



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA**  
**FACOLTA' DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI**

Corso di Laurea Magistrale in Geofisica di Esplorazione ed Applicata

**Tesi di laurea specialistica**

**CARATTERIZZAZIONE DI FONDALI MARINI:  
ANALISI E APPLICAZIONI AVA (Amplitude Versus Angle) E PVA  
(Phase Versus Angle)**

**Candidato:**  
**DEIVA BINI**

**Relatore:**  
**PROF. ALFREDO MAZZOTTI**

**Correlatore:**  
**DOTT. MATTIA ALEARDI**

**Controrelatore:**  
**PROF. ANDREA CAITI**

**ANNO ACCADEMICO**  
**2012/2013**

---

# Indice

Riassunto.....	4
1 Introduzione.....	7
2 Cenni teorici di base.....	10
2.1 Metodo a riflessione.....	10
2.1.1.Introduzione.....	10
2.1.2.Teorìa dei raggi.....	10
2.1.3.Curve di travel time in riflessione.....	11
2.1.4.Risoluzione sismica.....	13
2.2 Analisi AVA (Amplitude Versus Angle).....	15
2.2.1.Introduzione.....	15
2.2.2.Coefficienti di riflessione e trasmissione per onde piane.....	16
2.2.3.Coefficiente di riflessione per onde sferiche.....	23
2.2.4.Fattori che influenzano l'ampiezza dei segnali riflessi.....	24
3 Costruzione di sismogrammi sintetici a partire da modelli geologici reali.....	28
3.1 Tre modelli di fondo mare.....	28
3.2 Oases: calcolo dei sismogrammi sintetici di fondo mare.....	30
3.2.1.Inserimento dati, calcolo della tracce e visualizzazione.....	30
4 Applicazione Analisi AVA.....	34
4.1 Introduzione.....	34
4.2 RPP nel modello elastico.....	34
4.3 RPP nel modello viscoelastico.....	37
4.4 Studio RFM (Residual Function Map ).....	41
4.4.1.One Dimensional RFM.....	41
4.4.2.Two Dimensional RFM.....	44
4.5 RPP sferico.....	47

---

5	Il Problema Inverso.....	49
5.1	Introduzione.....	49
5.2	Problema Inverso Lineare.....	51
5.2.1	Metodo dei Minimi Quadrati .....	51
5.2.2	Metodo SVD.....	53
5.2.2.1	Significato geometrico della SVD.....	55
5.2.2.2	Pseudo Inversa di Moore-Penrose.....	57
5.2.2.3	Instabilità della soluzione dell'Inversa Generalizzata.....	58
5.3	Matrici di Risoluzione del dato e del modello.....	59
5.4	Matrice di Covarianza Unitaria.....	62
6	Inversione AVA / PVA.....	64
6.1	Inversione AVA short offset.....	65
6.2	Inversione AVA long offset.....	67
7	Analisi long offset su modelli di fondo mare.....	69
7.1	Estrazione AVA / PVA da sismogrammi sintetici.....	69
7.1.1	Trasformata di Hilbert e Metodo della correlazione.....	71
7.1.2	Curve AVA e PVA .....	75
8	Analisi AVA short offset e prove di inversione su dati analitici.....	83
8.1	Inversione con il Metodo dei Minimi Quadrati.....	84
8.2	Inversione con il Metodo TSVD.....	89
9	Inversione AVA su dati reali.....	110
10	Conclusioni.....	120
	Appendice A.....	122
	Bibliografia.....	124
	Ringraziamenti.....	128

## Riassunto

Il presente lavoro di tesi si propone di estrarre le informazioni relative al fondo mare, attraverso uno studio Amplitude Versus Angle (AVA)/ Phase Versus Angle (PVA), ed in particolare di ricavare le velocità P ( $V_P$ ) ed S ( $V_S$ ) e densità ( $\rho$ ) del fondale a partire dall'ampiezza e/o dalla fase del segnale riflesso, ovvero da quantità direttamente legate al coefficiente di riflessione delle onde P ( $R_{pp}$ ). A tal fine ho utilizzato 3 equazioni, prese dalla letteratura, che descrivono il coefficiente di riflessione: l'equazione lineare di Aki e Richards, valida per piccoli angoli di incidenza e per piccoli contrasti nelle proprietà elastiche, le equazioni di Zoeppritz e l'equazione di Alulawi e Gurevich per poter estendere l'analisi a più ampi range di angoli di incidenza, rispettivamente valide per onde piane e per onde sferiche.

Nella prima parte studio l'influenza delle velocità P ed S, della densità e dei fattori di qualità P ed S sul coefficiente di riflessione, basandomi su modelli di fondo mare a singola interfaccia derivati da dati dell'ODP (Ocean Drilling Program). A questo proposito vengono impiegate le equazioni di Zoeppritz per il calcolo del coefficiente di riflessione tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ .

Questa semplice analisi mostra come la  $V_S$  dei sedimenti di fondo mare, considerati come un mezzo elastico, influenzi debolmente l'andamento del coefficiente di riflessione per tutto il range di angoli studiato. Pertanto tale parametro sarà difficilmente stimabile nella successiva fase di inversione. Rilassando l'assunzione di elasticità perfetta e considerando sedimenti di fondo mare viscoelastici si nota un andamento più liscio del coefficiente di riflessione in prossimità dell'angolo critico, ma non si verificano significativi mutamenti per angoli minori. Al fine di mappare il grado di sensibilità del coefficiente di riflessione ai diversi parametri  $V_P$ ,  $V_S$  e  $\rho$  ho calcolato le funzioni oggetto 1D e 2D, calcolando la differenza tra il  $R_{pp}$  'osservato', ottenuto inserendo nelle equazioni di Zoeppritz i valori reali dei parametri del modello e il  $R_{pp}$  'predetto', ottenuto facendo variare tali proprietà all'interno di un range di variazione definito e considerando diversi range di angoli di incidenza ( $30^\circ$  e  $70^\circ$ ). Da tale analisi risulta che la sensibilità di  $R_{pp}$  a tutti e tre i parametri del modello cresce aumentando il range di angoli di incidenza ed aggiungendo l'informazione di fase.

Nella seconda parte del lavoro si estrae l'informazione AVA/PVA da sismogrammi sintetici generati attraverso il metodo della riflettività. In questa fase si studia anche l'effetto di interferenza tra le varie riflessioni (dal fondo mare e dalle interfacce più profonde) e come l'aumento della frequenza dell'ondina possa in parte prevenire questo problema. Si è inoltre osservato come, nel caso di fondo mare e di sorgente puntiforme, l'andamento del coefficiente di riflessione estratto segua con buona approssimazione quello sferico calcolato con l'equazione di Alulawi e Gurevich.

Nella terza parte si entra invece nel cuore del lavoro affrontando il problema inverso. Inizialmente viene eseguita una 'sensitivity analysis' utilizzando le equazioni di Aki e Richards nel caso di parametrizzazione del problema a tre incognite (riflettività P,  $R_P$ , riflettività S,  $R_S$  e riflettività  $\rho$ ,  $R_\rho$ ) e l'equazione di Ursenbach e Stewart nel caso di parametrizzazione a due incognite (contrasto di impedenza P e S tra i due mezzi a contatto,  $R_I$  e  $R_J$ ). In entrambe i casi si vanno a studiare le proprietà delle matrici di risoluzione dei dati e dei modelli, le matrici di covarianza unitaria del modello, gli autovalori e gli autovettori dello spazio dei modelli, considerando diversi rapporti  $V_P/V_S$  e comparando i risultati ottenuti tramite il tradizionale Metodo dei Minimi Quadrati e il Metodo 'Singular Value Decomposition' (SVD).

Si arriva a dimostrare che il rapporto  $V_P/V_S$  esercita una forte influenza sulla stabilità del problema soprattutto nel caso di inversione a tre parametri; in particolare nel caso del fondale marino, dove si ha un rapporto  $V_P/V_S$  molto alto ( $V_P/V_S \gg 2$ ), si ha un forte aumento dell'instabilità dell'inversione (su tutti i parametri) e l'impossibilità di ricavare il parametro  $V_S$ . Nel caso di inversione a due parametri, l'influenza del rapporto  $V_P/V_S$  sulla stabilità del problema è meno evidente.

Il tutto viene confermato dall'inversione di coefficienti di riflessione calcolati su modelli di riferimento.

Essendo, come noto, l'inversione AVA un problema mal condizionato, ho tentato di ridurre i problemi di instabilità ricorrendo alla TSVD: 'Truncated Singular Value Decomposition', oppure riparametrizzando il problema in due incognite. In particolare, nel caso di fondale marino con elevato  $V_P/V_S$ , l'applicazione del

Metodo TSVD comporta una stabilizzazione del problema indipendentemente dal tipo di parametrizzazione del problema stesso (due o a tre incognite) ed una maggiore accuratezza nella stima di  $R_P$  e  $R_p$ , mentre risulta impossibile la stima di  $R_s$ . Nel modello caratterizzato da un rapporto  $V_P/V_S=2$  il Metodo TSVD è utile soltanto nella parametrizzazione a tre parametri, in quanto, l'inversione a due parametri porta da sola ad una stabilizzazione del problema, rendendo non necessario il troncamento dei valori singolari più piccoli

L'ultima parte del lavoro è dedicata all'inversione AVA linearizzata di un dato reale 3D, acquisito nell'offshore del Mozambico e precedentemente processato in controllo di ampiezza.

Sono state eseguite prove di inversione con alcuni dei metodi analizzati precedentemente su quattro CMP gathers derivanti ciascuno dalla media di 9 CMP adiacenti. Da tale studio emergono le potenzialità e i limiti di tali metodi di inversione, tra le quali, principalmente, la possibilità di giungere a buone stime della  $V_p$  ( o della  $l_p$ ) ed invece la difficoltà di estrarre informazioni affidabili sulla  $V_s$  (o sulla  $l_s$ ) dei sedimenti di fondo mare.

# 1 Introduzione

Questo lavoro di tesi si propone di caratterizzare le proprietà elastiche dei sedimenti di fondo mare al fine di prevenire possibili problemi nella fase di installazione di piattaforme petrolifere come l'instabilità e/o il disancoraggio delle medesime.

Tale obiettivo è stato perseguito tramite l'analisi della variazione dell'ampiezza della riflessione lungo l'offset (AVA: Amplitude Versus Angle), al fine di estrarre informazioni quantitative dai dati sismici, in termini di  $V_P$ ,  $V_S$  e  $\rho$ .

A partire dal lavoro di Ostrander (1984), l'analisi AVA viene diffusamente usata per interpretare la variazione delle ampiezze riflesse dall'interfaccia di interesse in funzione dell'angolo di incidenza, al fine di ottenere informazioni litologiche e per quanto riguarda la presenza di gas (Mazzotti, 1990; Dahl e Ursin, 1992). La base teorica dell'AVA è fondata sul lavoro di Zoeppritz (1919) che deriva le espressioni dei coefficienti di trasmissione e riflessione per onde piane in funzione dell'angolo di incidenza. In ambito pratico, al fine di linearizzare il processo di inversione, vengono utilizzate delle semplificazioni di tali equazioni, come le equazioni linearizzate di Aki e Richards, valide per piccoli angoli di incidenza e per piccoli contrasti nelle proprietà fisiche dei mezzi a contatto.

Numerosi autori hanno rilevato diverse ambiguità nell'inversione AVA (Stolt e Weglein, 1985; de Nicolao, Drufuca e Rocca, 1993; Drufuca e Mazzotti, 1995). Tali problematiche possono essere in parte superate inserendo informazioni a priori sui parametri del modello, utilizzando anche onde convertite (Qizhen e Huizhong, 2013) oppure considerando angoli prossimi all'angolo critico. Ciò è stato possibile negli ultimi anni dato il crescente interesse dell'industria del petrolio nei reservoirs caratterizzati da interfacce con forti contrasti tra le proprietà sismiche e lo sviluppo di acquisizioni sismiche a lunghi offset. Riedel e Theilen (2001) e Downton e Ursenbach (2006) sono stati i primi autori a capire la potenzialità di un'inversione AVA long offset. Loro hanno utilizzato l'equazione di Zoeppritz, valida per onde piane, per descrivere i dati AVA concludendo che tale equazione non è adeguata a lunghi offset. La ragione principale risiede nel fatto che tali equazioni sono state

formulate assumendo un fronte d'onda piano, mentre i dati AVA reali sono generati da onde non piane ed includono anche le onde di testa (Daley, 2001).

Inoltre, dal momento che una sorgente sismica generalmente emette un fronte d'onda pressochè sferico ed ha una banda di frequenza finita, Cervený (1961) e Brekhovskikh (1960) hanno derivato il coefficiente di riflessione sferico valido per sorgenti puntiformi e frequenze finite.

Nel 1999, Brekhovskikh e Godin, formulano l'espressione analitica del coefficiente di riflessione sferico all'interfaccia separante due fluidi, riformulata successivamente da Alulawi e Gurevich (2011) per un'interfaccia solido-solido.

Nel presente lavoro di tesi vengono valutate le potenzialità dei metodi di linearizzazione, l'opportunità di considerare riflessioni prossime all'angolo critico e l'utilità dell'aggiunta dell'informazione di fase all'informazione di ampiezza. Ciò verrà affrontato nelle seguenti parti:

- nella prima parte si utilizzano le equazioni di Zoeppritz per modellare le curve del coefficiente di riflessione al variare dei tre parametri petrofisici  $V_P$ ,  $V_S$  e  $\rho$  per modelli semplici di fondo mare a singola interfaccia costituiti da mezzi omogenei e isotropi. In questo modo si studia l'influenza che tali parametri hanno sul coefficiente di riflessione;
- nella seconda parte del lavoro si va ad estrarre l'informazione AVA/PVA da sismogrammi sintetici generati attraverso il software OASES basato sul metodo della riflettività, utilizzando un'ondina sorgente di tipo Ricker con frequenza centrale di 30 Hz e 80 Hz. Si dimostra che nell'applicazione pratica, in cui si avrà a che fare con modelli di fondo mare reali, quindi geometricamente e strutturalmente complessi, le informazioni estratte da offset lunghi potrebbero risultare inutilizzabili principalmente a causa degli effetti di interferenza tra i segnali riflessi dalle diverse interfacce (effetto di 'tuning thickness') e che tale problema può essere in parte prevenuto aumentando la frequenza dell'ondina;
- la terza parte dell'elaborato è dedicata alla valutazione delle potenzialità di due metodi di inversione: il metodo dei minimi quadrati e il metodo SVD, attraverso una 'sensitivity analysis'.

Tale studio viene fatto considerando diversi rapporti  $V_P/V_S$  del fondale e



parametrizzando il problema a tre e a due incognite.

Infine vengono confrontati i risultati dell'inversione di dati analitici, nei diversi casi in studio.

- la quarta parte del lavoro consiste nell'inversione di dati reali e nel confronto dei risultati utilizzando alcuni dei metodi di inversione analizzati.

## 2 Cenni teorici di base

### 2.1 Metodo a riflessione

#### 2.1.1. Introduzione

L'obiettivo dell'esplorazione sismica è quello di ottenere informazioni sulla struttura e sulle proprietà della sottosuperficie (assetto geometrico e proprietà fisiche) a partire da dati sismici, e cioè da dati ottenuti dallo spostamento delle particelle indotto dal passaggio di onde elastiche.

La sismica a rifrazione, ma soprattutto a riflessione sono i principali metodi sismici attraverso i quali l'industria del petrolio esplora le strutture geologiche che fungono da trappola per idrocarburi nei bacini sedimentari.

Questi metodi utilizzano il principio fisico di propagazione delle onde elastiche, generate da opportune sorgenti (dinamite, airgun, vibroseiss), che viaggiano a differenti velocità nei diversi layers costituenti il sottosuolo. Una sorgente di energia produce onde sismiche dirette nel sottosuolo; queste onde si propagano attraverso la struttura stratificata della terra e vengono riflesse/rifratte ad ogni interfaccia separante mezzi con proprietà elastiche differenti. La risposta dei segnali riflessi e rifratti è registrata dai geofoni (in acquisizioni terrestri) o da idrofoni (in acquisizioni marine).

Il dataset derivante dai metodi sismici consiste di una serie di traveltimes e ampiezze registrati in funzione della distanza. Per entrambi i metodi, le curve che descrivono i traveltimes (dromocrone), dipendono dalle proprietà fisiche dei mezzi e dalle loro geometrie.

#### 2.1.2. Teoria dei raggi

Per comprendere i fenomeni legati alla propagazione si ricorre alla Teoria dei raggi, considerando mezzi elastici, isotropi, a geometria semplice.

Tale teoria rende più intuitiva la comprensione del processo di propagazione delle

onde, separando il campo d'onda in raggi elementari individuali e rendendo perciò possibile il tracciamento del percorso di tali raggi nel mezzo attraverso il quale si propaga l'energia.

I raggi sono definiti come le normali al fronte d'onda e quindi puntano nella direzione di propagazione. Nel caso di un fronte d'onda piano, i raggi costituiscono una famiglia di linee rette parallele; nel caso di un fronte d'onda sferico, i raggi si dispongono radialmente a partire dalla sorgente sismica.

### 2.1.3. Curve di travel time in riflessione

Assumiamo un'interfaccia riflettente orizzontale alla profondità  $h$  che separa un mezzo sovrastante con velocità  $\alpha_1$  e densità  $\rho_1$ , da uno sottostante con velocità  $\alpha_2$  e densità  $\rho_2$  (Figura 2.1). Quando un raggio incide sull'interfaccia, la sua energia si scinde in riflessione e trasmissione. Sapendo che l'energia è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, possiamo definire i *coefficienti di riflessione e trasmissione* che quantificano tale scissione:

- Coefficiente di riflessione  $R = \frac{A_r}{A_i}$  (2.1)

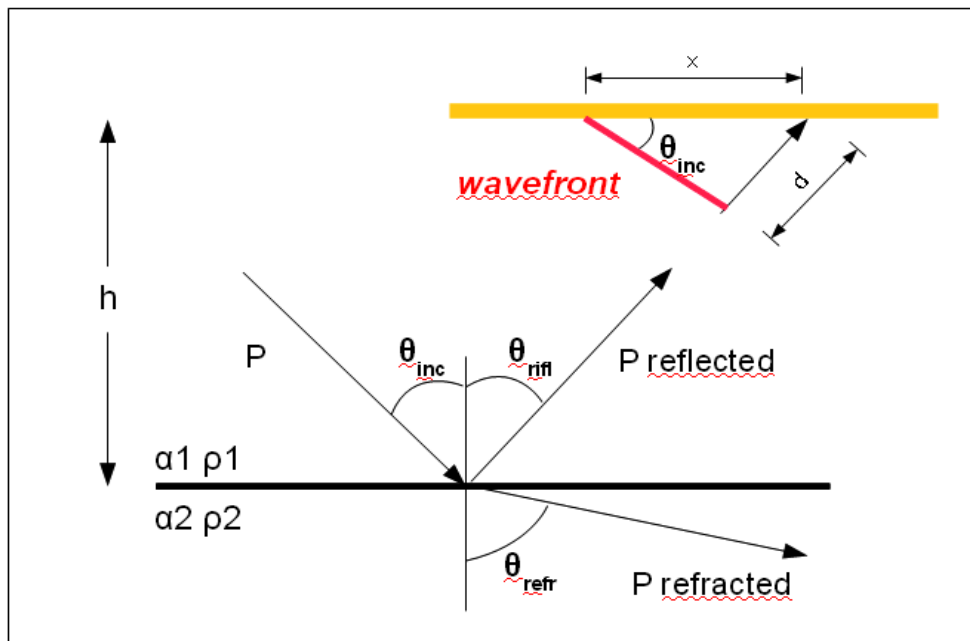
- Coefficiente di trasmissione  $T = \frac{A_t}{A_i}$  (2.2)

dove  $A_i$  è l'ampiezza dell'onda incidente,  $A_r$  quella riflessa e  $A_t$  quella trasmessa.

I raggi riflesso e rifratto hanno lo stesso *parametro del raggio*  $p$  di quello incidente;  $p$  è definito come:

$$p = \frac{\sin(\theta_{inc})}{\alpha_1} = \frac{\sin(\theta_{refl})}{\alpha_1} = \frac{\sin(\theta_{refr})}{\alpha_2} = cost \quad (2.3)$$

dove gli angoli che il raggio riflesso e rifratto formano con il piano verticale ( $\theta_{refl}$ ,  $\theta_{refr}$ ) sono governati dalla Legge di Snell.



**Fig.2.1** Raggio incidente  $P$  sull'interfaccia posta a profondità  $h$  con generazione di un raggio  $P$  riflesso ed uno rifratto. In alto si nota l'incidenza del fronte d'onda sulla superficie.

Consideriamo il fronte d'onda associato al raggio riflesso in Figura 2.1; questo avanzerà di una distanza  $d$  nel tempo  $\delta t$

$$\delta t = \frac{d}{\alpha_1} .$$

L'intersezione del fronte d'onda con la superficie viaggia ad una velocità maggiore  $\alpha_2$  rispetto alla velocità sismica del mezzo sovrastante  $\alpha_1$ :

$$\alpha_a = \frac{x}{\delta t} = \frac{d}{\sin(\theta_{inc})} * \frac{1}{\delta t} = \frac{\alpha_1}{\sin(\theta_{inc})} = \frac{1}{p} \quad (2.4)$$

dove  $\alpha_a$  è la velocità apparente. Da questa equazione è chiara la provenienza della definizione di *lentezza orizzontale* per il parametro del raggio  $p$ .

Se la velocità nel mezzo 2 è maggiore della velocità del mezzo 1,  $\theta_{refr}$  è maggiore di  $\theta_{refl}$ . Con  $\theta_{refr}$  uguale a  $90^\circ$  la Legge di Snell predice una *rifrazione critica* :

$$\frac{\sin(\theta_c)}{\alpha_1} = \frac{\sin(90)}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_2} \quad (2.5)$$

Questa rifrazione critica è associata ad un'onda che viaggia orizzontalmente immediatamente al di sotto dell'interfaccia. Quest'onda è usualmente definita *onda di testa* ed è caratterizzata dalla capacità di trasmettere energia al mezzo sovrastante in modo continuo mentre viaggia lungo l'interfaccia. Questa energia lascia l'interfaccia con lo stesso angolo di incidenza  $\theta_c$ , chiamato *angolo critico*:

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \quad (2.6)$$

Nota che se  $\theta_{inc} > \theta_c$ , non si ha trasmissione di energia al mezzo 2 in quanto tutta l'energia viene riflessa all'interno del mezzo 1.

Se  $\alpha_1 > \alpha_2$ , non si raggiunge l'angolo critico e il raggio rifratto si propaga nel mezzo 2.

#### 2.1.4. Risoluzione sismica

La risoluzione è la capacità di distinguere le proprietà di due o più elementi vicini. Esistono due tipi di risoluzione sismica: risoluzione verticale ed orizzontale.

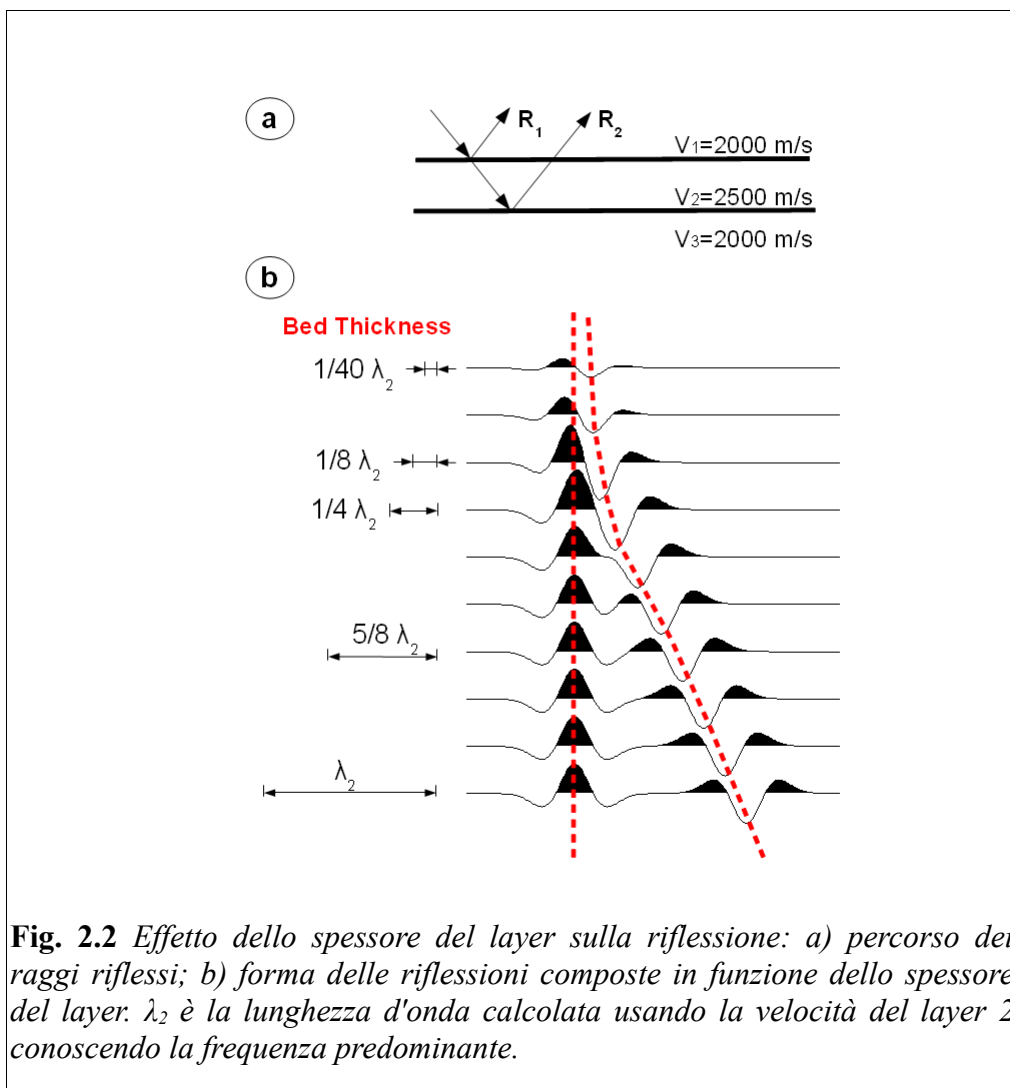
La risoluzione verticale dipende da diversi fattori come lo spessore dello strato da rilevare, la frequenza del segnale utilizzato nell'indagine e la velocità di propagazione. La lunghezza d'onda dominante  $\lambda$  del segnale sismico è data dal rapporto tra la velocità di propagazione  $v$  e la frequenza dominante  $f$ :

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

La soglia considerata limite per una buona risoluzione verticale è  $\lambda/4$ . M.B. Widess (1973) afferma che quando lo spessore di uno strato è sufficientemente grande da permettere la riflessione di onde individuali da

ognuna delle due interfacce (top e bottom), ottenendo così due segnali distinti in tempi, la traccia registrata porta il massimo dell'informazione per ciascuna delle interfacce (Figura 2.2).

Al diminuire dello spessore dello strato l'energia in riflessione risulterà una risposta composta delle due riflessioni. Questo trend continua fino a che lo spessore è uguale a circa  $\lambda/8$ ; nel caso di spessori minori o uguali a  $\lambda/8$  l'unica informazione ricavabile è la combinazione delle due riflessioni.



La risoluzione orizzontale si riferisce a quanto due punti, giacenti sulla stessa superficie riflettente, possano essere vicini e distinguibili. Si consideri un fronte

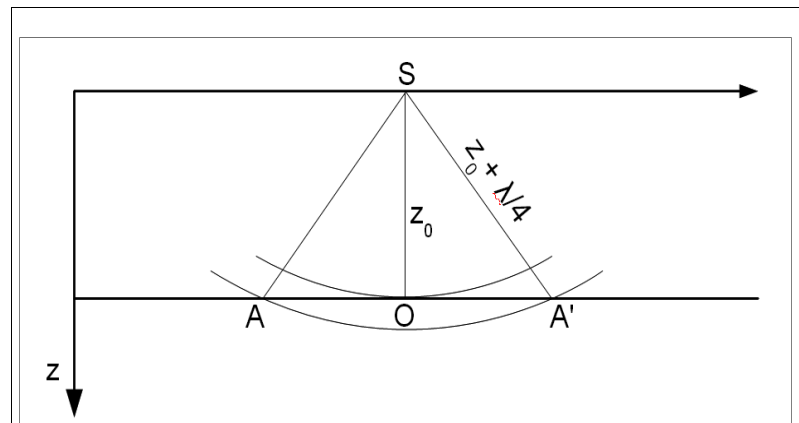
d'onda sferico incidente su un riflettore piano posto orizzontalmente alla profondità  $z_0$  (Figura 2.3). L'energia riflessa dal punto O, sulla verticale della sorgente S, arriva dopo un tempo  $t_0$  :

$$t_0 = \frac{2 \cdot z_0}{v}$$

Se il fronte d'onda avanza di una quantità pari a  $\lambda/4$ , l'energia riflessa dai punti A e A', che si trovano sullo stesso riflettore, arriva al ricevitore dopo un tempo  $t_1$

$$t_1 = \left(\frac{2}{v}\right) \cdot \left(z_0 + \frac{\lambda}{4}\right)$$

L'energia riflessa da tutti i punti interni al disco riflettente di raggio  $\overline{OA}$  arriva in un intervallo di tempo compreso tra  $t_0$  e  $t_1$ , interferendo costruttivamente; in



**Fig.2.3** Definizione della prima zona di Fresnel: si tratta dell'area rappresentata dal disco con raggio  $\overline{OA}$  in cui tutti i segnali riflessi da tale area subiscono fenomeni di interferenza costruttiva. All'interno di questa area non si riescono a risolvere punti distinti.

questo modo i punti interni a tale zona risultano indistinguibili. Il disco riflettente di diametro  $\overline{AA'}$  è detto *prima zona di Fresnel* (Sheriff, 1991) e rappresenta il limite della risoluzione laterale.

## 2.2 Analisi AVA (Amplitude Versus Angle)

### 2.2.1. Introduzione

I metodi AVO (Amplitude Variation with Offset) o AVA (Amplitude Variation with

Angle) sono tra i metodi più usati nell'industria degli idrocarburi per estrarre informazioni quantitative sui reservoir di olio e gas, generalmente per frequenze sismiche comprese tra 20 e 100 Hz (Castagna and Backus, 1993; Foster *et al.*, 1993).

L'analisi AVA consiste nello studio della variazione dell'ampiezza di una particolare riflessione con l'offset, distanza sorgente-ricevitore, ed è quindi eseguita interamente nel dominio pre-stack (precisamente in dominio CMP, Common Mid Point).

L'ampiezza di una riflessione dipende direttamente dal coefficiente di riflessione secondo la (2.1). La dipendenza tra il coefficiente di riflessione e l'ampiezza del segnale riflesso permette di estrarre informazioni circa le proprietà elastiche dei mezzi separati dall'interfaccia generante la riflessione analizzata.

Ai fini dell'esplorazione sismica le proprietà elastiche maggiormente significative sono la velocità delle onde compressionali  $V_P$ , la velocità delle onde di taglio  $V_S$  e la densità  $\rho$ . La cosa importante da notare è che l'ampiezza delle riflessioni dipende anche dall'angolo di incidenza del raggio sull'interfaccia.

La base teorica dell'AVA è fondata sul lavoro di Zoeppritz (1919), che deriva le espressioni del coefficiente di riflessione e trasmissione come una funzione dell'angolo di incidenza; questo metodo fu usato da Ostrander (1984), che introdusse la variazione dei coefficienti di riflessione con l'offset come diretto indicatore di idrocarburi.

### 2.2.2. Coefficienti di riflessione e trasmissione per onde piane

La seguente trattazione è valida considerando due mezzi elastici semi-infiniti omogenei ed isotropi, separati da una superficie orizzontale su cui incide un'onda piana; tali condizioni sono difficilmente riscontrabili in una situazione reale, ma l'approssimazione è resa necessaria per la complessità del fenomeno.

E' necessario introdurre il concetto di *impedenza sismica* definito come il prodotto tra velocità e densità del mezzo in cui si propaga l'onda:



$$I_P = \rho \cdot V_P \qquad I_S = \rho \cdot V_S$$

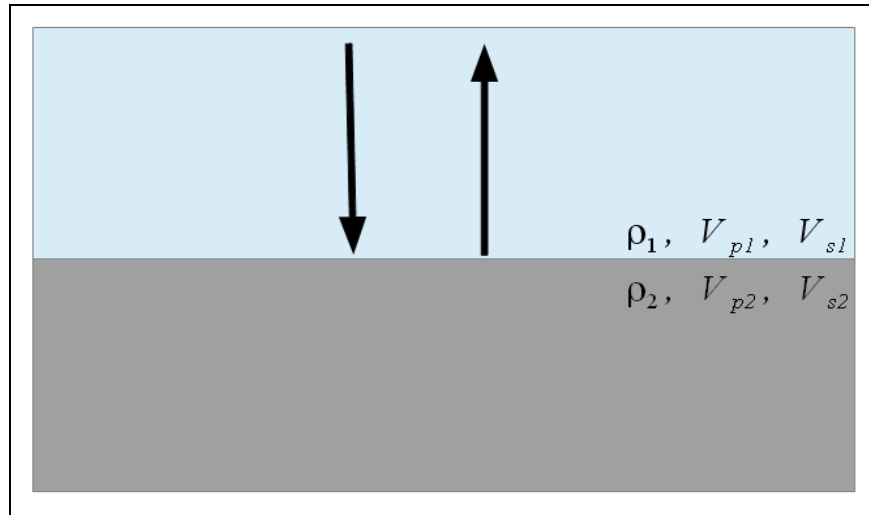
dove  $I_P$  e  $I_S$  sono, rispettivamente, le impedenze P e S.

All'interfaccia tra due layer omogenei isotropi ed elastici, la riflettività data da un'incidenza normale, definita come il rapporto tra ampiezza riflessa  $A_r$  e ampiezza incidente  $A_i$ , è espressa come:

$$R_{PP} = \frac{A_{rP}}{A_{iP}} = \frac{\rho_2 \cdot V_{P2} - \rho_1 \cdot V_{P1}}{\rho_2 \cdot V_{P2} + \rho_1 \cdot V_{P1}} = \frac{I_{P2} - I_{P1}}{I_{P2} + I_{P1}} \quad (2.21)$$

$$R_{SS} = \frac{A_{rS}}{A_{iS}} = \frac{\rho_2 \cdot V_{S2} - \rho_1 \cdot V_{S1}}{\rho_2 \cdot V_{S2} + \rho_1 \cdot V_{S1}} = \frac{I_{S2} - I_{S1}}{I_{S2} + I_{S1}} \quad (2.22)$$

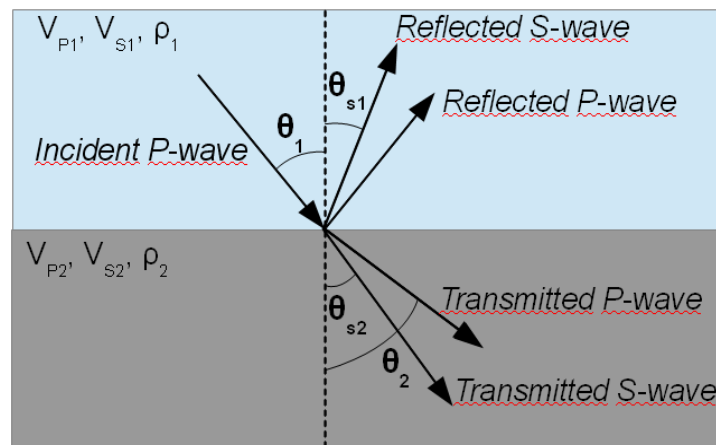
dove  $R_{PP}$  e  $R_{SS}$  sono i coefficienti di riflessione, rispettivamente, dell'onda incidente P e S; mentre gli indici 1 e 2 si riferiscono al primo ed al secondo mezzo (Figura 2.4).



**Fig. 2.4** Riflessione di un raggio incidente normalmente su una interfaccia separante 2 mezzi omogenei, isotropi ed elastici.

Un'onda P che incide normalmente genera solo onde P in riflessione e in trasmissione; lo stesso dicasi per le onde S.

All'aumentare dell'angolo di incidenza la situazione è più complicata. Un'onda P incidente genera onde riflesse e trasmesse P e S (Figura 2.5). I coefficienti di riflessione e trasmissione dipendono dall'angolo di incidenza e dalle proprietà fisiche dei due layers. Ad esempio, nel caso di un'onda compressionale incidente, la componente del moto parallela alla discontinuità genera delle onde di taglio riflesse e trasmesse; è quindi naturale aspettarsi che il coefficiente di riflessione per le onde puramente compressionali ( $R_{PP}$ ) dipenda, nel caso di incidenza non normale, oltre che dalla velocità delle onde P e densità, anche dalla velocità delle onde S nei due mezzi. Tali caratteristiche dipendono a loro volta dalle proprietà dei mezzi quali litologia, porosità e contenuto in fluidi.



**Fig. 2.5** Raggi riflessi e trasmessi da un'onda P che incide non ortogonalmente all'interfaccia.

Gli angoli di incidenza, riflessione e trasmissione sono regolati dalla Legge di Snell (menzionata precedentemente):

$$p = \frac{\sin(\theta_1)}{V_{P1}} = \frac{\sin(\theta_2)}{V_{P2}} = \frac{\sin(\theta_{S1})}{V_{S1}} = \frac{\sin(\theta_{S2})}{V_{S2}}$$

dove  $p$  è il parametro del raggio;  $\theta$  e  $\theta_s$  sono gli angoli che formano i raggi P ed S con la normale all'interfaccia; gli indici 1 e 2 indicano gli angoli o le proprietà fisiche

del layer 1 e 2.

La completa soluzione per l'ampiezza di onde riflesse e trasmesse P e S sia per l'incidenza P che per l'incidenza S è data dalle equazioni di Knott-Zoeppritz (Knott, 1899; Zoeppritz, 1919) che assumono fronti d'onda piani.

Gli autori hanno sviluppato equazioni per la definizione dei coefficienti di riflessione e trasmissione espressi in funzione dell'angolo di incidenza e delle proprietà elastiche dei mezzi, quali la *densità*  $\rho$ , il *modulo bulk*  $k$  e il *modulo di taglio*  $\mu$ , assumendo fronti d'onda piani.

Queste equazioni richiedono condizioni al contorno che impongono la continuità degli sforzi e degli spostamenti all'interfaccia riflettente. La continuità degli stress normali e tangenziali evita una accelerazione infinita all'interfaccia; mentre la continuità degli spostamenti è necessaria al fine di evitare scorrimenti o scollamenti all'interfaccia.

Aki and Richards (1980) forniscono i risultati di queste equazioni in una forma matriciale più semplice di cui osserviamo, ai fini di questo studio, esclusivamente il coefficiente di riflessione di un onda incidente e riflessa P, cioè R<sub>PP</sub>:

$$R_{PP} = \left[ \left( b \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{V_{P1}} - c \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{V_{P2}} \right) \cdot F - \left( a + d \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{V_{P1}} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{V_{S2}} \right) \cdot H \cdot p^2 \right] / D \quad (2.23)$$

dove

$$a = \rho_2 \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2(\theta_{S2})) - \rho_1 \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2(\theta_{S1}))$$

$$b = \rho_2 \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2(\theta_{S2})) + 2 \cdot \rho_1 \cdot \sin^2(\theta_{S1})$$

$$c = \rho_1 \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2(\theta_{S1})) + 2 \cdot \rho_2 \cdot \sin^2(\theta_{S2})$$

$$d = 2 \cdot (\rho_2 \cdot V_{S2}^2 - \rho_1 \cdot V_{S1}^2)$$

$$D = E \cdot F + G \cdot H \cdot p^2 = (\det M) / (V_{P1} \cdot V_{P2} \cdot V_{S1} \cdot V_{S2})$$

$$F = b \cdot \frac{\cos(\theta_{S1})}{V_{S1}} + c \cdot \frac{\cos(\theta_{S2})}{V_{S2}}$$

$V_{P1}$ ,  $V_{S1}$ ,  $\rho_1$  e  $V_{P2}$ ,  $V_{S2}$ ,  $\rho_2$  sono le proprietà del mezzo 1 soprastante l'interfaccia e del mezzo 2 sottostante l'interfaccia, mentre  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_{S1}$ ,  $\theta_{S2}$  sono gli angoli di riflessione e trasmissione di Figura 2.5.

	<b>Vp (m/s)</b>	<b>Vs (m/s)</b>	<b><math>\rho</math> (kg/m<sup>3</sup>)</b>
<b>Acqua</b>	1500	0	1000
<b>Modello 1</b>	1608	847	1600
<b>Modello 2</b>	1481	210	1300
<b>Modello 3</b>	1743	399	2100

**Tabella 2.1** Proprietà fisiche dello strato d'acqua e dei sedimenti di fondo mare dei tre modelli analizzati.

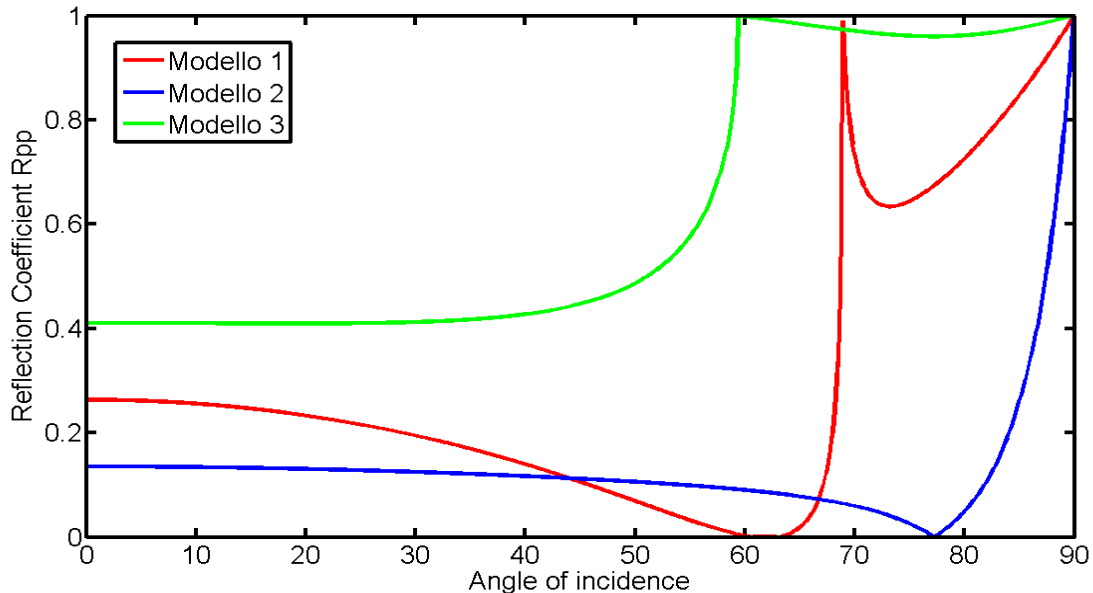
L'andamento del coefficiente di riflessione  $R_{PP}$ , calcolato con Zoeppritz, relativo alla riflessione di un'onda piana P incidente sul fondo mare viene mostrato, per i tre modelli analizzati, in Figura 2.6 dalla quale emergono le seguenti considerazioni:

- a) la variazione del coefficiente di riflessione in funzione dell'angolo di incidenza è poco evidente a piccoli angoli; tra  $0^\circ$  e  $30^\circ$ ,  $R_{PP}$  decresce molto lentamente all'aumentare dell'angolo, sia nel caso di incremento di  $V_P$  che nel caso di inversione di velocità;
- b) un importante incremento dell'ampiezza dell'onda P riflessa si ha in coincidenza dell'angolo critico  $\theta_c$ , oltre il quale tutta l'energia incidente sull'interfaccia viene riflessa (ciò è visibile solo nei modelli 1 e 3 dove si raggiunge l'incidenza critica);
- c) immediatamente dopo l'angolo critico, in mezzi elastici, l'energia dell'onda P riflessa decresce; tale decremento è da attribuire all'aumentare della conversione in onde S riflesse e trasmesse a scapito dell'energia P riflessa.

Inoltre possono essere fatte considerazioni aggiuntive a proposito delle equazioni di Zoeppritz:

- i. dopo l'angolo critico, il coefficiente di riflessione diventa complesso e si introduce una rotazione di fase;
- ii. i coefficienti di riflessione e trasmissione non dipendono dalla frequenza;

- iii. i coefficienti di riflessione di un'onda P discendente e un'onda P risalente, incidenti sulla stessa interfaccia, non risultano uguali in modulo e di segno opposto; questo denota un comportamento asimmetrico del coefficiente di riflessione calcolato con Zoeppritz.



**Fig. 2.6** Andamento del modulo del coefficiente di riflessione  $R_{pp}$  di un'onda P riflessa dal fondo mare a seguito di un'onda incidente P.  $R_{pp}$  viene calcolato attraverso l'equazione di Zoeppritz per i modelli 1, 2 e 3 le cui proprietà fisiche sono mostrate in Tabella 2.1

Sebbene le equazioni di Zoeppritz possono essere valutate numericamente è spesso utile, data la loro complessità, usare delle approssimazioni lineari di queste.

Tali approssimazioni si rivelano estremamente utili per le applicazioni pratiche, dal momento che facilitano il processo di inversione.

Una delle approssimazione usate in questo lavoro è quella formulata da Aki e Richards (1980), in cui gli autori riparametrizzano le equazioni di Zoeppritz in termini di variazione di densità  $\rho$ , di velocità  $V_P$  e  $V_S$ , attraverso l'interfaccia. In questa approssimazione si assumono piccoli contrasti nelle proprietà dei mezzi a contatto e piccoli angoli di incidenza. Di seguito viene indicata l'espressione del coefficiente di riflessione dell'onda riflessa P, assumendo  $\Delta V_P / \bar{V}_P$ ,

$\Delta V_S/\bar{V}_S$  e  $\Delta V_P/\bar{V}_P \ll 1$  :

$$R_{PP} \sim \frac{1}{2} \cdot (1 - 4 \cdot p^2 \cdot \bar{V}_S^2) \cdot \frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}} + \frac{1}{2 \cdot \cos^2(\theta)} \cdot \frac{\Delta V_P}{\bar{V}_P} - 4 \cdot p^2 \cdot \bar{V}_S^2 \cdot \frac{\Delta V_S}{\bar{V}_S} \quad (2.24)$$

dove:

$$p = \frac{\sin(\theta_1)}{V_{P1}} = \frac{\sin(\theta_{S1})}{V_{S1}} \quad \theta = (\theta_2 + \theta_1)/2$$

$$\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1 \quad \bar{\rho} = (\rho_2 + \rho_1)/2$$

$$\Delta V_P = V_{P2} - V_{P1} \quad \bar{V}_P = (V_{P2} + V_{P1})/2$$

$$\Delta V_S = V_{S2} - V_{S1} \quad \bar{V}_S = (V_{S2} + V_{S1})/2$$

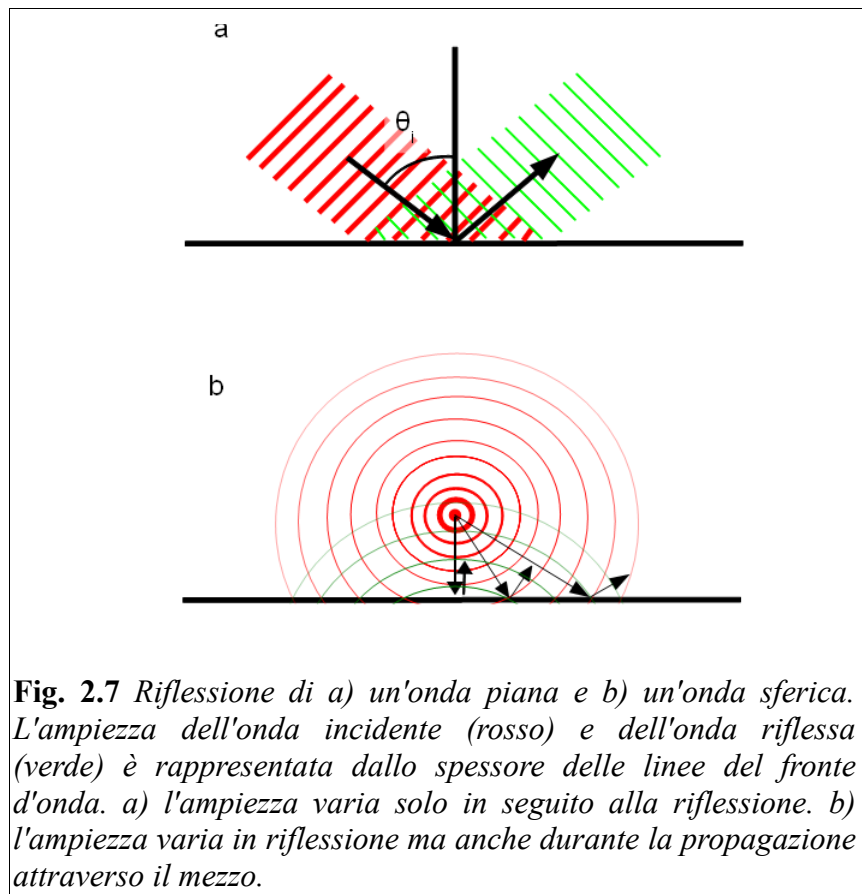
$p$  è il parametro del raggio,  $\Delta V_P$  indica la variazione della velocità compressionale attraverso l'interfaccia,  $\bar{V}_P$  è la media della velocità compressionale attraverso l'interfaccia; le stesse definizioni valgono per  $\Delta V_S$ ,  $\bar{V}_S$  e  $\Delta \rho$ ,  $\bar{\rho}$ .

Andando ad intercambiare le proprietà dei mezzi a contatto si ottiene semplicemente una variazione nel segno dei termini  $\Delta \rho$ ,  $\Delta V_P$ ,  $\Delta V_S$ . Questo si riflette nel comportamento simmetrico di  $R_{PP}$ , definito dall'equazione (2.24), differente da quello di Zoeppritz, definito dall'equazione (2.23), che risulta asimmetrico. La simmetria però risulta verificata solo per angoli precritici dato che il fenomeno di incidenza critica non è a sua volta simmetrico.

### 2.2.3. Coefficiente di riflessione per onde sferiche

Le equazioni di Zoeppritz e le loro approssimazioni lineari restituiscono i coefficienti di riflessione e trasmissione assumendo la propagazione di onde piane (Figura 2.7 a).

Nell'esplorazione sismica, comunque, le onde sono generate localmente da una sorgente che, in



**Fig. 2.7** Riflessione di a) un'onda piana e b) un'onda sferica. L'ampiezza dell'onda incidente (rosso) e dell'onda riflessa (verde) è rappresentata dallo spessore delle linee del fronte d'onda. a) l'ampiezza varia solo in seguito alla riflessione. b) l'ampiezza varia in riflessione ma anche durante la propagazione attraverso il mezzo.

determinati casi, per convenienza, può essere considerata puntiforme (Figura 2.7 b); quindi, il fronte d'onda che si propaga è di tipo sferico piuttosto che piano.

Le differenze tra onde sferiche e piane sono:

- l'ampiezza dell'onda sferica non varia soltanto all'interfaccia ma in tutti i punti dello spazio (geometrical spreading);
- l'onda sferica può essere vista come una combinazione di più onde piane, ognuna con differente parametro del raggio e direzione;
- il coefficiente di riflessione per onde sferiche dipende dalla frequenza e dallo spettro di frequenza dell'ondina.

Queste differenze sono più evidenti in prossimità dell'angolo critico in cui il fronte d'onda sferico non può più essere approssimato ad un fronte d'onda piano: la zona di Fresnel si allontana molto dal poter essere considerata puntiforme; questo implica l'instaurarsi di fenomeni di interferenza tra le risposte riflesse.

Da tali considerazioni si evince che la risposta AVA di un'onda piana riflessa risulta una buona approssimazione della risposta AVA di un fronte d'onda sferico, per angoli ben al di sotto dell'angolo critico; al contrario le due risposte deviano significativamente l'una dall'altra in prossimità dell'angolo critico.

#### 2.2.4. Fattori che influenzano l'ampiezza dei segnali riflessi

L'analisi AVA risulta molto problematica in quanto esistono diversi fattori che influenzano l'ampiezza delle onde riflesse (Figura 2.8). Alcuni di questi non sono direttamente legati alle proprietà fisiche e alle geometrie della sottosuperficie e tendono perciò a mascherare la vera dipendenza dell'ampiezza dal coefficiente di riflessione.

Un altro limite dell'analisi AVA consiste nelle basi teoriche su cui si fonda, che prevedono ipotesi e assunzioni raramente verificabili in situazioni reali. A tale proposito, per una corretta interpretazione dei risultati, è necessaria la scelta di una sequenza di processing che miri a preservare la variazione del coefficiente di riflessione con l'offset.

I principali fattori di disturbo che devono essere presi in considerazione nell'analisi AVA sono i seguenti:

- RIFLESSIONI SECONDARIE

Uno dei fattori di disturbo nell'elaborazione di dati marini è la presenza di multiple di fondo mare, dovute al fatto che lo strato d'acqua, essendo delimitato da due forti superfici riflettenti, agisce come un canale guida per le onde sismiche che quindi vengono ripetutamente riflesse fra queste due superfici con basse perdite di energia per trasmissione; essendo inoltre l'acqua un mezzo a basso assorbimento di energia, tali riflessioni subiranno una bassa attenuazione. Le riflessioni multiple si sovrappongono quindi alle riflessioni primarie provenienti da strati profondi, e la loro presenza deve essere rimossa.

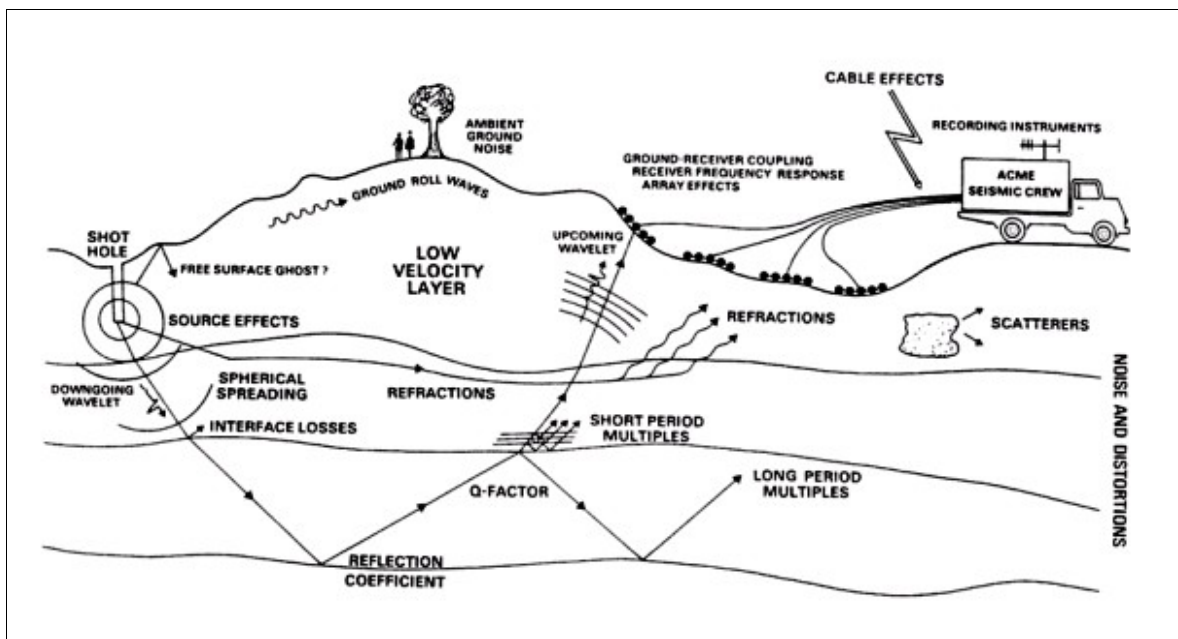
Altro effetto di disturbo presente questa volta sia in dati marini che terrestri, risulta



quello delle diffrazioni che si hanno quando le dimensioni delle disomogeneità del terreno sono confrontabili con la lunghezza d'onda delle onde sismiche. In corrispondenza di tali discontinuità si generano fronti d'onda secondari che, interferendo con le riflessioni primarie, abbassano il rapporto segnale/rumore dei dati.

- RIFLESSIONI COMPOSITE

Raramente le riflessioni possono essere considerate come generate da una singola interfaccia; più frequentemente si ha a che fare con riflessioni provenienti da più interfacce e quindi, segnali che in realtà sono costituiti dalla sovrapposizione di più riflessioni.



**Fig. 2.8** *Fattori che influenzano l'ampiezza dei segnali riflessi.*

In genere l'interferenza tra più riflessioni può essere trascurata se l'interfaccia risulta relativamente isolata o se comunque i riflettori vicini hanno coefficienti di riflessione molto bassi, se confrontati con il coefficiente di riflessione della discontinuità di interesse.

- EFFETTI SUPERFICIALI

Ci sono una serie di effetti superficiali che vanno a perturbare l'ampiezza delle onde sismiche riflesse. Tra questi i più frequenti sono la variazione della potenza delle sorgenti, l'accoppiamento dei ricevitori (quest'ultimo non è di interesse di dati marini). Altri effetti risultano dall'angolo di emersione ed includono il pattern di radiazione della sorgente e la risposta degli array dei geofoni (o idrofoni).

- SPREADING GEOMETRICO

Consiste nella redistribuzione dell'energia su di una superficie la cui estensione aumenta continuamente allontanandosi dalla sorgente. La densità di energia dell'onda diminuisce lungo il suo percorso e tale diminuzione è inversamente proporzionale alla distanza percorsa assumendo una velocità costante. L'effetto di geometrical spreading, all'interno di un mezzo stratificato orizzontalmente, è stato calcolato nel 1990 da Ursin. Nel suo lavoro l'autore esprime la divergenza sferica come una funzione della velocità del primo layer, dell'offset e delle derivate del travel time di primo e secondo ordine.

- EFFETTI DEGLI STRATI SOVRASTANTI

Le equazioni di Zoeppritz come le sue approssimazioni assumono una geologia estremamente semplice: una sola discontinuità separante due mezzi isotropi, omogenei ed elastici. In realtà le interfacce in esame saranno sovrastate da una moltitudine di altre interfacce che non possono essere trascurate.

Dato che sia il coefficiente di riflessione che il coefficiente di trasmissione sono offset-dipendenti, allora anche l'ampiezza dell'onda P incidente sull'interfaccia riflettente di interesse sarà offset-dipendente. Questo problema risulta tanto più importante quanto più forte è la riflettività al di sopra dell'interfaccia in studio.

- ASSORBIMENTO

In un mezzo ideale, puramente elastico, il geometrical spreading e la riflessione/trasmissione di energia all'interfaccia controllano l'ampiezza dell'onda sismica. Una volta che l'onda è stata generata, questa si propagherà all'infinito.

In realtà le rocce e i sedimenti non sono perfettamente elastici e la propagazione

dell'onda avviene con l'attenuazione dell'ampiezza. Ciò è provocato dal fenomeno di frizione interna che rappresenta processi microscopici complessi.

L'equazione che descrive la variazione di ampiezza con la distanza percorsa dall'onda è la seguente:

$$A(x) = A_0 \cdot \exp\left(-\frac{f \cdot \pi}{Q \cdot V} \cdot x\right) \quad (2.25)$$

dove  $A_0$  è l'ampiezza dell'onda alla sorgente,  $f$  è la frequenza dell'onda,  $V$  è la velocità di propagazione dell'onda e  $Q$  è il *fattore di qualità* del mezzo in cui si propaga l'onda, definito come

$$\frac{1}{Q} = \frac{-\Delta E}{2 \cdot \pi \cdot E} \quad (2.26)$$

Quindi  $Q$  indica la perdita di energia per singola oscillazione.

La perdita di energia in un mezzo anelastico è generalmente misurata attraverso l'attenuazione intrinseca ed è parametrizzata con  $Q$ .

Il fattore di qualità per le onde P è generalmente maggiore di quello relativo alle onde S; questa due quantità vengono definite  $Q_P$  e  $Q_S$  rispettivamente.

Risulta chiaro che il dato grezzo registrato vada sottoposto ad una sequenza di processing finalizzata all'analisi AVA (Avseth et alii, 2005), in modo da trovare il giusto compromesso tra due obiettivi principali, che possono essere tra loro in conflitto: preservare l'informazione della variazione di ampiezza con l'offset e aumentare il rapporto segnale-rumore.

## 3 Costruzione di sismogrammi sintetici a partire da modelli geologici reali

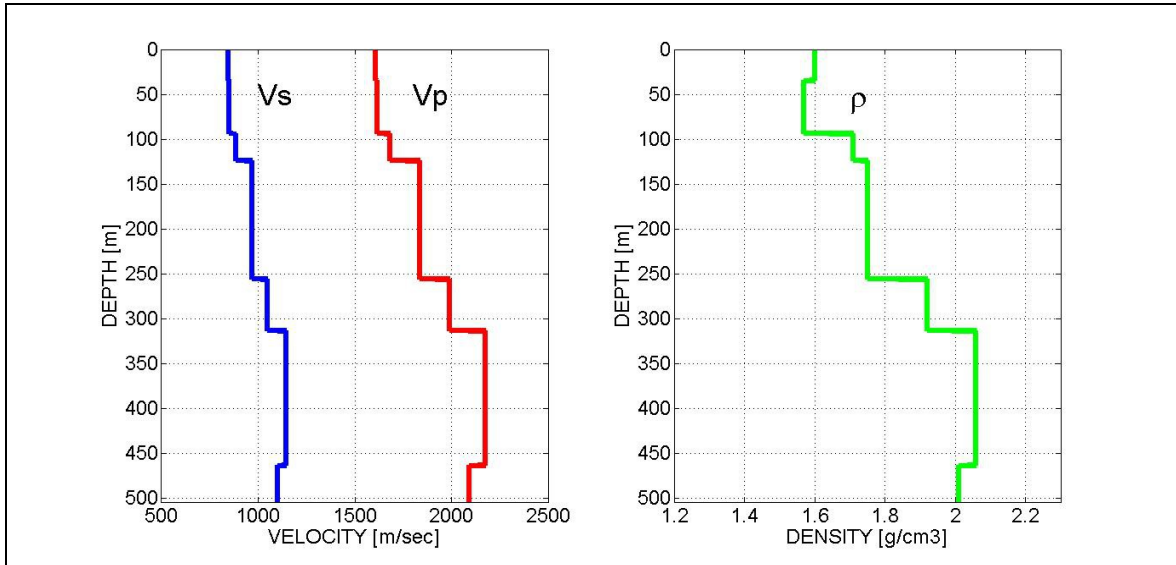
### 3.1 Tre modelli di fondo mare

Dato l'obiettivo del lavoro di tesi, sono stati scelti esclusivamente modelli geologici di fondo mare; questi sono stati selezionati tra quelli proposti dalla Dott.ssa Tania Ciaccio nella sua Tesi di Laurea "Analisi cinematica e dinamica di eventi sismici convertiti in successioni sedimentarie di ambiente marino". I modelli analizzati sono 3 (con Leg si indica il sito di indagine):

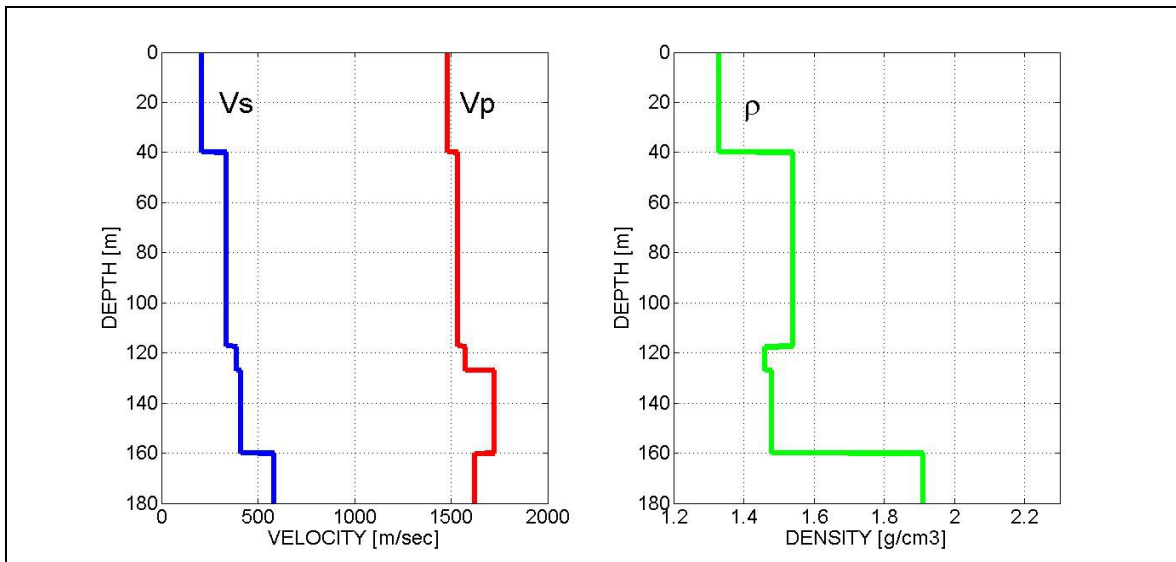
- Leg 194-sito1195B (Figura 3.1), lungo il margine della piattaforma continentale australiana, dove la colonna d'acqua raggiunge uno spessore di 420.0 m e i sedimenti sono di natura carbonatica (Modello 1).
- Leg 201-sito1229A (Figura 3.2), sulla piattaforma continentale del Perù ad una profondità di 150.5 m dal livello del medio mare (l.m.m.) dove i sedimenti principali sono le argille fino ad una profondità di 160.0 m al di sotto del fondo mare e le sabbie fino ad una profondità di 180.0 m (Modello 2).
- Leg 174-sito1072A (Figura 3.3), posizionato sul margine esterno della piattaforma continentale del New Jersey, a 98.1 m di profondità dal livello del medio mare (l.m.m.) e costituito dall'alternanza di sabbie e argille per uno spessore totale di 280.0 m. Tale alternanza litologica fa sì che il presente modello abbia un andamento dei parametri elastici con la profondità più articolato rispetto ai due precedenti (Modello 3).

I dati sopra descritti sono reperibili nel database dell' "*Ocean Drilling Program ODP*" , un programma di ricerca internazionale dedicato alla ricostruzione della storia e della struttura del nostro pianeta attraverso lo studio di sedimenti e rocce campionate mediante perforazioni oceaniche e in ambiente marino.

Le proprietà fisiche ricavabili dai Leg sopra citati sono: la velocità delle onde compressionali P ( $V_P$ ) e la densità ( $\rho$ ); per quanto riguarda la velocità delle onde di taglio S ( $V_S$ ), non essendo disponibile, è stata calcolata attraverso formule empiriche (Hamilton, 1976 e Shell, 1958) in funzione della litologia, profondità e pressione efficace a cui si trova il sedimento.



**Fig. 3.1** Profili di velocità  $V_P$ ,  $V_S$  e densità  $\rho$  del modello 1. Le velocità seguono lo stesso trend di crescita, presentando, nella parte finale un'inversione di velocità corrispondente ad un'inversione di densità. Il valore zero nell'asse delle profondità coincide con il fondo mare.



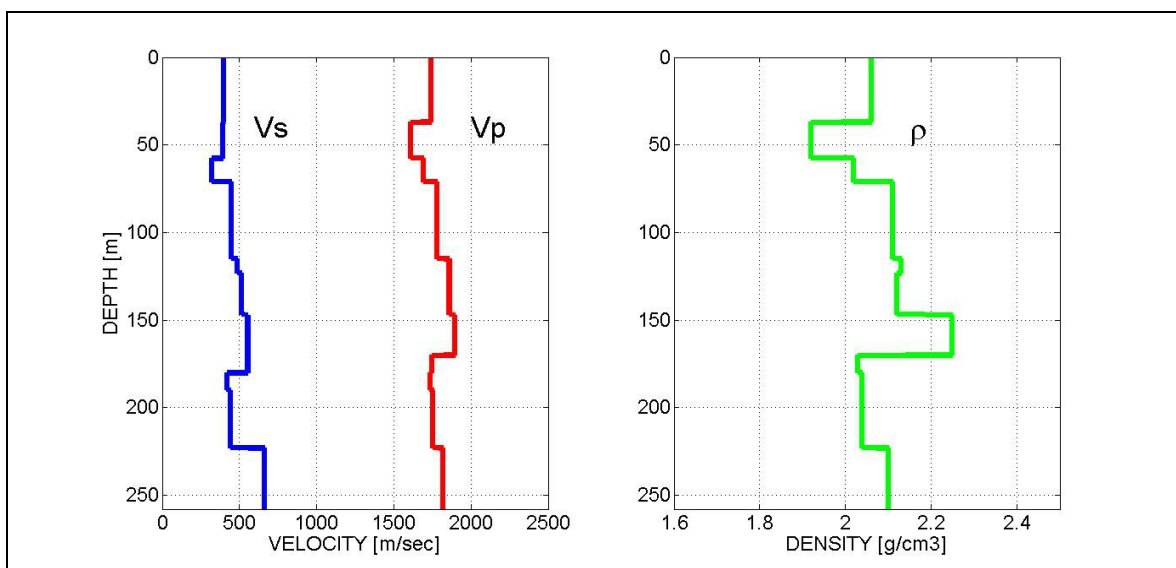
**Fig. 3.2** Profili di velocità  $V_P$ ,  $V_S$  e densità  $\rho$  nel modello 2. Si osserva un incremento continuo di  $V_S$ , mentre la  $V_P$  presenta un'inversione di velocità nella parte finale. La densità presenta un'inversione tra 120 m e 160 m. Il valore zero nell'asse delle profondità coincide con il fondo mare.

## 3.2 Oases: calcolo dei sismogrammi sintetici di fondo mare

Per la realizzazione dei sismogrammi sintetici è stato utilizzato il software Oases basato sul metodo a riflettività di Kennet (1983), in grado di simulare la propagazione di un fronte d'onda sismico in mezzi 1D, dove le proprietà fisiche variano solo lungo la direzione verticale.

La generazione dei sismogrammi segue 3 step:

- inserimento dei dati del modello in un file testuale;
- calcolo della traccia di riflettività;
- convoluzione dell'ondina sorgente con la traccia di riflettività e conversione in formato Matlab .



**Fig. 3.3** Profili di velocità  $V_P$ ,  $V_S$  e densità  $\rho$  del modello 3. Il valore zero nell'asse delle profondità coincide con il fondo mare.

### 3.2.1. Inserimento dati, calcolo della tracce e visualizzazione

E' necessario creare un database in cui vengono inseriti i parametri di acquisizione e le caratteristiche del modello. Il file testuale è strutturato in blocchi (Figura 3.4):

- BLOCCO I: nome del modello considerato;
- BLOCCO II: opzioni di output. Nel caso in cui si ipotizzi l'utilizzo di idrofoni, l'opzione K J F restituisce la misura di variazione di pressione acustica;
- BLOCCO III: frequenza centrale dell'ondina sorgente, espressa in Hz. In questo lavoro si utilizzano frequenze di 30 e 60 Hz;
- BLOCCO IV: la prima riga identifica il numero di layers del modello, mentre le successive indicano le proprietà di ogni singolo layer; all'interno di ognuna di queste righe si osserva: 1) la profondità dell'interfaccia dal l.m.m. (livello medio mare), espressa in metri, 2) la velocità delle onde compressionali, in m/s, 3) la velocità delle onde di taglio in m/s, 4) il coefficiente di attenuazione delle onde compressionali, espresso in dB/λ, 5) il coefficiente di attenuazione delle onde di taglio, in dB/λ, 6) la densità, in g/cm<sup>3</sup>, 7) la rugosità dell'interfaccia riflettente.

Attraverso Oases sono stati creati solo modelli elastici considerando nulli i coefficienti di attenuazione e di rugosità.

```

Modello_Geologico_Leg_174
K J F
60 0
9 # numero di strati
0 0 0 0 0 0 0 # aria
0 1500 0 0 0 1.0 0 # strato 1
420 1608 847 0 0 1.6 0 # strato 2
454.5 1616 851 0 0 1.57 0 # strato 3
513.9 1683 886 0 0 1.71 0 # strato 4
543.9 1839 968 0 0 1.75 0 # strato 5
675.9 1991 1048 0 0 1.92 0 # strato 6
733.5 2178 1146 0 0 2.06 0 # strato 7
883.3 2094 1102 0 0 2.01 0 # strato 8
5 # profondità sorgente
8.0 8.0 1 # profondità ricevitori
100 1E8
-1 1 950 0
8192 2 150 0.001 0.1 0.05 200
    
```

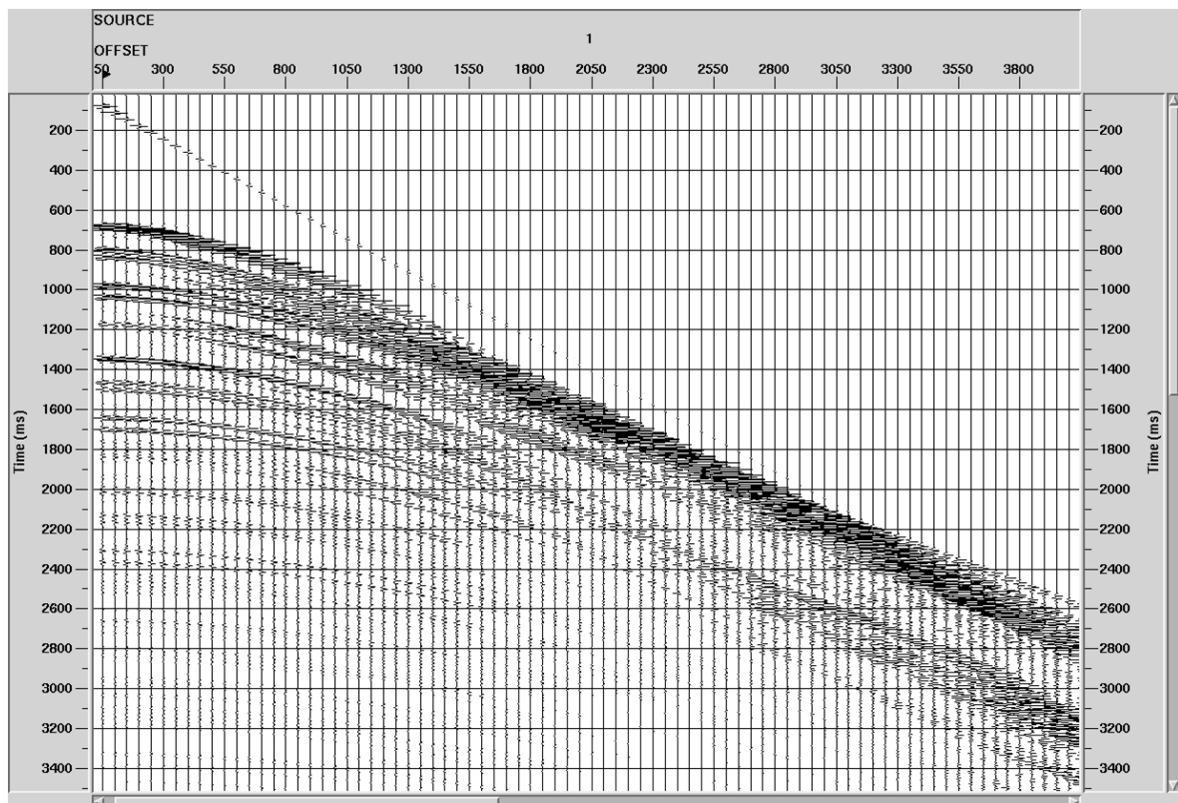
**Fig. 3.4** File di testo del modello 1, per l'inserimento dei dati su Oases.

- BLOCCO V: profondità della sorgente, che è stata posta a 5 m sotto il l.m.m.
- BLOCCO VI: profondità del primo e dell'ultimo ricevitore, posti entrambi a 8

m sotto il l.m.m.

- BLOCCO VII: velocità di fase minima e massima, numero di campioni di numeri d'onda (inserendo -1 il software lo calcola in automatico);
- BLOCCO VIII: numero di campioni temporali (in potenza di 2), banda di frequenza (Hz), passo di campionamento temporale (sec), offset del primo ricevitore (Km), passo di campionamento spaziale (Km) e numero di ricevitori.

Il tempo totale di calcolo dipende principalmente dal numero di strati, dal numero di campioni temporali e dalla banda di frequenza utilizzata. Aumentando il loro valore aumenta il tempo necessario al software per calcolare il sismogramma sintetico.



**Fig. 3.5** Visualizzazione su Promax del sismogramma sintetico relativo al modello 1, in cui il fondo mare è a 420 metri sotto il livello del medio mare e la frequenza centrale utilizzata è 60 Hz.

Il calcolo della traccia di riflettività viene eseguito attraverso l'eseguibile Oases-



Oasp, che, a partire dai dati forniti nel file testuale calcola la traccia di riflettività ad esso relativa.

La traccia di riflettività viene convoluta con un tipo di ondina scelto dall'utente, ottenendo così un file leggibile in Matlab che consiste nel sismogramma generato.

Per la visualizzazione dei sismogrammi è consigliabile importare il file di output in Promax; ciò viene eseguito attraverso due operazioni svolte in Matlab:

- scrittura delle header, ovvero definizione di alcune informazioni aggiuntive del dato (numero totale di tracce, numero di campioni per traccia, passo di campionamento temporale, ...);
- conversione dei dati in formato *.segy* , mediante la funzione Matlab *'writesegy'* .

L'utilizzo di questo software permette una rapida elaborazione del segnale per una accurata osservazione del sismogramma sintetico (Figura 3.5).

## 4 Applicazione Analisi AVA

### 4.1 Introduzione

Questa parte del lavoro si propone di studiare come l'andamento del coefficiente di riflessione per onde piane compressionali ( $R_{PP}$ ), in funzione dell'angolo di incidenza, è influenzato dalle proprietà fisiche dei sedimenti di fondo mare, ed in particolare come ognuna di queste proprietà presa singolarmente influisca su  $R_{PP}$ . Inoltre, si analizza l'andamento della fase in funzione dell'angolo di incidenza (Analisi PVA: Phase Versus Angle). Per il calcolo di  $R_{PP}$  piano è necessario ricorrere alle equazioni di Zoeppritz: sebbene le approssimazioni lineari di tali equazioni siano comunemente utilizzate per una comprensione più immediata e semplice di come le proprietà dei sedimenti condizionino  $R_{PP}$ , nel caso di interesse, volendo studiare l'intero range di angoli di incidenza (da  $0^\circ$  a  $90^\circ$ ), queste approssimazioni non possono essere utilizzate in quanto perdono di validità per angoli di incidenza maggiori o uguali all'angolo critico e per forti contrasti delle proprietà fisiche dei mezzi a contatto.

In particolare, si analizza la risposta in riflessione per tre diversi modelli a singola interfaccia, costituiti superiormente dallo strato di acqua e inferiormente dai sedimenti di fondo mare; le proprietà che influenzano  $R_{PP}$  sono la velocità delle onde compressionali  $V_P$ , quella delle onde di taglio  $V_S$  e la densità  $\rho$  dei sedimenti, mentre la  $V_P$  e la  $\rho$  dell'acqua sono mantenute costanti a 1500 m/s e 1000 kg/m<sup>3</sup> rispettivamente (vedi Tabella 2.1 nel paragrafo 2.2.2). I sedimenti marini sono stati modellati sia come materiali elastici che viscoelastici includendo così il fenomeno di assorbimento.

### 4.2 $R_{PP}$ nel modello elastico

Definito il modello di fondo mare da analizzare, si varia un parametro alla volta mantenendo costanti gli altri due (ad esempio, teniamo costanti  $V_P$  e  $V_S$  mentre variamo  $\rho$ ). Per ogni parametro viene impostato un range di variazione centrato sul valore reale con valore massimo e minimo corrispondenti, rispettivamente, al

valore centrale più o meno il 20% del valore stesso. Il range di variazione scelto, varia da caso a caso e definisce il valore massimo e minimo all'interno del quale viene studiato il problema.

Facendo variare un singolo parametro, mantenendo costanti gli altri due sul loro valore reale, si calcola il modulo di  $R_{PP}$  piano tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , andando così ad indagare l'influenza di tale proprietà sul coefficiente di riflessione. Inoltre, un'analisi PVA viene eseguita sullo stesso range di angoli di incidenza, al variare di  $V_P$ .

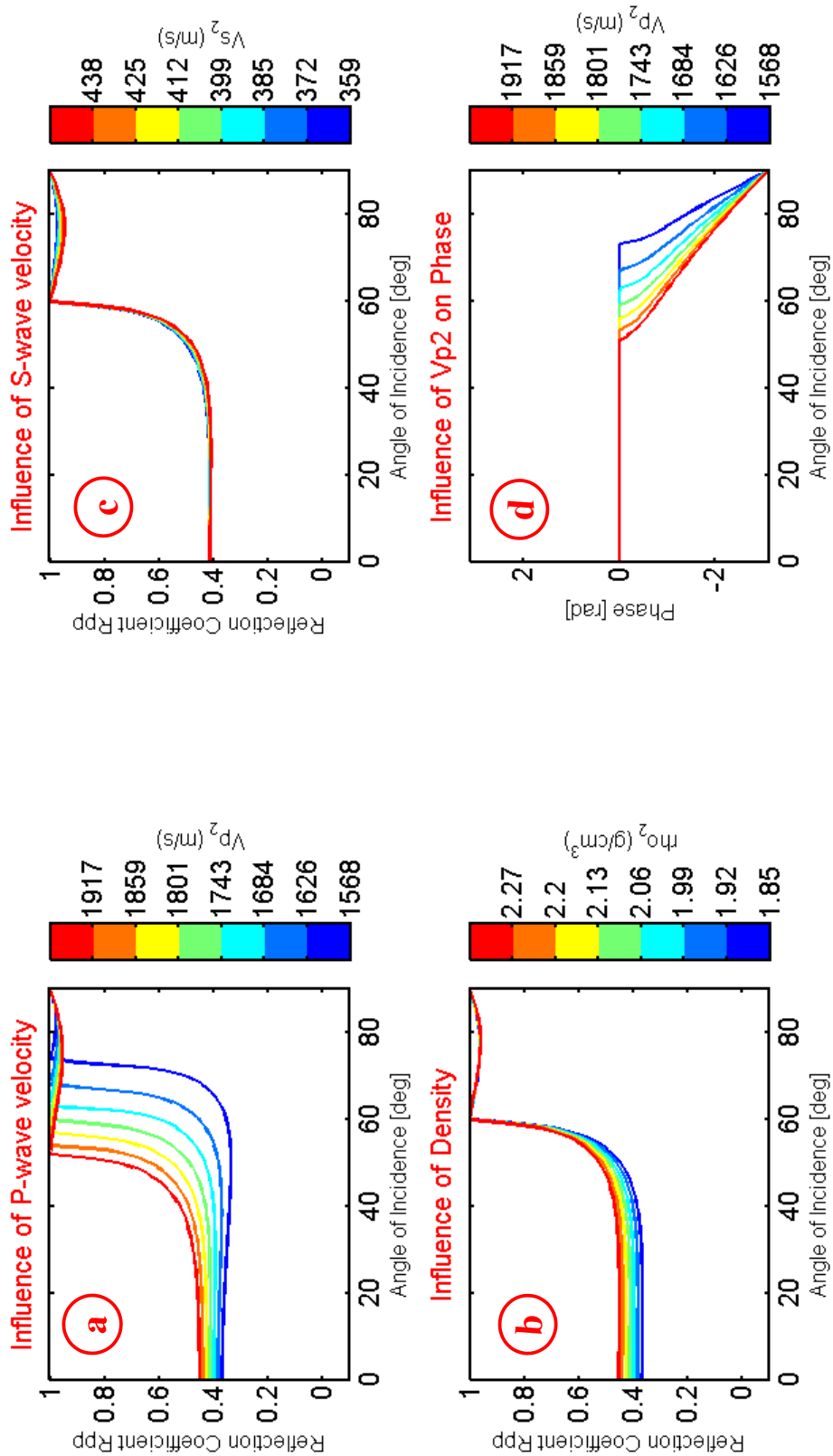
Dall'analisi dei modelli è chiaro che la funzione AVA per un modello elastico è dominata dall'angolo critico, per il quale tutta l'energia dell'onda P incidente viene riflessa.

In Figura 4.1 vengono mostrate l'analisi AVA e PVA del modello 3 con  $V_P$ ,  $V_S$  e  $\rho$  visibili in Tabella 2.1 nel paragrafo 2.2.2.

Aumentando la velocità  $V_P$  nei sedimenti (Figura 4.1a), l'angolo critico si sposta verso angoli minori ed aumenta il coefficiente di riflessione sull'intero range di angoli di incidenza. Il range di variazione della velocità P è compreso tra 1568 m/s e 1917 m/s: le rispettive curve di  $R_{PP}$  si distinguono significativamente l'una dall'altra solo per angoli di incidenza maggiori di  $40^\circ$ . Al contrario, l'influenza della densità dei sedimenti (Figura 4.1b) è più evidente per piccoli angoli di incidenza, fino a  $50^\circ$ , variando il valore di densità tra  $1.85 \text{ g/cm}^3$  e  $2.27 \text{ g/cm}^3$ . A differenza della  $V_P$ , la densità influisce solo sul valore di  $R_{PP}$  e non va a modificare l'angolo critico. Simili considerazioni possono essere fatte sui modelli 2 e 3 che però non vengono visualizzati in questo lavoro.

La velocità delle onde S non influenza significativamente l'andamento del coefficiente di riflessione in funzione dell'angolo di incidenza (Figura 4.1c): le funzioni AVA si discostano impercettibilmente l'una dall'altra al variare della  $V_S$ .

Ne deriva che, nei casi in oggetto di studio, l'andamento del coefficiente di riflessione con l'angolo di incidenza non è particolarmente sensibile alla  $V_S$ ; risulta quindi difficile una stima di  $V_S$  del fondo mare attraverso uno studio di questo tipo. Lo studio della fase di  $R_{PP}$  in funzione dell'angolo di incidenza (Figura 4.1d) associato alla variazione della  $V_P$ , restituisce informazioni solo per angoli post-critici, dove le curve si separano. In seguito verrà analizzata l'utilità dell'"informazione di fase come vincolo nella ricerca dei parametri del modello.



**Fig. 4.1** Influenza di a) velocità  $V_P$ , b) densità  $\rho$  e c) velocità  $V_S$  sul coefficiente di riflessione per un modello elastico. In d) è mostrato l'andamento della fase in funzione di  $V_P$ . I valori reali delle proprietà del modello 3 sono:  $V_P=1743$  m/s,  $V_S=399$  m/s,  $\rho=2.06$  g/cm<sup>3</sup>.

### 4.3 RPP nel modello viscoelastico

Trattare i sedimenti marini come materiali viscoelastici risulta sicuramente un approccio più realistico al problema piuttosto che descrivere il sistema come puramente elastico.

Quando un'onda si propaga in un mezzo viscoelastico subisce un'attenuazione per cui la velocità dell'onda diviene complessa e dipendente dalla frequenza angolare (Bohlen, 1998):

$$v(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)} \quad (4.1)$$

dove  $k(\omega) = k - i \cdot \alpha(\omega)$  con  $\alpha$  coefficiente di attenuazione e  $k$  numero d'onda. L'assorbimento nei sedimenti viene descritto dal coefficiente di attenuazione  $\alpha$  e dal fattore di qualità  $Q$  (O'Connell e Budianski, 1978):

$$Q(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\omega}{\alpha(\omega) \cdot c(\omega)} - \frac{\alpha(\omega) \cdot c(\omega)}{\omega} \right) \quad (4.2)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{c(\omega)} \cdot (\sqrt{Q^2(\omega) + 1} - Q(\omega)) \quad (4.3)$$

dove  $c(\omega)$  è la velocità di fase reale nel mezzo con determinati  $Q$  e  $\alpha$ .

Se il fattore di qualità  $Q$  e il coefficiente di attenuazione  $\alpha$  sono assunti costanti, la velocità di fase  $c(\omega)$  è data da (Kjartansson, 1979):

$$c(\omega) = c_0 \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^{\frac{1}{\pi} \cdot a \cdot \tan\left(\frac{1}{Q}\right)} \quad (4.4)$$

dove  $c_0$  e  $\omega_0$  sono rispettivamente la velocità e la frequenza di riferimento, misurate alla sorgente posta nel vuoto. Nel caso in cui  $\omega = \omega_0$ , abbiamo  $c(\omega) = c_0$ . Per calcolare il coefficiente di riflessione viscoelastico in funzione dell'angolo di incidenza si utilizzano anche in questo caso le equazioni di Zoeppritz, sostituendo le velocità  $V_P$  e  $V_S$  con i loro corrispettivi complessi. Dal momento che la velocità

$V_P$  è complessa, anche gli angoli di rifrazione delle onde P e S saranno quantità complesse per soddisfare la legge di Snell.

Il coefficiente di riflessione viscoelastico viene modellato in funzione dell'angolo di incidenza con lo stesso metodo applicato nel modello elastico, ma introducendo un fattore di qualità  $Q_P$  e  $Q_S$  (rispettivamente per le onde P e le onde S) ed utilizzando una frequenza del segnale di 30 Hz.

In Figura 4.2 vengono mostrate l'analisi AVA e PVA del modello 3, nel caso viscoelastico, con  $V_P$ ,  $V_S$  e  $\rho$  visibili in Tabella 2.1 nel paragrafo 2.2.2; i valori di  $Q_P$  e  $Q_S$  utilizzati sono visibili in Tabella 5.1.

	<b><math>Q_P</math></b>	<b><math>Q_S</math></b>
<b>Modello 1</b>	12,9	7,1
<b>Modello 2</b>	9,9	0,4
<b>Modello 3</b>	18,1	1,9

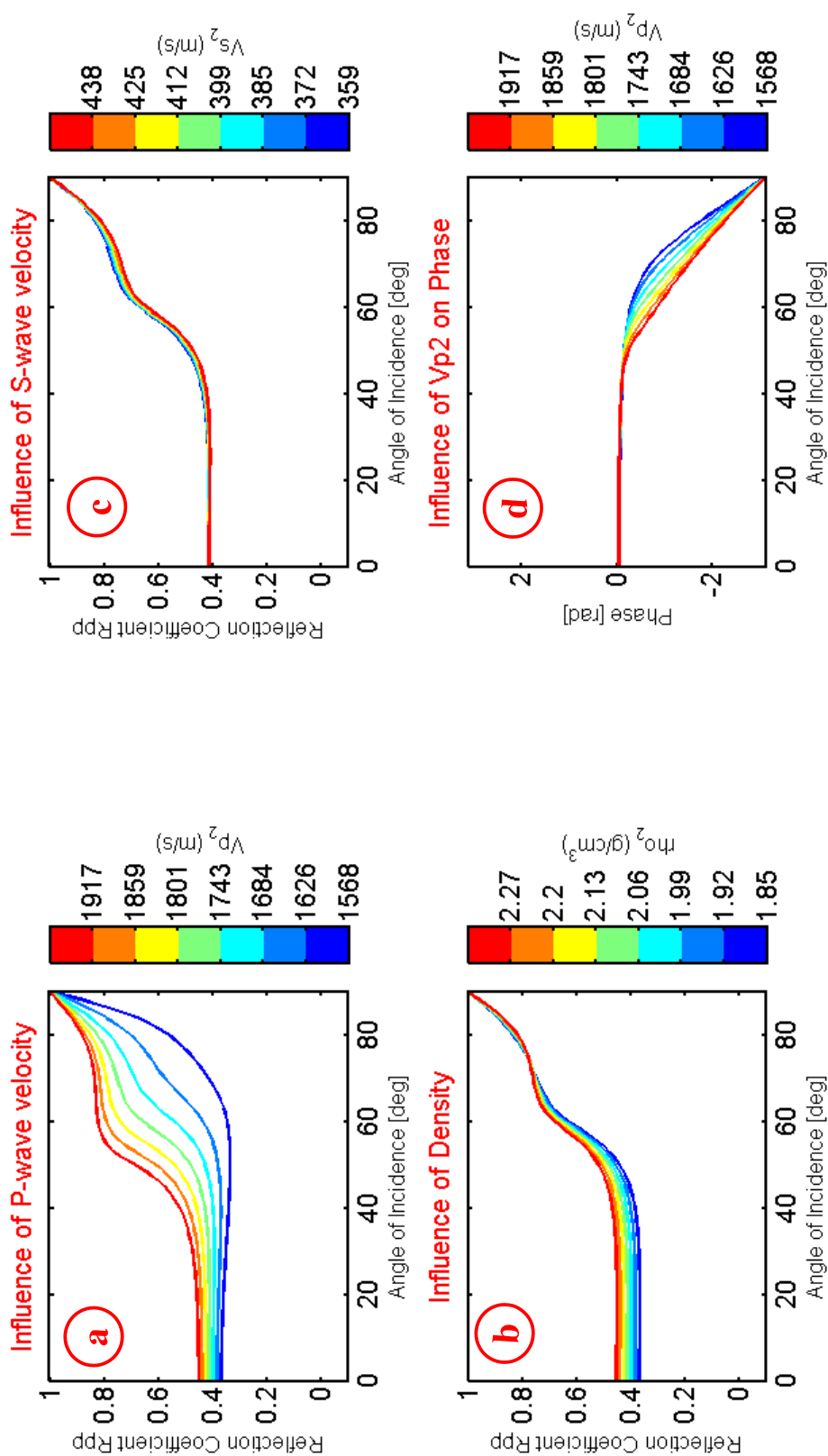
**Tabella 4.1** *Fattori di qualità  $Q$  per onde P e S nei tre modelli analizzati.*

La sostanziale differenza tra il modello elastico ed il modello viscoelastico consiste nell'assenza dell'angolo critico nel caso viscoelastico (Jensen et alii, 1994).

Come ci si aspetta dalle osservazioni fatte precedentemente per il caso elastico, la velocità delle onde P e la densità esercitano entrambe una forte influenza sul coefficiente di riflessione.

In Figura 4.2a, si osserva come un cambio di velocità P vada a differenziare le curve AVA ad angoli maggiori di  $40^\circ$ ; mentre in Figura 4.2b, in cui si va a variare il valore di densità, si nota un comportamento inverso, cioè abbiamo una massima differenziazione delle curve per angoli minori di  $40^\circ$ - $50^\circ$ . Anche nel caso viscoelastico l'effetto della velocità delle onde di taglio su coefficiente di riflessione è trascurabile (Figura 4.2c).

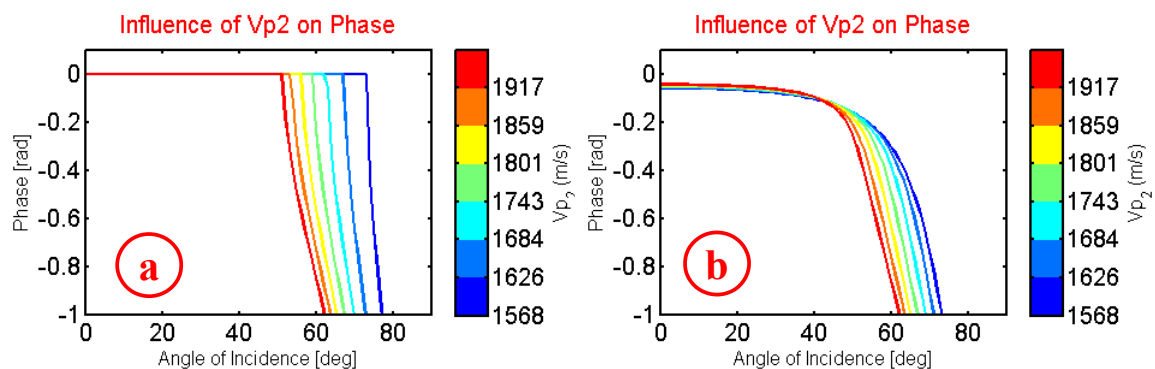
Per quanto riguarda la fase, Figura 4.2d, sono necessarie due osservazioni; le curve PVA mostrano una minor differenziazione tra loro rispetto al caso elastico; tale comportamento è giustificabile dal fatto che si ha uno sfasamento maggiore per onde P che si propagano a velocità minori, a parità di  $Q_P$ .



**Fig. 4.2** Influenza di a) velocità  $V_P$ , b) densità  $\rho$  e c) velocità  $V_S$  sul coefficiente di riflessione per un modello viscoelastico. In d) è mostrato l'andamento della fase in funzione di  $V_P$ . I valori reali delle proprietà del modello 3 sono:  $V_P=1743$  m/s,  $V_S=399$  m/s,  $\rho=2.06$  g/cm<sup>3</sup>.

Dall'equazione (4.3), infatti, si evince quanto detto: assumendo la velocità di fase  $c(\omega)$  uguale alla velocità dell'onda alla sorgente,  $c_0$ , tale equazione mostra una diminuzione dell'effetto di attenuazione all'aumentare della velocità  $c_0$  stessa dell'onda. Una minor attenuazione implica un minore sfasamento dell'ondina (considerando che manteniamo costante il fattore di qualità  $Q$  e la frequenza dell'ondina). Viceversa si avrà una maggiore attenuazione e quindi un maggior sfasamento per onde che si propagano a velocità  $V_P$  minori. Questo spiega il motivo per cui, al diminuire della velocità  $V_P$  le curve PVA tendono ad assumere valori di sfasamento maggiori rispetto al caso elastico, dove non entra in gioco il fattore attenuazione.

Inoltre, l'introduzione del fenomeno di assorbimento provoca uno shift della fase ad angoli precritici, non presente nel caso elastico dove la fase rimane sullo zero fino al raggiungimento dell'angolo critico (Figura 4.3).



**Fig. 4.3** Confronto tra la funzione PVA a) nel caso elastico e b) nel caso viscoelastico. Come si può osservare, in b) la fase si discosta dal valore zero già a piccoli angoli di incidenza mentre in a) rimane sullo zero fino all'angolo critico.



## 4.4 Studio RFM (Residual Function Map )

Dall'analisi precedente si evince l'influenza che le proprietà fisiche dei sedimenti di fondo mare esercitano sul coefficiente di riflessione  $R_{PP}$ . Al fine di mappare il grado di sensitività del coefficiente di riflessione ai diversi parametri, è opportuno studiare la *funzione oggetto*  $\Phi$  definita da:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N (R_{PP i}^{pred} - R_{PP i}^{obs})^2 \quad (4.5)$$

Come già accennato, il coefficiente di riflessione di interesse è quello relativo alla riflessione di fondo mare, le cui proprietà variano da modello a modello.

$R_{PP}^{obs}$  si calcola inserendo nell'equazione di Zoeppritz i reali valori  $V_P$ ,  $V_S$  e  $\rho$  del modello analizzato; mentre  $R_{PP}^{pred}$  si ottiene andando a variare i valori di tali proprietà all'interno del range di variazione definito; nel caso di  $R_{PP}^{pred}$ , le proprietà che si fanno variare interessano esclusivamente i sedimenti di fondo mare, mentre le proprietà dello strato di acqua rimangono immutate.

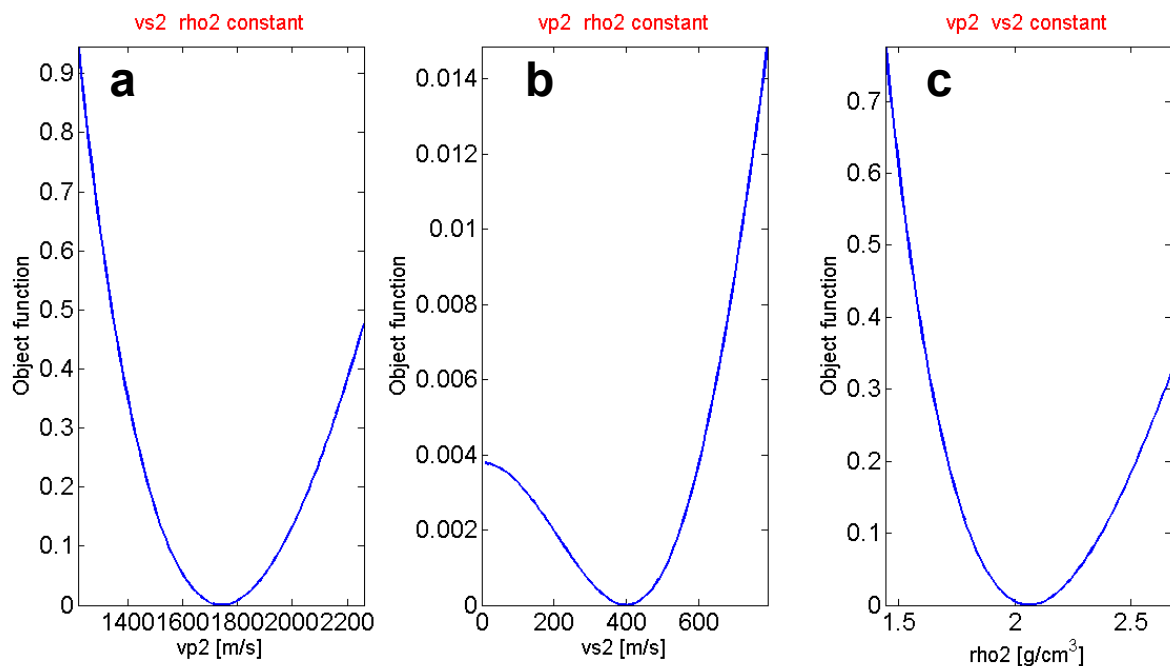
Per visualizzare in modo speditivo la sensitività del coefficiente di riflessione per ogni proprietà  $V_P$ ,  $V_S$  e  $\rho$ , vengono calcolate e rappresentate le " *Residual Function Maps*" (RFMs) che descrivono l'andamento della funzione oggetto al variare dei valori di  $V_P$ ,  $V_S$  e  $\rho$ .

Le *One Dimensional RFMs* mostrano l'andamento della funzione oggetto al variare di un singolo parametro per volta. Per capire invece come la variazione di due parametri contemporaneamente influisca sulla funzione oggetto è necessario ricorrere alle *Two Dimensional RFMs*, in cui un solo parametro è mantenuto costante mentre gli altri due variano.

### 4.4.1. One Dimensional RFM

Analizzando il modello 3, dallo studio delle One Dimensional RFMs si evince:

- per piccoli angoli di incidenza (Figura 4.4), da  $0^\circ$  a  $30^\circ$ , il coefficiente di riflessione è molto sensibile alla velocità P e alla densità: infatti, in entrambi i casi, allontanandosi dal valore reale, la RFM cresce esponenzialmente, raggiungendo valori più elevati di un ordine di grandezza rispetto a quelli che la RFM assume allontanandosi dal valore reale di  $V_s$  (Figura 4.4a,b,c). Quindi, risulta che, nelle analisi AVO short-offset, il parametro che influisce meno sul coefficiente di riflessione  $R_{PP}$  è la velocità di taglio  $V_s$ .

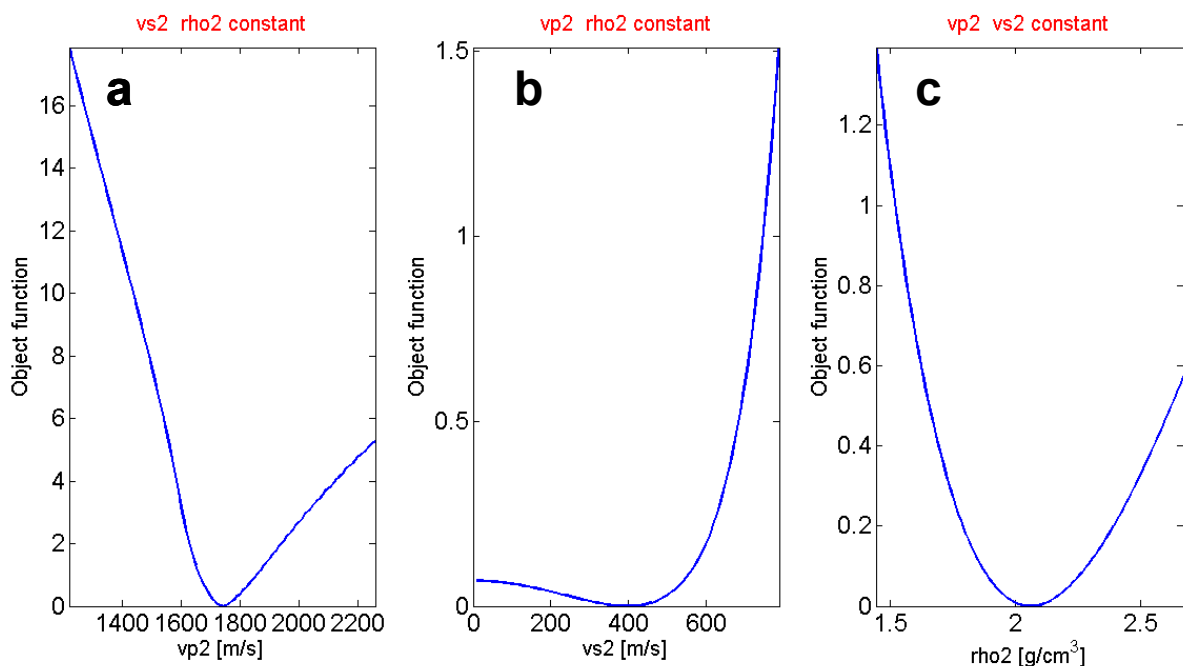


**Fig. 4.4** One Dimensional RFMs del modello 3 per angoli di incidenza compresi tra  $0^\circ$  e  $30^\circ$ . In a) viene fatta variare la  $V_P$ , in b) la  $V_s$  e in c) la  $\rho$ . I valori reali delle proprietà del modello 3 sono:  $V_P=1743$  m/s,  $V_s=399$  m/s,  $\rho=2.06$  g/cm<sup>3</sup>.

- analizzando un range più ampio di angoli di incidenza, da  $0^\circ$  a  $70^\circ$  (Figura 4.5), i valori di scala delle RFMs aumentano per ogni parametro; quindi aumenta la capacità di stima per tutti e tre i parametri. In particolare, il coefficiente di riflessione mostra la sua massima sensibilità alle variazioni di  $V_P$  (Figura 4.5a) in quanto viene 'bloccata' dalla presenza dell'angolo critico, mentre il parametro meno influente sul coefficiente di riflessione risulta essere sempre la velocità  $V_s$  (Figura 4.5b). In particolare, la funzione oggetto data dalla  $V_s$  rimane vicina a zero per valori di velocità

minori di 400 m/s, mentre la capacità di stima di tale parametro aumenta per valori di  $V_s$  più elevati.

- Confrontando i diversi risultati osservati nelle Figure 4.4 e 4.5, si evince che, nell'analisi AVA short-offset i parametri che influenzano RPP sono la  $V_P$  e  $\rho$ , i quali hanno lo stesso peso nella definizione di RPP; la  $V_s$  risulta ininfluenza. Si deduce quindi che, a short-offset, i parametri risolvibili sono  $V_P$  e  $\rho$ , mentre  $V_s$  non è stimabile.



**Fig. 4.5** One Dimensional RFMs del modello 1 calcolate per angoli di incidenza compresi tra  $0^\circ$  e  $70^\circ$ . I valori reali delle proprietà del modello 3 sono:  $V_P=1743$  m/s,  $V_S=399$  m/s,  $\rho=2.06$  g/cm<sup>3</sup>.

- Analizzando il problema in un range più ampio di angoli di incidenza (da  $0^\circ$  a  $70^\circ$ ) si evince che il parametro che influenza maggiormente il RPP è la  $V_P$ ; infatti, avvicinandosi all'incidenza critica, l'influenza della densità diminuisce.

Da qui si deduce che in un problema di minimizzazione della funzione oggetto:

- la velocità di taglio risulta difficilmente stimabile;
- la velocità delle onde compressionali è sempre determinabile (sia a short-

che a long-offset);

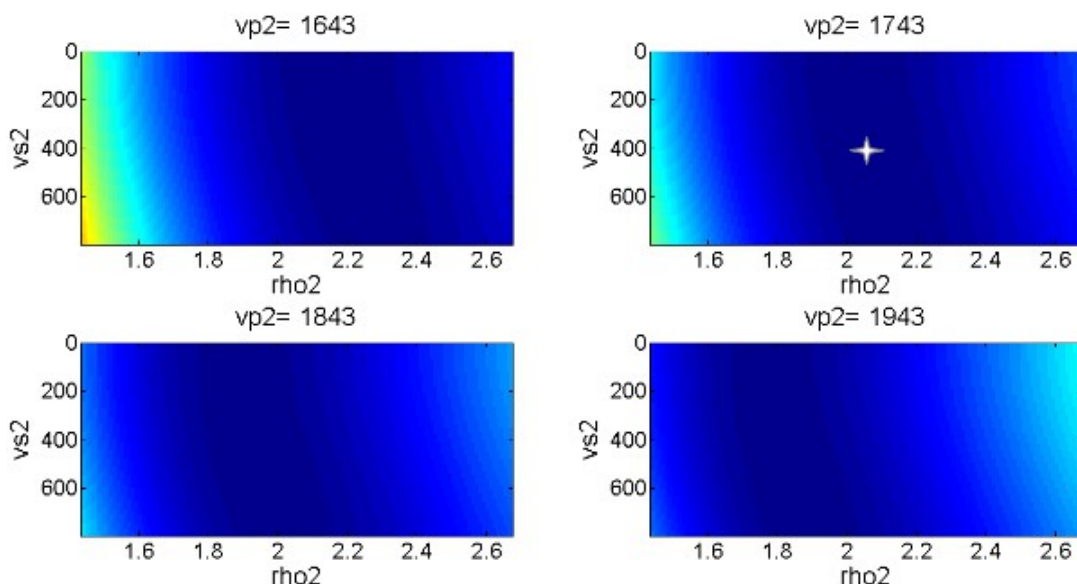
- aumentando il range di angoli di incidenza, fino all'angolo critico, migliora la stima di tutti e tre i parametri.

#### 4.4.2. Two Dimensional RFM

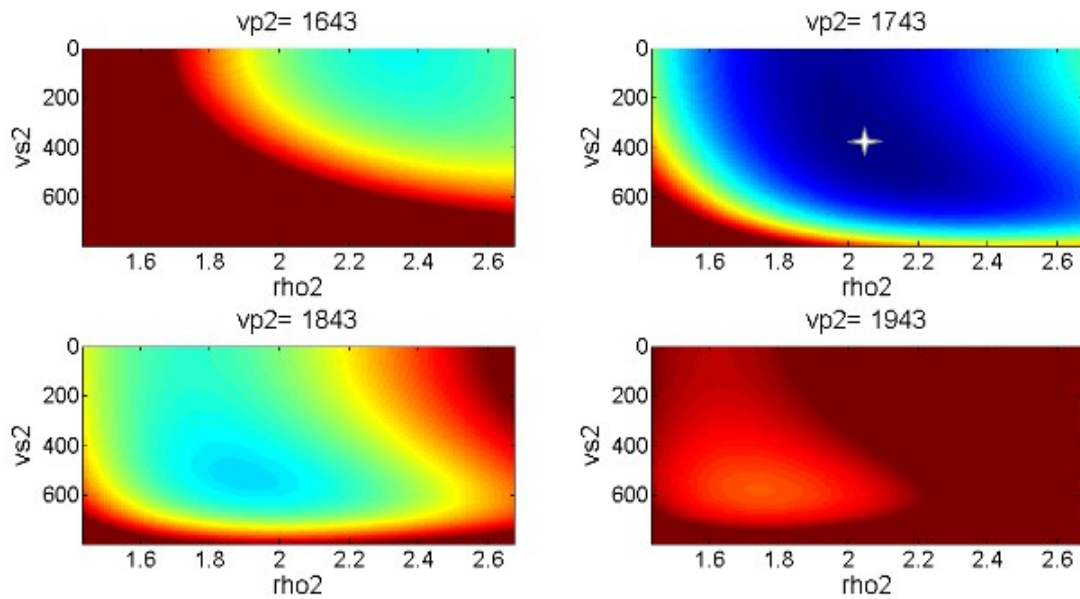
La Two Dimensional RFM consente di confrontare nella stessa mappa il grado di sensitività del coefficiente di riflessione  $R_{PP}$  a due parametri contemporaneamente, per studiare quale dei due è più influente rispetto all'altro.

Anche nella Two Dimensional RFM sono stati analizzate le variazioni della funzione oggetto considerando due diversi range di angoli di incidenza.

Nelle Figure 4.6 e 4.7 sono mostrate le Two Dimensional RFMs calcolate per il modello 3 per quattro valori di  $V_P$ , facendo variare  $V_S$  e  $\rho$ ; il range di angoli di incidenza considerato è compreso tra  $0^\circ$  e  $30^\circ$  nel caso illustrato in Figura 4.6 e tra  $0^\circ$  e  $70^\circ$  in Figura 4.7.



**Fig. 4.6** *Two Dimensional RFMs del modello 3 calcolate per quattro valori di  $V_P$  costanti, facendo variare  $V_S$  e  $\rho$ , in un range di angoli di incidenza compresi tra  $0^\circ$  e  $30^\circ$ . I valori reali delle proprietà del modello 1 sono:  $V_P=1743$  m/s,  $V_S=399$  m/s,  $\rho=2.06$  g/cm<sup>3</sup> rappresentati dal simbolo bianco. In blu sono rappresentati i minimi della funzione e in rosso i massimi.*



**Fig. 4.7** *Two Dimensional RFMs del modello 3 calcolate per quattro valori di  $V_P$  costanti, facendo variare  $V_S$  e  $\rho$ , in un range di angoli di incidenza compresi tra  $0^\circ$  e  $70^\circ$ . I valori reali delle proprietà del modello 3 sono:  $V_P=1743$  m/s,  $V_S=399$  m/s,  $\rho=2.06$  g/cm<sup>3</sup> rappresentati dal simbolo bianco. In blu sono rappresentati i minimi della funzione e in rosso i massimi.*

Analizzando la Figura 4.6 si evince che, per valori costanti di  $V_P$ , si ha una maggiore risoluzione su  $\rho$  data la disposizione della valle di minimo parallela alla  $V_S$ .

Aumentando il range di angoli di incidenza, Figura 4.7, i minimi della funzione oggetto tendono a concentrarsi in aree di minor dimensioni rispetto al caso precedente; questo garantisce una miglior risoluzione anche per la  $V_S$ .

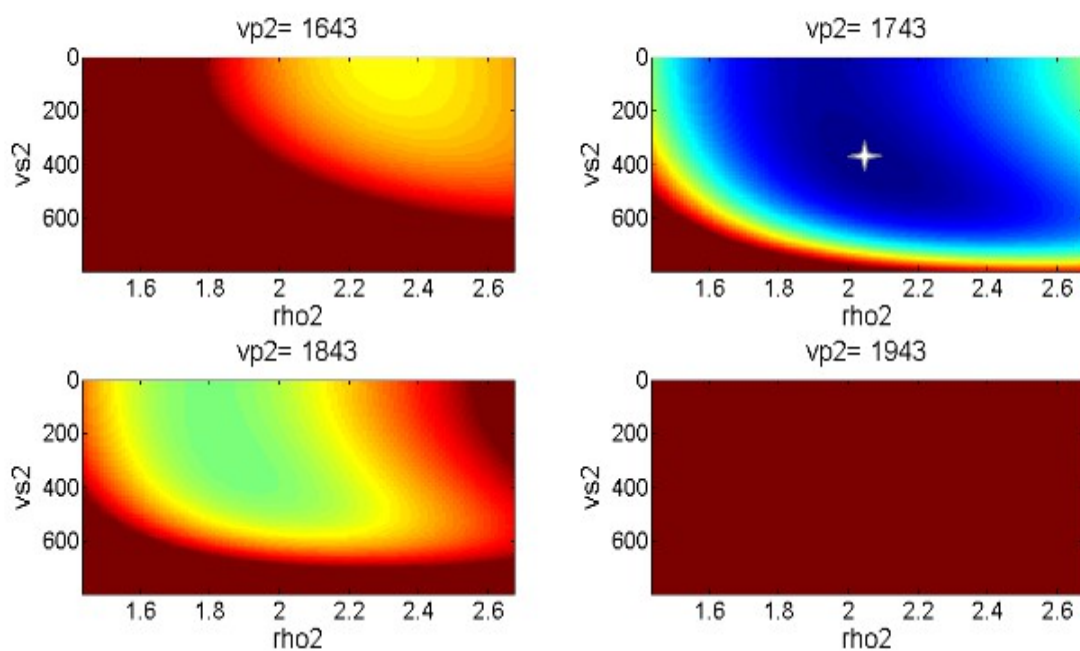
Per diminuire l'ambiguità nella ricerca del minimo della funzione oggetto, viene aggiunto un vincolo che consiste nell'informazione della fase di  $R_{PP}$  in funzione dell'angolo di incidenza la quale entra in gioco solo dopo l'angolo critico. In Figura 4.8 sono mostrati i risultati ottenuti attraverso l'aggiunta di tale vincolo nello studio del modello 1.

La Two Dimensional RFM, calcolata per il valore reale di  $V_P$  (1743 m/s), mostra, a seguito dell'informazione di fase, un leggero restringimento dell'area di minimo attorno ai valori reali di  $V_S$  e  $\rho$ . Nei casi in cui la  $V_P$  assume i valori di 1708 m/s e 1808 m/s, l'aggiunta del vincolo di fase provoca un aumento di risoluzione principalmente del parametro  $V_P$  della valle di minimo andando ad eliminare i

minimi presenti in Figura 4.7.

In generale, all'aumentare della velocità  $V_P$  dei sedimenti di fondo mare, l'aggiunta dell'informazione di fase nel calcolo della funzione oggetto assume un peso sempre più rilevante per l'approssimarsi dell'angolo critico verso angoli minori; tale comportamento risulta chiaro in Figura 4.1d.

Lo stesso tipo di analisi è stata condotta su tutti i modelli in studio, portando ad analoghe osservazioni.



**Fig. 4.8** *Two Dimensional RFMs calcolate per il modello 3 per quattro valori di  $V_p$  costanti e inserendo il vincolo di fase nel calcolo della funzione oggetto. Il range di angoli analizzati va da  $0^\circ$  a  $70^\circ$ . I valori reali delle proprietà del modello 3 sono:  $V_p=1743$  m/s,  $V_s=399$  m/s,  $\rho=2.06$  g/cm<sup>3</sup> indicati con il simbolo bianco. In blu sono rappresentati i minimi della funzione e in rosso i massimi.*

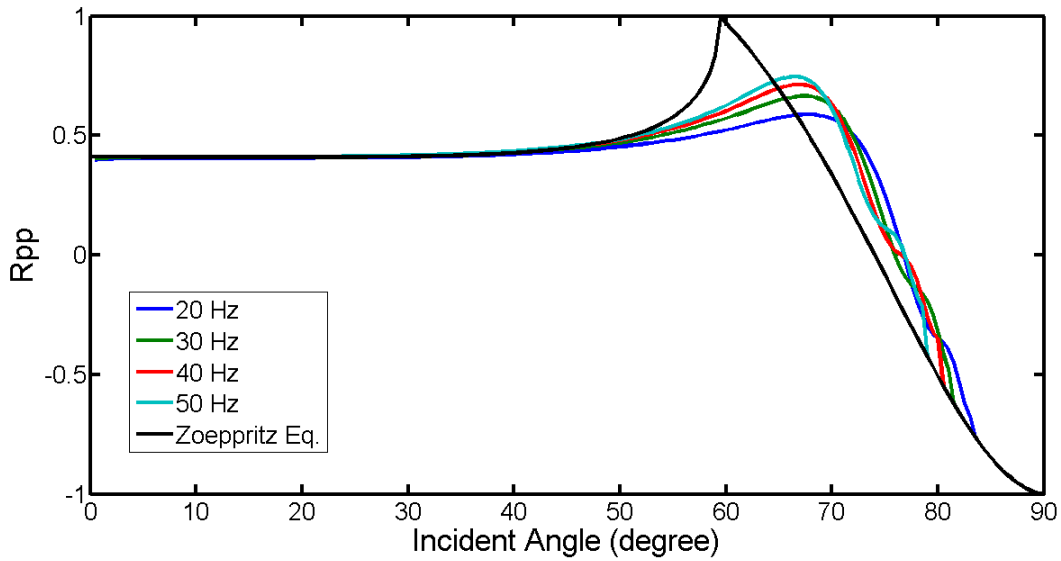
## 4.5 $R_{PP}$ sferico

Come abbiamo visto nel paragrafo 2.2.3, la risposta in riflessione di un'onda sferica differisce da quella di un'onda piana quanto più ci si avvicina all'angolo critico. Ciò è stato verificato anche nei tre casi di fondo mare analizzati; infatti, è stato possibile ricostruire l'andamento delle funzioni AVA sia per onda piana (Zoeppritz) che per onda sferica (Alulaiw and Gurevich, 2011).

Brekhovshikh e Godin (1999) hanno introdotto una soluzione analitica per un'onda sferica incidente su un'interfaccia fluido-fluido; tale soluzione è espressa in funzione dell'angolo di incidenza. Alulaiw e Gurevich (2011) estendono questa soluzione includendo anche il caso di interfaccia separante due mezzi solidi, aggiungendo alla soluzione analitica i termini contenenti l'informazione sulle velocità di taglio (ricavati dall'approssimazione di Thomsen, 1990). Per ulteriori approfondimenti vedi Appendice A.

L'approssimazione formulata dai due autori risulta buona fino a che i contrasti tra i parametri elastici dei due mezzi a contatto sono piccoli; quando il contrasto tra i due mezzi diventa importante, l'approssimazione perde di qualità. Questo comportamento è prevedibile se si considera che l'approssimazione utilizzata per il calcolo del coefficiente di riflessione si basa, a sua volta, sull'approssimazione AVO lineare di Thomsen, valida solo per piccoli contrasti delle proprietà fisiche.

Sfruttando la soluzione analitica (A6, mostrata in appendice) sono state calcolate le curve AVA per i modelli mostrati in Tabella 2.1 nel paragrafo 2.2.2, utilizzando le frequenze di 20 Hz, 30 Hz, 40 Hz e 50 Hz. Come si osserva in Figura 4.9,  $R_{PP}$  sferico, calcolato alle varie frequenze, coincide con l'  $R_{PP}$  piano, calcolato con Zoeppritz, fino a circa  $55^\circ$  di incidenza. Dopo tale limite, le varie curve si discostano seguendo due trend distinti: uno, rappresentato dall'  $R_{PP}$  piano, che raggiunge ampiezza unitaria all'angolo critico e l'altro, rappresentato da  $R_{PP}$  sferico, che ha un andamento più smooth. Inoltre, le curve che rappresentano il coefficiente di riflessione sferico descrivono differenti comportamenti in funzione della frequenza. In particolare all'aumentare della frequenza, il coefficiente di riflessione sferico tende al coefficiente di riflessione piano, che ha una frequenza teorica infinita.



**Fig. 4.9** Andamento dei coefficienti di riflessione del modello 3, calcolati attraverso l'equazione di Zoeppritz (nero) e attraverso la soluzione analitica di Alulawi e Gurevich per onde sferiche, alla frequenza di 20 Hz (blu), 30 Hz (verde), 40 Hz (rossa) e 50 Hz (celeste).

Le curve di  $R_{PP}$  sferico mostrano delle oscillazioni per angoli postcritici: questo fenomeno è da attribuire all'interferenza delle onde riflesse ad angoli postcritici con le onde rifratte (Červený, 1961).



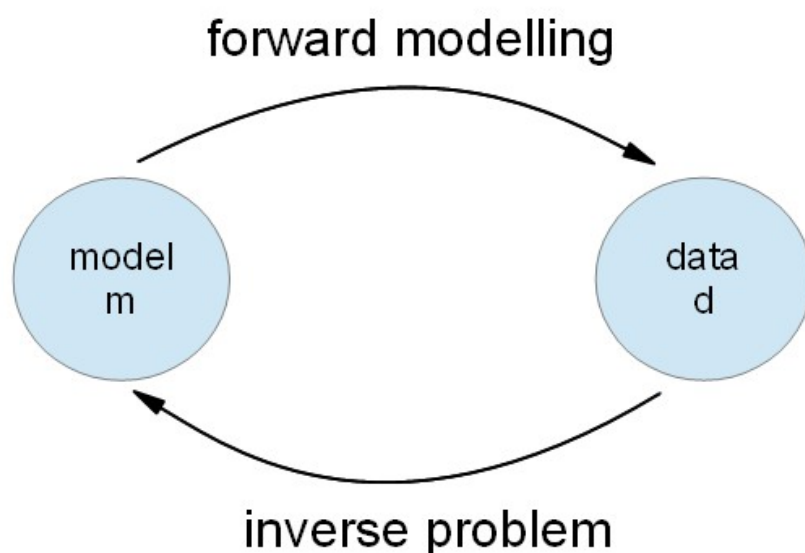
## 5 Il Problema Inverso

### 5.1 Introduzione

La formulazione di un Problema Inverso (PI) consiste nell'utilizzare un insieme di osservazioni sperimentali (i dati) per la caratterizzazione di alcune proprietà del sistema fisico studiato (il modello). Se sono conosciute le leggi fisiche che mettono in relazione i parametri del modello  $m$  con i dati osservati  $d$ , allora è possibile specificare una funzione  $G$  tale che:

$$d = G(m) \quad (5.1)$$

Un problema diretto consiste nel determinare, per un insieme di parametri caratterizzanti un dato modello  $m$ , il set di dati osservati  $d$  utilizzando la relazione (5.1). Un problema inverso consiste, invece, nel determinare il modello  $m$ , partendo dai dati osservati  $d$  (Figura 5.1).



**Fig. 5.1** *Illustrazione del problema diretto e del problema inverso.*

L'operatore  $G$  permette la predizione dei dati  $d_{pre}$  associati ad un determinato modello  $m$ . In generale, quindi, la soluzione del problema inverso viene definita nei termini di quel modello  $m_{est}$  per il quale i dati predetti  $Gm_{est}$  saranno i più 'simili' possibile a quelli effettivamente osservati.

Una prima classificazione dei problemi inversi consiste nel definire la loro linearità o non linearità:

- un PI è lineare se anche l'operatore  $G$  lo è, e se la relazione (5.1) costituisce un sistema di equazioni lineari che può essere scritto nella seguente forma compatta:

$$d = Gm$$

dove  $G$  è una matrice  $N \times M$ ,  $d$  un vettore colonna di dimensione  $N$  e  $m$  un vettore colonna di dimensione  $M$ ;

- un PI si dice non lineare quando l'equazione (5.1) costituisce un sistema di equazioni non lineari che ha come incognite i parametri del modello.

La ricerca della soluzione di un PI può essere complicata, pertanto quando si vanno a risolvere questo tipo di problemi bisogna tener conto di alcuni aspetti di fondamentale importanza:

- *Esistenza della soluzione:* se  $N \neq M$  con  $N > M$  il sistema possiede più equazioni che incognite e risulta perciò sovradeterminato. In questo caso può non esistere un modello la cui risposta si adatti perfettamente ai dati; ciò può avvenire quando ad esempio i dati osservati sono contaminati da rumore oppure quando non sono adeguatamente conosciute le leggi fisiche che mettono in relazione i dati osservati con i parametri del modello. Se  $N=M$  e  $G$  ha rango  $N$  si parla di problema puramente determinato; in questo caso la matrice  $G$  è quadrata e quindi potenzialmente invertibile; la soluzione del problema sarà data da  $m = G^{-1}d$ .
- *Unicità della soluzione:* la soluzione trovata dal processo di inversione può non essere unica. Ovvero ci può essere un numero, anche infinito, di modelli che sono in grado di predire i dati con lo stesso livello di accuratezza del modello vero. La non unicità della soluzione è una caratteristica dei PI che presentano una deficienza di rango (in particolare il rango di  $G$  è minore di  $M$ ), ovvero con uno

spazio nullo di  $G$  non banale. I modelli  $m_n$  che soddisfano il sistema  $Gm_n = 0$  appartengono allo spazio nullo di  $G$  ed è dimostrato che ogni  $m + \lambda m_n$  è una soluzione del sistema  $Gm = d$ .

- *Stabilità della soluzione*: si ha instabilità della soluzione quando piccole variazioni nei dati portano a grandi variazioni nello spazio dei modelli. Problemi inversi che manifestano tale caratteristica sono definiti mal condizionati.

## 5.2 Problema Inverso Lineare

Nel caso di problemi inversi lineari l'operatore  $G$  è rappresentato da una matrice  $N \times M$ , con  $N$  numero di dati e  $M$  numero dei parametri del modello.

Considerando il PI puramente determinato,  $N=M$ , utilizzando la consueta notazione  $d = Gm$ , la matrice  $G$  è quadrata e quindi potenzialmente invertibile.

La soluzione del problema sarà quindi data da:

$$m = G^{-1}d \quad (5.2)$$

### 5.2.1. Metodo dei Minimi Quadrati

Nel caso in cui si vada a studiare un problema sovradeterminato,  $N > M$ , la matrice  $G$  non è più quadrata e perciò non è invertibile; la (5.2) non è più applicabile. In questo caso non è possibile ottenere un modello che restituisca un errore di predizione nullo sui dati, quindi possiamo riformulare la relazione che lega i dati ai modelli come:

$$d = Gm + e \quad (5.3)$$

dove  $e$  è appunto l'errore di predizione, definito come il vettore degli scarti tra i dati osservati e i dati predetti:

$$e = d_{obs} - Gm = d_{obs} - d_{pre} \quad (5.4)$$

$$e = \|d_{obs} - Gm\|_2 = \|d_{obs} - d_{pre}\|_2 \quad (5.5)$$

La taglia del vettore  $e$  viene indicata mediante la norma  $L_2$  :

$$\|e\|_2 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N d_i - \sum_{k=1}^M G_{ik} m_k\right)^2} \quad (5.6)$$

Il problema viene affrontato cercando quel modello  $m_{est}$  che meglio si adatta ai dati, ovvero che minimizza la lunghezza del vettore  $e$  (si cerca il minimo del quadrato della norma  $L_2$  del vettore dei residui):

$$\min(\|e\|_2) = \min(\|d - Gm_{est}\|_2^2) \quad (5.7)$$

Definito  $\|d - Gm_{est}\|_2^2 = E$ , ponendo le derivate parziali di  $E$  rispetto ai parametri del modello uguali a zero, ne risulta un sistema di equazioni che può essere risolto mediante la (5.2). Questo sistema è detto '*Sistema delle Equazioni Normali di Gauss*' e può essere riscritto in forma matriciale come:

$$G^T Gm = G^T d \quad (5.8)$$

Assumendo che l'inversa della matrice  $G^T G$  esista, la soluzione del problema sarà data da:

$$m_{est} = (G^T G)^{-1} G^T d \quad (5.9)$$

dove il termine  $(G^T G)^{-1} G^T = G^{-g}$  (5.10)

è chiamato *Inversa Generalizzata* della matrice.

## 5.2.2. Metodo SVD

Un modo per risolvere problemi ai minimi quadrati, che è di particolare interesse nel caso di sistemi mal-condizionati e/o con deficienza di rango, è la *Decomposizione ai Valori Singolari* (SVD: Singular Value Decomposition).

La SVD consiste in una particolare fattorizzazione della matrice  $G$  basata sull'uso di autovalori ed autovettori.

La matrice  $G$ ,  $N \times M$ , viene fattorizzata come:

$$G = USV^T \quad (5.11)$$

dove:

- $U$  è una matrice ortonormale  $N \times N$ , le cui colonne rappresentano autovettori che abbracciano l'intero spazio dei dati,  $R^n$ . Tutti i dati possono essere scritti come combinazione lineare di questi vettori;
- $V$  è una matrice ortonormale  $M \times M$ , le cui colonne rappresentano autovettori che abbracciano l'intero spazio dei modelli,  $R^m$ . Tutti i modelli possono essere scritti come combinazione lineare di questi vettori;
- $S$  è una matrice diagonale, con elementi diagonali non-negativi, detti '*valori singolari*'. I valori singolari di  $S$ , in genere, sono ordinati in ordine decrescente

$$S_1 \geq S_2 \geq \dots \geq S_{\min(n,m)} \geq 0 \quad (5.12)$$

Alcuni valori singolari possono essere uguali a zero. Se solo i primi  $P$  valori di  $S$  sono diversi da zero, allora possiamo dividere la matrice  $S$ :

$$S = \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

dove  $S_p$  è una matrice diagonale  $P \times P$ , composta da valori singolari positivi.

Espandendo la rappresentazione SVD di  $G$ , in termini delle colonne delle

matrici  $U$  e  $V$ :

$$G = [U_{(:,1)}; U_{(:,2)}; U_{(:,3)}; \dots; U_{(:,n)}] \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V_{(:,1)}; V_{(:,2)}; V_{(:,3)}; \dots; V_{(:,m)}]^T = \\ [U_p, U_0] \begin{bmatrix} S_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [V_p, V_0] \quad (5.14)$$

dove  $U_p$  e  $V_p$  contengono le prime  $p$  colonne di  $U$  e  $V$ , rispettivamente; mentre  $U_0$  contiene le ultime  $N-P$  colonne di  $U$  e  $V_0$  le ultime  $M-P$  colonne di  $V$ . Siccome le ultime  $N-P$  colonne di  $U$  e le ultime  $M-P$  colonne di  $V$  sono moltiplicate dagli zeri della matrice  $S$ , possiamo riscrivere la SVD della matrice  $G$  nella forma compatta:

$$G = U_p S_p V_p^T \quad (5.15)$$

Ricordando la (5.1) possiamo scrivere:

$$d U_p^T = S_p V_p^T m \quad (5.16)$$

Dal momento che  $U$  è una matrice ortonormale, le colonne di  $U_p$  formano una base ortonormale per lo spazio dei dati, mentre le colonne di  $U_0$  formano una base ortonormale per lo spazio nullo di  $G^T$ ,  $N(G^T)$ , definito come *spazio nullo dei dati*. Analogamente, le colonne di  $V_p$  formeranno una base ortonormale per lo spazio dei modelli e le colonne di  $V_0$ , una base ortonormale per lo spazio nullo di  $G$ ,  $N(G)$ , detto *spazio nullo dei modelli* (Aster R.C., Borchers B. e Thumber C.H., 2005. "Parameter Estimation and Inverse Problems").

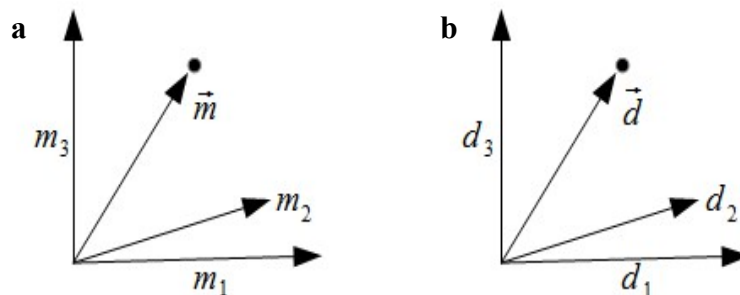
### 5.2.2.1 Significato geometrico della SVD

Per comprendere il significato geometrico del metodo SVD, è necessario introdurre il concetto di spazio vettoriale dei dati (N-dimensionale) e dei modelli (M-dimensionale), dove ogni particolare dato o modello viene rappresentato come vettore (Figura 5.2).

Nello spazio dei modelli avremo tutti i nostri possibili modelli e lo stesso si può dire per lo spazio dei dati.

La SVD si pone l'obiettivo di cambiare il sistema di riferimento sia dello spazio dei modelli che dello spazio dei dati, in modo da ottenere un sistema di riferimento che evidenzia maggiormente la struttura dei dati e quindi l'informazione in essi contenuta (Figura 5.3).

Supponiamo di avere una matrice  $G$   $N \times M$ ; consideriamo le righe di  $G$  come  $N$  punti in uno spazio  $M$ -dimensionale.



**Fig. 5.2** a) I parametri del modello rappresentati come vettore  $\vec{m}$  nello spazio  $M$ -dimensionale di tutti i possibili parametri del modello; b) i dati rappresentati come vettore  $\vec{d}$  nello spazio  $N$ -dimensionale di tutti i possibili dati.

Consideriamo la linea di best-fit passante dall'origine e definiamo  $\mathbf{v}$  come vettore unitario lungo questa linea.

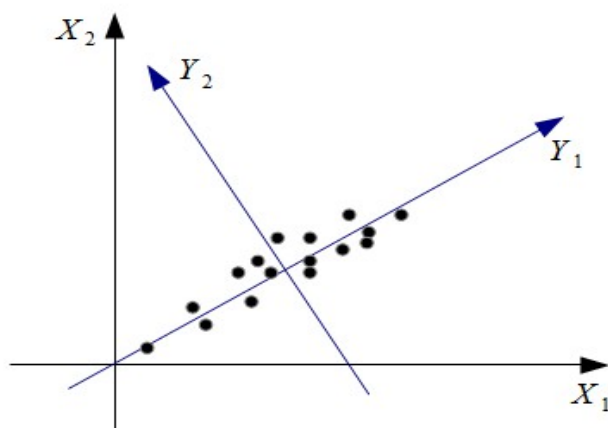
La proiezione dell' $i$ -esima riga di  $G$ ,  $g_i$ , su  $\mathbf{v}$  è data da  $|g_i \cdot \mathbf{v}|$ . Quindi la somma dei quadrati delle proiezioni di  $G$  su  $\mathbf{v}$  è  $|G \cdot \mathbf{v}|^2$ . La linea di best-fit è quella che massimizza tale quantità e quindi minimizza la somma dei quadrati

delle distanze dei punti dalla linea.

Definiamo ora il *primo autovettore* di  $G$ ,  $v_1$ , rappresentato dalla prima colonna della matrice  $G$ , come la linea di best-fit passante dall'origine, per gli  $N$  punti. Quindi:

$$v_1 = \underset{|v|=1}{\operatorname{argmax}} |Gv|$$

Il valore  $\sigma_1(G) = |Gv_1|$  è detto *primo valore singolare* di  $G$ .



**Fig. 5.3** L'utilizzo del metodo SVD comporta un cambiamento del sistema di riferimento, da  $X_1$ - $X_2$  a  $Y_1$ - $Y_2$ . I punti neri rappresentano le righe della matrice  $G$ . Gli assi  $Y_1$  e  $Y_2$  indicano le linee di best-fit per gli  $N$  punti.

La stessa procedura viene seguita per trovare il sottospazio 2-dimensionale di best-fit della matrice  $G$ . Questo dovrà contenere il primo autovettore  $v_1$  e il vettore unitario,  $v_2$ , perpendicolare a  $v_1$  che massimizza la quantità

$|G \cdot v|^2$  rispetto a tutti gli altri vettori unitari. Allo stesso modo si trovano i sottospazi di best-fit di dimensioni maggiori, che definiscono gli altri autovettori e autovalori della matrice  $G$ . Il processo va avanti fino a che non si trova l'autovettore con proiezione di  $G$  uguale a zero:



$$\underset{v \perp v_1, v_2, v_3, \dots}{\operatorname{argmax}} |Gv| = 0$$

Possiamo dire che il cambiamento del sistema di riferimento consiste nella rotazione degli assi originari sugli autovettori di  $G$ . Questo ci permette di visualizzare i dati lungo le direzioni di massima variabilità del dato stesso, annullando o comunque diminuendo la ridondanza dell'informazione.

### 5.2.2.2 Pseudo Inversa di Moore-Penrose

Il metodo SVD può essere usato per calcolare l'inversa generalizzata della matrice  $G$ , detta Pseudo Inversa di Moore-Penrose, dal momento che questa presenta le proprietà richieste dall'inversione di una matrice.

L'inversa generalizzata è:

$$G^\dagger = V_p S_p^{-1} U_p^T \quad (5.17)$$

La soluzione del PI utilizzando la Pseudo Inversa è data da:

$$m^\dagger = G^\dagger d = V_p S_p^{-1} U_p^T d \quad (5.18)$$

Il principale vantaggio di questa formulazione è che  $m^\dagger$  e  $G^\dagger$  esistono sempre; al contrario, l'inversa di  $G^T G$  e di  $G$  non esistono quando  $G$  non ha rango massimo.

Le principali proprietà della Pseudo Inversa sono:

- se  $N < M$  (n° di equazioni < n° incognite):  $m^\dagger = G^T (G G^T)^{-1} d$ ,  $m^\dagger$  è quindi una soluzione di minima lunghezza;
- se  $N = M$  (n° di equazioni = n° incognite) e il rango della matrice  $G$  è uguale a  $N$ :  $G^\dagger = G^{-1} d$ , il problema è esattamente determinato;

- se  $N > M$  (n° di equazioni  $>$  n° incognite) e rango della matrice  $G$  è uguale a  $M$ :  $m^\dagger = (G^T G)^{-1} G^T d$  è una soluzione ai minimi quadrati (problema puramente sovradeterminato);
- nel caso più generale del problema a determinazione mista,  $N > M$  e rango della matrice  $G$  minore di  $M$ ,  $m^\dagger$  racchiude entrambe le proprietà precedenti, ovvero trova la soluzione ai minimi quadrati per i parametri ben vincolati e la soluzione di minima lunghezza per i parametri sottostimati (Aster R.C., Borchers B. e Thumber C.H., 2005).

### 5.2.2.3 Instabilità della soluzione dell'Inversa Generalizzata

La soluzione dell'inversa generalizzata  $m^\dagger$  non ha componenti nello spazio nullo dei modelli  $N(G)$ , ma può comunque includere termini che implicano l'utilizzo di vettori colonna di  $V_p$  con valori singolari molto piccoli. Per analizzare la soluzione dell'inversa generalizzata è utile esaminare lo 'spettro dei valori singolari', dato semplicemente dal range di valori singolari.

Piccoli valori singolari comportano una forte sensibilità della soluzione  $m^\dagger$  a piccole quantità di rumore nel dato.

E' possibile quantificare il grado di instabilità causato dai piccoli valori singolari, riformulando la soluzione dell'inversa generalizzata, data dall'equazione (5.17), in modo da rendere esplicito l'effetto dei piccoli valori singolari:

$$m^\dagger = V_p S_p^{-1} U_p^T d = \sum_{i=1}^p \frac{U_{(:,i)}^T d}{s_i} V_{(:,i)} \quad (5.19)$$

si ottiene  $m^\dagger$  come combinazione lineare delle colonne di  $V_p$ .

In presenza di rumore random, il dato  $d$  avrà, in genere, componenti diverse da zero in ogni direzione indicata dalle colonne di  $U$  (autovettori che definiscono lo spazio dei dati). Ciò comporta la presenza di autovalori  $s_i$  molto piccoli al denominatore della (4.19), che restituiscono un coefficiente molto grande per il

corrispondente vettore nello spazio dei modelli  $V_{(:,i)}$ , e questi vettori possono essere poi quelli che dominano la soluzione (Aster R.C., Borchers B. e Thumber C.H., 2005).

In pratica, i dati vengono mappati nello spazio dei modelli tramite l'inversa della matrice  $S_p$ . Questo implica che, valori singolari molto piccoli assumano valori molto grandi una volta che ne venga calcolato l'inverso. Di conseguenza, piccoli errori nei dati verranno amplificati enormemente quando moltiplicati per  $S_p^{-1}$ .

Nel peggiore dei casi, quindi, la soluzione dell'inversa generalizzata è soltanto una amplificazione del rumore, e la risposta è praticamente inutilizzabile.

Una misura dell'instabilità della soluzione è data dal 'numero di condizionamento', definito come rapporto tra il massimo ed il minimo valore singolare della matrice  $S$ . Quei problemi che, per quanto di rango massimo ( $p=M$ ) presentano valori singolari molto prossimi a zero, sono chiamati mal condizionati. La loro caratteristica è che piccole variazioni nei dati comportano grandi variazioni nelle soluzioni (Saccorotti G., 2012).

Ci sono due modi diversi di affrontare i problemi mal condizionati:

- Ricorrere alla soluzione '*Damped Least Squares*', cioè aggiungere un fattore positivo  $\phi$  alla diagonale della matrice  $G^T G$ . Questo ha l'effetto di innalzare di un fattore  $\phi$  i valori singolari di  $G^T G$ , evitando che questi assumano valori troppo elevati al momento di calcolarne il reciproco;
- troncare i valori singolari ad una soglia arbitraria  $\chi$ . Invece di considerare tutti i  $p$  valori singolari maggiori di zero, si considerano solo quelli maggiori di  $\chi$ . Questo metodo prende il nome di '*Decomposizione ai Valori Singolari Troncata*' (TSVD).

### 5.3 Matrici di Risoluzione del dato e del modello

Supponiamo di aver trovato, attraverso la risoluzione del problema inverso, i parametri del modello  $m$ . Inserendo questi all'interno dell'equazione  $Gm=d$ , risulta:

$$d_{pre} = Gm_{est} = G[G^{-g} d_{obs}] = [G G^{-g}]d_{obs} = N d_{obs} \quad (5.20)$$

La matrice quadrata  $N \times N$ ,  $N = G G^{-g}$  è chiamata *Matrice di Risoluzione del dato*. Questa matrice descrive il grado di accuratezza con cui i dati predetti fittano con i dati osservati: se  $N$  è una matrice identità  $I$ , allora  $d_{pre} = d_{obs}$  e l'errore di predizione è zero; al contrario, se la matrice di risoluzione dei dati non è una matrice identità, l'errore di predizione sarà diverso da zero.

Per l'interpretazione della matrice  $N$  consideriamo il caso in cui la matrice di risoluzione del dato sia diversa ma simile ad una matrice identità (nel senso che i suoi elementi maggiori sono vicini alla sua diagonale principale); una matrice così strutturata comporta l'impossibilità di stimare ogni dato individualmente, bensì ogni dato predetto sarà dato dalla media pesata di più dati osservati vicini

Prendiamo l' $i$ -esima riga della matrice  $N$ . Se questa riga contiene tutti zeri tranne l' $i$ -esima colonna, allora l' $i$ -esimo dato  $d_i$  potrà essere predetto esattamente; se invece la riga è costituita dagli elementi

$$[\dots 0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.8 \ 0.1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots]$$

dove 0.8 si trova sulla  $i$ -esima colonna, allora l' $i$ -esimo dato sarà dato da:

$$d_{pre}^i = \sum_{j=1}^N N_{ij} d_{obs}^j = 0.1 d_{obs}^{(i-1)} + 0.8 d_{obs}^i + 0.1 d_{obs}^{(i+1)} \quad (5.21)$$

Il valore predetto è dato dalla media pesata di tre dati osservati vicini.

Possiamo quindi dire che le righe della matrice di risoluzione  $N$  descrivono con quale accuratezza i dati osservati vicini possano essere predetti indipendentemente l'uno dall'altro.

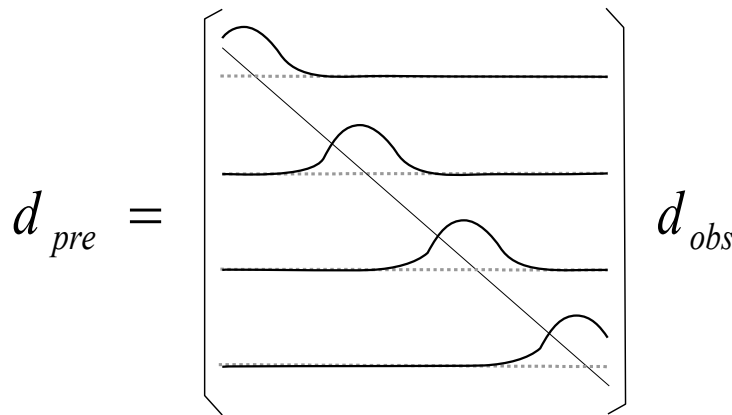
Una rappresentazione degli elementi delle righe di  $N$  mostra la precisione nella risoluzione del dato (Figura 5.4), quanto più ampie sono le curve che rappresentano gli elementi delle righe di  $N$  tanto minore sarà la risoluzione del

dato predetto.

Lo stesso concetto può essere espresso anche per i parametri del modello. Supponiamo che esista un set di parametri del modello  $m_{true}$  incognito, che risolva l'equazione  $Gm_{true} = d_{obs}$ . Noi vogliamo andare a studiare quanto un set di parametri del modello stimato si avvicina alla soluzione vera. Inserendo l'espressione del dato osservato  $Gm_{true} = d_{obs}$  all'interno dell'espressione per il modello stimato  $m_{est} = G^{-g} d_{obs}$  si ottiene:

$$m_{est} = G^{-g} d_{obs} = G^{-g} [Gm_{true}] = [G^{-g} G] m_{true} = Rm_{true}$$

$R$  è la *Matrice di Risoluzione del modello*,  $M \times M$ . Se  $R$  è una matrice identità  $I$ , ogni parametro del modello può essere unicamente determinato. Se  $R$  non è una matrice identità i parametri del modello stimati sono una media pesata dei parametri del modello reali.



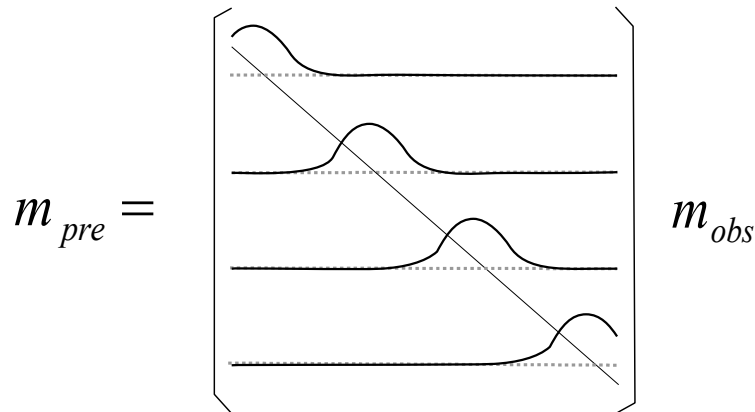
**Fig. 5.4** Il plot degli elementi delle righe della matrice di risoluzione  $N$  indica con quale grado di accuratezza i dati possono essere predetti. I picchi delle curve si trovano in prossimità della diagonale principale della matrice stessa, ciò indica una buona risoluzione dei dati.

Anche in questo caso, il plot delle righe di  $R$  indicano con quale accuratezza i vari parametri del modello possono essere risolti indipendentemente l'uno dall'altro (Figura 5.5).

Sia la Matrice di Risoluzione del dato che quella del modello sono funzioni soltanto

della matrice  $G$ .

Le Matrici di Risoluzione possono quindi essere calcolate e studiate prima dell'esecuzione dell'esperimento (acquisizione ed inversione dei dati) e possono risultare un utile strumento di 'Quality Control' (Menke W., 1989).



**Fig. 5.5** Il plot degli elementi delle righe della matrice di risoluzione  $R$  indica con quale grado di accuratezza può essere predetto ogni parametro del modello. I picchi delle curve si trovano in prossimità della diagonale principale della matrice stessa, ciò indica una buona risoluzione dei parametri del modello.

## 5.4 Matrice di Covarianza Unitaria

La covarianza dei parametri del modello dipende dalla covarianza del dato e dal modo in cui l'errore sul dato viene mappato sui parametri del modello.

In generale, la propagazione dell'errore in un sistema lineare avviene tramite la relazione:

$$[cov\ m] = G^{-g} [cov\ d] G^{-g\ T}$$

Nel caso in cui i dati abbiano tutti la stessa varianza  $[cov\ d] = \sigma^2 I$ , e quindi:

$$[cov\ m] = \sigma^2 G^{-g} G^{-g\ T}$$

Per calcolare la *Matrice di Covarianza Unitaria* si suppone, inoltre che la varianza sul dato sia uguale ad uno dipende, di conseguenza tale matrice risulta dipendere unicamente dalla matrice  $G$  ed è data da:

$$[cov\ m] = G^{-g} G^{-g\ T} .$$

Quindi la *Matrice di Covarianza Unitaria* presenta lungo la diagonale principale i valori di varianza, cioè come si mappa l'errore sui dati su ogni parametro del modello; i termini al di fuori della diagonale principale rappresentano invece i valori di covarianza ed indicano la dipendenza tra i parametri del modello (Menke W.,1989).

Per ulteriori approfondimenti sulla parte teorica riguardante i Problemi Inversi si può far riferimento al testo di Avseth P. et alii, 2005 e di Menke W., 1989.

## 6 Inversione AVA / PVA

Il problema inverso geofisico, in cui si stimano i parametri del modello terrestre da dati geofisici osservati, spesso soffre di un limite fondamentale rappresentato dal problema di non-unicità della soluzione: più modelli differenti possono onorare in maniera più o meno ottimale i dati osservati. La causa principale che genera non unicità della soluzione è che, in realtà, all'interno dei mezzi le proprietà variano continuamente in tutte le direzioni dello spazio: questo comporta uno spazio dei modelli infinito. Noi, invece, siamo di fronte al problema di costruire un modello terrestre a partire da un set finito di dati. Così, il PI è fortemente sottodeterminato e ciò risulterebbe nella non unicità della soluzione (Menke, 1989). Per ovviare, in parte, a questo problema si assumono modelli più semplici, presumendo che i parametri dei vari strati varino soltanto in una direzione (con la profondità) e supponendo di avere delle informazioni a priori sul modello in studio (ad esempio il rapporto  $V_P/V_S$ ).

L'inversione AVA si propone di stimare le proprietà elastiche del modello ( $V_P$ ,  $V_S$ ,  $\rho$ ) a partire da misure del coefficiente di riflessione in funzione dell'angolo di incidenza. Questo lavoro di tesi focalizza l'attenzione, esclusivamente, sul coefficiente di riflessione di onde compressionali  $R_{PP}$ .

L'andamento di  $R_{PP}$  con l'angolo di incidenza presenta due trend principali:

- un andamento lineare per piccoli angoli di incidenza, compresi tra  $0^\circ$  e  $30^\circ$  circa;
- un andamento non lineare per angoli di incidenza maggiori.

Questo comportamento di  $R_{PP}$  si riflette nel problema dell'inversione AVA, che può essere trattato seguendo due approcci differenti:

- inversione AVA lineare, anche detta 'inversione AVA short offset', che si limita ad angoli ben al di sotto dell'angolo critico;
- inversione AVA non lineare, detta 'inversione AVA long offset', che si estende ad angoli di incidenza maggiori, includendo anche l'angolo di incidenza critico.



## 6.1 Inversione AVA short offset

Tipicamente, il problema di inversione AVA short offset viene affrontato in due modi diversi in base alla dimensionalità dello spazio dei parametri del modello che andiamo a stimare. Si parla, a questo proposito, di inversione a tre termini o a due termini, in cui i parametri del modello sono rispettivamente tre e due.

L'inversione AVA a tre termini impiega generalmente come motore di inversione l'equazione di Aki e Richards (2.24), che possiamo riscrivere nella forma seguente:

$$R_{PP}(\theta) = \frac{R_p}{\cos^2\theta} - 8 \gamma^2 \sin^2\theta R_s - (4 \gamma^2 \sin^2\theta - 1) R_\rho \quad (6.1)$$

in cui  $\gamma = V_{s1} + V_{s2} / V_{p1} + V_{p2}$  ;

$$R_p = \frac{1}{2} \frac{\Delta V_p}{V_p}, \quad R_s = \frac{1}{2} \frac{\Delta V_s}{V_s} \quad \text{e} \quad R_\rho = \frac{1}{2} \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

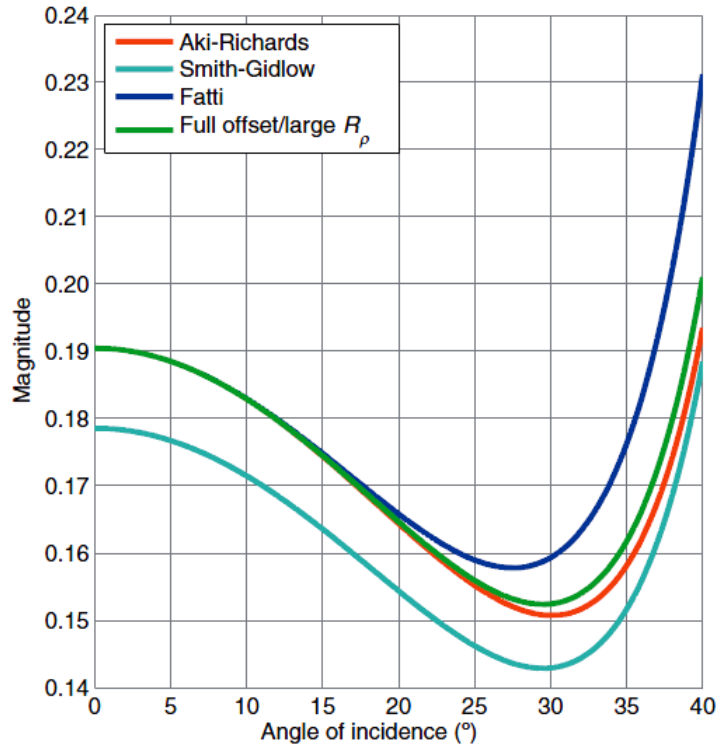
sono i tre parametri del modello studiato, definiti rispettivamente come *riflettività P*, *riflettività S* e *riflettività  $\rho$* , che descrivono i contrasti relativi tra le proprietà fisiche dei mezzi a contatto.

L'utilizzo di queste equazioni richiede però la conoscenza o comunque la stima di alcuni parametri, tra i quali ad esempio il termine  $\gamma$  utilizzato nell'equazione di Aki e Richards nel calcolo dei coefficienti.

Diversi studi numerici e teorici hanno dimostrato che, usando dati provenienti da piccoli angoli di incidenza, l'inversione AVA a tre termini può presentare problemi di instabilità e inaccuratezza, in particolare per quanto riguarda il termine relativo alla densità (Qizhen and Huizhong, 2013). Per questo motivo spesso l'approssimazione a tre termini da Aki e Richards viene rimpiazzata da approssimazioni a due termini. Sono state formulate diverse equazioni a due termini da vari autori, tra le quali le più conosciute sono l'approssimazione di Smith-Gidlow (1987) e l'approssimazione di Fatti et al. (1994). Smith e Gidlow utilizzano una forma differenziale della relazione di Gardner (Gardner et alii, 1985) per sostituire  $R_\rho$  con  $R_p$ , e la loro approssimazione è usata per stimare i due parametri  $R_p$  e

$R_s$  :

$$R_{pp}(\theta) = \left( \frac{1}{\cos^2 \theta} - \gamma^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \right) R_p - 8 \gamma^2 \sin^2 \theta R_s \quad (6.2)$$



**Fig. 6.1** Le curve mostrano il comportamento delle varie approssimazioni AVA. L'approssimazione di Fatti si avvicina a quella di Aki e Richards a piccoli angoli di incidenza, mentre l'equazione di Smith-Gidlow la approssima meglio a grandi angoli di incidenza. L'approssimazione di Ursenbach e Stewart, invece segue l'approssimazione di Aki e Richards su un range di angoli più ampio. I parametri elastici utilizzati per il calcolo dei coefficienti di riflessione sono  $(V_P, V_S, \rho)$ : 3000 m/s, 1500 m/s, 2 g/cm<sup>3</sup> per il mezzo al disopra dell'interfaccia riflettente, e 4000 m/s, 2000 m/s, 2.2 g/cm<sup>3</sup> per il mezzo sottostante.

L'approssimazione di Fatti et alii considera trascurabile il contributo di  $R_p$  rispetto a quello di  $R_I$  e  $R_J$ , che rappresentano rispettivamente il *contrasto di impedenza P* e il *contrasto di impedenza S*:

$$R_{pp}(\theta) = \frac{R_I}{\cos^2 \theta} - 8 \gamma^2 \sin^2 \theta R_J \quad (6.3)$$

in cui  $R_I = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{p2} \cdot \rho_2 - V_{p1} \cdot \rho_1}{\frac{V_{p2} \cdot \rho_2 - V_{p1} \cdot \rho_1}{2}}$  e  $R_J = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_{s2} \cdot \rho_2 - V_{s1} \cdot \rho_1}{\frac{V_{s2} \cdot \rho_2 - V_{s1} \cdot \rho_1}{2}}$  sono i

parametri da stimare.

Urnenbach e Stewart (2001) formulano un'approssimazione a due termini combinando gli aspetti delle approssimazioni di Smith-Gidlow e di Fatti et al. appena viste:

$$R_{pp}(\theta) = \left(1 + \frac{4 \gamma^2 \cos^2 \theta - 1}{5} \sin^2 \theta\right) \frac{R_I}{\cos^2 \theta} - 8 \gamma^2 \sin^2 \theta R_J \quad (6.4)$$

Come si osserva in Figura 6.1, questa approssimazione si avvicina all'andamento del coefficiente di riflessione calcolato con l'equazione di Aki e Richards su un range di angoli di incidenza più ampio rispetto all'approssimazione di Fatti e di Smith-Gidlow che invece seguono tale andamento la prima per piccoli e la seconda per grandi angoli di incidenza.

## 6.2 Inversione AVA long offset

L'introduzione di nuovi metodi di acquisizione ha consentito la registrazione di riflessioni a lunghi offset, includendo, in alcuni casi, anche le riflessioni sismiche ad angoli di incidenza prossimi ed oltre l'angolo critico.

Le principali caratteristiche delle riflessioni critiche e postcritiche sono la forte ampiezza e lo shift di fase del segnale; quest'ultimo effetto permette l'utilizzo di un strumento di analisi aggiuntivo rappresentato dallo studio PVA (Phase Versus Angles).

Per ogni tipo ed entità di contrasto tra le proprietà fisiche dei due mezzi a contatto, la partizione di energia all'interfaccia comporta sempre una perdita di ampiezza per trasmissione; tale fenomeno è presente a tutti gli angoli di incidenza. Da questo punto di vista, la fase dell'ondina è meglio preservata rispetto all'ampiezza, in quanto non risente di tale fenomeno (Zhu and McMechan, 2012).

L'inversione long offset, comprendente lo studio della variazione di ampiezza e fase con l'angolo di incidenza (AVA e PVA), ha la potenzialità di stimare velocità e densità con minor ambiguità rispetto al caso short offset. Tale proprietà è da attribuire a diversi fattori, che entrano in gioco nel caso di analisi AVA long offset:

- la disponibilità di un maggior numero di osservazioni, che forniscono un set di dati aggiuntivi su cui applicare l'operazione di inversione;
- l'aggiunta dell'informazione di fase, che costituisce un ulteriore vincolo nell'inversione.

Entrambi questi fattori dovrebbero contribuire ad aumentare la stabilità dell'inversione ed a diminuire l'ambiguità nella stima dei parametri del modello.

La forte ampiezza delle riflessioni critiche e postcritiche e il loro alto rapporto segnale-rumore, dato dall'interferenza tra i segnali riflessi e le onde di testa, costituisce un vantaggio nell'utilizzo di dati long offset per il processo di inversione. Attualmente, comunque, l'inversione long offset rimane un problema aperto. In letteratura si trovano diverse applicazioni di tale metodo principalmente su dati sintetici semplici (Zhu and McMechan, 2012).

Infatti, l'impiego di dati reali long offset può presentare diversi problemi causati dalla complessa geometria della struttura geologica che andiamo ad indagare:

- il tuning-tickness è il principale problema che genera effetti di interferenza delle riflessioni, causando errori di interpretazione dell'ampiezza riflessa;
- non sempre si hanno a disposizione segnali provenienti da offset lunghi, sia a causa del metodo utilizzato per l'acquisizione dei dati, sia per la profondità dell'interfaccia riflettente (a parità di lunghezza dello stendimento, l'angolo di incidenza diminuisce con la profondità dell'interfaccia riflettente).

Nel capitolo seguente metteremo a confronto le curve di:

- $R_{PP}$  per onde piane, calcolato con Zoeppritz,
- $R_{PP}$  per onde sferiche,
- $R_{PP}$  estratto da sismogrammi sintetici,

per analizzarne i relativi andamenti.

## 7 Analisi long offset su modelli di fondo mare

In questo capitolo si descrive il metodo con il quale si estrae l'andamento AVA e PVA da sismogrammi sintetici generati a partire da modelli geologici di fondo mare reali. Il risultato, successivamente, viene confrontato con le curve AVA e PVA calcolate nei casi di onde piane e onde sferiche.

Lo studio tratta dapprima modelli semplici a singola interfaccia e successivamente modelli con più interfacce riflettenti; il confronto tra le due tipologie di modelli permette di valutare in che modo la complessità del modello geologico incide sull'andamento del coefficiente di riflessione e sulla praticabilità nel caso di fondo mare dell'utilizzo dei dati long offset.

### 7.1 Estrazione AVA / PVA da sismogrammi sintetici

Per l'estrazione delle curve AVA e PVA, sono stati generati sismogrammi sintetici alla frequenza desiderata attraverso il software OASES, di cui abbiamo parlato nel capitolo 3. I modelli di fondo mare utilizzati sono costituiti da mezzi omogenei, isotropi ed elastici.

Lo studio, inizialmente, affronta il caso di fondo mare a singola interfaccia e, successivamente, si complica il modello inserendo ulteriori interfacce riflettenti al di sotto del fondo mare.

I risultati che visualizzeremo sono riferiti al modello 3 e le proprietà dei mezzi in gioco sono visibili in Tabella 7.1.

Una volta calcolato il sismogramma sintetico, per l'estrazione delle informazioni di ampiezza e fase, sono necessarie alcune operazioni:

- x eliminazione dei primi arrivi, e cioè vengono mutati gli arrivi diretti e gli arrivi rifratti ossia i segnali che non hanno subito alcuna riflessione;
- x correzione di Normal Move Out (NMO) statica che consiste nel rendere orizzontale la riflessione del fondo mare; ciò è possibile dato che si conosce lo spessore e la velocità dello strato d'acqua. Questa operazione è necessaria dal

momento che nel processo di estrazione delle curve AVA e PVA è richiesta la finestrazione del dato al fine di isolare il segnale riflesso dal fondo mare.

$x$  Il dato viene corretto di Geometrical Spreading per recuperare la parte di ampiezza persa a causa dell'espansione del fronte d'onda sferico.

In particolare il fattore del geometrical spreading è stato compensato utilizzando una funzione di guadagno ricavata da Ursin (1995) considerando un modello a n strati orizzontali e applicabile ad ogni singola riflessione:

$$g(x)^2 = \left( \frac{tv_s^2}{v_0} \right)^2 + \left[ 2 \cdot \left( \frac{v_s}{v_0} \right)^2 - 1 \right] x^2 + \frac{1}{t^2} \cdot \left( \frac{1}{v_0^2} - \frac{1}{v_s^2} \right) x^4 \quad (7.1)$$

dove  $x$  rappresenta l'offset,  $t$ , il travel time della riflessione di interesse ad offset zero,  $v_0$ , la velocità del primo mezzo, e  $v_s$ , la velocità di stack, ossia una velocità di natura statistica che permette l'orizzontalizzazione delle iperboli di riflessione con la correzione di NMO.

STRATO	SPESSORE (m)	VP (m/sec)	Vs (m/sec)	DENSITA' (g/cm <sup>3</sup> )
Acqua	98.0	1500	0	1.00
1	37.0	1700	399	2.06
2	20.5	1609	393	1.92
3	13.5	1692	320	2.02
4	44.0	1779	449	2.11
5	8.0	1856	488	2.13
6	24.0	1858	514	2.12
7	23.0	1897	552	2.25
8	10.0	1748	551	2.03
9	10.0	1736	420	2.04
10	33.0	1754	442	2.04
11	35.0	1821	665	2.10

**Tab. 7.1** *Proprietà (VP, Vs, ρ e spessore) dello strato d'acqua e dei mezzi che costituiscono il modello 3.*

Da tale equazione si può notare come il fattore correttivo aumenti all'aumentare dell'offset, a testimonianza del fatto che lo spreading geometrico produce l'effetto di diminuire l'ampiezza con l'offset e il tempo di transito del segnale nel mezzo.

Per ricavare l'andamento dell'ampiezza con l'angolo di incidenza si ricorre all'utilizzo della trasformata di Hilbert che permette di estrarre l'ampiezza massima istantanea. Mentre per il calcolo PVA si ricorre al Metodo della correlazione.

### 7.1.1. Trasformata di Hilbert e Metodo della correlazione

La Trasformata di Hilbert  $\tilde{x}(t)$  della funzione  $x(t)$  è definita da Bracewell (1965) come una convoluzione di  $x(t)$  con  $1/\pi t$  :

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} x(t-\tau) d\tau \quad (7.2)$$

Con la Trasformata di Fourier la convoluzione nel dominio del tempo corrisponde ad una moltiplicazione nel dominio delle frequenze. Dal momento che la Trasformata di Fourier di  $1/\pi t$  è  $j \operatorname{sign}(s)$ , si può scrivere:

$$\tilde{X}(s) = j \operatorname{sign}(s) X(s) \quad (7.3)$$

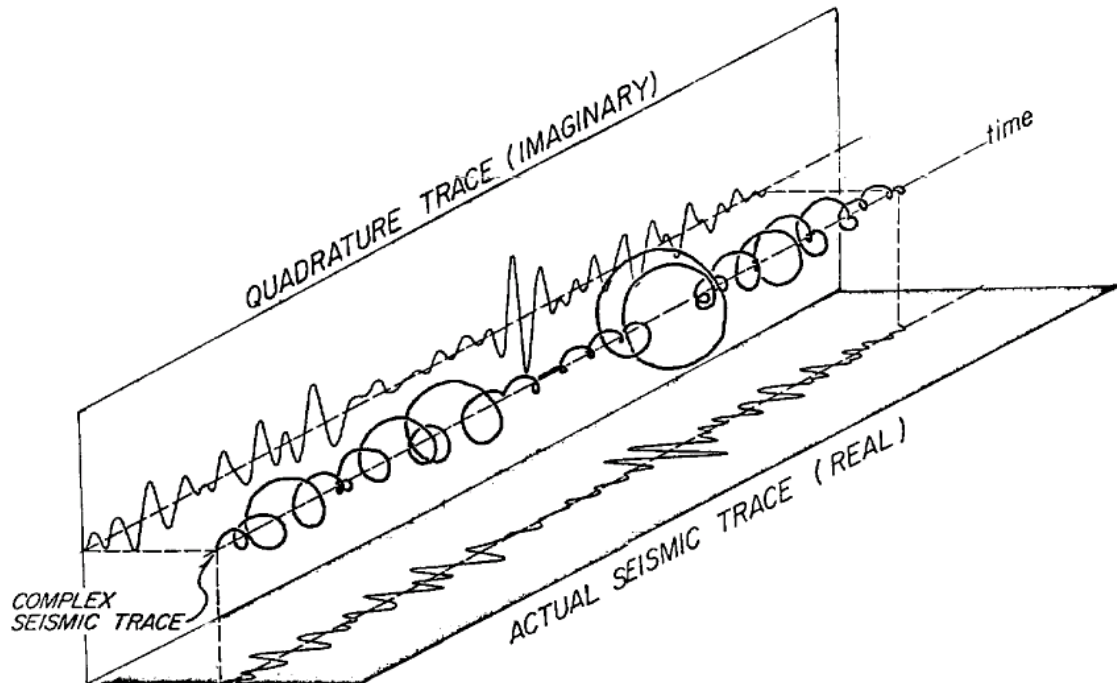
La Trasformata di Hilbert corrisponde ad un filtro in cui le ampiezze del segnale rimangono invariate, mentre la fase viene aumentata o diminuita di  $\pi/2$  rispettivamente per frequenze positive e negative.

Il segnale reale  $x(t)$  e la sua trasformata di Hilbert  $\tilde{x}(t)$  sono usati per derivare il segnale analitico  $\hat{x}(t)$  :

$$\hat{x}(t) = x(t) + j \tilde{x}(t) \quad (7.4)$$

Questo è un segnale complesso, rappresentato nello spazio complesso come un'elica irregolare. La sua proiezione sul piano reale restituisce la traccia sismica

reale  $x(t)$ , mentre la proiezione sul piano immaginario rappresenta la Trasformata di Hilbert del segnale stesso (Figura 7.1), (Taner et alii, 1979).



**Fig. 7.1** La traccia sismica complessa rappresenta il segnale analitico. La proiezione del segnale analitico sul piano reale restituisce la traccia reale osservata. Mentre sul piano immaginario si osserva la quadratura della traccia.

Una proprietà importante del segnale analitico  $\hat{x}(t)$  è che il suo spettro di frequenza contiene solo componenti positive: per frequenze negative il contenuto in frequenza è zero, mentre per frequenze positive lo spettro risulta avere un'ampiezza doppia rispetto a quello del segnale originale.

E' importante specificare che il segnale originale deve essere reale, in quanto solo segnali reali hanno uno spettro di frequenza simmetrico.

In accordo con Bracewell (1965) il segnale analitico può essere scritto come:

$$\hat{x}(t) = A(t) e^{(j\omega(t)t)}$$

dove  $\omega$  è la frequenza angolare del segnale reale.



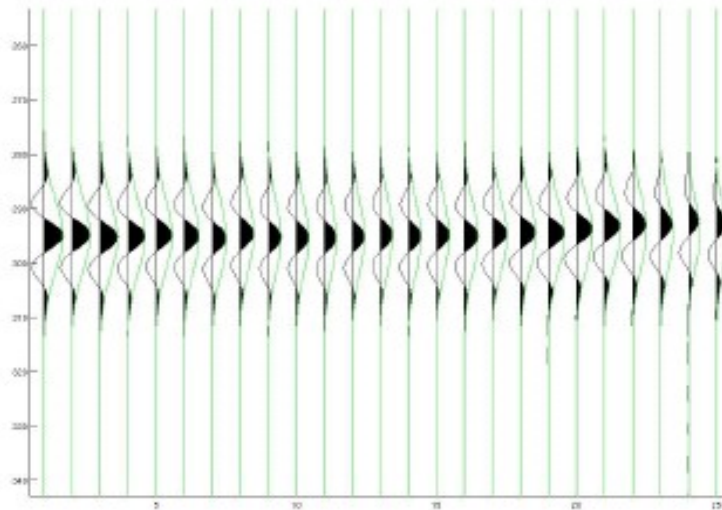
In questo lavoro viene utilizzata la Trasformata di Hilbert per calcolare l'ampiezza istantanea o inviluppo del segnale, definito come il modulo del segnale analitico

$$|A(t)| .$$

L'informazione da estrarre ai fini dell'analisi AVA è data dal valore massimo di ampiezza dell'involuppo  $|A(t)|$  (Figura 7.2). Per passare dall'andamento dell'ampiezza a quello del coefficiente di riflessione in funzione dell'angolo d'incidenza è opportuno eliminare l'effetto dell'ondina, scalando le ampiezze estratte per l'ondina stessa. Infatti, come abbiamo già visto,  $R_{PP}$  è dato dal rapporto

$$R_{PP} = \frac{A_{rP}}{A_{iP}}$$

in cui  $A_{rP}$  è l'ampiezza estratta dal sismogramma e  $A_{iP}$  rappresenta l'ampiezza dell'ondina incidente che nel caso di mezzo elastico eguaglia l'ampiezza dell'ondina sorgente.



**Fig. 7.2** *Dettaglio della riflessione di fondo mare (in nero) con il suo inviluppo (in verde) calcolato con la Trasformata di Hilbert.*

Per quanto riguarda invece la misura della fase dell'ondina, esistono in letteratura diversi approcci.

Zhu e McMechan (2011) hanno confrontato tre metodi per la misura della fase: il metodo di Fourier, il metodo di Hilbert ed il metodo della correlazione.

Il primo utilizza la Trasformata di Fourier per calcolare lo spettro di ampiezza e di fase del segnale riflesso. La fase dell'ondina si ottiene estraendo il suo valore in corrispondenza della frequenza dominante, per la quale si ha la massima ampiezza dello spettro.

Il metodo di Hilbert consiste nel calcolare l'ampiezza e la fase istantanee attraverso la Trasformata di Hilbert. In questo caso, la fase dell'ondina viene estratta come la fase istantanea corrispondente al punto in cui si ha la massima ampiezza istantanea.

I due metodi appena descritti dipendono quindi da misure puntuali e possono essere affetti da errori relativi alle alte frequenze, che dipendono dal passo di campionamento e dallo spettro dell'ondina (Mazzotti, 1991).

Al contrario il terzo metodo, metodo della correlazione, utilizza l'intera ondina, permettendo così una stima della fase più stabile.

Il metodo della correlazione, si basa su un concetto fondamentale: l'ondina a fase zero presenta il massimo coefficiente di correlazione con il suo involuppo (Fomel e van der Baan, 2010).

## S

ulla base di questo principio viene calcolata la fase del segnale riflesso eseguendo il procedimento seguente per ogni traccia: viene localizzata l'ondina riflessa relativa alla riflessione di fondo mare,  $x(t)$  ;

- si ruota la fase dell'ondina di un angolo  $\delta = 1^\circ$  , ottenendo  $x_{rot}(t)$  . Per la rotazione della fase si utilizza l'equazione :

$$x_{rot}(t) = x(t) \cos \delta + H[x(t)] \sin \delta$$

dove  $H[x(t)]$  è la Trasformata di Hilbert di  $x(t)$  .

- si calcola l'involuppo di  $x_{rot}(t)$  , usando la Trasformata di Hilbert;
- si calcola la cross-correlazione tra l'ondina ruotata  $x_{rot}(t)$  ed il suo involuppo, andando ad estrarre il coefficiente di correlazione a zero-lag;
- le operazioni precedenti vengono ripetute fino ad ottenere una rotazione

totale dell'ondina di  $360^\circ$ ;

- si ricerca il grado di rotazione dell'ondina  $\delta_m$  al quale corrisponde il coefficiente di correlazione massimo rappresentante la situazione in cui l'ondina ha fase zero;
- infine, si calcola la fase di  $x(t)$  come la differenza  $360^\circ - \delta_m$

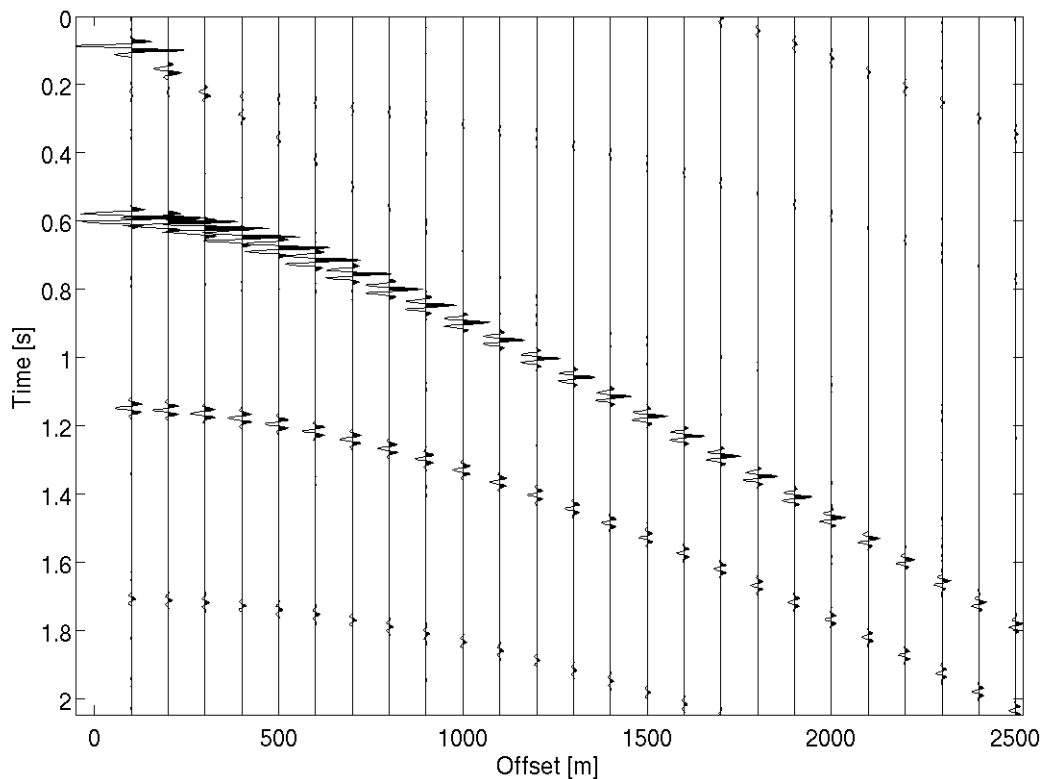
Dal momento che l'ondina sorgente può avere una fase arbitraria incognita, la fase assoluta dell'ondina riflessa non ha nessun significato pratico, soltanto la variazione relativa (lo shift di fase all'aumentare dell'angolo di incidenza) risulta essere un'informazione utile. A questo scopo la fase dell'ondina riflessa ad ogni angolo di incidenza viene scalata della fase misurata per la riflessione ad incidenza normale, ottenendo così l'informazione PVA desiderata.

### 7.1.2. Curve AVA e PVA

Le operazioni di estrazione AVA e PVA sono state condotte dapprima su un modello semplice di fondo mare a singola interfaccia. Il sismogramma sintetico relativo a tale modello (Figura 7.3) è stato generato considerando il modello 3 limitatamente alla prima interfaccia riflettente separante lo strato di acqua dal primo strato di fondo mare, strato 1, ed utilizzando i relativi parametri (Tabella 7.1) quali spessore,  $V_P$ ,  $V_S$  e  $\rho$ . Come ondina sorgente è stata scelta un'ondina del tipo Ricker con una frequenza centrale di 30 Hz. Nel sismogramma si riconoscono i primi arrivi, la riflessione di fondo mare e le riflessioni multiple ad essa associate.

Una volta eseguite le operazioni preliminari descritte nel paragrafo 7.1 (muting primi arrivi, correzione NMO statica e correzione di Geometrical Spreading), vengono estratte le curve rappresentanti l'andamento dell'ampiezza e della fase del coefficiente di riflessione in funzione dell'angolo di incidenza.

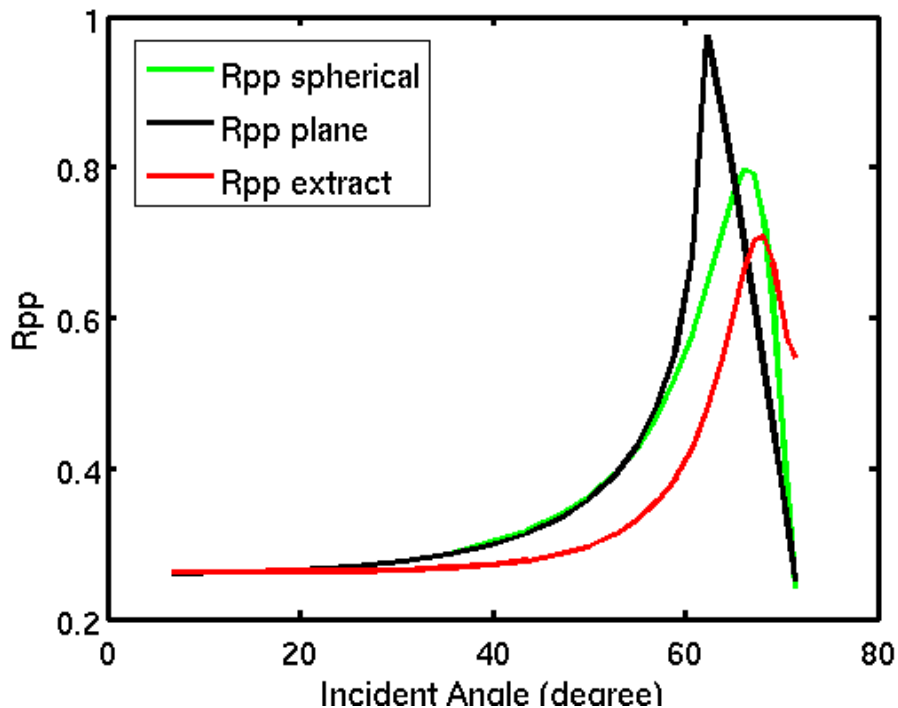
In Figura 7.4 vengono messe a confronto la curva AVA estratta dal sismogramma sintetico con le funzioni AVA calcolate analiticamente considerando il fronte d'onda piano (attraverso le equazioni di Zoeppritz) e il fronte d'onda sferico (attraverso l'equazione di Alulaiw e Gurevich).



**Fig. 7.3** Sismogramma sintetico generato con OASES per un modello semplice di fondo mare a singola interfaccia. I parametri utilizzati per la generazione del sismogramma sono quelli relativi al modello 3, limitatamente al primo e al secondo strato.

La prima osservazione che emerge dal confronto è la totale coincidenza delle due curve AVA calcolate analiticamente per angoli di incidenza pre-critici (fino a circa  $55^\circ$ ); successivamente, le due funzioni si discostano all'angolo critico ( $\sim 62^\circ$ ) per poi tornare a convergere ad angoli post-critici. Il coefficiente di riflessione per onde piane prevede la massima ampiezza all'angolo di incidenza critico; mentre il coefficiente di riflessione calcolato per onde sferiche presenta un andamento più smooth in prossimità dell'angolo critico e raggiunge la sua massima ampiezza per angoli di incidenza post-critici.

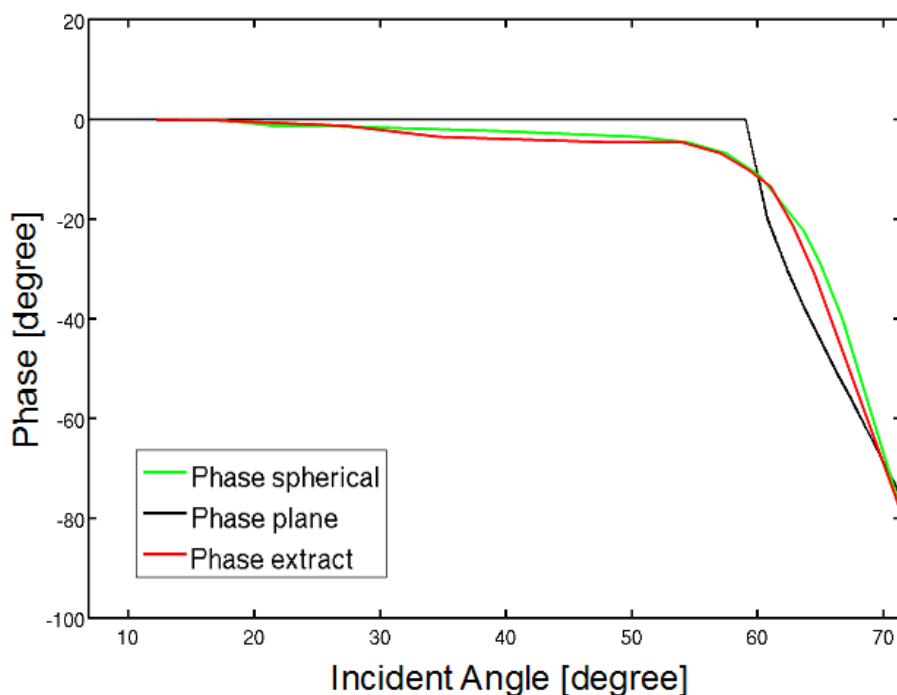
Analizzando la curva del coefficiente di riflessione estratto dal sismogramma sintetico si vede che questa segue approssimativamente l'andamento dell'  $R_{PP}$  sferico. Il coefficiente di riflessione sferico e quello estratto prevedono l'ampiezza massima in coincidenza dello stesso angolo.



**Fig. 7.4** Andamento del coefficiente di riflessione in funzione dell'angolo di incidenza: la curva nera rappresenta il coefficiente di riflessione calcolato con l'equazione di Zoeppritz per onde piane, la curva verde quello calcolato con l'equazione di Alulawi e Gurevich per onde sferiche, mentre la curva rossa indica il coefficiente di riflessione estratto dal sismogramma sintetico.

La non completa coincidenza tra le due curve potrebbe essere causata da più fattori:

- affidabilità del software OASES nel riprodurre l'andamento delle ampiezze con l'offset, principalmente in prossimità dell'angolo critico;
- l'estrazione dell'ampiezza come valore massimo dell'involuppo del segnale, porta al trattamento di un segnale a minor frequenza (l'involuppo ha una minore frequenza rispetto al segnale reale); come abbiamo visto in Figura 5.9, l'andamento di RPP sferico dipende dalla frequenza e, in particolare, al diminuire della frequenza dell'ondina, il trend RPP ruota verso il basso.



**Fig. 7.5** Curve PVA: la curva blu rappresenta la fase del coefficiente di riflessione per onde piane (calcolata con Zoeppritz), la curva rossa la fase relativa alle onde sferiche (calcolata con l'equazione di Alulaiw e Gurevich) e la curva verde la fase estratta dal sismogramma sintetico.

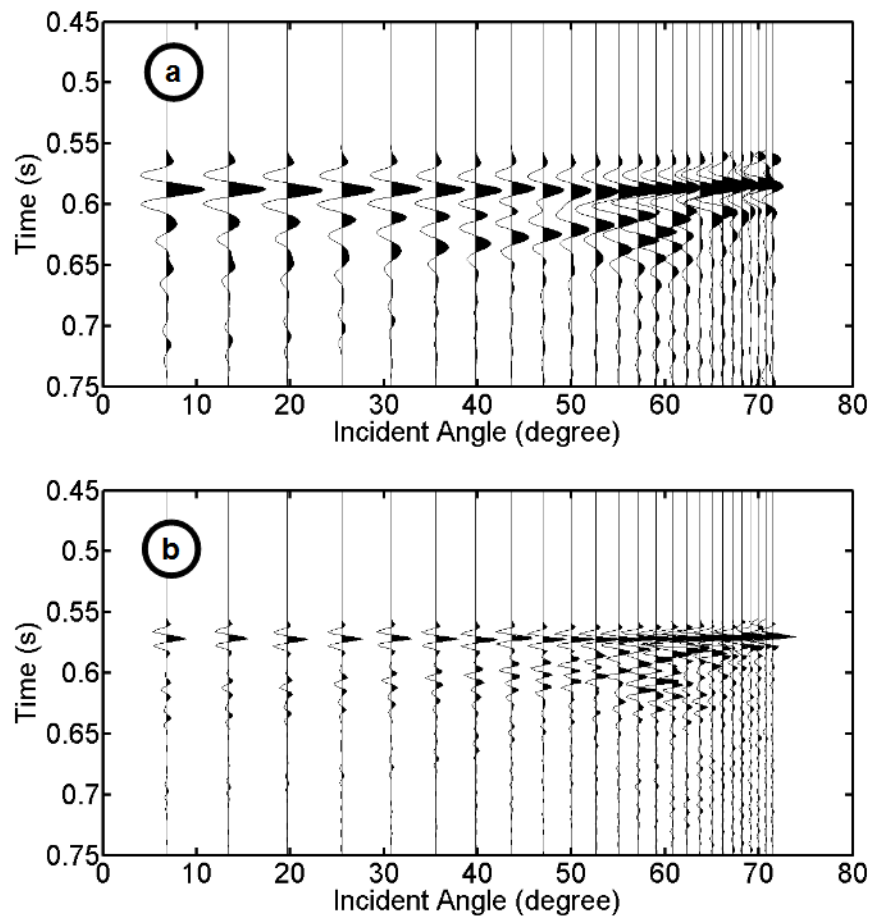
La Figura 7.5 mostra invece il confronto tra la curva PVA estratta dal sismogramma sintetico con il Metodo della correlazione e le curve analitiche in cui si calcola la fase del coefficiente di riflessione per onde sferiche e per onde piane. La curva PVA per il coefficiente di riflessione piano non prevede nessun cambiamento di fase per angoli pre-critici, a differenza delle altre due funzioni PVA in cui lo shift di fase inizia prima dell'angolo critico.

Dal confronto delle tre curve emerge come la curva PVA estratta segua con buona approssimazione quella calcolata analiticamente con l'equazione di Alulaiw e Gurevich per onde sferiche.

Dall'analisi delle funzioni AVA e PVA estratte si può valutare l'inversione AVA+PVA in termini di fattibilità. Si può constatare che, nel caso puramente teorico di singola interfaccia riflettente, è possibile utilizzare l'intero range di angoli di incidenza per l'operazione di inversione.

Nelle applicazioni pratiche l'ipotesi di singola interfaccia isolata è estremamente improbabile, si devono quindi prendere in considerazione modelli più complicati a più interfacce.

Si va a studiare come variano le curve AVA e PVA inserendo interfacce riflettenti al di sotto della superficie di fondo mare e si valuta se, in tal caso, i dati a disposizione siano utilizzabili per le operazioni di inversione.



**Fig. 7.6** *Sismogrammi sintetici corretti di NMO, calcolati per il modello3, utilizzando frequenze centrali dell'ondina pari a a) 30 Hz e b) 80 Hz.*

Per la generazione del sismogramma sintetico si utilizzano, anche in questo caso, i parametri del modello 3 (Tabella 7.1), ma estendendo l'analisi a tutti gli strati costituenti il modello stesso.

Per considerare anche l'effetto della risoluzione dell'ondina nell'andamento

dell'RPP con l'angolo di incidenza, sono state utilizzate ondine di tipo Ricker con diversa frequenza centrale, 30 Hz e 80 Hz..

I sismogrammi sintetici sono visibili in Figura 7.6, in cui viene mostrato il sismogramma generato con un'ondina sorgente a 30 Hz (Fig. 7.6a) e quello che utilizza una frequenza centrale dell'ondina pari a 80 Hz (Fig. 7.6b).

Già da una prima analisi si nota l'interferenza tra gli eventi riflessi dal fondo mare e i segnali riflessi dalle interfacce sottostanti, a grandi angoli di incidenza.

Questo effetto, definito nel capitolo 'tuning thickness', è dato da diversi fattori, tra i quali il contrasto di velocità tra lo strato d'acqua e gli strati sottostanti costituenti il fondo mare. Ciò comporta una maggiore curvatura dell'iperbole di riflessione relativa al fondo mare rispetto a quelle relative alle interfacce sottostanti; i segnali riflessi tendono quindi a convergere tra loro a grandi offset.

Un altro fattore che può portare all'effetto di 'tuning thickness' è dato dalla geometria stessa del modello ed in particolare dallo spessore degli strati: la presenza di più strati poco spessi comporta inevitabilmente una sovrapposizione dei segnali riflessi dalle diverse interfacce.

L'effetto di questo fenomeno si riscontra anche sulle curve AVA e PVA estratte.

Vengono messe a confronto le funzioni AVA e PVA estratte con quelle calcolate analiticamente; il procedimento utilizzato per l'estrazione di tali curve segue quello utilizzato nel caso semplice di fondo mare a singola interfaccia.

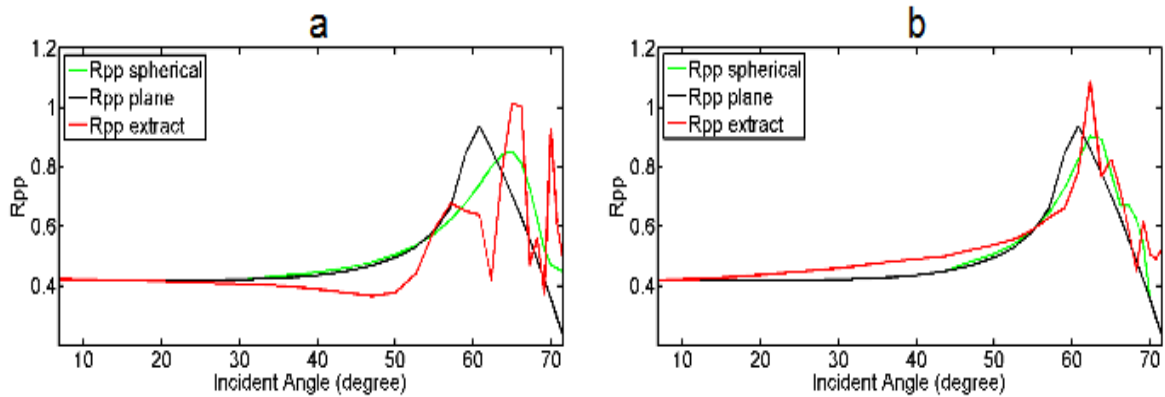
In Figura 7.7 si osserva il confronto tra le misure AVA nel caso di ondina a 30 Hz (Figura 7.7a) e nel caso di ondina a 80 Hz (Figura 7.7b). Entrambe presentano un andamento irregolare a grandi angoli di incidenza, dove le curve estratte mostrano delle oscillazioni, assenti nelle curve AVA teoriche.

L'effetto introdotto dalla frequenza dell'ondina consiste nello shift del punto in cui si iniziano ad avere interferenze: nei sismogrammi a maggior risoluzione tale punto viene traslato ad angoli maggiori.

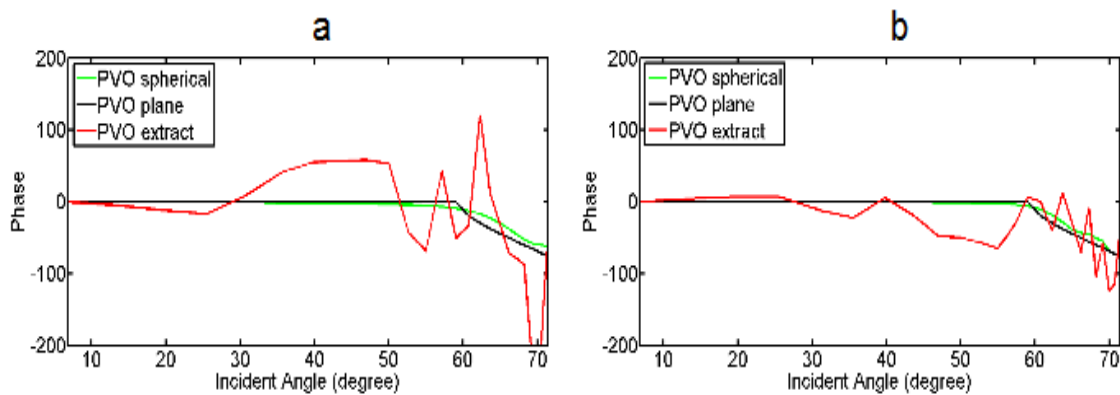
Le stesse osservazioni possono essere fatte anche per le curve PVA (Figura 7.8) estratte dai due sismogrammi sintetici con frequenza centrale di 30 Hz e 80 Hz: entrambe presentano andamenti irregolari rappresentati da oscillazioni a grandi offset ed anche in questo caso l'aumento della risoluzione del dato sismico si traduce in uno spostamento verso offset lunghi del punto di passaggio tra un



andamento regolare e irregolare della fase.



**Fig. 7.7** Andamento del coefficiente di riflessione estratto (in rosso) e calcolati analiticamente (in nero per onde piane e in verde per onde sferiche) nel caso di a) ondina con frequenza centrale di 30 Hz e b) ondina con frequenza centrale di 80 Hz.



**Fig. 7.8** Andamento della fase in funzione dell'angolo di incidenza; la curva PVA estratta (in rosso), le curve PVA calcolate analiticamente per onde piane (in nero) e per onde sferiche (in verde).

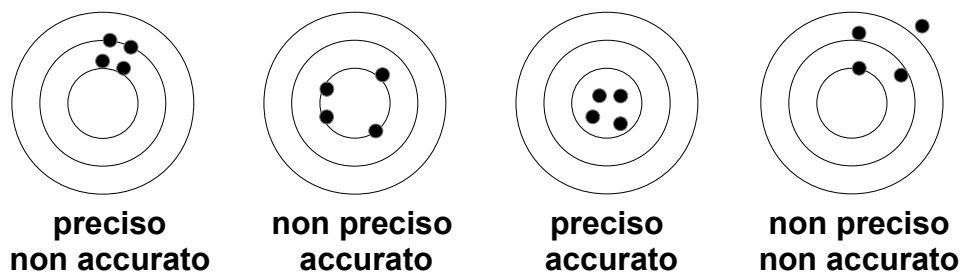
Da quanto detto emerge che, per quanto riguarda la riflessione da fondo mare, nel caso di un modello semplice a singola interfaccia, l'andamento del coefficiente di riflessione in funzione dell'angolo di incidenza segue con buona approssimazione l'andamento del coefficiente di riflessione calcolato nel caso di fronte d'onda sferico. Nel caso reale di riflessione da fondo mare interferente con altri eventi, si

riduce l'informazione AVA e PVA utile ai fini di un'inversione. Questa limitazione è tanto più significativa quanto minore è la risoluzione dei dati sismici a disposizione. L'utilità dell'utilizzo di offset lunghi e dei coefficienti di riflessione sferici dovrebbe essere perciò testata su dati reali e probabilmente tale utilità e applicabilità varierà da caso a caso (ad esempio in funzione della struttura geologica del fondale e della sua profondità).

## 8 Analisi AVA short offset e prove di inversione su dati analitici

In questa parte del lavoro di tesi si valuteranno le potenzialità dei due metodi di inversione trattati nel capitolo 6, Metodo ai Minimi Quadrati e SVD troncata al variare del rapporto  $V_P/V_S$  ed in particolare per rapporti  $V_P/V_S \gg 2$ , valore comune per i sedimenti di fondo mare, e  $V_P/V_S = 2$ .

Questo tipo di studio viene fatto eseguendo inizialmente un'inversione a tre parametri e successivamente a due parametri utilizzando, nel primo caso l'equazione di Aki e Richards (vedi Equazione 6.1) e nel secondo caso l'equazione di Ursenbach e Stewart (vedi Equazione 6.4). Le potenzialità dei due metodi di inversione nella stima del modello reale si possono conoscere a priori, cioè senza conoscere il dato, soltanto sulla base della geometria del modello e dell'esperimento, attraverso una 'sensitivity analysis', che consiste nel calcolo delle matrici di risoluzione dei dati e del modello, delle matrici di covarianza unitaria del modello e sullo studio degli autovalori ed autovettori.



**Fig. 8.1** *Esempi di precisione e accuratezza.*

Nell'analisi della sensitività dei metodi di inversione, si utilizzeranno i termini di precisione ed accuratezza (Figura 8.1), con il seguente significato:

- **precisione:** grado di 'convergenza' di dati rilevati individualmente rispetto al valore medio della serie a cui appartengono ovvero, in altri termini, la loro varianza rispetto alla media campionaria;

- accuratezza: grado di corrispondenza del dato teorico, desumibile da una serie di valori misurati, con il dato reale o di riferimento.

L'inversione riguarda dati analitici. Sono inoltre state trattate separatamente l'inversione di dati privi di noise e l'inversione di dati contaminati da rumore random.

I dati analitici consistono in valori di coefficiente di riflessione in funzione dell'angolo di incidenza; questi sono stati calcolati con l'equazione di Aki e Richards.

In funzione del rapporto  $V_P/V_S$  sono stati calcolati due serie di dati analitici, partendo da modelli diversi:

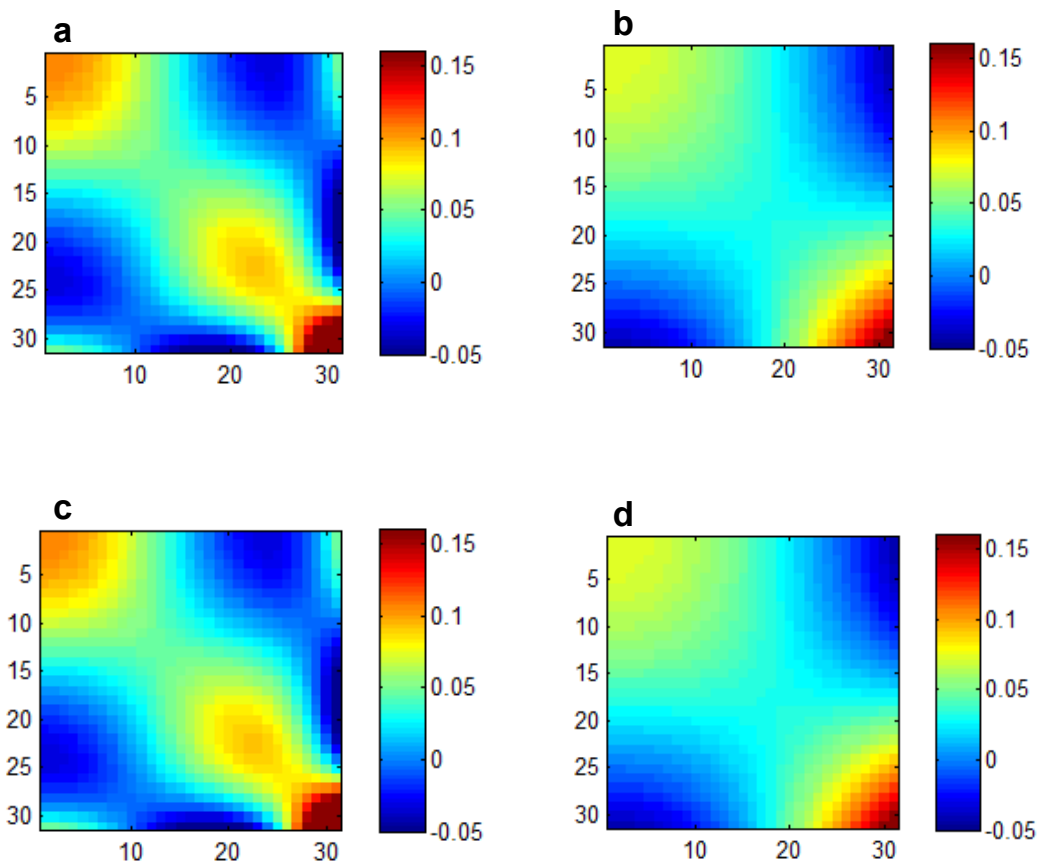
- il modello relativo ad un rapporto  $V_P/V_S=2$  prevede che le proprietà dei mezzi a contatto siano:  $V_{P1}=3000$  m/s  $V_{S1}=1500$  m/s  $\rho_1=2$  g/cm<sup>3</sup> del mezzo sovrastante e  $V_{P2}=3400$  m/s  $V_{S2}=1700$  m/s  $\rho_2=2.2$  g/cm<sup>3</sup> del mezzo sottostante;
- il modello relativo ad un rapporto  $V_P/V_S \gg 2$  prevede che le proprietà dei mezzi a contatto siano:  $V_{P1}=1500$  m/s  $V_{S1}=0$  m/s  $\rho_1=1$  g/cm<sup>3</sup> per lo strato d'acqua e  $V_{P2}=1700$  m/s  $V_{S2}=200$  m/s  $\rho_2=1.6$  g/cm<sup>3</sup> del fondo mare.

## 8.1 Inversione con il Metodo dei Minimi Quadrati

Invertendo i dati di input con il metodo dei minimi quadrati si ottiene una perfetta risoluzione di tutti i parametri del modello, indipendentemente dal rapporto  $V_P/V_S$ , i parametri vengono quindi stimati con perfetta accuratezza. Questo è un risultato aspettato, dal momento che la matrice di risoluzione del modello  $R$ , espressa come:

$$[G^{-g} G] = R$$

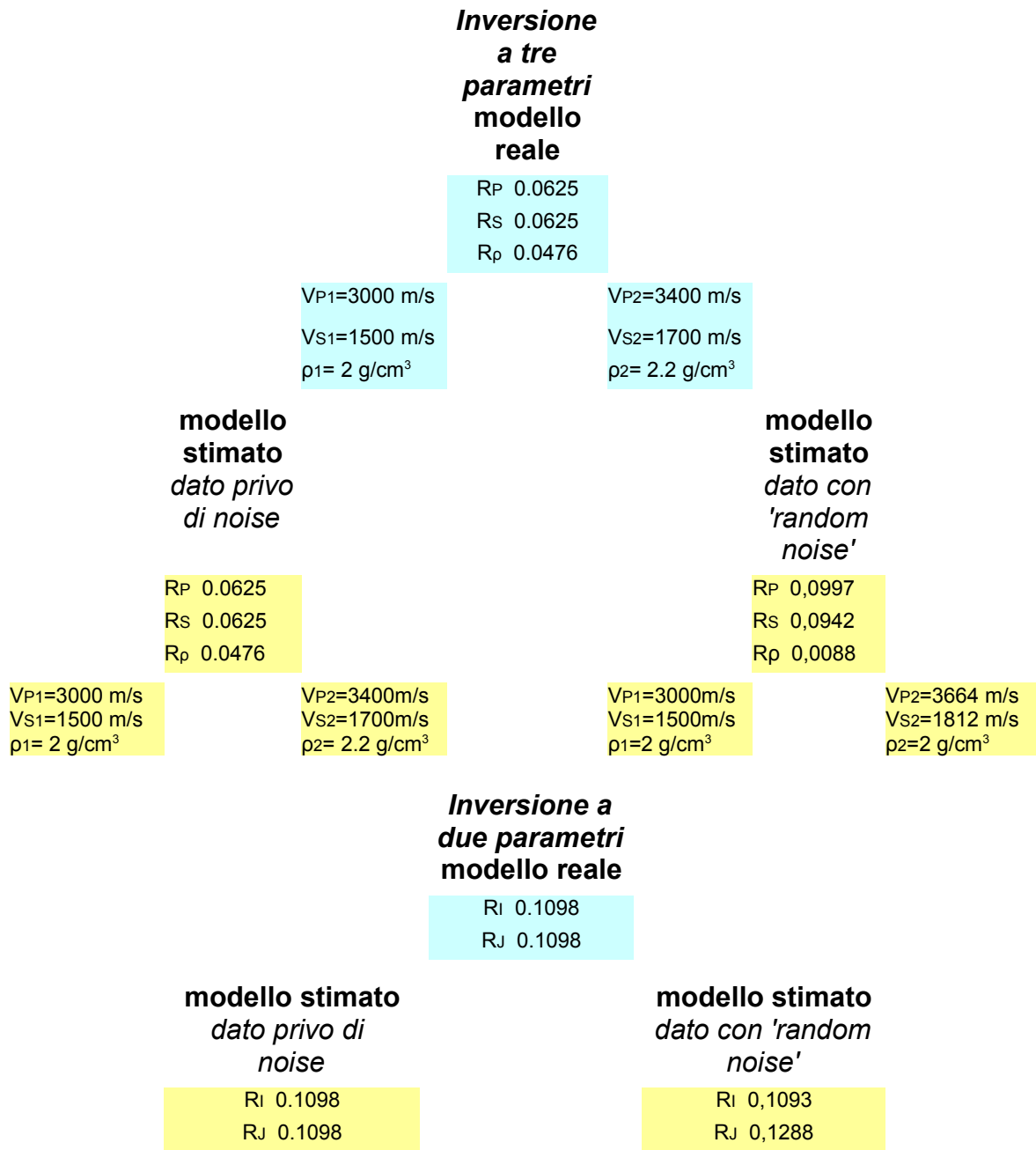
risulta una matrice identità  $I$ , dove  $G^{-g} = (G^T G)^{-1} G^T$ .



**Fig. 8.2** *Matrici di risoluzione dei dati calcolate con il Metodo dei Minimi Quadrati nei casi di a) inversione a 3 parametri, con rapporto  $V_P/V_S \gg 2$ , b) inversione a 2 parametri, con  $V_P/V_S \gg 2$ , c) inversione a 3 parametri con  $V_P/V_S = 2$  e d) inversione a 2 parametri con  $V_P/V_S = 2$ .*

Ricordando che  $m_{est} = Rm_{true}$ , se  $R = I$ , andando a moltiplicare il modello 'reale' per una matrice identità, otterrò  $m_{est} = m_{true}$ ; ciò significa che potenzialmente la capacità risolutiva del modello è perfetta.

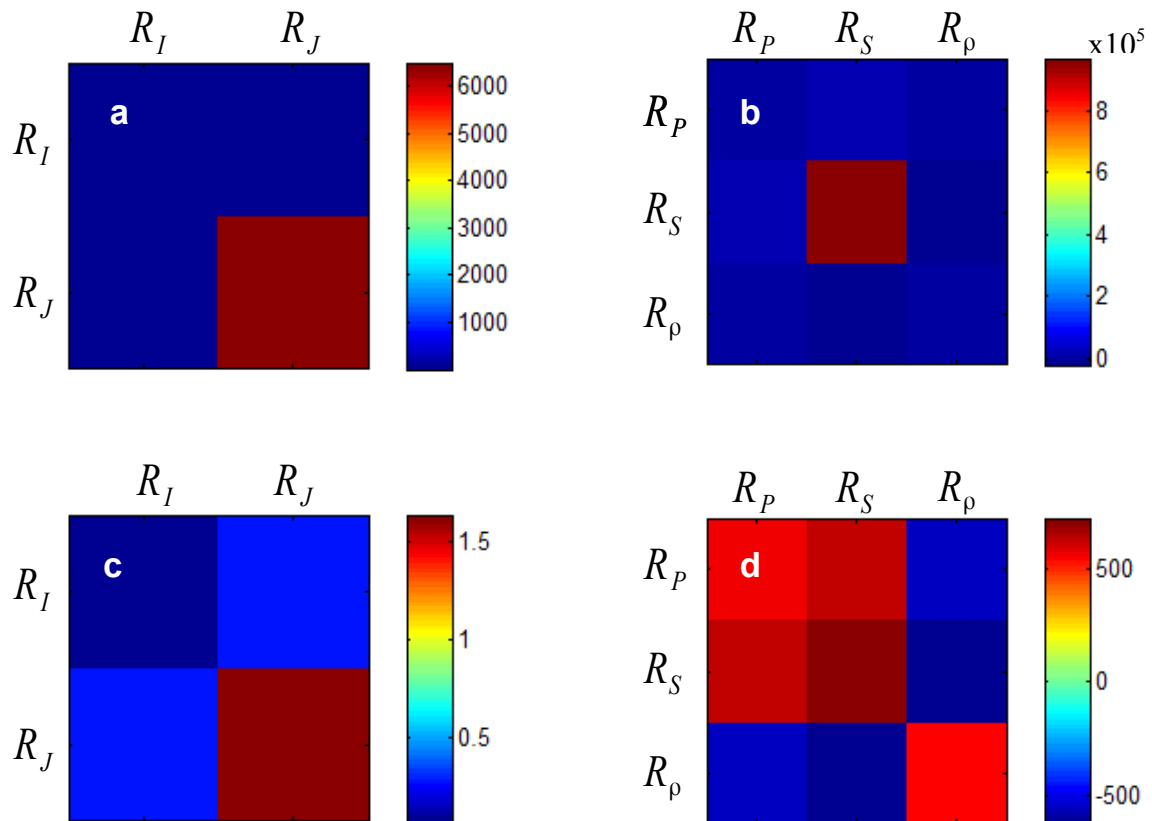
Per quanto riguarda invece la bontà con cui i dati predetti fittano con i dati osservati ci si riferisce alla matrice di risoluzione dei dati  $N$ . In questo caso non abbiamo una perfetta risoluzione dei dati in quanto la matrice di risoluzione  $N$  differisce da una matrice identità  $I$ , come si osserva in Figura 8.2. Di conseguenza risulta impossibile la stima di ogni dato individualmente, bensì ogni dato predetto sarà dato dalla media pesata dei dati osservati vicini. In particolare la capacità risolutiva dei dati peggiora passando dall'inversione a tre parametri all'inversione a due parametri.



**Tabella 8.1** Risultati ottenuti dall'inversione a tre e a due parametri del modello con  $VP/VS=2$ , nel caso di inversione di un dato privo di noise e di un dato rumoroso. In celeste sono mostrati i dati relativi al modello reale; in giallo i dati relativi ai modelli stimati.

Questo è ovvio se pensiamo che nel passaggio da una approssimazione all'altra si riduce la dimensionalità dello spazio in cui andiamo ad analizzare il problema. Prima di osservare i risultati dell'inversione dei dati analitici, andiamo a studiare le matrici di covarianza unitaria del modello (Figura 8.3), le quali prevedono a priori le

modalità di propagazione dell'errore dallo spazio dei dati allo spazio dei modelli, assumendo che i dati abbiano tutti la medesima varianza e che questa sia uguale ad uno.

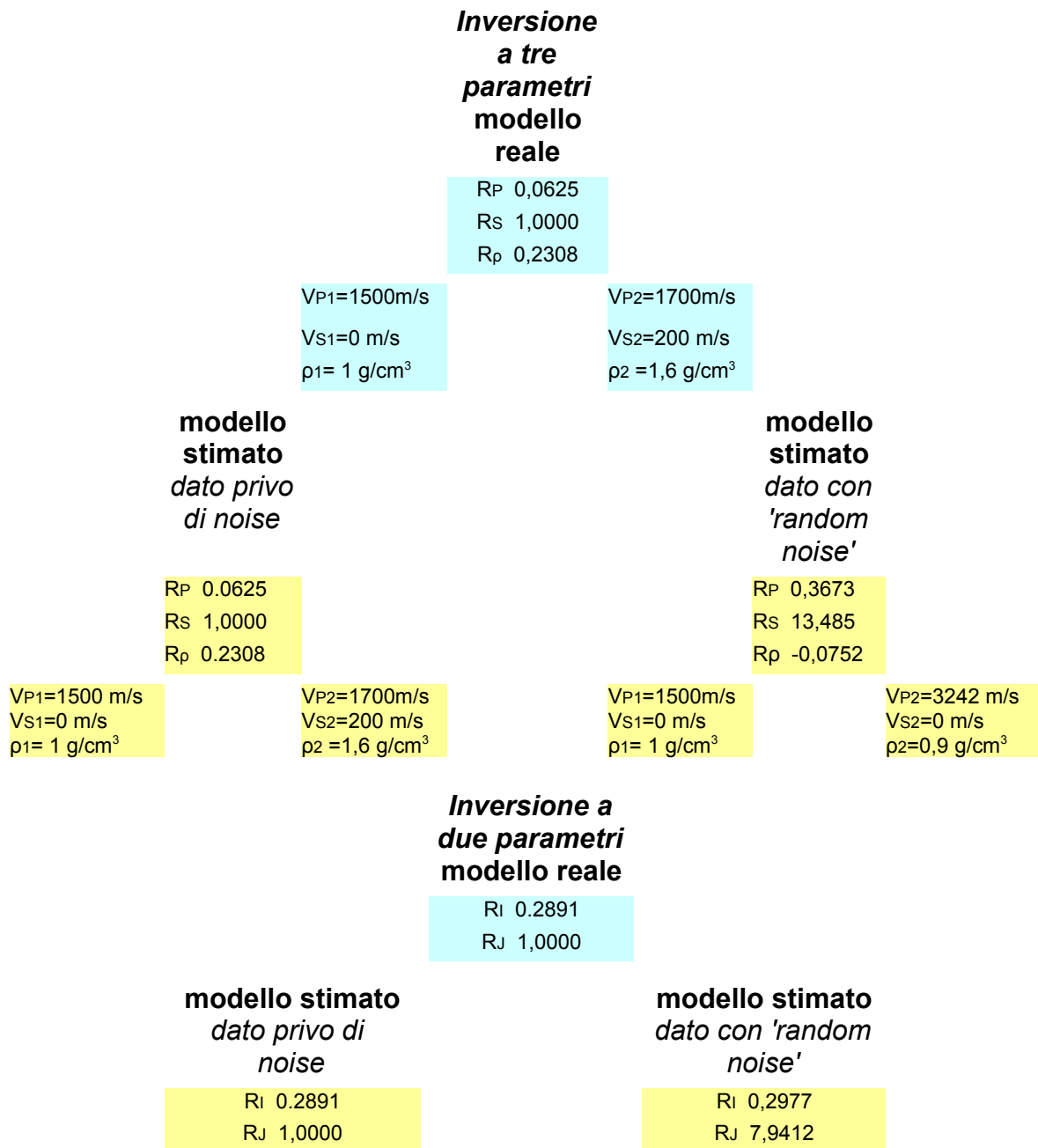


**Fig. 8.3** *Matrici di Covarianza Unitaria calcolate attraverso l'inversa generalizzata (Metodo ai Minimi Quadrati) nel caso di a)  $V_P/V_S \gg 2$  e inversione a due parametri; b)  $V_P/V_S \gg 2$  e inversione a tre parametri; c)  $V_P/V_S = 2$  nell'inversione a due parametri; d)  $V_P/V_S = 2$  nell'inversione a tre parametri. I valori che si trovano lungo la diagonale principale della matrice rappresentano la varianza relativa ad ogni parametro del modello, gli altri elementi della matrice indicano invece i valori di covarianza.*

Nel caso del modello di fondo mare, l'inversione a due parametri risulta più stabile rispetto all'inversione a tre parametri; ciò si traduce in valori di scala più alti di due ordini di grandezza in quest'ultimo caso. In ogni caso, comunque, il parametro a cui è associata una più alta varianza, risulta sempre quello relativo alla  $V_S$  ( $R_S$  nel caso di inversione a tre parametri e  $R_J$  nel caso di inversione a due parametri).

Le stesse osservazioni si possono fare nel caso del modello con rapporto  $V_P/V_S = 2$ : la stabilità dell'inversione aumenta passando da un'inversione a tre

parametri ad un'inversione a due parametri.



**Tabella 8.2** Risultati ottenuti dall'inversione a tre e a due parametri del modello con  $V_P/V_S \gg 2$ , nel caso di inversione di un dato privo di noise e di un dato rumoroso. In celeste sono mostrati i dati relativi al modello reale; in giallo i dati relativi ai modelli stimati.

Dalla Figura 8.3, emerge inoltre che, considerando la stessa parametrizzazione del modello, il problema tende a stabilizzarsi al diminuire del rapporto  $V_P/V_S$ , infatti i valori di scala relativi alla stessa parametrizzazione del modello, nel caso di



$V_P/V_S=2$  sono più bassi di tre ordini di grandezza rispetto al caso di fondo mare.

Tali considerazioni si possono riscontrare sui risultati dell'inversione dei dati analitici: trattando il caso puramente teorico di dato privo di rumore, i parametri del modello vengono effettivamente stimati con perfetta accuratezza, indipendentemente dal rapporto  $V_P/V_S$  e dalla parametrizzazione del problema.

Nel momento in cui andiamo a contaminare il dato, aggiungendo rumore random, i risultati dell'inversione si allontanano da quelli reali. Per comprendere tali risultati possiamo osservare le informazioni che ci derivano dalle Matrici di Covarianza (Figura 8.3). L'inversione a tre parametri risulta meno stabile di quella a due parametri, inoltre, soprattutto per quanto riguarda la stima di  $R_S$  e  $R_J$ , questa peggiora all'aumentare del rapporto  $V_P/V_S$ .

Da quanto detto emerge che, teoricamente, impiegando il metodo ai minimi quadrati si ottiene una perfetta capacità risolutiva dei parametri del modello; in pratica, però, sporcando il dato con piccole quantità di rumore, tale metodo rivela una forte instabilità nel processo di inversione nel caso di parametrizzazione del problema a tre incognite; ciò comporta l'impossibilità di determinare in modo affidabile i parametri del modello. Nel caso specifico, la proprietà del modello che risulta peggio stimata è la velocità delle onde S,  $V_S$ . La parametrizzazione del problema a due incognite, comporta invece una stabilizzazione del processo di inversione, soprattutto ciò risulta evidente nel caso del modello con un rapporto  $V_P/V_S=2$ ; nel caso del modello di fondo mare tale stabilizzazione si osserva soltanto per il parametro  $R_I$ .

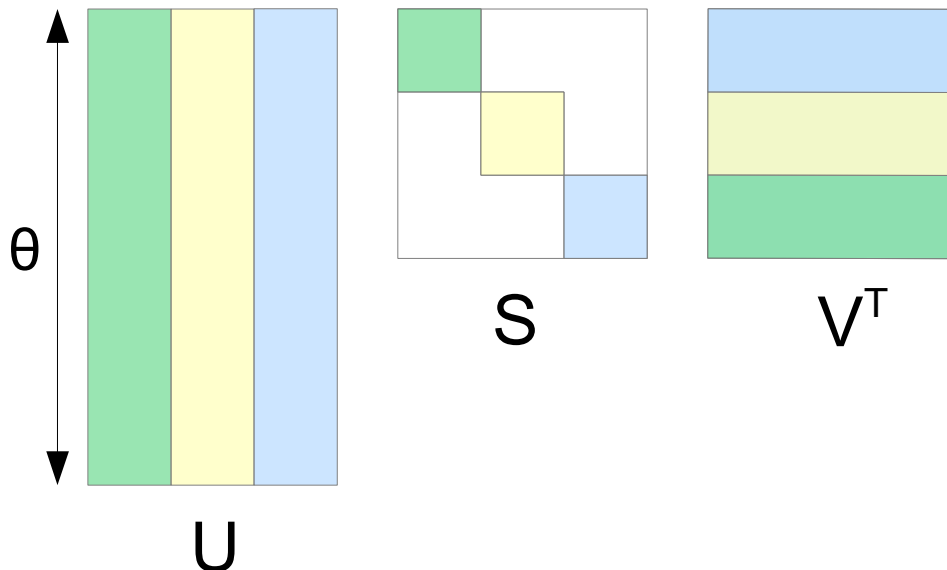
## 8.2 Inversione con il Metodo TSVD

Analizziamo adesso l'inversione di dati analitici attraverso il Metodo della Decomposizione ai Valori Singolari Troncata (TSVD), andando a riprendere i concetti esposti nel capitolo 4 e applicandoli all'analisi AVA.

La SVD viene applicata alla funzione di trasferimento tra i dati ed i parametri del modello, la matrice  $G$ . Questa viene scomposta nel prodotto di tre termini (Figura 8.4):

$$G = U S V^T$$

dove  $S$  è la matrice diagonale degli autovalori,  $U$  è la matrice degli autovettori nello spazio dei dati e  $V$  contiene gli autovettori nello spazio dei modelli.



**Fig. 8.4** *La matrice  $G$  può essere scomposta nel prodotto di autovettori nello spazio dei dati  $U$ , autovettori nello spazio del modello  $V^T$  ed autovalori  $S$ . Questa figura è valida solo nel caso di inversione a tre parametri.*

In particolare la matrice  $G$  viene scomposta in più componenti ortogonali sia nello spazio dei dati che nello spazio del modello; il numero delle componenti è uguale al numero dei parametri del modello studiato, quindi avremo tre componenti nell'inversione a tre parametri e due quando trattiamo l'inversione a due parametri. L'energia di ogni componente è data dal corrispondente autovalore.

Gli autovettori dello spazio dei dati, rappresentati dalle righe della matrice  $U$ , hanno tante componenti quanto è il massimo angolo di incidenza considerato, quindi partendo dall'angolo di incidenza normale fino all'angolo di incidenza massimo, che è supposto essere minore dell'angolo critico; in questo caso l'angolo massimo considerato è  $30^\circ$ , quindi ogni autovettore presenterà 30 componenti.

Gli autovettori che costituiscono la matrice  $V$  rappresentano una base nello spazio del modello; ogni autovettore ha tre o due componenti, in funzione del tipo di

inversione a tre o a due parametri. Le componenti di tali autovettori sono rappresentate dai parametri stessi del modello. In questo lavoro gli autovettori dello spazio del modello sono stati calcolati considerando un angolo massimo che varia tra 0° e 30°. Ciò equivale ad aggiungere, ogni volta, una riga alla matrice  $G$ , aumentando il dataset di un elemento. Per ogni angolo in più considerato, gli autovettori della matrice  $V$  ruotano per ottenere un nuovo sistema di riferimento che meglio fitta il nuovo set di dati. In funzione dei valori delle componenti di ogni autovettore, si può derivare la sensitività dei modelli ai vari parametri.

Gli autovalori, contenuti sulla diagonale della matrice  $S$ , indicano come il segnale viene distribuito lungo gli autovettori; in particolare, rappresentano la potenza del segnale lungo il rispettivo autovettore. Di conseguenza, l'autovalore maggiore indica il parametro che più influenza il sistema, quindi quello che pesa maggiormente nella soluzione del problema.

Anche gli autovalori sono una funzione del massimo angolo di incidenza  $e$ , per convenienza grafica, verranno misurati in dB ( $20 \log_{10}(s_i)$ ).

E' probabile che il problema sia caratterizzato da autovalori molto bassi; questo comporterebbe il mal condizionamento del problema stesso, per i motivi che abbiamo spiegato nel capitolo 4. Per evitare l'instabilità dell'inversione si ricorre alla TSVD, attraverso la quale si eliminano gli autovalori più bassi (che possono essere uno o più autovalori, a seconda di come si opera la troncatura). Questa operazione comporta l'eliminazione degli autovettori corrispondenti a tali autovalori e data la relazione:

$$U^T d_{obs} = S V^T m$$

si capisce che ciò implica l'eliminazione del modello  $m$  associato all'autovettore dello spazio dei modelli che è stato eliminato.

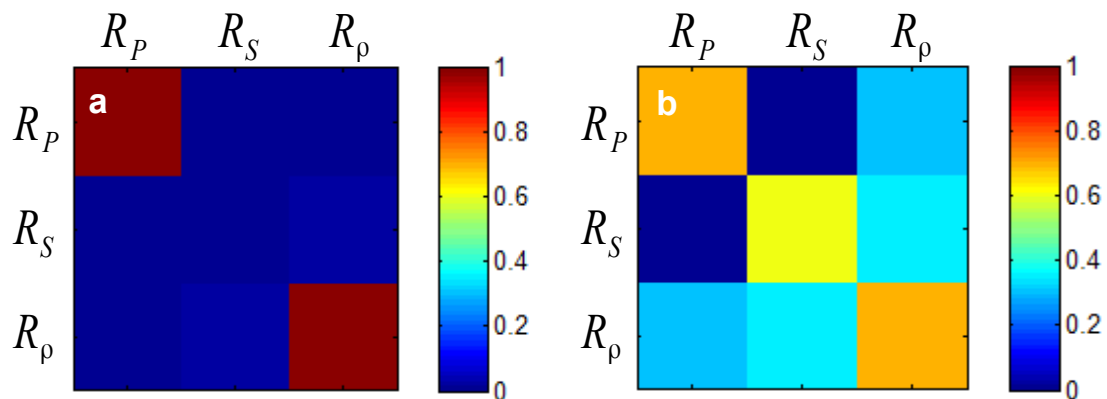
Il vantaggio nell'utilizzo della SVD quindi consiste nella ricerca di un nuovo sistema di riferimento, i cui assi costituiscono direzioni privilegiate che tendono a massimizzare la variazione dei dati (sono quindi direzioni di massima diversificazione del dato) e quindi evidenziano maggiormente la loro struttura, dal momento che rappresentano le direzioni di best fit dei dati stessi; questo comporta

anche una diminuzione della ridondanza dell'informazione contenuta nei dati.

Andiamo ora ad eseguire una 'sensitivity analysis', per valutare le potenzialità di questo metodo di inversione in condizioni di diverso rapporto  $V_P/V_S$ .

Analizzando le matrici di risoluzione del modello nell'inversione a tre parametri, dopo troncamento con SVD, (Figura 8.5), si osserva che:

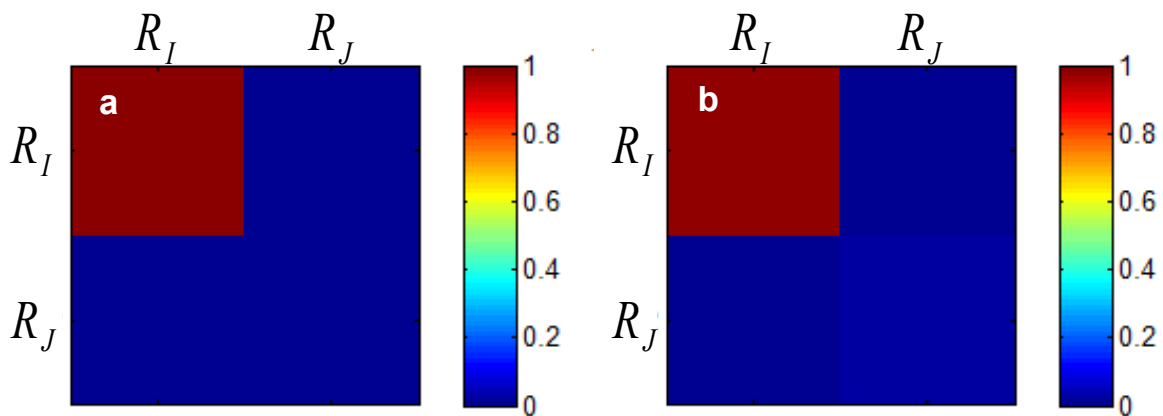
- nel caso di fondo mare,  $V_P/V_S \gg 2$ , la matrice di risoluzione  $R$  mostra valori simili ad 1 relativi ai parametri del modello  $R_P$  e  $R_\rho$ , ciò significa che potenzialmente potrà stimare con buona accuratezza tali parametri; al contrario, il parametro  $R_S$ , avrà una cattiva risoluzione, infatti la seconda riga della matrice, relativa a tale parametro mostra la parziale mappatura della riflettività  $S$  sugli altri due parametri del modello,  $R_P$  e  $R_\rho$ . In definitiva  $R_S$  può essere predetto come media pesata di tutti e tre i parametri del modello (Figura 8.5a);



**Fig. 8.5** *Matrici di Risoluzione del modello nel caso a) di un rapporto  $V_P/V_S \gg 2$  e b)  $V_P/V_S=2$ . Entrambe le matrici sono state calcolate ipotizzando una inversione a tre parametri, dove i parametri del modello sono la riflettività  $P$ ,  $R_P$ , la riflettività  $S$ ,  $R_S$  e la riflettività  $\rho$ ,  $R_\rho$ .*

- trattando il modello con  $V_P/V_S=2$  si nota che ogni parametro del modello viene in parte mappato sugli altri due. In particolare si riscontra un miglioramento per quanto riguarda la risoluzione di  $R_S$ , a scapito della capacità risolutiva di  $R_P$  e  $R_\rho$ , che perdono risoluzione rispetto al caso

di fondo mare. Nonostante ciò, i parametri del modello stimati con più accuratezza rimangono sempre la riflettività  $P$  e la riflettività  $\rho$  (Figura 8.5b). Andiamo ora a ridurre la dimensionalità dello spazio del modello, considerando quindi l'inversione a due parametri, impedenza  $P$ ,  $R_I$  e impedenza  $S$ ,  $R_J$ . In questo caso le potenzialità risolutive del metodo TSVD non variano significativamente in funzione del rapporto  $V_P/V_S$  considerato. L'informazione che si estrae dalle matrici di risoluzione del modello (Figura 8.6), infatti, è pressoché la stessa: il parametro del modello che risulta stimabile con buona accuratezza è rappresentato da  $R_I$ .



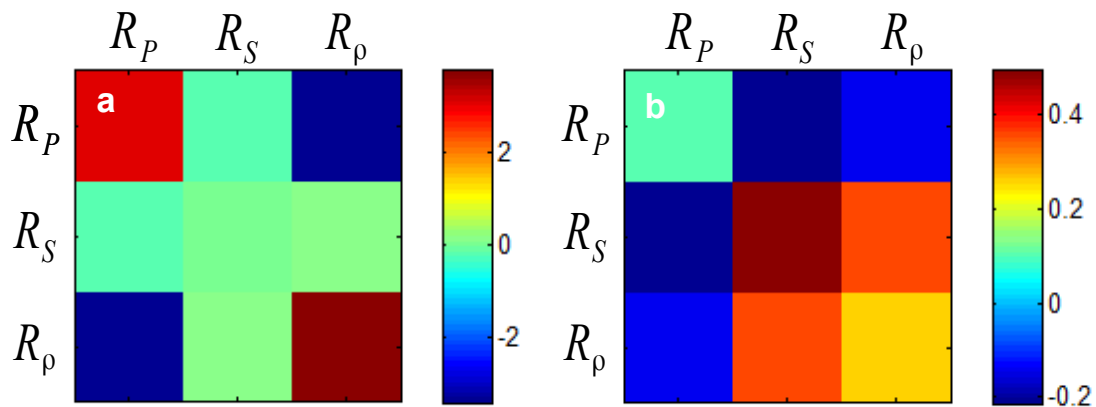
**Fig. 8.6** *Matrici di Risoluzione del modello nel caso a) di un rapporto  $V_P/V_S \gg 2$  e b)  $V_P/V_S = 2$ . Entrambe le matrici sono state calcolate ipotizzando una inversione a due parametri, dove i parametri del modello sono l'impedenza  $P$ ,  $R_I$  e l'impedenza  $S$ ,  $R_J$ .*

Per quanto riguarda invece le modalità di propagazione dell'errore dallo spazio dei dati allo spazio dei modelli, è opportuno analizzare le matrici di covarianza unitaria del modello.

Anche in questo caso mettiamo a confronto i risultati ottenuti da modelli caratterizzati da diverso rapporto  $V_P/V_S$ .

Nel caso di inversione a tre parametri, la prima osservazione che si può fare dal confronto delle due matrici di covarianza (Figura 8.7) riguarda le relative scale dei valori; nel modello con un rapporto  $V_P/V_S = 2$  tali valori sono più piccoli di un ordine di grandezza rispetto a quelli calcolati nel caso di  $V_P/V_S \gg 2$ . Questo comporta, nel caso di  $V_P/V_S = 2$ , valori di varianza più bassi che indicano una maggiore stabilità

dell'inversione e valori più bassi di covarianza che indicano una minore ridondanza dell'informazione. In particolare nel caso di fondo mare, si hanno alti valori di varianza, intorno a 2-3, relativi ai parametri  $R_P$  e  $R_\rho$ . Questi valori indicano gli intervalli di confidenza con cui teoricamente si possono stimare tali parametri e dipendono dal fatto che il rumore si va a mappare preferenzialmente su alcuni parametri del modello piuttosto che su altri. In questo caso la matrice di covarianza indica una mappatura del rumore preferenzialmente su  $R_P$  e  $R_\rho$ . Ciò implica una buona precisione nella stima di  $R_S$ , piuttosto che nella stima degli altri due parametri del modello.



**Fig. 8.7** *Matrici di covarianza unitaria del modello calcolate nel caso a) di fondo mare, con un rapporto  $V_P/V_S \gg 2$  e b) di un modello con rapporto  $V_P/V_S = 2$ . Entrambe le matrici sono state calcolate ipotizzando una inversione a tre parametri. I termini lungo la diagonale principale rappresentano i valori di varianza per ogni proprietà del modello (partendo dall'alto:  $R_P, R_S$  e  $R_\rho$ ); mentre i termini che giacciono fuori dalla diagonale principale esprimono i valori di covarianza per le diverse coppie di parametri del modello; tali valori sono simmetrici rispetto alla diagonale della matrice stessa.*

Nel caso di  $V_P/V_S = 2$  (Figura 8.7b), si osserva una situazione contraria; il parametro su cui si mappa principalmente il rumore è la riflettività S,  $R_S$ ; gli altri due parametri sono potenzialmente stimabili con intervalli di confidenza minori. Osservando i termini al di fuori della diagonale principale, indicanti la covarianza tra i parametri, si deduce, indipendentemente dal rapporto  $V_P/V_S$ , una dipendenza tra  $R_P$  e  $R_\rho$  data dal valore di covarianza negativo. Ciò significa che ad un

aumento del valore di  $R_p$  deve corrispondere una diminuzione di  $R_s$  per ottenere lo stesso risultato dall'analisi AVA. Si osserva invece un valore di covarianza positivo associato alla dipendenza tra  $R_s$  e  $R_p$ , che indica una dipendenza diretta tra tali proprietà del modello (vd. Dipendenza diretta tra  $R_s$  e  $R_p$  nell'equazione di Aki e Richards).

Confrontando i valori di scala delle matrici di covarianza nel caso di inversione a tre parametri utilizzando il metodo TSVD (Figura 8.7), con quelli visti nel caso in cui si applica il metodo dei minimi quadrati (Figura 8.5), questi ultimi presentano valori di scala più alti, segno di maggiore instabilità del problema.

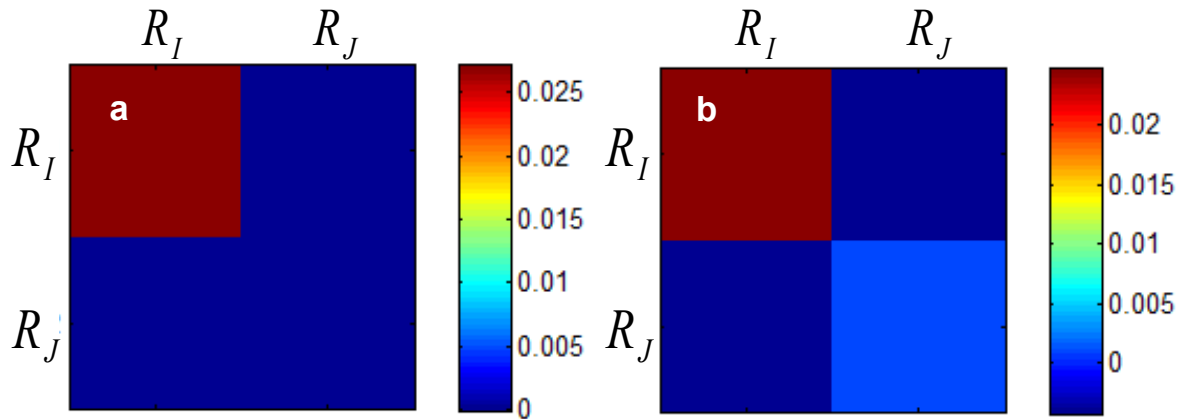
Un'ulteriore stabilizzazione dell'inversione si ottiene riparametrizzando il problema in termini di impedenze,  $R_I$  e  $R_J$ , riducendo cioè le dimensioni dello spazio del modello da tre a due. Le matrici di covarianza unitaria (Figura 8.8) mostrano infatti valori di scala più bassi di uno-due ordini di grandezza rispetto al caso precedentemente analizzato di approssimazione a tre parametri.

Dalla lettura delle matrici di covarianza si evince che entrambi i parametri del modello possono essere stimati con buona precisione, dati i bassi valori di varianza ad essi associati. In entrambi i casi l'errore si va a mappare preferenzialmente su  $R_I$ .

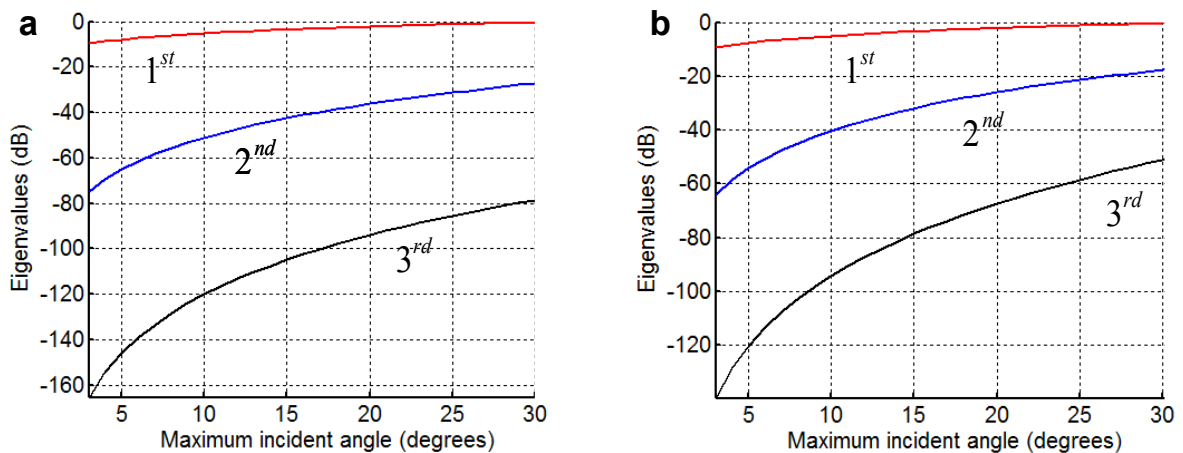
Anche la dipendenza tra i parametri del modello diminuisce rispetto al caso di approssimazione a tre parametri: i termini fuori dalla diagonale principale delle matrici sono trascurabili in entrambi i casi.

Passiamo adesso all'analisi degli autovalori e degli autovettori della matrice  $G$  dello spazio dei modelli.

Studiamo prima il caso dell'inversione a tre parametri (Figura 8.9). Indipendentemente dal rapporto  $V_P/V_S$ , il primo autovalore è quello che contiene pressoché l'intera energia del segnale. Il secondo autovalore è trascurabile per bassi angoli; nonostante questo tenda ad aumentare all'aumentare del range di angoli di incidenza utilizzati, rimane sempre al di sotto del primo di circa 25-30 dB nel caso di fondo mare e di circa 20 dB nel caso di  $V_P/V_S=2$ . Il terzo autovalore presenta sempre valori troppo bassi, in quanto, nella direzione dello spazio dei dati ad esso relativa, il segnale viene praticamente coperto dal rumore.



**Fig. 8.8** Matrici di covarianza unitaria del modello calcolate nel caso di a) fondo mare, con un rapporto  $V_P/V_S \gg 2$  e nel caso di b)  $V_P/V_S=2$ . Entrambe le matrici sono calcolate assumendo l'approssimazione a due parametri. I termini lungo la diagonale principale indicano la varianza calcolata su ogni parametro del modello (a partire dall'alto:  $R_I$  e  $R_J$ ); i termini al di fuori della diagonale principale rappresentano i valori di covarianza tra i due parametri del modello.

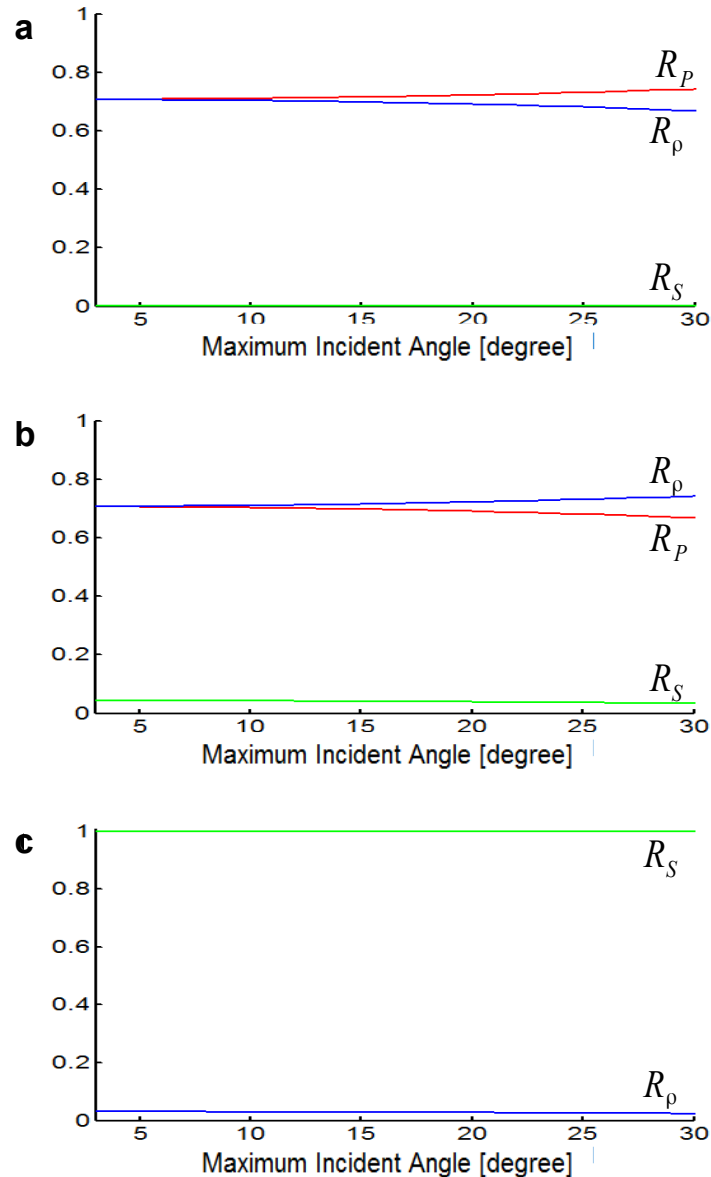


**Fig. 8.9** Autovalori della matrice  $G$  in funzione del massimo angolo di incidenza considerato. Gli autovalori sono stati calcolati nel caso di a)  $V_P/V_S \gg 2$  e nel caso di b)  $V_P/V_S=2$ . Gli autovalori sono misurati in dB ( $20 \log_{10}(s_i)$ ).

Risulta chiaro da questi risultati che, per piccoli angoli, il problema può essere analizzato considerando una sola direzione, quella associata al primo autovalore ed è quindi possibile la stima di una sola combinazione lineare dei parametri del modello (la combinazione corrispondente al primo autovalore). Il problema può essere affrontato come bidimensionale solo ampliando il range di angoli di



incidenza. In questo caso le combinazioni lineari dei parametri del modello che si possono stimare sono due (relative al primo ed al secondo autovalore).



**Fig. 8.10** *Componenti degli autovettori nello spazio del modello in funzione del massimo angolo di incidenza considerato. Questi autovettori sono stati calcolati nel caso di approssimazione a tre parametri e di un rapporto  $V_P/V_S \gg 2$ . In a) è rappresentato il primo autovettore, in b) il secondo autovettore e in c) il terzo.*

L'utilizzo del terzo autovalore, per la stima di tre combinazioni indipendenti dei parametri, porterebbe ad un mal-condizionamento del problema, dati i suoi bassi

valori.

Questo è il motivo per cui si utilizza, nell'operazione di inversione la TSVD con il troncamento del terzo autovalore e dell'autovettore ad esso associato.

Nel caso di fondo mare, quindi, verrà eliminato il terzo autovettore dello spazio del modello. A questo proposito analizziamo gli autovettori nel caso di  $V_P/V_S \gg 2$ . Il primo autovettore è mostrato in Figura 8.10a. Per piccoli angoli, le componenti

$R_P$  e  $R_\rho$  sono uguali, mentre la componente lungo  $R_S$  è nulla. Si può dire che il vettore punta nella direzione dell'impedenza P. Questa risulta infatti la sola che influenza il valore del coefficiente di riflessione per piccoli angoli di incidenza, dato che, per tali angoli, la sensibilità del coefficiente di riflessione alla velocità delle onde S è trascurabile. La componente  $R_S$  diventa significativa ad angoli maggiori. Il secondo autovettore è mostrato in Figura 8.10b; anche questo punta nella direzione dell'impedenza P. Il terzo autovettore, invece, punta verso l'impedenza S; questo è l'autovettore relativo all'autovalore più piccolo, perciò viene eliminato. Da ciò consegue che il parametro del modello  $R_S$  non può essere stimato con accuratezza, nel caso di fondo mare; si può dire che  $R_S$  si trova nello spazio nullo della matrice G, in quanto non influenza la soluzione del problema.

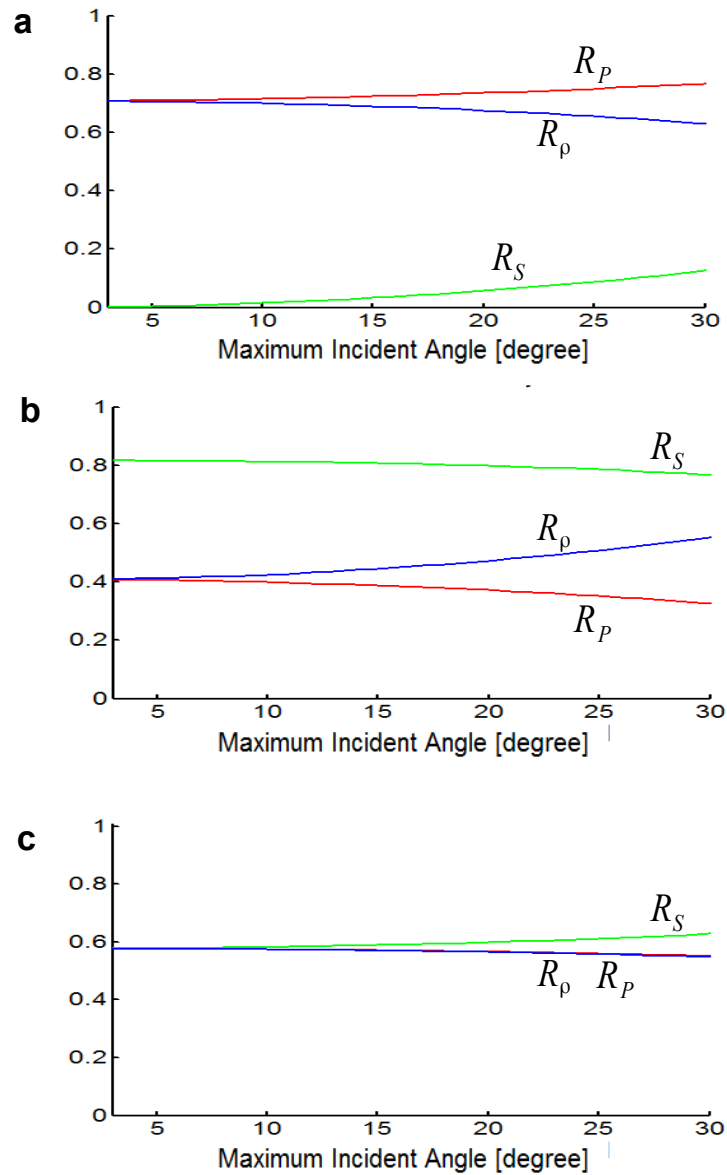
Questa conclusione è ovvia se pensiamo che, per un modello di fondo mare, la riflettività S risulta sempre uguale ad 1, qualsiasi sia il valore di  $V_S$  del fondo mare stesso (vedi Equazione 6.1).

Nel caso di  $V_P/V_S=2$ , gli autovettori dello spazio del modello sono visibili in Figura 8.11.

Il primo autovettore (Figura 8.11a), mostra, per piccoli angoli, uguali componenti su  $R_P$  e  $R_\rho$  e componente nulla lungo  $R_S$ . Aumentando il range di angoli di incidenza, la componente su  $R_S$  aumenta. Il primo autovettore punta comunque verso l'impedenza P. Il secondo autovettore mostra, invece, una diminuzione della componente relativa alla riflettività P. Tale vettore punta preferenzialmente quindi verso l'impedenza S. Il terzo autovettore viene 'tagliato' perché relativo all'autovalore più piccolo.

Passiamo ora all'analisi degli autovalori e degli autovettori calcolati esaminando il

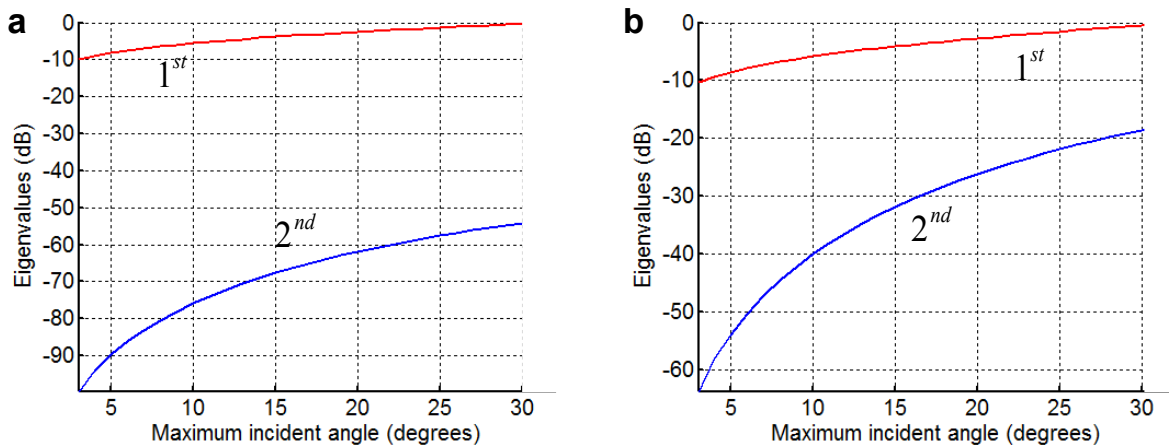
caso di approssimazione a due parametri.  
 Gli autovalori sono mostrati in Figura 8.12.



**Fig. 8.11** Componenti degli autovettori nello spazio del modello in funzione del massimo angolo di incidenza considerato. Questi autovettori sono stati calcolati nel caso di approssimazione a tre parametri e di un rapporto  $V_P/V_S=2$ . In a) è rappresentato il primo autovettore, in b) il secondo autovettore e in c) il terzo.

Esaminando i due casi, Figura 8.12a e Figura 8.12b, si evince che il primo autovalore contiene la maggior parte dell'energia del segnale indipendentemente dal rapporto  $V_P/V_S$  considerato. Il secondo autovalore rimane sempre più basso del primo:

- nel caso di fondo mare il secondo autovalore rimane sempre al di sotto di -50 dB. Essendo questo un valore troppo basso, al fine di stabilizzare il processo di inversione sarà opportuno eliminare tale autovalore;
- il modello con rapporto  $V_P/V_S=2$  presenta un secondo autovalore più grande rispetto al caso precedente; infatti, considerando un angolo di incidenza massimo di  $30^\circ$ , questo raggiunge un valore intorno a -20 dB. E' importante osservare che l'ordine di grandezza di questo autovalore è confrontabile con il secondo autovalore dell'inversione a tre parametri; pertanto andando ad eliminare tale autovalore mediante troncamento con il metodo TSVD, si perde in qualità del risultato in quanto si va ad eliminare una importante quantità di dato ed il risultato dipenderà da una sola combinazione lineare dei parametri del modello, come si vedrà successivamente;

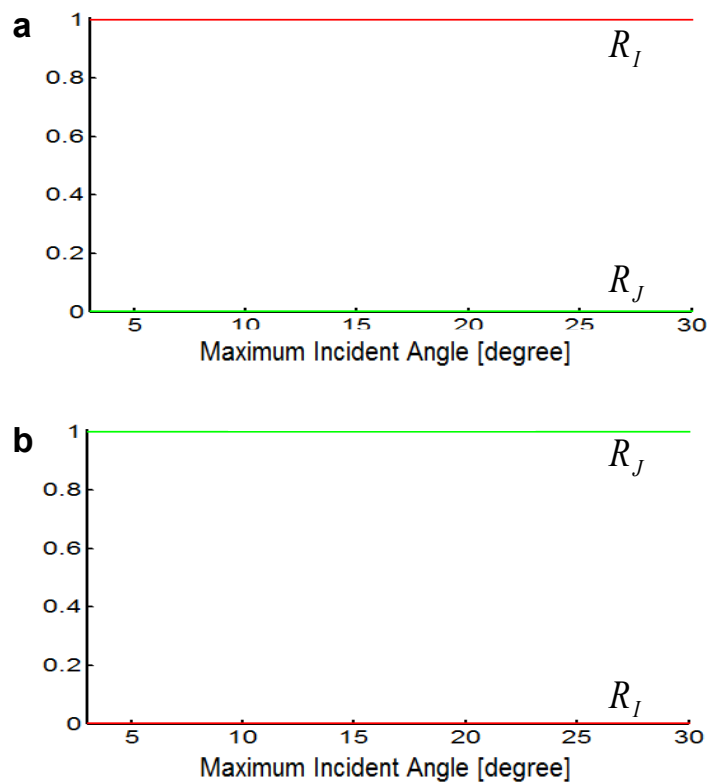


**Fig. 8.12** Autovalori della matrice  $G$  in funzione del massimo angolo di incidenza, misurati in dB. Gli autovalori sono stati calcolati nel caso di a)  $V_P/V_S \gg 2$  e b)  $V_P/V_S = 2$ , considerando un' inversione a due parametri.

Esaminiamo ora gli autovettori associati a tali autovalori.

Gli autovettori del caso  $V_P/V_S \gg 2$  sono visibili in Figura 8.13.

Il primo autovettore presenta una componente pari a uno su  $R_I$  e una componente nulla su  $R_J$ , indipendentemente dal massimo angolo di incidenza considerato. Ciò significa che il primo autovettore giace esattamente sulla direzione dell'impedenza P. Il secondo autovettore presenta, al contrario, una componente pari a uno su  $R_J$  e una componente nulla su  $R_I$ . Tale autovettore, relativo all'autovalore più basso, non verrà considerato nell'operazione di inversione mediante il metodo TSVD. Dall'esame degli autovettori si deduce che, nel caso di fondo mare, sarà possibile solo una stima dell'impedenza P, mentre non sarà possibile una buona stima dell'impedenza S.



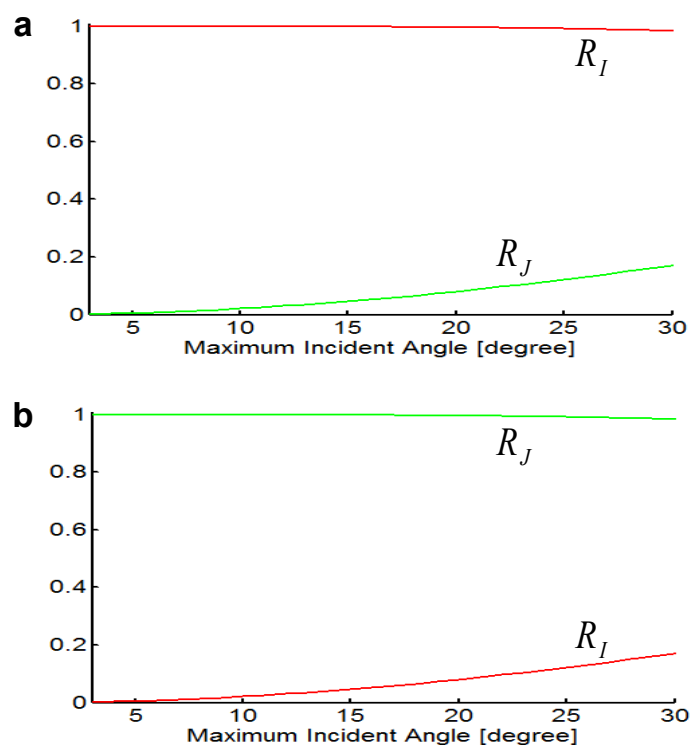
**Fig. 8.13** Componenti degli autovettori nello spazio del modello in funzione del massimo angolo di incidenza considerato. Questi autovettori sono stati calcolati nel caso di approssimazione a due parametri e di un rapporto  $V_P/V_S \gg 2$ . In a) è rappresentato il primo autovettore e in b) il secondo autovettore.

La Figura 8.14 mostra gli autovettori relativi al caso  $V_P/V_S=2$ . Anche in questo caso, il primo autovettore punta verso l'impedenza P, anche se, diversamente dal caso di fondo mare, considerando un angolo di incidenza massimo di  $30^\circ$ , la componente dell'autovettore su  $R_J$  non è più nulla, ma assume un valore di 0.2. Il secondo autovettore punta verso l'impedenza S; tale autovettore è quello associato all'autovalore più basso.

Esaminiamo ora i risultati dell'inversione dei dati analitici attraverso il Metodo TSVD.

Invertendo i dati analitici utilizzando il modello di fondo mare e l'approssimazione a tre parametri, si ottengono i risultati mostrati in Tabella 8.3.

Si ha una pessima stima della velocità delle onde S,  $V_S$  e una buona stima delle velocità delle onde P,  $V_P$  e della densità,  $\rho$ .



**Fig. 8.14** Componenti degli autovettori nello spazio del modello in funzione del massimo angolo di incidenza considerato. Questi autovettori sono stati calcolati nel caso di approssimazione a due parametri e di un rapporto  $V_P/V_S=2$ . In a) è rappresentato il primo autovettore e in b) il secondo autovettore.

modello reale		modello stimato	
RP	0.0625	RP	0.0417
RS	1.0000	RS	0.0049
Rp	0.2308	Rp	0.2496
VP1 = 1500 m/s	VP2 = 1700 m/s	VP1=1500 m/s	VP2 =1660 m/s
VS1 = 0 m/s	VP2 = 200 m/s	VS1 = 0 m/s	VS2 = 0 m/s
$\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$	$\rho_2 = 1.6 \text{ g/cm}^3$	$\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$	$\rho_2 = 1.7 \text{ g/cm}^3$

**Tabella 8.3** Risultati dell'inversione a tre parametri, eseguita sul modello di fondo mare con  $V_P/V_S \gg 2$ . In celeste sono mostrati i dati relativi al modello reale; in giallo i dati relativi al modello stimato.

Dalla 'sensitivity analysis' infatti ci si aspettava una buona risoluzione di tali parametri (Figura 8.5a), nonostante che questi siano i parametri in cui si va preferenzialmente a mappare il rumore, come si evince dalla lettura della matrice di covarianza (Figura 8.7a).

Per questo motivo i valori di  $V_P$  e  $\rho$  stimati si avvicinano ai valori reali seppur con bassa precisione.

L'incapacità di stimare la  $V_S$  deriva anche dall'analisi degli autovettori (Figura 8.10): in questo caso il terzo autovettore viene 'troncato', mentre, sia il primo che il secondo autovettore, utilizzati nell'operazione di inversione, puntano verso l'impedenza  $P$ . In altre parole si può dire che la riflettività  $S$ ,  $R_S$  appartiene allo spazio nullo della matrice  $G$ , in quanto qualsiasi sia il valore di  $V_S$  assegnato ai sedimenti di fondo mare, la  $R_S$  rimarrà sempre uguale ad 1; quindi tale parametro non influenza la soluzione del problema.

L'inversione degli stessi dati analitici di fondo mare, si stabilizza applicando il Metodo TSVD all'approssimazione a due parametri,  $R_I$  e  $R_J$  (Tabella 8.4).

Come previsto dalla 'sensitivity analysis' si ha una buona risoluzione nella stima di  $R_I$  (Figura 8.6a), e come atteso non di  $R_J$ . Il fatto che  $R_I$  venga stimato con ottima approssimazione rispetto a  $R_P$ , nel caso di inversione a tre

parametri, è previsto dal basso valore di varianza relativo a  $R_I$  nella matrice di covarianza (Figura 8.8a), pari a 0.025, contro una varianza pari a 2.5 associata a  $R_P$  nel caso precedente.

modello reale	modello stimato
R <sub>I</sub> 0.2891	R <sub>I</sub> 0.2788
R <sub>J</sub> 1.0000	R <sub>J</sub> -0.0007

**Tabella 8.4** Risultati dell'inversione a due parametri eseguita sul modello con  $V_P/V_S \gg 2$ . In celeste sono mostrati i dati relativi al modello reale; in giallo i dati relativi al modello stimato.

Dall'analisi degli autovettori dello spazio dei modelli è prevedibile una migliore stima di  $R_I$  rispetto a  $R_J$ ; infatti il primo autovettore punta verso l'impedenza P e la sua componente verso l'impedenza S è nulla.

Esaminiamo ora l'inversione dei dati analitici calcolati per il modello caratterizzato da un rapporto  $V_P/V_S=2$ .

Analizziamo prima l'inversione a tre parametri (Tabella 8.5).

In questo caso si ha una buona stima di tutti e tre i parametri del modello. Ciò rispecchia l'informazione estratta dalla matrice di risoluzione (Figura 8.7b) e dallo studio degli autovettori (Figura 8.11); il primo ed il secondo autovettore, utilizzati nell'inversione, puntano rispettivamente verso l'impedenza P e verso l'impedenza S.

Applicando l'inversione a due parametri, si ottengono i risultati visibili in Tabella 8.6: una buona stima di  $R_I$  contrariamente alla stima di  $R_J$ . La matrice di risoluzione prevede una perfetta accuratezza nella stima di  $R_I$ . In pratica però l'errore di predizione con cui viene stimato  $R_I$  non è uguale a zero; ciò si spiega analizzando la matrice di covarianza, che prevede una maggiore varianza su tale parametro piuttosto che su  $R_J$ .



modello reale		modello stimato	
RP	0.0625	RP	0.0357
RS	0.0625	RS	0.0335
Rp	0.0476	Rp	0.0744
VP1 = 3000 m/s	VP2 = 3400 m/s	VP1 = 3000 m/s	VP2 = 3220 m/s
VS1 = 1500 m/s	VP2 = 1700 m/s	VS1 = 1500 m/s	VS2 = 1630 m/s
$\rho_1 = 2 \text{ g/cm}^3$	$\rho_2 = 2.2 \text{ g/cm}^3$	$\rho_1 = 2 \text{ g/cm}^3$	$\rho_2 = 2.3 \text{ g/cm}^3$

**Tabella 8.5** Risultati dell'inversione a tre parametri, eseguito sul modello con rapporto  $V_P/V_S=2$ . In celeste sono mostrati i dati relativi al modello reale; in giallo i dati relativi al modello stimato.

modello reale	modello stimato
Ri 0.1098	Ri 0.0878
Rj 0.1098	Rj -0.0152

**Tabella 8.6** Risultati ottenuti dall'inversione a due parametri del modello con  $V_P/V_S=2$ . In celeste sono mostrati i dati relativi al modello reale; in giallo quelli relativi al modello stimato.

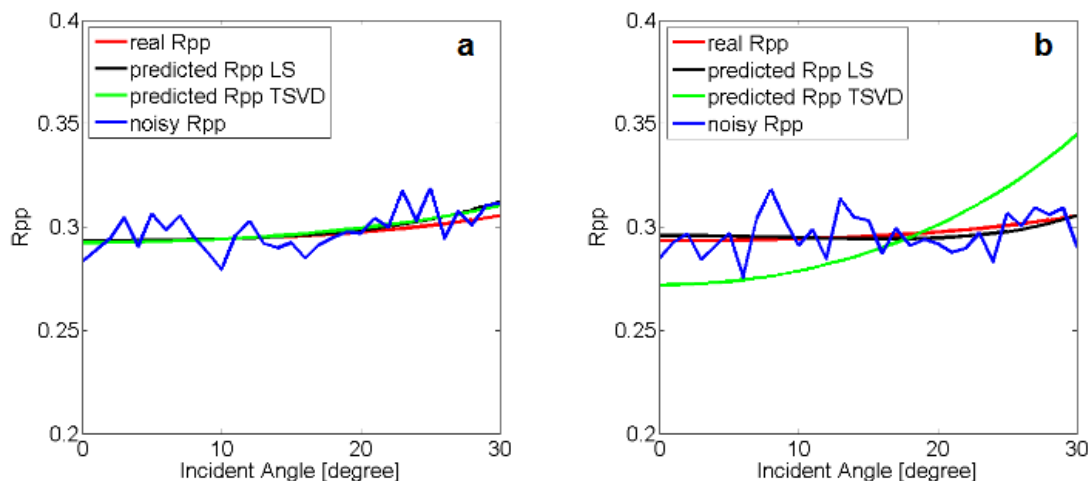
La stima di  $R_j$  è pessima e questo è spiegabile osservando, oltre alla matrice di risoluzione (Figura 8.6b), che prevede una risoluzione nulla su tale parametro, anche dall'analisi degli autovettori (Figura 8.14). Il primo autovettore infatti punta verso l'impedenza P, mentre il secondo, che presenta un'alta componente su  $R_j$  viene 'troncato' nel processo di inversione. A questo proposito è utile confrontare questo risultato con il risultato di inversione dello stesso modello attraverso il Metodo dei Minimi Quadrati (Tabella 8.2). In tal caso si ha una miglior stima dei parametri del modello. Ciò risulta chiaro andando ad analizzare gli autovalori relativi a tale esperimento in Figura 8.12: il secondo autovalore, considerando un angolo di incidenza massimo pari a  $30^\circ$ , assume un valore maggiore a -20 dB e quindi utilizzabile nel processo di inversione senza introdurre importanti effetti di instabilità. Nel momento in cui si utilizza la TSVD, tale autovalore viene eliminato e, con questo, anche il relativo autovettore, andando in questo modo ad eliminare una importante parte di informazione, trascurata nel

processo di inversione.

Andiamo adesso a confrontare l'andamento del coefficiente di riflessione reale, cioè calcolato inserendo nelle Equazioni di Aki e Richards i parametri reali del modello considerato, e il coefficiente di riflessione calcolato utilizzando i parametri del modello stimati, sia nel caso di inversione a tre parametri che nel caso di inversione a due parametri, nel modello di fondo mare (Figura 8.15) e nel modello caratterizzato da un rapporto  $V_P/V_S=2$  (Figura 8.16).

Analizzando il modello di fondo mare (Figura 8.15) si osserva che, nel caso di inversione a tre incognite, i coefficienti di riflessione predetti seguono piuttosto bene l'andamento del coefficiente di riflessione reale, indipendentemente dal tipo di metodo usato nel processo di inversione.

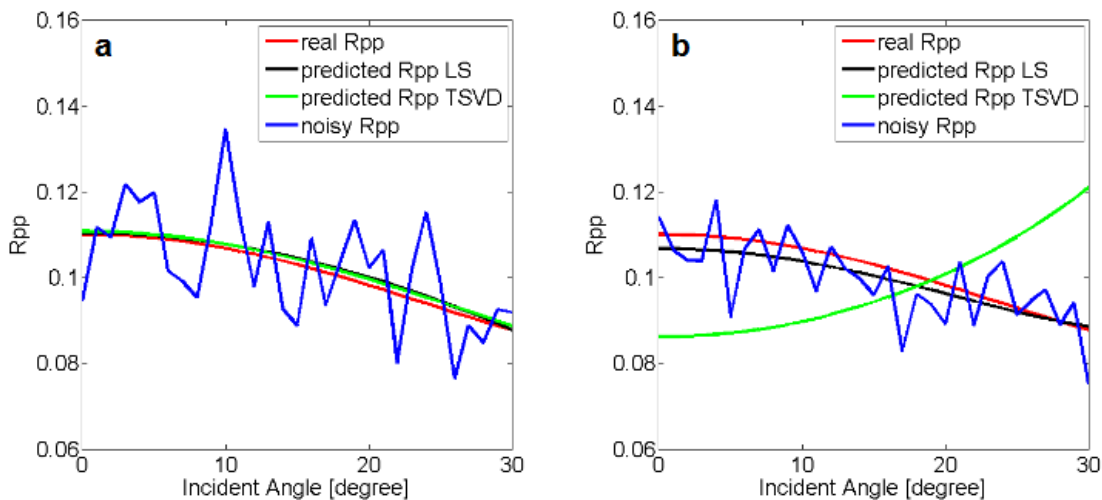
Utilizzando l'inversione a due parametri, invece, si riscontra un'importante discrepanza tra l'andamento del coefficiente di riflessione predetto attraverso il metodo TSVD e quello predetto utilizzando il metodo dei minimi quadrati. In particolare sembra che quest'ultimo segua meglio l'andamento del coefficiente di riflessione reale.



**Fig. 8.15** *Andamenti dei coefficienti di riflessione reale (rosso), con aggiunta di rumore random (blu), predetto con il metodo dei Minimi Quadrati (nero) e predetto con il Metodo TSVD (verde), in funzione dell'angolo di incidenza. Nell'immagine a) è mostrato il caso di inversione a tre parametri, mentre nel caso b) di inversione a due parametri, considerando sempre il modello di fondo mare.*

Queste osservazioni sembrerebbero contraddire ciò che è stato detto precedentemente a proposito dei risultati dell'inversione nel caso di fondo mare, in cui si ottengono migliori risultati applicando il metodo TSVD, indipendentemente dalla parametrizzazione del problema. In realtà questo comportamento è spiegabile pensando che, soprattutto nel caso di inversione a due parametri, l'impiego della TSVD, comporta sempre una importante perdita di informazione ed in particolare si va ad eliminare quella parte di dato che restituisce l'informazione sul gradiente del coefficiente di riflessione.

Si può quindi concludere che l'utilizzo della TSVD comporta, nel caso di modelli di fondo mare, una stabilizzazione del processo di inversione con l'ottenimento di risultati migliori rispetto all'inversione con i minimi quadrati, ma porta anche una perdita di dato a cui segue un peggiore fitting del dato reale con il dato predetto.



**Fig. 8.16.** *Andamenti dei coefficienti di riflessione reale (rosso), con aggiunta di rumore random (blu), predetto con il Metodo dei Minimi Quadrati (nero) e predetto con il Metodo TSVD (verde), in funzione dell'angolo di incidenza. Nell'immagine a) è mostrato il caso di inversione a tre parametri, mentre nel caso b) di inversione a due parametri, considerando sempre il modello caratterizzato da un rapporto  $V_P/V_S=2$ .*

Passiamo al modello con rapporto  $V_P/V_S=2$ . Anche in questo caso andiamo a visualizzare gli andamenti dei coefficienti di riflessione reale e predetti invertendo i dati con i diversi metodi (Figura 8.16). Come visto per il modello di fondo mare, i

coefficienti di riflessione predetti nel caso di parametrizzazione del problema in tre incognite, fittano bene l'andamento del coefficiente di riflessione reale. Nel caso di parametrizzazione del problema in due incognite, invece, si osserva una buona corrispondenza tra l'andamento di  $R_{pp}$  predetto con il metodo dei minimi quadrati e quello reale; il trend di  $R_{pp}$  predetto con metodo TSVD è discordante con quello reale, infatti presenta un andamento crescente all'aumentare dell'angolo di incidenza contrario a quello del coefficiente di riflessione reale che disegna un trend decrescente. Questo comportamento è prevedibile, se pensiamo che, nel caso di inversione a due parametri, si va ad eliminare il secondo autovalore e il rispettivo autovettore, cioè quello relativo al parametro  $R_J$ . Come visto precedentemente in Tabella 8.4 questo comporta l'ottenimento di un valore negativo per il parametro  $R_J$ . Ricordando l'equazione di Ursenbach e Stewart (2001):

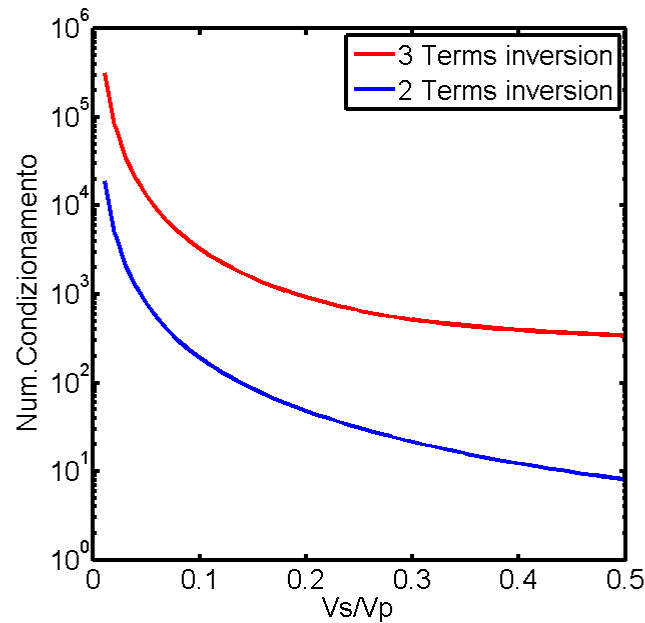
$$R_{pp}(\theta) = \left(1 + \frac{4 \gamma^2 \cos^2 \theta - 1}{5} \sin^2 \theta\right) \frac{R_I}{\cos^2 \theta} - 8 \gamma^2 \sin^2 \theta R_J$$

si osserva che, eliminando l'informazione relativa al contrasto di impedenza  $S$ ,  $R_J$  si perde la possibilità di modellare andamenti del coefficiente di riflessione decrescenti in funzione dell'angolo di incidenza.

In ultimo è stato calcolato il trend del numero di condizionamento in funzione del rapporto  $V_s/V_p$ , per avere una misura di stabilità del processo di inversione (Figura 8.17).

E' stato calcolato il numero di condizionamento per l'inversione a tre e a due parametri; in entrambi i casi risulta una stabilizzazione di tale processo all'aumentare del rapporto  $V_s/V_p$  (spostandosi da un rapporto  $V_s/V_p \gg 2$  a  $V_s/V_p=2$ ).

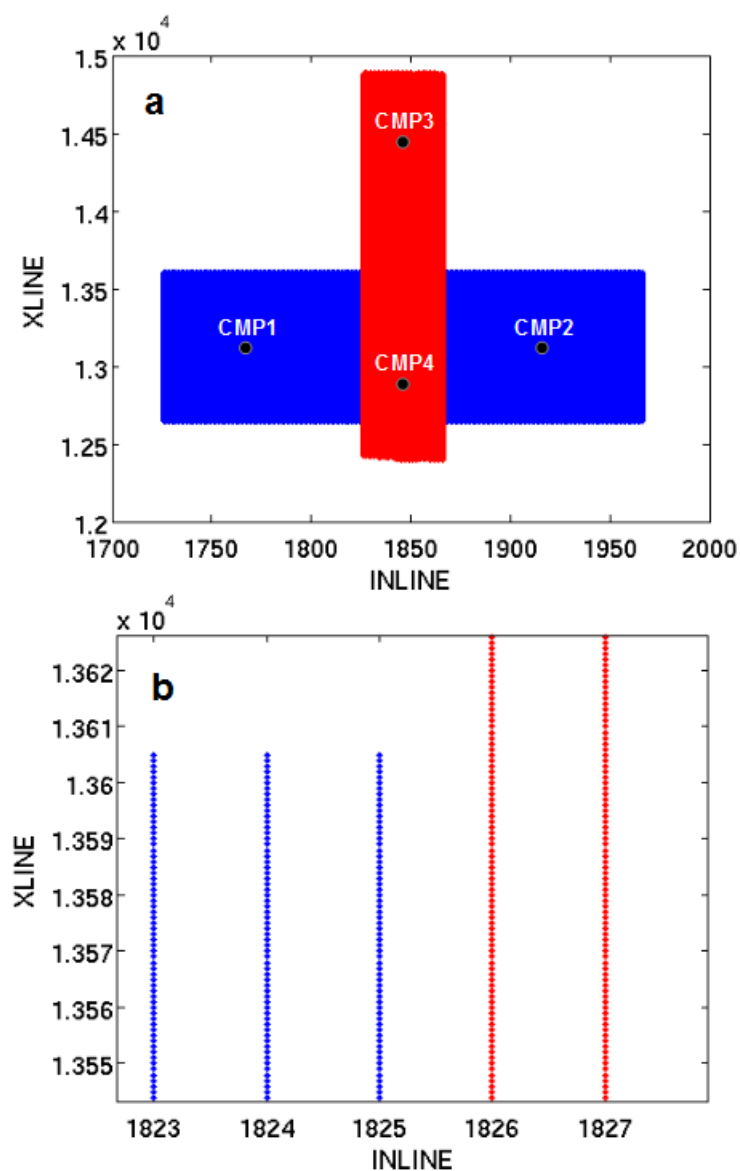
Si osserva che anche nel caso di inversione a due parametri ma con basso rapporto  $V_s/V_p$  il numero di condizionamento non è sufficientemente basso da garantire stabilità nel processo di inversione.



**Fig. 8.17** *Andamento del numero di condizionamento in funzione del rapporto  $V_P/V_S$ , calcolato nel caso di inversione a tre parametri (linea rossa) e a due parametri (linea blu).*

Queste osservazioni si rispecchiano anche nei risultati di inversione appena esaminati: in termini di stabilità, nel caso di fondo mare l'applicazione del metodo TSVD sembra necessaria nel caso di parametrizzazione a due e tre incognite. Al contrario nel caso di  $V_p/V_s=2$  la TSVD appare necessaria solo nel caso di inversione a tre incognite.

## 9 Inversione AVA su dati reali



**Fig. 9.1** a) Disposizione dei due set di dati relativi all'acquisizione 3D in studio; sono mostrate le posizioni dei 4 CMP utilizzati per l'analisi AVA; b) particolare della disposizione dei CMP: ogni punto corrisponde ad un CMP.

In questo capitolo si andrà ad applicare l'analisi AVA a dati reali 3D acquisiti nell'offshore del Mozambico dalla Società ENI S.p.A., e verranno eseguite delle prove di inversione su tali dati con alcuni dei metodi descritti precedentemente.

Il dato in esame è costituito da due set di dati riferiti a due parti diverse dello stesso rilievo 3D . La Figura 9.1 illustra la disposizione dei CMP, ricavata dal plot delle coordinate 'inline' e 'xline' di ogni dato. Le tracce sono state acquisite con un intervallo di campionamento temporale di 2 ms e sono costituite da 2501 campioni temporali per ogni singola traccia e processate da ENI in controllo di ampiezza per garantire un'affidabile estrazione dell'informazione di ampiezza stessa.

L'area di acquisizione è caratterizzata da una profondità del fondale marino variabile tra 2100 m e 2200 m circa. Dal momento che il dato a disposizione presenta un offset minimo di circa 250 m e un offset massimo intorno a 3000 m, è chiaro che si potrà effettuare su tale dato soltanto un'analisi AVA short offset, in quanto l'angolo di incidenza massimo raggiunge circa i 35°.

Il primo passo di questo lavoro è stata l'individuazione di 4 diverse zone corrispondenti ad altrettanti CMP sui quali eseguire l'inversione AVA. La distribuzione delle zone selezionate permette l'estrazione delle informazioni di velocità e densità su una buona porzione dell'intero dataset, fornendo una visione d'insieme su tutta l'area in studio. Le operazioni svolte al fine di estrarre i dati sono state eseguite interamente tramite il software ProMAX.

La disposizione dei CMP selezionati è visibile in Figura 9.1; in particolare sono stati studiati due CMP per ogni set di dati (Figure 9.2 e 9.3). Al fine di aumentare il rapporto S/N (segnale/rumore) si è scelto di creare un supergather intorno ad ogni CMP, operando la media delle tracce con uguale offset estratte da 9 CMP adiacenti, supponendo pertanto che le proprietà del fondale rimangano pressoché costanti all'interno di questo piccolo range.

A questo punto, dopo aver convertito i files segy in file leggibili dal software Matlab, si va ad estrarre l'informazione AVA dai supergather seguendo la procedura analizzata nel capitolo 7.

Al fine di ricostruire l'andamento del coefficiente di riflessione in funzione dell'angolo di incidenza, è necessaria la conoscenza dell'ondina sorgente, da utilizzare come fattore di normalizzazione dell'ampiezza riflessa sul fondo mare. Quest'ultima operazione non è stata trattata precedentemente, in quanto, studiando dati sintetici la forma d'onda è conosciuta, ma si rende necessaria nel caso di studio di dati reali.

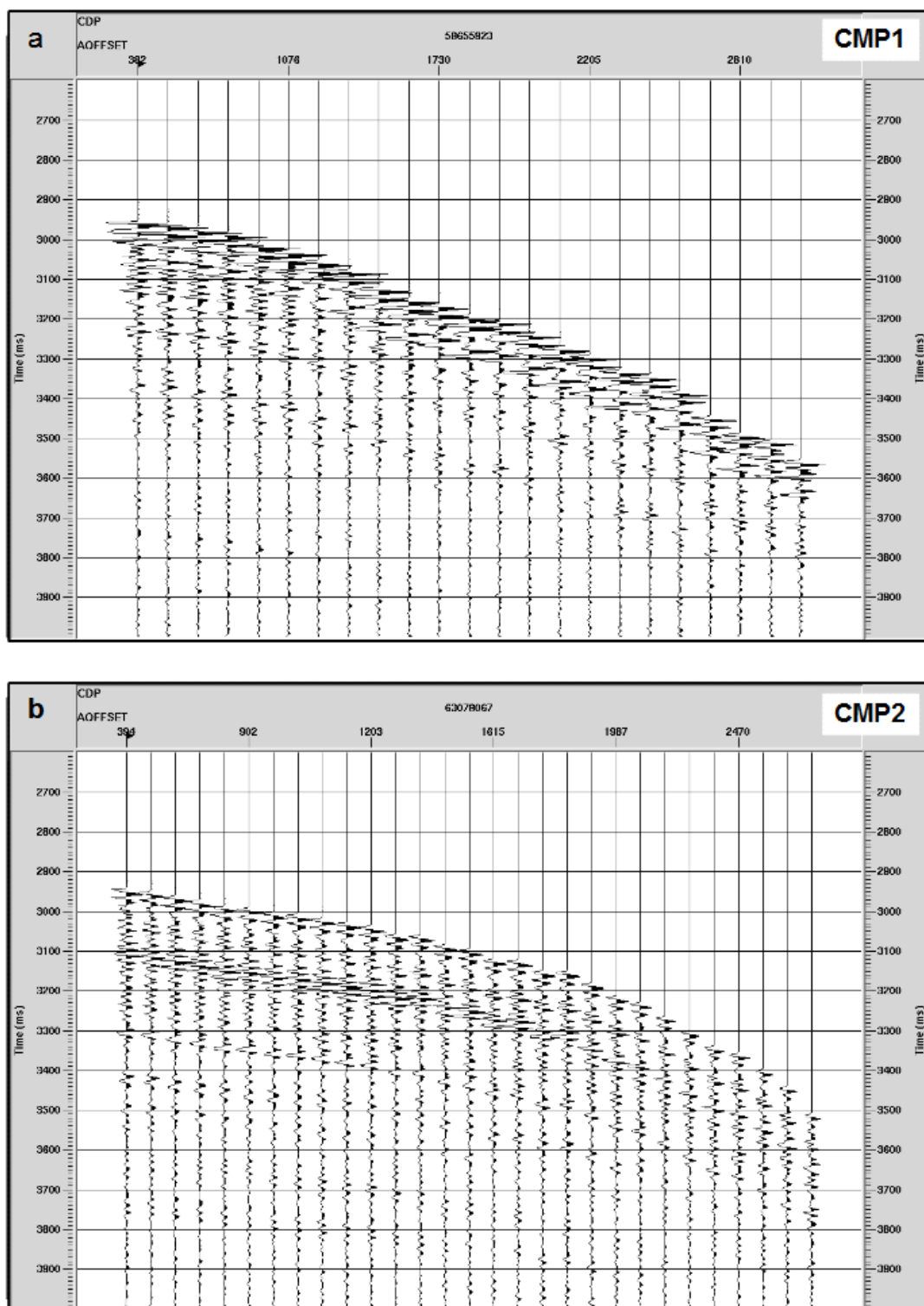


Fig. 9.2 Visualizzazione del a) CMP1 e del b) CMP2.



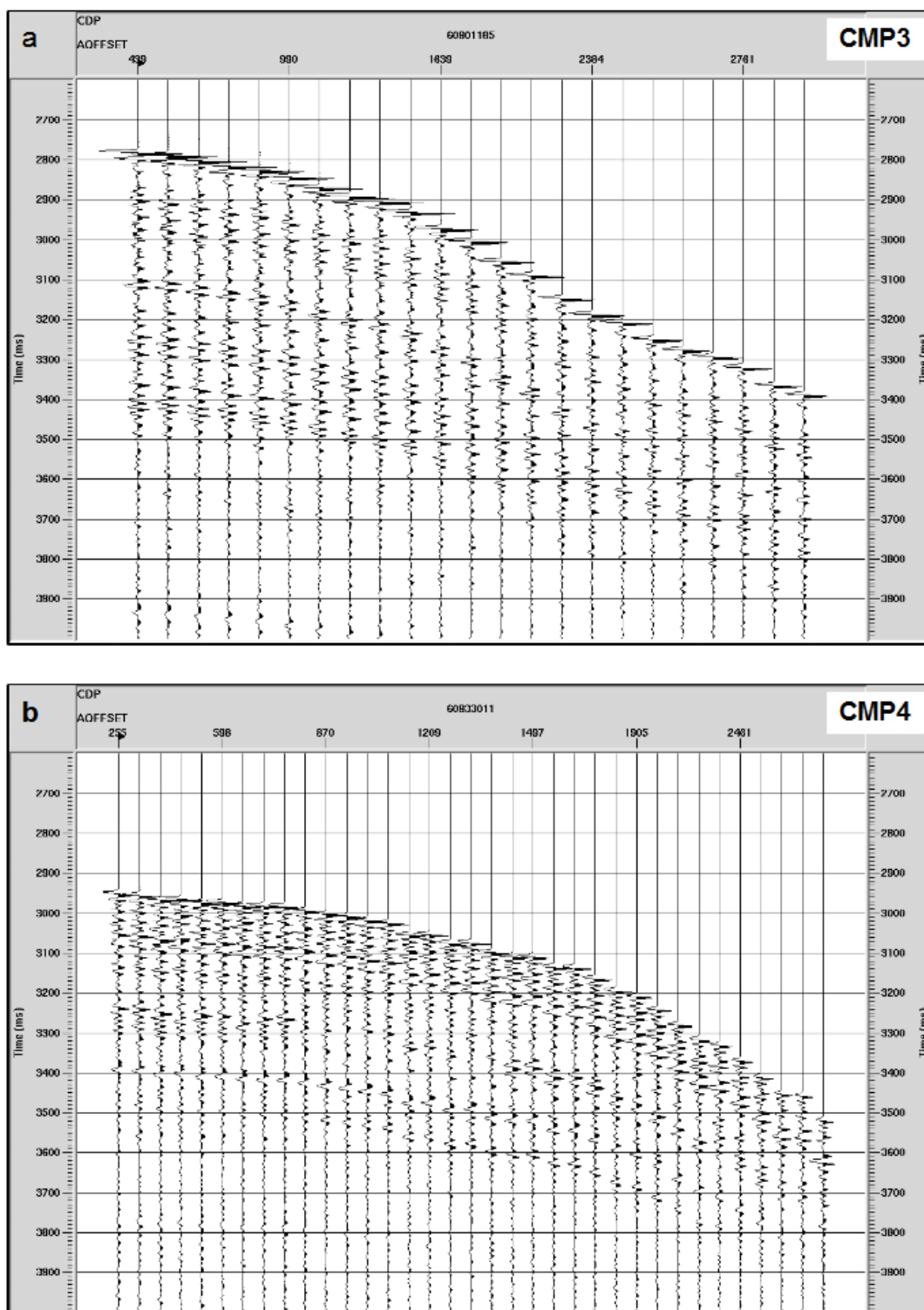
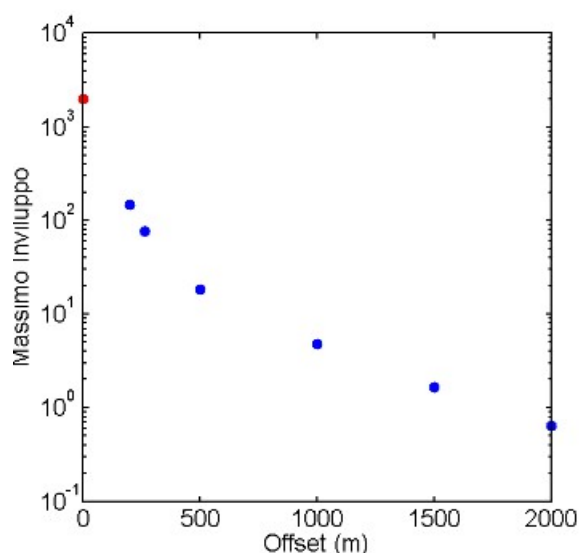


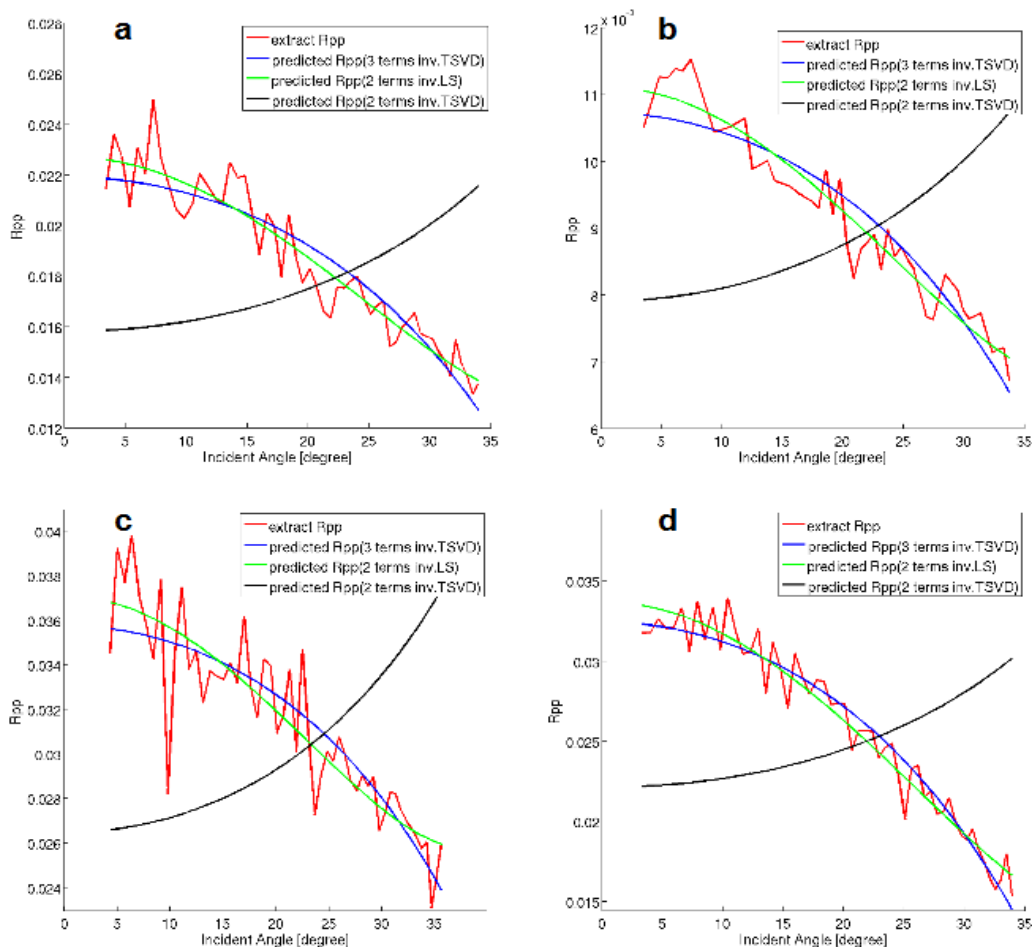
Fig. 9.3 Visualizzazione del a) CMP3 e del b) CMP4.

Per stimare la forma d'onda che meglio approssima l'impulso sorgente si utilizza la tecnica SVD, abbondantemente trattata nella sezione 5.2.2.

Tale metodo è stato applicato agli arrivi diretti e permette di ottenere la componente più coerente del segnale analizzato, separandola dal rumore e dalle eventuali interferenze con altri eventi. In particolare tale operazione è stata condotta su diversi Common Offset. Per ogni Common Offset si va ad estrarre la finestra di stima, contenente gli arrivi diretti; i dati contenuti in questa finestra costituiscono la matrice  $D$  a cui verrà applicata la Decomposizione ai Valori Singolari. Essa ha dimensioni  $N \times M$ , in cui  $N$  è la lunghezza temporale della finestra di stima mentre  $M$  è il numero di tracce in cui viene registrato l'evento considerato. Una volta fatta questa operazione si procede a fattorizzare la matrice  $D$  nelle matrici  $U, S$  e  $V$  tramite la SVD. Considerando solo il primo autovalore, ovvero quello con maggior contenuto energetico, si ricalcola il segnale, eliminando così il rumore in esso contenuto. Una volta ottenuta la nuova matrice  $D$  si procede calcolando l'involuppo del segnale così ottenuto, per ogni traccia, attraverso la Trasformata di Hilbert. Per ricavare la forma d'onda desiderata si esegue la media di tali tracce estraendo infine il massimo dell'involuppo.



**Fig. 9.4** Decadimento dell'ondina in funzione dell'offset, rappresentato in scala semilogaritmica. In blu sono mostrati i valori di ampiezza dell'ondina estratta attraverso il metodo SVD sugli arrivi diretti su sei Common Offset; in rosso è mostrato l'ipotetico valore di ampiezza dell'ondina a zero offset, ricavato interpolando l'andamento del decadimento dell'ondina ad offset maggiori.



**Fig. 9.5** Andamenti dei coefficienti di riflessione estratti (linea rossa), predetti attraverso l'inversione a tre termini con il metodo TSVD (linea blu), predetti attraverso l'inversione a due termini con il metodo dei minimi quadrati (linea verde) e con il metodo TSVD (linea nera). Sono visibili i risultati relativi al a) CMP ottenuto mediando i supergather estratti intorno al CMP1, b) i supergather estratti intorno al CMP2, c) i supergather estratti intorno al CMP3 e d) i supergather estratti intorno al CMP4.

Procedendo in tale modo per ogni Common Offset si va a ricostruire il decadimento dell'ondina sorgente rispetto alla distanza sorgente-ricevitore che servirà come riferimento per ricavare l'ampiezza dell'ondina ad offset nullo da utilizzare per scalare i valori delle tracce sismiche ai coefficienti di riflessione. Tale funzione di decadimento è mostrata in Figura 9.4: i punti blu indicano i valori del massimo di ampiezza dell'involuppo dell'ondina ricavata con il metodo TSVD su sei diversi Common Offset, mentre il punto rosso indica il valore atteso di ampiezza ad offset nullo. Il dato estratto è stato invertito utilizzando tre dei metodi visti

precedentemente: il metodo TSVD nell'inversione a tre e a due parametri e il metodo dei Minimi Quadrati nell'inversione a due parametri.

In Figura 9.5 sono mostrati i vari andamenti del coefficiente di riflessione estratti dai quattro CMP, risultanti dopo l'operazione di media all'internodelle famiglie supergathers, i quali vengono confrontati con i coefficienti di riflessione predetti utilizzando i diversi metodi di inversione.

Il trend e la scala dei valori del coefficiente di riflessione estratto è simile nei diversi casi e mostra un andamento decrescente con l'angolo di incidenza. Lo stesso si può dire per i coefficienti di riflessione predetti, i quali mantengono prevalentemente lo stesso andamento nei diversi CMP, indipendentemente dal metodo di inversione applicato. Come aspettato da quanto detto nel Capitolo 8, l'inversione a due parametri con il metodo dei Minimi Quadrati e l'inversione a tre parametri con il metodo TSVD riescono a modellare l'andamento del coefficiente di riflessione estratto con buona approssimazione.

	TSVD 3 parametri			LS 2 parametri		TSVD 2 parametri	
<b>CMP1</b>	VP=1440	Vs=n.d.	$\rho=1,1$	IP=1548	Is=n.d.	IP=1610.1	Is=n.d.
<b>CMP2</b>	VP=1496	Vs=n.d.	$\rho=1,02$	IP=1534,9	Is=n.d.	IP=1529.1	Is=n.d.
<b>CMP3</b>	VP=1493	Vs=n.d.	$\rho=1$	IP=1592,9	Is=n.d.	IP=1507.2	Is=n.d.
<b>CMP4</b>	VP=1387	Vs=n.d.	$\rho=1,2$	IP=1604	Is=n.d.	IP=1610	Is=n.d.

**Tabella 9.1** La tabella mostra i diversi risultati di inversione dei dati reali, ottenuti applicando diversi metodi di inversione: TSVD con parametrizzazione a tre incognite, Minimi Quadrati con parametrizzazione a due incognite e TSVD a due incognite, sul CMP2. I risultati mostrati si riferiscono al fondo mare. I valori dei vari parametri sono riportati nelle seguenti unità di misura: VP in m/s,  $\rho$  in g/cm<sup>3</sup>, IP in m/s\*g/cm<sup>3</sup>; n.d.= non determinabile.

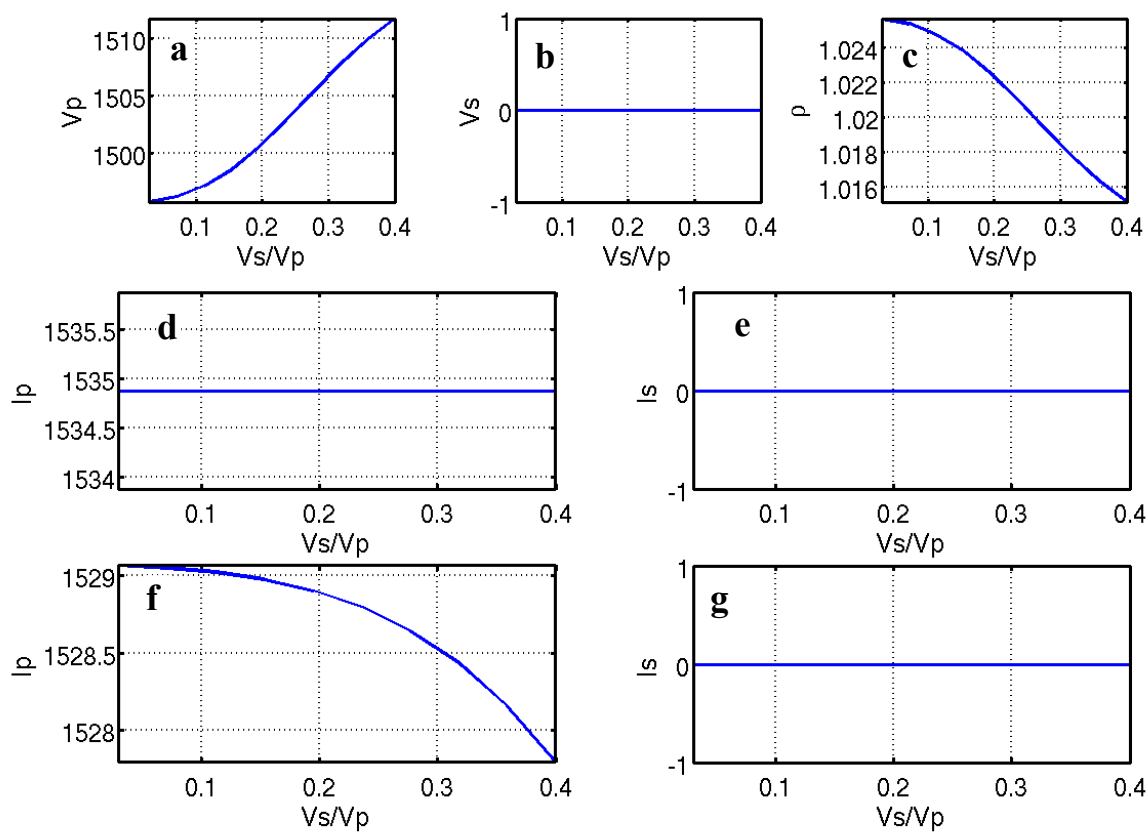
Al contrario, il trend di Rpp predetto con il metodo TSVD nell'inversione a due parametri, segue un andamento crescente con l'angolo di incidenza, opposto a quello di Rpp estratto, dato dalla perdita dell'informazione sul gradiente.

La Tabella 9.1 mostra i risultati ottenuti dall'inversione dei dati reali applicando i diversi metodi di inversione: non si riscontrano significative differenze tra i risultati

dell'inversione nei quattro CMP analizzati; inoltre l'utilizzo dei diversi metodi nel processo di inversione non comporta importanti variazioni nella stima dei parametri del modello. In particolare, si ottengono valori di  $V_P$ , compresi tra 1387 m/s e 1496 m/s e di  $\rho$ , compresi tra 1 g/cm<sup>3</sup> e 1,2 g/cm<sup>3</sup>. Tali valori sono fisicamente possibili supponendo un fondale marino costituito da sedimenti sciolti, completamente saturi in acqua e quindi con un modulo di volume molto basso, paragonabile a quello dell'acqua. In termini di impedenza acustica si ottengono valori di  $I_P$  compresi tra 1507,2 m/s\*g/cm<sup>3</sup> e 1610,1 m/s\*g/cm<sup>3</sup>. In ogni caso risulta impossibile acquisire informazioni riguardanti la velocità delle onde di taglio. Ciò è attribuibile sia all'impossibilità di stimare  $R_s$  e  $R_j$  sul fondale marino dato il loro costante valore uguale a 1 per qualunque valore di  $V_s$  assegnato al fondo mare, che all'utilizzo di un limitato range di angoli di incidenza (0°- 30°), che rende trascurabile il contributo di  $V_s$  sul coefficiente di riflessione (come dimostrato nel Capitolo 4).

Nel processo di inversione è stato utilizzato un rapporto  $V_s/V_P=0,06$  (ovvero un rapporto  $V_P/V_s=16$ ), attribuendo al fondale valori di  $V_P$  e  $V_s$  plausibili, rispettivamente 1700 m/s e 200 m/s. Successivamente è stato fatto un test per valutare l'influenza del rapporto  $V_s/V_P$  sulla stima dei vari parametri. I risultati di tale test sono visibili in Figura 9.6, la quale mostra l'andamento dei vari parametri in funzione del rapporto  $V_s/V_P$ , calcolato per i diversi metodi di inversione applicati al dato reale. In particolare in figura è mostrato il caso del CMP2, ma si ottengono risultati simili in tutti i CMP studiati.

Da questa analisi si evince che l'influenza del rapporto  $V_s/V_P$  è trascurabile per quanto riguarda i parametri  $V_P$  e  $\rho$  (Figura 9.6a, b), nell'inversione TSVD a tre parametri, mentre non influisce affatto sulla  $V_s$  (Figura 9.6c), che rimane costantemente uguale a 0. Nell'inversione a due parametri con il Metodo dei Minimi Quadrati entrambi i parametri stimati ( $I_P$  e  $I_s$ ), presentano un valore costante all'interno del range  $V_s/V_P$  in cui vengono calcolati (Figura 9.6d, e); mentre applicando il Metodo TSVD all'inversione a due parametri (Figura 9.6f, g) si riscontrano piccole variazioni di  $I_P$ , anche se trascurabili, mentre  $I_s$  rimane costante.



**Fig. 9.6** I grafici mostrano l'influenza del rapporto  $V_s/V_p$  sulla stima dei vari parametri del fondo mare, nel caso specifico del CMP2, considerando i diversi metodi di inversione analizzati. I grafici **a**, **b** e **c** si riferiscono all'inversione a tre parametri con il Metodo TSVD; i grafici **d** ed **e** sono calcolati utilizzando l'inversione a due parametri con il Metodo dei Minimi Quadrati, mentre i grafici **f** e **g** all'inversione a due parametri con il Metodo TSVD. Le unità di misura dei vari parametri sono: m/s per le velocità  $V_p$  e  $V_s$ , g/cm<sup>3</sup> per la densità  $\rho$ , m/s\*g/cm<sup>3</sup> per l'impedenza  $P$  e  $S$ ,  $I_p$  e  $I_s$ .

Concludendo si può affermare che:

- i risultati di inversione dei dati reali non presentano sostanziali differenze in funzione del tipo di metodo applicato. Questo potrebbe essere attribuibile ad una efficace eliminazione del rumore sul dato reale; infatti la differenza tra i diversi metodi di inversione è tanto più significativa quanto più rumoroso è il dato.

Nonostante ciò, i risultati dell'inversione a due parametri restituiscono soltanto valori di impedenza acustica, rendendo quindi impossibile scindere l'informazione della velocità da quella della densità, diversamente da

quanto visto per l'inversione a tre parametri, che fornisce le informazioni di  $V_P$  e  $\rho$  distintamente.

- il rapporto  $V_S/V_P$  risulta praticamente trascurabile nella stima delle proprietà del modello, quali  $V_P$ ,  $\rho$ ,  $I_P$ , e assolutamente ininfluyente per quanto riguarda  $V_S$  e  $I_S$ .
- la bontà di questi risultati non può essere confermata in quanto non si posseggono altre informazioni sull'area analizzata.

## 10 Conclusioni

Il presente lavoro di tesi ha analizzato le potenzialità del processo di inversione AVA long offset e short offset concentrandosi principalmente sul problema della caratterizzazione del fondale marino.

Inizialmente si è studiata la sensitività del coefficiente di riflessione alle proprietà elastiche, quali  $V_P$ ,  $V_S$  e  $\rho$ . Da tale analisi si evince che, nel caso di modelli di fondo mare, il parametro che meno influenza l'andamento del coefficiente di riflessione è la velocità  $V_S$ . Si è inoltre dimostrato che includendo angoli prossimi a quello critico si aumenta la sensitività a tutti i parametri ma soprattutto alla  $V_P$ , il cui valore è l'unico a influenzare l'angolo a cui avviene l'incidenza critica. Inserendo, inoltre, l'informazione di fase, si assiste ad un ulteriore miglioramento della capacità risolutiva su tutti i parametri.

Nel caso di analisi AVA/PVA long offset si è visto, nel caso di dati sintetici, che considerare la sfericità del fronte d'onda porta ad una migliore stima, rispetto alle equazioni che considerano il fronte d'onda piano, sia delle ampiezze che delle fasi per angoli prossimi a quello critico

In pratica, però, questo approccio risulta poco affidabile ai fini di un' inversione AVA/PVA, in quanto le funzioni AVA/PVA estratte a lunghi offset sono fortemente influenzate dalla presenza di rumore e da effetti di interferenza tra i segnali riflessi. Nel caso di analisi AVA short offset è stata stimata l'applicabilità e i limiti della classica inversione lineare, utilizzando come kernel dell'inversione l'equazione di Aki e Richards (nella parametrizzazione del problema in tre incognite) e l'equazione di Ursenbach e Stewart (nella parametrizzazione del problema in due incognite).

Sono stati utilizzati diversi metodi di inversione (Metodo dei Minimi Quadrati e Metodo TSVD), le cui potenzialità sono state testate attraverso una 'sensitivity analysis', sia per modelli di fondo mare, con un alto rapporto  $V_P/V_S$ , che per modelli caratterizzati da un rapporto  $V_P/V_S=2$  all'interfaccia riflettente.

Tale studio ha messo in evidenza la forte influenza che il rapporto  $V_P/V_S$  esercita sulla stabilità del problema, soprattutto nel caso di inversione a tre parametri e la



potenziale capacità di stabilizzazione del processo di inversione AVA attraverso l'utilizzo del metodo TSVD o riparametrizzando il problema in due incognite.

In particolare il Metodo TSVD è risultato efficace nell'inversione a tre parametri, in cui la stabilizzazione del processo di inversione implica una perdita di informazione ragionevole. Per quanto riguarda il problema parametrizzato in due incognite, l'applicazione di tale metodo, nonostante stabilizzi il problema, comporta la perdita di una importante quantità di dato, pertanto, in questo caso risulta impossibile modellare con esattezza l'andamento del coefficiente di riflessione reale osservato.

Risulta inoltre chiaro il forte mal condizionamento sul parametro  $R_s$  (o  $R_J$ ) nel caso di fondo mare.

Le considerazioni appena fatte sono confermate dai risultati dell'inversione di dati analitici calcolati con l'Equazione di Aki e Richards.

Per quanto riguarda l'analisi sul dato reale, è stato possibile applicare soltanto un' inversione AVA short offset, data la profondità del fondale di circa 2000 metri e la geometria dell'acquisizione che prevede un offset massimo di circa 3000 metri, e dunque un angolo massimo di incidenza sul fondo mare di circa  $35^\circ$ . L'inversione AVA su tale dato restituisce valori di  $V_P$ ,  $\rho$  e  $I_P$  fisicamente probabili in caso di fondale marino costituito da sedimenti sciolti e saturi di acqua. Non si riescono invece a stimare i parametri  $V_s$  e  $I_s$ , indipendentemente dal tipo di metodo utilizzato nel processo di inversione. Questo limite dell'inversione AVA lineare su fondo mare è attribuibile in parte all'utilizzo di piccoli range di angoli di incidenza, compresi tra  $0^\circ$  e  $30^\circ$ , in cui l'influenza della  $V_s$  sul coefficiente di riflessione risulta trascurabile, e in parte al tipo di equazioni utilizzate nell'inversione, che presentano  $R_s$  e  $R_J$  come parametri relativi alla velocità delle onde di taglio; tali parametri risultano, nel caso di fondo mare, sempre uguali ad 1 qualunque sia il valore di  $V_s$  attribuito al fondale.

## Appendice A

Brekhovskikh e Godin, 1999 hanno mostrato che il coefficiente di riflessione e per un'onda sferica riflessa da un'interfaccia tra due mezzi fluidi con velocità  $V_{P1}$  e  $V_{P2}$ , densità  $\rho_1$  e  $\rho_2$  e angolo di incidenza  $\theta$ , può essere approssimato ad una somma:

$$R_f(\theta) = p_2 + V_1 \quad (\mathbf{A1})$$

dove:

$$p_2 = \frac{2^{2/3} \cdot \sin(\delta) \cdot \exp[i \cdot k \cdot R_1 \cdot (\cos(\theta_0 - \delta)/2)^2 - 7 \cdot i \cdot \pi/8]}{m \cdot (K \cdot R_1^{1/4}) \cdot [\sin(\theta_0) \cdot \cos(\delta) \cdot (\cos((\theta_0 - \delta)/2))^3]^{1/2}} \cdot \frac{[D_{1/2}(u) + \frac{A-1}{u} \cdot D_{3/2}(u)]}{\exp(i \cdot k \cdot R_1)} \quad (\mathbf{A2})$$

$$u = 2 \cdot \exp\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot i}{4}\right) \cdot (k \cdot R_1)^{1/2} \cdot \sin\left(\frac{\theta_0 - \delta}{2}\right) \quad (\mathbf{A3})$$

$$A = \frac{m^2 \cdot [0.5 \cdot \sin(\theta_0) \cdot \cos(\delta) \cdot \sin(\theta_0 + \delta)]^{1/2} \cdot \cos(\theta_0) \cdot (\cos(\theta_0 - \delta)/2)^2}{\sin(\delta) \cdot (m^2 \cdot (\cos(\theta_0)^2) + (\sin(\theta_0)^2) - \sin(\delta)^2)} \quad (\mathbf{A4})$$

$$V_1 = \frac{m^2 + n^2 - (m^2 + 1) \cdot q^2}{m^2 - n^2 - (m^2 + 1) \cdot q^2} \quad (\mathbf{A5})$$

$$m = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad n = \frac{V_{P1}}{V_{P2}} \quad q = \sin(\theta)$$

Nelle equazioni viste sopra,  $\delta$  rappresenta l'angolo critico,  $k$  è il numero d'onda del mezzo soprastante,  $R_1$  è la distanza tra la sorgente immagine nel mezzo sottostante ed il ricevitore,  $D_{1/2}$  e  $D_{3/2}$  sono funzioni parabolico-cilindriche (Daley, 2001) rispettivamente di ordine 1/2 e 3/2.

Il coefficiente di riflessione di un'onda piana tiene conto solo del contributo dato dal

punto centrale del fronte d'onda incidente, trascurando tutti gli effetti dovuti ai punti adiacenti che possono generare rifrazioni critiche. Questo problema viene superato applicando approssimazioni di ordine superiore sia per arrivi riflessi che per arrivi rifratti ad essi associati; tali approssimazione viene attuata inserendo, all'interno dell'equazione (A1) che definisce  $R_{PP}$  sferico, le funzioni parabolico-cilindriche.

Alulaiw e Gurevich (2011) hanno esteso tale soluzione alla riflessione da interfaccia separante mezzi solidi a contatto. Questo è stato possibile aggiungendo termini contenenti l'informazione delle velocità di taglio derivanti dall'approssimazione lineare di Thomsen (1990) per onde piane.

L'equazione (A1) può quindi essere riscritta come:

$$R_{PP}(\theta) = R_f(\theta) - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2 \cdot \overline{V}_S}{\overline{V}_P} \right)^2 \cdot \frac{\Delta G}{\overline{G}} \cdot \sin^2(\overline{\theta})$$

dove  $G = \rho \cdot V_S^2$  è il modulo di taglio,  $\overline{\theta}$  è la media tra l'angolo di incidenza e l'angolo di trasmissione e  $\Delta G = G_2 - G_1$ ,  $\overline{G} = \frac{G_1 + G_2}{2}$ . La stessa definizione vale per  $\overline{V}_P$  e  $\overline{V}_S$ .

---

## Bibliografia

- Aki, K. and Richards, P.G., 1980.** *Quantitative seismology: Theory and Methods.* W.H. Freeman&Co.
- Alulaiw, B. and Gurevich, B., 2011.** Analytical Wavefront Curvature Correction to Plain-Wave Reflection Coefficients for a Weak-Contrast Interface. *Geophysical Prospecting*, 61, 53-62.
- Aster, R.C., Borchers, B. and Thurber, C.H., 2005.** *Parameter Estimation and Inverse Problems.* Elsevier Academic Press
- Avseth, P., Mukerji, T. and Mavko, G., 2005.** *Quantitative seismic interpretation.* Cambridge University.
- Bracewell, R. N., 1965.** *The Fourier transform and its applications.* New York, McGraw-Hill Book Co., Inc., 268-271.
- Brekhovskikh, L.M. and Godin, O.A., 1999.** *Acoustic of Layered Media.* Springer-Verlag.
- Brekhovskikh, L.M., 1960.** *Waves in layered media.* Academic Press.
- Buriany, M. and Pickford, S., 2000.** *Amplitude Versus Offset and Seismic Rock Property Analysis: A Primer.* Calgary.
- Castagna, J.P. and Backus, M.M., 1993.** *Offset-Dependent Reflectivity. Theory and Practice of AVO Analysis.* Society of Exploration Geophysicists, Tulsa.
- Cerveny, V., 1961.** *The amplitude curves of reflected harmonic waves around the critical point.* *Studia Geophysica et Geodaetica* 5, 319-351.
- Červený, V., 1961.** The Amplitude Curves of Reflected Harmonic Waves Around the Critical Point. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 5, 319-351.
- Dahl, T. and Ursin, B., 1992.** *Non linear AVO inversion for a stack of anelastic layer.* *Geophysical Prospecting* 40, 243-265.
- Daley, P.F., 2001.** The Parabolic Cylinder Function in Elastodynamic Problems. *Crewes Research Report*, 13, 181-185.
- De Nicolao, A., Drufuca, G. and Rocca, F., 1993.** *Eigenvectors and Eigenvalues of linearized elastic inversion.* *Geophysics* 58, 670-679.

- Dey-Sarkar, S.K. and James, C.F., 1986.** *Prestack analysis: relevance of petrophysical properties.* Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 337-339.
- Dey-Sarkar, S.K. and Suatek, S.V., 1993.** *Prestack Analysis: an Integrated Approach for Seismic Interpretation in Clastic Basins.* In *Offset-Dependent Reflectivity: Theory and Practice of AVO Analysis* (ed. Castagna, J.P. And Backus, M.). Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, 57-77.
- Downton, J.E. And Ursenbach, C., 2006.** *Linearized amplitude variation with offset (AVO) inversion with supercritical angles.* Geophysics, 71.
- Drufuca, G. and Mazzotti, A., 1995.** *Ambiguities in AVO inversions of reflections from a gas sand.* Geophysics 60, 134-141.
- Fatti, J.L., Vail, P.J., Smith, G.C., Strauss, P.J. and Levitt, P.R., 1994.** *Detection of gas in sandstone reservoirs using AVO analysis.* Geophysics, 59, 1362-1376.
- Fomel, S. and van der Baan, M., 2010.** *Local similarity with the envelope as a seismic phase detector.* 80<sup>th</sup> Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 1555-1559.
- Foster, D.J., Smith, S.W., Dey, S.S. and Swan, H.W., 1993.** *A Closer Look at Hydrocarbon Indicators.* 63<sup>rd</sup> SEG Meeting, Washington, DC, USA, 731-733
- Gardner, G.H.F., Gardner, L.W. and Gregory, A.R., 1985.** *Formation velocity and density – The diagnostic basics for stratigraphic traps.* Geophysics, 50, 2085-2095.
- Hadamard, J., 1923.** *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations.* New Haven: Yale University Press.
- Hamilton, E.L., 1976.** *Attenuation of shear waves in marine sediments.* Journal of Acoustic Society of America, 60, 334-338.
- Jensen, F.B., Kupemann, W.A., Porter, M.B. And Schmidt, H., 1994.** *Computational Ocean Acoustics.* AIP Press, American Institute of Physics, New York.
- Kjartansson E., 1979.** *Constant Q – wave propagation and attenuation.* Journal of Geophysical Research 84, 4737-4748.
- Knott, C.G., 1899.** *Reflection and Refraction of Elastic Waves, with Seismological Applications.* Phil. Mag., London, 48, 567-569.
- Mazzotti, A, 1991.** *Amplitude, phase and frequency versus offset applications.*

Geophysical Prospecting, 39, 863-886.

**Mazzotti, A. and Ravagnan, G., 1995.** *The impact of processing on the AVO responses of a marine seismic dataset.* Geophys. Prosp., 43, 263-281.

**Mazzotti, A., 1990.** *Prestack amplitude analysis methodology and application to seismic bright spots in the Po valley, Italy.* Geophysics 55, 157-166.

**Menke, W., 1989.** *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory: Academic Press Inc.*

**O'Connell R.J. and Budiansky, B., 1978.** *Measures of dissipation in viscoelastic media.* Geophysical Research Letters 5, 5-8.

**Ostrander, W.J., 1984.** Plane-wave Reflection Coefficients for Gas Sands at non-normal Angle of Incidence. Geophysics 49, 1637-1648.

**Qizhen, D. and Huizhong, Y., 2013.** *PP and PS joint AVO inversion and fluid prediction.* Journal of Applied Geophysics, Vol. 90 Elsevier.

**Riedel, M. and Theilen, F., 2001.** *AVO investigations of shallow marine sediments.* Geophysical Prospecting, 49, 198-212.

**Sheriff, R.E., 1991.** *Encyclopedic Dictionary of Exploration Geophysics*, 3<sup>rd</sup> edn. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa.

**Smith, G.C. and Gidlow, P.M., 1987.** *Weighted stacking for rock property estimation and detection of gas.* Geophysical Prospecting, 35, 993-1014.

**Stolt, R.H. and Weglein A.B., 1985.** *Migration and inversion of seismic data.* Geophysics 50, 2458-2472.

**Taner, M.T., Koehler, F. and Sheriff, R.E., 1979.** *Complex seismic trace analysis.* Geophysics, Vol. 44, 1041-1063.

**Thomsen, L., 1990.** Poisson was not a Geophysicist ! The Leading Edge, 9, 27-29.

**Ursenbach, C. and Stewart, R.R., 2001.** *Extending AVO inversion techniques.* CREWES Research Report, 13.

**Ursin, B., 1990.** *Offset dependent geometrical spreading in layered medium.* Geophysics, 55, 492-496.

**Widess, M.B., 1973.** *How thin is a thin bed?* Geophysics, Vol.38, No.6, 1176-1180.

**Yilmaz, Ö., 2001.** *Seismic Data Analysis. Processing, Inversion and Interpretation of Seismic Data.* Vol.2. 1801-1807.

**Zhu, X. And McMechan, G., 2011.** *Comparison of methods for modeling phase variation with angle.* University of Texas at Dallas. Annual Meeting, SEG, 3053-3057.

**Zhu, X. And McMechan, G., 2012.** *Elastic Inversion of near- and postcritical reflections using phase variation with angle.* University of Texas at Dallas. Geophysics, Vol. 77.

**Zoeppritz, K., 1919.** *Erdbebenwellen VIII B. On the Reflection and Propagation of Seismic Waves.* Göttinger Nachrichten, I, 66-84

## **Ringraziamenti**

In primo luogo ringrazio la Società ENI S.p.A. per la concessione dei dati sismici trattati in questo lavoro.

Ringrazio il Prof. Alfredo Mazzotti per i preziosi insegnamenti scientifici.

Un ringraziamento particolare va al Dott. Mattia Aleardi, per avermi seguito giorno dopo giorno nella realizzazione di questo lavoro.

Ringrazio Gabriella per il sostegno psicologico e per la sua pazienza.

Infine devo ringraziare tutte le persone che mi sono state accanto lungo tutto questo percorso e che hanno reso possibile il raggiungimento di questo obiettivo. In particolare ringrazio i miei genitori e mio fratello, che mi hanno aiutato in tutti questi anni, il mio ragazzo Gianfranco, per avermi sopportato e supportato nei momenti più difficili. Ringrazio inoltre i miei cuginetti, Petra e Martino, e tutti i miei nipotini che, con i loro sorrisi, hanno saputo allietare anche i periodi più bui.