Institut für Plasmaphysik
KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH
des Landes Nordrhein-Westfalen

EINE KLASSE STATIONÄRER MARKOWPROZESSE

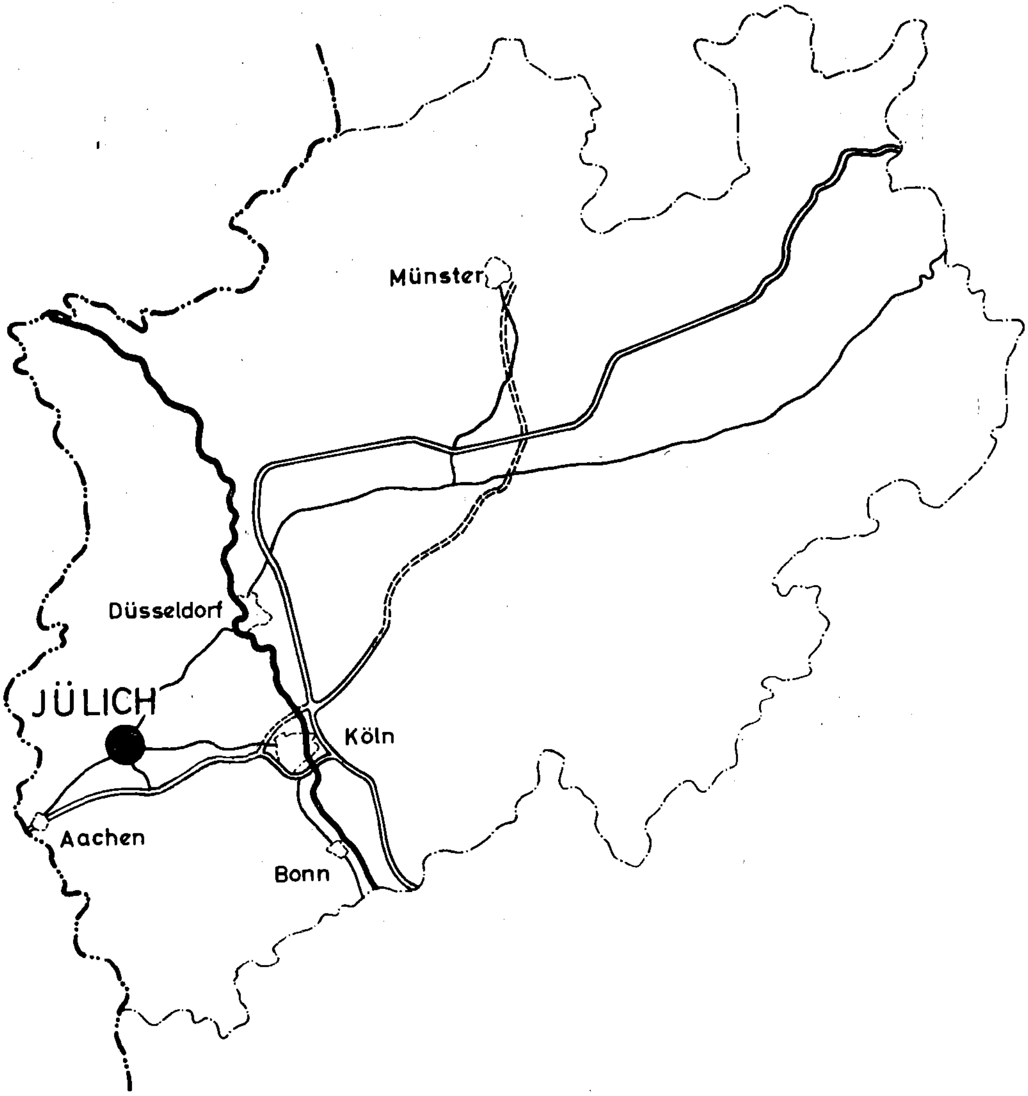
von

Wilhelm Freiherr von Waldenfels

Jül - 25 - PP

November 1961

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 25

Institut für Plasmaphysik Jül – 25 – PP

Dok.: STATISTICS * DK 519.21

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich, Jülich, Bundesrepublik Deutschland

EINE KLASSE STATIONÄRER MARKOWPROZESSE

Von der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
genehmigte Dissertation

Vorgelegt von
Diplom-Physiker
Wilhelm Freiherr von Waldenfels
aus
Bischofsheim vor der Rhön

Referent: Professor Dr. Heinz König
Koreferent: Professor Dr. Josef Meixner
Tag der mündlichen Prüfung: 28. Juli 1961

Einleitung

A.

Sei X(t) ein stochastischer Prozeß, z.B. sei X(t) die Koordinate eines Teilchens, das einer zufälligen Bewegung auf einer Geraden unterworfen ist, zur Zeit t. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t im Intervall $[a, b]$ zu finden, wenn man weiß, daß es zur Zeit $s < t$ den Punkt x innehatte, sei[1)]

$$\mathrm{Prob}\{X(t) \in [a, b] \mid X(s) = x\} = \int_a^b P(x, s \mid y, t)\, dy$$

Genügt P der SMOLUCHOWSKIgleichung

$$P(x, s \mid y, t) = \int P(x, s \mid z, u)\, P(z, u \mid y, t)\, dz, \quad s < u < t,$$

so nennt man X(t) einen Markowprozeß. Hängt darüber hinaus P nur von $t - s$ ab, so sagt man, X(t) sei ein stationärer Markowprozeß.

Es ist

$$P(x, s \mid y, t) = P(x, y, t - s), \quad t - s > 0,$$

und

$$P(x, y, t_1 + t_2) = \int P(x, z, t_1)\, P(z, y, t_2)\, dz$$

für

$$t_1, t_2 > 0.$$

---

1) Wir nehmen hier in der Einleitung an, daß alle Wahrscheinlichkeitsmaße durch Dichten gegeben sind. In der Arbeit selbst wird diese Voraussetzung nicht gemacht.

Aus dieser Gleichung gewinnt man nach einem in der physikalischen Literatur öfters verwendeten Verfahren[1] eine Differentialgleichung für P, in dem man für ein festes z die Funktion $P(z, y, t_2)$ in y nach Potenzen von z-y entwickelt, nach dem Glied zweiter Ordnung abbricht und mit t_2 gegen Null zur Grenze geht.[2]

Die entstehende Differentialgleichung hat die Form

$$\frac{\partial P(x,y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(m(y)P(x,y,t)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(b(y)P(x,y,t)\right)$$

und trägt den Namen FOKKER-PLANCKgleichung.

Es erhebt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, höhere Glieder der Potenzreihenentwicklung mitzunehmen und so zu einer Differentialgleichung zu gelangen, die höhere als zweite Ableitungen in y enthält.

Die Diskussion der sogenannten "stetigen" Markowprozesse zeigt aber, daß in diesem Spezialfall, auf den die Methode der Potenzreihenentwicklung recht eigentlich zugeschnitten ist, auch ein Weitertreiben der Entwicklung keine höheren Ableitungen liefert. Die neu hinzutretenden Terme verschwinden nämlich beim Grenzübergang $t_2 \rightarrow 0$.

Die Markowprozesse, die am vollständigsten erforscht sind, sind die stationären, räumlich homogenen Prozesse, bei denen P von der Form ist

$$P(y-x,\ t-s).$$

---

1) s. N. WAX. Selected papers on noise and stochastic processes. Dover publications.

2) Ausführliche Rechnung bei WANG & UHLENBECK, Rev. Mod. Phys. 17, (1945) S. 223 (auch bei WAX abgedruckt).

Aber auch die zu diesen Prozessen gehörigen Differentialgleichungen können keine höheren als zweite Ableitungen in sich schließen, wohl aber kann eine Art Integralterm zusätzlich auftreten.

Die Aufgabe dieser Arbeit war es nun, diese Aussagen auf eine möglichst weite Klasse stationärer Markowprozesse auszudehnen.

B.

Wir verwendeten dazu funktionalanalytische Hilfsmittel, vor allem die Theorie linearer Transformationen von Banachräumen. Für jedes $t > 0$ definiert $P(x, y, t)$ einen Operator $U(t)$ der Form:

$$f \to U(t)f = \int P(x, y, t)\, f(y)\, dy \, .$$

Die Funktion f wird dabei als borelmeßbar und beschränkt vorausgesetzt. Es ist vernünftig,

$U(o) = I$ (identischer Operator)

zu setzen.

Die SMOLUCHOWSKIgleichung lautet in dieser Formulierung

$$U(t_1 + t_2) = U(t_1)\, U(t_2) \qquad (t_1, t_2 \geq 0) \, .$$

Man erhält für den Differenzenquotienten

$$\frac{U(t_1 + t_2) - U(t_1)}{t_2} = U(t_1)\, \frac{U(t_2) - I}{t_2} \, .$$

Wenn wir uns für die Form der Differentialgleichung für P, bzw. $U(t)$ interessieren, genügt es, das Verhalten von

$$\frac{U(t) - I}{t}$$

für $t \downarrow 0$ zu betrachten.

Was unsere Operatoren U(t) vor anderen auszeichnet, sind die beiden Eigenschaften

$U(t) \geq 0$ (Positivität der Wahrscheinlichkeitsdichten $P(x,y,t)$)

$U(t)\underline{1} = \underline{1}$ (Die Wahrscheinlichkeitsdichten $P(x,y,t)$ sind auf 1 normiert),

wo $\underline{1}$ die konstante Funktion ist, die für alle reellen Zahlen den Wert 1 annimmt.

Die wichtigere von beiden Eigenschaften ist die erste. Sie ist es im Wesentlichen, die das Auftreten von höheren als zweiten Ableitungen verhindert.

C.

Wir definieren die Räume B_n, n = o,1,2,..., die aus all den n-mal stetig differenzierbaren Funktionen bestehen, die samt ihren n ersten Ableitungen im Unendlichen verschwinden. Wir fordern, daß es ein festes $n \geq 2$ gibt, so daß jedes U(t), $t \geq 0$ den Raum B_n in sich überführt und daß für $t \to t'$ und $f \in B_n$

$$(U(t)f)^{(k)} \to (U(t')f)^{(k)} \qquad (0 \leq k \leq n)$$

gleichmäßig konvergiert. Es ergibt sich, daß unter dieser Voraussetzung

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{U(t) - I}{t}$$

für jedes f aus dem von B_2 vnd $\underline{1}$ zusammen aufgespannten Funktionenraum E_2 punktweise existiert. Af ist eine borelmeßbare, über jedem Kompaktum beschränkte Funktion. Das Funktional

$$A(x) : f \in E_2 \to (Af)(x)$$

hat die Form

$$\langle A(x), f \rangle = m(x)\, f'(x) + c(x)\,(f(\infty) - f(x))$$
$$+ \left\langle Q(x)_0, \left(f(y) - f(x) - f'(x)\frac{y-x}{1+(y-x)^2}\right)\frac{1+(y-x)^2}{(y-x)^2}\right\rangle_y ,$$

wo $Q(x)_o$ ein positives integrierbares Maß, d.h. ein positives Maß endlicher Gesamtmasse ist. Die Zahlen $c(x)$ sind ≥ 0 und verschwinden für fast alle x. Bis auf den Term

$$c(x)\ (f(\infty) - f(x))$$

hat $A(x)$ genau die Form, wie sie von den räumlich homogenen Prozessen her bekannt ist.

Wählt man $n \geq 3$, so fällt dieser Term überhaupt weg. In diesem Fall kann man auch die Aussagen, die wir für $f \in E_2$ machten, auf jede zweimal stetig differenzierbare Funktion f übertragen, die samt ihren ersten beiden Ableitungen beschränkt ist.

Außerhalb einer (beliebig kleinen) Umgebung des Punktes $y = x$ verhält sich $A(x)$ wie ein Integraloperator. In der Umgebung von x kommen dagegen andere Eigenschaften zum Vorschein. Z.B. ist für $c(x) = o$ und $Q(x) = b(x)\,\delta_x$ (δ_x bedeutet eine Einheitsmasse im Punkte x)

$$\langle A(x), f \rangle = m(x) f'(x) + \frac{b(x)}{2} f''(x) .$$

Diesen Sachverhalt meinten wir, als wir oben davon sprachen, daß zur FOKKER-PLANCKgleichung nur eine "Art" Integralterm hinzutreten könne.

D.

Diese Erörterungen füllen das zweite Kapitel, während das erste einige Grundlagen aus der Maß- und Distributionentheorie bringt. Der erste Paragraph enthält eine kurze Zusammenfassung der von uns benötigten Theorie der Banachräume, die dann in 7. durch die Theorie der Integration vektorwertiger Funktionen vervollständigt wird. In 2. und 3. werden die integrierbaren Maße und Distributionen eingeführt und einige ihrer Eigenschaften beschrieben. Abschnitt 4. handelt von der strengen Konvergenz integrierbarer Maße.[1] Diese ist schwächer als die Konvergenz in der Normtopologie, aber stärker als die einfache Konvergenz für jede im Unendlichen verschwindende stetige Funktion. Die strenge Konvergenz wird gebraucht, um die Schwierigkeiten, die durch die unendliche Assdehnung der Geraden, d.h. ihre Nichtkompaktheit verursacht werden, zu bewältigen. Schon im nächsten Abschnitt 5., der sich mit der Faltung beschäftigt, zeigt sich die Nützlichkeit dieses Konvergenzbegriffes.

Der Anhang über normbeschränkte Halbgruppen vom Faltungstypus, zu denen auch die räumlich homogenen stationären Markowprozesse gehören, zeigt, daß aus ganz schwachen Voraussetzungen die Stetigkeit dieser Halbgruppen folgt. Ein wesentliches Hilfsmittel ist ein tiefer liegender Satz über strenge Konvergenz nicht notwendig positiver, integrierbarer Maße (4 I).

Das ganze erste Kapitel, sowie der Anhang können ohne Schwierigkeiten beinahe wortwörtlich von der eindimensionalen Geraden auf einen endlichdimensionalen Raum übertragen werden.

---

1) Dieser Begriff wurde von L. SCHWARTZ, Semigroups übernommen.

Inhaltsverzeichnis

I. Kapitel

Grundlagen aus der Maß- und Distributionentheorie

1. Normierte Vektorräume

1A Ein normierter reeller Vektorraum[1] X ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen, in dem eine reellwertige Funktion $x \longrightarrow \|x\|$, genannt Norm, definiert ist, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

$$\|x\| \geq 0 ,$$

$$\|x\| = 0 \qquad \text{genau dann, wenn } x = 0 ,$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| ,$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

Durch den Abstand

$$x,y \longrightarrow \| x-y \|$$

ist in X eine Metrik definiert. Die zugehörige Topologie heißt die Normtopologie. In ihr ist eine Menge U Umgebung eines Punktes x genau dann, wenn sie eine offene Kugel um x enthält, d.h. eine Menge der Form

$$\{ y \in X : \|y - x\| < r \}$$

mit $r > 0$.

X heißt ein Banachraum, wenn es in seiner Normtopologie vollständig ist, d.h. wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert besitzt. Eine Cauchyfolge $x_i \in X$ ist eine Folge mit der Eigenschaft:
zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß $\| x_i - x_j \| < \varepsilon$ für $i,j \geq N$.

Seien X und Y zwei reelle normierte Vektorräume versehen mit ihrer Normtopologie, und sei T eine lineare Abbildung von X in Y. Die Abbildung T ist genau dann stetig, wenn sie beschränkt ist,[2] d. h. wenn

---

1) LOOMIS S. 13

2) LOOMIS S. 15

$$\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \}$$

endlich ist.

Den Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von X in Y bezeichnen wir mit LXY. Die Funktion $T \rightarrow \|T\|$ bildet in LXY eine Norm. Wenn Y ein Banachraum ist, dann ist es auch LXY[1].

1B Für die Anwendungen ist die Normtopologie von LXY oft zu fein. An ihrer Stelle wird dann häufig die sogenannte einfache Topologie[2], die man auch Topologie der punktweisen Konvergenz nennen kann, verwandt. In ihr ist eine Menge U Umgebung des Elementes $T \in LXY$ dann und nur dann, wenn U eine Menge der Form

$$\{ S \in LXY : \|(S-T)(x_i)\| < \varepsilon, i = 1 \dots n \}$$

enthält, wo $\{x_i, i = 1 \dots n\}$ eine endliche Teilmenge von X und ε eine echt positive Zahl ist.

In der einfachen Topologie ist LXY ein topologischer Vektorraum, für den die folgenden leicht zu verifizierenden Aussagen gelten:

(1) Eine Folge $T_i \in LXY$ konvergiert genau dann gegen $T \in LXY$, wenn die Folgen $T_i(x)$ für jedes feste $x \in X$ nach $T(x)$ in Y streben.

(2) Die Abbildungen

$$T \in LXY \longrightarrow T(x) \in Y$$

sind für jedes feste $x \in X$ stetig.

(3) Sei E ein beliebiger topologischer Raum. Eine Abbildung $F : E \rightarrow LXY$ ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen

$$e \in E \longrightarrow [F(e)](x) \in Y$$

für jedes feste $x \in X$ stetig sind.

---

1) LOOMIS S. 15

2) BOURBAKI, esp. vect. top. II S. 18

1C Neben der einfachen Topologie benötigen wir bisweilen etwas andere, mit ihr nah verwandte Topologien, die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz über jedem Kompaktum und die Topologie der punktweisen Konvergenz über einer in X dichten Teilmenge. Eine Menge $U \subset LXY$ ist Umgebung von $T \in LXY$ in der ersten Topologie genau dann, wenn sie eine Menge der Form

$$\{ S \in LXY : \|(S-T)(x)\| < \varepsilon, \, x \in K \}$$

enthält, wo K eine <u>kompakte</u> Teilmenge von X und $\varepsilon > 0$ ist. Sie ist Umgebung in der zweiten Topologie dann und nur dann, wenn sie Obermenge von

$$\{ S \in LXY : \|(S-T)(x_i)\| < \varepsilon, \, x_i \in A, \, i = 1 \dots n \}$$

ist, wo $\{x_i, \, i = 1 \dots n\}$ eine <u>endliche Teilmenge der in X dichten Menge A</u> ist.

Der für uns in diesem Zusammenhang wichtigste Satz lautet:

<u>Satz:</u>[1] Auf einer normbeschränkten Teilmenge von LXY sind die folgenden drei Topologien identisch

i) die Topologie der punktweisen Konvergenz über einer in X dichten Teilmenge,

ii) die einfache Topologie,

iii) die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz über jedem Kompaktum.

<u>Folgerung:</u> Sei T_i eine normbeschränkte Folge aus LXY, und konvergiert $T_i(x) \rightarrow T(x)$, $T \in LXY$, für jedes Element x einer in X dichten Teilmenge, dann konvergiert T_i einfach nach T und gleichmäßig über jedem Kompaktum in X. Ist Y ein Banachraum, so genügt es vorauszusetzen, daß die T_i normbeschränkt sind und die $T_i(x)$ Cauchyfolgen bilden[2].

---

1) BOURBAKI esp. vect. top. II S. 23. Dieser keineswegs tiefliegende Satz ergibt sich fast unmittelbar aus den Definitionen. Er ist eine Version des Satzes von Banach-Steinhaus.

2) HILLE und PHILLIPS S. 41

1D Wir nennen die Menge aller reellen Zahlen R. Mit dem Betrag als Norm ist R ein Banachraum. Der Raum LXR der stetigen linearen Funktionale von X in R heißt der Dualraum von X und wird mit X' bezeichnet. Für LXX, den Raum der stetigen linearen Operatoren von X in sich, schreiben wir künftig kurz LX. Die einfache Topologie von X' heißt in der Literatur oft "Schwach*- Topologie", während die von LX als "starke Operatortopologie" bezeichnet wird[1].

Wir schreiben $\mu(x), \mu \in X'$, $x \in X$ gewöhnlich in Form eines Skalarproduktes

$$\mu(x) = \langle \mu, x \rangle$$

und lassen, falls Y von R verschieden ist, oft die Klammern bei $T(x)$, $x \in X$, $T \in LXY$ weg:

$$T(x) = Tx .$$

1E Sei $\mu \in Y'$ und $T \in LXY$. Die Abbildung

$$x \in X \longrightarrow \langle \mu, Tx \rangle \in R$$

ist als Hintereinanderschaltung zweier stetiger Abbildungen stetig und definiert somit ein Element aus X', das wir mit μT bezeichnen.

$$\langle \mu T, x \rangle = \langle \mu, Tx \rangle .$$

Die Funktion

$$\mu \in Y' \longrightarrow \mu T \in X'$$

ist stetig, wenn man X' und Y' mit der einfachen Topologie versieht. Wir haben dazu nach 1B(3) zu zeigen, daß für jedes $x \in X$

$$\mu \in Y' \longrightarrow \langle \mu T, x \rangle = \langle \mu, Tx \rangle \in R$$

stetig ist. Dies folgt aber aus 1B(2).

1) s.z.B. HILLE und PHILLIPS SS. 37, 52

Ebenso gilt, daß die Abbildung

$$T \in LXY \to \mu T \in X' \quad ,$$

LXY und X' versehen mit ihren einfachen Topologien, stetig ist. Für jedes $x \in X$ ist nämlich nach 1B(2)

$T \to Tx$

stetig. Außerdem ist nach der Voraussetzung über die Elemente von Y'

$y \to \langle \mu, y \rangle$

stetig. Die Abbildung

$$T \to \langle \mu T, x \rangle = \langle \mu, Tx \rangle$$

ist die Zusammensetzung der stetigen Abbildungen

$T \to Tx$

und

$Tx \to \langle \mu, Tx \rangle$

und darum stetig. Das war aber nach 1B(3) zu zeigen.

1F Im Verlauf unserer Ausführungen werden wir öfters den folgenden Satz, das sogenannte uniform boundedness theorem[1], benötigen.

Satz: Seien X und Y zwei normierte Räume und sei X vollständig, dann gilt für jede Teilmenge $M \subset LXY$, die die Eigenschaft

$$\sup_{T \in M} \| T(x) \| < \infty \quad \text{für jedes } x \in X$$

besitzt, daß

$$\sup_{T \in M} \| T \| < \infty$$

ist.

---

1) S. BOURBAKI, esp. vect. top. II S. 21f
HILLE und PHILLIPS S. 26

2. Der Begriff des integrierbaren Maßes und der integrierbaren Distribution n-ter Ordnung.

2A Wir betrachten im folgenden reelle Funktionen über der reellen Achse R. Sei f eine n- mal differenzierbare Funktion, so setzen wir

$$\|f\|_n = \sup\{\,|f^{(i)}(x)| : x \in R,\ 0 \leq i \leq n\,\}.$$

Dabei ist $+\infty$ als Supremum zugelassen. Es ist

$$\|f\|_n = \sup\{\,\|f^{(i)}\|_0 : 0 \leq i \leq n\,\}.$$

Sind f und g zwei n-mal differenzierbare Funktionen, so ist ihr gewöhnliches Produkt fg,

$$(fg)\ (x) = f(x)g(x),$$

wieder n-mal differenzierbar und es gilt

$$\|fg\|_n \leq 2^n \|f\|_n \|g\|_n .$$

Es ist nämlich

$$\|(fg)^{(i)}\|_0 = \Big\|\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} f^{(k)} g^{(i-k)}\Big\|_0$$

$$\leq \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \|f^{(k)}\|_0 \|g^{(i-k)}\|_0$$

$$\leq \|f\|_n \|g\|_n \sum \binom{i}{k} = 2^i \|f\|_n \|g\|_n$$

$$\leq 2^n \|f\|_n \|g\|_n$$

für jedes i, $0 \leq i \leq n$.

2B Unter B_n verstehen wir den Raum aller stetigen und n-mal stetig differenzierbaren Funktionen, die samt ihren n ersten Ableitungen im Unendlichen der reellen Achse verschwinden. $f \to \|f\|_n$ ist eine Norm in B_n, und B_n ist in dieser Norm vollständig, also ein Banachraum.

Um die Vollständigkeit zu beweisen, müssen wir zeigen, daß jede Cauchyfolge einen Grenzwert in B_n hat. Sei also $f_\kappa \in B_n$, und gebe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein K, so daß $\| f_\kappa - f_{\kappa'} \|_n < \varepsilon$ für $\kappa, \kappa' \geq K$. Es konvergieren also alle Ableitungen $f_\kappa^{(i)}$, $0 \leq i \leq n$ gleichmäßig gegen stetige Funktionen g_i. Nach den Sätzen über die gleichmäßige Konvergenz ist aber $g_i = f^{(i)}$, $f = g_0 = \lim f_\kappa$, Da alle $f_\kappa^{(i)}$, $0 \leq i \leq n$ im Unendlichen verschwinden, wird auch $f^{(i)} = \lim\limits_\kappa f_\kappa^{(i)}$ dort zu null, und damit ist $f \in B_n$, und die f_κ konvergieren in der Normtopologie von B_n gegen f.

2C <u>Hilfssatz:</u> Eine im Unendlichen verschwindende stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

<u>Beweis:</u> Zu zeigen ist, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $|h| \leq \delta$ und $x \in R$ ist. Wir wählen zunächst ein $C \geq 1$ so, daß

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für } |x| \geq C - 1$$

ist. Dann gilt für $|x| \geq C$ und $|h| \leq \delta \leq 1$

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h)| + |f(x)| \leq \varepsilon \ .$$

Da f(x) im abgeschlossenen Intervall $[-C-1, C+1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $0 < \delta \leq 1$, so daß

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad \text{ist für alle } |h| \leq \delta \text{ und}$$

alle $|x| \leq C$. Damit ist die Behauptung für alle $x \in R$ bewiesen.

2D Offensichtlich ist für $m \geq n$ der Raum B_m in B_n enthalten. Darüber hinaus gilt der Satz :

<u>Satz:</u> Für $m \geq n$ ist B_m dicht in B_n bezüglich der Normtopologie von B_n.

Beweis:[1] Sei $f \in B_n$. Wir setzen

$$\varrho(x) = \begin{cases} k \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(k sei so bestimmt, daß $\int \varrho(x)\,dx = 1$)

und

$$\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\,\varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) .$$

ϱ_ε ist beliebig oft differenzierbar und verschwindet samt seinen Ableitungen für $|x| \geq \varepsilon$. Sei $f * \varrho_\varepsilon$ definiert durch

$$(f * \varrho_\varepsilon)(x) = \int f(y)\,\varrho_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\,\varrho_\varepsilon(x-y)\,dy .$$

$f * \varrho_\varepsilon$ ist beliebig oft differenzierbar und verschwindet samt allen seinen Ableitungen im Unendlichen, gehört also jedem B_m an für $m = 0,1,2\ldots.$

Es ist

$$(f * \varrho_\varepsilon)^{(i)} = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f^{(i)}(y)\,\varrho_\varepsilon(x-y)\,dy$$

und

$$|(f * \varrho_\varepsilon)^{(i)} - f^{(i)}|$$

$$= \left| \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \left(f^{(i)}(y) - f^{(i)}(x) \right) \varrho_\varepsilon(x-y)\,dy \right|$$

$$\leq \sup_{x-\varepsilon \leq y \leq x+\varepsilon} |f^{(i)}(y) - f^{(i)}(x)| .$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $f^{(i)}$ (s.2C) folgt, daß $(f * \varrho_\varepsilon)^{(i)}$ für $\varepsilon \to 0$ gleichmäßig gegen $f^{(i)}$ konvergiert $(0 \leq i \leq n)$, und damit

$$\| f - \varrho_\varepsilon * f \|_n \to 0 \quad \text{für } \varepsilon \to 0 .$$

1) s. L. SCHWARTZ TD I S. 22

2E <u>Definition:</u> Die stetigen linearen Funktionale über B_o heißen integrierbare Maße, die stetigen linearen Funktionale über B_n integrierbare Distributionen n-ter Ordnung[1].

Ein integrierbares Maß μ heißt positiv, wenn aus $f \in B_o$, $f \geq 0$ folgt, daß $\langle \mu, f \rangle \geq 0$ ist[2].

Sind f und g Funktionen aus B_n, so liegt ihr gewöhnliches Produkt fg wieder in B_n. Die Zuordnung

$$g \longrightarrow fg$$

ist laut 2A beschränkt und somit stetig. f definiert also ein Element aus LB_n, das wir wieder mit f bezeichnen.

Die Abbildung

$$g \longrightarrow \langle \mu, fg \rangle$$

ist eine integrierbare Distribution, die wir μf nennen (s. 1E). Vermöge des Produktes

$$\mu \in B_n', \; f \in B_n \longrightarrow \mu f$$

bildet B_n' einen Modul über B_n.

Manchmal ist es aus Gründen der Übersichtlichkeit notwendig, die Funktionen $f \in B_n$ in der Form $f = f(x)$ zu schreiben. Wir verwenden dann bisweilen für die Funktionale aus B_n' auch die Koordinatenschreibweise:

$$\mu = \mu(x),$$
$$\mu f = \mu(x)\, f(x),$$
$$\langle \mu, f \rangle = \langle \mu(x), f(x) \rangle_x .$$

x ist in $\mu(x)$ eine uneigentliche Variable, d.h. $\mu(a)$ mit festem reellen a ist nicht definiert. Die uneigentliche Variable x ist nur ein Index und bedeutet, daß μ auf Funktionen angewandt werden soll, die von der eigentlichen Variablen x abhängen. Um Verwechslungen zu vermeiden, soll stets hervorgehoben werden, wo x eine uneigentliche Variable ist.

---

1) L. SCHWARTZ TD II S. 59

2) Wir folgen hier der BOURBAKIschen Terminologie. HALMOS behält den Namen M a ß den positiven Funktionalen vor und bezeichnet das, was wir Maß nennen als "signed measure".

2F Sei $\mu \in B_n'$ und $m \geq n$. Dann ist $B_m \subset B_n$ und μ damit auch in B_m definiert. μ ist auch stetig in der Normtopologie von B_m ; weil nämlich $\|f\|_n \leq \|f\|_m$ ist, folgt aus $\|f\|_m \leq 1$ daß $\|f\|_n \leq 1$ ist und daraus $|\langle \mu, f \rangle| \leq \|\mu\|_{B_n'}$. Also

$$B_0' \subset B_1' \subset B_2' \subset \dots$$

Sei umgekehrt $\mu \in B_m'$, $n \leq m$ und μ stetig in der von B_n in B_m induzierten Topologie, d.h.

$$\sup \{ |\langle \mu, f \rangle| : f \in B_m, \|f\|_n \leq 1 \} < \infty,$$

dann läßt sich μ, weil B_m in der Normtopologie von B_n dicht in B_n ist, eindeutig in ein stetiges Funktional auf B_n fortsetzen.

2G Sei D der Differentiationsoperator
$D: f \to f'$.
D ist eine stetige Abbildung von B_n in B_{n-1}.
$\|Df\|_{n-1} = \sup \{ \|f^{(i+1)}\|_0, 0 \leq i \leq n-1 \} \leq \|f\|_n$
für $f \in B_n$. Ebenso ist die i-fache Differentation D^i eine stetige Abbildung von B_n in B_{n-1}. Sei $\mu \in B_{n-i}'$, so ist das durch

$$\langle \mu, D^i f \rangle = \langle \mu D^i, f \rangle$$

definierte Funktional μD^i ein Element von B_n'.

<u>Darstellungssatz:</u>[1] Jedes $\alpha \in B_n'$ läßt sich in der Form $\alpha = \sum_{i=0}^{n} \mu_i D^i$ darstellen, wo die μ_i integrierbare Maße sind, und wo

$$\|\alpha\|_{B_n'} = \sum_{i=0}^{n} \|\mu_i\|_{B_0'} \qquad \text{ist} .$$

<u>Beweis:</u> Wir bezeichnen mit $(B_0)^{n+1}$ den Vektorraum der (n+1)- gliedrigen Folgen

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_n), \quad \varphi_i \in B_0 .$$

Versehen mit der Norm

$$\|\varphi\| = \sup \{ \|\varphi_i\|_0, \ 0 \leq i \leq n \}$$

ist $(B_0)^{n+1}$ ein Banachraum.

---

1) s. L. SCHWARTZ TD I, S. 91

Sei Δ der Teilraum

$$\{ \varphi \in (B_o)^{n+1} : \varphi = (f, f' \cdots f^{(n)}), f \in B_n \}.$$

Δ versehen mit der $(B_o)^{n+1}$- Norm ist isometrisch zu B_n. Denn jedem Element f aus B_n entspricht eindeutig ein Element φ aus $(B_o)^{n+1}$, und umgekehrt ist f bestimmt durch das erste Glied von φ . Daß die Korrespondenz linear ist und die Norm erhält, ist offensichtlich.

α kann also auch als ein beschränktes, lineares Funktional über Δ verstanden werden. Nach dem Satz von HAHN und BANACH[1)] gibt es ein beschränktes lineares Funktional $\bar{\alpha}$ gleicher Norm über $(B_o)^{n+1}$, das auf Δ mit α übereinstimmt. Wegen der Linearität ist

$$\langle \bar{\alpha}, \varphi \rangle = \langle \bar{\alpha}, (\varphi_o, \dots, \varphi_n) \rangle$$
$$= \langle \bar{\alpha}, (\varphi_o, 0, \cdots 0) \rangle + \cdots + \langle \bar{\alpha}, (0, \cdots 0, \varphi_n) \rangle .$$

Die Abbildung

$$\varphi_i \longrightarrow \langle \bar{\alpha}, (0, \cdot\cdot 0, \varphi_i, 0 \cdot\cdot 0) \rangle$$

ist beschränkt und linear. Deshalb gibt es ein $\mu_i \in B_o'$, so daß

$$\langle \bar{\alpha}, (0, \cdots \varphi_i \cdots 0) \rangle = \langle \mu_i, \varphi_i \rangle$$

ist. Also ist

$$\langle \bar{\alpha}, \varphi \rangle = \sum_{i=0}^{n} \langle \mu_i, \varphi_i \rangle .$$

Sei nun

$$\varphi \in \Delta ,$$

so ist

$$\langle \bar{\alpha}, \varphi \rangle = \langle \alpha, \varphi \rangle = \sum_{i=0}^{n} \langle \mu_i, f^{(i)} \rangle = \sum_{i=0}^{n} \langle \mu_i D^i, f \rangle .$$

---

1) s. LOOMIS S. 19

Geht man von Δ zu B_n zurück, so findet man

$$\langle \alpha, f \rangle = \sum_{i=0}^{n} \langle \mu_i D^i, f \rangle$$

oder

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} \mu_i D^i .$$

Da

$$\| \alpha \|_{B_n'} = \| \bar{\alpha} \|_{(B_0)^{n+1}} ,$$

ist, gilt

$$\| \alpha \|_{B_n'} = \sup \left\{ \left| \sum_{i=0}^{n} \langle \mu_i, \varphi_i \rangle \right| : \varphi_i \in B_0, \|\varphi_i\|_0 \leq 1 \right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \|\mu_i\|_{B_0'} .$$

3. Ausdehnung des Definitionsbereichs integrierbarer Maße und Distributionen.

3A Wir gebrauchen im folgenden öfters die Symbole $f_i \uparrow f$ oder $f_i \downarrow f$. Sie sollen bedeuten, daß die Funktionen f_i monoton aufsteigend oder monoton absteigend punktweise nach f konvergieren.

Wir nennen eine Familie reellwertiger Funktionen monoton[1], wenn sie mit jeder punktweise konvergierenden monoton auf- oder absteigenden Funktionenfolge deren Grenzwert enthält. Der Durchschnitt aller B_o enthaltenden monotonen Funktionenfamilien ist wieder eine monotone Funktionenfamilie, die B_o enthält, die kleinste ihrer Art. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{L}$ und nennen die ihr angehörigen Funktionen borelmeßbar[2].

Man beweist, daß mit f und g auch f + g, cf(c reelle Zahl), sup(f,g) und inf(f,g) in $\mathcal{L}$ liegen[3]. $\mathcal{L}$ ist also ein Vektorraum.

Sei f_i eine punktweise nach f konvergierende Funktionenfolge aus $\mathcal{L}$. Da

$$\sup\,(f_i,\, f_{i+1},\ldots,f_{i+k}) \uparrow_k \sup(f_i,f_{i+1},\, f_{1+2},\ldots) = h_i$$

und

$$h_i \downarrow f\,,$$

ist $f \in \mathcal{L}$ und $\mathcal{L}$ somit abgeschlossen gegen den Grenzübergang bei punktweise konvergierenden Folgen.

Wir können also auch $\mathcal{L}$ so charakterisieren, daß wir sagen, $\mathcal{L}$ sei die kleinste Funktionenmenge, die B_o enthält und mit jeder punktweise konvergierenden Funktionenfolge auch deren Grenzwert in sich schließt.

---

1) LOOMIS S. 32

2) LOOMIS S. 32, zur Bezeichnung "borelmeßbar" s.HALMOS S. 78

3) LOOMIS S. 32

3B Wir bezeichnen mit M die Menge aller borelmeßbaren beschränkten Funktionen.

<u>Satz:</u> Die Einheitskugel K(M), d.h. die Funktionenmenge

$$\{f \in M : \|f\|_0 \leq 1\} = \{f \in \mathcal{L} : \|f\|_0 \leq 1\}$$

ist die kleinste monotone Familie, die die Einheitskugel $K(B_0)$ von B_0 enthält.

<u>Beweis:</u>[1] Sei K die kleinste monotone $K(B_0)$ enthaltende Familie. K(M) ist monoton und enthält $K(B_0)$, also $K \subset K(M)$.

Sei weiter $\underline{1}$ die konstante Funktion, die an allen Punkten den Wert 1 annimmt, und $\mathfrak{M}$ die Menge aller Funktionen f mit der Eigenschaft

$\inf(+\underline{1}, \sup(-\underline{1}, f)) \in K$,

so ist $\mathfrak{M}$ monoton und enthält B_0. Also $\mathcal{L} \subset \mathfrak{M}$. Für $f \in K(M)$ ist aber

$\inf(\underline{1}, \sup(-\underline{1}, f)) = f$.

Jedes $f \in K(M)$ hat also die Eigenschaft $f \in K$. Damit ist $K(M) \subset K$.

Die Funktion $f \to \|f\|_0$ bildet eine Norm in M und M ist in dieser Normtopologie vollständig, also ein Banachraum. Konvergiert nämlich eine Folge beschränkter borelmeßbarer Funktionen gleichmäßig, dann ist ihr Grenzwert beschränkt und als punktweiser Limes borelmeßbarer Funktionen borelmeßbar (s. 3A).

---

1) s. LOOMIS S. 32

3C <u>Ausdehnungssatz für integrierbare Maße:</u> Sei $\mu \in B_0'$, dann gibt es genau ein Funktional $\bar{\mu} \in M'$, das auf B_0 mit μ übereinstimmt und für das gilt

aus $f_i \in M$ und $f_i \downarrow 0$ folgt $\langle \bar{\mu}, f_i \rangle \to 0$.

Die Normen von μ und $\bar{\mu}$ stimmen überein. Wenn μ positiv ist, ist es auch $\bar{\mu}$.

<u>Beweis:</u>

i) Existenz

Man kann μ als Differenz zweier positiver integrierbarer Maße darstellen [1)]

$$\mu = \mu^+ - \mu^-,$$

$$\|\mu\|_{B_0'} = \|\mu^+\|_{B_0'} + \|\mu^-\|_{B_0'},$$

wo[2)] für $f \geq 0$

$$\langle \mu^+, f \rangle = \sup \{ \langle \mu, g \rangle : g \in B_0,\ 0 \leq g \leq f \}$$

ist.

Sei λ ein positives, integrierbares Maß, dann gibt es nach den Ergebnissen der Maßtheorie[3)] einen linearen, B_0 enthaltenden Funktionenraum $L_1(\lambda)$, den Raum der λ-integrablen Funktionen, und eine Fortsetzung $\bar{\lambda}$ von λ auf $L_1(\lambda)$, die positiv und linear ist und für die der Satz von Beppo LEVI gilt[4)]:

> Sei $f_k \in L_1(\lambda)$, $f_k \uparrow f$ und $\sup \langle \bar{\lambda}, f_k \rangle < \infty$,
> dann ist $f \in L_1(\lambda)$ und $\langle \bar{\lambda}, f_k \rangle \uparrow \langle \bar{\lambda}, f \rangle$.

Die konstante Funktion $\underline{1}$ (s. 3B) ist λ-integrabel. Offensichtlich gibt es nämlich eine Folge positiver Funktionen $f_k \in B_0$, $f_k \uparrow \underline{1}$. Aus $0 \leq f_k \leq \underline{1}$ folgt aber $\|f_k\|_0 \leq 1$ und damit

$$\langle \lambda, f_k \rangle = \langle \bar{\lambda}, f_k \rangle \leq \|\lambda\|_{B_0'} .$$

Nach dem Satz von LEVI ist also $\underline{1} \in L_1(\lambda)$ und $\langle \bar{\lambda}, \underline{1} \rangle \leq \|\lambda\|_{B_0'}$.

Wir betrachten die Menge

$$K(\lambda) = \{ f \in L_1(\lambda) : \|f\|_0 \leq 1 \}$$

und behaupten, sie sei monoton.

---

1) BOURBAKI SS. 54,58,59
2) BOURBAKI S. 36 Gl.(1)
3) BOURBAKI SS. 131,145
4) BOURBAKI S. 149 prop. 4

Aus

$$f_i \in K(\lambda),\quad f_i \uparrow f$$

folgt nämlich

$$f_i \leq 1,$$

und wegen der Positivität von $\bar{\lambda}$ weiterhin

$$\langle \bar{\lambda}, f_i \rangle \leq \langle \bar{\lambda}, 1 \rangle .$$

Nach dem Satz von LEVI ist also $f \in L_1(\lambda)$ und, da $\| f \|_0 \leq 1$ ist, $f \in K(\lambda)$. Für $f_i \downarrow f$ hat man zu beachten, daß $f_i \downarrow f$ gleichbedeutend ist mit $-f_i \uparrow -f$ und daß $K(\lambda)$ mit g auch -g enthält.

$K(\lambda)$ ist demnach eine monotone Funktionenfamilie, die $K(B_o)$ enthält; also ist nach 3B

$$K(M) \subset K(\lambda).$$

Wegen der Linearität von $L_1(\lambda)$ folgt daraus

$$M \subset L_1(\lambda).$$

λ läßt sich also zu einem positiven beschränkten Funktional auf M ausdehnen.

Wir gehen zu μ zurück und setzen

$$\bar{\mu} = \overline{\mu^+} - \overline{\mu^-} .$$

Mit seinem positiven und negativen Anteil hat auch μ die Eigenschaft gegenüber monotonen Folgen stetig zu sein.

Es bleibt die Normengleichheit zu zeigen übrig. Wir etablieren sie zunächst für das positive Funktional λ. Wir leiteten oben

$$\langle \bar{\lambda}, 1 \rangle \leq \| \lambda \|_{B_o'}$$

ab. Andererseits gilt für $f \in B_o$, $\| f \|_0 \leq 1$,

$$-1 \leq f \leq 1,$$

$$-\langle \bar{\lambda}, 1 \rangle \leq \langle \lambda, f \rangle \leq \langle \bar{\lambda}, 1 \rangle,$$

$$|\langle \lambda, f \rangle| \leq \langle \bar{\lambda}, 1 \rangle .$$

Also

$$\| \lambda \|_{B_o'} \leq \langle \bar{\lambda}, 1 \rangle,$$

und damit

$$\| \lambda \|_{B_o'} = \langle \bar{\lambda}, 1 \rangle .$$

Ähnliche Überlegungen führt man für M durch und findet

$$\|\bar{\lambda}\|_{M'} = \langle \bar{\lambda}, 1 \rangle .$$

Demnach ist

$$\|\bar{\lambda}\|_{M'} = \|\lambda\|_{\mathcal{B}_0'} = \langle \bar{\lambda}, 1 \rangle .$$

Für $f \in M$, $\|f\|_0 \leq 1$ ist

$$\begin{aligned} |\langle \bar{\mu}, f \rangle| &\leq |\langle \overline{\mu^+}, f \rangle| + |\langle \overline{\mu^-}, f \rangle| \\ &\leq \|\overline{\mu^+}\|_{M'} + \|\overline{\mu^-}\|_{M'} \\ &= \|\mu^+\|_{\mathcal{B}_0'} + \|\mu^-\|_{\mathcal{B}_0'} \\ &= \|\mu\|_{\mathcal{B}_0'} . \end{aligned}$$

Also

$$\|\bar{\mu}\|_{M'} \leq \|\mu\|_{\mathcal{B}_0'} .$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} \|\bar{\mu}\|_{M'} &= \sup \{ |\langle \bar{\mu}, f \rangle| : f \in M, \|f\|_0 \leq 1 \} \\ &\geq \sup \{ |\langle \bar{\mu}, f \rangle| : f \in \mathcal{B}_0, \|f\|_0 \leq 1 \} \\ &= \|\mu\|_{\mathcal{B}_0'} . \end{aligned}$$

Daraus folgt die Gleichheit der Normen.

ii) Eindeutigkeit

Es gebe ein zweites Funktional $\mu' \in M'$ mit der verlangten Eigenschaft. Wir betrachten die Menge

$$K = \{ f \in M, \|f\|_0 \leq 1 : \langle \bar{\mu}, f \rangle = \langle \mu', f \rangle \}$$

und zeigen ihre Monotonie. Sei $f_i \in K$, $f_i \uparrow f$, dann geht mit $f - f_i \downarrow 0$ auch

$$\langle \bar{\mu}, f \rangle - \langle \bar{\mu}, f_i \rangle = \langle \bar{\mu}, f - f_i \rangle \to 0 .$$

Also

$$\langle \bar{\mu}, f_i \rangle \longrightarrow \langle \bar{\mu}, f \rangle \ .$$

Das gleiche gilt für μ'. Da aber $f_i \in K$, ist

$$\langle \bar{\mu}, f_i \rangle = \langle \mu', f_i \rangle \ ,$$

und damit

$$\langle \bar{\mu}, f \rangle = \langle \mu', f \rangle$$

und $f \in K$. Ähnlich beweist man daß K gegenüber absteigenden Folgen abgeschlossen ist.

Da K die Einheitskugel von B_o enthält und monoton ist, ist $K(M) \subset K$. Für alle $f \in M$, $\|f\|_0 \leq 1$ gilt also

$$\langle \bar{\mu}, f \rangle = \langle \mu', f \rangle \ .$$

Wegen der Linearität von $\bar{\mu}$ und μ' läßt sich die Identität von $K(M)$ auf M fortsetzen.

<u>Definition:</u> Wir nennen diese eindeutige Fortsetzung $\bar{\mu}$ von μ auf M ebenfalls ein integrierbares Maß und bezeichnen auch $\bar{\mu}$ mit μ. Mit anderen Worten wir identifizieren B_o' mit seinem durch $\mu \to \bar{\mu}$ vermittelten Bild in M'.

3D Wir definieren C_n als den Raum der stetigen und n-mal stetig differenzierbaren Funktionen, die samt ihren n ersten Ableitungen beschränkt sind. Unter der Norm $\|\cdot\|_n$ bildet C_n einen Banachraum.

Neben dem der Normtopologie benötigen wir in C_n einen schwächeren Konvergenzbegriff. Wir sagen eine Folge $f_k \in C_n$ konvergiert locker[1)], wenn alle $f_k^{(i)}$ $(i=o,..n)$ gleichmäßig über jedem Kompaktum konvergieren und wenn

$$\sup_k \|f_k\|_n$$

endlich ist.

C_n ist gegenüber der lockeren Konvergenz abgeschlossen; d.h. konvergiert eine Folge aus C_n locker, dann ist die

---

1) L. SCHWARTZ führt diesen Konvergenzbegriff TD II S. 58 ein und nennt ihn den pseudotopologischen.

Grenzfunktion wieder in C_n. Der Raum B_n ist bezüglich dieses Konvergenzbegriffs dicht in C_n - zu jedem $f \in C_n$ gibt es eine locker nach f konvergierende Folge aus B_n -, während B_n in der Normtopologie in C_n abgeschlossen ist.

Versuchen wir Satz und Beweis 2D, daß B_m für $m \geq n$ dicht in B_n bezüglich dessen Normtopologie ist, wortwörtlich auf C_n zu übertragen, so ist das unmöglich. Alle Funktionen aus C_1 sind nämlich wegen ihrer beschränkten Ableitung gleichmäßig stetig. Wäre der Satz richtig, so wären alle Funktionen aus C_o als gleichmäßige Limites gleichmäßig stetiger Funktionen selbst gleichmäßig stetig. Eine stetige und beschränkte Funktion braucht aber durchaus nicht gleichmäßig stetig zu sein.

Wohl aber gilt, daß C_m dicht in C_n $(m \geq n)$ ist bezüglich der lockeren Konvergenz von C_n. Der Beweis verläuft genauso wie in 2D, wenn man beachtet, daß eine stetige Funktion gleichmäßig stetig über jedem Kompaktum und daß $\varrho_\varepsilon * 1 = 1$ ist.

3E <u>Ausdehnungssatz für integrierbare Distributionen:</u> Sei $\alpha \in \mathcal{B}_m'$, so gibt es eine und nur eine Ausdehnung $\bar{\alpha} \in C_n'$ von α auf C_n, für die aus der lockeren Konvergenz von $f_k \in C_n$, $f_k \to f$ folgt

$$\langle \bar{\alpha}, f_k \rangle \to \langle \bar{\alpha}, f \rangle \quad .$$

Die Normen von α und $\bar{\alpha}$ stimmen überein.

<u>Beweis:</u>[1] Nach dem Darstellungssatz 2G ist

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} \mu_i D^i \; , \; \mu_i \in \mathcal{B}_0' \quad .$$

Jede stetige beschränkte Funktion ist Grenzwert einer punktweise konvergierenden Funktionenfolge aus B_o, damit borelmeßbar und wegen der Beschränktheit in M. Somit ist

$$\langle \bar{\alpha}, f \rangle = \sum_{i=0}^{n} \langle \mu_i , f^{(i)} \rangle$$

für $f \in C_n$ definiert.

1) L. SCHWARTZ TD II S. 59

Die Stetigkeit bezüglich der lockeren Konvergenz ergibt sich aus dem Satz von LEBESGUE[1] angewandt auf die positiven und negativen Anteile von μ_i. Denn alle Funktionen $f_k^{(i)}$ (i=0...n) konvergieren bei lockerer Konvergenz punktweise und sind majoriert von der integrablen Funktion

$$1 \cdot \sup_k \| f_k \|_n .$$

Die Eindeutigkeit der Fortsetzung ist durch die Dichte von B_n in C_n bezüglich der lockeren Konvergenz gewährleistet. Für $f \in C_n$, $\| f \|_n \leq 1$ ist

$$|\langle \bar{\alpha}, f \rangle| \leq \sum |\langle \mu_i, f^{(i)} \rangle| \leq \sum \| \mu_i \|_{B_0'} = \| \alpha \|_{B_n'}$$

nach 2G. Also

$$\| \bar{\alpha} \|_{C_n'} \leq \| \alpha \|_{B_n'} .$$

Andererseits ist $\| \bar{\alpha} \|_{C_n'} \geq \| \alpha \|_{B_n'}$, da bei $\| \bar{\alpha} \|_{C_n'}$ das Supremum über eine größere Funktionenklasse genommen wird.

<u>Definition:</u> Wir nennen diese eindeutige Ausdehenung von von B_n auf C_n wieder integrierbare Distribution und bezeichnen auch sie mit α. Wir identifizieren also B_n' mit seinem durch $\alpha \to \bar{\alpha}$ vermittelten Bild in C_n'.

---

1) BOURBAKI S. 14o

4. Strenge Konvergenz integrierbarer Maße

4A Wir verstehen im folgenden unter χ_κ, $\kappa = 0,1,2\ldots$, die Funktionen

$$\chi_0 = 1,$$

$$\chi_\kappa = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq \kappa \\ 1 & \text{für } |x| > \kappa \end{cases} \qquad (\kappa \geq 1) .$$

Wir haben in 3C die Zerlegung von $\mu \in B_o'$ in die beiden positiven integrierbaren Maße μ^+ und μ^- kennengelernt. Man setzt

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-,$$

und findet für $f \in B_o$, $f \geq o$[1])

$$\langle |\mu|, f \rangle = \sup \{ |\langle \mu, g \rangle| : g \in B_o, |g| \leq f \}.$$

Sei nun

$$p_\kappa(\mu) = \sup \{ |\langle \mu, f \rangle| : f \in C_o, |f| \leq \chi_\kappa \},$$

so gilt

$$p_\kappa(\mu) = \langle |\mu|, \chi_\kappa \rangle$$

Denn sei $f \in C_o$, $|f| \leq \chi_\kappa$, so ist

$$\begin{aligned} |\langle \mu, f \rangle| &\leq |\langle \mu^+, f \rangle| + |\langle \mu^-, f \rangle| \\ &\leq \langle \mu^+, |f| \rangle + \langle \mu^-, |f| \rangle \\ &= \langle |\mu|, |f| \rangle \\ &\leq \langle |\mu|, \chi_\kappa \rangle , \end{aligned}$$

und damit

$$p_\kappa(\mu) \leq \langle |\mu|, \chi_\kappa \rangle .$$

Die dabei verwandte Ungleichung

$$|\langle \mu^+, f \rangle| \leq \langle \mu^+, |f| \rangle$$

folgt aus der Positivität von μ^+ und der Ungleichung

$$-|f| \leq f \leq |f| .$$

---

1) BOURBAKI S. 36 Gl.(3)

Wie man leicht einsieht gibt es eine Folge

$$h_i \in B_o, \; h_i \geq 0, \; h_i \uparrow \chi_k .$$

Es ist

$$\langle |\mu|, h_i \rangle = \sup \{ |\langle \mu, f \rangle| : f \in B_o, |f| \leq h_i \} \leq p_k(\mu) .$$

Durch Grenzübergang erhält man

$$\langle |\mu|, \chi_k \rangle \leq p_k(\mu)$$

und hieraus die Behauptung

$$p_k(\mu) = \langle |\mu|, \chi_k \rangle .$$

4B Wir konnten jedes Funktional $T \in B_o'$ zu einem Funktional aus C_o' ausdehnen. Aber nicht jedes Element aus C_o' ist ein integrierbares Maß.

<u>Satz:</u> $T \in C_o'$ ist genau dann ein integrierbares Maß, wenn

$$p_k(T) = \sup \{ |\langle T, f \rangle| : f \in C_o, |f| \leq \chi_k \} \longrightarrow 0$$

für $k \longrightarrow \infty$.

<u>Beweis:</u> Falls T ein integrierbares Maß ist, so ist nach 4A

$$p_k(T) = \langle |T|, \chi_k \rangle .$$

Wegen $\chi_k \downarrow 0$, folgt die Behauptung.

Sei umgekehrt $T \in C_o'$ und $\lim p_k(T) = 0$. Wir zerlegen

$T = T_o + T_1$,

wo T_o das integrierbare Maß ist, das auf B_o mit T übereinstimmt. T_1 verschwindet für alle Elemente von B_o.

Mit $p_k(T)$ und $p_k(T_o)$ geht auch

$$p_k(T_1) = p_k(T - T_o) \leq p_k(T) + p_k(T_o)$$

gegen Null. Sei $f \in C_o$, $\|f\|_o \leq 1$. Für jedes k können wir f zerlegen

$$f = f_k + g_k ,$$

$$f_k \in B_o, \; |g_k| \leq \chi_k .$$

Es ist

$$|<T_1, f>| = |<T_1, g_k>| \leq p_k(T_1) \to 0$$

Also $<T_1, f> = 0$ für jedes $f \in C_o$ und damit $T_1 = 0$ und $T = T_o \in B_o'$.

Definition: Wir nennen eine Menge $\mathfrak{M} \subset C_o'$ streng beschränkt, wenn

$$\sup_{T \in \mathfrak{M}} p_k(T) = a_k$$

für jedes k = 0,1,2... endlich ist und für $k \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Folgerung: Eine streng beschränkte Menge ist eine Teilmenge von B_o', ihre Elemente sind alle integrierbare Maße.

Eine streng beschränkte Menge ist sicher normbeschränkt, denn $p_o(T) = \|T\|_{C_o'} = \|T\|_{B_o'}$. Die Umkehrung hiervon ist falsch. Das einfachste Beispiel einer wohl normbeschränkten aber nicht streng beschränkten Menge in B_o' ist

$$\{ \delta_x : x \in \mathbb{R} \}$$

wo δ_x durch

$$< \delta_x, f > = f(x)$$

definiert ist.

4C Satz: Der Abschluß einer streng beschränkten Menge in C_o' - C_o' versehen mit der einfachen Topologie- ist streng beschränkt[1].

Beweis: Sei $S \in \overline{\mathfrak{M}}$, der Hülle von $\mathfrak{M}$ in C_o', und sei

$$f \in C_o, \ |f| \leq \chi_k .$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $T \in \mathfrak{M}$, so daß

$$|<T, f> - <S, f>| \leq \varepsilon$$

also

$$|<S, f>| \leq |<T, f>| + \varepsilon \leq a_k + \varepsilon$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist $|<S, f>| \leq a_k$ und damit $p_k(S) \leq a_k$.

4D Satz: Auf einer streng beschränkten Menge stimmen die einfachen Topologien von B_o' und C_o' überein.

---

1) Hier ist zu bemerken, daß der ganze Raum B_o' bezüglich der einfachen Topologie von C_o' in C_o' dicht ist (Beweis wie BOURBAKI esp. vect. top. II, S. 114, prop. 5).

Beweis: Es genügt folgendes zu zeigen: Zu jedem $f \in C_0$, $\|f\|_0 \leq 1$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $g \in B_0$ und ein $\delta > 0$, so daß

aus $|\langle T, g\rangle| \leq \delta$ folgt $|\langle T, f\rangle| \leq \varepsilon$.

Wir wählen ein solches k, daß $a_k = \sup_{s \in \mathfrak{M}} p_k(s) \leq \frac{\varepsilon}{3}$,

und eine solche Funktion $g \in \mathcal{B}_0$, $\|g\|_0 \leq 1$, daß $f(x) = g(x)$ für $|x| \leq k$, und setzen $\delta = \varepsilon/3$. Dann ist

$$|\langle T, f\rangle| \leq |\langle T, g\rangle| + |\langle T, f-g\rangle| \leq |\langle T, g\rangle| + 2p_k(T)$$
$$\leq \varepsilon .$$

4E Satz: Sei f_i eine locker konvergierende Folge aus C_0, d.h. die Folge ist beschränkt und die f_i konvergieren gleichmäßig über jedem Kompaktum in R, so konvergiert $\langle \mu, f_i\rangle$, $\mu \in \mathcal{B}_0'$ gleichmäßig für jede streng beschränkte Menge $\{\mu\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{M}$ eine streng beschränkte Menge. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß

$$\|f_i\|_0 \leq 1, \quad i = 0, 1, \ldots$$

und

$$\|\mu\|_{\mathcal{B}_0'} = p_0(\mu) \leq 1$$

für alle $\mu \in \mathfrak{M}$ ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k, so daß $p_k(\mu) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für $\mu \in \mathfrak{M}$. Weiter gibt es ein n, so daß

$$|f_i(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

für $|x| \leq k$ und $i \geq n$, wo $f = \lim f_i$.

$$|\langle \mu, f\rangle - \langle \mu, f_i\rangle| = |\langle \mu, f - f_i\rangle|$$
$$\leq |\langle \mu, (f-f_i)\chi_k\rangle| + |\langle \mu, (f-f_i)(1-\chi_k)\rangle|$$
$$\leq 2p_k(\mu) + \frac{\varepsilon}{3}\|\mu\|_{\mathcal{B}_0'}$$
$$\leq \varepsilon$$

für alle $i \geq n$ und $\mu \in \mathfrak{M}$.

4F **Satz:** Eine Folge μ_i integrierbarer Maße ist genau dann streng beschränkt, wenn sie normbeschränkt ist und wenn

$$\limsup_{i\to\infty} p_k(\mu_i) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty \quad .$$

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist offensichtlich. Wenn sie erfüllt ist, folgt die Endlichkeit von $\sup_i p_k(\mu_i)$ aus der Normbeschränktheit, denn

$$p_k(\mu) \leq p_o(\mu) = \|\mu\|_{B_0} \quad .$$

Es bleibt zu zeigen übrig, daß

$$\sup_i p_k(\mu_i) \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty \quad .$$

Die Aussage sei falsch, dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\sup_i p_k(\mu_i) \geq \delta$$

für unendlich viele k. Da die $p_k(\mu)$ mit wachsendem k monoton abnehmen, gilt

$$\sup_i p_k(\mu_i) \geq \delta \qquad \text{für alle } k \text{ .}$$

Zu jedem k gibt es ein i(k), so daß

$$p_k(\mu_{i(k)}) \geq \frac{\delta}{2} \quad .$$

Unter den i(k) sind unendlich viel verschiedene, weil es sonst ein μ_j gäbe, für das $p_k(\mu_j) \geq \frac{\delta}{2}$ für unendlich viele k wäre.

Für $l \leq k$ ist

$$p_l(\mu_{i(k)}) \geq p_k(\mu_{i(k)}) \geq \frac{\delta}{2} \quad .$$

Also

$$\liminf_{k\to\infty} p_l(\mu_{i(k)}) \geq \frac{\delta}{2} \quad \text{für alle } l \quad .$$

Damit ist

$$\limsup_{i\to\infty} p_l(\mu_i) \geq \liminf_{k\to\infty} p_l(\mu_{i(k)}) \geq \frac{\delta}{2} > 0 \, ,$$

und der Widerspruch gezeigt.

4G <u>Definition:</u> Eine Folge μ_i integrierbarer Maße heißt streng konvergent[1], wenn sie einfach in B_o' konvergiert und streng beschränkt ist.

<u>Folgerungen aus 4B bis 4F:</u> Eine streng konvergente Folge konvergiert einfach in C_o' gegen ein integrierbares Maß[2].

Eine Folge $\mu_i \in \mathcal{B}_o'$ konvergiert genau dann streng, wenn sie einfach in B_o' konvergiert und wenn[3]

$$\limsup_{i \to \infty} p_k(\mu_i) \to 0 \quad \text{für } k \to \infty$$

<u>Satz:</u> Konvergiert μ_i in der Normtopologie von B_o' nach μ, so konvergiert μ_i streng.

<u>Beweis:</u>

$$|p_k(\mu_i) - p_k(\mu)| \leq p_k(\mu_i - \mu)$$

$$\leq \|\mu - \mu_i\|_{\mathcal{B}_o'}$$

also

$$p_k(\mu_i) \to p_k(\mu).$$

Nach der letzten Folgerung ergibt sich hieraus die Behauptung.

4H <u>Satz:</u> Eine einfach in B_o' konvergierende Folge <u>positiver</u> integrierbarer Maße μ_i konvergiert genau dann streng gegen $\mu \in \mathcal{B}_o'$, wenn

$$\|\mu_i\|_{\mathcal{B}_o'} = \langle \mu_i, 1 \rangle \quad \text{gegen} \quad \|\mu\|_{\mathcal{B}_o'} = \langle \mu, 1 \rangle$$

geht.

---

1) L. SCHWARTZ, Semigroups S. 89 führt diesen Begriff unter dem Namen "Strict Convergence" ein.

2) Aus der strengen Konvergenz von $\mu_i \to \mu$ folgt keineswegs, daß die μ_i einfach in M' konvergieren. Gegenbeispiel: $\mu_i = \delta_{x_i}$, $x_i \to x$ (Definition von δ_x s. 4B).

3) Wegen des "uniform boundedness theorem" (1F) ist die Forderung der Normbeschränktheit (4F) überflüssig.

<u>Beweis:</u> Die Notwendigkeit folgt aus 4D. Es bleibt zu zeigen, daß die Behauptung hinreicht.

Sei $g_k(x)$ stetig,

$$g_k(x) = 0 \quad \text{für } |x| \leq k-1,$$

$$0 \leq g_k(x) \leq 1 \quad \text{für } k-1 \leq |x| \leq k,$$

$$g_k(x) = 1 \quad \text{für } |x| \geq k.$$

Für jedes μ_i ist

$$\langle \mu_i, g_k \rangle \geq \langle \mu_i, \chi_k \rangle = p_k(\mu_i).$$

Da $1 - g_k \in \mathcal{B}_0$ ist, konvergiert $\langle \mu_i, 1 - g_k \rangle$ nach $\langle \mu, 1 - g_k \rangle$, und damit

$$\langle \mu_i, g_k \rangle = \langle \mu_i, 1 \rangle - \langle \mu_i, 1 - g_k \rangle$$

$$\longrightarrow \langle \mu, 1 \rangle - \langle \mu, 1 - g_k \rangle = \langle \mu, g_k \rangle.$$

Es ist

$$\langle \mu, g_k \rangle \geq \limsup_{i \to \infty} p_k(\mu_i).$$

Weil $g_k \downarrow 0$, geht $\langle \mu, g_k \rangle \downarrow 0$ und folglich

$$\limsup_{i \to \infty} p_k(\mu_i) \to 0.$$

Die Behauptung folgt dann aus 4G.

<u>Folgerung:</u> Eine einfach in C_0' konvergierende Folge positiver integrierbarer Maße konvergiert genau dann streng, wenn der Grenzwert ein integrierbares Maß ist.

4I Der letzte Satz gilt auch für beliebige, nicht notwendig positive integrierbare Maße. Doch ist der Beweis viel langwieriger.

<u>Satz:</u> Sei μ_i eine einfach in B_o' nach $\mu \in \mathcal{B}_o'$ konvergierende Folge integrierbarer Maße und konvergiere $\|\mu_i\|_{\mathcal{B}_o'}$ nach $\|\mu\|_{\mathcal{B}_o'}$, dann konvergiert $\mu_i \to \mu$ streng.

<u>Beweis:</u>

i) Wir erinnern zunächst an einen Sachverhalt, der in jedem Banachraum X gilt. Sei $T_i \in X'$ eine einfach konvergente Folge, dann ist

$$\|T\| = \|\lim T_i\| \leq \liminf \|T_i\| .$$

Sei nämlich $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, dann gilt $|\langle T_i, x\rangle| \leq \|T_i\|$ und

$$\liminf |\langle T_i, x\rangle| \leq \liminf \|T_i\| .$$

Da $\langle T_i, x\rangle$ nach Voraussetzung nach $\langle T, x\rangle$ konvergiert, ist

$$|\langle T, x\rangle| \leq \liminf \|T_i\|$$

und

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle T, x\rangle| \leq \liminf \|T_i\| .$$

ii) Sei $\rho > 0$,

$$K_\rho = \{ x \in \mathbb{R} : |x| \leq \rho \} ,$$

$$\varphi_\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < \rho \\ 0 & \text{" } |x| \geq \rho \end{cases} ,$$

$$\psi_\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{" } |x| = \rho \\ 0 & \text{" } |x| \neq \rho \end{cases} ,$$

$$\chi_\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{" } |x| > \rho \\ 0 & \text{" } |x| \leq \rho \end{cases} .$$

ρ sei so gewählt, daß das $|\mu|$-Maß und alle $|\mu_i|$-Maße des Randes von K_ρ verschwinden.

$$\langle |\mu|, \psi_\rho \rangle = \langle |\mu_i|, \psi_\rho \rangle = 0$$

Die Mächtigkeit der möglichen ρ ist in jedem offenen Intervall die des Kontinuums, denn es kann nur abzählbar viele ρ geben, für die der Rand ein von Null ver schiedenes Maß bezüglich $|\mu|$ und aller $|\mu_i|$ hat.

Die Menge der Funktionen aus B_o, die außerhalb, bzw. innerhalb von K_ρ verschwinden, bilden je einen Banachraum $B_o(K_\rho)$ und $B_o(\complement K_\rho)$. Jedes integrierbare Maß induziert ein lineares beschränktes Funktional über $B_o(K_\rho)$ und $B_o(\complement K_\rho)$ mit den Normen

$$\|\lambda\|_{K_\rho} = \langle |\lambda|, \varphi_\rho \rangle ,$$

$$\|\lambda\|_{\complement K_\rho} = \langle |\lambda|, \chi_\rho \rangle .$$

Es ist

$$\|\lambda\| = \|\lambda\|_{B_o'} = \langle |\lambda|, \underline{1} \rangle$$

$$= \langle |\lambda|, \varphi_\rho \rangle + \langle |\lambda|, \psi_\rho \rangle + \langle |\lambda|, \chi_\rho \rangle$$

$$= \|\lambda\|_{K_\rho} + \langle |\lambda|, \psi_\rho \rangle + \|\lambda\|_{\complement K_\rho} .$$

Wegen unserer Wahl von ρ ist

$$\|\mu_i\| = \|\mu_i\|_{K_\rho} + \|\mu_i\|_{\complement K_\rho}$$

und

(1) $$\|\mu\| = \|\mu\|_{K_\rho} + \|\mu\|_{\complement K_\rho}$$

Da

$$\|\mu_i\|_{K_\rho} \leq \|\mu_i\|$$

ist die Folge $\|\mu_i\|_{K_\rho}$ beschränkt. Wir können eine Teilfolge $\bar{\mu}_i$ auswählen, so daß $\|\bar{\mu}_i\|_{K_\rho}$ und damit auch

$$\|\bar{\mu}_i\|_{\complement K_\rho} = \|\mu_i\| - \|\mu_i\|_{K_\rho}$$

konvergiert.

Nach i) gilt

(2) $\lim \|\bar{\mu}_i\|_{K_\varrho} \geq \|\mu\|_{K_\varrho}$

(3) $\lim \|\bar{\mu}_i\|_{\complement K_\varrho} \geq \|\mu\|_{\complement K_\varrho}$

Außerdem ist nach Voraussetzung

(4) $\lim \|\bar{\mu}_i\|_{K_\varrho} + \lim \|\bar{\mu}_i\|_{\complement K_\varrho} = \lim \|\bar{\mu}_i\| = \|\mu\|$

Die Relationen (1) bis (4) sind nur verträglich, wenn

(5) $\lim \|\bar{\mu}_i\|_{K_\varrho} = \|\mu\|_{K_\varrho}$,

(6) $\lim \|\bar{\mu}_i\|_{\complement K_\varrho} = \|\mu\|_{\complement K_\varrho}$

ist. Denn gelte z.B. in (2) das $>$ Zeichen, also

$$\lim \|\bar{\mu}_i\|_{K_\varrho} > \|\bar{\mu}\|_{K_\varrho}$$

so können wir (3) hinzuaddieren und erhalten mit (1)

$$\lim \|\bar{\mu}_i\|_{K_\varrho} + \lim \|\bar{\mu}_i\|_{\complement K_\varrho}$$
$$> \|\mu\|_{K_\varrho} + \|\mu\|_{\complement K_\varrho} = \|\mu\|$$

was gegen (4) verstößt.

Da jede konvergente Teilfolge $\|\bar{\mu}_i\|_{K_\varrho}$ nach (5) den Grenzwert $\|\mu\|_{K_\varrho}$ besitzt, konvergiert $\|\mu_i\|_{K_\varrho}$, und (5) und (6) gelten nicht nur für konvergente Teilfolgen, sondern für die ganze Folge. Also

(7) $\langle |\mu_i|, \varphi_\varrho \rangle \longrightarrow \langle |\mu|, \varphi_\varrho \rangle$

(8) $\langle |\mu_i|, \chi_\varrho \rangle \longrightarrow \langle |\mu|, \chi_\varrho \rangle$

iii) Zu jedem k = 1,2,... wählen wir ein ϱ_k,

$$k-1 \leq \varrho_k \leq k$$

für das das $|\mu|$-Maß und alle $|\mu_i|$-Maße des Randes von K_{ϱ_k} verschwindet. Nach den Überlegungen des Beginns von ii) gibt es stets ein solches ϱ_k .

Aus (8) folgt

$$\limsup_{i\to\infty} p_k(\mu_i) = \limsup \langle |\mu_i|, \chi_k \rangle$$

$$\leq \lim \langle |\mu_i|, \chi_{\varrho k} \rangle = \langle |\mu|, \chi_{\varrho k} \rangle \; .$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber für $k \to \infty$. Damit folgt die Behauptung aus 4G.

4J **Definition:** Wir nennen eine Funktion $F: R \to B_o'$ streng stetig, wenn $F(t_i)$ streng gegen $F(t)$ konvergiert für jede konvergente Folge $t_i \to t$.

Satz: Eine Funktion $F(t)$ ist dann und nur dann streng stetig, wenn sie einfach stetig ist und über jedem Kompaktum $K \subset R$ streng beschränkt ist.

Beweis: Daß die Bedingung hinreicht, ist klar. Zu zeigen bleibt ihre Notwendigkeit. Daß eine streng stetige Funktion einfach stetig ist, ergibt sich unmittelbar aus 1B. Die Normbeschränktheit der Menge

$$\{ F(t) : t \in K \}$$

folgt aus dem uniform boundedness theorem (1F). Wir haben also noch zu beweisen, daß

$$\sup_{t\in K} p_k(F(t)) \downarrow 0 \qquad \text{für } k \to \infty \; .$$

Diese Aussage sei falsch. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\sup_{t\in K} p_k(F(t)) \geq \delta \qquad \text{für alle } k \; ,$$

und eine Folge t_i, so daß

$$p_i(F(t_i)) \geq \frac{\delta}{2} \; .$$

Diese Folge hat mindestens einen Häufungspunkt t_o. Mann kann eine Teilfolge t_j auswählen, $t_j \to t_o$. Da aber nach Voraussetzung $F(t_j)$ streng gegen $F(t_o)$ konvergieren soll, ist damit der Widerspruch gezeigt.

5. Faltung

5A Der Verschiebungsoperator

$$\tau_h : B_n \to B_n \quad (n = 0, 1, 2 \dots),$$

$$(\tau_h f)(x) = f(x-h),$$

ist linear und beschränkt,

$$\| \tau_h f \|_n = \| f \|_n ,$$

$$\| \tau_h \|_{LB_n} = 1 ,$$

und gehört damit LB_n an, $n = 0, 1, 2 \dots$

Satz: Die Abbildung

$$h \in \mathbb{R} \to \tau_h \in LB_n$$

ist einfach stetig.

Beweis: Nach 1B(3) ist zu zeigen, daß für jedes $f \in B_n$ aus $h \to h'$ folgt

$$\| \tau_h f - \tau_{h'} f \|_n \to 0 .$$

Es ist aber

$$\| \tau_h f - \tau_{h'} f \|_n$$

$$= \sup_{0 \leq i \leq n} \| f^{(i)}(x - h' - (h-h')) - f^{(i)}(x-h') \|_0 .$$

Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $f^{(i)}$ (s. 2C) folgt die Behauptung.

5B Definition: Sei $\mu \in B_n'$, $f \in B_m$, $m \geq n$, so definieren wir zu μ und f eine neue Funktion $\mu * f$ durch

$$(\mu * f)(x) = \langle \mu(y), f(x-y) \rangle_y$$

und nennen $\mu * f$ die Faltung von μ und f. (In $\mu * f$ ist y eine uneigentliche Variable s. 2F).

Die Definition ist sinnvoll; denn für jedes x ist f(x-y) in B_m und wegen $m \geq n$ ist die Anwendung von μ definiert.

Mit Hilfe des Operators

$$\sigma : (\sigma f)(x) = f(-x) \quad ,$$

$$\sigma \in LB_m, \; m = 0, 1, 2 \ldots \quad ,$$

$$\| \sigma \|_{LB_m} = 1 \quad ,$$

erhalten wir

$$(\mu * f)(x) = \langle \mu, \tau_x \sigma f \rangle \, .$$

Definieren wir die Anwendung von τ_x und σ auf integrierbare Distributionen durch

$$\langle \tau_x \mu, \tau_x f \rangle = \langle \mu, f \rangle \quad ,$$

$$\langle \sigma \mu, \sigma f \rangle = \langle \mu, f \rangle \quad ,$$

und schreiben wir mit y als uneigentlicher Variablen

$$(\tau_x \mu)(y) = \mu(y-x) \quad ,$$

$$(\sigma \mu)(y) = \mu(-y) \quad ,$$

so finden wir

$$(\mu * f)(x) = \langle \tau_x \sigma \mu, f \rangle = \langle \mu(x-y), f(y) \rangle_y \, .$$

50 **Satz:** Sei $\mu \in B_0'$, so ist

$$f \in B_0 \rightarrow \mu * f$$

eine stetige lineare Abbildung von B_0 in sich mit der Norm $\| \mu \|_{B_0'}$.

Beweis: Die Linearität ist offensichtlich. Es bleibt zu zeigen, daß die Abbildung stetig ist und B_0 in sich überführt. Wir beweisen zunächst, daß sie eine stetige Abbildung von B_0 in C_0 ist.

Aus

$$(\mu * f)(x) = \langle \mu, \tau_x \sigma f \rangle$$

folgt mit 5A, daß $(\mu * f)(x)$ stetig in x ist, und wegen

$$\| \sigma \tau_x f \|_0 = \| f \|_0 \;,$$

daß

$$\| \mu * f \|_0 \leq \| \mu \|_{B_0'} \| f \|_0 \;.$$

Wenn wir noch zeigen, daß $\mu * f$ im Unendlichen verschwindet, haben wir den Beweis bis auf die Normgleichheit, die aber direkt aus der Definition der Normen folgt, erledigt. Wir nehmen zunächst an, daß f außerhalb eines Kompaktums verschwindet. Für genügend große x wird

$$| f(x-y) | \leq \chi_K(y) \| f \|_0 \;,$$

und damit

$$| (\mu * f)(x) | = | \langle \mu(y), f(x-y) \rangle | \leq \| f \|_0 \, p_K(\mu)$$

beliebig klein.

Die Familie der stetigen Funktionen, die außerhalb eines Kompaktums verschwinden, ist aber in der Normtopologie von B_0 dicht in B_0. Das durch die Faltung mit μ vermittelte Bild von B_0 liegt im Abschluß des Bildes dieser Funktionenfamilie in C_0, also im Abschluß von B_0 in C_0, da aber B_0 in C_0 abgeschlossen ist, in B_0 selbst.

5D <u>Satz:</u> Sei $f \in B_{n+1}$, so konvergiert

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \rightarrow f'(x) \qquad \text{für } \Delta x \rightarrow 0$$

in der B_n- Norm.

Beweis: Für i = 0,1..n gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f^{(i+1)}$ (s. 2C)

$$\left\| \frac{f^{(i)}(x+\Delta x) - f^{(i)}(x)}{\Delta x} - f^{(i+1)}(x) \right\|_0$$

$$= \| f^{(i+1)}(x + \vartheta_i \Delta x) - f^{(i+1)}(x) \|_0 \qquad (0 \leq \vartheta_i \leq 1)$$

$$\to 0 \quad \text{für } \Delta x \to 0 .$$

Folgerung: Sei D der Differentiationsoperator, $\mu \in B_n'$, $f \in B_m$, $m \geq n+1$, so ist $\mu * f$ differenzierbar, und

$$D(\mu * f) = \mu * Df = \mu * f' .$$

Beweis:

$$D(\mu * f)$$

$$= \lim \frac{\langle \mu(y), f(x+\Delta x - y)\rangle - \langle \mu(y), f(x-y)\rangle}{\Delta x}$$

$$= \lim \left\langle \mu(y), \frac{f(x+\Delta x - y) - f(x-y)}{\Delta x} \right\rangle$$

$$= \langle \mu(y), f'(x-y) \rangle$$

$$= \mu * f' .$$

5E Satz: Sei $\alpha \in B_n'$ und $m \geq n$, so ist

$$f \in B_m \to \alpha * f$$

eine stetige lineare Abbildung von B_m in B_{m-n}.

Beweis: Nach 2G läßt sich α in der Form darstellen

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} \mu_i D^i , \quad \mu_i \in B_0' .$$

Für $f \in B_m$ und $k = 0,1,..m-n$ ist nach 5C und 5D

$$\begin{aligned} D^k(\alpha * f) &= \alpha * f^{(k)} \\ &= \sum \langle \mu_i(y), \frac{\partial^i}{\partial y^i} f^{(k)}(x-y) \rangle \\ &= \sum (-1)^i \langle \mu_i(y), f^{(k+i)}(x-y) \rangle \\ &= \sum (-1)^i \mu_i * f^{(k+i)} \\ &\in B_{0-} \end{aligned}$$

Also ist

$$\alpha * f \in B_{m-n} .$$

Daß die Abbildung linear und beschränkt ist, ist offensichtlich.

5F <u>Satz:</u> Konvergiert eine Folge $\mu_i \in B_0'$ einfach nach μ, so konvergiert $\mu_i * f$, $f \in B_0$ locker in B_0 nach $\mu * f$; d.h. die $\mu_i * f$ sind gleichmäßig beschränkt und konvergieren gleichmäßig über jedem Kompaktum.

<u>Beweis:</u> Die gleichmäßige Beschränktheit der $\mu_i * f$ gilt wegen der Normbeschränktheit der μ_i und diese wiederum folgt aus dem uniform boundedness theorem (1F). Die gleichmäßige Konvergenz über jedem Kompaktum $K \subset R$ ergibt sich aus 1C und der Tatsache, daß die Menge

$$\{ \sigma \tau_x f : x \in K \}$$

für jedes feste $f \in B_0$ als stetiges Bild (s. 5A) eines Kompaktums kompakt ist.

5G <u>Satz:</u> Konvergiert eine Folge $\mu_i \in B_0'$ streng nach μ, so konvergiert $\mu_i * f$, $f \in B_0$ in der B_0 - Norm nach $\mu * f$.

<u>Beweis:</u> Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k, so daß

$$p_k(\mu_i) \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle } i$$

ist.

Sei f eine stetige, außerhalb des Intervalls $[-r,r]$ verschwindende Funktion, $\|f\|_0 \leq 1$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der $\mu_i * f$ über jedem Kompaktum (5F) folgt, daß es ein n gibt, so daß

$$|(\mu_i * f - \mu * f)(x)| \leq \varepsilon$$

ist, für alle $i \geq n$ und $|x| \leq k + r$.

Für $|x| > k + r$ gilt, da dann

$$|f(x-y)| \leq \chi_k(y)$$

ist,

$$|(\mu_i * f)(x)| = |\langle \mu_i(y), f(x-y) \rangle| \leq p_k(\mu_i) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

und damit

$$|(\mu_i * f - \mu * f)(x)| \leq 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad .$$

Wir haben also bewiesen, daß $\mu_i * f$ für jede außerhalb eines Kompaktums verschwindende Funktion f gleichmäßig, d.h. in der B_0- Norm konvergiert. Da die Funktionen dieser Art in B_0 dicht und die μ_i normbeschränkt sind, läßt sich das Ergebnis auf B_0 übertragen (s. 1C).

5H Sei $\mu \in \mathcal{B}_m'$, $\nu \in \mathcal{B}_n'$ und $\ell \geq m+n$, so ist für $f \in B_\ell$ der Ausdruck

$$\mu * (\nu * f)$$

definiert und gleich

$$\langle \mu(y), \langle \nu(z), f(x-y-z) \rangle\rangle \quad .$$

Also

$$\mu * (\nu * f) = \lambda * f \quad ,$$

wo λ die durch

$$\langle \lambda, f \rangle = \langle \mu(y), \langle \nu(z), f(y+z) \rangle\rangle$$

definierte integrierbare Distribution m+n-ter Ordnung ist.

Wir nennen λ die Faltung von μ und ν und schreiben

$$\lambda = \mu * \nu ,$$

$$\mu * (\nu * f) = (\mu * \nu) * f .$$

Die Assoziativität der Faltung zwischen Distributionen ergibt sich sofort, die Kommutativität folgt aus dem Satz von FUBINI[1], bzw. seiner Erweiterung auf Distributionen[2].

5I <u>Satz:</u> Konvergiert $\mu_i \in B_0'$ streng nach μ und $\nu_i \in B_0'$ einfach nach ν , dann konvergiert $\mu_i * \nu_i$ einfach nach $\mu * \nu$.

<u>Beweis:</u>

$$|\langle \mu_i * \nu_i , f \rangle - \langle \mu * \nu , f \rangle|$$

$$\leq |\langle \mu_i * (\nu - \nu_i), f \rangle| + |\langle (\mu_i - \mu) * \nu , f \rangle|$$

$$= |\langle \mu_i , \sigma [(\nu - \nu_i) * \sigma f] \rangle| + |\langle \mu_i - \mu , \sigma (\nu * \sigma f) \rangle| .$$

Denn

$$\langle \alpha * \beta , f \rangle = [(\alpha * \beta) * \sigma f](0)$$

$$= [\alpha * (\beta * \sigma f)](0) = \langle \alpha ; \sigma (\beta * \sigma f) \rangle .$$

Wegen 5F konvergiert

$$\sigma [(\nu - \nu_i) * \sigma f]$$

locker gegen 0. Aus 4E folgt daraus die gleichmäßige Konvergenz von

$$\langle \mu , \sigma [(\nu - \nu_i) * \sigma f] \rangle$$

für jede streng beschränkte Menge $\{\mu\}$. Also bildet der erste Term eine Nullfolge. Der zweite Term geht ohnehin gegen Null.

5J <u>Satz:</u> Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei streng beschränkte Mengen in B_0', dann ist

$$\mathfrak{M} * \mathfrak{N} = \{ \mu * \nu : \mu \in \mathfrak{M}, \nu \in \mathfrak{N} \}$$

streng beschränkt.

---

1) LOOMIS S. 44

2) SCHWARTZ TD I S. 109

Beweis: Sei $f \in C_0$, $|f| \leq \chi_k$ dann ist

$$|f(x+y)| \leq \chi_k(x+y) \leq \chi_{\frac{k}{2}}(x)\chi_0(y) + \chi_0(x)\chi_{\frac{k}{2}}(y)$$

und

$$|\langle \mu * \nu, f \rangle| = |\langle \mu(x), \langle \nu(y), f(x+y) \rangle\rangle|$$

$$\leq p_{\frac{k}{2}}(\mu)\, p_0(\nu) + p_0(\mu)\, p_{\frac{k}{2}}(\nu) .$$

Diese Abschätzung gilt für alle $f \in C_0$, $|f| \leq \chi_k$, darum ist

$$p_k(\mu * \nu) \leq p_{\frac{k}{2}}(\mu)\, p_0(\nu) + p_0(\mu)\, p_{\frac{k}{2}}(\nu) .$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

5K Satz:[1] Konvergieren die Folgen μ_i und ν_i aus B_0' streng gegen μ und ν, dann geht $\mu_i * \nu_i$ streng gegen $\mu * \nu$.

Beweis: Direkte Folge der letzten beiden Sätze.

1) s. a. L. SCHWARTZ Semigroups S. 9o

6. Ausdehnung von Operatoren

6A **Satz:** Jeder positive Operator T aus LB_n $(n = 1,2,3...)$ läßt sich eindeutig zu einem positiven Operator aus LB_0 mit kleinerer Norm ausdehnen.

Beweis: Wir verschaffen uns zunächst eine n-mal stetig differenzierbare monoton abnehmende Funktion φ mit den Eigenschaften

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \leq 0,$$
$$1 \geq \varphi(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \infty$$
$$\varphi^{(k)}(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to +\infty, \quad 0 \leq k \leq n$$
$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq 1 \quad \text{für} \quad x \in \mathcal{R}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Dann definieren wir eine Folge φ_i durch

$$\varphi_i(x) = \varphi(|x| - i)$$

Die φ_i liegen alle in B_n und es ist $\|\varphi_i\|_n = 1$

Da die φ_i monoton aufsteigend gegen $\underline{1}$ konvergieren, $\varphi_i \uparrow 1$, bildet $T\varphi_i$ eine monoton wachsende Folge, die durch $1 . \|T\|_{LB_n}$ beschränkt ist und darum punktweise konvergiert. Wir nennen den Grenzwert $T\underline{1}$.

Für jedes f in B_n konvergiert $\|f\varphi_i - f\|_n \to 0$
Denn es ist

$$(f\varphi_i)^{(k)} = f^{(k)}\varphi_i + k f^{(k-1)}\varphi_i' + \cdots$$

und

$$\varphi_i(x) = 1 \quad \text{für} \quad |x| \leq i$$
$$\varphi_i^{(l)}(x) = 0 \quad \text{für} \quad |x| \leq i, \quad l \geq 1 .$$

Also konvergieren alle $(f\varphi_i)^{(k)}$ gleichmäßig gegen $f^{(k)}$.

Sei nun f in B_n, $\|f\|_0 \leq 1$ dann ist

$$-\varphi_i \leq f\varphi_i \leq \varphi_i$$

und

$$-T\varphi_i \leq T(f\varphi_i) \leq T\varphi_i$$

Im Limes

$$-T1 \leq Tf \leq T1$$

also

$$|Tf| \leq T1 \leq \|T\|_{LB_n} \cdot 1$$

oder

$$\|Tf\|_0 \leq \|T\|_{LB_n}.$$

Sei f in B_o, dann gibt es eine gleichmäßig konvergente Folge $f_i \in B_n$, $f_i \to f$ (s. 2D). Dann konvergiert auch Tf_i gleichmäßig und hat damit eine stetige Funktion, die im Unendlichen verschwindet, als Grenzwert. Aus der letzten Ungleichung ergibt sich außerdem, daß

$$\|T\|_{LB_0} \leq \|T\|_{LB_n}.$$

Anmerkung: Ähnlich läßt sich für ein positives $\alpha \in B_n'$ nachweisen, daß es sich auf eindeutige Weise zu einem positiven integrierbaren Maß fortsetzen läßt[1)].

6B Satz: Zu jedem Operator $T \in LB_0$ gibt es genau einen Operator $\bar{T} \in LM$, der auf B_o mit T übereinstimmt, und für den gilt:

Sei $f_i \in M$ eine gleichmäßig beschränkte punktweise konvergierende Folge, so gilt das selbe von $\bar{T}f_i$.

Die Normen von T und $\bar{T}$ stimmen überein.

Wenn T positiv ist, so ist es auch $\bar{T}$, und $\bar{T}$ ist der einzige Operator aus LM, der auf B_o mit T übereinstimmt und für den gilt:

Aus $f_i \in M$, $f_i \downarrow 0$ folgt $\bar{T}f_i \downarrow 0$.

Wie in 3C identifizieren wir nachträglich T und $\bar{T}$.

---

1) s. a. L. SCHWARTZ TD I S. 29

<u>Beweis:</u> Für jedes $x \in \mathcal{R}$ ist $\delta_x T$ ein integrierbares Maß. Nach 3C läßt sich $\delta_x T$ auf eindeutige Weise zu einem Funktional aus M' fortsetzen, so daß aus $f_i \in M$, $f_i \downarrow 0$ folgt

$$< \delta_x T, f_i > \to 0 \quad .$$

Wir setzen

$$(\bar{T} f)(x) = < \delta_x T, f >$$

$\bar{T}$ ist eine beschränkte Abbildung von M in den Banachraum $\mathfrak{F}$ aller beschränkten Funktionen mit $f \to \|f\|_0$ als Norm. Nach 3C ist nämlich

$$\|\bar{T}\|_{LM\mathfrak{F}} = \sup_{x \in \mathcal{R}} \|\delta_x T\|_{M'}$$

$$= \sup_{x \in \mathcal{R}} \|\delta_x T\|_{\mathcal{B}_0'} = \|T\|_{L\mathcal{B}_0} .$$

Daß $\bar{T}$ die in unserem Satz verlangte Stetigkeitseigenschaft hat folgt hieraus und aus dem Satz von LEBESGUE.

Wir zeigen, daß das von $\bar{T}$ vermittelte Bild von M in M liegt. Da die Beschränktheit von $\bar{T}$ f bereits nachgewiesen ist, bleibt nur noch zu beweisen, daß $\bar{T}$ f borelmeßbar ist. Seien K (M) und K (B_0) wie in 3B definiert und

$$\mathfrak{A} = \{ f \in K(M) : \bar{T} f \text{ borelmeßbar} \} .$$

$$K(\mathcal{B}_0) \subset \mathfrak{A} .$$

Sei $f_i \in \mathfrak{A}$, $f_i \uparrow f$, so konvergiert $\bar{T}$ f_i punktweise und nach 3A ist $\bar{T}$ f als punktweiser Grenzwert borelmeßbarer Funktionen selbst borelmeßbar. Also ist $\mathfrak{A}$ monoton und nach 3B gilt K (M) $\subset \mathfrak{A}$.
Darum ist

$$\mathfrak{A} = K(M) .$$

Die Aussagen über positive Operatoren ergeben sich aus der Bemerkung, daß $\delta_x T$ für jedes $x \in \mathcal{R}$ ein positives integrierbares Maß ist.

6C Sei $\mathcal{U} \in LB_n$, so ist für jedes $x \in \mathcal{R}$ und $0 \leq k \leq n$ das Funktional

$$\delta_x \mathcal{D}^k \mathcal{U}$$

eine integrierbare Distribution n-ter Ordnung und kann als solche auf C_n fortgesetzt werden. Wir definieren

$$(V_k f)(x) = \langle \delta_x \mathcal{D}^k \mathcal{U}, f \rangle$$

für $f \in C_n$.

Sei f_i eine locker gegen f konvergierende Folge aus B_n, so konvergiert $V_k f_i$ punktweise gegen $V_k f$ und $V_k f$ ist als punktweiser Grenzwert stetiger Funktionen borelmeßbar. Da

$$\| \delta_x \mathcal{D}^k \mathcal{U} \|_{C_n'} = \| \delta_x \mathcal{D}^k \mathcal{U} \|_{B_n'} \leq \| \mathcal{U} \|_{LB_n}$$

ist, ist

$$V_k f \in M$$

und die Abbildung

$$f \in C_n \longrightarrow V_k f \in M$$

beschränkt.

<u>Satz:</u>[1] Für jedes $f \in C_n$ und $0 \leq k \leq n-1$ ist

$$(V_k f)(x) - (V_k f)(\xi) = \int_\xi^x (V_{k+1} f)(t)\,dt .$$

<u>Beweis:</u> Sei $f_i \in B_n$ und konvergiere $f_i \to f \in C_n$ locker. Für jedes i und $0 \leq k \leq n$ ist

$$(V_k f_i)(x) = (\mathcal{U} f_i)^{(k)}(x) .$$

und darum für $0 \leq k \leq n-1$

$$(V_k f_i)(x) - (V_k f_i)(\xi) = \int_\xi^x (V_{k+1} f_i)(t)\,dt .$$

Beim Übergang $i \to \infty$ bleibt die linke Seite der Gleichung gemäß der Definition der V_k erhalten. Der Integrand auf der rechten Seite konvergiert punktweise und es ist

$$\| V_{k+1} f_i \|_0 \leq \| \mathcal{U} \|_{LB_n} \sup_i \| f_i \|_n$$

Nach dem Satz von LEBESGUE überträgt sich darum auch die rechte Seite der Gleichung.

6D <u>Folgerung:</u> Die Abbildung

$$f \in C_n \to V_0 f$$

ist eine stetige lineare Abbildung von C_n in C_{n-1}. Aus lockerer Konvergenz von f_i in C_n folgt lockere Konvergenz von $V_0 f_i$ in C_{n-1}. Für $0 \leq k \leq n-1$ gilt

$$(V_0 f)^{(k)} = V_k f .$$

Ist $V_0 f$ n-mal stetig differenzierbar, so ist $V_n f = (V_0 f)^{(n)}$ fast überall.

---

1) Diesen Satz, sowie die Folgerung 6D verdanke ich einer persönlichen Mitteilung von Heinz KÖNIG, Aachen.

<u>Beweis:</u> Gemäß dem letzten Satz sind für $0 \leq k \leq n-1$ die Funktionen $V_k f$ stetig und

$$(V_0 f)^{(k)} = V_k f .$$

Die Beschränktheit der $V_k f$ wurde schon in 6C gezeigt. Alle $V_k f$ sind also in C_o und

$$V_0 f \in C_{n-1} .$$

Daß die Abbildung

$$f \in C_n \longrightarrow V_0 f \in C_{n-1}$$

stetig ist, ist offensichtlich.

Sei $f_i \in C_n$ eine locker nach $f \in C_n$ konvergierende Folge. Die $V_k f_i$, $o \leq k \leq n$, sind gleichmäßig beschränkt und konvergieren punktweise nach $V_k f$.

Sei A eine feste Zahl $> o$ und seien $x, \xi \in [-A, A]$, so gilt für $o \leq k \leq n-1$:

$$\begin{aligned} & | V_k f_i(x) - V_k f(x) | \\ \leq & | V_k f_i(\xi) - V_k f(\xi) | + \int_\xi^x | V_{k+1} f_i(t) - V_{k+1} f(t) | \, dt \\ \leq & | V_k f_i(\xi) - V_k f(\xi) | + \int_{-A}^{+A} | V_{k+1} f_i(t) - V_{k+1} f(t) | \, dt \end{aligned}$$

Nach dem Satz von LEBESGUE geht das Integral gegen Null; damit verschwindet für $i \to \infty$ der ganze Ausdruck gleichmäßig für $x \in [-A, A]$. Die $V_o f_i$ konvergieren also locker in C_{n-1}.

Wenn $V_0 f$ n-mal stetig differenzierbar ist, so gilt für jedes Paar ξ, x

$$\int_\xi^x (V_0 f)^{(n)}(t)\,dt = \int_\xi^x (V_n f)(t)\,dt$$

und damit ist

$$(V_0 f)^{(n)} = V_n f \quad \text{fast überall.}$$

6D Die naheliegende Vermutung, daß

$$(V_0 f)^{(n)} = V_n f \quad \text{überall}$$

ist, ist irrig. Wir konstruieren ein Gegenbeispiel.

Wir setzen

$$\mu(t) = \begin{cases} \delta_{\frac{1}{t}} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}.$$

Definitionsgemäß ist für $f \in \mathcal{B}_0$

$$<\mu(t), f> = \begin{cases} f(\frac{1}{t}) & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

Setzt man mit Hilfe der lockeren Konvergenz $\mu(t)$ von B_0 auf C_0 fort, so erhält man die gleichen Formeln für $f \in C_0$.

Die Funktion

$$t \to \mu(t)$$

ist einfach stetig in B_0', aber nicht einfach stetig in C_0'. Z.B. ist

$$<\mu(t), \sin x>_x = \begin{cases} \sin 1/t & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

eine in t = o unstetige Funktion. Außerhalb von t = o ist $\mu(t)$ einfach stetig in C_0'.

Wir setzen für $f \in \mathcal{B}_0$

$$(\mathcal{U}f)(x) = \langle \delta_x \mathcal{U}, f \rangle = (V_0 f)(x) =$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^x \int_0^u \langle \mu(t), f \rangle \, dt\, du + \left(1 - \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}\right) f(0) .$$

$\mathcal{U}f$ ist zweimal stetig differenzierbar, und man erhält

$$(\mathcal{U}f)'(x) = \langle \delta_x D\mathcal{U}, f \rangle = (V_1 f)(x) =$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}} \Big[-x \int_0^x \int_0^u \langle \mu(t), f \rangle \, dt\, du + \int_0^x \langle \mu(t), f \rangle dt$$
$$+ \left(-x + \frac{x^3}{2}\right) f(0) \Big]$$

und

$$(\mathcal{U}f)''(x) = \langle \delta_x D^2 \mathcal{U}, f \rangle = (V_2 f)(x) =$$
$$e^{-\frac{x^2}{2}} \Big[(x^2 - 1) \int_0^x \int_0^u \langle \mu(t), f \rangle \, dt\, du - 2x \int_0^x \langle \mu(t), f \rangle dt$$
$$+ \langle \mu(x), f \rangle - f(0) + \left(\frac{5}{2} x^2 - \frac{x^4}{2}\right) f(0) \Big]$$

Wir setzen diese integrierbaren Maße auf C_0 fort. Sei $f_i \in \mathcal{B}_0$ eine locker nach $f \in C_0$ konvergierende Folge. Die $\langle \mu(t), f_i \rangle$ sind gleichmäßig beschränkt und konvergieren punktweise gegen $\langle \mu(t), f \rangle$. Nach dem Satz von LEBESGUE konvergieren alle Integrale. Damit bleibt die Form der $\delta_x D^k \mathcal{U}$, $k = 0, 1, 2$ erhalten.

$\mathcal{U}$ ist eine stetige lineare Abbildung von B_0 in B_2, also erst recht von B_2 in B_2 mit den Eigenschaften

$$\mathcal{U} \geq 0$$

und

$$\mathcal{U}\, 1 = 1 .$$

Wenn unsere Vermutung richtig wäre, müßte

$$(V_2 1)(x) = \langle \delta_x D^2 \mathcal{U}, 1 \rangle = 0$$

sein für alle x. Man rechnet aber aus

$$V_2 1 = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq 0 \\ -1 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

7. Integration von Vektorfunktionen

7A Sei $[a,b]$ ein kompaktes Intervall in R. Unter einer Zerlegung Z von $[a,b]$ wollen wir eine endliche Folge t_i, $i = 0,1,..n$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

verstehen, der eine weitere Folge τ_i, $i = 0,1,...n-1$ zugeordnet ist, so daß

$$t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1} .$$

Wir setzen

$$|Z| = \sup \{ t_{i+1} - t_i : i = 0,1 .. n-1 \} .$$

Sei F eine stetige Abbildung von $[a,b]$ in einen topologischen Vektorraum X, so bilden wir die Summen

$$S(Z) = \sum_{i=0}^{n-1} F(\tau_i)(t_{i+1} - t_i) ,$$

und nennen falls S(Z) für $|Z| \to 0$ gegen ein Element $S \in X$ konvergiert

$$S = \int_a^b F(t)\, dt .$$

Konvergenz für $|Z| \to 0$ soll bedeuten, daß es zu jeder Umgebung U von S ein $\delta > 0$ gibt, so daß $S(Z) \in U$ für $|Z| \leq \delta$.

7B **Satz:** Ist X ein Banachraum, so konvergiert S(Z) für $|Z| \to 0$ in der Normtopologie gegen

$$S = \int_a^b F(t)\, dt .$$

Es ist

$$\left\| \int_a^b F(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \| F(t) \|\, dt \leq (b-a) \sup_{a \leq t \leq b} \| F(t) \| .$$

Beweis: Man zeigt zunächst wie in der klassischen Analysis, daß F(t) in $[a,b]$ gleichmäßig stetig ist, d.h. daß der Stetigkeitsmodul

$$\sigma(\delta) = \sup\{\,\|F(t)-F(t')\| : t,t' \in [a,b],\, |t-t'| \leq \delta\,\}$$

gegen Null geht für $\delta \to 0$.

Seien nun Z und Z' zwei Zerlegungen mit

$$|Z| \leq \delta, \quad |Z'| \leq \delta,$$

dann konstruiert man zu Z und Z' eine neue Zerlegung Z'', in der jeder Teilungspunkt t_i'' entweder Teilungspunkt von Z oder von Z' ist und rechnet aus

$$\|S(Z) - S(Z'')\| \leq \sigma(\delta)(b-a),$$

$$\|S(Z') - S(Z'')\| \leq \sigma(\delta)(b-a),$$

also

$$\|S(Z) - S(Z')\| \leq 2\sigma(\delta)(b-a).$$

Aus der Vollständigkeit von X ergibt sich die Existenz des Grenzwertes.

Es ist

$$\|S(Z)\| \leq \sum \|F(\tau_i)\|\,(t_{i+1}-t_i).$$

Da mit F(t) auch $\|F(t)\|$ stetig ist[1], folgt durch Grenzübergang $|Z| \to 0$

$$\left\| \int_a^b F(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\|\,dt.$$

7C Satz: Sind X und Y zwei Banachräume und F(t) eine einfach stetige Funktion von $[a,b]$ in LXY, dann konvergiert S(Z) einfach nach

$$S = \int_a^b F(t)\,dt \in LXY.$$

Für $x \in X$ gilt

$$\left(\int_a^b F(t)\,dt\right)(x) = \int_a^b F(t)(x)\,dt.$$

1) s. LOOMIS S. 13

Es ist

$$\left\| \int_a^b F(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|F(t)\|\,dt \leq (b-a) \sup_{a \leq t \leq b} \|F(t)\|$$

Beweis: Für jedes $x \in X$ ist $F(t)(x)$ in Y stetig und darum konvergiert

$$S(Z)(x) \longrightarrow \int_a^b F(t)(x)\,dt$$

in der Normtopologie von Y für $|Z| \to 0$. Mit anderen Worten, es konvergiert $S(Z)$ einfach nach dem Operator

$$S : x \longrightarrow \int_a^b F(t)(x)\,dt$$

Wir haben noch zu zeigen, daß S stetig, d.h., daß die Norm von S endlich ist.

$$\|F(t)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|F(t)(x)\|$$

ist als Supremum stetiger Funktionen halbstetig nach unten[1] und somit existiert das Oberintegral[2]

$$\int_a^b \|F(t)\|\,dt$$

Da X vollständig ist, folgt aus dem uniform boundedness theorem (1F), daß $\|F(t)\|$ beschränkt ist, und deshalb ist[3]

$$\int_a^b \|F(t)\|\,dt \leq (b-a) \sup_{a \leq t \leq b} \|F(t)\|$$

endlich. Für $\|S\|$ erhält man

$$\begin{aligned} \|S\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|S(x)\| \\ &= \sup \left\| \int_a^b F(t)(x)\,dt \right\| \\ &\leq \int_a^b \|F(t)\|\,dt \\ &< \infty . \end{aligned}$$

---

1) BOURBAKI S. 1o3
2) BOURBAKI S. 1o4
3) BOURBAKI SS. 1o4, 1o5

Damit ist

$S \in LXY$

und wir können setzen

$$S = \int_a^b F(t)\,dt$$

Die behaupteten Ungleichungen sind in der eben gemachten Abschätzung enthalten.

7D <u>Satz:</u> Ist F(t) eine streng stetige Funktion von $[a,b]$ in B_o', so konvergiert S(Z) streng gegen

$$S = \int_a^b F(t)\,dt$$

<u>Beweis:</u> Daß S(Z) einfach konvergiert, folgt aus 7C. Es bleibt zu zeigen, daß die S(Z) streng beschränkt sind.

Es ist aber

$$p_K(S(Z)) \leq (b-a) \sup_{a \leq t \leq b} p_k(F(t))$$

für alle Z. Das Supremum auf der rechten Seite ist nach 4J für alle k beschränkt und geht für $k \to \infty$ gegen Null.

7E Der letzte Satz beinhaltet nach 4G für $f \in C_o$, daß

$$\left\langle \int_a^b F(t)\,dt, f \right\rangle = \int_a^b \langle F(t), f\rangle\,dt$$

ist.

Darüber hinaus gilt der folgende weitaus stärkere Satz:

Satz[1] Sei

$$t \in [a,b] \to \mathcal{F}(t) \in \mathcal{B}_0'$$

einfach stetig, so ist für jedes feste $f \in M$

$$t \to \langle \mathcal{F}(t), f \rangle$$

borelmeßbar[2], und es gilt

$$\left\langle \int_a^b \mathcal{F}(t)\, dt, f \right\rangle = \int_a^b \langle \mathcal{F}(t), f \rangle \, dt .$$

Beweis: Aus dem uniform boundedness theorem (1F) folgt zunächst, daß (s. 3C)

$$\sup_{a \le t \le b} \| \mathcal{F}(t) \|_{\mathcal{B}_0'} = \sup_{a \le t \le b} \| \mathcal{F}(t) \|_{M'}$$

endlich ist, und daraus, daß $t \to \langle \mathcal{F}(t), f \rangle$ beschränkt ist.

Wir zeigen nun, daß $t \to \langle F(t), f \rangle$ borelmeßbar ist. Seien K(M) und $K(B_o)$ wie in 3B definiert, und sei

$$\mathfrak{a} = \{ f \in K(M) : t \to \langle \mathcal{F}(t), f \rangle \text{ borelmeßbar} \} .$$

Wegen der einfachen Stetigkeit von F(t) in B_o' ist

$$K(B_o) \subset \mathfrak{a} .$$

1) Persönliche Mitteilung von Heinz KÖNIG, Aachen.

2) Der Begriff "borelmeßbar über $[a,b]$ " ist eine natürliche Übertragung unseres in 3A definierten Begriffes "borelmeßbar (über R)".

Außerdem ist $\mathfrak{A}$ monoton. Sei nämlich $f_i \in \mathfrak{A}$, $f_i \downarrow f$, so konvergiert nach 3C

$$< F(t), f_i > \longrightarrow < F(t), f >$$

punktweise, und ist als punktweiser Grenzwert borelmeßbarer Funktionen selbst borelmeßbar. Nach Satz 3B ist $K(M) \subset \mathfrak{A}$, und somit $K(M) = \mathfrak{A}$ und der erste Teil des Satzes bewiesen.

Für jedes $f \in M$ existiert also das Integral

$$\int_a^b < F(t), f > dt$$

Es stellt ein lineares Funktional über M dar, das zu M' gehört, weil

$$\left| \int_a^b < F(t), f > dt \right| \leq \|f\|_0 \sup_{a \leq t \leq b} \|F(t)\|_{M'} \cdot (b-a)$$

ist, und das Supremum endlich ist. Das Funktional ist darüber hinaus stetig gegenüber monotoner Konvergenz. Sei nämlich $f_i \in M$, $f_i \downarrow 0$, so geht

$$< F(t), f_i >$$

punktweise gegen Null und ist durch

$$\|f_1\|_0 \sup_{a \leq t \leq b} \|F(t)\|_{M'}$$

beschränkt. Aus dem Satz von LEBESGUE folgt die Konvergenz des Integrals.

$$f \in M \to \int_a^b \langle F(t), f \rangle \, dt$$

ist also ein integrierbares Maß. Auf B_o stimmt es mit

$$f \to \langle \int_a^b F(t) \, dt, f \rangle$$

überein. Nach 3C läßt sich die Indentität auf M fortsetzen, und man erhält

$$\langle \int_a^b F(t) \, dt, f \rangle = \int_a^b \langle F(t), f \rangle \, dt$$

für jedes $f \in M$.

7F <u>Satz:</u> Sei

$$t \in [a, b] \to F(t) \in LB_o$$

einfach stetig, so ist für jedes $f \in M$ und $x \in \mathcal{R}$

$$t \to (F(t) f)(x)$$

borelmeßbar und beschränkt, und

$$\int_a^b (F(t) f)(x) \, dt \doteq ((\int_a^b F(t) \, dt) f)(x)$$

<u>Beweis:</u> Nach 6B ist

$$(F(t) f)(x) = \langle \delta_x F(t), f \rangle$$

Weil $F(t)$ einfach stetig in LB_o ist, ist $\delta_x F(t)$ einfach stetig in B_o'. Darum gilt nach 7E, daß

$$t \to (F(t) f)(x)$$

borelmeßbar und beschränkt ist, und daß

$$\int_a^b (F(t) f)(x) \, dt = \langle \int_a^b \delta_x F(t) \, dt, f \rangle .$$

Nach 1E ist die Abbildung

$$T \in LB_o \to \delta_x T \in B_o'$$

einfach stetig, wenn man LB_o und B_o' mit ihren einfachen Topologien versieht.

Darum ist für $f \in B_0$

$$< \int_a^b \delta_x F(t)\, dt, f > = < \delta_x \int_a^b F(t)\, dt, f > .$$

Nach 3C läßt sich diese Identität auf M ausdehnen. Wegen 6B gilt endlich

$$< \delta_x \int_a^b F(t)\, dt, f > = \left(\left(\int_a^b F(t)\, dt \right) f \right)(x) .$$

II. Kapitel

Die in LB_n einfach stetigen Markowprozesse.

8. Begriff und Einteilung der stationären Markowprozesse

8A Definition: [1] Wir nennen ein positives, integrierbares Maß der Norm 1 ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Definition: Ein positives Element $P \in LM$ heißt eine Übergangswahrscheinlichkeit, wenn

$Pf_i \downarrow 0$ für $f_i \downarrow 0$

und

$P\,\underline{1} = \underline{1}$

ist.

Wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, dann ist es auch μP. Denn μP ist stetig gegenüber monotonen Grenzübergängen und darum ein Maß (s. 3C), positiv und es ist

$$\langle \mu P, 1 \rangle = \langle \mu, P1 \rangle = \langle \mu, 1 \rangle = 1$$

Insbesondere ist $\delta_x P$ für jedes $x \in R$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Wir können den Begriff der Übergangswahrscheinlichkeit auch so formulieren:

Eine Übergangswahrscheinlichkeit ist ein Element $P \in LM$, so daß $\delta_x P$ für jedes $x \in R$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Sind P und Q zwei Übergangswahrscheinlichkeiten, so ist die aus ihnen zusammengesetzte Abbildung $PQ \in LM$ wieder eine Übergangswahrscheinlichkeit.

---

1) Die Definitionen sind für unsere Zwecke zugeschnitten. Für ihre allgemeine Formulierung s. die Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung z. B. DOOB.

8B <u>Definition:</u>[1] Wird jedem t, $0 \leq t < \infty$, eine Übergangswahrscheinlichkeit U(t) zugeordnet und ist

U(0) = I (der identische Operator

und

$U(t_1+t_2) = U(t_1)U(t_2)$

so sagen wir,

$t \to U(t)$

definiere einen stationären Markowprozeß.

U(t) bildet also eine Halbgruppe, eine Darstellung der Halbgruppe der positiven reellen Zahlen bezüglich der Addition in die Halbgruppe aller Übergangswahrscheinlichkeiten.

Wir schreiben

$$\delta_x \mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t,x)$$

und mit der uneigentlichen Variablen y

$$\delta_x \mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t,x,y) .$$

8C Aus der algebraischen Struktur von U(t) folgt für den Differenzenquotienten $(\tau \geq 0)$

$$\frac{\mathcal{U}(t+\tau) - \mathcal{U}(t)}{\tau} = \mathcal{U}(t) \frac{\mathcal{U}(\tau) - I}{\tau} = \frac{\mathcal{U}(\tau) - I}{\tau} \mathcal{U}(t) .$$

Man kann erwarten, daß unter günstigen Umständen der Grenzübergang $\tau \downarrow 0$ in irgendeiner Weise durchgeführt werden kann und die folgenden Differentialgleichungen, genannt Kolmogoroffgleichungen, gelten

$$\frac{d\,\mathcal{U}(t)}{dt} = \mathcal{U}(t) A = A\, \mathcal{U}(t) ,$$

wo

$$A = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{\mathcal{U}(\tau) - I}{\tau}$$

allerdings keineswegs LM anzugehören braucht.

---

1) DOOB S. 255

Aus diesem Problemkreis schneiden wir die folgende Teilfrage aus:

"Für welche Funktionen f existiert

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{U}(t) - I}{t} f = Af$$

und welche Eigenschaften hat A?"

Man sucht diese Frage zunächst für den einzelnen Punkt $x \in R$ zu klären:

"Für welche Funktionen f konvergiert für $t \downarrow 0$

$$\left\langle \frac{\mathcal{U}(t, x) - \delta_x}{t}, f \right\rangle \longrightarrow \langle A(x), f \rangle$$

und welches Aussehen hat A(x)?"

Erst danach geht man an das globale Verhalten von A, indem man die Funktion

$x \longrightarrow A(x)$

untersucht.

Das Problem wird dadurch determiniert. daß man für U(t) gewisse Stetigkeitsvoraussetzungen macht.

Je nach dem Verhalten von U(t) für $t \downarrow 0$ sondert man, ohne Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben, aus den stationären Markowprozessen folgende drei Klassen aus, deren Erörterung den Rest dieses Paragraphen füllt.

1.) Rein unstetige Prozesse[1)]

2.) Stetige Prozesse[2)]

3.) Gemischte Prozesse[3)]

---

1) FELLER S. 120, GNEDENKO S. 272

2) FELLER S. 118, GNEDENKO S. 265

3) KUNISAWA. Der bei FELLER S. 123 eingeführte Begriff des "gemischten Prozesses" ist von dem unseren verschieden!

Die dritte Klasse umfaßt die beiden ersten. Die erste und zweite Klasse haben nur solche Prozesse gemeinsam, bei denen

$A(x) = 0$

ist für alle $x \in R$.

8D Rein unstetige Prozesse

Definition: Ein stationärer Markowprozeß $\{U(t)\}$ heißt rein unstetig, wenn für jedes feste $x \in R$ und $t \downarrow 0$

$$\frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t} \to A(x)$$

in der Normtopologie von B_0' konvergiert. Wegen der Vollständigkeit von B_0' in seiner Normtopologie ist der Grenzwert $A(x)$ ein integrierbares Maß.

Um den folgenden Satz, der die Form von $A(x)$ näher beschreibt, formulieren und beweisen zu können, benötigen wir einige Vorbemerkungen.

Seien $f, g \in M$, $\mu \in B_0'$, so ist

$$\| f g \|_0 \leq \| f \|_0 \, \| g \|_0$$

und

$$| \langle \mu, f g \rangle | \leq \| \mu \|_{B_0'} \, \| f \|_0 \, \| g \|_0 \, .$$

Die Abbildung

$$g \to \langle \mu, f g \rangle$$

ist ein Element aus M', das wir mit μf bezeichnen.

Wir zerlegen

$f = f^+ - f^-$, $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$

und

$$\mu f = \mu f^+ - \mu f^-$$

Da mit $g_i \downarrow 0$ auch $f^+ g_i \downarrow 0$ und $f^- g_i \downarrow 0$ geht, sind μf^+ und μf^- und damit auch μf stetig gegenüber monotoner Konvergenz und μf ein integrierbares Maß.

Weil

$$\| \mu f \|_{\mathcal{B}_0'} \leq \| \mu \|_{\mathcal{B}_0'} \, \| f \|_0$$

ist, ist

$$\mu \in \mathcal{B}_0' \longrightarrow \mu f \in \mathcal{B}_0'$$

stetig, wenn man B_o' mit seiner Normtopologie versieht.

Satz: Sei

$$\varphi_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = y \\ 0 & \text{für} \quad x \neq y \end{cases} .$$

Ein stationärer Markowprozeß $\{U(t)\}$ ist genau dann rein unstetig, wenn für jedes feste x und $t \downarrow 0$

$$\frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}(1 - \varphi_x) \longrightarrow \mathcal{P}(x)$$

in der Normtopologie von B_o' konvergiert. P(x) ist ein positives integrierbares Maß und es gilt

$$A(x) = \mathcal{P}(x) - \delta_x \langle \mathcal{P}(x), 1 \rangle .$$

Beweis: Da $1 - \varphi_x$ im Punkte x verschwindet, ist

$$\frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t}(1 - \varphi_x) = \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}(1 - \varphi_x) .$$

Wenn also $\{U(t)\}$ einen rein unstetigen Prozeß definiert, so konvergiert dieser Ausdruck gemäß den Vorbemerkungen in der Normtopologie von B_o'. Als Grenzwert positiver integrierbarer Maße ist P(x) selbst ein positives integrierbares Maß.

Es gilt

$$\varphi_x f = \varphi_x f(x) = \varphi_x < \delta_x, f >$$

$$<\mu, \varphi_x f> = <\mu, \varphi_x> < \delta_x, f > ,$$

also

$$\mu \varphi_x = \delta_x <\mu, \varphi_x> .$$

Außerdem ist

$$< \frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t}, 1 > = 0$$

für alle t, weil U(t,x) ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Man rechnet aus

$$\frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t} =$$

$$= \frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t} (1 - \varphi_x) + \frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t} \varphi_x$$

$$= \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t} (1 - \varphi_x) + \delta_x < \frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t}, \varphi_x >$$

$$= \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t} (1 - \varphi_x) - \delta_x < \frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t}, 1 - \varphi_x >$$

$$= \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t} (1 - \varphi_x) - \delta_x < \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t} (1 - \varphi_x), 1 > .$$

Setzt man voraus, daß

$$\frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}(1-\varphi_x) \to \mathcal{P}(x)$$

in der Normtopologie von B_o' konvergiert, so erhält man, weil diese Konvergenz die Konvergenz für jedes $f \in M$, insbesondere also für $f = \underline{1}$, nach sich zieht,

$$\frac{\mathcal{U}(t,x)-\delta_x}{t} \to \mathcal{P}(x) - \delta_x < \mathcal{P}(x), 1 >$$

in der Normtopologie von B_o'. Damit ist der Rest des Satzes bewiesen.

Ein wichtiges Beispiel der rein unstetigen Prozesse sind die Prozesse, für die $U(t)$ in der Normtopologie von LM stetig ist. Klassische Sätze der Halbgruppentheorie[1] sagen nämlich aus, daß in diesem Falle

$$\frac{\mathcal{U}(t)-I}{t} \to A$$

in der Normtopologie von LM konvergiert.

8E <u>Stetige Prozesse</u>

Wir setzen

$$\varphi_{x,\delta}(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } |y-x| \leq \delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

1) HILLE und PHILLIPS S. 283. Die bei DOOB S. 257ff verwandte Bedingung, daß $< \mathcal{U}(t,x), \varphi_x > \to 1$ für $t \downarrow 0$ gleichmäßig in x konvergiert, ist, wie eine kleine Rechnung zeigt, mit dieser Bedingung äquivalent.

<u>Definition:</u> Ein stationärer Markowprozeß heißt stetig, wenn für jedes feste $x \in R$ und $\delta > 0$ für $t \downarrow 0$ gilt:

a) $$\left\langle \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}, 1 - \varphi_{x,\delta} \right\rangle \to 0$$

mit anderen Worten:

$$\frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}(1 - \varphi_{x,\delta}) \to 0$$

in der Normtopologie von B_o'.

b) $$\left\langle \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}, (y-x)\varphi_{x,\delta} \right\rangle \to a(x)$$

c) $$\left\langle \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}, (y-x)^2\varphi_{x,\delta} \right\rangle \to b(x) \geq 0 .$$

Wir nennen eine Funktion f zweimal Taylorsch differenzierbar im Punkte x, wenn es zwei Konstanten α und β gibt, so daß

$$f(y) = f(x) + \alpha(y-x) + \frac{\beta}{2}(y-x)^2 + F(y)(y-x)^2$$

ist, und $F(y) \to 0$ konvergiert für $y \to x$. Die Funktion f ist einmal im gewöhnlichen Sinne im Punkte x differenzierbar und $\alpha = f'(x)$. Wenn f in einer Umgebung von x einmal stetig differenzierbar ist und die Ableitung f' im Punkte x noch einmal differenzierbar ist, so ist f im Punkte x zweimal Taylorsch differenzierbar und $\beta = f''(x)$. Von diesem Spezialfall ausgehend setzen wir, auch wenn er nicht zutrifft, $\beta = f''(x)$.

Es ist also

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{1}{2} f''(x)(y-x)^2 + (y-x)^2 \, F(y) .$$

<u>Satz:</u> Definiere U(t) einen stetigen Prozeß, so existiert für jede borelmeßbare, beschränkte und im Punkte x zweimal Taylorsch differenzierbare Funktion f der Grenzwert

$$\langle A(x), f \rangle = \lim_{t \downarrow 0} \langle \frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t} , f \rangle$$

und es ist

$$\langle A(x), f \rangle = a(x) f'(x) + \frac{1}{2} b(x) f''(x)$$

Die Restriktion von A(x) auf C_2, die wir wieder mit A(x) bezeichnen, ist die integrierbare Distribution 2. Ordnung

$$A(x) = a(x) \, \delta_x \, D + \frac{1}{2} b(x) \, \delta_x \, D^2 .$$

<u>Beweis:</u> Sei f eine Funktion der angegebenen Art, so ist

$$\begin{aligned} f &= f(1-\varphi_{x,\delta}) + f\varphi_{x,\delta} \\ &= f(1-\varphi_{x,\delta}) + f(x)\,1 - f(x)(1-\varphi_{x,\delta}) \\ &\quad + \varphi_{x,\delta}\Big[(y-x) f'(x) + \frac{1}{2}(y-x)^2 f''(x) \\ &\qquad + (y-x)^2 F(y) \Big] \end{aligned}$$

und

$$\left| < \frac{u(t,x) - \delta_x}{t}, f > - a(x)\, f'(x) - \frac{1}{2} b(x)\, f''(x) \right|$$

$$\leq \left| < \frac{u(t,x)}{t} (1 - \varphi_{x,\delta}),\ f - f(x)\, 1 > \right|$$

$$+ |f'(x)| \cdot \left| < \frac{u(t,x)}{t},\ (y-x)\varphi_{x,\delta} > - a(x) \right|$$

$$+ \frac{1}{2} |f''(x)| \cdot \left| < \frac{u(t,x)}{t},\ (y-x)^2 \varphi_{x,\delta} > - b(x) \right|$$

$$+ \left| < \frac{u(t,x)}{t},\ F(y)\,(y-x)^2 \varphi_{x,\delta} > \right|$$

Der Limes superior dieses Ausdrucks für $t \downarrow 0$ ist gleich

$$\limsup_{t \downarrow 0} \left| < \frac{u(t,x)}{t},\ F(y)\,(y-x)^2 \varphi_{x,\delta} > \right|$$

$$\leq \sup_{|y-x| \leq \delta} |F(y)| \cdot \limsup_{t \downarrow 0} < \frac{u(t,x)}{t},\ (y-x)^2 \varphi_{x,\delta} >$$

$$= b(x) \sup_{|y-x| \leq \delta} |F(y)| \to 0 \quad \text{für} \quad \delta \to 0 .$$

Daß $A(x) \in C_2'$ liegt und bezüglich lockerer Konvergenz stetig, also eine integrierbare Distribution ist, ist selbstverständlich.

8F Gemischte Prozesse

Definition: Ein stationärer Markowprozess $\{U(t)\}$ heißt gemischt, wenn für jedes feste $x \in R$ und $t \downarrow 0$ die positiven integrierbaren Maße[1)]

$$\frac{u(t,x)}{t} \; \frac{(y-x)^2}{1+(y-x)^2}$$

streng gegen das positive integrierbare Maß

$$Q(x)$$

konvergieren[2)] und die Zahlenfunktion

$$\left\langle \frac{u(t,x)}{t} , \frac{y-x}{1+(y-x)^2} \right\rangle \to m(x)$$

geht.

Wir nennen T_x den Raum aller stetigen, beschränkten und im Punkte x zweimal Taylorsch differenzierbaren Funktionen und T_x den Teilraum von T_x, der durch die Bedingungen

$$f(x) = f'(x) = 0$$

charakterisiert ist.

Außerdem setzen wir

$$\psi_x(y) = \frac{(y-x)^2}{1+(y-x)^2} .$$

---

1) Für $\mu \in B_n'$, $f \in C_n$ ist $g \in B_n \to \langle \mu , fg \rangle$ ein Element aus B_n', das wir mit μf bezeichnen. Die Abbildung $\mu \in B_n' \to \mu f \in B_n'$ ist stetig, wenn man B_n' mit seiner einfachen Topologie versieht.

2) Strenge Konvergenz für $t \downarrow 0$ soll strenge Konvergenz für jede Folge t_i, $t_i \downarrow 0$, bedeuten.

Es ist leicht einzusehen, daß

$$\dot{T}_x = \{ f : f = \psi_x g \,,\ g \in C_0 \}$$

ist. Jedes $f \in \dot{T}_x$ ist also durch ψ_x dividierbar und der Quotient liegt in C_0, wenn der Funktionswert von f/ψ_x an der Stelle x durch $\frac{1}{2} f''(x)$ definiert wird.

Für $f \in C_2 \cap \dot{T}_x$, d. h. $f \in C_2,\ f(x) = f'(x) = 0$ gilt[1])

$$\| f/\psi_x \|_0 \leq 2 \| f \|_2 \,.$$

<u>Satz:</u> Definiert $\{U(t)\}$ einen gemischten Prozeß, so konvergiert für jedes $f \in T_x$

$$\left\langle \frac{u(t,x) - \delta_x}{t}, f \right\rangle \to \langle A(x), f \rangle$$

$$= m(x) f'(x) + \left\langle Q(x), \left(f - f(x)1 - f'(x) \frac{y-x}{1+(y-x)^2}\right) \Big/ \psi_x \right\rangle$$

Die Restriktion von A(x) auf C_2, die wir wieder mit A(x) bezeichnen, ist eine integrierbare Distribution zweiter Ordnung, die eindeutig durch die folgenden drei Bedingungen gekennzeichnet ist:

a) $A(x) \dfrac{(y-x)^2}{1+(y-x)^2} = Q(x)$ ist ein positives integrierbares Maß[2]) ,

b) $\left\langle A(x), \dfrac{y-x}{1+(y-x)^2} \right\rangle = m(x)$,

c) $\langle A(x), 1 \rangle = 0$.

---

1) Beweis s. u. 15A.

2) Präzise formuliert müßte man sagen: $A(x)\psi_x$ ist die Restriktion eines positiven integrierbaren Maßes Q(x) auf C_2. Da C_2 locker dicht in C_0 ist (3D), ist jedoch Q(x) durch seine Werte über C_2 eindeutig festgelegt. Damit ist die laxe Ausdrucksweise gerechtfertigt.

<u>Beweis:</u> Die Konvergenz für jedes $f \in T_x$ und die Form von A(x) gewinnt man sofort aus der Zerlegung

$$f = f(x)\,1 + f'(x)\,\frac{y-x}{1+(y-x)^2}$$

$$+ \frac{f - f(x)\,1 - f'(x)\,\frac{y-x}{1+(y-x)^2}}{\psi_x} \cdot \psi_x\,,$$

wo der im letzten Term stehende Bruch zu C_o gehört.

Da $C_2 \subset T_x$, ist A(x) für jedes $f \in C_2$ definiert. Wir haben zu zeigen, daß A(x) in C_2' liegt und bezüglich der lockeren Konvergenz stetig ist.

Sei $f \in C_2$ und

$$h = f - f(x)\,1 - f'(x)\,\frac{y-x}{1+(y-x)^2}\,,$$

so ist

$$\| h \|_2 \leq C \, \| f \|_2$$

wo C nicht von f abhängt, und somit

$$\| h / \psi_x \|_0 \leq 2\,C\,\| f \|_2 \,.$$

Man erhält weiter

$$| \langle A(x), f \rangle | \leq (|m(x)| + 2\,C\,\| Q(x) \|_{B_0'}) \, \| f \|_2$$

Also ist

$$A(x) \in C_2' \,.$$

Sei f_i eine locker in C_2 nach 0 konvergierende Funktionenfolge und

$$h_i = f_i - f_i(x)\,1 - f_i'(x)\,\frac{y-x}{1+(y-x)^2}$$

so ist mit $\|f_i\|_2$ auch

$$\|h_i/\psi_x\|_0 \leq 2C\,\|f_i\|_2 .$$

beschränkt. Außerdem konvergiert $\frac{h_i}{\psi_x}$ punktweise gegen Null. Damit gilt nach dem Satz von LEBESGUE

$$\langle Q(x), \frac{h_i}{\psi_x} \rangle \longrightarrow 0$$

und folglich

$$\langle A(x), f_i \rangle \longrightarrow 0 .$$

Somit ist

$$A(x) \in \mathcal{B}_2' .$$

Daß A(x) durch die Bedingungen a), b) und c) eindeutig charakterisiert ist, ist offensichtlich.

8G <u>Satz:</u> Definiert $\{U(t)\}$ sowohl einen rein unstetigen als auch einen stetigen Prozeß, so konvergiert für $t \downarrow 0$ und für jedes feste $x \in R$

$$\frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t} \longrightarrow 0$$

in der Normtopologie von B_0' .

Beweis: Wegen 8D und der Bedingung a) von 8E ist

$$A(x)\,(1-\varphi_{x,\delta}) = 0$$

für jedes $\delta > 0$. Weil für $\delta \downarrow 0$

$$1-\varphi_{x,\delta} \uparrow 1-\varphi_x$$

konvergiert, und weil A(x) als integrierbares Maß gegen monotone Konvergenz stetig ist, erhält man

$$A(x)\,(1-\varphi_x) = P(x) = 0$$

und wegen der Darstellung von A(x) durch P(x),

$$A(x) = 0 .$$

8H Satz: Jeder rein unstetige Prozeß ist ein gemischter Prozeß mit

$$Q(x) = P(x)\,\frac{(y-x)^2}{1+(y-x)^2}$$

und

$$m(x) = \left\langle P(x), \frac{y-x}{1+(y-x)^2} \right\rangle .$$

Beweis: Laut 8D konvergiert in der Normtopologie von B_o'

$$\frac{u(t,x)-\delta_x}{t}\,\psi_x = \frac{u(t,x)}{t}\,\psi_x$$

$$\longrightarrow A(x)\,\psi_x = P(x)\,\psi_x .$$

Die Normkonvergenz in B_o' schließt aber die strenge Konvergenz ein (4G). Der Rest ist trivial.

8I <u>Satz:</u> Jeder stetige Prozeß ist ein gemischter Prozeß mit

$$Q(x) = b(x)\,\delta_x$$

und

$$m(x) = a(x)\,.$$

<u>Beweis:</u> Sei $f \in C_o$, so ist $f\psi_x$ stetig, beschränkt und im Punkte x zweimal Taylorsch differenzierbar.

$$(f\psi_x)(x) = (f\psi_x)'(x) = 0$$

$$(f\psi_x)''(x) = 2\,f(x)\,.$$

$f\psi_x$ erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 8E. Darum konvergiert

$$\left\langle \frac{\mathcal{U}(t,x)-\delta_x}{t}, \psi_x f \right\rangle = \left\langle \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}, \psi_x f \right\rangle$$

$$\rightarrow \langle A(x), \psi_x f \rangle = b(x)\,f(x) = b(x)\,\langle \delta_x, f \rangle\,.$$

Es konvergiert also

$$\frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}\,\psi_x \rightarrow b(x)\,\delta_x$$

einfach in C_o', und da δ_x ein integrierbares Maß ist, ist die Konvergenz streng (4H). Der Rest des Satzes ist eine direkte Folgerung aus 8E.

8J <u>Satz:</u> Ein gemischter Prozeß ist genau dann stetig, wenn

$Q(x) = b(x)\,\delta_x$,

also

$$A(x) = m(x)\,\delta_x\,D + \frac{b(x)}{2}\,\delta_x\,D^2$$

ist.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung wurde eben bewiesen. Es bleibt zu zeigen, daß sie hinreicht.

Sei $\varphi_{x,\delta}$ wie in 8E vorgegeben, so existiert eine Funktion $f \in \dot{T}_x$, so daß

$$f \geq 1 - \varphi_{x,\delta}$$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = 0$$

ist. Nun gilt

$$\left\langle \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}, 1 - \varphi_{x,\delta} \right\rangle$$

$$\leqq \left\langle \frac{\mathcal{U}(t,x)}{t}, f \right\rangle = \left\langle \frac{\mathcal{U}(t,x) - \delta_x}{t}, f \right\rangle \longrightarrow 0 .$$

Damit ist die Eigenschaft a) von 8E bewiesen. Die Eigenschaften b) und c) folgen hieraus und aus der Konvergenz für jedes $f \in T_x$.

9. Homogene stationäre Markowprozesse.[1]

9A Sei μ ein positives integrierbares Maß, so ist (s. 5C)

$$\mu * : \; f \in \mathcal{B}_0 \to \mu * f$$

ein positiver Operator aus LB_0. Diesen können wir laut 6B in einen positiven Operator aus LM fortsetzen, den wir wieder mit $\mu *$ bezeichnen und für den gilt:

$$\mu * f_i \downarrow 0 \quad \text{für} \quad f_i \in M, \; f_i \downarrow 0 .$$

Die Funktionale

$$f \in M \to (\mu * f)(x) \qquad (x \text{ fest})$$

und

$$f \in M \to \langle \mu, f(x-y) \rangle_y$$

sind beide in M' und stetig gegenüber monotoner Konvergenz, sie sind also beide integrierbare Maße. Da sie auf B_0 übereinstimmen, stimmen sie nach 3C auch auf M überein. Es ist also

$$(\mu * f)(x) = \langle \mu, f(x-y) \rangle_y$$

für $f \in M$.

Wenn μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, so ist der zugehörige Faltungsoperator $\mu *$ eine Übergangswahrscheinlichkeit.

Definition: Eine Übergangswahrscheinlichkeit P heißt homogen, wenn es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ gibt, so daß

$$P = \mu *$$

ist.

---

1) Diese Prozesse haben in der Literatur verschiedene Namen: FELLER S. 117, HILLE und PHILLIPS S. 648: Räumlich und zeitlich homogene Prozesse. GNEDENKO S. 278, DOOB S. 391: Homogene zufällige Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen.

9B **Definition:** Ein stationärer Markowprozeß $\{U(t)\}$ heißt homogen, wenn alle U(t) homogene Übergangswahrscheinlichkeiten sind.

Es ist also

$$U(t) = p(t) * ,$$

wo p(t) ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Aus der Halbgruppeneigenschaft von U(t) folgt für p(t)

$$p(0) = \delta_0 = \delta$$

$$p(t_1+t_2) = p(t_1) * p(t_2) .$$

Diese beiden letzten Gleichungen zusammen mit der Forderung, daß p(t) ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, sind hinreichend dafür, daß p(t) einen homogenen stationären Markowprozess definiert.

Unter schwachen Bedingungen (s.z.B. Anhang) ist $t \to p(t)$ einfach in B_o' stetig, und damit wegen

$$\langle p(t), 1 \rangle = 1$$

(s. 4H) streng stetig. Wir setzen dies im folgenden voraus.

9C Das wichtigste analytische Hilfsmittel zur Erforschung der homogenen Prozesse ist, weil die p(t) durch Faltung miteinander verknüpft sind, die Fouriertransformation:

$$C(\xi, t) = \langle p(t), e^{i\xi x} \rangle_x .$$

Da

$$\xi \to e^{i\xi x}$$

locker stetig in C_o ist, folgt aus 3E, daß

$$\xi \to C(\xi, t)$$

stetig ist bei festgehaltenem t.

Die Stetigkeit von $C(\xi,t)$ in t bei festgehaltenem ξ folgt aus der strengen Stetigkeit von p(t).

$$C(\xi,0) = 1$$

$$C(\xi, t_1 + t_2) = C(\xi, t_1)\, C(\xi, t_2) \quad .$$

Also

$$C(\xi,t) = e^{K(\xi)t} \quad ,$$

wo $K(\xi)$ in ξ stetig ist.

9D <u>Satz:</u> Definiert $\{p(t)\}$ einen homogenen stationären Markowprozeß und ist $t \to p(t)$ einfach stetig in $B_0{}'$, so gilt:

i) Für $t \downarrow 0$ konvergiert

$$\frac{p(t)}{t} \frac{x^2}{1+x^2} \longrightarrow Q$$

streng. Q ist als Grenzwert positiver integrierbarer Maße selbst ein positives integrierbares Maß.

ii) Für jedes $f \in T_0$ existiert der Grenzwert

$$\langle A, f \rangle = \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \frac{p(t) - \delta}{t}, f \right\rangle \quad .$$

Man hat

$$\langle A, f \rangle = m\, f'(0) + \left\langle Q, \frac{f - f(0)\,1 - f'(0)\frac{x}{1+x^2}}{\frac{x^2}{1+x^2}} \right\rangle ,$$

wo

$$m = \left\langle A, \frac{x}{1+x^2} \right\rangle = \lim \left\langle \frac{p(t) - \delta}{t}, \frac{x}{1+x^2} \right\rangle$$

ist.

Die Restriktion von A auf C_2, die wir ebenfalls mit A bezeichnen, ist eine integrierbare Distribution zweiter Ordnung, eindeutig gekennzeichnet durch:

$A\frac{x^2}{1+x^2} = Q$ ist ein positives, integrierbares Maß,

$\langle A, \frac{x}{1+x^2} \rangle = m,$

$\langle A, 1 \rangle = 0 .$

iii) $\{p(t)\}$ definiert einen gemischten Prozeß mit:

$\langle Q(x), f \rangle = \langle Q, f(x-y)\rangle_y$ für $f \in M$,

$m(x) = -m .$

Es ist

$\langle A(x), f \rangle = \langle A, f(x-y) \rangle_y$ für $f \in T_x$.

<u>Beweis:</u> i) Der erste Teil des Satzes ist der wichtigste und der am schwierigsten zu beweisende. Er geht auf CHINTSCHIN zurück. Ein Beweis findet sich bei HILLE und PHILLIPS[1].

ii) Man schließt aus i), daß der Differenzenquotient für jedes $f \in \dot{T}_0$ konvergiert. Außerdem konvergiert er nach 9C für jedes $e^{i\xi x}$, $\xi \in \mathcal{R}$. Da aber T_0 von $\dot{T}_0$ und den $e^{i\xi x}$ aufgespannt wird, existiert der Grenzwert für alle $f \in T_0$. Die weiteren Behauptungen in ii) werden wie in 8F bewiesen.

---

1) HILLE und PHILLIPS S. 654. Unsere Behauptung ist dort bewiesen, aber es fehlt die ausdrückliche Formulierung!

iii) Unmittelbare Verifikation. Z.B. ist für $f \in C_o$

$$\langle Q(x), f \rangle = \lim \left\langle \frac{u(t,x)}{t} \psi_x, f \right\rangle$$

$$= \lim \left\langle \frac{u(t,x)}{t}, \psi_x f \right\rangle$$

$$= \lim \left\langle \frac{p(t)}{t}, \psi_x(x-y)\, f(x-y) \right\rangle_y$$

$$= \lim \left\langle \frac{p(t)}{t}, \frac{y^2}{1+y^2} f(x-y) \right\rangle_y$$

$$= \lim \left\langle \frac{p(t)}{t} \frac{y^2}{1+y^2}, f(x-y) \right\rangle_y$$

$$= \langle Q, f(x-y) \rangle_y .$$

Die Identität läßt sich nach 3C von C_o auf M ausdehnen.

Folgerung: Es ist

$$K(\xi) = im\xi + \left\langle Q, \left(e^{i\xi x} - 1 - \frac{i\xi x}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} \right\rangle_x$$

(Formel von LEVY in der Fassung von CHINTSCHIN[1])

Beweis:

$$K(\xi) = \lim \frac{e^{K(\xi)t} - 1}{t}$$

$$= \lim \left\langle \frac{p(t) - \delta}{t}, e^{i\xi x} \right\rangle = \langle A, e^{i\xi x} \rangle .$$

---

1) DOOB S. 13o

9E Wir diskutieren die Spezialfälle des rein unstetigen und des stetigen Prozesses und bringen ein Beispiel für einen Prozeß, der nicht unter sie fällt.

<u>Folgerung aus 8I:</u> $\{p(t)\}$ definiert genau dann einen stetigen Prozeß, wenn

$$Q = c\delta$$

also

$$A = m\delta D + \frac{c}{2}\delta D^2$$

ist.

Es ist bekannt, daß unter dieser Voraussetzung p(t) eine GAUSSverteilung ist.

<u>Satz:</u> $\{p(t)\}$ definiert genau dann einen rein unstetigen Prozeß, wenn A ein integrierbares Maß ist.

<u>Beweis:</u> Sei A ein integrierbares Maß, so konvergiert für jedes reelle t die Reihe

$$e^{*At} = \delta + At + \frac{1}{2}t^2(A*A) + \frac{1}{3!}t^3(A*A*A) + \cdots$$

in der Normtopologie von B_o'. Man rechnet aus:

$$\langle e^{*At}, e^{ifx}\rangle = e^{t\langle A, e^{ifx}\rangle_x} = e^{K(f)t}.$$

Aus der Eindeutigkeit der Fouriertransformation folgt

$$p(t) = e^{*At}.$$

Es konvergiert aber

$$\frac{e^{*At} - \delta}{t} \longrightarrow A$$

in der Normtopologie von B_0'. Daraus ergibt sich unmittelbar die reine Unstetigkeit des Prozesses.

Umgekehrt liefert ein rein unstetiger Prozeß für A ein integrierbares Maß (8D).

Ein wichtiges Beispiel ist

$$A = c(\delta_h - \delta)$$

und

$$p(t) = e^{*ct(\delta_h - \delta)}$$

$$= e^{-ct} \; e^{*ct\delta_h}$$

$$= e^{-ct}\left(\delta + ct\,\delta_h + \frac{1}{2!}c^2t^2\delta_{2h} + \cdots\right)$$

(POISSONverteilung)

9F Wir bringen nun das oben versprochene Beispiel eines homogenen Prozesses, der weder stetig noch rein unstetig ist.

Wir setzen

$$\langle p(t), f \rangle = \int \frac{1}{\pi t} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2} f(x)\,dx \quad \text{für } f \in M$$

(CAUCHYverteilung)

Daß p(t) Halbgruppeneigenschaft hat, sieht man am schnellsten aus der Fouriertransformierten

$$c(\xi, t) = e^{-|\xi| t}$$

Für $t \downarrow 0$ erhält man für $f \in C_0$

$$< \frac{p(t)}{t} \frac{x^2}{1+x^2}, f > = \int \frac{1}{\pi t^2} \frac{1}{1+(x/t)^2} \frac{x^2}{1+x^2} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int \frac{f(x)}{1+x^2} \frac{(x/t)^2}{1+(x/t)^2}\, dx \longrightarrow \frac{1}{\pi} \int \frac{f(x)}{1+x^2}\, dx$$

Es ist

$$< Q, f > = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(x)}{1+x^2}\, dx$$

und, weil $x/(1+x^2)$ eine ungerade Funktion ist,

$$< A, f > = \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{x^2} \left(f - f(0) 1 - f'(0) \frac{x}{1+x^2} \right) dx .$$

Verwenden wir eine von L.SCHWARTZ eingeführte Terminologie [1], so können wir schreiben

$$A = \frac{1}{\pi} \text{ Pseudofunktion } (1/x^2)$$

---

1) L.SCHWARTZ TD I S.42f

1o. Die in LB_n einfach stetigen Prozesse.

1oA Wir nennen einen stationären Markowprozeß einfach stetig in LB_n, wenn die Restriktion von $U(t)$ auf B_n in LB_n liegt, und wenn diese Restriktion, die wir wieder mit $U(t)$ bezeichnen wollen, in LB_n bezüglich t einfach stetig ist.

Die Hauptaufgabe dieser Arbeit ist es, zu beweisen, daß die in LB_n für ein festes $n \geq 2$ einfach stetigen Prozesse im wesentlichen zu den gemischten Prozessen gehören.

Wir fassen die Bedingungen zusammen, die hinreichend und notwendig sind, daß

$$t \in [0, \infty) \longrightarrow U(t) \in LB_n$$

einen in LB_n einfach stetigen Prozeß definiert:

$U(t)$ einfach stetig in LB_n ,

$U(t) \geq 0$,

$U(t)\, \underline{1} = \underline{1}$,

$U(0) = I$,

$U(t_1+t_2) = U(t_1)U(t_2)$.

Nach 6A und 6B drücken dabei die zweite und dritte Gleichung aus, daß $U(t)$ eine Übergangswahrscheinlichkeit ist.

1oB <u>Satz:</u> Ein homogener stationärer Prozeß (s. 9B), bei dem $p(t)$ einfach stetig in B_o' ist, definiert einen in LB_n einfach stetigen Prozeß für jedes $n = 0,1,2,\ldots$

<u>Beweis:</u> Gemäß 5E ist

$$f \in B_n \longrightarrow p(t) * f$$

eine stetige Abbildung von B_n in sich.

Wegen $\langle p(t), 1 \rangle = 1$ ist nach 4H p(t) streng stetig und damit nach 5D und 5G

$$(p(t) * f)^{(i)} = p(t) * f^{(i)}$$

für jedes i = 0,1,...,n stetig in B_o, also

$$t \to p(t) * f$$

stetig in B_n und $p(t)*$ einfach stetig in LB_n.

Dieser Satz zeigt, daß unsere an U(t) gestellten Bedingungen in sofern vernünftig sind, daß jeder homogene stationäre Prozeß sie erfüllt. Eine Begründung für $n \geq 2$ kann allerdings erst später (13) gegeben werden.

1oC <u>Satz:</u> Ein in LB_n einfach stetiger Prozeß ist einfach stetig in LB_o. Für jedes feste $\mu \in B_o'$ ist $\mu\, \mathcal{U}(t)$ streng stetig.

<u>Beweis:</u> Nach 6A definiert U(t) ein Element aus LB_o, das wir wieder mit U(t) bezeichnen. Da $\mathcal{U}(t) \geq 0$ und $\mathcal{U}(t)1 = 1$ ist, ist

$$\| \mathcal{U}(t) \|_{LB_0} = 1 \;.$$

$t \to U(t)f$ ist stetig für jedes $f \in B_n$ in der Normtopologie von B_n und damit erst recht in der Normtopologei von B_o. Da B_n dicht in B_o ist (s. 2D), folgt aus 1C, daß U(t) einfach stetig in LB_o ist.

Sei $\lambda \in B_o'$, $\lambda \geq 0$. Aus der Stetigkeit von U(t) in LB_o folgt (s. 1E), daß $\lambda \mathcal{U}(t)$ einfach stetig in B_o' ist. Außerdem ist

$$\langle \lambda \mathcal{U}(t), 1 \rangle = \langle \lambda, 1 \rangle ,$$

und darum nach 4H $\lambda \mathcal{U}(t)$ streng stetig. Da sich jedes $\mu \in B_o'$ in der Form

$$\mu = \lambda - \nu \,, \quad \lambda \geq 0, \; \nu \geq 0$$

schreiben läßt, kann dieser Sachverhalt auf jedes $\mu \in B_o'$ ausgedehnt werden.

11. Die Methode der Glättungsfunktionen.

11A Da die U(t) im allgemeinen nicht durch Faltung miteinander verknüpft sind, hilft uns bei den in LB_n einfach stetigen Prozessen die Fouriertransformation nicht weiter. Wir stützen uns statt dessen auf die Halbgruppeneigenschaft von U(t).

Wir bringen zunächst einige Vorbemerkungen. Sei φ eine auf R definierte stetige Zahlenfunktion, deren Träger[1] kompakt und in $[0, \infty)$ enthalten ist, so ist die Funktion

$$t \to \varphi(t)\, \mathcal{U}(t)$$

einfach stetig in LB_n und nach 7C existiert

$$\mathcal{U}(\varphi) = \int \varphi(t)\, \mathcal{U}(t)\, dt \, .$$

Für jedes $f \in B_n$ ist

$$\mathcal{U}(\varphi) f = \int \varphi(t)\, \mathcal{U}(t) f \, dt \, .$$

Da U(t) auch in LB_o einfach stetig ist (s.1oC), ist

$$\mathcal{U}(\varphi) \in LB_o$$

und

$$\mathcal{U}(\varphi) f = \int \varphi(t)\, \mathcal{U}(t) f \, dt$$

für jedes $f \in B_o$.

---

1) Der Träger einer Funktion ist die abgeschlossene Hülle der Menge all der Punkte, in denen die Funktion von Null verschieden ist.

Nach 7F gilt für jedes $f \in M$

$$(\mathcal{U}(\varphi) f)(x) = \int \varphi(t) \, (\mathcal{U}(t) f)(x) \, dt$$

insbesondere also für $f = \underline{1}$

$$\mathcal{U}(\varphi) \, 1 = 1 \cdot \int \varphi(t) \, dt .$$

11B <u>Definition:</u> Wir nennen eine reelle Funktion α mit kompaktem Träger in $[0, \infty)$ eine Glättungsfunktion, wenn α einmal stetig differenzierbar und ≥ 0 ist, und wenn

$$\int \alpha(t) \, dt = 1$$

ist.

<u>Satz:</u> Wenn α eine Glättungsfunktion ist, dann ist $U(\alpha)$ ein positiver Operator aus LB_n mit der Eigenschaft $U(\alpha) \, \underline{1} = \underline{1}$.

$U(\alpha)$ ist also eine Übergangswahrscheinlichkeit.

11C <u>Satz:</u> Zu jedem $f \in B_n$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine Glättungsfunktion α , so daß

$$\| \mathcal{U}(\alpha) f - f \|_n \leqslant \varepsilon$$

ist.

Beweis: Wir wählen ein solches $\delta > 0$, daß

$$\| \mathcal{U}(t) f - f \|_n \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } 0 \leq t \leq \delta$$

Eine jede Glättungsfunktion, die ihren Träger in hat, erfüllt die Bedingung. Denn es ist

$$\| \int \alpha(t)\, \mathcal{U}(t) f \, dt - f \|_n$$

$$= \| \int \alpha(t) \left(\mathcal{U}(t) f - f \right) dt \|_n$$

$$\leq \int \alpha(t) \, \| \mathcal{U}(t) f - f \|_n \, dt$$

$$\leq \sup_{0 \leq t \leq \delta} \| \mathcal{U}(t) f - f \|_n \leq \varepsilon .$$

11D Satz: Sei α eine Glättungsfunktion, so konvergiert für $t \downarrow 0$

$$\frac{\mathcal{U}(t) - I}{t} \mathcal{U}(\alpha) \longrightarrow - \mathcal{U}(\dot{\alpha}) , \qquad \dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha(t)}{dt}$$

in der Normtopologie von LB_n und in der von LB_o.

Beweis:

$$\frac{\mathcal{U}(t) - I}{t} \mathcal{U}(\alpha)$$

$$= \frac{\mathcal{U}(t) - I}{t} \int \mathcal{U}(s) \alpha(s) \, ds$$

$$= \int \frac{\mathcal{U}(t+s)}{t} \alpha(s) \, ds - \int \frac{\mathcal{U}(s)}{t} \alpha(s) \, ds$$

$$= \int \mathcal{U}(s) \frac{\alpha(s-t)}{t} ds - \int \mathcal{U}(s) \frac{\alpha(s)}{t} ds$$

$$= \int \mathcal{U}(s) \frac{\alpha(s-t) - \alpha(s)}{t} ds$$

und (s. 7C)

$$\left\| \frac{\mathcal{U}(t)-I}{t}\,\mathcal{U}(\alpha) + \mathcal{U}(\dot\alpha) \right\|_{LB_n}$$

$$= \left\| \int \mathcal{U}(s) \left(\frac{\alpha(s)-\alpha(s-t)}{t} - \dot\alpha(s) \right) ds \right\|_{LB_n}$$

$$\leq (b-a) \sup_{a \leq s \leq b} \|\mathcal{U}(s)\|_{LB_n} \sup_{s \in R} \left| \frac{\alpha(s)-\alpha(s-t)}{t} - \dot\alpha(s) \right|,$$

wenn der Träger von α im endlichen Intervall $[a,b]$ enthalten ist. Das erste Supremum ist wegen des uniform boundedness theorem beschränkt, das zweite geht für t $\downarrow$ 0 gegen Null (s. 5D). Die selben Überlegungen gelten für LB_o.

11E Definition: Wir nennen H den Vektorraum, der von den $\mathcal{U}(\alpha) f$, wo α alle Glättungsfunktionen und f alle Elemente von B_n durchläuft, und der Funktion $\underline{1}$ erzeugt wird.

Satz: Für jedes f $\in$ H existiert der Grenzwert von

$$\frac{\mathcal{U}(t)-I}{t}\, f$$

für t $\downarrow$ 0 in B_n.

Beweis: Direkte Folgerung aus 11D und der Gleichung

U(t) $\underline{1}$ = $\underline{1}$.

12. Die Räume E_n. Verallgemeinerte gemischte Prozesse.

12A Den von B_n und der konstanten Funktion $\underline{1}$ erzeugten Vektorraum nennen wir E_n. Unter der Norm

$$f \to \|f\|_n$$

bildet E_n einen Banachraum.

Wir können E_n auch so charakterisieren, daß wir sagen, E_n bestehe aus all den stetigen und n-mal stetig differenzierbaren Funktionen, die samt ihren n ersten Ableitungen im Unendlichen konvergieren. Aus dieser Forderung ergibt sich nämlich zwangsläufig, daß alle k-ten Ableitungen für $k \geq 1$ im Unendlichen verschwinden und nur die Funktion selbst dort einen von Null verschiedenen Grenzwert besitzen kann.

Wir setzen

$$f(\infty) = \lim_{|x| \to \infty} f(x)$$

und

$$\langle \delta_\infty, f \rangle = f(\infty) .$$

δ_∞ ist ein positives Funktional aus E_n' der Norm 1.

Jeder in LB_n einfach stetige Prozeß ist wegen $U(t)\underline{1} = \underline{1}$ in LE_n und wegen 10C auch in LE_o einfach stetig.

12B <u>Satz:</u> Jedes Funktional T aus E_n' läßt sich in eindeutiger Weise zerlegen in

$$T = T_o + c\,\delta_\infty ,$$

wo T_o eine integrierbare Distribution n-ter Ordnung ist.

Beweis: Die Restriktion von T auf B_n definiert eine integrierbare Distribution n-ter Ordnung T_o, die nach 3E auf E_n ausgedehnt werden kann. Das Funktional $T-T_o$ verschwindet für alle Funktionen aus B_o. Jedes $f \in E_n$ kann in der Form

$$f = f(\infty)1 + (f - f(\infty)1)$$

geschrieben werden, wo die in Klammern stehende Funktion B_n angehört. Es ist

$$\langle T-T_0, f\rangle = \langle T-T_0, 1\rangle f(\infty) =$$

$$\langle T-T_0, 1\rangle \langle \delta_\infty, f\rangle = c \langle \delta_\infty, f\rangle.$$

12C Satz: Eine Folge positiver integrierbarer Maße, die in E_o' einfach konvergiert, konvergiert genau dann streng, wenn der Grenzwert ein integrierbares Maß ist.

Beweis: Direkte Folgerung aus 4H.

12D Definition: Wir nennen einen stationären Markowprozess $\{U(t)\}$ einen verallgemeinerten gemischten Prozeß, wenn für jedes $a \in R$ und $t \downarrow o$

$$\frac{\mathcal{U}(t,a) - \delta_a}{t} \longrightarrow A(a)$$

einfach in E_2' konvergiert.

Bemerkung: Da die Konvergenz für 1 trivial ist, genügt es vorauszusetzen, daß

$$\frac{\mathcal{U}(t,a) - \delta_a}{t} \longrightarrow A(a)_0$$

einfach in B_2' konvergiert. $A(a)_o$ ist die Restriktion von $A(a)$ auf B_2 und es gilt (s.12B)

$$A(a) = A(a)_0 + c(a)\,\delta_\infty$$

und

$$\langle A(a), 1\rangle = \langle A(a)_0, 1\rangle + c(a) = 0 .$$

Wir nennen F_a den Raum aller stetigen, im Unendlichen konvergierenden, im Punkte a zweimal Taylorsch differenzierbaren Funktionen und G_a den Teilraum von F_a, der aus den Funktionen besteht, die samt ihrer ersten Ableitung im Punkt a verschwinden.

Sei wieder (s. 8F)

$$\psi_a(x) = \frac{(x-a)^2}{1+(x-a)^2}$$

so ist

$$G_a = \psi_a E_0 = \{f : f = \psi_a g, \ g \in E_0\}.$$

Satz: $\{\mathcal{U}(t)\}$ definiert genau dann einen verallgemeinerten gemischten Prozeß, wenn für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $t \downarrow 0$ die positiven Funktionale

$$\frac{\mathcal{U}(t,a)}{t}\psi_a \longrightarrow Q(a)$$

einfach in E_0' konvergieren, und

$$\left\langle \frac{\mathcal{U}(t,a)}{t}, \frac{x-a}{1+(x-a)^2} \right\rangle \longrightarrow m(a)$$

konvergiert.

Definiert $\{\mathcal{U}(t)\}$ einen verallgemeinerten gemischten Prozeß, so existiert für jedes $f \in F_a$ der Grenzwert

$$\lim_{t\downarrow 0} \left\langle \frac{\mathcal{U}(t,a)-\delta_a}{t}, f \right\rangle = \langle A(a), f \rangle$$

und man hat

$$\langle A(a), f \rangle = m f'(a) + \left\langle Q(a), \frac{f - f(a)1 - f'(a)\frac{x-a}{1+(x-a)^2}}{\psi_a} \right\rangle$$

$$= m f'(a) + c(a)\left(f(\infty) - f(a)\right)$$

$$+ \left\langle Q(a)_0, \frac{f - f(a)1 - f'(a)\frac{x-a}{1+(x-a)^2}}{\psi_a} \right\rangle,$$

wobei wir $Q(a)$ nach 12B zerlegt haben in

$$Q(a) = Q(a)_0 + c(a)\,\delta_\infty$$

Es ist

$$c(a) \geq 0.$$

Beweis: Wir können größtenteils die Überlegungen von 8F übertragen. Das einzige was zu zeigen bleibt, ist, daß aus der einfachen Konvergenz von

$$\frac{\mathcal{U}(t,a) - \delta_a}{t}$$

in E_2' die einfache Konvergenz von

$$\frac{\mathcal{U}(t,a)}{t}\,\psi_a$$

in E_0' folgt.

Da aber

$$\left\| \frac{\mathcal{U}(t,a)}{t}\,\psi_a \right\|_{E_0'} = \left\langle \frac{\mathcal{U}(t,a)}{t}, \psi_a \right\rangle$$

ist, und $\psi_a \in E_2$, sind die $\frac{\mathcal{U}(t,a)}{t}\psi_a$ normbeschränkt. Da außerdem E_2 dicht in E_0 ist (s.2D), folgt aus 1 C die einfache Konvergenz in E_2'.

12E Satz: Ein verallgemeinerter gemischter Prozeß ist genau dann ein gemischter Prozeß (im strengen Sinn des Wortes), wenn für jedes $a \in \mathcal{R}$

$$c(a) = 0$$

ist.

Beweis: Direkte Folgerung aus 12C und 12D und der Definition des gemischten Prozesses 8F.

13. Vorläufige Diskussion der Konvergenz und der Form des Grenzwertes von $(U(t,a)-\delta_a)/t$ für $t \downarrow 0$.

13A Wir sind nunmehr in der Lage, den von uns angestrebten Beweis, daß ein in LB_n $(n \geq 2)$ einfach stetiger Prozeß ein verallgemeinerter gemischter Prozeß ist, in den Grundlinien zu skizzieren.

Die hervorstechendste Eigenschaft des Differenzenquotienten

$$\frac{U(t,a) - \delta_a}{t}$$

ist, daß er außerhalb des festen Punktes a positiv ist. Dies ist die Basis unserer Überlegungen.

Sei

$$\varphi \in H, \quad \varphi \geq 0, \quad \varphi(a) = 0,$$

und sei

$$\varphi E_0 = \{ f : f = \varphi g, \ g \in E_0 \}$$

Da für $f \in \varphi E_0$ der Funktionswert $f(a) = o$ ist, ist die Restriktion $e(t)$ von $(U(t,a)-\delta_a)/t$ auf φE_0 mit der Restriktion von $U(t,a)/t$ identisch und darum positiv.

Versehen wir φE_0 mit der Norm

$$p(f) = \inf \{ \lambda : |f| \leq \lambda \varphi \},$$

so ist die Menge

$$\{ e(t) : 0 < t \leq t_0 \}$$

normbeschränkt über φE_0.

Denn aus

$$p(f) \leq 1$$

folgt

$$-\varphi \leq f \leq \varphi$$

und daraus wegen der Positivität von $\varrho(t)$

$$-\langle \varrho(t), \varphi \rangle \leq \langle \varrho(t), f \rangle \leq \langle \varrho(t), \varphi \rangle .$$

Nun ist aber

$$\langle \varrho(t), \varphi \rangle \quad , \quad 0 < t \leq t_0$$

beschränkt; denn für $t \neq 0$ ist $\langle \varrho(t), \varphi \rangle$ ohnehin stetig, und das Skalarprodukt konvergiert für $t \downarrow 0$, weil $\varphi \in H$.

Gelingt es noch zu zeigen, daß $H \cap \varphi E_0$ dicht in φE_0 bezüglich dessen Normtopologie ist, dann schließt man aus 1C auf die Existenz von

$$\langle A(a), f \rangle = \lim_{t \downarrow 0} \left\langle \frac{\mathcal{U}(t,a) - \delta_a}{t}, f \right\rangle$$

für alle $f \in \varphi E_0$, daher auch für alle $f \in \varphi E_0 + H$.

Über die Form von A(a) ist zu sagen, daß A(a) φ ein positives Funktional über E_0 ist. Ob es ein integrierbares Maß ist, d.h. sein Verhalten im Unendlichen, bleibt dabei offen.

13B Es liegt im Interesse einer möglichst weitgehenden Aufhellung der Konvergenz von

$$\frac{\mathcal{U}(t,a) - \delta_a}{t}$$

und der Struktur des Grenzwertes, daß φE_0 ein möglichst umfassender Raum ist. Dazu darf φ keine anderen Nullstellen als x=a besitzen, darf im Unendlichen nicht verschwinden und muß für $x \to a$ möglichst langsam gegen Null gehen.

$\varphi \in H \subset E_n$, ist positiv und verschwindet für x=a. Daraus folgt, daß φ mindestens quadratisch, d.h. mindestens so stark wie $(x-a)^2$ für $x \to a$ gegen Null geht.

Hier wird deutlich, warum wir $n \geq 2$ gewählt haben. Denn für n=1 oder n=o gibt es keine solch maximal langsame Ordnung des Verschwindens für $x \to a$; präziser ausgedrückt, es gibt kein

$$\varphi \in E_n, \quad \varphi \geq 0, \quad \varphi(a) = 0$$

so daß φE_0 maximal ist.

Anders wäre es, wenn wir anstelle E_n die Menge M der beschränkten borelmeßbaren Funktionen wählten, oder die Menge der fast überall differenzierbaren, beschränkten Funktionen, die sich als Integrale beschränkter, borelmeßbarer Funktionen darstellen lassen. Denn dann wäre ein solches maximales φ entweder

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = a \\ o & \text{für } x = a \end{cases}$$

oder eine Funktion, die sich am Punkt a wie $|x-a|$ verhält.

Der erste Fall führt im wesentlichen auf rein unstetige Prozesse[1], der zweite hat gegenüber dem von uns behandelten den Nachteil, daß $|x-a|$ nicht stetig differenzierbar ist und sich daher die üblichen Methoden der Analysis nicht anwenden lassen.

---

1) s. DOOB S. 255ff

13C Um das skizzierte Programm durchführen zu können, müssen wir beweisen:

i) Zu jedem $a \in R$ gibt es ein $\varphi \in H$, so daß

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \neq a$$

und

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) > 0$$

ist, und daß $\varphi(x)$ wie $(x-a)^2$ verschwindet für $x \to a$.

ii) Sei φ die in i) gefundene Funktion, so ist $H \cap \varphi E_0$ dicht in φE_0 bezüglich dessen Normtopologie.

14. Ein grundlegender Hilfssatz.

14A Der folgende Hilfssatz ist das wichtigste Werkzeug zur Ableitung der anderen Hilfssätze und des Hauptsatzes. Er ersetzt in gewisser Weise die fehlende Homogenität von U(t). Wie in Zukunft immer, nehmen wir an, daß U(t) einen in LB_n $(n \geq 2)$ einfach stetigen Prozeß definiert.

Hilfssatz: Sei $f \in B_{n+1}$, $f''(0) \neq 0$, $C > 0$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es eine Glättungsfunktion α und zu jedem $a \in [-C, C]$ ein $h(a) \in R$, so daß

$$\| \mathcal{U}(\alpha)\, \tau_{a+h(a)} f - \tau_a f \|_m \leq \varepsilon$$

und

$$[\, \mathcal{U}(\alpha)\, \tau_{a+h(a)} f\,]'(a) = f'(0)$$

ist.

Wir benötigen meist nur folgende

Schwächere Form des Hilfssatzes: Sei $f \in B_{n+1}$, $a \in R$, $f''(a) \neq 0$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es eine Glättungsfunktion α und ein $h \in R$, so daß

$$\| \mathcal{U}(\alpha)\, \tau_h f - f \|_m \leq \varepsilon$$

und

$$[\, \mathcal{U}(\alpha)\, \tau_h f\,]'(a) = f'(a)$$

ist.

14B Beweis: Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $f''(0) < 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von $f''(x)$ gibt es ein $\gamma > 0$, so daß

$$(1) \quad f''(x) \leq -\beta < 0 \qquad \text{für } |x| \leq \gamma .$$

Wir können ein $\delta > 0$ wählen mit den Eigenschaften

(2) $\quad \delta < \dfrac{\beta}{2}$,

(3) $\quad \delta \leq \dfrac{\beta\gamma}{2}$,

(4) $\quad \delta \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$,

(5) $\quad \| \tau_y f - f \|_n \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ für alle $|y| \leq \dfrac{2\delta}{\beta}$ (s. 5A) .

14C Wie schon in 11D verwendet, ist wegen des uniform boundedness theorem (1F) die LB_n-Norm von $U(t)$ über jedem Kompaktum in R beschränkt. Gemäß 1C ist darum $t \rightarrow U(t)$ stetig in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz über jedem Kompaktum in B_n. Weil die Abbildung $y \rightarrow \tau_y f$, $f \in B_n$ nach 5A stetig ist, ist die Menge

$$\{ \tau_y f : y \in K \}$$

wo $K \subset R$ kompakt ist, kompakt in B_n. Daraus folgt, daß es zu jedem $\xi > 0$ ein $\eta > 0$ gibt, so daß

$$\| U(t) \tau_y f - \tau_y f \|_n < \xi$$

für alle $0 \leq t \leq \eta$ und $y \in K$. Für eine Glättungsfunktion α , deren Träger in $[0, \eta]$ enthalten ist, gilt wie in 11C

$$\| U(\alpha) \tau_y f - \tau_y f \|_n \leq \xi$$

für alle $y \in K$.

Übertragen wir diese Überlegungen auf den vorliegenden Fall, so können wir wegen $f \in B_{n+1}$, $f' = Df \in B_n$ sagen:

Es gibt eine Glättungsfunktion α , so daß

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\| U(\alpha) \tau_y f - \tau_y f \|_n \leq \delta \\ &\| U(\alpha) \tau_y Df - \tau_y Df \|_n \leq \delta \end{aligned}$$

ist für alle $|y| \leq C + \gamma$.

14D Wir setzen

$$(7) \quad F(x,y) = [\mathcal{U}(\alpha)\tau_y f](x)$$

Es ist

$$F_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = -[\mathcal{U}(\alpha)\tau_y Df](x),$$

denn es konvergiert

$$\left[\frac{\tau_{y+\Delta y} f - f}{\Delta y}\right](x) = \frac{f(x-y-\Delta y) - f(x-y)}{\Delta y}$$

nach

$$-f'(x-y) = -(\tau_y Df)(x)$$

in B_n, wenn $f \in B_{n+1}$ (s. 5D).

Für F(x,y) folgern wir aus (6)

$$(8) \quad \begin{aligned} &|F_x(x,y) - f'(x-y)| \leq \delta \\ &|F_{yx}(x,y) + f''(x-y)| \leq \delta \end{aligned}$$

für alle x und $|y| \leq C + \gamma$

F_{yx} ist eine stetige Funktion von x und y, denn

$$F_{yx}(x',y') - F_{yx}(x,y)$$

$$= \{-[D\mathcal{U}(\alpha)\tau_{y'}Df](x') + [D\mathcal{U}(\alpha)\tau_y Df](x')\}$$

$$+ \{-[D\mathcal{U}(\alpha)\tau_y Df](x') + [D\mathcal{U}(\alpha)\tau_y Df](x)\}$$

Die erste Klammer konvergiert für y' gegen y gleichmäßig in x' gegen Null, die zweite verschwindet für x' gegen x, da

$$[D\mathcal{U}(\alpha)\tau_y Df](x)$$

in x stetig ist. Es gilt also

$$(9) \quad F_{yx} = F_{xy}$$

14E Wir betrachten die Funktion

(10) $$g(a,z) = F_x(a, a+z) - f'(0) \quad .$$

Aus (8) und (9) folgt

$$|g(a,z) - f'(-z) + f'(0)| \leq \delta$$

$$|g_z(a,z) + f''(-z)| \leq \delta$$

für $|a| \leq C$ und $|z| \leq \gamma$ und damit wegen (1) und (2)

(11) $$\left.\begin{array}{l} |g(a,0)| \leq \delta \\ g_z(a,z) \geq \beta - \delta > \dfrac{\beta}{2} \end{array}\right. \quad \text{für } |a| \leq C \text{ und } |z| \leq \gamma \quad .$$

Nun ist

$$g(a,z) = g(a,0) + \int_0^z g_z(a,u)\,du \quad .$$

Für $\gamma \geq z \geq 0$ gilt

$$g(a,z) \geq -\delta + z(\beta - \delta) = -\delta(z+1) + \beta z \quad .$$

Falls

$$\frac{z}{z+1} > \frac{\delta}{\beta} \quad ,$$

ist

$$g(a,z) > 0 \quad .$$

Ebenso zeigt man, daß in diesem Falle

$$g(a,-z) < 0$$

ist. Die Bedingung ist für

$$z = \frac{2\delta}{\beta}$$

erfüllt, denn wegen (2) ist

$$\frac{2\delta}{\beta} < 1 \quad ,$$

Aus (3) folgt

$$\frac{2\delta}{\beta} \leq \gamma \quad .$$

Wegen (11) wächst g(a,z) für $|z| \leq \frac{2\delta}{\beta}$ streng monoton. Da es das Vorzeichen wechselt, besitzt es in diesem Intervall genau eine Nullstelle, die wir h(a) nennen.

(12) $|h(a)| \leq \dfrac{2\delta}{\beta}$ für alle $|a| \leq C$

Gemäß (7) und (10) ist

$$[\,\mathcal{U}(\alpha)\,\tau_{a+h(a)}\, f\,]'(a) = f'(0)\,.$$

14F Es bleibt die erste Relation des Hilfssatzes zu beweisen übrig. Aus (6) und (4) ergibt sich

$$\|\,\mathcal{U}(\alpha)\,\tau_{a+h(a)}\, f - \tau_{a+h(a)} f\,\|_{\mu} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Da die Translation an der Norm nichts ändert, gilt wegen (5) und (12)

$$\|\,\tau_{a+h(a)}\, f - \tau_a f\,\|_{\mu} \leq \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

und damit

$$\|\,\mathcal{U}(\alpha)\,\tau_{a+h(a)}\, f - \tau_a f\,\|_{\mu} \leq \varepsilon\,,$$

15. Weitere Hilfssätze:

15A **Hilfssatz:** Sei $f \in C_2$, und

$$f = \frac{(x-a)^2}{1+(x-a)^2}\, g = \psi_a g, \quad g \in C_0$$

so ist

$$\|g\|_0 \leq 2\|f\|_2$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß aus $\|f\|_2 \leq \frac{1}{2}$ folgt $\|g\|_0 \leq 1$. Sei also $\|f\|_2 \leq 1/2$. Aus den Relationen

$$f(a) = f'(a) = 0$$

$$|f''(x)| \leq \frac{1}{2}$$

folgt mit Hilfe des Taylorschen Satzes

$$|f(x)| = \left| \int_a^x (x-u) f''(u)\, du \right| \leq \frac{(x-a)^2}{4} .$$

Außerdem ist

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}$$

überall.

Also

$$|f(x)| \leq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{(x-a)^2}{4}\right) = \begin{cases} \frac{(x-a)^2}{4} & \text{für } |x-a| \leq \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } |x-a| \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

Für $|x-a| \leq \sqrt{2}$ gilt aber

$$\psi_a(x) = \frac{(x-a)^2}{1+(x-a)^2} \geq \frac{(x-a)^2}{3} \geq \frac{(x-a)^2}{4}$$

und für $|x-a| \geq \sqrt{2}$ gilt

$$\psi_a(x) \geq \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

Also ist

$$|f(x)| \leq \psi_a(x)$$

und damit

$$\|g\|_0 = \|f/\psi_a\|_0 \leq 1.$$

15B Wir erinnern an die Bedeutung von G_a aus 12C und führen in G_a die Norm ein

$$N(f) = \left\| \frac{f}{\psi_a} \right\|_0$$

Mit dieser Norm ist G_a isometrisch zu E_o und ein Banachraum.

<u>Folgerung aus 15A:</u> Für jedes $f \in G_a \cap E_n$, $n \geq 2$ gilt

$$N(f) \leq 2 \, \| f \|_n$$

15C <u>Hilfssatz:</u> Sei

$$\xi(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

dann gibt es zu jedem $C > o$ und $\varepsilon > 0$ eine Glättungsfunktion α und zu jedem $a \in [-C, C]$ ein $h(a)$, so daß für

$$\varphi_a = 1 \left[\mathcal{U}(\alpha)\, \tau_{a+h(a)}\, \xi \right](a) - \mathcal{U}(\alpha)\, \tau_{a+h(a)}\, \xi$$

gilt

$$\varphi_a \in G_a$$

$$\left\| \frac{\varphi_a}{\psi_a} - 1 \right\|_0 \leq \varepsilon$$

<u>Beweis:</u>

$$\xi'(0) = 0$$

$$\xi''(0) = -2.$$

Wir können 14A anwenden. Es existiert eine Glättungsfunktion α und zu jedem $a \in [-C, C]$ ein h(a), so daß für

$$\vartheta_a = \mathcal{U}(\alpha)\, \tau_{a+h(a)} \xi$$

gilt

$$\vartheta_a'(a) = 0$$

$$\| \vartheta_a - \tau_a \xi \|_n \leq \frac{\varepsilon}{4} .$$

Für jedes $|a| \leq C$ gehört

$$\varphi_a = 1 . \vartheta_a(a) - \vartheta_a$$

zu G_a. Es ist

$$\| \varphi_a - \psi_a \|_n$$

$$= \| (1 . \vartheta_a(a) - \vartheta_a) - (1 - \tau_a \xi) \|_n$$

$$\leq | \vartheta_a(a) - 1 | \; \| 1 \|_n + \| \tau_a \xi - \vartheta_a \|_n$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} .$$

Nach 13B

$$N(\varphi_a - \psi_a) \leq \varepsilon$$

oder

$$\left\| \frac{\varphi_a}{\psi_a} - 1 \right\|_0 \leq \varepsilon .$$

15D Offensichtlich

$$\varphi_a \in H .$$

Für $\varepsilon < 1$ gilt

$$\varphi_a(x) > 0 \quad \text{für } x \neq a$$

$$\lim_{|x| \to \infty} \varphi_a(x) = \varphi_a(\infty) > 0$$

$$\varphi_a(x) \to 0 \quad \text{wie } (x-a)^2 \text{ für } x \to a.$$

φ_a erfüllt also alle in 13C gestellten Forderungen.

Weil

$$(1-\varepsilon)1 \leq \frac{\varphi_a}{\psi_a} \leq (1+\varepsilon)1$$

liegt die Reziproke von $\frac{\varphi_a}{\psi_a}$ in E_0 und es ist

$$G_a = \psi_a E_0 = \varphi_a E_0 .$$

Für die Norm

$$p(f) = \| f / \varphi_a \|_0$$

rechnet man leicht aus

$$(1-\varepsilon)\, p(f) \leq N(f) \leq (1+\varepsilon)\, p(f) .$$

Also sind die Normen p(f) und N(f) auf G_a äquivalent.

15E <u>Hilfssatz:</u> $G_a \cap E_n$ ist dicht in G_a bezüglich der Normtopologie von G_a.

<u>Beweis:</u> Sei $f \in G_a$ und sei

$$g = f / \psi_a$$

Da E_n dicht in E_0 ist (s. 2D), gibt es ein $h \in E_n$, so daß

$$\| h - g \|_0 \leq \varepsilon .$$

Also

$$| h(x) - g(x) | \leq \varepsilon \qquad \text{für alle } x .$$

Daraus folgt durch Multiplikation mit ψ_a

$$| \psi_a(x) h(x) - f(x) | \leq \varepsilon\, \psi_a(x) ,$$

oder

$$N(\psi_a h - f) \leq \varepsilon .$$

Der erste Ausdruck in der Klammer ist aber offensichtlich in

$$G_a \cap E_n .$$

15F <u>Hilfssatz:</u> $G_a \cap H$ ist dicht in G_a bezüglich dessen Normtopologie.

<u>Beweis:</u> Gemäß dem letzten Hilfssatz genügt es zu zeigen, daß $H \wedge G_a$ dicht in $E_n \wedge G_a$ ist.

Sei $f \in E_n \cap G_a$, dann gibt es nach 11C für jedes beliebige $\varepsilon > 0$ eine Glättungsfunktion α, so daß

(1) $\| \mathcal{U}(\alpha) f - f \|_n \leq \varepsilon$

ist. $U(\alpha)f$ liegt jedoch im allgemeinen nicht in $G_a \cap H$, weil weder es selbst, noch seine erste Ableitung für $x=a$ zu verschwinden braucht. Wir versuchen nun von $U(\alpha)f$ eine geeignete Funktion $h \in H$ abzuziehen, so daß

$g = U(\alpha)f - h \in G_a$

ist.

Sei

$$\chi(x) = \exp\left[(x-a) - (x-a)^2\right].$$

Es ist

$$\chi(a) = 1, \quad \chi'(a) = 1, \quad \chi''(a) = -1.$$

Wir können Hilfssatz 14A (schwächere Form) anwenden und eine Glättungsfunktion β und ein $y \in R$ finden, so daß

$$\| \mathcal{U}(\beta) \tau_y \chi - \chi \|_n \leq \varepsilon$$

und

$$[\mathcal{U}(\beta) \tau_y \chi]'(a) = 1$$

ist. Dann setzen wir

$$h_1 = [(\mathcal{U}(\alpha) f)'(a)] \; \mathcal{U}(\beta) \tau_y \chi$$

und

$$h = h_1 + 1 \left[(\mathcal{U}(\alpha) f)(a) - h_1(a) \right].$$

Offensichtlich ist

$$h(a) = (\mathcal{U}(\alpha) f)(a)$$

$$h'(a) = (\mathcal{U}(\alpha) f)'(a) ,$$

und damit

$$g = \mathcal{U}(\alpha) f - h \in G_a .$$

Da wegen (1)

$$|(\mathcal{U}(\alpha) f)(a)| \leq \varepsilon$$

und

$$|(\mathcal{U}(\alpha) f)'(a)| \leq \varepsilon$$

ist, und da

$$\| \tau_y \|_{LB_n} = 1 ,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \| f - g \|_n &\leq \| f - \mathcal{U}(\alpha) f \|_n + \| h \|_n \\ &\leq \| f - \mathcal{U}(\alpha) f \|_n + \| h_1 \|_n + \\ &\quad + |(\mathcal{U}(\alpha) f)(a)| + |h_1(a)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon (\| \chi \|_n + \varepsilon) + \varepsilon + \varepsilon (\| \chi \|_n + \varepsilon) \\ &= 2\varepsilon (1 + \| \chi \|_n + \varepsilon) . \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 15B ist

$$N(f - g) \leq 4 \varepsilon (1 + \| \chi \|_n + \varepsilon) .$$

15G <u>Hilfssatz:</u> $G_a + H = F_a$.

<u>Beweis:</u> Da sich jede Funktion in E_n durch Funktionen aus H approximieren läßt, gibt es zwei Funktionen $f_1, f_2 \in H$, so daß die beiden zweidimensionalen Vektoren

$(f_1(a), f_1'(a))$

$(f_2(a), f_2'(a))$

linear unabhängig sind. Wir können jedes $f \in F_a$ darstellen in der Form

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + [f - \alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2] ,$$

wo α_1 und α_2 durch die Gleichungen

$$\alpha_1 f_1(a) + \alpha_2 f_2(a) = f(a)$$

$$\alpha_1 f_1'(a) + \alpha_2 f_2'(a) = f'(a)$$

bestimmt sind. Die in eckigen Klammern stehende Funktion gehört G_a an. Damit ist gezeigt, daß sich F_a durch H und G_a erzeugen läßt. Umgekehrt liegt offensichtlich jede Funktion aus $G_a + H$ in F_a.

16. Der Hauptsatz.

16A **Hauptsatz:** Jeder in LB_n ($n \geq 2$) einfach stetige Prozeß ist ein verallgemeinerter gemischter Prozeß.

Beweis: Die Restriktionen $\rho(t)$ von $(\mathcal{U}(t,a) - \delta_a)/t$ über G_a bilden eine Menge positiver Funktionale über G_a, denn $< \delta_a/t, f >$ verschwindet für $f \in G_a$. Die Menge

$$\{ \rho(t) : 0 < t \leq t_0 \}$$

ist normbeschränkt über G_a. Denn aus $f \in G_a$, $N(f) \leq 1$ folgt (s. 15D)

$$|f| \leq \psi_a \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \varphi_a ,$$

wo ε eine feste Zahl < 1 ist,

$$-\frac{1}{1-\varepsilon} \varphi_a \leq f \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \varphi_a$$

und

$$-\frac{1}{1-\varepsilon} < \rho(t), \varphi_a > \leq < \rho(t), f > \leq \frac{1}{1-\varepsilon} < \rho(t), \varphi_a > .$$

$< \rho(t), \varphi_a >$ ist aber für $t > 0$ stetig und konvergiert für $t \downarrow 0$, weil $\varphi_a \in H$ ist.

Da $G_a \cap H$ dicht in G_a ist (s.15F), folgt aus 1C, daß $\rho(t)$, $t \downarrow 0$ einfach über G_a konvergiert.

Da $F_a = G_a + H$ ist (15G), ergibt sich die Konvergenz von

$$< \frac{\mathcal{U}(t,a) - \delta_a}{t}, f > \longrightarrow < A(a), f >$$

für jedes $f \in F_a$. Nach 12C ist damit $\{U(t)\}$ ein verallgemeinerter gemischter Prozeß.

16B Wir erinnern an die Formel von A(a) aus 12C und zerlegen $Q(a)$ in $Q(a) = Q(a)' + c(a)\delta_\infty + \sigma^2(a)\delta_a$, wo $Q(a)'$ ein integrierbares Maß ist, das der einpunktigen Menge $\{a\}$ den Wert Null zumißt.

Wir setzen

$$\eta_a = \frac{x-a}{1+(x-a)^2}$$

Es ist für $f \in F_a$

$$\langle A(a), f \rangle = m(a) f'(a) + c(a)\,(f(\infty) - f(a))$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sigma^2(a) f''(a) + \langle Q(a)', \frac{f - f(a)1 - f'(a)\eta_a}{\psi_a} \rangle .$$

<u>Satz:</u> Für fast alle t ist

$$\frac{\sigma^2(a)}{2} \langle \delta_a D^2 \mathcal{U}(t), 1 \rangle = c(a)$$

und $c(a)$ verschwindet für fast alle a.

<u>Beweis:</u> Sei α eine beliebige Glättungsfunktion und $f_i \in \mathcal{B}_1$ eine locker nach <u>1</u> konvergierende Folge. Wir berechnen

$$\lim_{i\to\infty} \langle A(a)\,\mathcal{U}(\alpha), f_i \rangle$$

Nach 11D und 11A ist

$$\langle A(a)\,\mathcal{U}(\alpha), f_i \rangle = - \langle \delta_a\, \mathcal{U}(\dot\alpha), f_i \rangle$$
$$\longrightarrow - \langle \delta_a\, \mathcal{U}(\dot\alpha), 1 \rangle = \int \dot\alpha(t)\,(\mathcal{U}(t)1)(a)\,dt$$
$$= \int \dot\alpha(t)\,dt = 0$$

Andererseits ist

$$\langle A(a)\,\mathcal{U}(\alpha), f_i \rangle = \langle A(a), \mathcal{U}(\alpha) f_i \rangle .$$

Wegen der lockeren Konvergenz sind die $\mathcal{U}(\alpha) f_i$ in der C_n- Norm und darum (s. 15B) die

$$g_i = \frac{\mathcal{U}(\alpha) f_i - (\mathcal{U}(\alpha) f_i)(a) 1 - (\mathcal{U}(\alpha) f_i)'(a) \eta_a}{\psi_a}$$

in der C_o-Norm beschränkt. Nach 6D konvergieren die $\mathcal{U}(\alpha) f_i$ locker (n-1)-ter, d.h. mindestens erster Ordnung gegen $\underline{1}$. Darum konvergieren die g_i an allen von a verschiedenen Punkten gegen Null. Für den Punkt a können wir außer der Beschränktheit nichts aussagen, denn

$$g_i(a) = \frac{1}{2} (\mathcal{U}(\alpha) f_i)''(a)$$

braucht nicht nach

$$\frac{1}{2} (\mathcal{U}(\alpha) 1)''(a) = 0$$

zu konvergieren (s. Gegenbeispiel 6E). Da aber das Q(a)' -Maß des Punktes a verschwindet, können wir trotzdem den Satz von LEBESGUE anwenden und erhalten

$$< Q(a)', g_i > \rightarrow 0 .$$

Damit geht

$$<A(a), \mathcal{U}(\alpha) f_i > \rightarrow - c(a) + \frac{\sigma^2(a)}{2} < \delta_a D^2 \mathcal{U}(\alpha), 1 > .$$

Dieser Ausdruck verschwindet nach unseren obigen Überlegungen.

$$c(a) = \frac{\sigma^2(a)}{2} < \delta_a D^2 \mathcal{U}(\alpha), 1 > .$$

Aus dieser Gleichung schließt man nach 6D, daß c(a) für fast alle a verschwindet.

Für alle f_i ist

$$< \delta_a D^2 \mathcal{U}(\alpha), f_i > = \int \alpha(t) < \delta_a D^2 \mathcal{U}(t), f_i > dt$$

Läßt man $i \rightarrow \infty$ laufen, so konvergiert der Integrand punktweise und ist beschränkt durch

$$\sup_t \| \alpha(t) \, \mathcal{U}(t) \|_{LB_n} \cdot \sup_i \| f_i \|_n .$$

Wir können den Satz von LEBESGUE anwenden und erhalten

$$< \delta_a D^2 \mathcal{U}(\alpha), 1 > = \int \alpha(t) < \delta_a D^2 \mathcal{U}(t), 1 > dt$$

und

$$c(a) = \frac{1}{2} \sigma^2(a) \int \alpha(t) < \delta_a D^2 \mathcal{U}(t), 1 > dt$$

Da α eine beliebige Glättungsfunktion war, ist

$$c(a) = \frac{1}{2} \sigma^2(a) < \delta_a D^2 \mathcal{U}(t), 1 > \text{für fast alle } t.$$

16C <u>Folgerung:</u> Ein in LB_n $(n \geqslant 2)$ einfach stetiger Prozeß ist genau dann ein gemischter Prozeß (im strengen Sinn des Wortes), wenn es für jedes feste $a \in R$ eine Menge $M(a) \subset [0, \infty)$ gibt, deren Lebesguesches Maß von Null verschieden ist, und für die gilt

$$\frac{1}{2} \sigma^2(a) < \delta_a D^2 \mathcal{U}(t), 1 > = 0 \quad \text{für } t \in M(a).$$

Dies ist insbesondere immer für $n \geq 3$ der Fall. Denn dann ist nach 6D

$$< \delta_a D^2 \mathcal{U}(t), 1 > = 0$$

für alle $t \in [0, \infty)$ und $a \in R$.

<u>Beweis:</u> s. 12E.

17. Die globale Struktur von A.

17A Satz: Sei $\{U(t)\}$ ein in LB_n $(n \geq 2)$ einfach stetiger Prozeß, so konvergiert für jedes $f \in E_2$

$$\frac{\mathcal{U}(t) - I}{t} f$$

punktweise gegen eine borelmeßbare, über jedem Kompaktum beschränkte Funktion. Ist der Prozeß $\{U(t)\}$ darüber hinaus ein gemischter Prozeß (im strengen Sinn des Wortes), so gilt diese Aussage für jedes $f \in C_2$.

Beweis: Die Funktion ist als Grenzwert stetiger Funktionen borelmeßbar. Ihre Beschränktheit über jedem Kompaktum schließt man aus dem folgenden Satz 17B. Ist A(a) eine integrierbare Distribution zweiter Ordnung, so ist

$$\| A(a) \|_{E_2'} = \| A(a) \|_{B_2'} = \| A(a) \|_{C_2'}$$

17B Satz: Die E_2'- Norm von A(a) ist beschränkt, wenn a ein Kompaktum in R durchläuft.

Beweis: Wir müssen zeigen, daß $\| A(a) \|_{E_2'}$ in jedem Intervall $[-C, C]$, $C > 0$, beschränkt ist.

17C Wir zeigen zunächst die Beschränktheit von $\| Q(a) \|_{E_0'}$, $|a| \leq C$.
Es ist $\| Q(a) \|_{E_0'} = \langle Q(a), 1 \rangle = \langle A(a), \psi_a \rangle$.

Nach 15D ist

$$\psi_a \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \varphi_a$$

mit einem festen $\varepsilon < 1$, und damit

$$\| Q(a) \|_{E_0'} \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \langle A(a), \varphi_a \rangle$$

Es genügt die Beschränktheit von $\langle A(a), \varphi_a \rangle$ zu beweisen.

Nach 15C und 11D ist aber

$$\langle A(a), \varphi_a \rangle$$

$$= - \langle A(a), \mathcal{U}(\alpha) \tau_{a+h(a)} \xi \rangle$$

$$= [\, \mathcal{U}(\dot\alpha)\, \tau_{a+h(a)} \xi \,]\,(a)$$

$$\leq \| \mathcal{U}(\dot\alpha) \|_{\mathcal{L}B_n} \| \xi \|_n$$

17D Aus der Tatsache, daß sich jede Funktion in B_n durch Funktionen aus H approximieren läßt (11C), folgt, daß es zwei Funktionen g_1 und g_2 in H gibt, so daß

$$D(a) = \begin{vmatrix} g_1(a) & g_2(a) \\ g_1'(a) & g_2'(a) \end{vmatrix} \geq \beta > 0$$

für alle $|a| \leq C$ ist.

Sei $f \in E_2$, $\|f\|_2 \leq 1$ so können wir für jedes $a \in [-C,C]$ die Funktion f zerlegen in

$$f = \lambda_1(a)\, g_1 + \lambda_2(a)\, g_2 + (f - \lambda_1(a) g_1 - \lambda_2(a) g_2),$$

wo $\lambda_1(a)$ und $\lambda_2(a)$ so bestimmt werden, daß die in Klammern stehende Funktion zu G_a gehört.

$$\lambda_1(a)\, g_1(a) + \lambda_2(a)\, g_2(a) = f(a)$$

$$\lambda_1(a)\, g_1'(a) + \lambda_2(a)\, g_2'(a) = f'(a).$$

Es ist

$$\langle A(a), f \rangle = \lambda_1(a) \langle A(a), g_1 \rangle + \lambda_2(a) \langle A(a), g_2 \rangle + \langle Q(a), \frac{f - \lambda_1(a) g_1 - \lambda_2(a) g_2}{\psi_a} \rangle.$$

Nach 11E liegt

$$a \rightarrow \langle A(a), g_1 \rangle$$

in B_n und ist darum beschränkt. Das gleiche gilt für

$$a \rightarrow \langle A(a), g_2 \rangle \ .$$

Wir haben die Beschränktheit von $\| A(a) \|_{E_2'}$, $|a| \leq C$
bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß

$$\lambda_1(a), \ \lambda_2(a)$$

und (s. 17C)

$$\left\| \frac{f - \lambda_1(a) g_1 - \lambda_2(a) g_2}{\psi_a} \right\|_0 = N_a(f - \lambda_1(a) g_1 - \lambda_2(a) g_2)$$

beschränkt sind.

Es ist aber

$$|\lambda_1(a)| \leq \frac{\left| \operatorname{Det} \begin{pmatrix} g_2(a) & f(a) \\ g_2'(a) & f'(a) \end{pmatrix} \right|}{D(a)} \leq \frac{2 \|g_2\|_n}{\beta}$$

$$|\lambda_2(a)| \leq \frac{2 \|g_1\|_n}{\beta}$$

und

$$N_a \ (f - \lambda_1(a) g_1 - \lambda_2(a) g_2)$$

$$\leq 2 \ \| f - \lambda_1(a) g_1 - \lambda_2(a) g_2 \|_2$$

$$\leq 2 \ (1 + |\lambda_1(a)| \, \|g_1\|_n + |\lambda_2(a)| \, \|g_2\|_n).$$

17E Daß im allgemeinen $\|A(a)\|_{E_2'}$ tatsächlich nicht über der ganzen Achse beschränkt ist, sieht man an dem Beispiel

$(U(t)f)(x) = f(xe^{-t})'$.

Offensichtlich definiert U(t) einen stationären Markowprozeß. Für jedes n ist die Restriktion von U(t) auf B_n ein Operator aus LB_n der Norm 1.

$t \to U(t)$ ist einfach stetig in LB_o. Es genügt dies für t = 0 zu zeigen. Sei $f \in B_o$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so wählen wir ein r so groß, daß

$$|f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für } |x| \geq r/e .$$

Weil f gleichmäßig stetig ist (s. 2C), können wir ein so kleines t_o finden, daß

$t_o \leq 1$

und

$$|f(y) - f(y')| \leq \varepsilon$$

ist, für

$$|y - y'| \leq r\,(1 - e^{-t_o}) .$$

Dann gilt für $|x| \geq r$, $t \leq t_o \leq 1$

$$|f(xe^{-t}) - f(x)| \leq |f(xe^{-t})| + |f(x)| \leq \varepsilon ,$$

und für $|x| \leq r$, $t \leq t_o$

$$|f(xe^{-t}) - f(x)| \leq \varepsilon ,$$

wegen

$$|xe^{-t} - x| \leq r(1 - e^{-t}) \leq r(1 - e^{-t_o}) .$$

Da

$$\cdot \quad \mathcal{D}^k \, \mathcal{U}(t) = e^{-kt} \, \mathcal{U}(t) \, \mathcal{D}^k$$

ist, folgt aus der einfachen Stetigkeit in LB_o die einfache Stetigkeit in LB_n, n = 0,1,2,... U(t) erfüllt also alle Voraussetzungen von 17B.

Wir berechnen

$$\langle A(a), f \rangle = \lim \frac{(\mathcal{U}(t) f)(a) - f(a)}{t}$$

$$= \lim \frac{f(a e^{-t}) - f(a)}{t} = -a f'(a),$$

also

$$A(a) = -a \, \delta_a \, \mathcal{D}$$

und

$$\| A(a) \|_{E_2'} = |a| .$$

A n h a n g

18. Über die Stetigkeit von Halbgruppen vom Faltungstypus.

18A **Satz:** Gegeben sei eine Abbildung

$$t \in [0,\infty) \longrightarrow \mu(t) \in \mathcal{B}_0'$$

mit den Eigenschaften

$$\mu(t_1+t_2) = \mu(t_1) * \mu(t_2),$$

$$\mu(0) = \delta,$$

$$\|\mu(t)\|_{\mathcal{B}_0'} = \|\mu(t)\| \leq 1 .$$

Außerdem sei

$$\langle \mu(t), e^{i\xi x} \rangle_x$$

für jedes feste ξ LEBESGUEsch meßbar in t .

Dann gilt

entweder $\mu(t) = 0$ für alle $t > 0$,

oder $\mu(t) \neq 0$ für alle $t > 0$,
$\mu(t)$ ist einfach stetig in B_0'
$\mu(t)$ ist von rechts streng stetig.

Von rechts stetig heißt, daß $\mu(t_i)$ streng gegen konvergiert für jede konvergente Folge $t_i \downarrow t$.

18B Wir benötigen zunächst einen Satz aus der allgemeinen Halbgruppentheorie :

Satz: Sei U(t), $t > 0$ eine Menge von Elementen einer Banachalgebra und gelte

$$\mathcal{U}(t_1+t_2) = \mathcal{U}(t_1)\,\mathcal{U}(t_2)$$

$$0 < \|\mathcal{U}(t)\| \leq 1 \qquad \text{für alle } t > 0 ,$$

dann ist

$$\lim_{t\downarrow 0} \|\mathcal{U}(t)\| = 1 .$$

<u>Beweis:</u> Aus

$$\| \mathcal{U}(t+t') \| \leq \| \mathcal{U}(t) \| \, \| \mathcal{U}(t') \|$$

und

$$0 < \| \mathcal{U}(t) \| \leq 1$$

folgt für

$$g(t) = - \log \| \mathcal{U}(t) \| ,$$

daß

$$\infty > g(t+t') \geq g(t) + g(t') \geq 0$$

ist. g(t) ist monoton anwachsend. Sei ξ_i eine Nullfolge und seien die k_i ganze Zahlen mit

$$k_i \geq \frac{1}{\xi_i} \geq k_i - 1 ,$$

also

$$\frac{k_i}{k_i - 1} \geq k_i \xi_i \geq 1$$

Für

$$k_i \geq 2$$

ist

$$\frac{k_i}{k_i - 1} \leq 2 ,$$

also

$$2 \geq k_i \xi_i$$

und

$$g(2) \geq g(k_i \xi_i) \geq k_i \, g(\xi_i) ,$$

und damit

$$g(\xi_i) \leq \frac{g(2)}{k_i} \longrightarrow 0$$

18C Für

$$C(\xi,t) = \langle \mu(t), e^{i\xi x} \rangle_x$$

gilt

$$C(\xi, t_1 + t_2) = C(\xi, t_1)\, C(\xi, t_2) .$$

Man schließt daraus, daß für ein festes ξ die Funktion $C(\xi, t)$ für alle t > 0 verschwindet, wenn sie für ein einziges t > 0 verschwindet. Wenn $C(\xi, t)$ für ein t > 0 nicht verschwindet, dann verschwindet es nicht für alle t > 0. In diesem letzten Fall schließt man aus der Meßbarkeit, daß

$$C(\xi, t) = e^{K(\xi) t}$$

ist. Da

$$\xi \to C(\xi, t), \qquad \text{t fest}$$

stetig ist, ist $K(\xi)$ stetig, wo es definiert ist, d.h. wo $C(\xi, t) \neq 0$ für t > 0 ist.

$$\lim_{t \downarrow 0} C(\xi,t) = C(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{wo } C(\xi,t) = 0,\ t > 0 \\ 1 & \text{wo } C(\xi,t) \neq 0,\ t > 0 \end{cases} .$$

18D Die Kugel

$$\{\mu \in \mathcal{B}_0' : \|\mu\| \leq 1\}$$

ist einfach kompakt in B_0' [1]. Also hat $\mu(t)$ für $t \downarrow 0$ mindestens einen Häufungspunkt μ und es gibt eine Nullfolge t_i, so daß $\mu(t_i) \to \mu$ konvergiert. Sei $Q \subset R$ ein beliebiges endliches Intervall, so ist

$$\int_Q e^{i\xi x}\, d\xi \in \mathcal{B}_0 ,$$

$$\langle \mu(t_i), \int_Q e^{i\xi x} d\xi \rangle_x \to \langle \mu, \int_Q e^{i\xi x} d\xi \rangle_x .$$

---

1) s. LOOMIS S. 22

Nach dem Satz von FUBINI gilt

$$\langle \mu(t_i), \int_Q e^{i\xi x}\, d\xi \rangle_x = \int_Q \langle \mu(t_i), e^{i\xi x} \rangle_x\, d\xi = \int_Q C(\xi, t_i)\, d\xi,$$

also

$$\int_Q C(\xi, t_i)\, d\xi \to \int_Q \langle \mu, e^{i\xi x} \rangle_x\, d\xi = \int_Q \tilde{\mu}(\xi)\, d\xi .$$

Demnach ist

$$\tilde{\mu}(\xi) = C(\xi) \qquad \text{fast überall.}$$

Die Fouriertransformierte eines zweiten Häufungspunktes μ' stimmt mit der von μ fast überall überein, also überall, da Fouriertransformierte stetig sind. Damit ist

$$\mu = \mu'$$

und $\mu(t)$ konvergiert für $t \downarrow 0$ einfach gegen μ.

Da $\tilde{\mu}(\xi)$ stetig ist, ist $C(\xi)$ fast überall gleich einer stetigen Funktion, d.h. fast überall gleich 1 oder fast überall gleich Null. $\mu(t)$ konvergiert also entweder nach δ oder nach Null.

Im zweiten Fall ist

$$C(\xi, t) = 0 \qquad \text{fast überall,}$$

und deshalb

$$\mu(t) = 0 \qquad \text{für alle } t > 0,$$

und damit auch

$$C(\xi, t) = 0 \qquad \text{überall, } t > 0.$$

Damit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

18E Es bleibt der Fall

$$\mu = \delta$$

zu behandeln. Es ist

$$\mu(t) \neq 0$$

für t $>$ 0. Also nach 18B

$$\lim_{t \downarrow 0} \|\mu(t)\| = 1 = \|\delta\|$$

Nach 4I folgt

$$\mu(t) \to \delta$$

streng. Damit konvergiert $C(\xi, t)$ für t $\downarrow$ 0 punktweise nach $\underline{1}$ und $C(\xi, t)$ ist von Null verschieden für alle t $\geq$ 0 und ξ .

Aus der Stetigkeit von $C(\xi, t)$ für alle t und der einfachen Kompaktheit der Einheitskugel in B_0' ergibt sich die einfache Stetigkeit von

$$t \to \mu(t)$$

Weil

$$\mu(t_i) = \mu(t_i - t) * \mu(t),$$

folgt die strenge Stetigkeit von rechts aus

$$\mu(t_i - t) \to \delta, \quad t_i \downarrow t$$

und aus Satz 5K.

18F Wir behandeln noch den Sonderfall $\mu(t) \geq 0$. Dann ist

$$\|\mu(t_1 + t_2)\| = \|\mu(t_1)\| \cdot \|\mu(t_2)\|,$$

und $\|\mu(t)\|$ ist entweder gleich Null für t $>$ 0 oder gleich $e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$. Im zweiten Fall ist $\|\mu(t)\|$ stetig und nach 4H $\mu(t)$ streng stetig schlechthin. Setzen wir

$$\mu(t) = e^{-\gamma t} p(t),$$

so hat p(t) alle Eigenschaften der homogenen stationären Prozesse.

Symbolverzeichnis

Sachverzeichnis

Literaturverzeichnis

Abkürzende Bezeichnung:

BOURBAKI	N. BOURBAKI, Intégration Chap. I-IV, Hermann, Paris 1952 (Actualités scientifiques et industrielles Nr. 1175)
BOURBAKI esp.vect.top.II	N. BOURBAKI, Espaces vectoriels topologiques,Chap. III-V. Hermann, Paris 1955 (Actualités scientifiques et industrielles Nr. 1229)
CHINTSCHIN	A. CHINTSCHIN, (franz. Transskription Khintchine) Déduction nouvelle d'une formule de M. Paul LEVY Bull. d'état à Moscou, Série Int., Sect. A, 1 (1937) 1-5
DOOB	J.L. DOOB, Stochastic Processes New York - London 1953
FELLER	W. FELLER, Zur Theorie der stochastischen Prozesse (Existenz und Eindeutigkeitssätze) Math. Ann. 113 (1936-37) 113-160
GNEDENKO	B.W. GNEDENKO, Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung Akamemie-Verlag, Berlin 1958

HALMOS	P.R. HALMOS, Measure Theorie, Van Nostrand (Princeton, Toronto, London, New York) 1950
HILLE und PHILLIPS	E. HILLE und R. PHILLIPS, Functional Analysis and Semigroups, Providence R.I., U.S.A. 1957
KUNISAWA	Kiyonori KUNISAWA, On the Mixed Markoff Process. Kōdai math. Sem. Reports 1949 S. 68-72
LOOMIS	L.H. LOOMIS, An Introduction to Abstract Harmonic Analysis, Van Nostrand (Princeton, Toronto, London, New York) 1953
L. SCHWARTZ TD I, TD II	Laurent SCHWARTZ, Théorie des Distributions, Tome I, Paris 1957 (Actualités scientifiques et industrielles Nr. 1245) Tome II, Paris 1959 (Actualités scientifiques et industrielles Nr. 1122)
L. SCHWARTZ, Semigroups	Laurent SCHWARTZ, Lectures on Mixed Problems in Partial Differential Equations and Representations of Semigroups TATA Institute of Fundam. Research, Bombay 1958

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Prof. Dr. Heinz KÖNIG, der die Arbeit in all ihren Stadien kritisch durchgesehen hat und mir stets mit seinem Rat zur Seite gestanden ist. Die Anregung zu dieser Arbeit sowie viele fördernden Gespräche danke ich Herrn Dr. Hermann JORDAN, dem stellvertretenden Leiter des Instituts für Plasmaphysik der Kernforschungsanlage Jülich. Herrn Prof. Dr. Wilhelm FUCKS, dem Leiter dieses Instituts, möchte ich dafür danken, daß er mir die Möglichkeit gab, die Arbeit durchzuführen. Nicht vergessen möchte ich meinen Freund, Herrn Dipl.-Phys. Pitter GRÄFF. Aus den Diskussionen mit ihm ist manch neuer Gedanke erwachsen.