterizzazione della nozione di credenza.

In secondo luogo, la condizione di chiusura deduttiva impone che l'agente (individuale o collettivo) accetti tutte le conseguenze logiche di ciò che accetta. Se interpretato in chiave epistemica, il requisito R2 è un'assunzione di onniscienza deduttiva (Sezione 2.4) che non può essere soddisfatta da individui concreti a causa della probabile intrattabilità della logica proposizionale classica (Sezione 5.2). Per queste stesse ragioni, anche la proprietà di chiusura delle credenze rispetto all'implicazione valida è da escludere in quanto cognitivamente implausibile.

Infine, la condizione di coerenza è cognitivamente più plausibile rispetto ai requisiti R1 e R2, poiché un individuo concreto che accetti e respinga contemporaneamente la stessa proposizione esibisce manifestamente un comportamento irrazionale o, come afferma List (2006), non "onesto".

Il requisito R3 è soddisfatto da tutti gli agenti che riconoscono il principio di non contraddizione: quest'ultimo, se interpretato in chiave epistemica, richiede che, per ogni agente i e ogni enunciato $B \in X$, non è vero che i sa (crede) che B è vero e sa (crede) che B è falso. Questo principio è parte della definizione di conoscenza fornita dalle logiche epistemiche classiche: in ogni modello in cui la relazione di accessibilità è seriale[2], e quindi anche quando essa è riflessiva, la formula $\neg(\Box_i B \wedge \Box_i \neg B)$ è valida. Analogamente accade per la logica epistemica a profondità limitata in cui per ogni $B \in \mathcal{L}$ e $\Gamma \subseteq \mathcal{L}^s$, se $t\Box_0 B$ e $t\Box_0 \neg B$ appartengono a $Cn(\Gamma)$, allora $\mathsf{W}(\Gamma) \notin \mathbb{A}$. Questo principio è valido anche nelle logiche doxastiche classiche e cioè nei sistemi tradizionali di logica della credenza. Questi sistemi sono estensioni conservative del sistema modale base K, in cui, invece di aggiungere l'assioma T per ottenere una definizione di conoscenza, è introdotto l'assioma D ed è imposto il requisito di serialità sulle relazioni di accessibilità degli agenti (per le due definizioni si veda la nota precedente).

I requisiti di completezza, chiusura deduttiva e coerenza definiscono come razionali soltanto agenti (individuali o collettivi) ideali: di conseguenza, questa nozione di razionalità esclude dalla teoria tutti gli individui concreti. Le condizioni R1 e R2 inoltre, se interpretate in chiave epistemica, definiscono una nozione di conoscenza (individuale o collettiva) irrealistica.

Se quindi siamo interessati non tanto alla conoscenza che la collettività potrebbe teoricamente ottenere da agenti ideali, quanto piuttosto alla conoscenza che il gruppo può effettivamente derivare dalla conoscenza imperfetta dei suoi membri reali, è necessario modificare il modello di aggregazione di giudizi classico: in particolare, è opportuno abbassare lo standard di razionalità richiesto agli agenti considerati per poter includere anche gli individui concreti, i quali dispongono di informazioni incomplete e di capacità computazionali limitate. In altri termini, soprattutto in contesti epistemici, potrebbe essere utile sostituire gli agenti ideali con agenti reali che si astengono dal giudicare le questioni riguardo a cui non possiedono informazioni e le questioni che non riconoscono essere conseguenze logiche di ciò che accettano.

Questa sostituzione può essere ottenuta impiegando le logiche a profondità

[2] Una relazione di accessibilità è seriale se e solo se soddisfa il requisito seguente:

Requisito μ: $\forall s \in S\ \exists t \in S$ tale che $(s,t) \in R_i$.

Questa condizione impone che nell'interpretazione di un agente non esistano mondi "ciechi" che non accedono a nessuno stato. Si noti che se una relazione R_i è riflessiva, allora R_i è seriale perché per ogni $s \in S$, esiste $t \in S$ tale che $(s,t) \in R_i$ e $t = s$.

L'imposizione del requisito di serialità alla relazione di accessibilità degli agenti equivale ad introdurre nel sistema assiomatico il seguente assioma:

Assioma D: $\vdash \Box_i B \supset \neg\Box_i \neg B$.

Questo assioma, che caratterizza la logica modale deontica dal momento che richiede che se B è obbligatorio, allora B è permesso, è impiegato anche nelle logiche modali doxastiche.

limitata che, come emerso dai capitoli precedenti, caratterizzano il ragionamento di agenti concreti. Il requisito minimo di razionalità espresso utilizzando la logica a profondità zero di D'Agostino e Floridi (2009) (Sezione 6.2) consiste nelle proprietà di chiusura a profondità zero e di consistenza a profondità zero. Un insieme di enunciati $\Phi \subseteq X$ è chiuso a profondità zero se e solo se per ogni $B \in X$, se $\Phi \vDash_0 B$, allora $B \in \Phi$; un insieme di enunciati $\Phi \subseteq X$ è consistente a profondità zero se e solo se $\Phi \nvDash_0$.

Le logiche booleane a profondità limitata consentono inoltre di rappresentare infiniti livelli di razionalità e quindi forniscono gli strumenti per poter discutere non soltanto dell'opportunità di un aumento dello standard di razionalità richiesto da zero ad un k fissato, ma anche del problema di aggregare giudizi espressi da agenti con capacità computazionali differenti. La discussione per individuare uno standard di razionalità che sia adeguato al problema preso in considerazione dovrebbe chiarire non soltanto il livello di razionalità minimo da imporre ai membri del gruppo, ma anche lo standard di razionalità da richiedere alla collettività: chiaramente, le due condizioni possono differire.

L'alterazione del requisito di razionalità proposto da List e Pettit (2002) solleva il problema di determinare quali sono, se esistono, le situazioni di impossibilità nell'aggregazione di giudizi espressi da individui cognitivamente plausibili. Le condizioni del Teorema di impossibilità sull'aggregazione di giudizi (Sezione 8.1) includono il requisito di dominio universale e il requisito di razionalità classico: come varia il risultato di impossibilità se il dominio della funzione di aggregazione include anche profili di giudizi individuali minimamente razionali e se insiemi di giudizi collettivi minimamente razionali sono inclusi tra i risultati ammissibili della procedura di aggregazione?

La domanda appena formulata non trova una risposta nella letteratura corrente sull'aggregazione di giudizi. Tuttavia, alcuni autori hanno studiato problemi analoghi a quello appena sollevato e i loro risultati potrebbero costituire il punto di partenza per questa ricerca.

Gärdenfors (2006) ritiene che i risultati di impossibilità siano conseguenze delle richieste eccessive del modello sulla razionalità degli agenti coinvolti: in particolare, l'autore critica il requisito di completezza in quanto "assunzione forte e innaturale" e studia i problemi di aggregazione in cui gli individui del gruppo sono perfettamente razionali, ma la collettività è legittimata ad accettare insiemi di giudizi incompleti. Gärdenfors (2006) mostra che, sotto determinate condizioni, ogni funzione di aggregazione che produce giudizi collettivi consistenti e deduttivamente chiusi (ma non necessariamente completi) è debolmente oligarchica, vale a dire che esiste un sottogruppo il cui consenso individuale unanime per una proposizione è sufficiente (sebbene eventualmente non necessario) all'assenso della collettività nei confronti di quella proposizione.

Dietrich e List (2008), proseguendo questa linea di ricerca, sostengono una tesi che vorrebbe opporsi a quella di Gärdenfors (2006): gli autori mostrano infatti che l'esclusione del requisito di completezza dalla definizione della razionalità degli agenti non è sufficiente ad evitare situazioni di impossibilità e suggeriscono di indebolire anche la condizione di indipendenza sulla funzione di aggregazione o, in alternativa, il requisito di chiusura deduttiva sulla razionalità degli agenti.

Questi lavori suggeriscono che la classe delle situazioni di impossibilità per l'aggregazione di giudizi su proposizioni fattuali espressi da agenti limitati è, verosimilmente, più ristretta della classe di situazioni di impossibilità per il caso classico. In altri termini, questi risultati inducono a ipotizzare, contrariamente a quanto potrebbe essere indicato dall'intuizione, che l'aggregazione di giudizi espressi da individui concreti tramite le logiche a profondità limitata non dovrebbe portare alle stesse situazioni di impossibilità che minacciano gli agenti idealizzati i cui giudizi sono rappresentati attraverso la logica classica.

8.4 Il requisito di conoscenza

In questa sezione, presento la seconda difficoltà che riguarda l'applicazione della teoria classica di List e Pettit al problema di aggregare giudizi su proposizioni fattuali. Questa osservazione, elaborata da Goldman (2004), costituisce la motivazione di un'operazione di potenziamento della teoria classica attuata da List (2005 e 2006) che discuto impiegando gli strumenti di analisi elaborati in questa tesi.

Nell'articolo *Group Knowledge versus group rationality: two approaches to social epistemology*, Goldman (2004) distingue due approcci differenti per ragionare di questioni di epistemologia sociale: l'uno è fondato sulla conoscenza, l'altro sulla razionalità.

Il primo approccio definisce la conoscenza come convinzione vera pervenuta attraverso mezzi esterni affidabili. Questo orientamento studia perciò gli schemi di interazione tra agenti epistemici ed esamina l'effetto che reti diverse di comunicazione producono sulla qualità delle convinzioni degli individui. L'approccio basato sulla conoscenza si concentra insomma sul rapporto tra verità e sistemi epistemici.

Il secondo approccio invece trova la propria dimensione principale nella razionalità piuttosto che nella conoscenza: la razionalità è una nozione ampiamente studiata a livello individuale e la razionalità collettiva può apparire un soggetto appropriato per l'epistemologia sociale. Secondo Goldman (2004), la teoria dell'aggregazione di giudizi sarebbe un modello rappresentativo dell'approccio basato sulla razionalità: del resto, si è visto come uno dei due criteri per valutare una funzione di aggregazione sia proprio quello di razionalità.

La tesi centrale dell'articolo di Goldman è che il modello di aggregazione di giudizi (e quindi l'intero orientamento basato sulla razionalità) rappresenti una concettualizzazione non ottimale dell'epistemologia sociale, mentre la prospettiva focalizzata sulla conoscenza fornirebbe un approccio globale alla disciplina. La tesi di Goldman è supportata da un'osservazione centrale: la teoria dell'aggregazione non caratterizza la conoscenza come *desideratum* fondamentale e l'ignoranza come un difetto principale e i principi di aggregazione razionale non sono sufficienti a conferire la rilevanza indispensabile al progetto di determinare la verità. Questa è la carenza principale del modello: come afferma Goldman (2010), l'epistemologia include infatti tra i suoi compiti principali quello di definire i mezzi per determinare la verità.

L'argomento di Goldman potrebbe essere riformulato come segue: le richieste di sensibilità e razionalità proprie del modello di aggregazione non sono sufficienti per fornire un approccio complessivo all'epistemologia sociale. Ciò che invece risulta necessario è un terzo *desideratum*, il *requisito di conoscenza*, in effetti più importante degli altri due: con questo, si esige da una collettività di raggiungere certe verità e di concludere che l'enunciato B è vero se e solo se B è oggettivamente vero.

Il discorso di Goldman (2004) suggerisce l'introduzione di un terzo requisito accanto a quelli di razionalità e di sensibilità e individua tale condizione nel *desideratum* di conoscenza. Vi è un'altra ragione, questa volta interna al modello, per inserire un terzo requisito. Come è stato notato nella Sezione 8.1, le strategie per eludere l'impossibilità consistono nella violazione di almeno una tra le condizioni R1-S3 e l'insieme di giudizi collettivi dipende dalla strategia seguita: regole diverse producono risultati differenti. Ci potrebbero essere numerose ragioni per preferire una regola ad un'altra, ma motivazioni del genere sarebbero comunque esterne al modello. Di conseguenza, un terzo requisito risulta necessario anche per poter controllare la scelta della procedura di aggregazione seguita.

List (2005 e 2006) accoglie la critica di Goldman e aumenta il potere espressivo del modello di aggregazione di giudizi formulando un requisito di conoscenza. Il modello che risulta da questa modifica permette di analizzare razionalità e conoscenza di un gruppo all'interno dello stesso approccio, il cui scopo è di trovare un compromesso tra le condizioni di razionalità e di sensibilità per permettere al gruppo di soddisfare il requisito di conoscenza.

Per quantificare la capacità di ciascun agente di giudicare una proposizione in modo corrispondente ai fatti, List introduce due misure di probabilità: la prima, chiamata affidabilità positiva, è la probabilità che l'agente accetti B quando B è vero; la seconda, chiamata affidabilità negativa, è la probabilità che l'agente rifiuti B quando B è falso. Queste due misure di affidabilità in alcuni casi differiscono (affidabilità asimmetrica), mentre in altri coincidono (affidabilità simmetrica). Per esempio, molti esami medico-diagnostici hanno un'affidabilità asimmetrica: sono affidabili nell'individuare la presenza di una data malattia se il paziente ha questa malattia, ma scarsi nel riconoscerne l'assenza se il paziente è sano.

Dato un problema di aggregazione di giudizi fattuali, List esplicita due condizioni: la condizione di autonomia di giudizio suppone che gli individui si esprimano su ciascuna questione indipendentemente dai giudizi espressi dagli altri membri del gruppo; la condizione di competenza richiede invece che ciascun membro della collettività abbia una affidabilità positiva e negativa compresa tra 0.5 e 1 e cioè che ciascun individuo, pur essendo fallibile, sia proteso alla verità.

Con questi strumenti, List (2005 e 2006) può esplicitare il criterio di conoscenza per l'aggregazione di giudizi fattuali: esso richiede alla collettività di massimizzare la propria affidabilità positiva e negativa su ciascun enunciato dell'agenda.

Discuto ora la proposta di List e analizzo le componenti da cui dipende l'affidabilità di un agente nei problemi di aggregazione di conoscenza e in quelli di aggregazione di credenza.

Si considerino problemi di aggregazione di conoscenza. Per definizione, un agente accetta un enunciato se e solo se sa che questo enunciato è vero. Supponiamo che l'enunciato B sia vero, ma che l'agente i non sappia che B è vero. In questa situazione, dato l'assioma di verità, non è possibile che un agente sappia che $\neg B$ è vero e che quindi respinga B. Piuttosto, l'agente sarà costretto ad astenersi dal giudicare B. Dall'incapacità dell'agente nel giudicare B in modo corrispondente ai fatti non segue un giudizio falso, ma l'astensione rispetto a tale giudizio. L'analisi della conoscenza fornita dalla logica epistemica a profondità limitata suggerisce che questa astensione dipende dall'incompletezza delle informazioni di cui dispone l'agente o dalla sua incapacità nell'elaborare queste informazioni. L'affidabilità positiva di un agente (collettivo o individuale) definita da List, e cioè la probabilità che l'agente accetti B quando B è vera, potrebbe quindi essere espressa come funzione di due variabili: il contenuto informativo dell'insieme di informazioni di partenza dell'agente e la profondità di ragionamento dell'agente. Un discorso analogo potrebbe essere condotto per l'affidabilità negativa.

Diverso è il caso dei problemi di aggregazione di credenze dove un agente accetta un enunciato se e solo se crede che questo sia vero. Supponiamo di nuovo che l'enunciato B sia vero: in questa circostanza, a differenza dei casi di aggregazione di conoscenza, è legittimo non solo che un agente si astenga dal giudicare B, ma anche che l'agente creda che $\neg B$ sia vero. In quest'ultimo caso, si afferma solitamente che le credenze dell'agente non sono "accurate". L'affidabilità positiva di un agente (collettivo o individuale), e cioè la probabilità che l'agente accetti B se e solo se B è vera, può essere descritta aggiungendo ai due parametri specificati per il caso dell'aggregazione di conoscenza (contenuto informativo e profondità di ragionamento) una terza variabile che misuri l'accuratezza delle convinzioni dell'agente. Questa terza variabile è ciò che potrebbe essere chiamata attendibilità di un agente ed esprime la probabilità che un agente crede che un enunciato è vero quando la verità di questo enunciato appartiene alle informazioni iniziali dell'agente. Analogamente vale per l'affidabilità negativa.

Formulato il requisito di conoscenza tramite le misure di affidabilità, List (2005) analizza il rapporto tra procedura di aggregazione impiegata e variazione dei valori di affidabilità di un gruppo sulle proposizioni dell'agenda. In questa indagine sono esaminati diversi scenari dove a mutare è non solo la complessità dell'agenda, ma anche l'affidabilità degli individui coinvolti nel giudizio. In ciascuno dei casi proposti, la conclusione principale è la stessa: la procedura di aggregazione selezionata determina il successo di un gruppo nel rintracciare la verità di una proposizione. In particolare, List approda a tre risultati.

In primo luogo, sotto determinate assunzioni, l'affidabilità del gruppo che risulta con la procedura basata sulle premesse è maggiore rispetto a quella ottenuta tramite la dittatura e la procedura basata sulle conclusioni: questo risultato suggerisce che, in certe circostanze, è possibile che la collettività ottenga un guadagno epistemico dalla disaggregazione.

In secondo luogo, sotto determinate assunzioni, l'affidabilità del gruppo ottenuta tramite la procedura basata su premesse distribuite[3] è maggiore rispetto a quella conseguita attraverso la procedura basata sulle premesse. Questo risultato mostra che in determinati casi è possibile che la collettività ricavi un guadagno epistemico dalla specializzazione: l'affidabilità di un gruppo su una questione complessa aumenta se questa viene suddivisa in proposizioni più semplici da distribuire a sottogruppi specializzati.

Infine, sotto determinate assunzioni, l'affidabilità del gruppo raggiunta tramite la procedura di maggioranza è più elevata rispetto a quella ottenuta con la dittatura e con l'unanimità: questo risultato suggerisce che, in certe cricostanze, può darsi un guadagno epistemico della collettività dalla democratizzazione.

[3]Seguendo questa procedura, il giudizio collettivo su ciascuna premessa p_j è ottenuto applicando la regola di maggioranza sui giudizi espressi dai membri del sottogruppo specializzato su p_j e il giudizio collettivo sulla conclusione è poi derivato dai giudizi collettivi così ottenuti sulle premesse. Questa procedura non soddisfa il requisito di sensibilità, in quanto viola sistematicità e anonimia, e non soddisfa il requisito di razionalità perfetta individuale, in quanto viola la condizione di completezza.

Capitolo 9

Conclusione e sviluppi

Il problema posto in apertura di questo lavoro (Capitolo 1) consisteva nella definizione di una nozione di conoscenza propria di individui concreti che dispongono di informazioni limitate. L'elaborato fornisce una risposta a questo quesito attraverso la formulazione della logica epistemica a profondità limitata (Capitolo 7). Questo sistema propone una definizione prescrittiva della conoscenza propria di individui caratterizzati da determinati limiti computazionali che sono forniti di un certo insieme di informazioni. Da un punto di vista formale, la logica epistemica a profondità limitata risulta dalla combinazione della semantica a mondi possibili e della semantica delle logiche booleane a profondità limitata.

Questo risultato principale è stato raggiunto tramite alcuni passaggi intermedi. Innanzitutto un'analisi dell'impiego della semantica a mondi possibili per caratterizzare la nozione di conoscenza ha evidenziato la presenza delle assunzioni di onniscienza logica: questi principi sono risultati incompatibili con lo scopo di definire la conoscenza degli agenti concreti. Scartata l'ipotesi di lavoro che supponeva l'efficacia delle logiche epistemiche classiche come strumento di studio indiretto del ragionamento degli individui concreti, sono state discusse diverse strategie e differenti intuizioni per l'elaborazione di sistemi logici non standard privi delle assunzioni di onniscienza.

Condizione essenziale per la formulazione di un nuovo sistema formale in grado di studiare il ragionamento degli individui reali è stata ritenuta l'identificazione di cause e conseguenze delle assunzioni di onniscienza logica. Il problema di onniscienza logica è stato descritto come una variante modale del paradosso dell'inferenza. Un'analisi storico-filosofica ha permesso di individuare la radice del paradosso nel principio di analiticità della logica: quest'ultimo è stato criticato sulla base della probabile intrattabilità della logica proposizionale classica. Per questa ragione è stata esaminata la recente proposta delle logiche booleane a profondità limitata: questo approccio distingue tra inferenze analitiche e inferenze sintetiche sulla base della difficoltà computazionale della deduzione.

La logica epistemica a profondità limitata può essere interpretata come una variante modale e epistemica delle logiche booleane a profondità limitata: se queste ultime sono proposizionali e permettono di risolvere il paradosso dell'inferenza, la prima è modale e consente di risolvere il problema dell'onniscienza logica caratterizzando così la conoscenza di individui concreti.

Un possibile sviluppo di questo lavoro di tesi è stato indicato e discusso nel Capitolo 8 e riguarda l'applicabilità della nozione di conoscenza definita dalle logiche a profondità limitata al contesto sociale di aggregazione di giudizi. Dato il rapporto tra la teoria della scelta sociale e la teoria di aggregazione di giudizi (List e Pettit (2004)), il modello di aggregazione di giudizi espressi dalle logiche a profondità limitata potrebbe essere impiegato anche nel campo della scelta sociale.

Altre linee di ricerca riguardano la conoscenza degli agenti concreti in cui è ammessa la variazione non monotona delle informazioni iniziali, la caratterizzazione della nozione di credenza propria di agenti limitati e l'introduzione dei quantificatori nelle logiche booleane a profondità limitata: in tutti questi casi, ciò che è necessario preservare è la trattabilità delle inferenze valide.

Bibliografia

[Bar-Hillel e Carnap (1953)] Y. Bar-Hillel, R. Carnap, *Semantic information*, In "The British Journal for the Philosophy of Science", 1953, vol. 4 (14), pagg. 147-157

[Carapezza e D'Agostino (2010)] M. Carapezza, M. D'Agostino, *Logic and the myth of the perfect language*, In "Logic and Philosophy of Science", 2010, vol. 8 (1), pagg. 1-29

[Carnap, Hahn e Neurath (1929)] R. Carnap, O. Neurath, H. Hahn, *The scientific conception of the world*, In *Empiricism and sociology*, a cura di M. Neurath e R. S. Cohen, Dordrecht, Reidel, 1973, pagg. 299-318

[Cohen e Nagel (1934)] M. R. Cohen, E. Nagel, *An introduction to logic and scientific method*, London, Routledge and Kegan Paul, 1934

[Cook (1971)] S. A. Cook, *The complexity of theorem-proving procedures*, In "Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing", New York, ACM Press, 1971, pagg. 151-158

[D'Agostino (2005)] Marcello D'Agostino, *Classical Natural Deduction*, In *We will show them! Essays in Honour of Dov Gabbay*, a cura di S. Artemov, H. Barringer, A. d'Avila Garcez, L. C. Lamb, J. Woods, London, College Pubblications, 2005, pagg. 429-468

[D'Agostino (2010)] M. D'Agostino, *Tractable depth-bounded logics and the problem of logical omniscience*, In *Probability, uncertainty and rationality*, a cura di H. Hosni, F. Montagna, Pisa, Edizioni della Scuola Normale Superiore, 2010, pagg. 245-275

[D'Agostino (2013 a)] M. D'Agostino, *Informational semantics, non-deterministic matrices and feasible deduction*, In "Electronic Notes in Theoretical Computer Science", 2013, vol. 305, pagg. 35-52

[D'Agostino (2013 b)] M. D'Agostino, *Semantic information and the trivialization of logic: Floridi on the scandal of deduction*, In "Information", 2013, vol. 4 (1), pagg. 33-59

[D'Agostino (2014)] M. D'Agostino, *Analytic inference and the informational meaning of the logical operators*, In "Logique et Analyse", in corso di stampa

[D'Agostino, Finger e Gabbay (2013)] M. D'Agostino, M. Finger, D. M. Gabbay, *Semantics and proof-theory of depth bounded Boolean logics*, In "Theoretical Computer Science", 2013, vol. 480, pagg. 43–68

[D'Agostino e Floridi (2009)] M. D'Agostino, L. Floridi, *The enduring scandal of deduction. Is propositional logic really uninformative?*, In "Synthese", 2009, vol. 167 (2), pagg. 271–315

[Dietrich (2007)] F. Dietrich, *A generalized model of judgment aggregation*, In "Social Choice and Welfare", 2007, vol. 28 (4), pagg. 529-565

[Dietrich e List (2008)] F. Dietrich, C. List, *Judgment aggregation without full rationality*, In "Social Choice and Welfare", 2008, vol. 31 (1), pagg. 15-39

[Dummett (1991)] M. Dummett, *The logical basis of metaphysics*, London, Duckworth, 1991

[Fagin e Halpern (1987)] R. Fagin, J. Y. Halpern, *Belief, awareness and limited reasoning*, In "Artificial Intelligence", 1987, vol. 34 (1), pagg. 39-76

[Fagin, Halpern, Moses e Vardi (1995)] R. Fagin, J. Y. Halpern, Y. Moses, M. Y. Vardi, *Reasoning about knowledge*, Cambridge (MA) - London, The MIT Press, 1995

[Fagin, Halpern e Vardi (1995)] R. Fagin, J. Y. Halpern, M. Y. Vardi, *A nonstandard approach to the logical omniscience problem*, In "Artificial Intelligence", 1995, vol. 79 (2), pagg. 203-240

[Field (2009)] H. Field, *What is the normative role of logic?*, In "Aristotelian Society Supplementary Volume", 2009, vol. 38, pagg. 251-268

[Flach (2002)] P. A. FLACH, *Modern logic and its role in the study of knowledge*, In *A companion to philosophical logic*, a cura di D. JACQUETTE, Oxford, Blackwell Publishers, 2002, pagg. 680-693

[Flaminio, Godo e Hosni (2014)] T. FLAMINIO, L. GODO, H. HOSNI, *On the logical structure of de Finetti's notion of event*, In "Journal of Applied Logic", 2014, vol. 12 (3), pagg. 279-301

[Floridi (2004)] L. FLORIDI, *Outline of a theory of strongly semantic information*, In "Minds and Machines", 2004, vol. 14 (2), pagg. 197-222

[Gabbay e Woods (2003)] D. GABBAY, J. WOODS, *Normative models of rational agency: the theoretical disutility of certain approaches*, In "Logic Journal of the IGPL", 2003, vol. 11 (6), pagg. 596-613

[Gärdenfors (2006)] P. GÄRDENFORS, *An Arrow-like theorem for voting with logical consequences*, In "Economics and Philosophy", 2006, vol. 22 (2), pagg. 181-190

[Garey e Johnson (1979)] M. R. GAREY, D. S. JOHNSON, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, New York, W. H. Freeman and Company, 1979

[Gentzen (1934)] G. GENTZEN, *Untersuchungen über das logische Schliessen*, In "Matematische Zeitschrift", 1934, vol. 39 (2), pagg. 176-210

[Goldman (2004)] A. I. GOLDMAN, *Group knowledge versus group rationality: two approaches to social epistemology*, In "Episteme, A Journal of Social Epistemology", 2004, vol. 1 (1), pagg. 11-22

[Goldman (2010)] A. I. GOLDMAN, *Social epistemology*, In "The Stanford Encyclopedia of Philosophy", 2010, ⟨http://plato.stanford.edu/archives/sum2010/entries/epistemology-social/⟩

[Harman (1986)] G. HARMAN, *Change in view*, Cambridge (MA) - London, The MIT Press, 1986

[Hempel (1945)] C. G. HEMPEL, *Geometry and emprical science*, In *The philosophy of Carl G. Hempel. Studies in science, explanation and rationality*, a cura di J. H. FETZER, Oxford, Oxford University Press, 2001, pagg. 18-28

[Hendrick e Symons (2006)] V. F. Hendricks, J. Symons, *Where's the bridge? Epistemology and epistemic logic*, In "Philosophical Studies: An International Journal for Philosophy in the Analytic Tradition", 2006, vol. 128 (1), pagg. 137-167

[Hintikka (1962)] J. Hintikka, *Knowledge and belief. An introduction to the logic of the two notions*, Cornell, Cornell University Press, 1962

[Hintikka (1973)] J. Hintikka, *Logic, language games and information. Kantian themes in the philosophy of logic*, Oxford, Clarendon Press, 1973

[Hintikka (1975)] J. Hintikka, *Impossible possible worlds vindicated*, In "Journal of Philosophical Logic", 1975, vol. 4 (4), pagg. 475-484

[Ichikawa e Steup (2014)] J. J. Ichikawa, M. Steup, *The analysis of knowledge*, In "The Stanford Encyclopedia of Philosophy", 2014, ⟨http://plato.stanford.edu/archives/spr2014/entries/knowledge-analysis/⟩

[Kornhauser e Sager (1986)] L. A. Kornhauser, L. G. Sager, *Unpacking the court*, In "Yale Law Journal", 1986, vol. 96, pagg. 82-117

[List (2005)] C. List, *Group knowledge and group rationality: a judgment aggregation perspective*, In "Episteme, A Journal of Social Epistemology", 2005, vol. 2 (1), pagg. 25-38

[List (2006)] C. List, *The discursive dilemma and public reason*, In "Ethics", 2006, vol. 116 (2), pagg. 362-402

[List e Pettit (2002)] C. List, P. Pettit, *Aggregating sets of judgments: an impossibility result*, In "Economics and Philosophy", 2002, vol. 18 (1), pagg. 89 - 110

[List e Pettit (2004)] C. List, P. Pettit, *Aggregating sets of judgments: two impossibility results compared*, In "Synthese", 2004, vol. 140 (1-2), pagg. 207-235

[Levesque (1984)] H. J. Levesque, *A logic of implicit and explicit belief*, In "Proceedings of National Conference on Artificial Intelligence", AAAI Press, 1984, pagg. 198-202

[MacFarlane (2004)] J. MacFarlane, *In what sense (if any) is logic normative for thought?*, non pubblicato, http://johnmacfarlane.net/normativity_of_logic.pdf

[Meyer (2001)] J.-J. C. Meyer, *Epistemic logic*, In *The Blackwell guide to philosophical logic*, a cura di L. Goble, Oxford, Blackwell Publishers, 2001, pagg. 183-202

[Milne (2009)] P. Milne, *What is the normative role of logic?*, In "Aristotelian Society Supplementary Volume", 2009, vol. 38, pagg. 269-298

[Parikh (1987)] R. Parikh, *Knowledge and the problem of logical omniscience*, In "Methodologies of Intelligent Systems. Proceedings of the Second International Symposium, ISMIS 1987", a cura di Z. W. Ras, M. Zemankova, Amsterdam, Elsevier, 1987, pagg. 432-439

[Parikh (1994)] R. Parikh, *Logical omniscience*, In "Logic and Computational Complexity. International Workshop LCC '94", a cura di D. Leivant, New York, Springer, 1994, pagg. 22-29

[Parikh (2005)] R. Parikh, *Logical omniscience and common knowledge; WHAT do we know and waht do WE know*, In "Proceedings of the Tenth Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge, TARK '05", a cura di R. van der Meyden, Singapore, National University of Singapore, 2005, pagg. 62-77

[Parikh (2008)] R. Parikh, *Sentences, belief and logical omniscience, or what does deduction tell us?*, In "The Review of Symbolic Logic", vol. 1 (4), 2008, pagg. 1-18

[Priest (2008)] G. Priest, *An introduction to non-classical logic. From if to is*, Cambridge, Cambridge University Press, 2008

[Quine (1951)] W. V. O. Quine, *Two dogmas of empiricism*, In "The Philosophical Review", 1951, vol. 60 (1), pagg. 20-43

[Quine (1974)] W. V. O. Quine, *The roots of reference*, La Salle, Open Court, 1974

[Quine (1991)] W. V. O. Quine, *Two dogmas in retrospect*, In "Canadian Journal of Philosophy", 1991, vol. 21 (3), pagg. 265-274

[Rantala (1982)] V. Rantala, *Impossible world semantics and logical omniscience*, In "Acta Philosophica Fennica", 1982, vol. 35, pagg. 106-115

[Rescher (2002)] N. Rescher, *Epistemic logic*, In *A companion to philosophical logic*, a cura di D. Jacquette, Oxford, Blackwell Publishers, 2002, pagg. 478-490

[Sequoiah-Grayson (2008)] S. Sequoiah-Grayson, *The scandal of deduction. Hintikka on the information yield of deductive inferences*, In "The Journal of Philosophical Logic", 2008, vol. 37 (1), pagg. 67-94

[Sim (1997)] K. M. Sim, *Epistemic logic and logical omniscience. A survey*, In "International Journal of Intelligent Systems", 1997, vol. 12 (1), pagg. 57-81

[Stalnaker (1991)] R. C. Stalnaker, *The problem of logical omniscience I*, In "Synthese", 1991, vol. 89 (3), pagg. 425-440

[Stalnaker (1999)] R. C. Stalnaker, *The problem of logical omniscience, II*, In *Context and content. Essays on intentionality in speech and thought*, Oxford, Oxford University Press, 1999, pagg. 255-273

[Stalnaker (2006)] R. C. Stalnaker, *On logics of knowledge and belief*, In "Philosophical Studies", 2006, vol. 128 (1), pagg. 169-199

[van Ditmarsch, van der Hoek e Kooi (2007)] H. P. Van Ditmarsch, W. van der Hoek, B. P. Kooi, *Dynamic epistemic logic*, New York, Springer, 2007

[van Harmelen, Lifschitz e Porter (2008)] F. van Harmelen, V. Lifschitz, B. Porter, *Handbook of knowledge representation*, Amsterdam, Elsevier, 2008

[Wittgenstein (1921)] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, Torino, Einaudi, 2009