PELABELAN KONSEKUTIF (*CONSECUTIVE LABELING*) PADA GRAF STAR S_n DAN GRAF DOUBLE STAR $S_{n,n+1}$ (n Bilangan Asli)

SKRIPSI

Oleh:
ABDUL MUIS
NIM. 04510012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

PELABELAN KONSEKUTIF (*CONSECUTIVE LABELING*) PADA GRAF STAR S_n DAN GRAF DOUBLE STAR $S_{n,n+1}$ (*n* Bilangan Asli)

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ABDUL MUIS
NIM. 04510012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

PELABELAN KONSEKUTIF (*CONSECUTIVE LABELING*) PADA GRAF STAR S_n DAN GRAF DOUBLE STAR $S_{n,n+1}$ (n Bilangan Asli)

SKRIPSI

Oleh:
ABDUL MUIS
NIM 04510012

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 17 Oktober 2008

Dosen Pembimbing I,	**Dosen Pembimbing II,**
Abdussakir, M.Pd	**Abdul Azis, M.Si**
NIP 150 327 247	**NIP 150 377 256**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP 150 318 321

PELABELAN KONSEKUTIF (*CONSECUTIVE LABELING*) PADA GRAF STAR S_n DAN GRAF DOUBLE STAR $S_{n,n+1}$ (n Bilangan Asli)

SKRIPSI

Oleh:
ABDUL MUIS
NIM 04510012

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:

21 Oktober 2008

Susunan Dewan Penguji:		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	**: Wahyu H. Irawan, M.Pd** **NIP: 150 300 415**	( )
2. Ketua	**: Evawati Alisah, M.Pd** **NIP: 150 291 271**	( )
3. Sekretaris	**: Abdussakir, M.Pd** **NIP: 150 327 247**	( )
4. Anggota	**: Abdul Azis, M.Si** **NIP: 150 377 256**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP: 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : ABDUL MUIS
NIM : 04510012
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 17 Oktober 2008

Yang membuat pernyataan

Abdul Muis
NIM. 04510012

MOTTO

" Keadaan apapun yang dihadapi bersifat netral, kita sendiri yg memberi label + atau – "

PERSEMBAHAN

Penulis Persembahkan Karya Tulis ini untuk:

Ibu, Ayah, dan adik tercinta (Mualana Ramadhani) yang selalu memberikan segalanya

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kehadirat Allah SWT, karena atas taufik dan hidayah-Nya penulisan skripsi yang berjudul ″ Pelabelan Konsekutif (*Consecutive Labeling*) pada Graf Star S_n dan Graf Double Star $S_{n,n+1}$ (n bilangan asli)″ dapat diselesaikan. Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kebodohan menuju zaman yang terang benderang, yaitu agama Islam.

Dalam penyusunan skripsi ini, penulis tidak dapat menyelesaikan sendiri tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
3. Sri Harini, M.Si, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
4. Abdussakir, M.Pd, selaku dosen pembimbing yang senantiasa sabar memberi arahan dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini.
5. Abdul Aziz, M.Si, selaku dosen pembimbing agama yang telah membimbing dan memberikan penjelasan dalam penyusunan skripsi ini.

6. Wahyu Hengky Irawan, M.Pd, sebagai dosen yang selalu memberikan motivasi dan inspirasi kepada penulis selama menjadi mahasiswa.
7. KH. Chamzawi, yang telah memberikan tausiyah kepada penulis sehingga penulis dapat menambah ilmu, khususnya tentang ajaran Islam.
8. Seluruh dosen dan staf fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmunya selama ini dan yang selalu membimbing dan memberi motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
9. Bapak dan Ibu tercinta dan seluruh keluarga, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman mahasiswa Matematika angkatan 2004.
11. Teman-teman kontrakan dan kos, serta teman-teman PKLI terima kasih atas motivasi dan bantuan yang telah kalian.
12. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis berdo'a semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfaat. Amin.

Malang, 17 Oktober 2008

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Muis, Abdul. 2008**. Pelabelan Konsekutif (*Consecutive Labeling*) pada Graf Star S_n dan Graf Double Star $S_{n,n+1}$ (*n* Bilangan Asli).** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd. (II) Abdul Aziz, M.Si.

Kata Kunci: Pelabelan Konsekutif, Graf *Star* S_n, dan Graf *Double Star* $S_{n,n+1}$

Pelabelan graf G adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat non-negatif atau positif) yang disebut *label*. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi (pelabelan sisi), atau himpunan titik dan sisi (pelabelan total). Pelabelan konsekutif graf G adalah fungsi bijektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,..., p, p+1, p+2,..., p+q\}$, sedemikian sehingga label sisi $e = uv$ merupakan harga mutlak dari selisih label dua titik yang dihubungkan oleh sisi e yaitu $f(e) = f(uv) = | f(u) - f(v) |$. Pada penelitian ini akan dibahas pelabelan konsekutif pada graf *star* S_n dan graf *double star* $S_{n,n+1}$ dengan n bilangan asli.

Pelabelan konsekutif pada graf *star* S_n, didefinisikan sebagai berikut:

$$f(v_i) = 2i - 1 \quad , \quad 1 \le i \le n+1$$

$$f(e_i) = f(v_1 v_{i+1}) = 2i \quad , \quad 1 \le i \le n$$

Pelabelan konsekutif pada graf *double star* $S_{n,n+1}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & , \quad i = 1 \\ 2i - 1 & , \quad i = n+1 \\ (2n+1) + 2i & , \quad 2 \le i \le n \\ 2i - (2n+1) & , \quad n+2 \le i \le 2n+1 \end{cases}$$

$$f(e_0) = f(v_1 v_i) = |2i| \quad , \quad i = n+1$$

$$f(e_{i-1}) = f(v_1 v_i) = |2(n+i)| \quad , \quad 2 \le i \le n$$

$$f(e_{i-2}) = f(v_{n+1} v_i) = |4(n+1) - 2i| \quad , \quad n+2 \le i \le n+(n+1)$$

Pembahasan mengenai pelabelan konsekutif ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan pada jenis-jenis graf yang lain seperti graf tangga, graf pohon, graf sikel dan lain sebagainya atau pada aplikasinya.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Mempelajari matematika yang sesuai dengan paradigma *ulul albab*, tidak cukup hanya berbekal kemampuan intektual semata, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual. Pola pikir deduktif dan logis dalam matematika juga bergantung pada kemampuan intuitif dan imajinatif serta mengembangkan pendekatan rasionalis, empiris, dan logis (Abdusysyakir, 2007:24). Sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Shaad ayat 29:

كِتَـٰبٌ أَنزَلۡنَـٰهُ إِلَيۡكَ مُبَـٰرَكٌ لِّيَدَّبَّرُوٓاْ ءَايَـٰتِهِۦ وَلِيَتَذَكَّرَ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَـٰبِ ٢٩

Artinya: *"Ini adalah sebuah Kitab yang kami turunkan kepadamu penuh dengan berkah supaya mereka meperhatikan ayat-ayatNya dan supaya mendapat pelajaran orang-orang yang mempunyai fikiran".*

Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam Islam, adalah konsep Tauhid, yaitu ke-Esaan Allah (Rahman, 1992:92). Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta dengan cara yang sama seperti yang ia tunjukkan mengenai eksistensi dari alam semesta itu sendiri (Rahman, 1992:15).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79).

Dalam Al Qur'an surat Al Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran".

Shihab (2003:482) menafsirkan bahwa kata *qadar* pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti *kadar tertentu* yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti *kuasa*. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti *ketentuan* dan *sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu*. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja. Manusia misalnya, telah ada *kadar yang ditetapkan* Allah baginya. Selaku jenis makhluk hidup ia dapat makan, minum dan berkembang biak melalui *sistem yang ditetapkan-Nya*. Manusia memiliki potensi baik dan buruk. Ia dituntut untuk mempertanggungjawabkan pilihannya. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Akalpun dianugerahkan-Nya kepada mereka, demikian seterusnya yang kesemuanya dan yang selainnya termasuk dalam *sistem* yang sangat tepat, teliti dan akurat yang telah ditetapkan Allah swt. Demikian juga Allah telah menetapkan *sistem* dan *kadar* bagi ganjaran atau balasan-Nya yang akan diberikan kepada setiap orang.

Dalam ayat lain juga disebutkan:

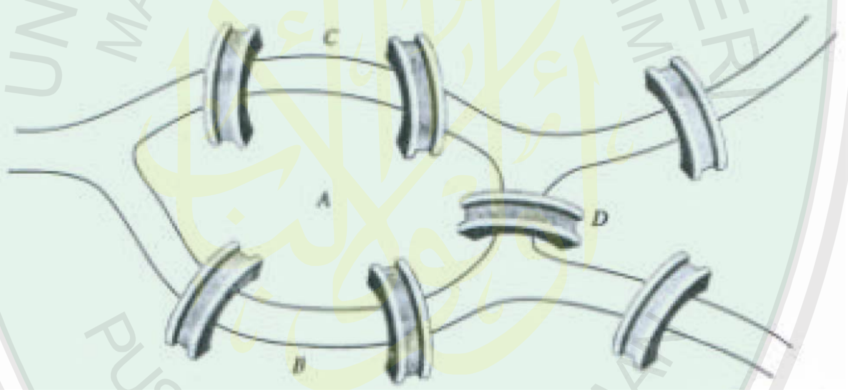
ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى
ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *”Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” .*

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyakir, 1997:80).

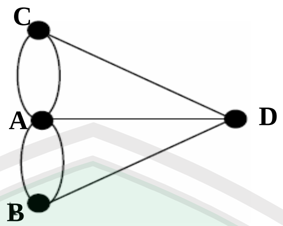
Sekarang ini banyak permasalahan yang kompleks dan saling berkaitan satu sama lain. Untuk mempermudah analisis terhadap permasalahan tersebut serta mencari solusi penyelesaiannya, maka dikembangkan berbagai macam pemodelan untuk menyederhanakan masalah yang dihadapi, sehingga pemecahan terhadap persoalan itu dapat dilakukan dari dasar-dasarnya dulu, sebelum kemudian menambahkan faktor-faktor yang merumitkan berdasarkan kenyataan di dunia nyata. Salah satunya adalah dengan menggunakan graf dalam memodelkan permasalahan yang bisa dijabarkan dengan sisi dan titik, seperti persoalan mencari jalur terpendek dan lain sebagainya (Nugrahadi, 2008:1)

Menurut catatan sejarah, teori graf pertama kali digunakan oleh seorang ahli matematika dari Swiss yang bernama Euler untuk mereperesentasikan Jembatan Konigsberg, dan menyelesaikan permasalahan jembatan tersebut. Konigsberg adalah sebuah kota di sebelah timur Prussia (Jerman sekarang) dimana terdapat sungai Pregel dan merupakan tempat tinggal Duke of Prussia pada abad ke-16 (tahun 1736). Kota tersebut saat ini bernama Kaliningrad, dan merupakan pusat ekonomi dan industri utama di Russia Barat. Sungai Pregel membagi kota menjadi 4 daratan dengan mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai seperti tampak pada gambar 1.1:



Gambar 1.1 Jembatan Konigsberg.

Pada abad ke-18 dibangunlah tujuh jembatan yang menghubungkan ke-empat daratan tersebut. Pada hari Minggu, masyarakat Konigsberg biasanya berjalan-jalan dari daratan satu ke daratan lainnya melalui jembatan tersebut. Mereka berpikir apakah mungkin untuk berjalan menyeberangi ke-tujuh jembatan tanpa melalui jembatan yang sama dari suatu daratan dan kembali ke tempat semula. Masalah ini pertama kali dipecahkan oleh Leonhard Euler. Solusi Euler merepresentasikan masalah ini ke dalam sebuah graf dengan ke-empat daratan sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*). Graf yang dibuat Euler diperlihatkan pada gambar 1.2 (Wirawan, 2008:1).



Gambar 1.2 Graf yang Merepresentasikan Masalah Jembatan Konigsberg.

Dengan graf tersebut, Euler berhasil menemukan jawaban kenapa orang-orang tidak dapat melalui ketujuh jembatan tersebut masing-msing sekali dan kembali ke tempat semula. Jawaban yang ditemukan Euler adalah karena tidak semua titik pada graf tersebut berderajat genap. Simpul B, C, dan D berderajat 3, sedangkan simpul A berderajat 5 (Wirawan, 2008:2).

Seiring dengan berjalannya waktu, teori graf juga semakin berkembang. Banyak orang melakukan berbagai penelitian salah satunya adalah pelabelan pada graf. Pelabelan graf menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah teori koding, kristalografi sinar-x, radar, sistem alamat jaringan komunikasi dan desain sirkuit (Gafur, 2008:2).

Masalah pelabelan dalam teori grf mulai dikembangkan pada pertengahan tahun 1960-an. Pelabelan pada suatu graf muncul pertama kali dari karya Rosa pada tahun 1967. Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan (fungsi) yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat). Jika domain dari fungsi adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*) (Miller, 2000:165).

Gafur (2008:8) mengatakan bahwa pelabelan konsekutif pada graf *G* didefinisikan sebagai pemberian label pada titik dan sisi suatu graf *G* yang memenuhi fungsi bijektif dari himpunan titik dan himpunan sisi ke himpunan bilangan bulat positif $\{1,2,3,...,p,p+1,p+2,...,p+q\}$ sedemikian sehingga label sisi $e=uv$ merupakan harga mutlak dari selisih label dua titik yang dihubungkan oleh sisi *e*. Suatu graf dikatakan *konsekutif* jika graf tersebut dapat dilabeli secara konsekutif. Dengan demikian, pelabelan konsekutif merupakan salah satu bentuk pelabelan pada titik dan sisi.

Berkaitan dengan uraian di atas, bahwa segala sesuatu di alam itu sudah ada rumusnya (*qadar*) dan pelabelan konsekutif belum pernah dibahas pada skripsi sebelumnya maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul **"Pelabelan Konsekutif (*Consecutive Labeling*) pada Graf Star S_n dan Graf Double Star $S_{n,n+1}$ untuk *n* Bilangan Asli"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagaimana perumusan pelabelan konsekutif graf *star* S_n untuk *n* bilangan asli?
2. Bagaimana perumusan pelabelan konsekutif graf *double star* $S_{n,n+1}$ untuk *n* bilangan asli?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah:

1. Menentukan perumusan pelabelan konsekutif graf *star* S_n untuk n bilangan asli.
2. Menentukan perumusan pelabelan konsekutif graf *double star* $S_{n,n+1}$ untuk n bilangan asli.

1.4 Manfaat Penelitian

Dalam skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, di antaranya:

a. Bagi Penulis

Dalam penulisan skripsi ini, penulis diharapkan dapat menentukan rumus fungsi pelabelan konsekutif pada graf *star* S_n dan graf *double star* $S_{n,n+1}$ serta menjelaskan bahwa graf *star* S_n dan graf *double star* $S_{n,n+1}$ adalah konsekutif.

b. Bagi Pembaca

Diharapkan dapat menambah wawasan pengetahuan tentang pelabelan konsekutif pada graf *star* S_n dan graf *double star* $S_{n,n+1}$.

c. Bagi Lembaga

Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

1.5 Metode Penelitian

1.5.1 Pendekatan dan Jenis Penelitian

Jenis dari penelitian ini adalah deskriptif kualitatif. Pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan metode kepustakaan.

Dalam pendekatan deskriptif kualitatif ini maka penulis menggunakan metode penelitian kepustakaan (Library Research). Metode penelitian kepustakaan yaitu penelitian yang dilakukan di dalam perpustakaan untuk mengumpulkan data dan informasi. Pengumpulan data dan informasi tersebut dapat dilakukan dengan bantuan bermacam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku dan dokumen yang ada.

1.5.2 Data dan sumber Data

Data yang digunakan penulis dalam rangka penyusunan skripsi ini adalah data-data yang meliputi pelabelan konsekutif, graf *star*, graf *double star*, dan data-data lain yang sesuai.

Sumber data dalam penulisan skripsi ini diperoleh melalui buku-buku antara lain Gary Chartrand dan Linda Lesniak (Graphs and digraphs second edition) Robin J. Wilson dan John J. Watkins (Graph an Introductiory Approach) dan sumber-sumber lain yang relevan.

1.5.3 Tehnik Analisis data

Dalam menganalisis data, penulis melakukan pelabelan konsekutif pada beberapa graf yang diteliti yaitu graf *star* S_n dan graf *double star* $S_{n,n+1}$ sampai akhirnya diperoleh pola tertentu. Pola yang diperoleh dianggap sebagai dugaan (konjektur). Kemudian konjektur tersebut dibuktikan terlebih dahulu. Setelah konjektur terbukti, penulis merumuskan konjektur tersebut sebagai suatu teorema sehingga diperoleh bahwa graf *star* S_n dan graf *double star* $S_{n,n+1}$ untuk n bilangan asli adalah konsekutif.

1.6 Sistematika Penulisan

Laporan penelitian ini disusun dalam 4 (empat) bab. Pada bab I dijelaskan mengenai latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan. Pada bab II dijelaskan mengenai definisi graf, incident dan adjacent, derajat titik dari graf, subgraf, graf beraturan-r, graf komplit, graf bipartisi, graf bipartisi komplit, graf terhubung, titik sentral (pusat), graf *star* dan graf *double star*, hasil kali silang, fungsi injektif, fungsi surjektif, fungsi bijektif, pelabelan konsekutif, serta kajian teori graf dalam Al-Qur'an.. Pada bab III dijelaskan mengenai pelabelan konsekutif pada graf *star* S_n dan graf *double star* $S_{n,n+1}$. Pada bab IV dijelaskan mengenai kesimpulan dan saran dari pembahasan yang telah diuraikan. Bagian terakhir merupakan daftar pustaka.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

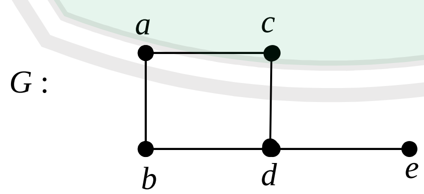
2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Contoh:



Gambar 2.1 Graf *G*.

Dari gambar 2.1. Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$. Graf G mempunyai 5 sisi sehingga ukuran graf G adalah $q = 5$ dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{(a,b), (a,c), (b,d), (c,d), (d,e)\}.$$

Dapat juga ditulis dengan

$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

untuk

$$e_1 = (a,b)$$

$$e_2 = (a,c)$$

$$e_3 = (b,d)$$

$$e_4 = (c,d)$$

$$e_5 = (d,e)$$

2.1.2 Adjacent dan Incident

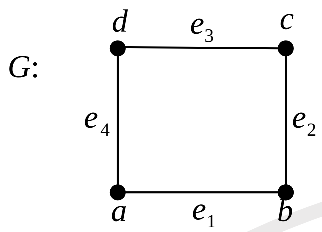
Definisi 2

Sisi $e = (u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u,v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Contoh:

Perhatikan graf G yang memuat

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ berikut:



Gambar 2.2 Graf *G*.

Dari Gambar 2.2 tersebut, titik *a* dan e_1 serta e_1 dan *b* adalah *incident* (terkait langsung) dan titik *a* dan *b* adalah *adjacent* (terhubung langsung).

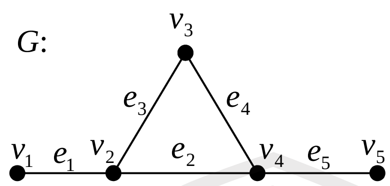
2.1.3 Derajat Titik

Definisi 3

Derajat dari titik v di graf *G*, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di *G* yang terkait langsung (*incident*) dengan *v* (Chartrand dan Leniak, 1986:7). Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf *G*, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut *titik genap* (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut *titik ganjil* (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut *isolated vertices* dan titik yang berderajat satu disebut *titik ujung* (*end vertices*) (Chartrand dan Leniak, 1986:7).

Contoh:

Perhatikan graf *G* berikut yang mempunyai himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$



Gambar 2.3 Graf *G*.

Berdasarkan gambar 2.3, diperolah bahwa:

$\deg(v_1) = 1$

$\deg(v_2) = 3$

$\deg(v_3) = 2$

$\deg(v_4) = 3$

$\deg(v_5) = 1$

Titik v_2 dan v_4 adalah titik ganjil, titik v_3 adalah titik genap, titik v_1 dan v_3 adalah titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf *G* dengan banyak sisi, yaitu *q*, adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika *G* graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$

maka $\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Corollary 1.

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf *G* dengan size *q*. Dan misalkan *W* himpunan yang memuat titik ganjil pada *G* serta *U* himpunan yang memuat titik genap di *G*. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v\in v(\mathrm{G})}\deg(v)=\sum_{v\in \mathrm{W}}\deg(v)+\sum_{v\in \mathrm{U}}\deg(v)=2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v\in U}\deg(v)$ genap, maka $\sum_{v\in W}\deg(v)$ juga genap. Sehingga |*W*| adalah genap.

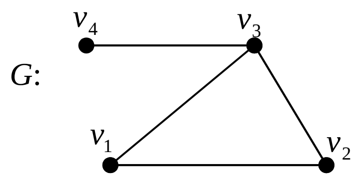
2.1.4 Subgraf

Definisi 4

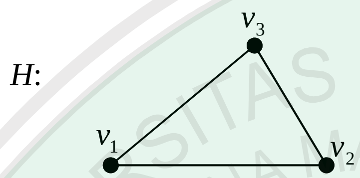
Graf *H* disebut subgraf dari *G* jika himpunan titik di *H* adalah subset dari himpunan titik di *G* dan himpunan sisi di *H* adalah subset dari himpunan sisi di *G*. Dapat ditulis $V(H)\subseteq V(G)$ dan $E(H)\subseteq E(G)$. Jika *H* adalah subgraf *G*, maka dapat ditulis $H\subset G$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 8).

Contoh:

Perhatikan graf *G* dengan $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ dan $E(G)=\{(v_1v_2),(v_1v_3),(v_2v_3),(v_3v_4)\}$ berikut ini:



Gambar 2.4 Graf *G*.



Gambar 2.5 Subgraf *H* (Subgraf dari Graf *G*).

Gambar 2.4 dan 2.5 menunjukkan dua graf *G* dan *H*, dan menunjukkan bahwa *H* adalah subgraf *G*.

2.1.5 Graf Beraturan-*r*

Definisi 5

Graf beraturan-*r* adalah graf yang semua titiknya berderajat *r*, atau $\deg(v) = r$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).

Contoh:

Gambar 2.6 Graf G_1 Beraturan-1 dan G_1 Beraturan-2.

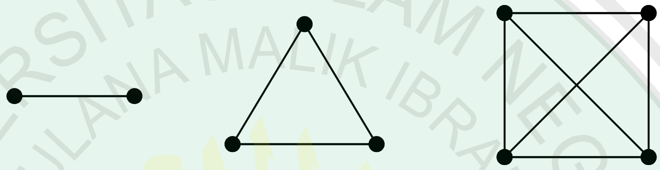
Dari gambar 2.6, graf G_1 di sebut graf beraturan-1 karena derajat tiap titiknya adalah 1. Graf G_2 di sebut graf beraturan-2 karena derajat tiap titiknya adalah 2.

2.1.6 Graf komplit

Definisi 6

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling *adjacent*. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).

Contoh:



K_2 K_3 K_4

Gambar 2.7 Graf Komplit.

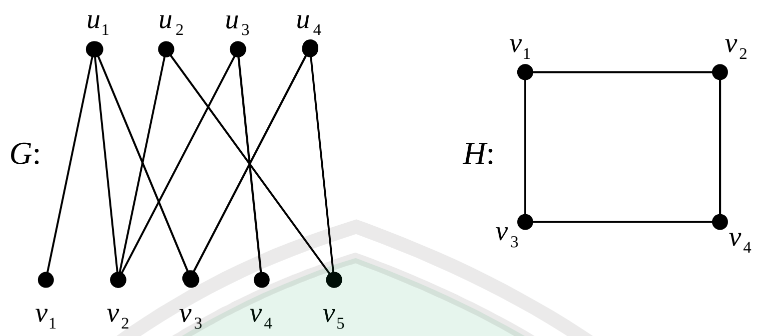
Dari gambar 2.7. K_2, K_3, K_4 adalah graf komplit karena tiap titik dalam graf tersebut selalu *adjecent* dengan semua titik yang lain.

2.1.7 Graf Bipartisi

Definisi 7

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y. X dan Y disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Contoh:



Gambar 2.8 Graf Bipartisi.

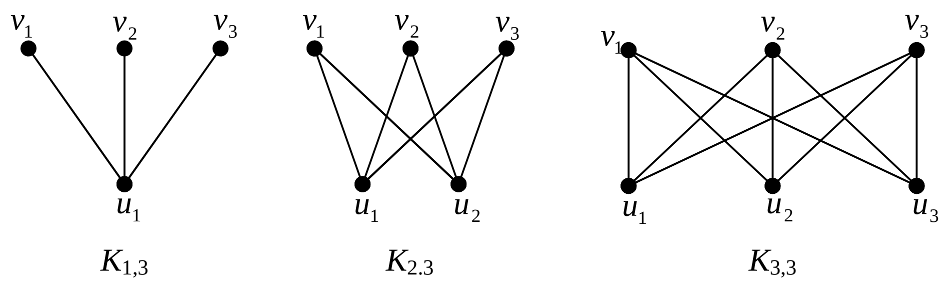
Pada Gambar 2.8, G adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $Y = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Demikian juga H adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{v_1, v_4\}$ dan $Y = \{v_2, v_3\}$.

2.1.8 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 8

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$ (Purwanto, 1998:22).

Contoh:



Gambar 2.9 Graf Bipartisi Komplit.

Pada Gambar 2.9 dijelaskan sebagai berikut:

$K_{1,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1\}$, $|X| = 1$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

$K_{2,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1, u_2\}$, $|X| = 2$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

$K_{3,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1, u_2, u_3\}$, $|X| = 3$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

2.2 Graf Terhubung

Definisi 9

Sebuah jalan (*walk*) *u-v* di graf *G* adalah barisan berhingga (tak kosong) *W* : $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik *u* dan diakhiri dengan titik *v*, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah sisi di *G*. u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ disebut titik internal, dan *n* menyatakan panjang dari *W* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 10

Jalan *u-v* disebut *terbuka* atau *tertutup* jika $u = v$ atau $u \neq v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 11

Jalan *u-v* yang semua sisinya berbeda disebut *trail u-v* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 12

Jalan *u-v* yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) *u-v*. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 13

Suatu titik u yang membentuk lintasan (*path*) *u-u* disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

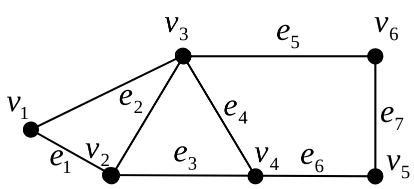
Definisi 14

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada Graf *G* disebut Sirkuit *G*. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Definisi 15

Sirkuit $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1$ dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap *i* disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



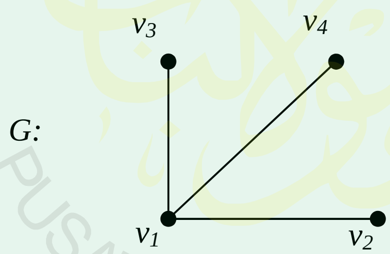
Gambar 2.10 Jalan, Lintasan, Trail, dan Sikel

Dari gambar 2.10. $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2, v_1$ disebut jalan tertutup dengan panjang 6 dan $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1, v_2$ disebut jalan terbuka dengan panjang 7. $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2$ adalah trail tetapi bukan lintasan, sedangkan $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2$ disebut sebagai *path* (lintasan) dan v_1, v_2, v_3, v_1 adalah sikel.

Definisi 16

Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf *G*. Maka titik *u* dan *v* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan *u* – *v* di *G*. Sedangkan suatu graf *G* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik *u* dan *v* di *G* terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



Gambar 2.11 Graf Terhubung (*connected*)

2.3 Titik Sentral (Pusat)

Definisi 17

Untuk suatu graf terhubung *G*, maka jarak (*distance*) $d(u,v)$ antara dua titik *u* dan *v* di *G* adalah panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan *u* dan *v* di *G* (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 18

Eksentrisitas (*eccentricity*) $e(v)$ dari suatu titik v pada graf terhubung G merupakan maksimum $d(u,v): u \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

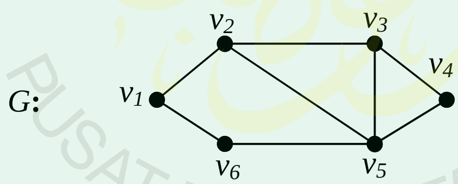
Definisi 19

Radius rad G didefinisikan sebagai minimum dari $e(v)$ sedangkan *diameter* diam G adalah maksimum $e(v)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

Definisi 20

Suatu titik v dikatakan titik sentral jika $e(v) = rad\ G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

Contoh:



Gambar 2.12 Graf dengan Radius 2 dan Diameter 3

Jarak pada Graf G di gambar 2.12 adalah :

$d(v_1,v_2)=1$, $d(v_1,v_3)=2$, $d(v_1,v_4)=3$, $d(v_1,v_5)=2$, $d(v_1,v_6)=1$,

$d(v_2,v_1)=1$, $d(v_2,v_3)=1$, $d(v_2,v_4)=2$, $d(v_2,v_5)=1$, $d(v_2,v_6)=2$,

$d(v_3,v_1)=2$, $d(v_3,v_2)=1$, $d(v_3,v_4)=1$, $d(v_3,v_5)=1$, $d(v_3,v_6)=2$,

$d(v_4,v_1)=3$, $d(v_4,v_2)=2$, $d(v_4,v_3)=1$, $d(v_4,v_5)=1$, $d(v_4,v_6)=1$,

$d(v_5,v_1)=2$, $d(v_5,v_2)=1$, $d(v_5,v_3)=1$, $d(v_5,v_4)=1$, $d(v_5,v_6)=1$,

$d(v_6,v_1)=1$, $d(v_6,v_2)=2$, $d(v_6,v_2)=2$, $d(v_6,v_4)=2$ dan $d(v_6,v_5)=1$

Eksentrisitas pada Graf G di gambar 2.12 adalah : $e(v_1)=3$, $e(v_2)=2$, $e(v_3)=2$, $e(v_4)=3$, $e(v_5)=2$ dan $e(v_6)=2$.

Radius pada Graf G di gambar 2.12 adalah : rad G = 2

Diameter pada Graf G di gambar 2.12 adalah : diam G = 3

Titik sentral (pusat) pada Graf G di gambar 2.12 adalah : v_2, v_3, v_5, v_6

2.4 Graf *Star* dan Graf *Double Star*

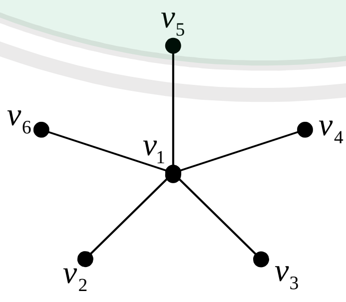
2.4.1 Graf *Star*

Definisi 21

Graf star adalah graf bipartisi komplit yang berbentuk $K_{1,n}$ (Wilson dan Watkins, 1989:37).

Untuk pembahasan selanjutnya graf *star* $K_{1,n}$ akan dinotasikan dengan S_n, dimana n adalah bilangan asli.

Contoh:



Gambar 2.13 Graf *Star* $K_{1,5}$ atau Graf *Star* S_5.

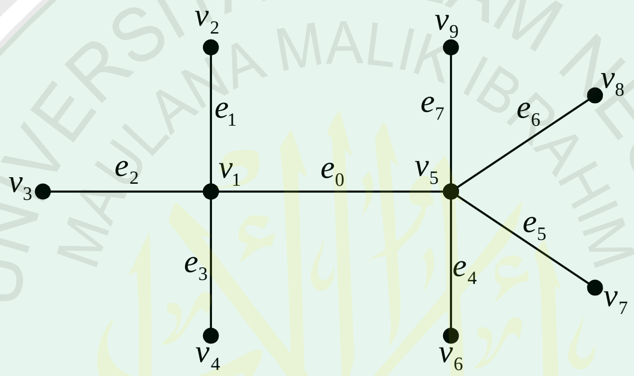
Gambar 2.13 adalah graf *star* S_5 dengan titik pusat v_1.

2.4.2 Graf *Double Star*

Definisi 22

Graf Double Star $S_{n,n+1}$ adalah graf yang terdiri dari dua graf *star* S_n dan S_{n+1} dimana titik sentralnya (pusat) dari kedua graf tersebut saling *adjacent* (Gafur, 2007:6).

Contoh:



Gambar 2.14 Graf *Double Star* $S_{4,5}$.

Gambar 2.14 adalah graf *double star* $S_{4,5}$ dengan titik pusat v_1 dan v_5 dimana v_1 dan v_5 *adjacent*.

2.5 Fungsi

2.5.1 Hasil Kali Silang

Definisi 23

Jika A dan B adalah himpunan yang tidak kosong. Hasil kali silang (hasil kali cartesius) dari himpunan A dan himpunan B ditulis "$A \times B$" didefinisikan sebagai berikut:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$$

Dengan perkataan lain, $A \times B$ adalah himpunan dari semua pasangan terurut dengan anggota pertama diambil dari *A* dan anggota kedua diambil dari anggota *B* (Sukirman dan Soebagio, 1993:40).

Contoh:

Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{a, b\}$, maka

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (,2, b), (3, a), (3, b)\}$, sedangkan

$B \times A = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$.

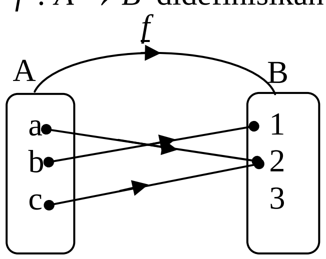
Definisi 24

Misal *A* dan *B* himpunan. Fungsi *f* dari *A* ke *B* adalah subset dari $A \times B$ dengan syarat untuk setiap $a \in A$ ada $b \in B$ sedemikian sehingga $(a, b) \in f$. (dengan kata lain, jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$ maka $b = c$). Notasi $f : A \to B$ digunakan untuk menyatakan bahwa *f* adalah fungsi dari *A* ke *B*. Himpunan *A* dari anggota pertama dari fungsi *f* disebut *domain* dari *f* dan dinotasikan dengan $D(f)$. Himpunan dari semua anggota kedua dari *f* disebut *range* dari *f* dan dinotasikan dengan $R(f)$. Misal, jika $D(f) = A$ maka $R(f) \subseteq B$ (Bartle dan Sherbert, 2000:5).

Contoh:

Misalkan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1,2,3\}$

Misalnya $f : A \to B$ didefinisikan pada diagram berikut ini.



Fungsi *f* dari *A* ke *B* adalah

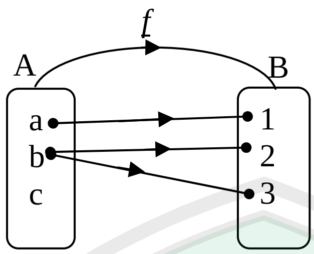
$f(\text{a}) = 2$

$f(\text{b}) = 1$

$f(\text{c}) = 2$

Gambar 2.15 Fungsi *f*.

Contoh:



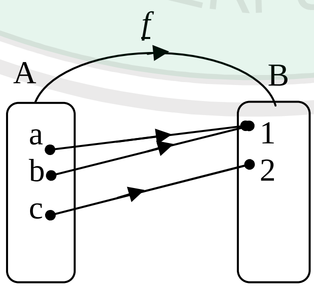
Gambar 2.16 Bukan Fungsi *f*.

2.5.2 Fungsi Surjektif

Definisi 25

Misalkan A dan B adalah himpunan, dan f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut *fungsi pada* jika $R(f) = B$. Jadi, $f : A \to B$ disebut fungsi pada jika untuk masing-masing $y \in B$ dan $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. Fungsi pada sering disebut juga dengan *fungsi surjektif* atau *fungsi onto*. Jika f fungsi surjektif, maka f disebut *surjeksi* (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

Contoh:



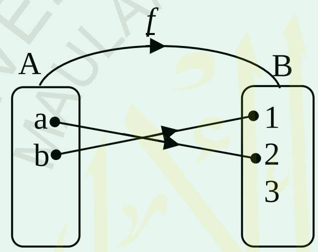
Gambar 2.17 Fungsi Surjektif.

2.5.3 Fungsi Injektif

Definisi 26

Misalkan f adalah fungsi dari A ke B. f disebut *fungsi satu-satu* jika $x, y \in A$, dengan $f(x) = f(y)$, maka $x = y$. Selain itu, dapat juga dinyatakan f fungsi satu-satu jika $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Fungsi satu-satu sering juga disebut dengan *fungsi injektif*. Jika *f* fungsi injektif, maka f disebut *injeksi* (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

Contoh:



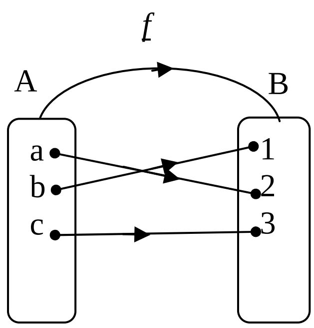
Gambar 2.18 Fungsi Injektif.

2.5.4 Fungsi Bijektif

Definisi 27

Suatu fungsi yang sekaligus injektif dan surjektif disebut *fungsi bijektif*. Jika *f* fungsi bijektif, maka f disebut *bijeksi* (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

Contoh:



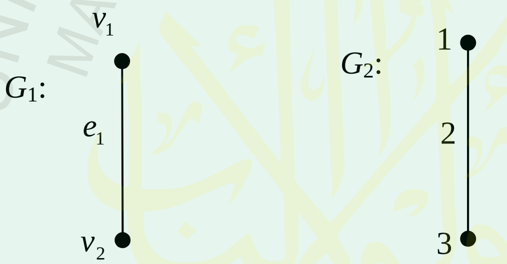
Gambar 2.19 Fungsi Bijektif.

2.6 Pelabelan Konsekutif

Definisi 28

Pelabelan graf G adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat non-negatif atau positif) yang disebut label. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi (pelabelan sisi), atau himpunan titik dan sisi (sehingga pelabelan ini disebut pelabelan total) (Nurdin, Baskoro, dan Salman, 2005:1).

Contoh:



Gambar 2.20 Pelabelan Titik dan Sisi pada graf *G*

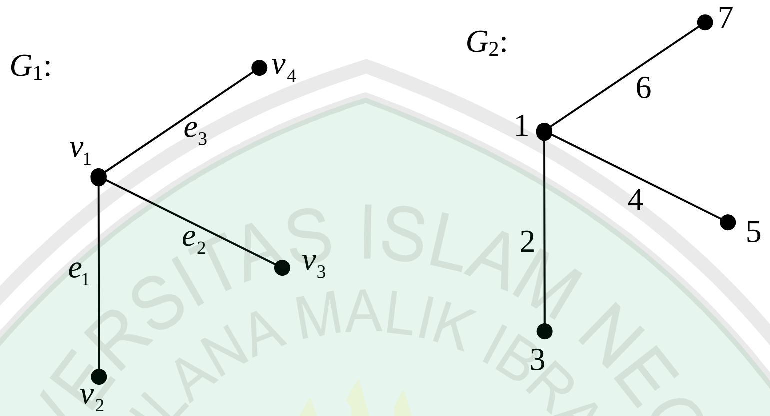
Pada gambar 2.20. Graf G_2 adalah hasil pelabelan titik dan sisi dari graf G_1 dimana v_1, v_2 dan e_1 dilabeli dengan 1, 3, dan 2.

Definisi 29

Misal *G* adalah graf dengan himpunan titik *V*(*G*) dan himpunan sisi *E*(*G*). *Pelabelan konsekutif* graf *G* adalah fungsi bijektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat positif $\{1, 2, ..., p, p+1, p+2, ..., p+q\}$ sedemikian sehingga label sisi $e = uv$ merupakan harga mutlak dari selisih label dua titik yang dihubungkan oleh sisi e yaitu $f(e) = f(uv) = |f(u) - f(v)|$.

Suatu graf dikatakan *konsekutif* jika graf tersebut dapat dilabeli secara konsekutif (Gafur, 2007:8 dan Wijaya 2004:1).

Contoh:



Gambar 2.21 Pelabelan Konsekutif pada Graf *G*

Pada gambar 2.21. Graf G_2 adalah hasil pelabelan konsekutif dari graf G_1. Sehingga jika pelabelan tersebut adalah fungsi *f*, maka dapat dibentuk fungsi bijektif dari $V(S_n) \cup E(S_n)$ ke $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ sebagai berikut:

$f(v_1) = 1$

$f(v_2) = 3$

$f(v_3) = 5$

$f(v_4) = 7$

$f(e_1) = f(v_1 v_2) = |3-1| = 2$

$f(e_2) = f(v_1 v_3) = |5-1| = 4$

$f(e_3) = f(v_1 v_4) = |7-1| = 6$

2.7 Kajian Teori Graf dalam Al-Qur’an

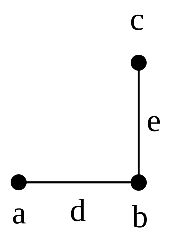
Substansi dari teori graf adalah adanya titik dan sisi. Titik-titik dalam suatu graf, dapat diasumsikan menurut keperluan dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Jika dua titik pada suatu graf diasumsikan sebagai suatu benda dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka hal ini memiliki artian bahwa dua benda tersebut mempunyai suatu hubungan tertentu. Jika dua titik dalam suatu graf diasumsikan sebagai suatu kejadian dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka dapat diambil suatu pengertian bahwa ada dua kejadian yang mempunyai hubungan.

Isra’ dan Mi’raj memiliki makna transedental yang sangat tinggi. Secara terminologi, Isra’ dan Mi’raj memang memuat dua peristiwa yang berbeda meski keduanya merupakan kesatuan proses yang memiliki pelajaran penting. Kejadian ini dijelaskan Allah dalam surat Al-Isra ayat 1, yang berbunyi:

سُبْحَٰنَ ٱلَّذِىٓ أَسْرَىٰ بِعَبْدِهِۦ لَيْلًا مِّنَ ٱلْمَسْجِدِ ٱلْحَرَامِ إِلَى ٱلْمَسْجِدِ
ٱلْأَقْصَا ٱلَّذِى بَٰرَكْنَا حَوْلَهُۥ لِنُرِيَهُۥ مِنْ ءَايَٰتِنَآ ۚ إِنَّهُۥ هُوَ ٱلسَّمِيعُ ٱلْبَصِيرُ ﴿١﴾

Artinya: ”*Maha Suci Allah, yang Telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang Telah kami berkahi sekelilingnya agar kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya dia adalah Maha mendengar lagi Maha Mengetahui*.”

Isra’ adalah perjalanan Nabi Muhammad dari Masjidil Haram di Mekah ke Masjidil Aqsha di Palestina. Sementara itu, Mi’raj adalah perjalanan Nabi Muhammad dari Masjidil Aqsha di Planet Bumi ke Sidratulmuntaha. Terkait dengan dua peristiwa diatas, maka dua kejadian ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Keterangan:
a. Masjidil Haram di Mekah
b. Masjidil Aqsha di Palestina
c. Sidratulmuntaha
d. Isra’
e. Mi’raj

Gambar 2.22 Representasi Isra’ dan Mi’raj

Pada gambar 2.22 terlihat bahwa ada tiga titik yang dihubungkan oleh dua sisi, artinya tiap titik sebagai tempat kejadian ketika Isra’ dan Mi’raj berlangsung yaitu Masjidil Haram, Masjidil Aqsha, dan Sidatulmuntaha. Dua sisi diartikan sebagai proses perjalanan Nabi Muhammad yaitu Isra’ (dari Masjidil Haram ke Masjidil Aqsha) dan Mi’raj (dari Masjidil Aqsha ke Sidatulmuntaha).

Isra’ dan Mi’raj merupakan kejadian yang mengagumkan, dimana Nabi memerlukan waktu hanya semalam saja untuk menyinggahi ketujuh langit dan tempat-tempat yang diberkahi dan bersejarah. Padahal, jika dipikirkan secara rasional kejadian itu sangatlah tidak mungkin.

Sarang lebah dan laba-laba juga dapat dipandang berdasar teori graf. Terdapat ayat dalam Al-Quran sehubungan dengan lebah dan laba-laba, yaitu Surat An-Nahl ayat 68 dan Surat Al-Ankabuut ayat 41.

وَأَوْحَىٰ رَبُّكَ إِلَى ٱلنَّحْلِ أَنِ ٱتَّخِذِى مِنَ ٱلْجِبَالِ بُيُوتًا وَمِنَ ٱلشَّجَرِ
وَمِمَّا يَعْرِشُونَ ﴿٦٨﴾

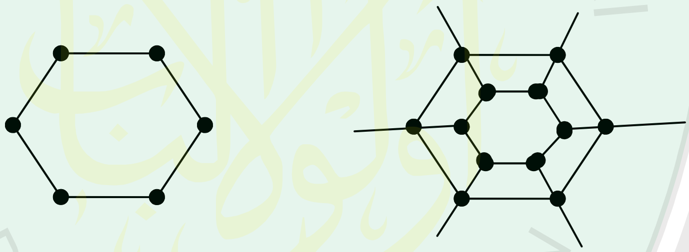
Artinya: *” Dan Tuhanmu mewahyukan kepada lebah: "Buatlah sarang- sarang di bukit-bukit, di pohon-pohon kayu, dan di tempat-tempat yang dibikin manusia.”*

مَثَلُ ٱلَّذِينَ ٱتَّخَذُواْ مِن دُونِ ٱللَّهِ أَوۡلِيَآءَ كَمَثَلِ ٱلۡعَنكَبُوتِ ٱتَّخَذَتۡ بَيۡتٗاۖ وَإِنَّ
أَوۡهَنَ ٱلۡبُيُوتِ لَبَيۡتُ ٱلۡعَنكَبُوتِۚ لَوۡ كَانُواْ يَعۡلَمُونَ ﴿٤١﴾

Artinya: *"Perumpamaan orang-orang yang mengambil pelindung-pelindung selain Allah adalah seperti laba-laba yang membuat rumah. Dan sesungguhnya rumah yang paling lemah adalah rumah laba-laba kalau mereka mengetahui."*

Sarang lebah dan laba-laba dapat dilihat langsung dari bentuk sarangnya, dimana terdapat sisi-sisi dan titik-titik sebagai pengait sisi-sisinya. Selama jutaan tahun, lebah telah menggunakan struktur segi enam untuk membangun sarangnya (Yahya, 2007: 2).

Sarang lebah dan laba-laba dapat digambarkan sebagai berikut:



(a) Graf Sarang Lebah. (b) Graf Sarang Laba-laba.

Gambar 2.23 Graf Sarang Lebah dan Laba-laba.

Dari gambar di atas, graf sarang lebah terdiri dari 6 titik dan 6 sisi, dan bisa juga disebut sebagai graf lingkaran (sikel). Pada graf sarang laba-laba banyaknya titik dan sisi tergantung pada besar kecilnya sarang tersebut. Secara umum bila sarangnya semakin besar, maka banyaknya sisi dan titik juga semakin banyak.

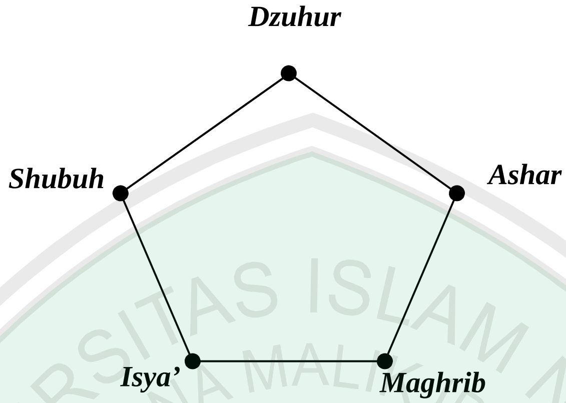
Representasi yang lain dari suatu graf adalah shalat. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam Islam dan merupakan pondasi yang kokoh bagi tegaknya agama Islam. Ibadah shalat dalam Islam sangat penting, sehingga shalat harus dilakukan pada waktunya, dimanapun, dan bagaimanapun keadaan seorang muslim yang mukalaf. Dalam kaitannya dengan peribadatan sholat, Allah swt berfirman:

فَإِذَا قَضَيۡتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذۡكُرُواْ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمۡۚ فَإِذَا
ٱطۡمَأۡنَنتُمۡ فَأَقِيمُواْ ٱلصَّلَوٰةَۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتۡ عَلَى ٱلۡمُؤۡمِنِينَ كِتَٰبٗا مَّوۡقُوتٗا ١٠٣

Artinya: *“Maka apabila kamu Telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu Telah merasa aman, Maka Dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman*”

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa waktu-waktu sholat telah ditentukan waktunya dan telah menjadi suatu ketetapan, baik itu sholat fardhu maupun sholat sunnah. Sholat lima waktu diwajibkan dalam sehari (Dhuhur, ‘Ashar, Maghrib, ‘Isya’, dan Subuh) merupakan sholat yang wajib ditunaikan dan tidak boleh ditinggalkan. Waktu pelaksanaan antara satu waktu sholat fardhu berbeda dengan empat waktu sholat yang lain dan telah ditetapkan oleh Allah swt. Akan tetapi kelima waktu sholat tersebut saling mengikat dan tidak diperbolehkan hanya melaksanakan satu sholat saja.

Adapun hubungan waktu sholat dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu sholat merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu sholat fardhu (Dhuhur, Ashar, Maghrib, Isya’ dan Subuh) dan waktu sholat sunnah sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterikatan antara kelima sholat fardhu tersebut yang tidak dapat ditinggalkan salah satunya dalam menunaikannya dan sholat sunnah sebagai pelengkap sholat fardhu merupakan ekspresi dari garis atau sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf. Sehingga dapat digambarkan dalam bentuk graf seperti pada gambar 2.24.



Gambar 2.24 Representasi Graf Terhadap Waktu-Waktu Shalat.

Dengan demikian, pelabelan titik dan atau sisi pada graf dapat diaplikasikan ke dalam konsep-konsep ajaran Islam, seperti titik yang dilabelkan sebagai suatu tempat kejadian ataupun waktu sholat dan sisi sebagai proses kejadian dan lain sebagainya, sehingga banyak sekali keterkaitan antara pelabelan graf dengan ajaran Islam dan mungkin masih banyak lagi yang belum disebutkan.

BAB III

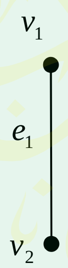
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai pelabelan konsekutif pada graf *star* S_n dan graf *double star* $S_{n,n+1}$ dimana n adalah bilangan asli.

3.1 Pelabelan Konsekutif Pada Graf *Star* S_n

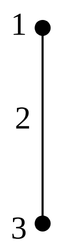
Pelabelan konsekutif pada graf *star* S_n dimana n adalah bilangan asli diberikan sebagai berikut:

1. **Graf *star* S_n, dimana** $n = 1$



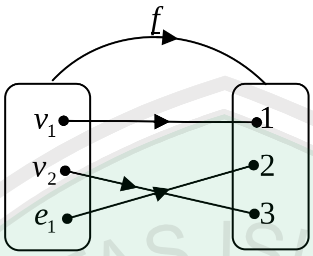
Gambar 3.1. Penotasian Titik dan Sisi Graf *Star* S_1

Pelabelan konsekutif dapat diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.2. Pelabelan Konsekutif pada Graf *Star* S_1

Sehingga jika pelabelan tersebut adalah fungsi *f*, maka dapat dibentuk fungsi bijektif dari $V(S_n) \cup E(S_n)$ ke $\{1,2,3\}$ sebagai berikut:



Gambar 3.3. Fungsi Bijektif Graf *Star* S_1

Dari fungsi pelabelan tersebut, membentuk suatu pola pelabelan sebagai berikut:

a. Titik

Titik	**Fungsi**
v_1 (titik pusat)	$f(v_1) = 1 = 2 \cdot 1 - 1$
v_2 (titik ujung)	$f(v_2) = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
Kesimpulan:	$f(v_i) = 2i - 1$, untuk $i = 1,2$

Tabel 3.1. Fungsi Pelabelan Titik pada Graf *Star* S_1

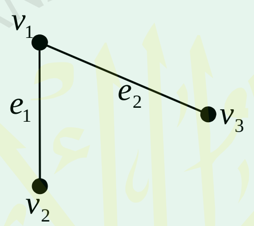
Dalam skripsi ini, ditetapkan v_1 sebagai titik pusat dan $f(v_1)$ selalu bernilai 1 (satu).

b. Sisi

Sisi	Fungsi
$e_1 = v_1v_2$	$f(e_1) = f(v_1v_2) = 2 = \|3-1\| = \|(2\cdot 2-1)-(2\cdot 1-1)\| = \|2\cdot 1\|$
Kesimpulan:	Belum terbentuk pola karena datanya masih tunggal

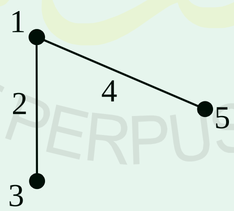
Tabel 3.2. Fungsi Pelabelan Sisi pada Graf *Star* S_1

2. **Graf *star* S_n, dimana** $n = 2$



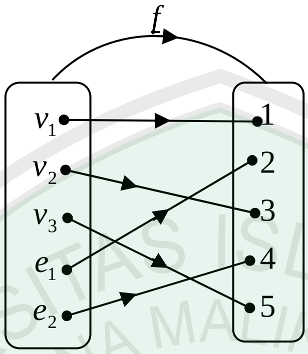
Gambar 3.4. Penotasian Titik dan Sisi Graf *Star* S_2

Pelabelan konsekutif dapat diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.5. Pelabelan Konsekutif pada Graf *Star* S_2

Sehingga jika pelabelan tersebut adalah fungsi *f*, maka dapat dibentuk fungsi bijektif dari $V(S_n) \cup E(S_n)$ ke $\{1,2,3,4,5\}$ sebagai berikut:



Gambar 3.6. Fungsi Bijektif Graf *Star* S_2

Dari fungsi pelabelan tersebut, membentuk suatu pola pelabelan sebagai berikut:

a. Titik

Titik	Fungsi
v_1 (titik pusat)	$f(v_1) = 1 = 2 \cdot 1 - 1$
v_2 (titik ujung)	$f(v_2) = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
v_3 (titik ujung)	$f(v_3) = 5 = 2 \cdot 3 - 1$
Kesimpulan:	$f(v_i) = 2i - 1$, untuk $i = 1,2,3$

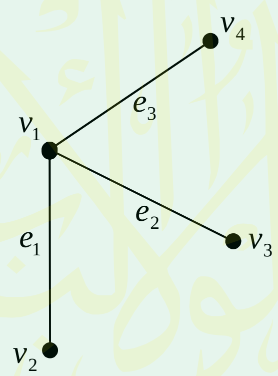
Tabel 3.3. Fungsi Pelabelan Titik pada Graf Star S_2

b. Sisi

Sisi	**Fungsi**
$e_1 = v_1v_2$	$f(e_1) = f(v_1v_2) = 2 = \|3-1\| = \|(2\cdot 2-1)-(2\cdot 1-1)\| = \|2\cdot 1\|$
$e_2 = v_1v_3$	$f(e_2) = f(v_1v_3) = 4 = \|5-1\| = \|(2\cdot 3-1)-(2\cdot 1-1)\| = \|2\cdot 2\|$
Kesimpulan:	$f(e_i) = f(v_1v_{i+1}) = 2i$, untuk $i = 1,2$

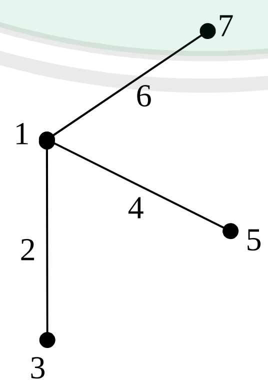
Tabel 3.4. Fungsi Pelabelan Sisi pada Graf *Star* S_2

3. Graf *star* S_n , dimana $n = 3$



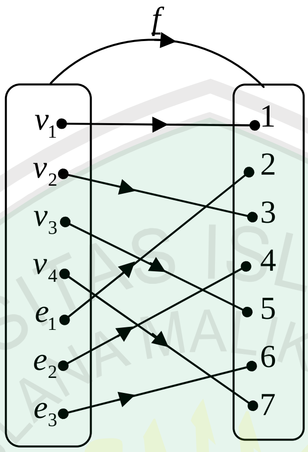
Gambar 3.7. Penotasian Titik dan Sisi Graf *Star* S_3

Pelabelan konsekutif dapat diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.8. Pelabelan Konsekutif pada Graf *Star* S_3

Sehingga jika pelabelan tersebut adalah fungsi *f*, maka dapat dibentuk fungsi bijektif dari $V(S_n) \cup E(S_n)$ ke $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ sebagai berikut:



Gambar 3.9. Fungsi Bijektif Graf *Star* S_3

Dari fungsi pelabelan tersebut, membentuk suatu pola pada pelabelan sebagai berikut:

a. Titik

Titik	Fungsi
v_1 (titik pusat)	$f(v_1) = 1 = 2 \cdot 1 - 1$
v_2 (titik ujung)	$f(v_2) = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
v_3 (titik ujung)	$f(v_3) = 5 = 2 \cdot 3 - 1$
v_4 (titik ujung)	$f(v_4) = 7 = 2 \cdot 4 - 1$
Kesimpulan:	$f(v_i) = 2i - 1$, untuk $i = 1,2,3,4$

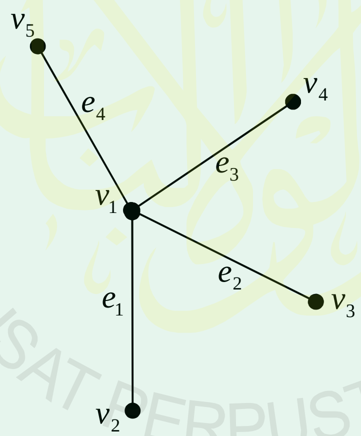
Tabel 3.5. Fungsi Pelabelan Titik pada Graf *Star* S_3

b. Sisi

Sisi	Fungsi
$e_1 = v_1v_2$	$f(e_1) = f(v_1v_2) = 2 = \|3-1\| = \|(2\cdot 2-1)-(2\cdot 1-1)\| = \|2\cdot 1\|$
$e_2 = v_1v_3$	$f(e_2) = f(v_1v_3) = 4 = \|5-1\| = \|(2\cdot 3-1)-(2\cdot 1-1)\| = \|2\cdot 2\|$
$e_3 = v_1v_4$	$f(e_3) = f(v_1v_4) = 6 = \|7-1\| = \|(2\cdot 4-1)-(2\cdot 1-1)\| = \|2\cdot 3\|$
Kesimpulan:	$f(e_i) = f(v_1v_{i+1}) = 2i$, untuk $i = 1,2,3$

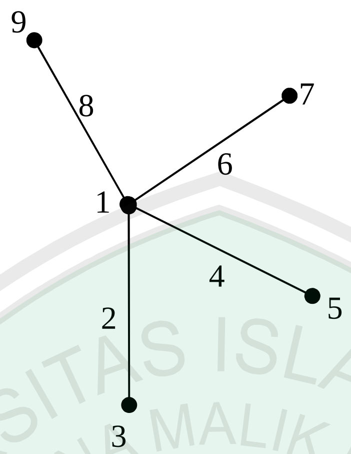
Tabel 3.6. Fungsi Pelabelan Sisi pada Graf *Star* S_3

4. Graf *star* S_n , dimana $n = 4$



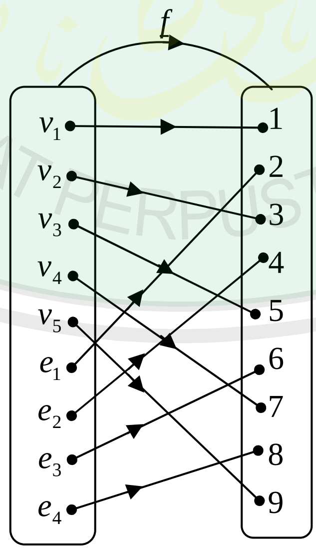
Gambar 3.10. Penotasian Titik dan Sisi Graf *Star* S_4

Pelabelan konsekutif dapat diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.11. Pelabelan Konsekutif pada Graf *Star* S_4

sehingga jika pelabelan tersebut adalah fungsi *f*, maka dapat dibentuk fungsi bijektif dari $V(S_n) \cup E(S_n)$ ke $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ sebagai berikut:



Gambar 3.12. Fungsi Bijektif Graf *Star* S_4

Pelabelan tersebut, membentuk suatu pola pada pelabelan sebagai berikut:

a. Titik

Titik	**Fungsi**
v_1 (titik pusat)	$f(v_1) = 1 = 2 \cdot 1 - 1$
v_2 (titik ujung)	$f(v_2) = 3 = 2 \cdot 2 - 1$
v_3 (titik ujung)	$f(v_3) = 5 = 2 \cdot 3 - 1$
v_4 (titik ujung)	$f(v_4) = 7 = 2 \cdot 4 - 1$
v_5 (titik ujung)	$f(v_5) = 9 = 2 \cdot 5 - 1$
Kesimpulan:	$f(v_i) = 2i - 1$, untuk $i = 1,2,3,4,5$

Tabel 3.7. Fungsi Pelabelan Titik pada Graf *Star* S_4

b. Sisi

Sisi	**Fungsi**
$e_1 = v_1 v_2$	$f(e_1) = f(v_1 v_2) = 2 = \lvert 3 - 1 \rvert = \lvert (2 \cdot 2 - 1) - (2 \cdot 1 - 1) \rvert = \lvert 2 \cdot 1 \rvert$
$e_2 = v_1 v_3$	$f(e_2) = f(v_1 v_3) = 4 = \lvert 5 - 1 \rvert = \lvert (2 \cdot 3 - 1) - (2 \cdot 1 - 1) \rvert = \lvert 2 \cdot 2 \rvert$
$e_3 = v_1 v_4$	$f(e_3) = f(v_1 v_4) = 6 = \lvert 7 - 1 \rvert = \lvert (2 \cdot 4 - 1) - (2 \cdot 1 - 1) \rvert = \lvert 2 \cdot 3 \rvert$
$e_4 = v_1 v_5$	$f(e_4) = f(v_1 v_5) = 8 = \lvert 9 - 1 \rvert = \lvert (2 \cdot 5 - 1) - (2 \cdot 1 - 1) \rvert = \lvert 2 \cdot 4 \rvert$
Kesimpulan:	$f(e_i) = f(v_1 v_{i+1}) = 2i$, untuk $i = 1,2,3,4$

Tabel 3.8. Fungsi Pelabelan Sisi pada Graf *Star* S_4

Dari uraian di atas diperoleh:

Teorema 1

Graf *star* S_n adalah konsekutif untuk setiap *n* bilangan asli.

Bukti:

Misal:

$V(S_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dimana v_1 adalah titik pusat dan $v_2, v_3, ..., v_n$ adalah titik ujung dan,

$E(S_n) = \{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$ dimana sisi $e_i = v_1 v_{i+1}$ untuk setiap $i = 1,2,3,..., n-1$.

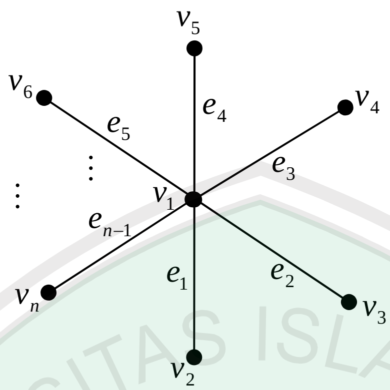
Jadi untuk S_n **:**

$p = n + 1$ dan $q = n$,

sehingga $p + q = (n+1) + n$

$= 2n + 1$

Maka graf *star* S_n dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.13. Graf *Star* S_n

Definisikan fungsi f dari $V(S_n) \cup E(S_n)$ ke $\{1,2,3, \ldots, p+q\}$ dengan aturan:

$$f(v_i) = 2i - 1 \quad , \qquad 1 \le i \le n+1$$

$$f(e_i) = f(v_1 v_{i+1}) = 2i \quad , \qquad 1 \le i \le n$$

1. Akan ditunjukkan f bijektif (injektif dan surjektif)

   a. f injektif

      1) Untuk titik di S_n

         Ambil v_i dan v_j titik di S_n dengan $f(v_i) = f(v_j)$

         Akan dibuktikan $i = j$, sedemikian sehingga $v_i = v_j$

         Karena $f(v_i) = f(v_j)$

maka $2i-1=2j-1$

$2i=2j$

$i=j$

Jadi, $v_i=v_j$

2) Untuk sisi di S_n

Ambil e_i dan e_j sisi di S_n dengan $f(e_i)=f(e_j)$

Akan dibuktikan $i=j$, sedemikian sehingga $e_i=e_j$

Karena $f(e_i)=f(e_j)$

Maka $2i=2j$

$i=j$

Jadi, $e_i=e_j$

3) Akan dibuktikan bahwa $f(v_i)\neq f(e_i)$

Karena $f(v_i)=2i-1$, $1\leq i\leq n+1$ selalu ganjil dan

$f(e_i)=f(v_1v_{i+1})=2i$, $1\leq i\leq n$ selalu genap

jadi $f(v_i)\neq f(e_i)$

Jadi *f* merupakan **fungsi injektif** dari $V(S_n)\cup E(S_n)$ ke $\{1,2,3,...,p+q\}$.

b. f surjektif

Akan dibuktikan bahwa $1 \le f(v_i) \le p+q$ dan $1 \le f(e_i) \le p+q$ atau $V(S_n) \cup E(S_n)$ dipetakan ke $\{1,2,3,\dots, p+q\}$

1) Akan ditunjukkan $1 \le f(v_i) \le p+q$. Diketahui $f(v_i) = 2i-1$ untuk $1 \le i \le n+1$.

   Karena $1 \le i \le n+1$

   Maka $2 \le 2i \le 2n+2$

   $$2-1 \le 2i-1 \le 2n+1$$

   $$1 \le 2i-1 \le 2n+1$$

   Jadi $1 \le f(v_i) \le p+q$

2) Akan ditunjukkan $1 \le f(e_i) \le p+q$. Diketahui $f(e_i) = f(v_1 v_{i+1}) = 2i$ untuk $1 \le i \le n$.

   Karena $1 \le i \le n$

   Maka $2 \le 2i \le 2n$

   $$1 \le 2 \le 2i \le 2n \le 2n+1$$

   $$1 \le 2i \le 2n+1$$

   Jadi $1 \le f(e_i) \le p+q$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa $1 \le f(v_i) \le p+q$ dan $1 \le f(e_i) \le p+q$ artinya $V(S_n) \cup E(S_n)$ dipetakan ke $\{1,2,3,..., p+q\}$

Karena banyaknya anggota $V(S_n) \cup E(S_n)$ sama dengan banyaknya anggota $\{1,2,3, . . ., p+q\}$ dan f adalah injektif maka sudah pasti f adalah **surjektif.**

2. Akan dibuktikan $f(e_i) = f(v_1 v_{i+1}) = | f(v_{i+1}) - f(v_1) |$. Diketahui $f(e_i) = 2i$ untuk $1 \le i \le n$ dan $f(v_i) = 2i - 1$ untuk $1 \le i \le n+1$.

$$
\begin{aligned}
|f(v_{i+1}) - f(v_1)| &= |(2(i+1)-1)-1| \\
&= |2i+2-1-1| \\
&= |2i| \\
&= 2i \quad , \qquad i \in \mathrm{N} \\
&= f(e_i) \\
&= f(v_1 v_{i+1})
\end{aligned}
$$

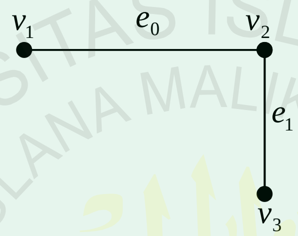
Jadi terbukti bahwa $f(e_i) = f(v_1 v_{i+1}) = | f(v_{i+1}) - f(v_1) |$

Dengan demikian terbukti bahwa graf *star* S_n adalah **konsekutif** untuk setiap n adalah bilangan asli.

3.2 Pelabelan Konsekutif Pada Graf *Double Star* $S_{n,n+1}$

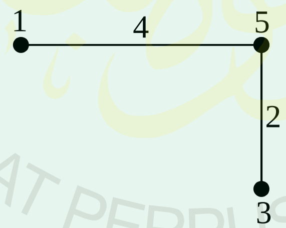
Pelabelan konsekutif pada graf *double star* $S_{n,n+1}$ dimana n adalah bilangan asli diberikan sebagai berikut:

1. **Graf *double star* $S_{n,n+1}$ dimana $n = 1$**



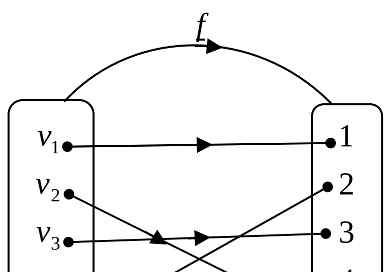
Gambar 3.14. Penotasian Titik dan Sisi Graf *Double Star* $S_{1,2}$

Pelabelan konsekutif dapat diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.15. Pelabelan Konsekutif pada Graf *Double Star* $S_{1,2}$

Sehingga jika pelabelan tersebut adalah fungsi *f*, maka dapat dibentuk fungsi bijektif dari $V(S_{n,n+1}) \cup E(S_{n,n+1})$ ke $\{1,2,3,4,5\}$ sebagai berikut:



Gambar 3.16. Fungsi Bijektif Graf *Double Star* $S_{1,2}$

Dari fungsi pelabelan tersebut, dapat dibentuk pola pelabelan berdasarkan indeks titik dan indeks sisi sebagai berikut:

a. Titik

1) Titik pusat

v_1, maka $f(v_1) = 1$ (selalu satu)

v_2, maka $f(v_2) = 5 = 2 \cdot 2 + 1 = 2(1+1) + 1 = 2(n+1) + 1$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = 2i + 1 \qquad i = n + 1$

2) Titik dengan indeks 3

v_3, maka $f(v_3) = 3 = 2 \cdot 3 - (2 \cdot 1 + 1) = 2i - (2n+1)$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = 2i - (2n+1) \qquad i = 3$

b. Sisi

1) Sisi dengan indeks 0

$$e_0 = v_1 v_2 \text{, maka } f(v_1 v_2) = 4 = |2(1+1)| = |2(n+1)|$$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_1 v_i) = |2i| \qquad\qquad i = n+1$$

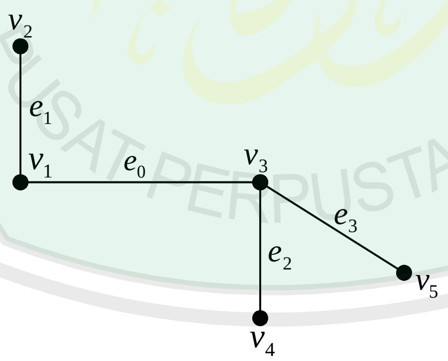
2) Sisi dengan indeks 1

$$e_1 = v_2 v_3 \text{, maka } f(v_2 v_3) = 2 = 4(1+1) - 2\cdot 3 = 4(n+1) - 2i$$

Jadi dapat disimpulkan:

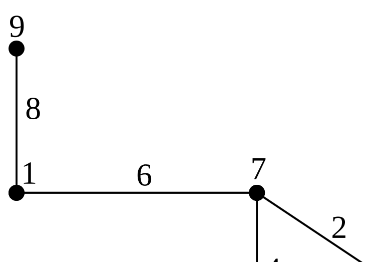
$$f(v_{n+1} v_i) = 4(n+1) - 2i \qquad\qquad i = 3$$

2. Graf *double star* $S_{n,n+1}$ dimana $n = 2$



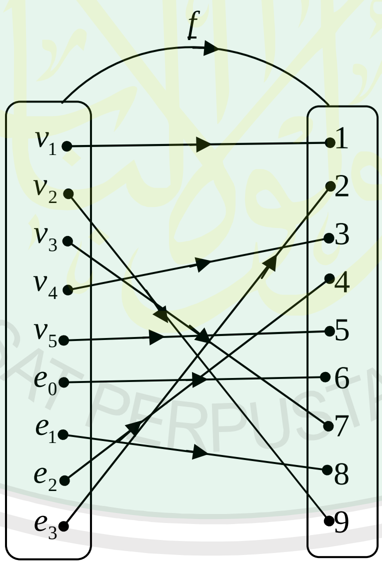
Gambar 3.17. Penotasian Titik dan Sisi Graf *Double Star* $S_{2,3}$

Pelabelan konsekutif dapat diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.18. Pelabelan Konsekutif pada Graf *Double Star* $S_{2,3}$

Sehingga jika pelabelan tersebut adalah fungsi *f*, maka dapat dibentuk fungsi bijektif dari $V(S_{n,n+1}) \cup E(S_{n,n+1})$ ke $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ sebagai berikut:



Gambar 3.19. Fungsi Bijektif Graf Double Star $S_{2,3}$

Dari fungsi pelabelan tersebut, dapat dibentuk pola pelabelan berdasarkan indeks titik dan indeks sisi sebagai berikut:

a. Titik

1) Titik pusat

v_1, maka $f(v_1) = 1$ (selalu satu)

v_3, maka $f(v_3) = 7 = 2 \cdot 3 + 1 = 2(2+1) + 1 = 2(n+1) + 1$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = 2i + 1 \qquad i = n + 1$

2) Titik dengan indeks 2

v_2, maka $f(v_2) = 9 = (2 \cdot 2 + 1) + 2 \cdot 2 = (2n+1) + 2i$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = (2n+1) + 2i \qquad i = 2$

3) Titik dengan indeks 4 dan 5

v_4, maka $f(v_4) = 3 = 2 \cdot 4 - (2 \cdot 2 + 1) = 2i - (2n+1)$

v_5, maka $f(v_5) = 5 = 2 \cdot 5 - (2 \cdot 2 + 1) = 2i - (2n+1)$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = 2i - (2n+1) \qquad i = 4,5$

b. Sisi

1) Sisi dengan indeks 0

$e_0 = v_1 v_3$, maka $f(v_1 v_3) = 6 = |2(2+1)| = |2(n+1)|$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_1 v_i) = |2i| \qquad i = n+1$

2) Sisi dengan indeks 1

$e_1 = v_1 v_2$, maka $f(v_1 v_2) = 8 = |2(2+2)| = |2(n+i)|$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_1 v_i) = |2(n+i)| \qquad i = 2$

3) Sisi dengan indeks 2 dan 3

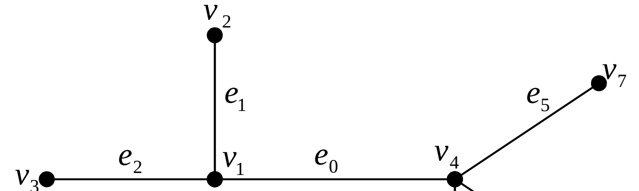
$e_2 = v_3 v_4$, maka $f(v_3 v_4) = 4 = |4(2+1) - 2 \cdot 4| = |4(n+1) - 2i|$

$e_3 = v_3 v_5$, maka $f(v_3 v_5) = 2 = |4(2+1) - 2 \cdot 5| = |4(n+1) - 2i|$

Jadi dapat disimpulkan:

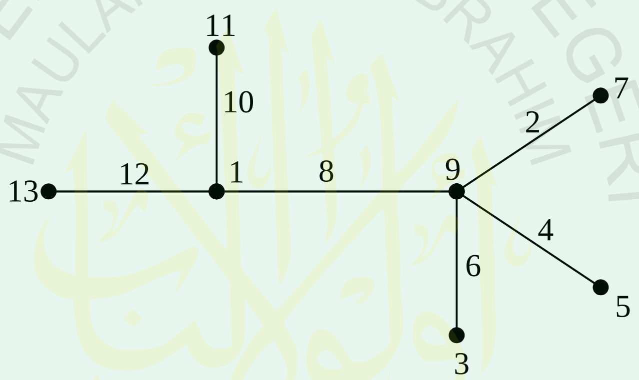
$f(v_{n+1} v_i) = |4(n+1) - 2i| \qquad i = 4{,}5$

3. Graf *double star* $S_{n,n+1}$ dimana $n = 3$



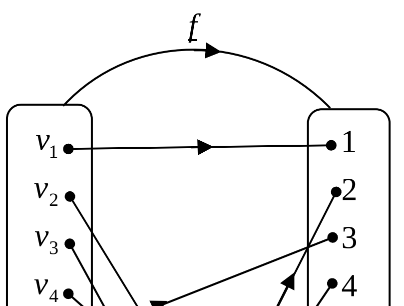
Gambar 3.20. Penotasian Titik dan Sisi Graf *Double Star* $S_{3,4}$

Pelabelan konsekutif dapat diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.21. Pelabelan Konsekutif pada Graf *Double Star* $S_{3,4}$

Sehingga jika pelabelan tersebut adalah fungsi *f*, maka dapat dibentuk fungsi bijektif dari $V(S_{n,n+1}) \cup E(S_{n,n+1})$ ke $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$ sebagai berikut:



Gambar 3.22. Fungsi Bijektif Graf *Double Star* $S_{3,4}$

Dari fungsi pelabelan tersebut, dapat dibentuk pola pelabelan berdasarkan indeks titik dan indeks sisi sebagai berikut:

a. Titik

1) Titik pusat

v_1, maka $f(v_1) = 1$ (selalu satu)

v_4, maka $f(v_4) = 9 = 2 \cdot 4 + 1 = 2(3+1) + 1 = 2(n+1) + 1$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = 2i + 1 \qquad i = n + 1$

2) Titik dengan indeks 2 dan 3

v_2, maka $f(v_2) = 11 = (2 \cdot 3 + 1) + 2 \cdot 2 = (2n+1) + 2i$

v_3, maka $f(v_3) = 13 = (2 \cdot 3 + 1) + 2 \cdot 3 = (2n+1) + 2i$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = (2n+1) + 2i \qquad i = 2,3$

3) Titik dengan indeks 5, 6 dan 7

v_5, maka $f(v_5) = 3 = 2 \cdot 5 - (2 \cdot 3 + 1) = 2i - (2n+1)$

v_6, maka $f(v_6) = 5 = 2 \cdot 6 - (2 \cdot 3 + 1) = 2i - (2n+1)$

v_7, maka $f(v_7) = 7 = 2 \cdot 7 - (2 \cdot 3 + 1) = 2i - (2n+1)$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = 2i - (2n+1) \qquad i = 5,6,7$

b. Sisi

1) Sisi dengan indeks 0

$e_0 = v_1 v_4$, maka $f(v_1 v_4) = 8 = |2(3+1)| = |2(n+1)|$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_1 v_i) = |2i| \qquad i = n+1$

2) Sisi dengan indeks 1 dan 2

$e_1 = v_1v_2$, maka $f(v_1v_2) = 10 = |2(3+2)| = |2(n+i)|$

$e_2 = v_1v_3$, maka $f(v_1v_3) = 12 = |2(3+3)| = |2(n+i)|$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_1v_i) = |2(n+i)| \qquad\qquad i = 2,3$

3) Sisi dengan indeks 3, 4 dan 5

$e_3 = v_4v_5$, maka $f(v_4v_5) = 6 = |4(3+1) - 2\cdot 5| = |4(n+1) - 2i|$

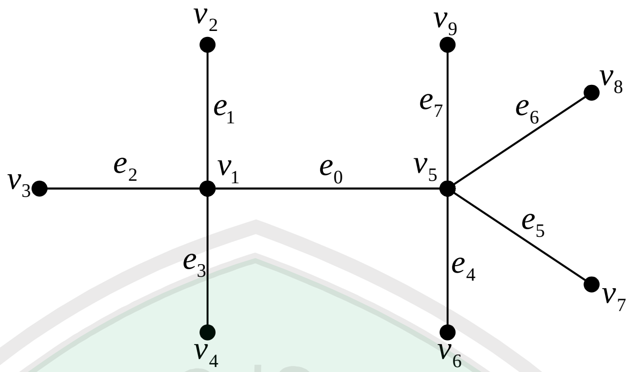
$e_4 = v_4v_6$, maka $f(v_4v_6) = 4 = |4(3+1) - 2\cdot 6| = |4(n+1) - 2i|$

$e_5 = v_4v_7$, maka $f(v_4v_7) = 2 = |4(3+1) - 2\cdot 7| = |4(n+1) - 2i|$

Jadi dapat disimpulkan:

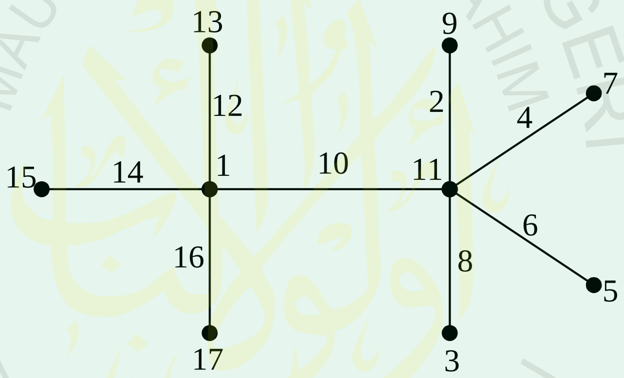
$f(v_{n+1}v_i) = |4(n+1) - 2i| \qquad\qquad i = 3,4,5$

4. Graf *double star* $S_{n,n+1}$ dimana $n = 4$



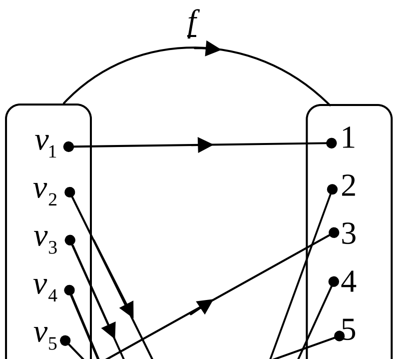
Gambar 3.23. Penotasian Titik dan Sisi Graf *Double Star* $S_{4,5}$

Pelabelan konsekutif dapat diberikan sebagai berikut:



Gambar 3.24. Pelabelan Konsekutif pada Graf *Double Star* $S_{4,5}$

Sehingga jika pelabelan tersebut adalah fungsi *f*, maka dapat dibentuk fungsi bijektif dari $V(S_{n,n+1}) \cup E(S_{n,n+1})$ ke $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17\}$ sebagai berikut:



Gambar 3.25. Fungsi Bijektif Graf *Double Star* $S_{4,5}$

Dari fungsi pelabelan tersebut, dapat dibentuk pola pelabelan berdasarkan indeks titik dan indeks sisi sebagai berikut:

a. Titik

1) Titik pusat

v_1, maka $f(v_1) = 1$ (selalu satu)

v_5, maka $f(v_5) = 11 = 2 \cdot 5 + 1 = 2(4+1) + 1 = 2(n+1) + 1$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = 2i + 1 \qquad\qquad i = n + 1$

2) Titik dengan indeks 2, 3 dan 4

v_2, maka $f(v_2) = 13 = (2 \cdot 4 + 1) + 2 \cdot 2 = (2n + 1) + 2i$

v_3, maka $f(v_3) = 15 = (2 \cdot 4 + 1) + 2 \cdot 3 = (2n + 1) + 2i$

v_4, maka $f(v_4) = 17 = (2 \cdot 4 + 1) + 2 \cdot 4 = (2n + 1) + 2i$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = (2n + 1) + 2i \qquad\qquad i = 2,3,4$

3) Titik dengan indeks 6, 7 dan 8

v_6, maka $f(v_6) = 3 = 2 \cdot 6 - (2 \cdot 4 + 1) = 2i - (2n + 1)$

v_7, maka $f(v_7) = 5 = 2 \cdot 7 - (2 \cdot 4 + 1) = 2i - (2n + 1)$

v_8, maka $f(v_8) = 7 = 2 \cdot 8 - (2 \cdot 4 + 1) = 2i - (2n + 1)$

v_9, maka $f(v_9) = 9 = 2 \cdot 9 - (2 \cdot 4 + 1) = 2i - (2n + 1)$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_i) = 2i - (2n + 1) \qquad\qquad i = 6,7,8,9$

b. Sisi

1) Sisi dengan indeks 0

$e_0 = v_1 v_4$, maka $f(v_1 v_4) = 10 = |2(4+1)| = |2(n+1)|$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_1 v_i) = |2i| \qquad i = n+1$

2) Sisi dengan indeks 1, 2 dan 3

$e_1 = v_1 v_2$, maka $f(v_1 v_2) = 12 = |2(4+2)| = |2(n+i)|$

$e_2 = v_1 v_3$, maka $f(v_1 v_3) = 14 = |2(4+3)| = |2(n+i)|$

$e_3 = v_1 v_4$, maka $f(v_1 v_3) = 16 = |2(4+3)| = |2(n+i)|$

Jadi dapat disimpulkan:

$f(v_1 v_i) = |2(n+i)| \qquad i = 2,3,4$

3) Sisi dengan indeks 4, 5, 6 dan 7

$e_4 = v_5 v_6$, maka $f(v_5 v_6) = 8 = |4(4+1) - 2 \cdot 6| = |4(n+1) - 2i|$

$e_5 = v_5 v_7$, maka $f(v_5 v_7) = 6 = |4(4+1) - 2 \cdot 7| = |4(n+1) - 2i|$

$e_6 = v_5 v_8$, maka $f(v_5 v_8) = 4 = |4(4+1) - 2 \cdot 8| = |4(n+1) - 2i|$

$e_7 = v_5 v_9$, maka $f(v_5 v_9) = 2 = |4(4+1) - 2 \cdot 9| = |4(n+1) - 2i|$

Jadi dapat disimpulkan:

$$f(v_{n+1}v_i) = |4(n+1) - 2i| \qquad i = 4,5,6,7$$

Dari uraian di atas diperoleh:

Teorema 2

Graf *double star* $S_{n,n+1}$ adalah konsekutif untuk setiap *n* bilangan asli.

Bukti:

Misal:

$V(S_{n,n+1}) = \{v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}, v_{n+2}, ..., v_{n+(n+1)}\}$ yang dikelompokkan sebagai berikut:

$$V_1(S_{n,n+1}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

$$V_2(S_{n,n+1}) = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_{2n+1}\}$$

dimana:

v_1 sebagai titik pusat di $V_1(S_{n,n+1})$ dan $v_2, v_3, \ldots, v_n$ sebagai titik ujung di $V_1(S_{n,n+1})$. v_{n+1} sebagai titik pusat di $V_2(S_{n,n+1})$ dan $v_{n+2}, v_{n+3}, \ldots, v_{2n+1}$ sebagai titik ujung di $V_2(S_{n,n+1})$

$E(S_{n,n+1}) = \{e_0, e_1, ..., e_n, e_{n+1}, e_{n+(n-1)}\}$ yang dikelompokkan sebagai berikut:

$$E_1(S_{n,n+1}) = e_0 = v_1 v_i \qquad \text{untuk} \quad i = n+1$$

$$E_2(S_{n,n+1}) = e_{i-1} = v_1 v_i \qquad \text{untuk} \quad 2 \le i \le n$$

$$E_3(S_{n,n+1}) = e_{i-2} = v_{n+1} v_i \qquad \text{untuk} \quad n+2 \le i \le 2n+1$$

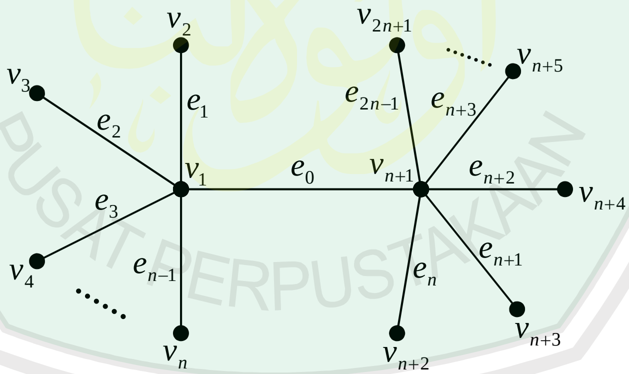
Jadi untuk $S_{n,n+1}$:

$p = n + (n+1) = 2n+1$ dan $q = 2n$,

sehingga $p + q = (2n+1) + 2n$

$= 4n + 1$

Maka $S_{n,n+1}$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.26. Graf *Double Star* $S_{n,n+1}$

Definisikan fungsi *f* dari $V(S_{n,n+1}) \cup E(S_{n,n+1})$ ke {1,2,3, . . ., *p*+*q*} dengan aturan:

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & , \quad i = 1 \\ 2i - 1 & , \quad i = n+1 \\ (2n+1) + 2i & , \quad 2 \le i \le n \\ 2i - (2n+1) & , \quad n+2 \le i \le 2n+1 \end{cases}$$

$$f(e_0) = f(v_1 v_i) = |2i| \quad , \quad i = n+1$$

$$f(e_{i-1}) = f(v_1 v_i) = |2(n+i)| \quad , \quad 2 \le i \le n$$

$$f(e_{i-2}) = f(v_{n+1} v_i) = |4(n+1) - 2i| \quad , \quad n+2 \le i \le n+(n+1)$$

1. Akan ditunjukkan *f* bijektif (injektif dan surjektif)

   a. *f* injektif

      1) Untuk titik di $S_{n,n+1}$

         Ambil v_i dan v_j titik di $S_{n,n+1}$ dengan $f(v_i) = f(v_j)$

         Akan dibuktikan $i = j$, sedemikian sehingga $v_i = v_j$

         a) Untuk *i* dan *j* adalah $n+1$

            Karena $f(v_i) = f(v_j)$

            Maka $2i + 1 = 2j + 1$

            $2i = 2j$

            $i = j$

            Jadi $v_i = v_j$

b) Untuk $2 \le i \le n$ dan $2 \le j \le n$

Karena $f(v_i) = f(v_j)$

Maka $(2n+1) + 2i = (2n+1) + 2j$

$$2i = 2j$$

$$i = j$$

Jadi $v_i = v_j$

c) Untuk $n+2 \le i \le 2n+1$ dan $n+2 \le j \le 2n+1$

Karena $f(v_i) = f(v_j)$

Maka $2i - (2n+1) = 2j - (2n+1)$

$$2i = 2j$$

$$i = j$$

Jadi $v_i = v_j$

2) Untuk sisi di $S_{n,n+1}$

a) Untuk $2 \le i \le n$ dan $2 \le j \le n$

Ambil $e_{i-1} = v_1 v_i$ dan $e_{j-1} = v_1 v_j$ sisi di $S_{n,n+1}$ dengan $f(v_1 v_i) = f(v_1 v_j)$.

Akan dibuktikan $i = j$, sedemikian sehingga $v_1 v_i = v_1 v_j$

Karena $f(v_1 v_i) = f(v_1 v_j)$

Maka $2(n+i) = 2(n+j)$

$$2i = 2j$$

$$i = j$$

Jadi $v_1 v_i = v_1 v_j$

b) Untuk $n+2 \le i \le n+(n+1)$

Ambil $e_{i-2} = v_{n+1}v_i$ dan $e_{j-2} = v_{n+1}v_j$ sisi di $S_{n,n+1}$ dengan $f(v_{n+1}v_i) = f(v_{n+1}v_j)$.

Akan dibuktikan $i = j$, sedemikian sehingga $v_{n+1}v_i = v_{n+1}v_j$

Karena $f(v_{n+1}v_i) = f(v_{n+1}v_j)$

Maka $4(n+1) - 2i = 4(n+1) - 2j$

$$-2i = -2j$$

$$i = j$$

Jadi, $v_1 v_i = v_1 v_j$

3) Akan dibuktikan bahwa $f(V(S_{n,n+1})) \ne f(E(S_{n,n+1}))$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & , \quad i = 1 \\ 2i - 1 & , \quad i = n+1 \\ (2n+1) + 2i & , \quad 2 \le i \le n \\ 2i - (2n+1) & , \quad n+2 \le i \le 2n+1 \end{cases}$$

Maka, $f(v_i)$ selalu ganjil

$f(e_0) = f(v_1 v_i) = |2i|$, $i = n+1$

$f(e_{i-1}) = f(v_1 v_i) = |2(n+i)|$, $2 \le i \le n$

$f(e_{i-2}) = f(v_{n+1} v_i) = |4(n+1) - 2i|$, $n+2 \le i \le n+(n+1)$

Maka , $f(e_0)$, $f(e_{i-1})$, dan $f(e_{i-2})$ selalu genap.

Jadi $f(V(S_{n,n+1})) \neq f(E(S_{n,n+1}))$

Jadi f merupakan **fungsi injektif** dari $V(S_{n,n+1}) \cup E(S_{n,n+1})$ ke $\{1,2,3,..., p+q\}$.

b. *f* surjektif

Akan dibuktikan bahwa $V(S_{n,n+1}) \cup E(S_{n,n+1})$ dipetakan ke $\{1,2,3,..., p+q\}$

1) Untuk $V(S_n)$ dipetakan ke $\{1,2,3,..., p+q\}$

a) $f(v_1) = 1 \in \{1,2,3,..., p+q\}$

b) $f(v_i) = 2i+1 \in \{1,2,3,..., p+q\}$ untuk $i = n+1$

c) Akan dibuktikan $1 \le f(v_i) \le p+q$. Diketahui $f(v_i) = (2n+1)+2i$ untuk $2 \le i \le n$.

Karena $2 \le i \le n$

Maka $4 \le 2i \le 2n$

$$2n+1+4 \le (2n+1)2i \le 2n+1+2n$$

$$2n+5 \le (2n+1)+2i \le 4n+1$$

$$1 \le 2n+5 \le (2n+1)+2i \le 4n+1$$

$$1 \le (2n+1)+2i \le 4n+1$$

$$1 \le f(v_i) \le p+q$$

Jadi $1 \le f(v_i) \le p+q$

d) Akan dibuktikan $1 \le f(v_i) \le p+q$. Diketahui $f(v_i) = 2i-(2n+1)$ untuk $n+2 \le i \le 2n+1$.

Karena $n+2 \le i \le 2n+1$

Maka $2(n+2) \le 2i \le 4n$

$$2(n+2)-(2n+1) \le 2i-(2n+1) \le 4n-(2n+1)$$

$$3 \le 2i-(2n+1) \le 2n-1$$

$$1 \le 3 \le 2i-(2n+1) \le 2n-1 \le 4n+1$$

$$1 \le 2i-(2n+1) \le 4n+1$$

$$1 \le f(v_i) \le p+q$$

Jadi $1 \le f(v_i) \le p+q$

2) Untuk $E(S_{n,n+1})$ dipetakan ke $\{1,2,3,\ldots, p+q\}$

a) $f(e_0) = f(v_1 v_i) = |2i| \in \{1,2,3,\ldots, p+q\}$ untuk $i = n+1$.

b) Akan dibuktikan $1 \le f(e_{i-1}) = f(v_1 v_i) \le p+q$. Diketahui $f(e_{i-1}) = f(v_1 v_i) = |2(n+i)|$ untuk $2 \le i \le n$

Karena $2 \le i \le n$

Maka $4 \le 2i \le 2n$

$$4 + 2n \le 2i + 2n \le 2n + 2n$$

$$2(n+2) \le 2(n+i) \le 4n$$

$$1 \le 2(n+2) \le 2(n+i) \le 4n \le 4n+1$$

$$1 \le 2(n+i) \le 4n+1$$

$$1 \le f(e_{i-1}) \le p+q$$

Jadi $1 \le f(e_{i-1}) \le p+q$

c) Akan dibuktikan$1 \le f(e_{i-2}) = f(v_{n+1} v_i) \le p+q$. Diketahui $f(e_{i-2}) = f(v_{n+1} v_i) = |4(n+1) - 2i|$ untuk $n+2 \le i \le n+(n+1)$

Karena $n+2 \le i \le n+(n+1)$

$$-2(n+2) \ge -2i \ge -2(2n+1)$$

$$4(n+1)-2(n+2) \geq 4(n+1)-2i \geq 4(n+1)-2(2n+1)$$

$$2n \geq 4(n+1)-2i \geq 2$$

$$2 \leq 4(n+1)-2i \leq 2n$$

$$1 \leq 2 \leq 4(n+1)-2i \leq 2n \leq 4n+1$$

$$1 \leq 4(n+1)-2i \leq 4n+1$$

Jadi $1 \leq f(e_{i-2}) \leq p+q$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $V(S_{n,n+1}) \cup E(S_{n,n+1})$ dipetakan ke $\{1,2,3,..., p+q\}$.

Karena banyaknya anggota $V(S_{n,n+1}) \cup E(S_{n,n+1})$ sama dengan banyaknya anggota {1,2,3, . . ., p+q} dan f adalah injektif maka sudah pasti f adalah **surjektif.**

2. Akan dibuktikan

a) $f(e_0) = f(v_1 v_i) = |f(v_i) - f(v_1)|$. Diketahui $f(e_0) = |2i|$ untuk $i = n+1$

$$\begin{aligned}
|f(v_i) - f(v_1)| &= |((2n+1)+1)-1| \\
&= |2n+1+1-1| \\
&= |2n+1| \\
&= |2i| \\
&= 2i \quad , \qquad i = n+1 \in \mathrm{N} \\
&= f(e_0) \\
&= f(v_1 v_i)
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $f(e_0) = f(v_1v_i) = |f(v_i) - f(v_1)|$

b) $f(e_{i-1}) = f(v_1v_i) = |f(v_i) - f(v_1)|$. Diketahui $f(e_{i-1}) = |2(n+i)|$ untuk $2 \le i \le n$.

$$
\begin{aligned}
|f(v_i) - f(v_1)| &= |((2n+1)+2i)-1| \\
&= |2n+1+2i-1| \\
&= |2n+2i| \\
&= |2(n+i)| \\
&= 2(n+i) \quad , \quad n,i \in \mathrm{N} \\
&= f(e_{i-1}) \\
&= f(v_1v_i)
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $f(e_{i-1}) = f(v_1v_i) = |f(v_i) - f(v_1)|$

c) $f(e_{i-2}) = f(v_{n+1}v_i) = |f(v_i) - f(v_{n+1})|$. Diketahui $f(e_{i-2}) = |4(n+1) - 2i|$ untuk $n+2 \le i \le n+(n+1)$

$$
\begin{aligned}
|f(v_{n+1}) - f(v_i)| &= |(2i-(2n+1)) - (2(n+1)+1)| \\
&= |2i-2n-1-2n-2-1| \\
&= |2i-4n+4| \\
&= |4n+4-2i| \\
&= |4(n+4)-2i| \\
&= 4(n+4)-2i \quad , \quad n,i \in \mathrm{N} \\
&= f(e_{i-2}) \\
&= f(v_{n+1}v_i)
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa $f(e_{i-2}) = f(v_{n+1}v_i) = |f(v_i) - f(v_{n+1})|$

Dengan demikian terbukti bahwa graf *double star* $S_{n,n+1}$ adalah **konsekutif** untuk setiap *n* adalah bilangan asli.

BAB IV

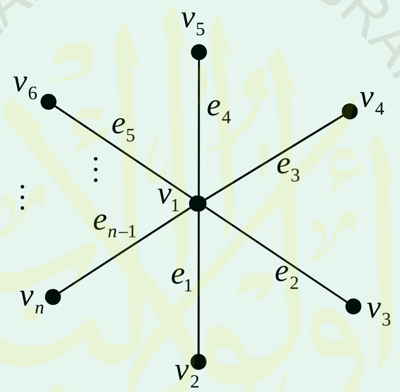
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Graf *star* S_n untuk setiap *n* bilangan asli adalah konsekutif.

   Misal graf *star* S_n untuk setiap *n* bilangan asli dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.1. Graf *Star* S_n

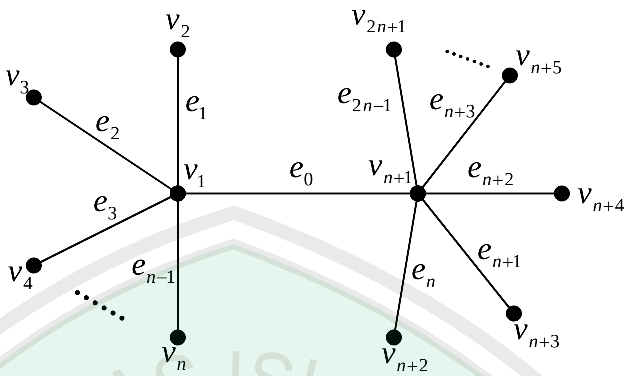
Pelabelan konsekutif pada graf *star* S_n, didefinisikan sebagai berikut:

$$f(v_i) = 2i - 1 \quad , \quad 1 \le i \le n+1$$

$$f(e_i) = f(v_1 v_{i+1}) = 2i \quad , \quad 1 \le i \le n$$

2. Graf *double star* $S_{n,n+1}$ untuk setiap *n* bilangan asli adalah konsekutif.

   Misal Graf *double star* $S_{n,n+1}$ dengan *n* bilangan asli digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.2. Graf *Double Star* $S_{n,n+1}$

Pelabelan konsekutif pada graf *double star* $S_{n,n+1}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 & , \quad i = 1 \\ 2i - 1 & , \quad i = n+1 \\ (2n+1) + 2i & , \quad 2 \le i \le n \\ 2i - (2n+1) & , \quad n+2 \le i \le 2n+1 \end{cases}$$

$$f(e_0) = f(v_1 v_i) = |2i| \quad , \quad i = n+1$$

$$f(e_{i-1}) = f(v_1 v_i) = |2(n+i)| \quad , \quad 2 \le i \le n$$

$$f(e_{i-2}) = f(v_{n+1} v_i) = |4(n+1) - 2i| \quad , \quad n+2 \le i \le n+(n+1)$$

4.2 Saran

Pembahasan mengenai pelabelan konsekutif ini masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan pada jenis-jenis graf yang lain seperti graf tangga, graf pohon, graf sikel dan lain sebagainya atau pada aplikasinya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Bartle, Robert dan Sherbert, R Donald. 1927. *Introduction to Real Analysis 3rd Edition*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition. California: Wadsworth. Inc.*

Gafur, Abdul. 2008. *Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, Graf Komplit Bipartit dan Pelabelan Konsekutif pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit*. (Online): (*http://www. Combinatoric. Com*. Diakses tanggal 15 Agustus 2008).

Nugrahadi, Denny. 2008. *Representasi Graf Berarah dalam Mencari Solusi Jalur Optimum Menggunakan Algoritma A**. (Online): (*http://www. Combinatoric. Com*. Diakses tanggal 15 Agustus 2008).

Nurdin. Baskoro E.T dan Salman A.N.M.. 2006. *Total Edge Irreguler Strength of Lintang Graphs*. Departemen matematika, FMIPA-ITB S4G-06. (Online): (*http://www. Combinatoric. Com*. Diakses tanggal 15 Agustus 2008).

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan.* Jakarta: Rineka Cipta.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Soebagio S dan Sukirman. 1993. *Materi pokok struktur aljabar*. Jakarta: Universitas Terbuka, Depdikbud

Wijaya, K. 2004. Pelabelan Konsekutif Pada Graf Sikel dan Graf Bipartit Komplit. Jurnal Ilmu Dasar Vol. 5 no. 1. (Online): (*http://www. Combinatoric. Com*. Diakses tanggal 15 Agustus 2008).

Wilson, Robin J dan Watkins John J. 1989. *Graphs: An Introductory approach: A First Course in Discrete Mathematics*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.

Wirawan, Teddy P. 2008. Pemodelan Sistem Lalu Lintas dengan Graf Ganda BerarahBerbobot. (Online): (*http://www*. Combinatoric. Com. Diakses tanggal 15 Agustus 2008).

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Abdul Muis
NIM : 04510012
Fakultas/ jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Pelabelan Konsekutif (*consecutive labeling*) pada Graf *Star* S_n dan Graf *Double Star* $S_{n,n+1}$ (n bilangan asli)
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	18 Juli 2008	Konsultasi Masalah	1.	
2	11 September 2008	Konsultasi BAB I		2.
3	13 September 2008	Revisi BAB I	3.	
4	16 September 2008	Konsultasi BAB II		4.
5	18 September 2008	Revisi BAB II	5.	
6	20 September 2008	Konsultasi BAB III		6.
7	23 September 2008	Revisi BAB II dan III	7.	
8	26 September 2008	Konsultasi Keagamaan		8.
9	27 September 2008	Konsultasi Keagamaan	9.	
10	13 Oktober 2008	Revisi Keagamaan		10.
11	14 Oktober 2008	Revisi Keagamaan	11.	
12	14 Oktober 2008	Konsultasi Keseluruhan		12.
13	15 Oktober 2008	ACC Keseluruhan	13.	

Malang, 17 Oktober 2008
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321