

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Matija Novak

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE

DIPLOMSKI RAD

Mentor:

Doc. dr. sc. Ivica Skozrit, dipl. ing.

Student:

Matija Novak

Zagreb, 2016.

Izjavljujem da sam ovaj rad izradio samostalno koristeći znanja stečena na Fakultetu strojarstva i brodogradnje te navedenu literaturu.

Zahvaljujem se svom mentoru doc. dr. sc. Ivici Skozritu na pomoći, prenesenom znanju i korisnim savjetima prilikom izrade diplomskog rada.

Veliko hvala i mojim roditeljima Elizabeti i Mirku te sestrama Lari i Brigiti koji su mi bili velika podrška i potpora tijekom cijelog školovanja.

Zahvaljujem se svim kolegama koji su bili uz mene tijekom studija, a posebno kolegama Luki Kovačiću, Simonu Ferlinu i Nikoli Kraljiću.

Zahvaljujem se i svim ostalim prijateljima koji su mi na bilo koji način olakšali ove godine provedene na studiju, a posebno mojim najboljim prijateljicama Matei i Mihaeli.

Na kraju, veliko hvala svim nespomenutima, koji su mi na bilo koji način pomogli tijekom studiranja i prilikom izrade ovog diplomskog rada.

Matija Novak



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET STROJARSTVA I BRODOGRADNJE



Središnje povjerenstvo za završne i diplomske ispite
Povjerenstvo za diplomske ispite studija strojarstva za smjerove:
procesno-energetski, konstrukcijski, brodstrojarski i inženjersko modeliranje i računalne simulacije

Sveučilište u Zagrebu Fakultet strojarstva i brodogradnje	
Datum	Prilog
Klasa:	
Ur.broj:	

DIPLOMSKI ZADATAK

Student: **Matija Novak**

Mat. br.: 0035186094

Naslov rada na hrvatskom jeziku: **Numerička analiza debelostjenih cijevi kod naglog povećanja tlaka**

Naslov rada na engleskom jeziku: **Numerical Analysis of Thick Pipes Under Rapid Increase of Pressure**

Opis zadatka:

Primjena debelostjenih cijevi u strojogradnji je izrazito široka, kod njih često dolazi do naglog povećanja tlaka u cijevi. Uzrok naglog povećanja tlaka može biti npr. puštanje u rad određenog cjevovoda, naglo pokretanje pume i sl., a također može biti izazvano prilikom ispitivanja raznih eksplozivnih sredstava. Kontrolirana eksplozija događa se unutar debele cijevi tj. dolazi do naglog povećanja tlaka u cijevi, koja služi kao horizontalna zaštita, a eksplozija se usmjerava vertikalno prema gore.

Za proizvoljno definirane dimenzije cijevi, zajedno s mehaničkim karakteristikama materijala, opterećenjem i rubnim uvjetima potrebno je provesti proračun čvrstoće prilikom naglog povećanja tlaka. Analizu je potrebno provesti dostupnim analitički izrazima, te numerički primjenom metode konačnih elemenata uz korištenjem eksplicitne i implicitne metode rješavanja, te prikazati usporedbu dobivenih rezultata. Proračun izvršiti numerički primjenom dostupnog programskog paketa koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Za diskretizaciju cijevi koristiti dostupne konačne elemente iz korištenog programskog paketa. Za sve primijenjene konačne elemente izvršiti verifikaciju na jednostavnijim problemima te rezultate usporediti s dostupnim pripadnim analitičkim rješenjima. Osim toga, za proračunski model potrebno je odrediti optimalnu mrežu konačnih elemenata te prikazati konvergenciju rješenja.

U radu je potrebno navesti korištenu literaturu i eventualno dobivenu pomoć.

Zadatak zadan:

29. rujna 2016.

Rok predaje rada:

1. prosinca 2016.

Predviđeni datumi obrane:

7., 8. i 9. prosinca 2016.

Zadatak zadao:

Skrozit Ivica
Doc. dr. sc. Ivica Skozrit

Predsjednica Povjerenstva:

Prof. dr. sc. Tanja Jurčević Lulić

02. Jurčević

SADRŽAJ

SADRŽAJ	I
POPIS SLIKA	III
POPIS TABLICA.....	VI
POPIS OZNAKA	VII
SAŽETAK.....	IX
SUMMARY	XI
1. UVOD	1
1.1. Eksplozija	4
1.2. O metodi konačnih elemenata	8
1.2.1. Vrste konačnih elemenata	10
1.3. Metode integracije	12
1.3.1. Implicitna metoda.....	12
1.3.2. Eksplicitna metoda	13
2. VERIFIKACIJA PRORAČUNSKOG MODELA	14
2.1. Analitički proračun	15
2.2. Numerički proračun.....	20
2.2.1. Konvergencija rješenja statičkog progiba	21
2.2.2. Dinamička analiza	25
2.3. Usporedba rezultata	29
3. ANALIZA DEBELOSTJENE CIJEVI	33
3.1. Statička analiza	35
3.1.1. Analitički proračun.....	35
3.1.2. Numerički proračun	40
3.1.3. Usporedba rezultata.....	49
3.2. Dinamička analiza	50
3.2.1. Eksplicitna metoda	51

3.2.2. Implicitna metoda.....	55
3.2.3. Usporedba rezultata dobivenih eksplicitnom i implicitnom metodom	59
4. ZAKLJUČAK	67
LITERATURA	70
PRILOZI.....	71

POPIS SLIKA

Slika 1.1. Rotacijske plohe [1]: a) valjak, b) stožac, c) kugla, d) hiperboloid, e) torus, f) opća rotacijska ploha	2
Slika 1.2. Translacijske plohe [1]: a) eliptični paraboloid, b) hiperbolni paraboloid	2
Slika 1.3. Debelostijena cijev opterećena tlakom iznutra i izvana	3
Slika 1.4. Dijagrami karakteristike eksplozije: a) brzo sagorijevanje, b) detonacija	5
Slika 1.5. Pojednostavljeni dijagrami karakteristike eksplozije: a) brzo sagorijevanje, b) detonacija, c) kombinirano	6
Slika 1.6. Dijagram tlaka incidenta i reflektiranog tlaka.....	7
Slika 1.7. Smjer širenja udarnog vala i površina na koju nailazi su: a) paralelni, b) okomiti, c) okomiti, a površina je malih dimenzija [3]	7
Slika 1.8. Shematski prikaz programskog paketa.....	9
Slika 1.9. Vrste elemenata: a) kontinuumski, b) ljuskasti, c) gredni, d) kruti, e) membranski, f) štapni konačni elementi	10
Slika 1.10. Konačni elementi s obzirom na broj čvorova i red interpolacije: a) linearni element, b) kvadratni element, c) modificirani element drugog reda	11
Slika 1.11. a) C3D8 element, b) točke integracije [5].....	12
Slika 2.1. a) verifikacijski model, b) poprečni presjek grede, c) pojednostavljeni verifikacijski model.....	14
Slika 2.2. Polovica grede oslobođena veza	17
Slika 2.3. Unutarnji moment u proizvoljnom presjeku grede	17
Slika 2.4. Opterećenje i rubni uvjeti verifikacijskog modela.....	21
Slika 2.5. Mreže konačnih elemenata.....	22
Slika 2.6. Točke u kojima se računa progib grede	23
Slika 2.7. Konvergencija rješenja.....	24
Slika 2.8. Deformirani oblik i statički progib grede u mm a) izometrija, b) YZ ravnina i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika	25
Slika 2.9. Dijagram opterećenja	27

Slika 2.10. Deformirani oblik grede i dinamički progib u mm uz korištenje eksplicitne metode rješavanja a) izometrija, b) YZ ravnina i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika... 28	28
Slika 2.11. Deformirani oblik grede i dinamički progib u mm uz korištenje implicitne metode rješavanja a) izometrija, b) YZ ravnina i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika... 29	29
Slika 2.12. Deformirani oblik grede i dinamički progib u mm uz korištenje eksplicitne metode rješavanja i trajanje opterećenja od $t = 2$ s a) izometrija, b) YZ ravnina i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika..... 31	31
Slika 2.13. Deformirani oblik grede i dinamički progib u mm uz korištenje implicitne metode rješavanja i trajanje opterećenja od $t = 2$ s a) izometrija, b) YZ ravnina i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika..... 32	32
Slika 3.1. Debelostjena cijev 33	33
Slika 3.2. Cilindrični koordinatni sustav 35	35
Slika 3.3. Diferencijalni element debelostjene cijevi 36	36
Slika 3.4. Raspodjela radijalnih i cirkularnih napreznja po debljini cijevi 39	39
Slika 3.5. Geometrija, opterećenje i rubni uvjeti proračunskog modela 41	41
Slika 3.6. Mreže konačnih elemenata..... 42	42
Slika 3.7. Konvergencija radijalnog pomaka na unutarnjem radijusu cijevi..... 44	44
Slika 3.8. Konvergencija radijalnog pomaka na vanjskom radijusu cijevi 44	44
Slika 3.9. Konvergencija ekvivalentnog napreznja na unutarnjem radijusu cijevi 45	45
Slika 3.10. Deformirani i nedeformirani oblik cijevi i radijalni pomak cijevi u mm..... 46	46
Slika 3.11. Deformirani oblik i ekvivalentno napreznje cijevi u MPa 46	46
Slika 3.12. Deformirani oblik i radijalno napreznje cijevi u MPa..... 47	47
Slika 3.13. Deformirani oblik i cirkularno napreznje cijevi u MPa 48	48
Slika 3.14. Deformirani oblik i aksijalno napreznje cijevi u MPa 48	48
Slika 3.15. Dijagram opterećenja cijevi 51	51
Slika 3.16. Deformirani i nedeformirani oblik cijevi i radijalni pomak cijevi u mm..... 52	52
Slika 3.17. Deformirani oblik i ekvivalentno napreznje cijevi u MPa 53	53
Slika 3.18. Deformirani oblik i radijalno napreznje cijevi u MPa..... 53	53

Slika 3.19. Deformirani oblik i cirkularno naprezanje cijevi u MPa	54
Slika 3.20. Deformirani oblik i aksijalno naprezanje cijevi u MPa	54
Slika 3.21. Deformirani i nedeformirani oblik cijevi i radijalni pomak cijevi u mm.....	56
Slika 3.22. Deformirani oblik i ekvivalentno naprezanje cijevi u MPa	56
Slika 3.23. Deformirani oblik i radijalno naprezanje cijevi u MPa.....	57
Slika 3.24. Deformirani oblik i cirkularno naprezanje cijevi u MPa	57
Slika 3.25. Deformirani oblik i aksijalno naprezanje cijevi u MPa	58
Slika 3.26. Deformirani oblik i radijalni pomak cijevi u mm dobiven eksplicitnom metodom za vrijeme trajanja opterećenja $t = 1$ s.....	62
Slika 3.27. Deformirani oblik i ekvivalentno naprezanje u MPa dobiven eksplicitnom metodom za vrijeme trajanja opterećenja $t = 1$ s.....	62
Slika 3.28. Deformirani oblik i radijalni pomak cijevi u mm dobiven implicitnom metodom za vrijeme trajanja opterećenja $t = 1$ s	63
Slika 3.29. Deformirani oblik i ekvivalentno naprezanje u MPa dobiven implicitnom metodom za vrijeme trajanja opterećenja $t = 1$ s.....	63
Slika 3.30. Dijagram raspodjele radijalnog pomaka po visini cijevi	64
Slika 3.31. Dijagram raspodjele ekvivalentnog naprezanja po visini cijevi	64
Slika 3.32. Cijev debljine $d = 300$ mm diskretizirana s 65600 konačnih elemenata	65
Slika 3.33. Deformirani oblik cijevi debljine $d = 300$ mm i ekvivalentno naprezanje cijevi u MPa dobiveno primjenom eksplicitne metode.....	65
Slika 3.34. Deformirani oblik cijevi debljine $d = 300$ mm i ekvivalentno naprezanje cijevi u MPa dobiveno primjenom implicitne metode.....	66

POPIS TABLICA

Tablica 2.1. Vertikalni pomak grede diskretizirane C3D8 konačnim elementima	23
Tablica 2.2. Usporedba rezultata	30
Tablica 3.1. Radijalni pomak i ekvivalentno naprezanje gornjeg dijela cijevi diskretizirane C3D8 konačnim elementima	43
Tablica 3.2. Radijalna, cirkularna i aksijalna naprezanja gornjeg dijela cijevi diskretizirane s 39000 C3D8 konačnih elemenata	47
Tablica 3.3. Usporedba rezultata	49
Tablica 3.4. Usporedba rezultata eksplicitne i implicitne metode	59
Tablica 3.5. Usporedba rezultata eksplicitne i implicitne metode za $t_p = 1$ s	60

POPIS OZNAKA

Oznaka	Jedinica	Opis
A	mm^2	površina
a	mm	dimenzija poprečnog presjeka
d	mm	debljina cijevi
E	MPa	modul elastičnosti
F	N	koncentrirana sila
f	Hz	vlastita frekvencija
G	MPa	modul smicanja
H	mm	visina cijevi
h	mm	visina na kojoj se nalazi uteg
I_y, I_z	mm^4	momenti tromosti
I_p	mm^4	polarni moment tromosti
k_d	-	dinamički faktor
k_f	N/mm	konstanta fleksijske opruge
l	mm	duljina
m	kg	masa
M_y, M_z	Nm	unutarnji momenti savijanja
M_t	Nm	moment uvijanja
N	N	unutarnja sila u smjeru normale
p	MPa	tlak
q	MPa	kontinuirano opterećenje
Q_i	N	popočena sila
q_i	mm	popočeni pomak
Q_y, Q_z	N	unutarnje poprečne sile
R	mm	srednji radijus cijevi
r_1	mm	unutarnji radijus cijevi
r_2	mm	vanjski radijus cijevi
r, φ, z	-	cilindrične koordinate
R_m	MPa	vlačna čvrstoća

$R_{p0,2}$	MPa	granica tečenja
T	s	vlastiti period
t	s	vrijeme
t_p	s	pozitivna faza trajanja opterećenja
U	J	energija deformiranja
u	mm	radijalni pomak cijevi
w	mm	pomak u smjeru osi z
x, y, z	-	Kartezijeve koordinate
ν	-	Poissonov koeficijent
ρ	kg/m ³	gustoća
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	MPa	glavna naprezanja
σ_{ekv}	MPa	ekvivalentno naprezanje
σ_r	MPa	radijalno naprezanje
σ_z	MPa	aksijalno naprezanje
σ_φ	MPa	cirkularno naprezanje

SAŽETAK

Debelostjene cijevi imaju široku primjenu u strojarstvu, između ostalog i u ispitivanjima eksploziva. Prilikom eksplozije, tlak u cijevi odmah naraste na svoju maksimalnu vrijednost i nakon toga u određenom vremenu padne na nultu vrijednost. Zbog nagle promjene tlaka, koja ovisi o vremenu, statička analiza ne može dobro opisati ponašanje cijevi te je potrebno napraviti dinamičku analizu.

Najprije je napravljena verifikacija na jednostavnijem primjeru na kojem se može odrediti analitičko rješenje i to rješenje se uspoređuje s numeričkim. Za verifikacijski model je odabrana greda na dva oslonca na koju u sredini s visine h pada uteg mase m . Proveden je analitički proračun kojim je dobiven maksimalni statički i dinamički progib grede. Te su vrijednosti uspoređene s numeričkim rezultatima. Numerički proračun je proveden pomoću metode konačnih elemenata u računalnom programu *Abaqus*. Greda je modelirana kao trodimenzionalno tijelo i diskretizirana heksaedarskim elementima prvog reda. Konvergencija je ispitivana na statičkoj analizi, da bi se uštedjelo na vremenu. Nakon toga je napravljena i dinamička analiza primjenom eksplicitne i implicitne metode. Iz rezultata se moglo zaključiti da obje metode za zadani primjer daju približno jednake rezultate, a njihova razlika u odnosu na analitičko rješenje ovisi o pozitivnoj fazi trajanja opterećenja.

Nakon verifikacije je napravljena analiza debelostjene cijevi uklještene na jednom kraju i slobodne na drugom kraju te opterećene tlakom iznutra. Radi boljeg opisivanja geometrije, korišten je cilindrični koordinatni sustav. Najprije su se analitičkim proračunom izračunali radijalni pomaci, ekvivalentna, radijalna, cirkularna i aksijalna naprezanja pri statičkom opterećenju. Te veličine se računaju na gornjem rubu cijevi, gdje rubni uvjeti ne utječu na konačne rezultate pa se one mogu puno lakše odrediti nego u ostatku cijevi. Ista je analiza nakon toga provedena numerički, primjenom metode konačnih elemenata u računalnom programu *Abaqus*. Cijev se diskretizirala 3D heksaedarskim elementima prvog reda. Da bi se uštedjelo na vremenu, konvergencija je napravljena na statičkoj analizi. Osim po visini cijevi, mijenjao se i broj elemenata po debljini cijevi. Rezultati statičke analize su uspoređeni s analitičkim rezultatima i dobiveni rezultati se ne razlikuju previše u odnosu na analitičke rezultate.

Nakon toga je napravljena i dinamička analiza na mreži konačnih elemenata kod koje je iskonvergiralo rješenje statičke analize. Dinamička analiza je napravljena primjenom eksplicitne i implicitne metode. Rezultati dobiveni eksplicitnom i implicitnom metodom se razlikuju više nego je to bio slučaj kod grede. Iz rezultata je uočeno da dinamički faktor kod eksplicitne metode iznosi dva i pol, a kod implicitne nešto manje od dva. Maksimalno ekvivalentno naprezanje je veće od granice tečenja materijala pa se zaključuje da su pojedini dijelovi cijevi ušli u plastično područje, zbog čega je potrebno povećati debljinu cijevi ili promijeniti materijal cijevi ili smanjiti količinu eksploziva, čime se dobije manji tlak kojim je cijev opterećena.

Kako je u verifikaciji pokazano da se bolje poklapanje s analitičkim rješenjem dobije pri povećanju vremena opterećenja, napravljena je dinamička analiza te cijevi kod vremena trajanja opterećenja od jedne sekunde. Ti su se rezultati usporedili s rezultatima dobivenima kod kraćeg vremena trajanja.

Na kraju je napravljena analiza cijevi od jednakog materijala i pri jednakom opterećenju, ali s većom debljinom stijenke i ta je cijev zadovoljila uvjet da su naprezanja niža od granice tečenja.

Ključne riječi: debelostjena cijev, metoda konačnih elemenata, statička analiza, dinamička analiza, eksplicitna metoda, implicitna metoda, eksplozija, udarno opterećenje

SUMMARY

Thick-walled pipes are broadly used in mechanical engineering, for example for the explosives examination. During the explosion the pressure in the pipe instantly increases to its maximum value and then decreases to the null value during the certain amount of the time. Statical analysis is unable to correctly describe the behaviour of the pipe because of the time dependent change of the pressure. Therefore, dynamical analysis is required.

First of all, verification using the simple example is conducted by comparing the analytical and numerical results. The simply supported beam on which the weight with the mass m falls from the height h is used as the verification model. Analytical calculations are conducted to determine the maximum static and dynamic deflection of the beam. Calculated values are then compared with the numerical results. Numerical calculations are conducted using the finite element method in the software package Abaqus. The 3D model of the beam is used and discretized with the first order hexagonal elements. The examination of the convergence is conducted for the static analysis to save the time. In addition, dynamical analysis is conducted using both the implicit and explicit method. It was concluded that the results obtained with the both methods are similar and difference compared to the analytical solution depends on the positive load phase duration.

Furthermore, the analysis of the thick-walled tube clamped on the one end loaded with the internal pressure is carried out. Cylindrical coordinate system is used to easily define the boundary conditions. Firstly the radial displacement, equivalent, radial, circular and axial stresses are calculated analytically for the static load case. These values are calculated at the top part of the pipe, where boundary conditions don't affect the results. Therefore, the results are easier to obtain than at the other parts of the pipe. Same analysis is then conducted using the finite element method in the software package Abaqus. The pipe is discretized with the first order hexagonal elements. The examination of the convergence is conducted for the static analysis to save the time. Different number of the elements over both the height and thickness is used. The results obtained with the both methods are similar and the difference compared to the analytical solution is acceptable.

Additionally, dynamic analysis is conducted using the finite element mesh used in static analysis for which the convergence has been reached. Both the implicit and explicit method are used. The difference between the results obtained using different methods is higher than for the beam example. The value of the dynamic factor calculated with the explicit method is two and a half, while the implicit method gives the value of little less than two. The maximum value of the equivalent stress is higher than yield strength, therefore some parts of the pipe contain plastic deformations. The solution is either to increase the thickness of the pipe, to change the pipe material or to decrease the amount of the used explosive to lower the load pressure.

Results with the longer load duration provide results that are closer to the results of the analytical calculations, therefore dynamic analysis is conducted with the load duration of one second. Results were compared with load cases with the shorter load duration.

In the end, analysis of the pipe with increased thickness is performed, while using same material model and load case. Results shows that stress values are lower than yield strength of the material.

Key words: thick-walled pipe, finite element method, static analysis, dynamic analysis, explicit method, implicit method, explosion, impact load

1. UVOD

Ljuske [1] su geometrijska tijela koja su određena srednjom plohom i njihovom debljinom. Ako su srednja ploha i debljina poznate u svakoj točki ljuske, ona je potpuno određena. Srednja ploha se može opisati eksplicitno, implicitno ili parametarski, kako slijedi:

$$z = f(x, y), \quad (1)$$

$$F(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

$$x = f_1(\alpha_1, \alpha_2), \quad y = f_2(\alpha_1, \alpha_2), \quad z = f_3(\alpha_1, \alpha_2). \quad (3)$$

U parametarskom zapisu u izrazu (3), f_1, f_2 i f_3 su jednoznačne i neprekinute funkcije nezavisnih varijabli α_1 i α_2 , koje se nazivaju i Gaussove koordinate. Vrijednosti varijabli α_1 i α_2 su takve da svakoj točki plohe odgovara samo jedan par koordinata α_1, α_2 .

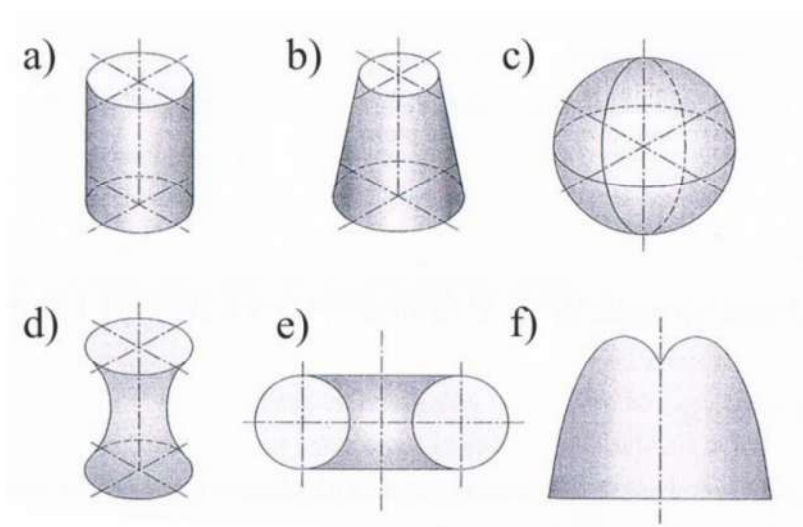
Plohe koje se najčešće koriste kod ljuskastih konstrukcija mogu se podijeliti na rotacijske i translacijske. Rotacijske nastaju rotacijom ravninske krivulje oko nepomične osi koju ta krivulja ne siječe. Translacijske plohe nastaju translatorskim gibanjem jedne ravninske krivulje po drugoj.

Jedan od parametara koji opisuje ljuske je zakrivljenost plohe. Definiira se tako da se najprije odredi tangencijalna ravnina u nekoj točki na plohi. U točki dodira tangencijalne ravnine i plohe se definiira vektor normale koji je okomit na tangencijalnu ravninu. Kroz normalu na plohu se može definirati beskonačno mnogo ravnina koje sijeku plohu ljuske u ravninskoj krivulji koja se zove normalna presječna krivulja. Zakrivljenost te krivulje je jednaka zakrivljenosti plohe. Ako se promijeni orijentacija presječne ravnine, promijeni se i presječna krivulja i njena zakrivljenost pa se tako i mijenja zakrivljenost srednje plohe ljuske. Mijenjajući zakrivljenost plohe, može se pokazati da postoje dva međusobno okomita smjera koji daju ekstremne vrijednosti zakrivljenosti, maksimalnu i minimalnu. Te se zakrivljenosti zovu glavne zakrivljenosti plohe i označavaju s κ_1 i κ_2 . Njihov umnožak se naziva Gaussova zakrivljenost. Prema iznosu Gaussove zakrivljenosti, plohe se mogu podijeliti na:

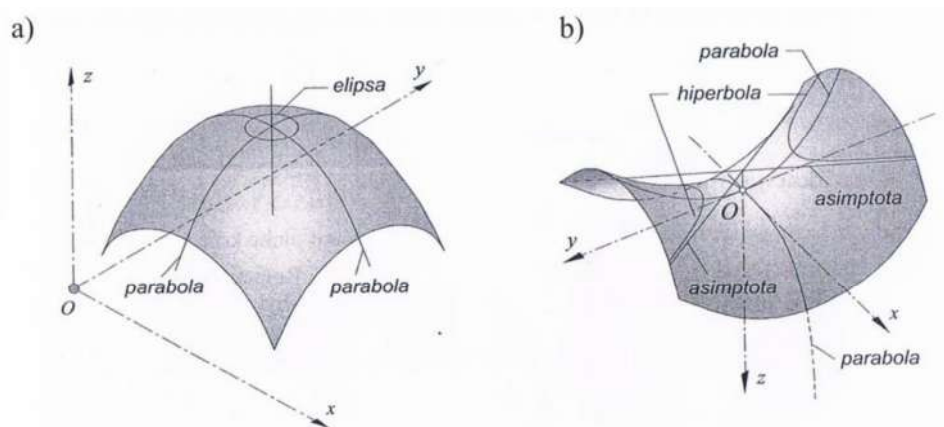
- jednostruko zakrivljene plohe nulte Gaussove zakrivljenosti:
 - ⇒ rotacijske – kružni valjak i kružni stožac,
 - ⇒ translacijske – kružni i opći valjak i stožac,

- dvostruko zakrivljene plohe pozitivne Gaussove zakrivljenosti:
 - ⇒ rotacijske – kugla, rotacijski elipsoid i paraboloid, jednostrani i dvostrani hiperboloid,
 - ⇒ translacijske – eliptički paraboloid,
- dvostruko zakrivljene plohe negativne Gaussove zakrivljenosti:
 - ⇒ rotacijske – jednostrani hiperboloid,
 - ⇒ translacijske – hiperbolni paraboloid, rotacijski hiperboloid,
- dvostruko zakrivljene plohe mješovite Gaussove zakrivljenosti:
 - ⇒ kružni torus, opći torus.

Neke rotacijske plohe su prikazane na slici 1.1., a translacijske na slici 1.2.



Slika 1.1. Rotacijske plohe [1]: a) valjak, b) stožac, c) kugla, d) hiperboloid, e) torus, f) opća rotacijska ploha



Slika 1.2. Translacijske plohe [1]: a) eliptični paraboloid, b) hiperbolni paraboloid

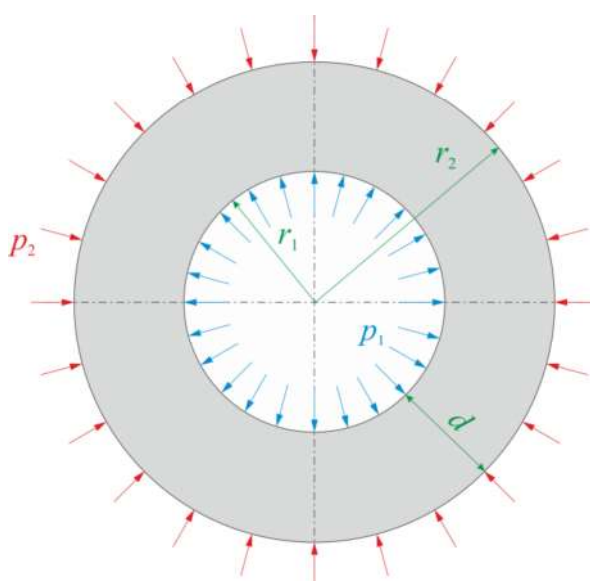
Raspodjela naprezanja po debljini stijenke ljuske je raspodijeljena po zakonu hiperbole. Ako su ljuske tanke, ta se hiperbola jako malo razlikuje od pravca pa se može pretpostaviti da se naprezanja po debljini ljuske mijenjaju po zakonu pravca. Tada se ta naprezanja mogu rastaviti na membransko naprezanje σ_m , koje je jednoliko raspoređeno po debljini ljuske, i fleksijsko naprezanje σ_f , koje se mijenja po linearnom zakonu od iznosa $+\sigma_f$ na jednoj stijenci do iznosa $-\sigma_f$ na drugoj stijenci, a na srednjoj plohi je jednako nuli.

Kod debelih ljuski je razlika hiperbole i pravca veća pa se naprezanje ne može tako pojednostaviti, već je za dobivanje naprezanja potrebno riješiti diferencijalnu jednadžbu ravnoteže elementa.

Debelostjene cijevi se često susreću u različitim granama strojarstva pa su zato i moguća različita opterećenja koja djeluju na njih. To su debele cilindrične ljuske koje su najčešće opterećene tlakom p_1 s unutarnje strane cijevi, tlakom p_2 s vanjske strane cijevi ili istovremeno tlakovima p_1 i p_2 s unutarnje i vanjske strane. Ono što im je svima zajedničko je da njihova debljina d mora biti veća od 10% srednjeg polumjera [2], odnosno mora vrijediti izraz:

$$d = r_2 - r_1 > 0,1 \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad (4)$$

gdje je r_1 unutarnji radijus cijevi, a r_2 vanjski radijus cijevi, kao što prikazuje slika 1.3.



Slika 1.3. Debelostjena cijev opterećena tlakom iznutra i izvana

Osim prema debljini stijenke, ljsuske se mogu podijeliti i na kratke i duge. Kod dugih cijevi vrijedi pretpostavka da rubni uvjeti jednog kraja ne utječu na pomake drugog kraja. Uvjet da bi se neka cijev mogla smatrati dugom proizlazi iz uvjeta da relativna greška rješenja diferencijalne jednadžbe savijanja cilindrične ljsuske mora biti manja od 5% [1]. Za materijale čiji Poissonov faktor iznosi $\nu = 0,3$, taj uvjet glasi:

$$l > 2,33 R \sqrt{\frac{d}{R}}, \quad (5)$$

gdje je l duljina cijevi, a R srednji radijus cijevi.

Takve cijevi često mogu biti opterećene naglim povećanjem tlaka, odnosno eksplozijom, što znači da u jako kratkom vremenskom periodu opterećenje postigne jako veliku vrijednost. Do takvog opterećenja može doći slučajno, na primjer ako kroz cjevovod struji neki zapaljivi plin koji se zapali i naglo eksplodira, ili namjerno, na primjer prilikom ispitivanja eksploziva.

1.1. Eksplozija

Eksplozija [3] je kemijska reakcija kod koje se oslobađa velika količina energije i dolazi do naglog povećanja volumena produkata. Kod eksplozije se događa nagli skok tlaka i temperature na mjestu gdje je nastala. Neki od mogućih uzroka eksplozije su:

- eksplozivi,
- nuklearne reakcije,
- nedostatak prostora u visokotlačnoj posudi,
- visokoenergetski električni luk itd.

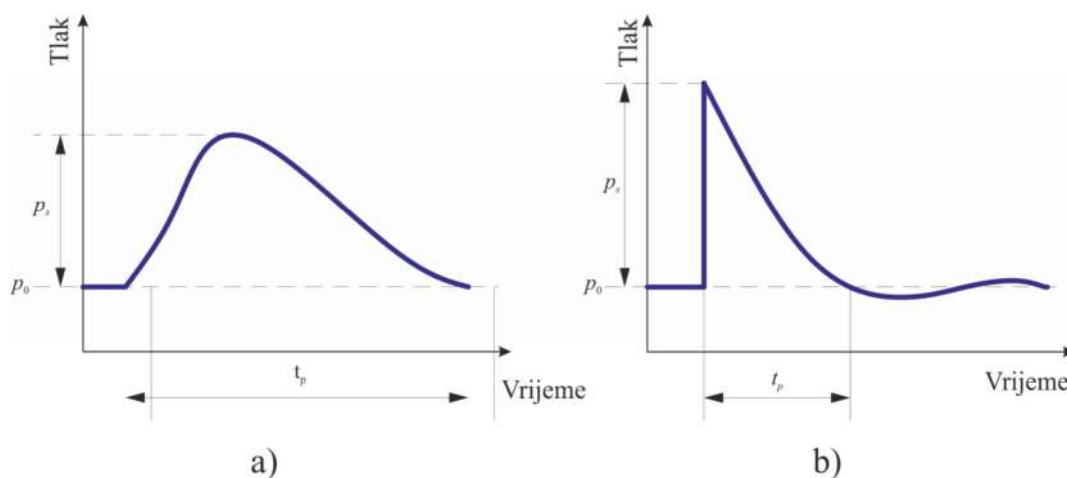
Parametri koji karakteriziraju eksplozivno opterećenje su:

- oblik udarnog ili kompresijskog vala,
- vrijeme porasta tlaka,
- maksimalni tlak p_s ,
- pozitivna faza trajanja t_p ,
- impuls $i_s = \frac{1}{2} p_s \cdot t_p$.

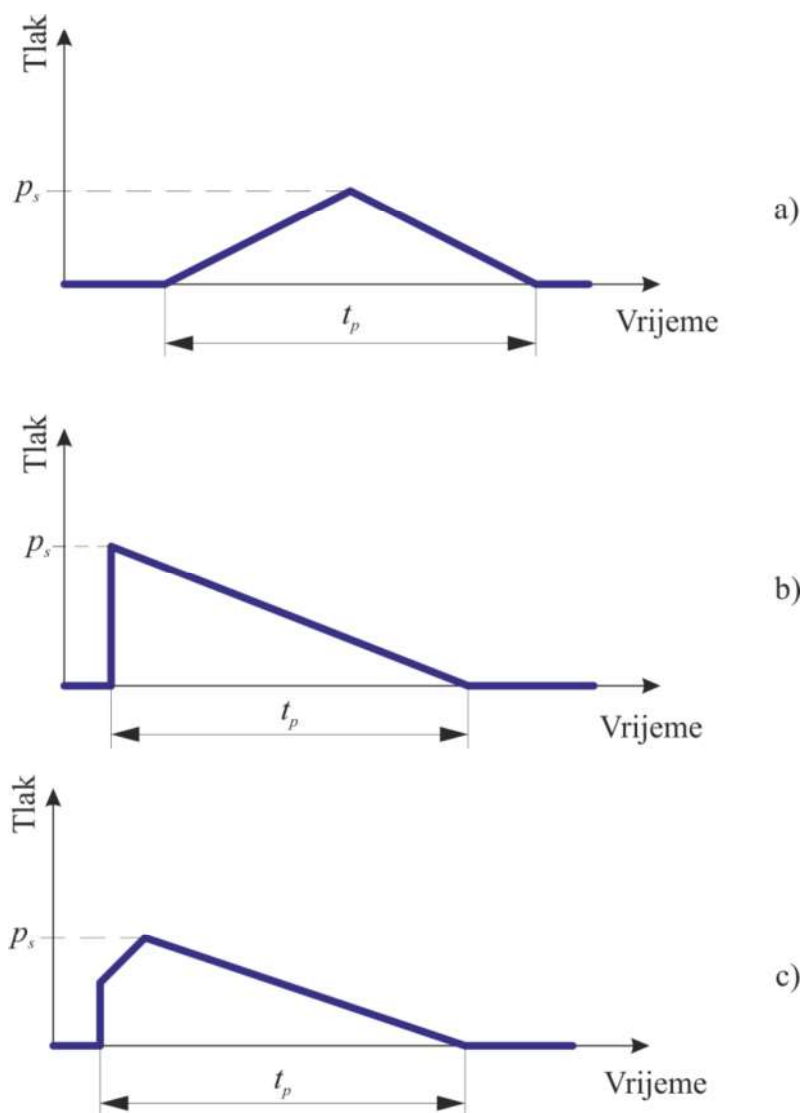
Postoje dvije vrste eksplozije: brzo sagorijevanje i detonacija. Razlikuju se u brzini širenja plamena, koja je kod brzog sagorijevanja u rasponu 0-1000 m/s, dok je kod detonacije u rasponu 1000-2000 m/s. S obzirom na veće brzine širenja plamena, kod detonacije se javljaju i puno veći tlakovi koji pritišću stijenke cijevi ili neke posude. Primjer brzog sagorijevanja je eksplozija plina, a primjer detonacije su eksplozije izazvane eksplozivima. Slika 1.4. prikazuje dijagrame vremenske promjene tlaka brzog sagorijevanja i detonacije, a slika 1.5. pojednostavljene dijagrame vremenske promjene tlaka brzog sagorijevanja, detonacije i kombinacije te dvije vrste, koji se koriste u inženjerskoj praksi, jer pojednostavljuju proračun, a ne utječu bitnije na rezultate dobivene proračunom.

U ovome radu će se proučavati utjecaj eksplozije na debelostjenu cijev, što znači da će se proučavati detonacija, odnosno slika 1.5.a), koja prikazuje dijagram opterećenja koji će se koristiti u proračunu. Za proučavanje eksplozije, potrebno je i odrediti omjer vremena eksplozije i vlastitog perioda $\frac{t_p}{T}$. S obzirom na taj omjer, definiraju se 3 domene [3]:

- impulzivna domena za $\frac{t_p}{T} \leq 0,4$,
- dinamička domena za $0,4 \leq \frac{t_p}{T} \leq 2,0$,
- kvazistatička domena za $\frac{t_p}{T} \geq 2,0$.



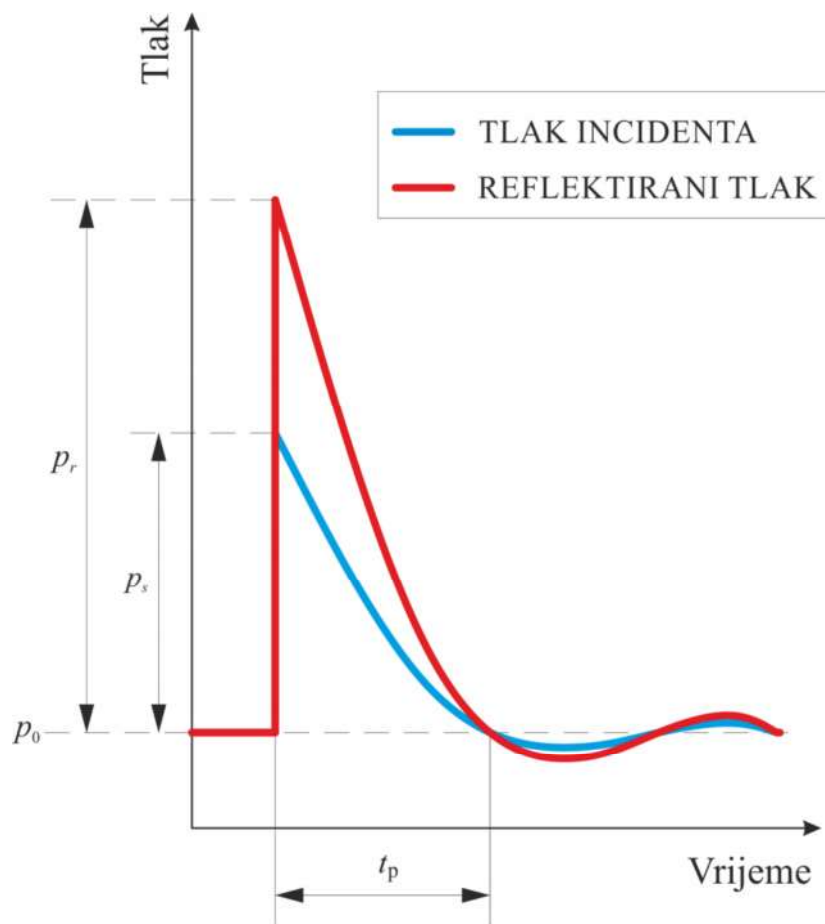
Slika 1.4. Dijagrami karakteristike eksplozije: a) brzo sagorijevanje, b) detonacija



Slika 1.5. Pojednostavljeni dijagrami karakteristike eksplozije: a) brzo sagorijevanje, b) detonacija, c) kombinirano

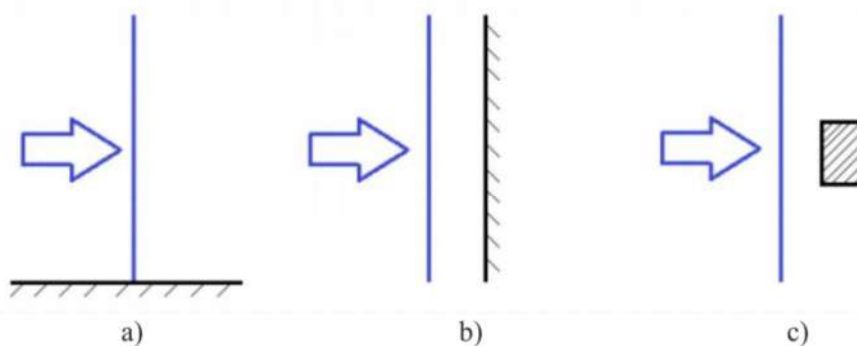
Kako je cilj rada dinamička analiza debelostjene cijevi kod eksplozivnog opterećenja, pomoću tog omjera će se određivati duljina trajanja analize, tj. pozitivna faza trajanja mora biti takva da taj omjer ima vrijednost između 0,4 i 2,0.

Kada udarni val naiđe na prepreku, tj. stijenku cijevi, on se reflektira u suprotnom smjeru. Tlak kojim udarni val nailazi na prepreku se naziva tlak incidenta, a odbijeni tlak se naziva reflektirani tlak. Reflektirani tlak ima veći iznos od tlaka incidenta, a ovisi o kutu između valne fronte i prepreke na koju nailazi, vrsti vala i obliku prepreke. Dijagrami tlaka incidenta i reflektiranog tlaka su prikazani na slici 1.6.



Slika 1.6. Dijagram tlaka incidenta i reflektiranog tlaka

Za proračun je potrebno odabrati koji će se tlak koristiti kao opterećenje. To ovisi o smjeru vala i obliku površine od koje se on reflektira. Na slici 1.7. su prikazana tri slučaja: smjer širenja vala je paralelan s površinom na koju nailazi, smjer širenja vala je okomit na površinu na koju nailazi i smjer širenja vala je okomit na površinu objekta malih dimenzija na koji nailazi.



Slika 1.7. Smjer širenja udarnog vala i površina na koju nailazi su: a) paralelni, b) okomiti, c) okomiti, a površina je malih dimenzija [3]

Ovisno o smjeru širenja udarnog vala i položaju površine na koju on nailazi, odabire se tlak opterećenja. U slučaju prikazanom na slici 1.7.a) udarni val se širi iznad velike površine bez prepreka pa je iznos tlaka kojim je površina opterećena jednak tlaku incidenta. Slučaj na slici 1.7.b) prikazuje udarni val čiji je smjer širenja okomit na veliku površinu na koju nailazi i ako se zanemari utjecaj rubova (zbog velikih dimenzija površine), površina je opterećena reflektiranim tlakom. Slučaj na slici 1.7.c) prikazuje udarni val koji nailazi na prepreku malih dimenzija pa je razlika tlakova ispred i iza te površine jako mala i može se zanemariti. U tom slučaju se za opterećenje uzima tlak incidenta.

U slučaju duge debelostjene cijevi opterećene tlakom iznutra, udarni val udara u stijenku cijevi u smjeru okomitom na stijenku velikih dimenzija pa se za taj primjer uzima slučaj prikazan na slici 1.7.b) i cijev se opterećuje reflektiranim tlakom.

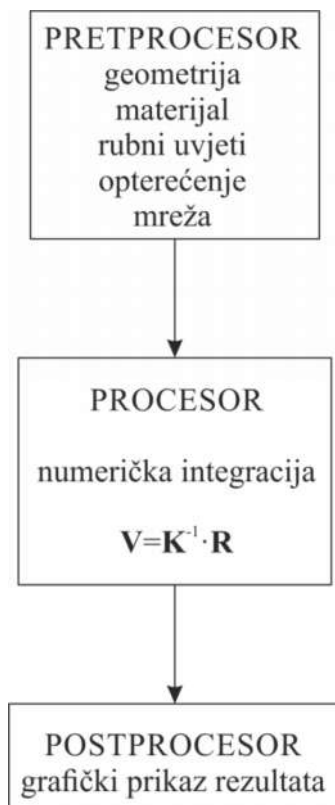
1.2. O metodi konačnih elemenata

Problemi mehanike deformabilnih tijela koji se rješavaju klasičnim metodama rješavanja se temelje na rješavanju diferencijalnih jednadžbi. U općem slučaju je točno rješenje tih diferencijalnih jednadžbi jako teško dobiti, moguće je samo za neke jednostavne modele. Kod kompliciranijih modela se koriste numeričke metode kojima se dobije približno rješenje tih diferencijalnih jednadžbi. Neke od numeričkih metoda za približno rješavanje diferencijalnih jednadžbi su: metoda konačnih razlika, metoda konačnih volumena, metoda konačnih elemenata i bezmrežne metode.

Metoda konačnih elemenata [4] je numerička metoda kod koje se neki kontinuum koji ima beskonačno stupnjeva slobode podijeli na određeni broj konačnih elemenata koji imaju konačni broj stupnjeva slobode. Time se više ne rješavaju diferencijalne jednadžbe, već sustav algebarskih jednadžbi. Ti konačni elementi spajaju se u čvorovima, koji imaju, ovisno o vrsti elementa, određeni broj stupnjeva slobode. Polja fizikalnih veličina (pomaka, naprezanja, deformacija itd.) opisuju se interpolacijskim polinomima. Jednadžbe se najprije izvedu za svaki konačni element posebno i nakon toga se transformiraju u globalni sustav jednadžbi diskretiziranog modela. Da bi se dobilo rješenje bliže analitičkom, potrebno je povećati broj stupnjeva slobode modela, što se postiže povećanjem broja konačnih elemenata. Ako se model diskretizira velikim brojem konačnih elemenata, globalni sustav jednadžbi ima veliki broj nepoznanica pa je za njegovo rješavanje u kratkom vremenskom periodu potrebno koristiti neke od računalnih programa.

Postoji više različitih računalnih programa za rješavanje problema metodom konačnih elemenata, koji imaju neke razlike, ali svi rade po sličnoj shemi, koju prikazuje slika 1.8. Prema toj slici, programski paketi su podijeljeni u tri cjeline:

- pretprocesor,
- procesor i
- postprocesor.



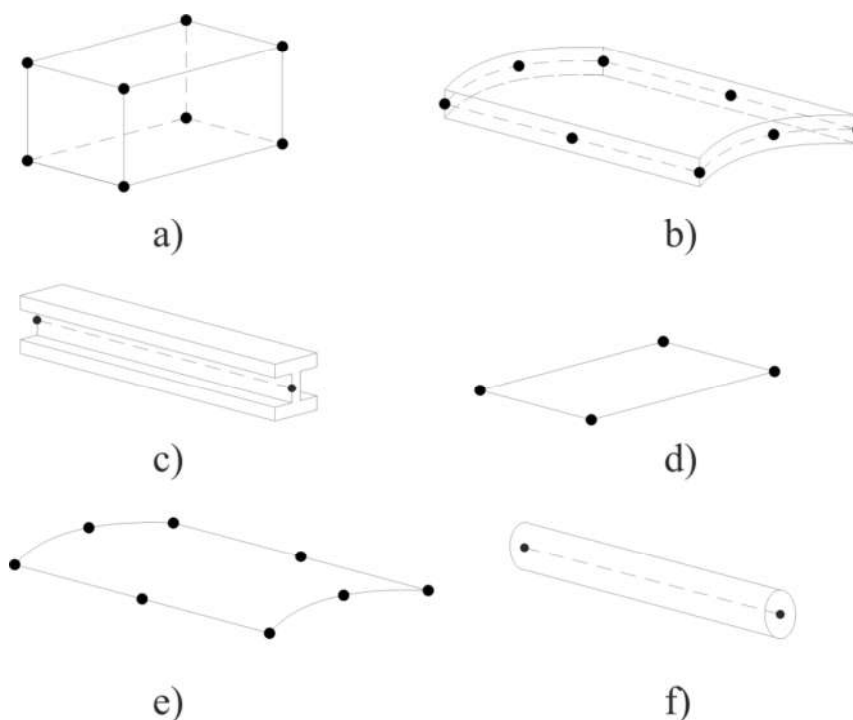
Slika 1.8. Shematski prikaz programskog paketa

Najprije se pokreće pretprocesor u kojem se geometrija modela definira u samom programu ili se učitava iz nekog CAD programa. Nakon toga se zadaju svojstva materijala potrebna za određenu vrstu analize, definiraju se rubni uvjeti i opterećenje proračunskog modela. Na kraju se još odabire broj i vrsta konačnih elemenata i generira mreža konačnih elemenata. Nakon toga se u procesoru postavlja globalni sustav jednadžbi konačnih elemenata iz kojeg se izračunavaju polja fizikalnih veličina. Rezultati koji su izračunati u procesoru se na kraju grafički prikazuju u postprocesoru.

1.2.1. Vrste konačnih elemenata

Svaku vrstu konačnih elemenata [5] karakterizira pet stvari: vrsta elementa, stupnjevi slobode, broj čvorova, formulacija i integracija. Prema tome svaki element u *Abaqusu* i dobiva svoje ime (npr. S4R, B23, C3D8,...).

Vrsta elemenata se određuje prema geometriji modela koju je potrebno diskretizirati. Neke od najčešće korištenih vrsta elemenata su: kontinuumski, ljuskasti, gredni, kruti, membranski i štapni elementi. Te vrste elemenata su prikazane na slici 1.9.

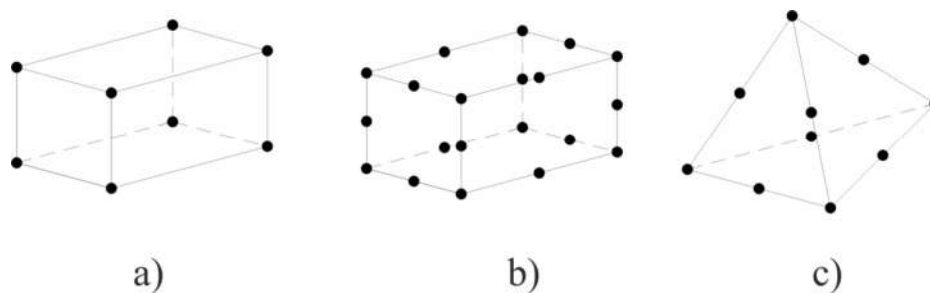


Slika 1.9. Vrste elemenata: a) kontinuumski, b) ljuskasti, c) gredni, d) kruti, e) membranski, f) štapni konačni elementi

Stupnjevi slobode konačnih elemenata su varijable koje je potrebno izračunati u analizi. Kod analize napreznja i pomaka su to u općem slučaju tri translacijska i tri rotacijska pomaka u čvorovima konačnog elementa. Kod analize prijenosa topline je stupanj slobode temperatura u čvoru konačnog elementa. Moguće je i spojiti te dvije analize pa su tada stupnjevi slobode temperatura, translacijski i rotacijski pomaci u čvorovima.

Stupnjevi slobode se računaju u čvorovima konačnog elementa, a da bi se dobio iznos u nekoj drugoj točki elementa, potrebno ih je interpolirati. Interpolacija je određena brojem čvorova konačnog elementa pa se tako razlikuju elementi prvog reda, elementi drugog reda i modificirani elementi drugog reda.

Elementi prvog reda ili linearni elementi imaju čvorove samo u kutovima elementa i koriste linearnu interpolaciju u svim smjerovima. Elementi drugog reda ili kvadratni elementi imaju čvorove u kutovima elementa i na polovicama njihovih stranica i koriste kvadratnu interpolaciju. Modificirani elementi drugog reda su trokutni ili tetraedarski elementi s čvorovima u kutovima i na polovicama stranica konačnog elementa i koriste modificiranu interpolaciju drugog reda. Slika 1.10. prikazuje primjere različitih elemenata s obzirom na broj čvorova i red interpolacije.

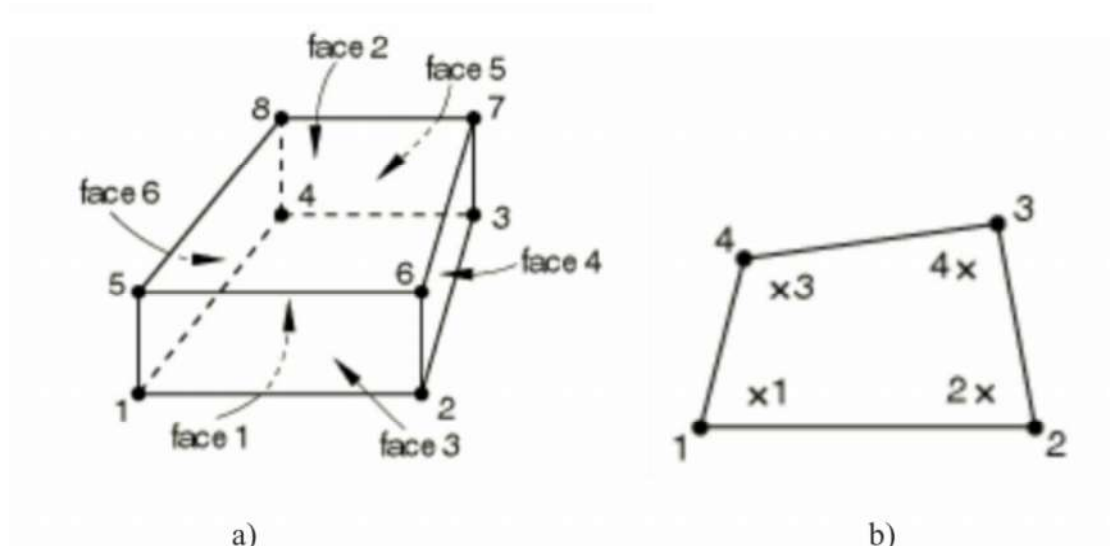


Slika 1.10. Konačni elementi s obzirom na broj čvorova i red interpolacije: a) linearni element, b) kvadratni element, c) modificirani element drugog reda

Formulacija elementa govori o matematičkoj teoriji korištenoj za definiranje ponašanja elementa. Prema tome se razlikuju Lagrangeovi i Eulerovi elementi. Oni se razlikuju u tome što se Lagrangeovi elementi deformiraju zajedno s materijalom, dok su Eulerovi elementi nepromjenjivi u vremenu i materijal teče kroz njih. Zato se Eulerovi elementi češće koriste u simulacijama strujanja fluida ili analizi prijenosa topline.

Integracija se u *Abaqusu* provodi numeričkim metodama. Kod najvećeg broja konačnih elemenata se koristi Gaussova integracija, kod koje se odziv materijala računa u točkama integracije svakog elementa. Kod nekih se elemenata koristi reducirana integracija, koja može dati uštedu na vremenu, ali kod nekih problema može dati lošije rezultate od potpune integracije.

Slika 1.11.a) prikazuje heksaedarski element prvog reda, koji će se koristiti u ovome radu. Njegova oznaka u *Abaqusu* je C3D8, a ta oznaka proizlazi iz toga da su to kontinuumski, trodimenzijski elementi s 8 čvorova po elementu. Takvi elementi imaju u svakom čvoru tri stupnja slobode i to su tri translacijska pomaka. To su također elementi koji koriste Lagrangeovu formulaciju i potpunu integraciju. Nepoznate veličine se izračunavaju u točkama integracije i nakon toga se interpolacijom računa iznos veličina u ostalim točkama elementa. Slika 1.11.b) prikazuje položaj točaka integracije na jednoj od stranica elementa.



Slika 1.11. a) C3D8 element, b) točke integracije [5]

1.3. Metode integracije

U *Abaqusu* se koriste dvije metode integracije: eksplicitna i implicitna [6].

1.3.1. Implicitna metoda

Integracija implicitnom metodom se provodi na način da se za računanje nepoznatih veličina u nekom trenutku $t + \Delta t$ koriste poznate veličine izračunate u trenutku t i nepoznate veličine iz trenutka $t + \Delta t$. Drugim riječima, nepoznate veličine koje je potrebno izračunati se nalaze i s lijeve i s desne strane jednadžbe pa je za rješavanje potrebno koristiti iteracijske postupke. Iteracijski postupci [7] koji se koriste u *Abaqusu* su Newton-Raphsonov iteracijski postupak i Riks-Wempner-Wesselsov iteracijski postupak. Najveća razlika u tim postupcima je u tome da se kod Newton-Raphsonovog iteracijskog postupka inkrementalni pomak računa za konstantni parametar opterećenja, dok se kod Riks-Wempner-Wesselsovog iteracijskog postupka istovremeno mijenjaju i inkrementalni pomak i parametar opterećenja.

Implicitna metoda se koristi u softverskom proizvodu *Abaqus/Standard*. Vrste problema koje se mogu u njemu analizirati su:

- linearna i nelinearna statika,
- linearna dinamika,
- nelinearna dinamika s niskom brzinom opterećivanja,
- nelinearni prijelaz topline,

- spojena analiza temperatura-pomak (kvazistatika),
- spojena termalno-električna analiza,
- problemi difuzije mase.

Prednosti *Abaqus/Standard*-a su da može rješavati probleme u stanju statičke ravnoteže (vanjske sile jednake unutarjima), može se koristiti veliki broj tipova konačnih elemenata, ima dobar i provjeren algoritam za kontakte, nema matematički ograničenu veličinu vremenskog inkrementa i veličina vremenskog inkrementa je ograničena samo željenom točnošću rezultata.

1.3.2. *Eksplisitna metoda*

Kod eksplisitne metode se nepoznate veličine u trenutku $t + \Delta t$ računaju samo iz poznatih veličina izračunatih u trenutku t , tj. sve nepoznate veličine se nalaze na lijevoj strani jednadžbe, a poznate na desnoj. Zbog toga kod eksplisitne metode nije potrebno koristiti iterativne postupke. Eksplisitna metoda koja se najčešće koristi u programskim paketima je Euler-forward metoda i ona se koristi i u *Abaqusu*.

Eksplisitna metoda se koristi u softverskom proizvodu *Abaqus/Explicit*. Vrste problema koje se mogu analizirati ovom metodom su:

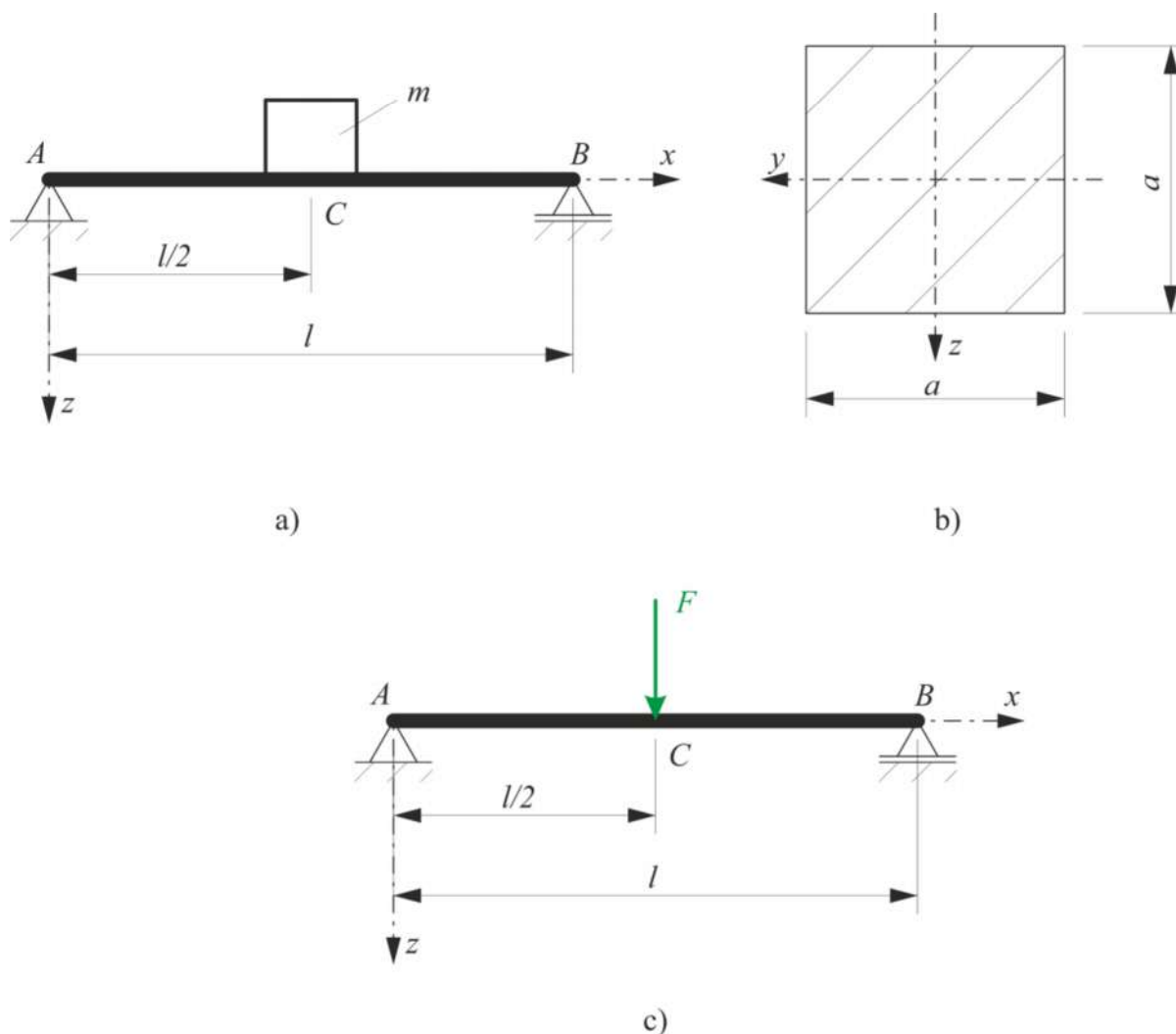
- dinamika s velikom brzinom opterećivanja (kratki period),
- nelinearna, kvazistatička analiza s velikim deformacijama,
- simulacije velikih diskontinuiteta nakon izvijanja i loma,
- spojena dinamička analiza temperatura-pomak.

Prednosti *Abaqus/Explicit*-a su da daje bolja rješenja u dinamičkoj analizi s velikom brzinom opterećivanja, ima snažan algoritam kontakta koji modelu ne dodaje dodatne stupnjeve slobode, potrebno mu je manje prostora na disku i često daje bolja rješenja velikih problema, a sadrži i mnoge mogućnosti za lakšu simulaciju kvazistatičkih problema.

Najveći nedostatak eksplisitne metode u odnosu na implicitnu je da je potrebno odabrati stabilni vremenski korak koji ovisi o najvišoj vlastitoj frekvenciji sustava i veličini konačnih elemenata, jer smanjenjem veličine konačnih elemenata, smanjuje se i stabilni vremenski korak. Međutim, *Abaqus/Explicit* primjenjuje u tijeku analize automatsko određivanje vremenskog koraka pa su svi inkrementi stabilni. Također, u *Abaqus/Explicit*-u je moguće koristiti samo konačne elemente prvog reda.

2. VERIFIKACIJA PRORAČUNSKOG MODELA

Za verifikacijski model je odabrana greda duljine l i kvadratnog poprečnog presjeka, kao što je prikazano na slici 2.1. Na lijevom kraju grede se nalazi nepomični oslonac (spriječeni su pomaci u smjerovima sve 3 koordinatne osi), a na desnom kraju grede je pomični oslonac (jedini dopušteni pomak je u smjeru uzdužne osi grede, ostala 2 su spriječena). Greda je u sredini opterećena koncentriranom silom F , koja predstavlja težinu nekog utega mase m koji je mirno postavljen u sredinu grede i nakon toga naglo ispušten. Na slici 2.1.c) je prikazan pojednostavljeni verifikacijski model, gdje je masa utega zamijenjena koncentriranom silom koja djeluje na polovici grede, čiji je iznos jednak težini utega koji pada na gredu. Takav model će se koristiti u proračunu.



Slika 2.1. a) verifikacijski model, b) poprečni presjek grede, c) pojednostavljeni verifikacijski model

Podaci kojima se opisuje geometrija grede su:

$$\begin{aligned}l &= 1000 \text{ mm}, \\a &= 40 \text{ mm}.\end{aligned}\tag{6}$$

Materijal grede koji će se koristiti u proračunu je opći konstrukcijski čelik St 70-2. Svojstva materijala potrebna za proračun su:

$$\begin{aligned}E &= 210\,000 \text{ MPa}, \\v &= 0,3, \\ \rho &= 7850 \text{ kg/m}^3,\end{aligned}\tag{7}$$

gdje je E modul elastičnosti, v je Poissonov faktor, a ρ gustoća materijala.

Sila koja opterećuje gredu, tj. težina utega iznosi:

$$F = 2500 \text{ N}.\tag{8}$$

Potrebno je analitički i numerički pomoću metode konačnih elemenata odrediti maksimalni dinamički progib grede, tj. vertikalni pomak točke C u kojoj djeluje sila.

2.1. Analitički proračun

Za izračun dinamičkog progiba [2], potrebno je najprije izračunati statički progib grede $w_{C, \text{st}}$. Statički progib predstavlja vertikalni pomak točke C kada se uteg vrlo lagano stavlja na gredu. Prema drugom Castiglianovom teoremu, za linearno-elastično tijelo vrijedi relacija:

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = q_i,\tag{9}$$

gdje je U energija deformiranja, a q_i je poopćeni pomak točke u kojoj djeluje poopćena sila Q_i u smjeru djelovanja te sile. U zadanom slučaju vrijedi za poopćenu silu i poopćeni pomak:

$$\begin{aligned}Q_i &= F, \\q_i &= w_{C, \text{st}},\end{aligned}\tag{10}$$

pa izraz (9) za ovaj slučaj glasi:

$$w_{C, \text{st}} = \frac{\partial U}{\partial F}. \quad (11)$$

Energija deformiranja u općem slučaju opterećenja grede ima oblik:

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AE} \int_l N^2 dx + \frac{k_y}{GA} \int_l Q_y^2 dx + \frac{k_z}{GA} \int_l Q_z^2 dx + \frac{1}{EI_y} \int_l M_y^2 dx + \frac{1}{EI_z} \int_l M_z^2 dx + \frac{1}{GI_p} \int_l M_t^2 dx \right), \quad (12)$$

gdje prvi integral označava energiju osno-opterećene grede, drugi i treći integral energiju deformiranja grede pri smicanju, četvrti i peti integral energiju deformiranja pri savijanju grede i posljednji integral energiju deformiranja grede pri uvijanju.

Prema slici 2.1. je vidljivo da je za promatrani slučaj dominantno savijanje grede oko osi y pa najveći utjecaj na energiju deformiranja ima upravo to opterećenje, dok se ostale energije deformiranja mogu zanemariti. Prema tome, izraz za izračunavanje energije deformiranja u ovom slučaju glasi:

$$U = \frac{2}{2EI_y} \int_0^{l/2} M_y^2 dx, \quad (13)$$

gdje je I_y moment tromosti poprečnog presjeka grede oko osi y i za slučaj kvadratnog poprečnog presjeka i zadane dimenzije (6) on iznosi [8]:

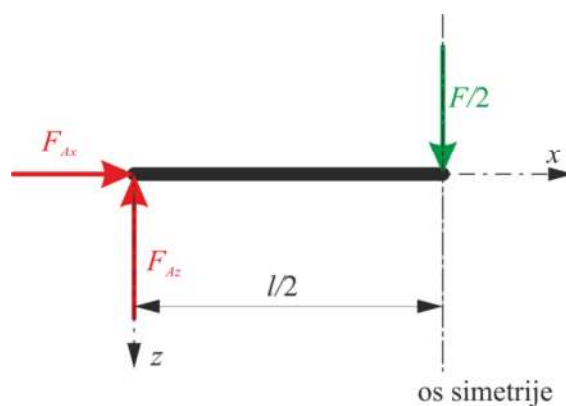
$$I_y = \frac{a^4}{12} = \frac{40^4}{12} = 2,133 \cdot 10^5 \text{ mm}^4. \quad (14)$$

Broj 2 u brojniku izraza (13) se nalazi zbog simetričnosti problema pa se može izračunati energija deformiranja polovice grede i njezina vrijednost udvostručiti, zbog čega su i granice integracije 0 i $l/2$. Za izračunavanje momenta savijanja M_y je potrebno najprije osloboditi gredu veza i izračunati nepoznate reakcije u osloncu A prema slici 2.2.

Prema slici 2.2., postavlja se ravnoteža sila u smjeru osi x i z i iz nje se izračunavaju nepoznate sile u osloncu:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, \\ F_{Ax} &= 0,\end{aligned}\quad (15)$$

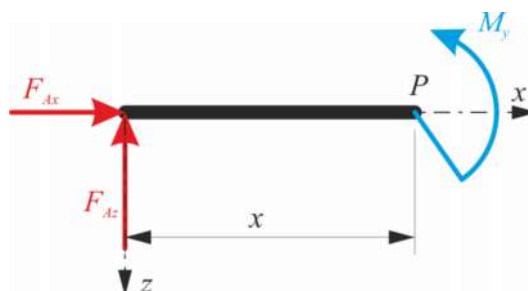
$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0, \\ -F_{Az} + \frac{F}{2} &= 0, \\ F_{Az} &= \frac{F}{2}.\end{aligned}\quad (16)$$



Slika 2.2. Polovica grede oslobođena veza

Moment savijanja M_y na nekoj udaljenosti x od lijevog kraja grede se izračunava metodom presjeka, prema slici 2.3. i iznosi:

$$\begin{aligned}\sum M_P &= 0, \\ M_y - F_{Az} \cdot x &= 0, \\ M_y &= F_{Az} \cdot x = \frac{Fx}{2}.\end{aligned}\quad (17)$$



Slika 2.3. Unutarnji moment u proizvoljnom presjeku grede

Uvrštavanjem izraza (17) u izraz (13), dobije se izraz za energiju deformiranja grede opterećene na savijanje oko osi y :

$$U = \frac{1}{EI_y} \int_0^{l/2} \left(\frac{Fx}{2} \right)^2 dx. \quad (18)$$

Uvrštavanjem izraza (18) u izraz (11), dobije se izraz za računanje statičkog progiba točke C zadane grede:

$$w_{C, \text{st}} = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial}{\partial F} \left[\frac{1}{EI_y} \int_0^{l/2} \left(\frac{Fx}{2} \right)^2 dx \right]. \quad (19)$$

Nakon integriranja i deriviranja izraza (19) dobije se konačan izraz za računanje statičkog progiba točke C :

$$w_{C, \text{st}} = \frac{Fl^3}{48EI_y}. \quad (20)$$

Izraz (20) koji je izveden u proračunu je jednak izrazu za maksimalni statički progib grede na dva oslonca i opterećene koncentriranom silom u sredini koji se može pronaći u raznim inženjerskim priručnicima.

Uvrštavanjem zadanih podataka (7) i (8) te izračunatog momenta tromosti poprečnog presjeka (14), statički progib točke C iznosi:

$$w_{C, \text{st}} = 1,16 \text{ mm}. \quad (21)$$

Dinamički progib grede koji nastane udarom nekog tijela u gredu izračunava se približnim proračunom udarnih naprezanja. Udarom nekog tijela u elastičnu gredu, greda se deformira. Prilikom te deformacije, raste energija deformiranja grede i njezina kinetička energija, dok se kinetička i potencijalna energija udarnog tijela smanjuju, sve do trenutka kada je dinamički progib grede najveći i iznosi $w_{C, \text{din}}$. U trenutku kada dinamički progib dostigne maksimalni iznos, miruju i greda i udarno tijelo, što znači da se sva kinetička i potencijalna energija udarnog tijela pretvorila u energiju deformiranja grede, što se matematički može zapisati kao:

$$E_{p, \text{uteg}} = U_{\text{greda}},$$

$$F_{st} (h + w_{C, \text{din}}) = \frac{1}{2} F_{\text{din}} w_{C, \text{din}}, \quad (22)$$

gdje je F_{st} statička sila koja je jednaka težini udarnog tijela mase m ($m \cdot g$), odnosno zadana sila F , h je visina s koje uteg pada na gredu, a F_{din} je dinamička sila, koja ima najveću vrijednost u trenutku najvećeg dinamičkog progiba i iznosi:

$$F_{\text{din}} = k_f w_{C, \text{din}}, \quad (23)$$

gdje je k_f konstanta fleksijske opruge, koja se računa prema izrazu:

$$k_f = \frac{3EI_y}{l^3}. \quad (24)$$

Statička sila se može računati i kao:

$$F_{st} = k_f w_{C, \text{st}}. \quad (25)$$

Uvrštavanjem izraza (23) i (25) u (22) i sređivanjem, dobije se kvadratna jednadžba po varijabli $w_{C, \text{din}}$:

$$w_{C, \text{din}}^2 - 2w_{C, \text{st}} w_{C, \text{din}} - 2h w_{C, \text{st}} = 0, \quad (26)$$

čijim rješavanjem se dobije rješenje za dinamički progib grede:

$$w_{C, \text{din}} = w_{C, \text{st}} \pm \sqrt{w_{C, \text{st}}^2 + 2h w_{C, \text{st}}}. \quad (27)$$

Budući da fizikalnog smisla ima samo rješenje kada je $w_{C, \text{din}} > 0$, tj. opterećena točka grede se pomiče u pozitivnom smjeru osi z , jasno je da se za rješenje uzima ono s pozitivnim predznakom ispred člana pod korijenom pa konačan izraz za dinamički progib točke C nakon sređivanja glasi:

$$w_{C, \text{din}} = w_{C, \text{st}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{w_{C, \text{st}}}} \right). \quad (28)$$

Kako je zadatkom zadano da je uteg postavljen na gredu i nakon toga naglo ispušten, jasno je da je visina h s koje je uteg ispušten jednaka:

$$h = 0. \quad (29)$$

Uvrštavanjem vrijednosti statičkog progiba (21) i visine h (29) u izraz (28) dobije se dinamički progib grede koji iznosi:

$$w_{C, \text{din}} = 2w_{C, \text{st}} = 2,32 \text{ mm}. \quad (30)$$

Nakon analitičkog proračuna se provodi numerički proračun i numeričko rješenje se uspoređuje s analitičkim rješenjem (30).

2.2. Numerički proračun

Numerički proračun se provodi u programskom paketu *Abaqus* [5], koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Najprije je napravljena statička analiza da bi se ispitala konvergencija rješenja i nakon toga je na mreži konačnih elemenata kod koje je rješenje konvergiralo napravljena dinamička analiza.

Korišteni su heksaedarski elementi prvog reda, čija je oznaka u *Abaqusu* C3D8, jer heksaedarski elementi dobro opisuju geometriju grede, a koriste se elementi prvog reda, jer dinamička analiza uz primjenu eksplicitne metode ne podržava elemente drugog reda.

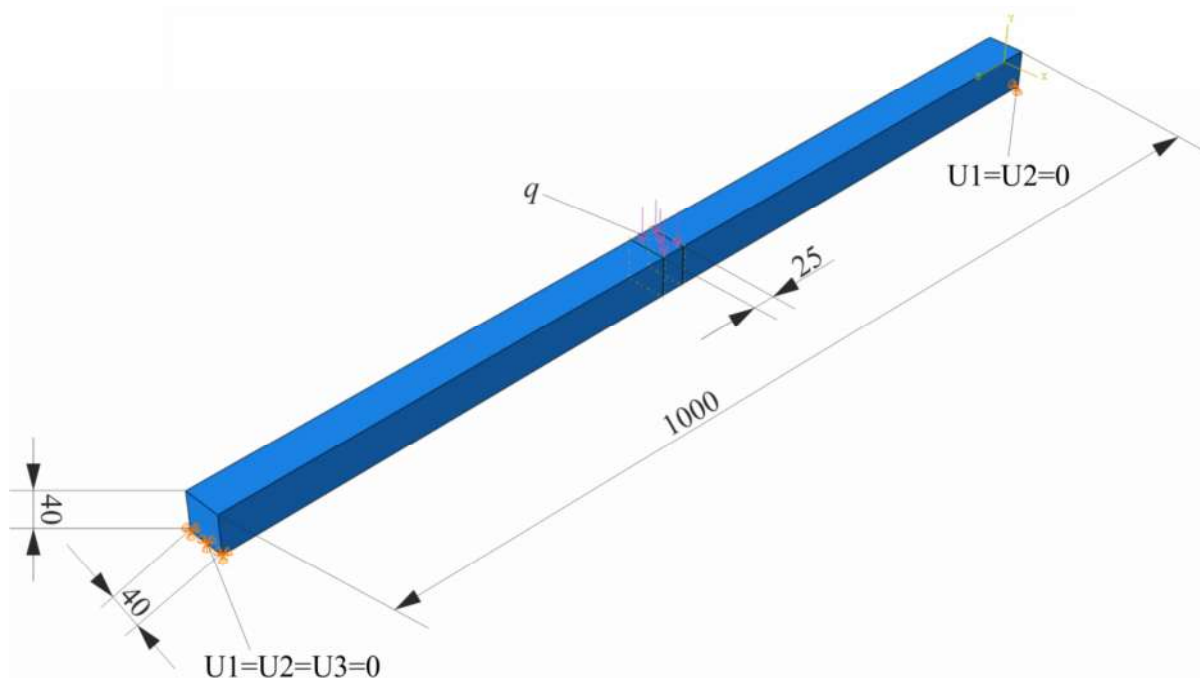
Greda je modelirana kao 3D tijelo, jednakih dimenzija kao u analitičkom proračunu (6) i prikazana slikom 2.1. Lijevi kraj grede je oslonjen na nepomični oslonac, a desni kraj na pomični oslonac koji dopušta samo pomak u smjeru uzdužne osi grede.

Kako je u analitičkom proračunu greda zadana kao 2D tijelo, opterećenje je koncentrirana sila koja djeluje u točki. U trodimenzijskom modelu bi se to preslikalo u liniju, ali tada bi se pojavio singularitet, jer je jedna dimenzija opterećenja beskonačno mala pa je to opterećenje potrebno zamijeniti kontinuiranim opterećenjem koje djeluje na nekoj konačnoj površini dovoljno maloj u odnosu na duljinu grede da se može promatrati kao da djeluje na jednoj liniji. Rezultantna sila tog opterećenja mora biti jednaka sili zadanoj izrazom (8).

Odabrane dimenzije površine na kojoj djeluje opterećenje su 25×40 mm pa kontinuirano opterećenje mora iznositi:

$$q = \frac{F}{A} = \frac{2500}{25 \cdot 40} = 2,5 \text{ N/mm}^2. \quad (31)$$

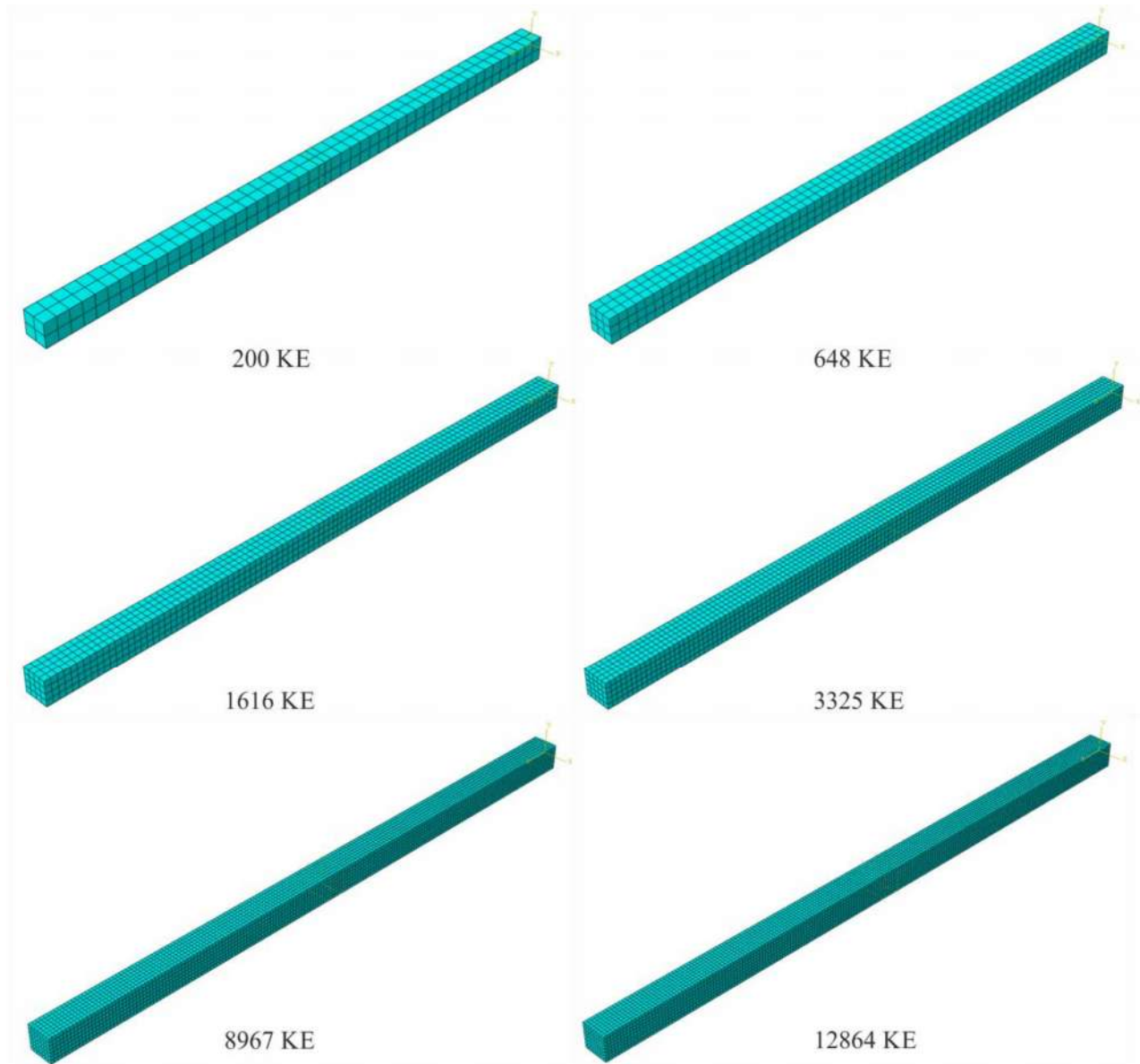
Slika 2.4. prikazuje opterećenje i rubne uvjete grede. Potrebno je odrediti maksimalni dinamički progib grede pri zadanom opterećenju.



Slika 2.4. Opterećenje i rubni uvjeti verifikacijskog modela

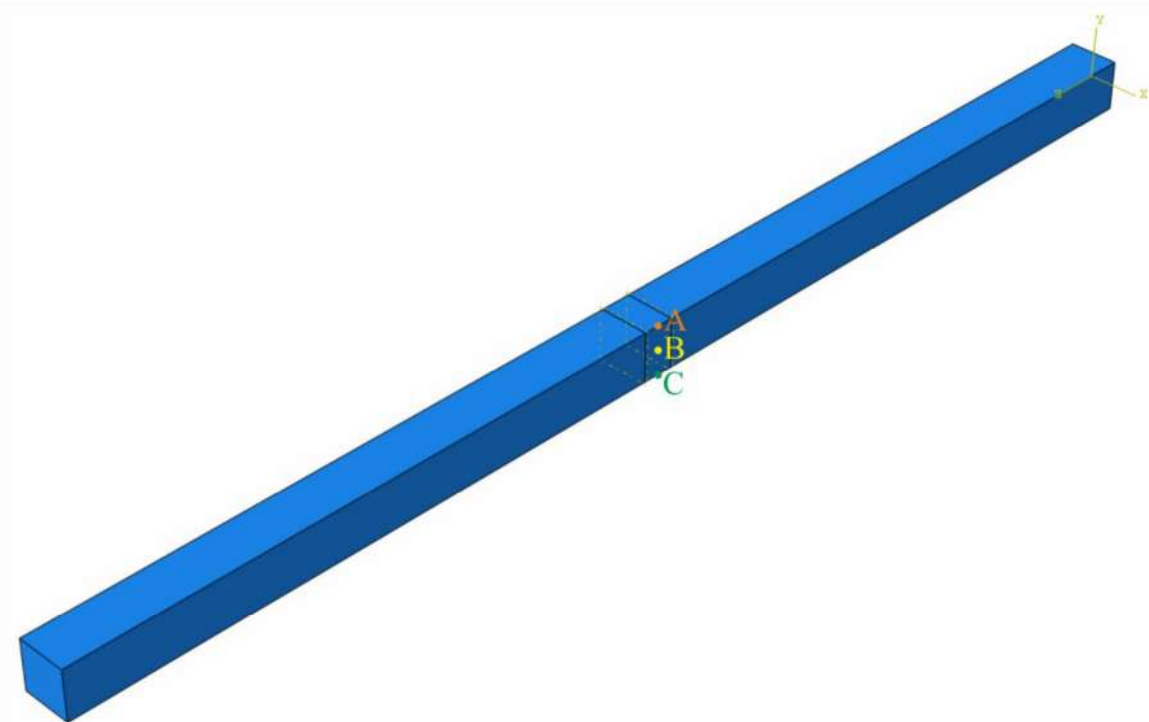
2.2.1. Konvergencija rješenja statičkog progiba

Radi uštede vremena, konvergencija rješenja je napravljena na statičkoj analizi korištenjem različitog broja C3D8 elemenata. Slika 2.5. prikazuje korištene mreže konačnih elemenata, u ovisnosti o broju konačnih elemenata (KE). Korištene su diskretizacije sa šest različitih mreža konačnih elemenata, koje se razlikuju po broju elemenata po duljini, širini i visini grede, te po veličini konačnih elemenata.



Slika 2.5. Mreže konačnih elemenata

Tablica 2.1. prikazuje rezultate vertikalnog statičkog pomaka grede dobivene korištenjem različitog broja konačnih elemenata. Progib se računa u 3 točke, na gornjem rubu (točka *A*), u sredini grede (točka *B*) i na donjem rubu (točka *C*), a položaji tih točaka su prikazani na slici 2.6.

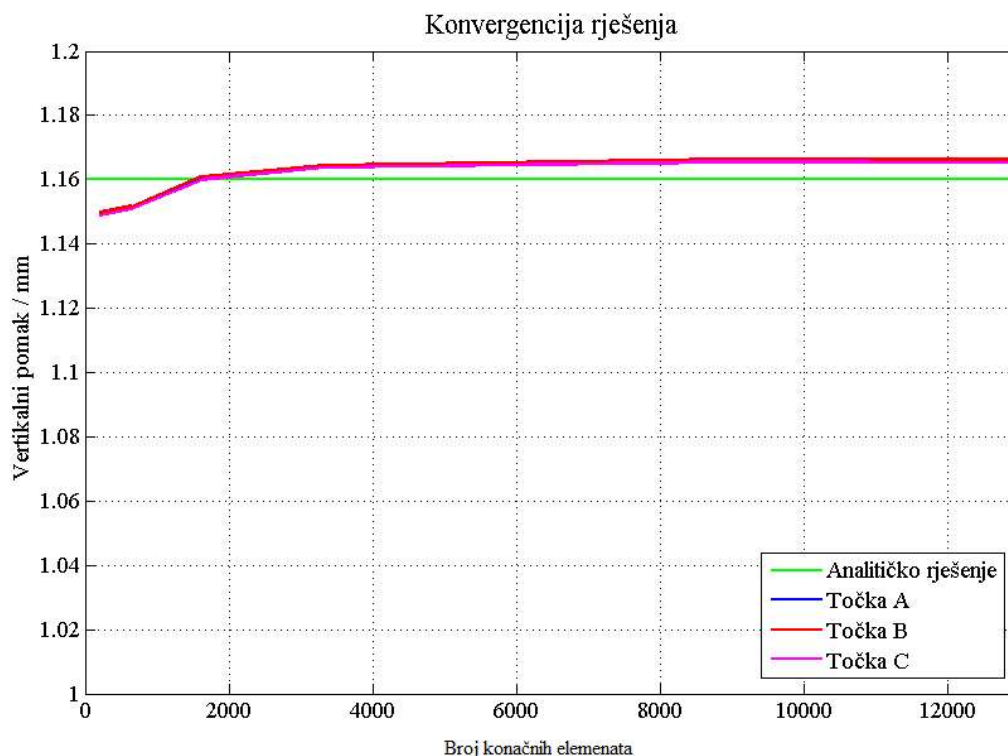


Slika 2.6. Točke u kojima se računa progib grede

Tablica 2.1. Vertikalni pomak grede diskretizirane C3D8 konačnim elementima

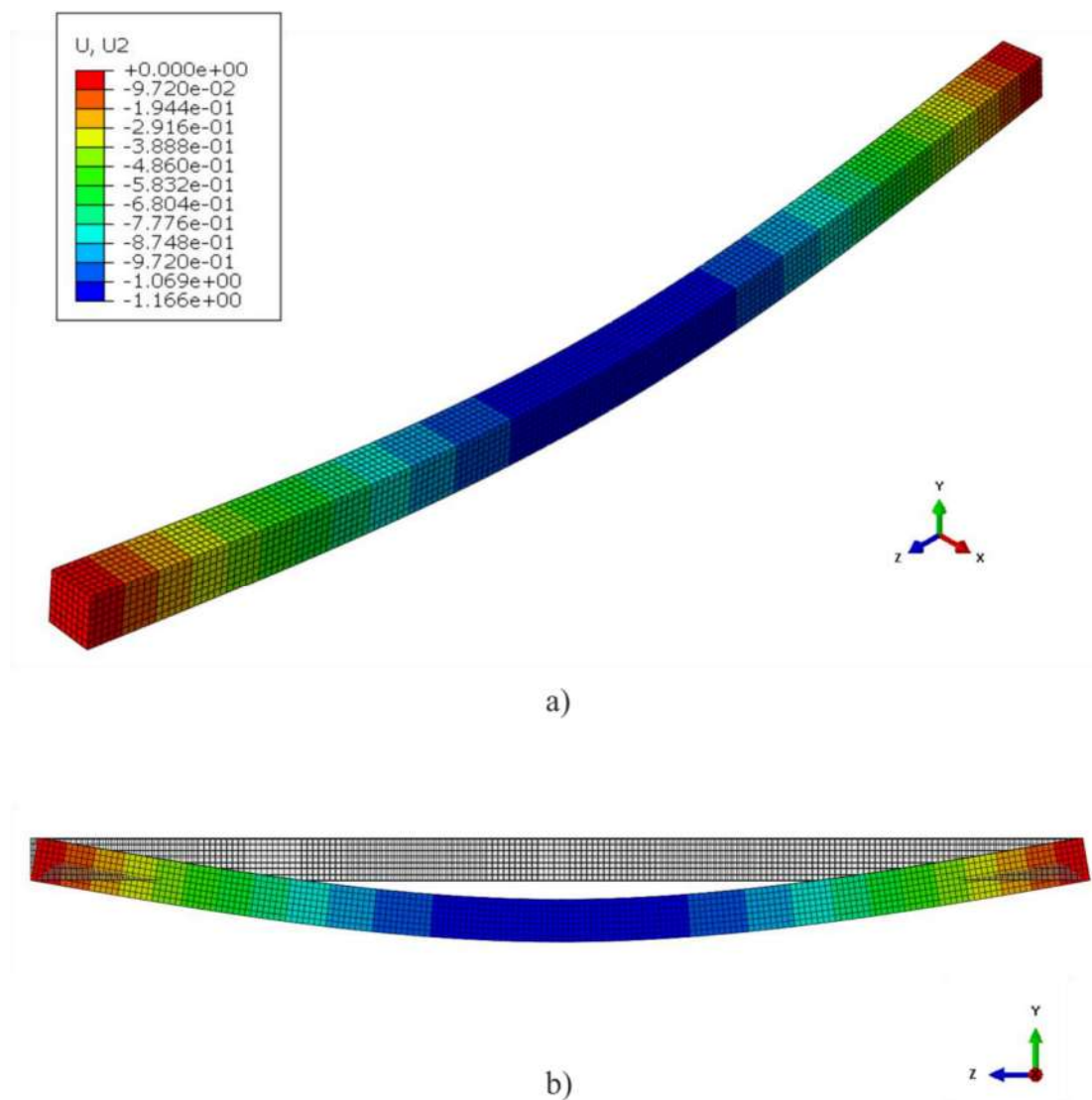
Broj konačnih elemenata	Pomak točke <i>A</i> / mm	Pomak točke <i>B</i> / mm	Pomak točke <i>C</i> / mm
200	1,14898	1,14983	1,14875
648	1,15112	1,15176	1,15088
1616	1,16026	1,16099	1,16004
3325	1,16396	1,16463	1,16373
8967	1,16571	1,16637	1,16548
12864	1,16564	1,16631	1,16541

Na dijagramu na slici 2.7. je prikazana konvergencija rješenja maksimalnog statičkog progiba grede u točkama *A*, *B* i *C* i linija analitičkog rješenja dobivenog izrazom (21).



Slika 2.7. Konvergencija rješenja

Iz tablice 2.1. i dijagrama na slici 2.7. može se zaključiti da je sa 8967 C3D8 elemenata rješenje iskonvergiralo, jer povećanjem broja elemenata, rješenje se zanemarivo promijeni. Ako to rješenje usporedimo sa analitičkim rješenjem statičkog progiba, dobije se vrijednost veća za oko 0,49% u točki *A*, 0,55% u točki *B* i 0,47% u točki *C*. Do tog je odstupanja došlo zato jer je kod analitičkog proračuna greda dvodimenzionalno tijelo, dok su se u numeričkom proračunu koristili trodimenzijski elementi. Isto tako se u analitičkom proračunu računala samo energija deformiranja uslijed savijanja oko osi *y* dok su se ostale energije deformiranja zanemarile. Ali kako je razlika tih rješenja u granicama inženjerske točnosti, može se pretpostaviti da C3D8 elementi daju dobre rezultate za računanje statičkog progiba grede. Na slici 2.8. je prikazani deformirani oblik grede diskretizirane pomoću 8967 C3D8 elemenata i opterećene statički s vrijednostima vertikalnog pomaka u mm uz faktor povećanja koji iznosi 50. Na slici 2.8.a) je prikazan pogled na deformirani oblik grede u izometriji, a na slici 2.8.b) pogled u *YZ* ravnini i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika.



Slika 2.8. Deformirani oblik i statički progib grede u mm a) izometrija, b) YZ ravnina i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika

2.2.2. Dinamička analiza

Dinamička analiza maksimalnog progiba grede će se provesti na gredi diskretiziranoj s 8967 C3D8 elemenata, jer je kod statičke analize vidljivo da je kod te mreže rješenje iskonvergiralo. Koristiti će se eksplicitna i implicitna metoda rješavanja. Te metode se u *Abaqusu* postavljaju u modulu *Step*, koji služi za stvaranje i definiranje koraka analize i izlaznih podataka. U tom se modulu postavi opcija *Dynamic, Explicit* za eksplicitnu metodu, odnosno *Dynamic, Implicit* za implicitnu metodu. Za dinamičku analizu je potrebno odabrati vrijeme trajanja opterećenja i to se odabire tako da omjer vremena eksplozije i vlastitog perioda bude u dinamičkoj domeni, kao što je opisano u 1. poglavlju.

Za dobivanje trajanja opterećenja potrebno je najprije odrediti vlastiti period grede. To se u *Abaqusu* računa tako da se u modulu *Step* postavi opcija *Linear perturbation, Frequency*. Time se dobije prva vlastita frekvencija grede, a vlastiti period iznosi:

$$T = \frac{1}{f}. \quad (32)$$

Dobivena vrijednost prve vlastite frekvencije je:

$$f = 2,9484 \text{ Hz}, \quad (33)$$

a vlastiti period iznosi:

$$T = \frac{1}{2,9484} = 0,34 \text{ s}. \quad (34)$$

Da bi analiza bila u dinamičkoj domeni, mora vrijediti relacija:

$$0,4 \leq \frac{t_p}{T} \leq 2,0. \quad (35)$$

Uvrštavanjem vrijednosti (34) u izraz (35) i sređivanjem, dobije se da vrijeme trajanja opterećenja mora biti u granicama:

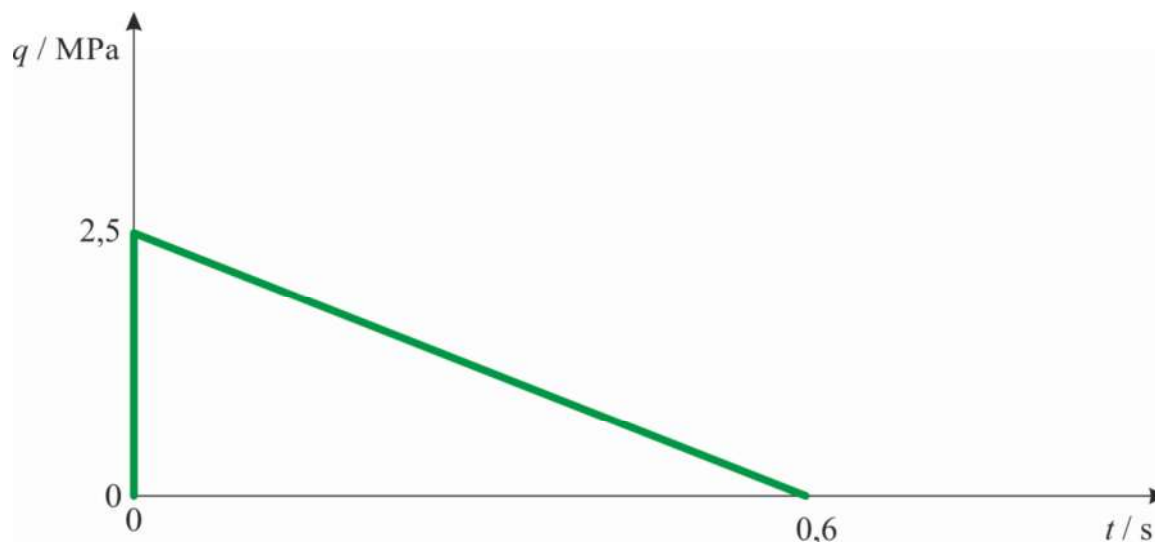
$$0,14 \text{ s} \leq t_p \leq 0,68 \text{ s}. \quad (36)$$

U skladu s izrazom (36), odabrano je vrijeme trajanja opterećenja:

$$t_p = 0,6 \text{ s}. \quad (37)$$

Vrijeme odabrano izrazom (37) je odabrano bliže gornjoj granici intervala iz razloga što se s duljim vremenom trajanja dobiju veći rezultati pomaka i naprezanja pa je to nepovoljniji slučaj nego kod kraćeg vremena trajanja opterećenja. Kod statičkog opterećenja je pretpostavka da se ono sporo povećava dok ne dostigne maksimalnu vrijednost. Kod dinamičke analize je potrebno staviti udarno opterećenje, što znači da ono u jako malom vremenskom periodu dostigne svoju maksimalnu vrijednost i nakon toga linearno pada.

To se u *Abaqusu* modelira korištenjem opcije *Amplitude* tako da se postavi da je u nultom trenutku opterećenje jednako svom maksimalnom iznosu izračunatom izrazom (31) i u vremenskom periodu zadanom izrazom (37) pada na vrijednost jednaku nuli. Dijagram opterećenja je prikazan na slici 2.9.



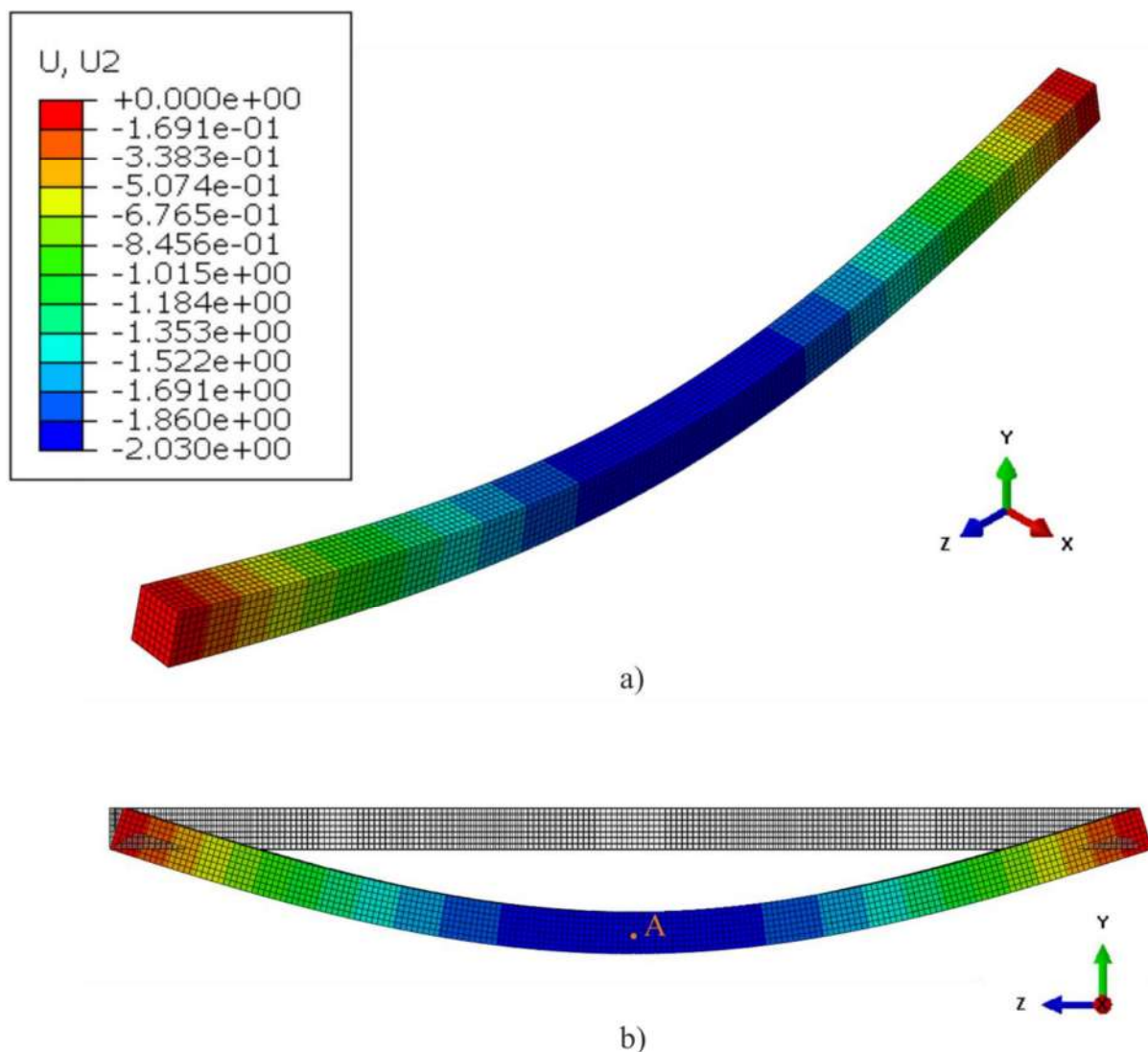
Slika 2.9. Dijagram opterećenja

Vrijednost maksimalnog dinamičkog progiba korištenjem eksplicitne metode rješavanja iznosi:

$$w_{\text{din, eks}} = 2,03 \text{ mm} \quad (38)$$

i postiže se nakon $t_{w, \text{max}} = 0,16 \text{ s}$ od početka opterećivanja. Progib je mjereno na središnjoj liniji grede, tj. u točki *A* prikazanoj na slici 2.10.

Na slici 2.10. je prikazan deformirani oblik grede pri dinamičkom opterećenju korištenjem eksplicitne metode rješavanja i progib grede u mm uz faktor povećanja pomaka koji iznosi 50. Na slici 2.10.b) je prikazana i usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika grede u *YZ* ravnini.

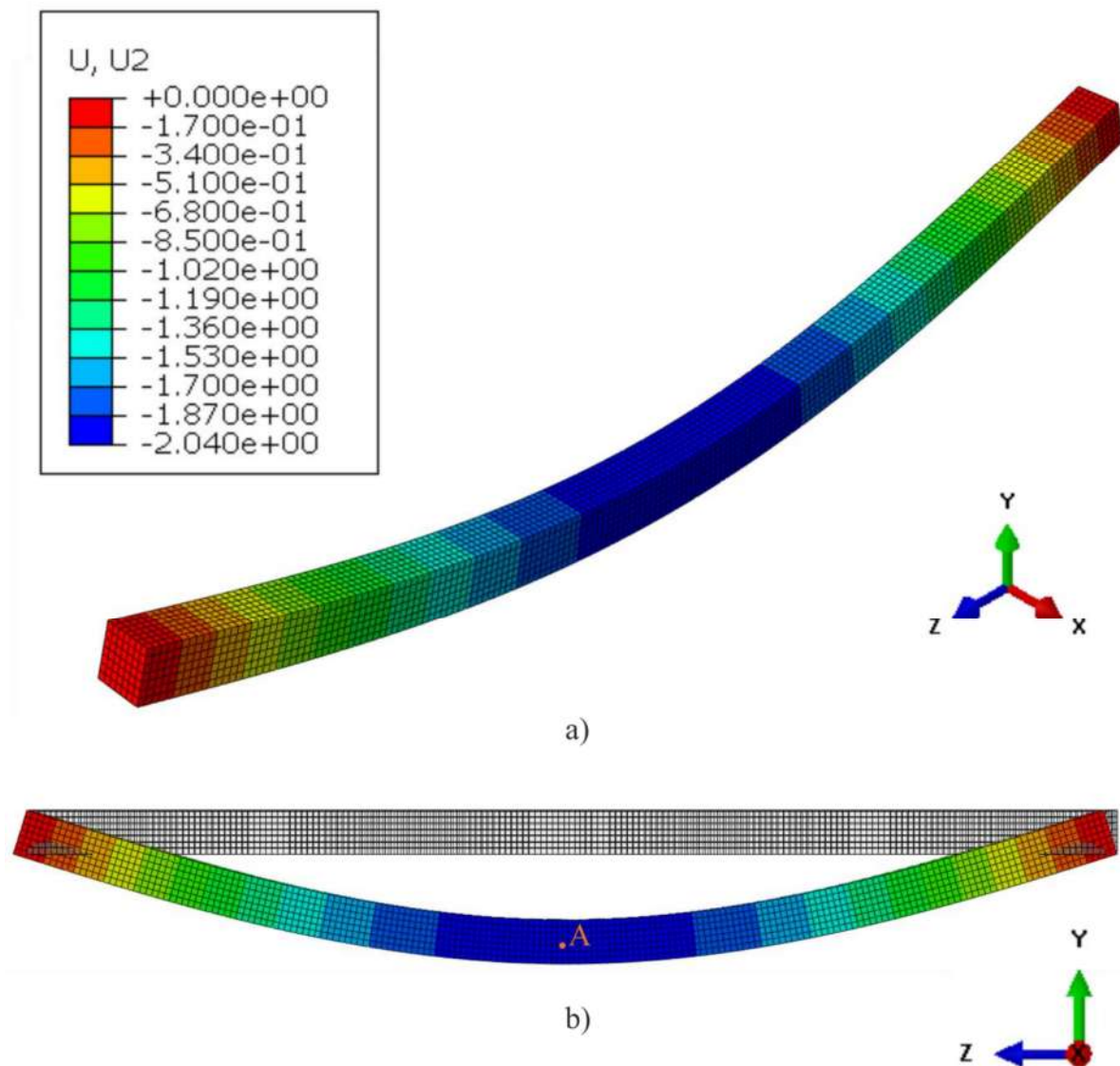


Slika 2.10. Deformirani oblik grede i dinamički progib u mm uz korištenje eksplicitne metode rješavanja
a) izometrija, b) YZ ravnina i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika

Korištenjem implicitne metode, vrijednost maksimalnog dinamičkog progiba grede iznosi:

$$w_{\text{din, impl}} = 2,04 \text{ mm} \quad (39)$$

i postiže se kao i kod eksplicitne metode nakon $t_{w, \max} = 0,16 \text{ s}$ od početka opterećivanja. I u ovom slučaju je progib mjeren na središnjoj liniji grede u točki A prikazanoj na slici 2.11. Na toj je slici prikazan deformirani oblik grede pri dinamičkom opterećenju korištenjem implicitne metode rješavanja i progib grede u mm uz faktor povećanja pomaka koji iznosi 50. Na slici 2.11.b) je prikazana i usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika grede u YZ ravnini.



Slika 2.11. Deformirani oblik grede i dinamički progib u mm uz korištenje implicitne metode rješavanja
a) izometrija, b) YZ ravnina i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika

2.3. Usporedba rezultata

U tablici 2.2. su prikazani rezultati dobiveni analitičkim proračunom i numeričkim proračunom korištenjem eksplicitne i implicitne metode. Vrijednosti dobivene numeričkim proračunom su uspoređene s analitičkim rješenjem.

Tablica 2.2. Usporedba rezultata

	Analitičko rješenje	Numeričko rješenje	
		Eksplicitna metoda	Implicitna metoda
Maksimalni dinamički progib	2,32 mm	2,03 mm	2,04 mm
Razlika u odnosu na analitičko rješenje	-	12,5%	12,1%

Usporedbom rezultata iz tablice 2.2. je vidljivo da se rezultati dobiveni eksplicitnom i implicitnom metodom razlikuju za samo 0,5% pa se može zaključiti da daju približno jednake rezultate. Međutim, razlika u odnosu na analitičko rješenje je puno veća i iznosi više od 12% i uz korištenje eksplicitne metode i uz korištenje implicitne metode. Neki od razloga tog odstupanja su da su se kod analitičkog proračuna zanemarile sve energije deformiranja osim energije deformiranja uslijed savijanja oko osi y i greda se modelirala kao 2D tijelo, dok su se kod numeričkog proračuna koristili 3D elementi i greda je modelirana kao 3D tijelo.

Da bi se dobio rezultat bliži analitičkom, potrebno je povećati vrijeme opterećivanja. Ako se zada potrebna točnost rezultata od 5%, daljnjom analizom je utvrđeno da je potrebno zadati vrijeme koje iznosi:

$$t = 2 \text{ s}, \quad (40)$$

jer se kod tog vremenskog perioda, uz korištenje eksplicitne metode, dobije iznos maksimalnog dinamičkog progiba:

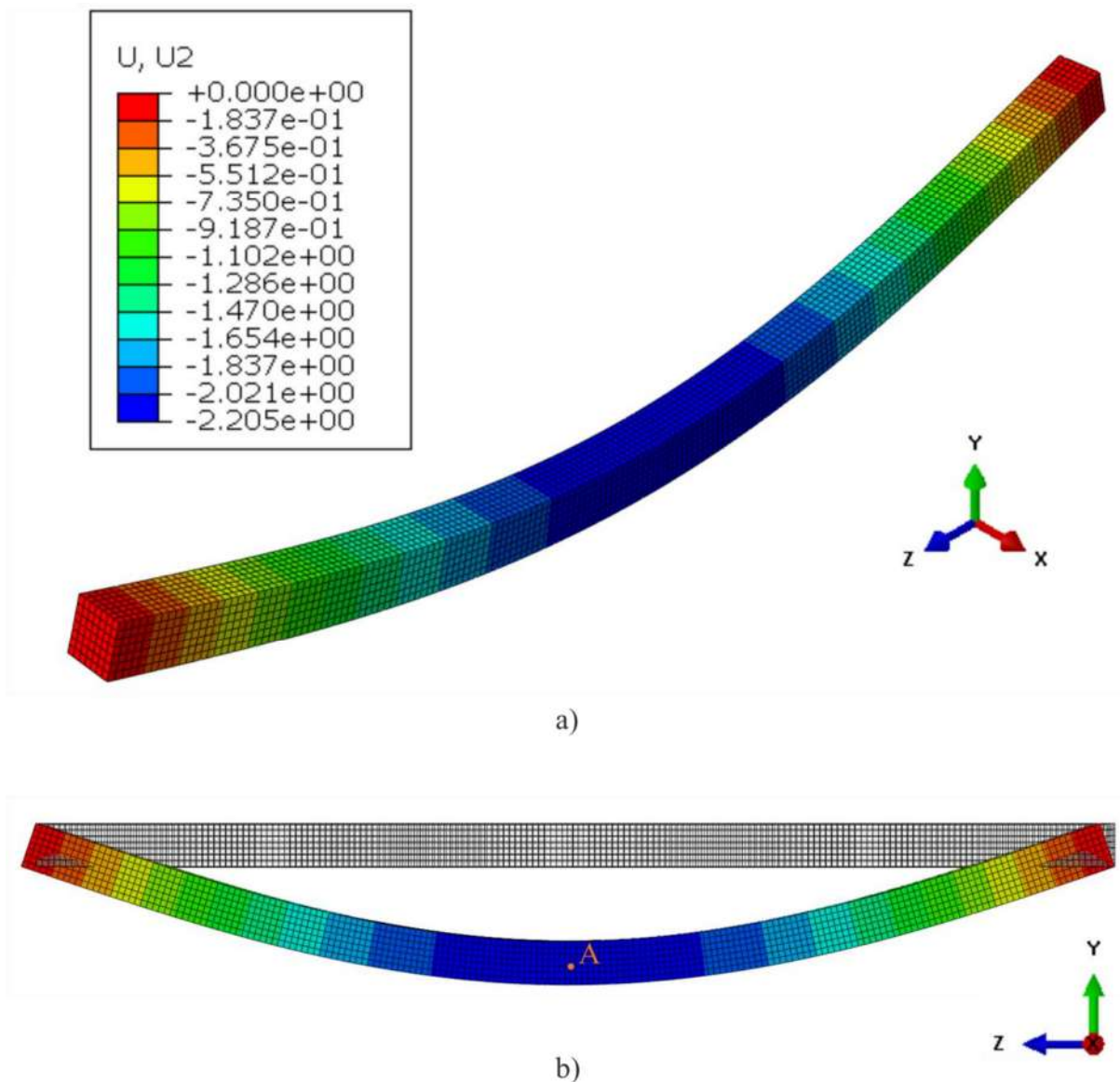
$$w_{din,eks} = 2,205 \text{ mm}, \quad (41)$$

što je za 4,97% manji iznos od analitičkog rješenja (30). Primjenom implicitne metode rješavanja, maksimalni progib iznosi:

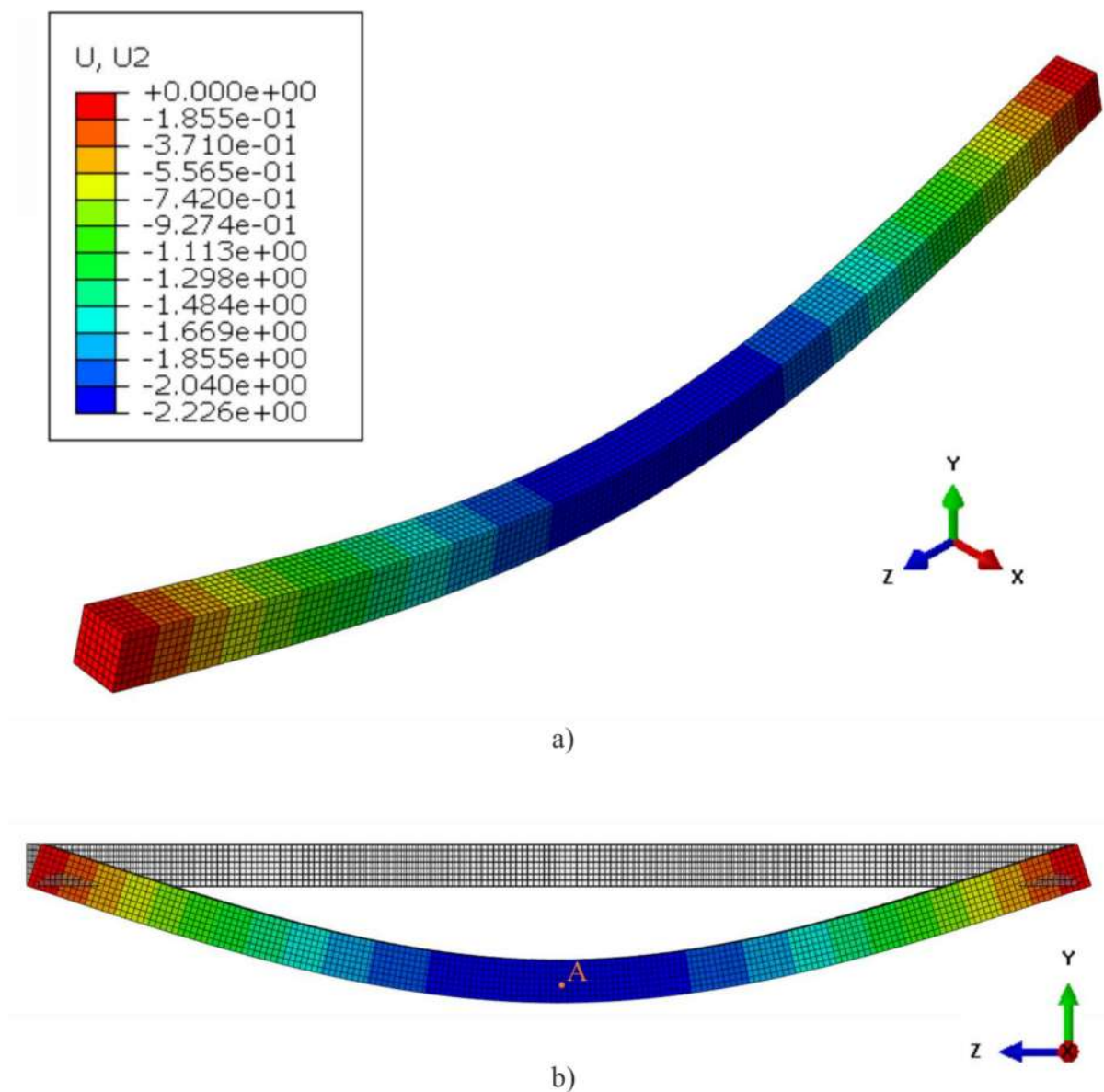
$$w_{din,impl} = 2,226 \text{ mm}, \quad (42)$$

što je za 4,06% manji iznos od analitičkog rješenja. Maksimalni progib se u obje analize javlja u točki A označenoj na slikama 2.12. i 2.13. u trenutku $t = 0,17 \text{ s}$.

Na slikama 2.12. i 2.13. je prikazan deformirani oblik grede i pomaci u mm za slučaj kada je trajanje opterećenja $t = 2$ s uz primjenu eksplcitne i implicitne metode. Na slikama 2.12.b) i 2.13.b) je prikazana i usporedba deofrmiranog i nedeformiranog oblika grede u YZ ravnini.



Slika 2.12. Deformirani oblik grede i dinamički progib u mm uz korištenje eksplcitne metode rješavanja i trajanje opterećenja od $t = 2$ s a) izometrija, b) YZ ravnina i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika

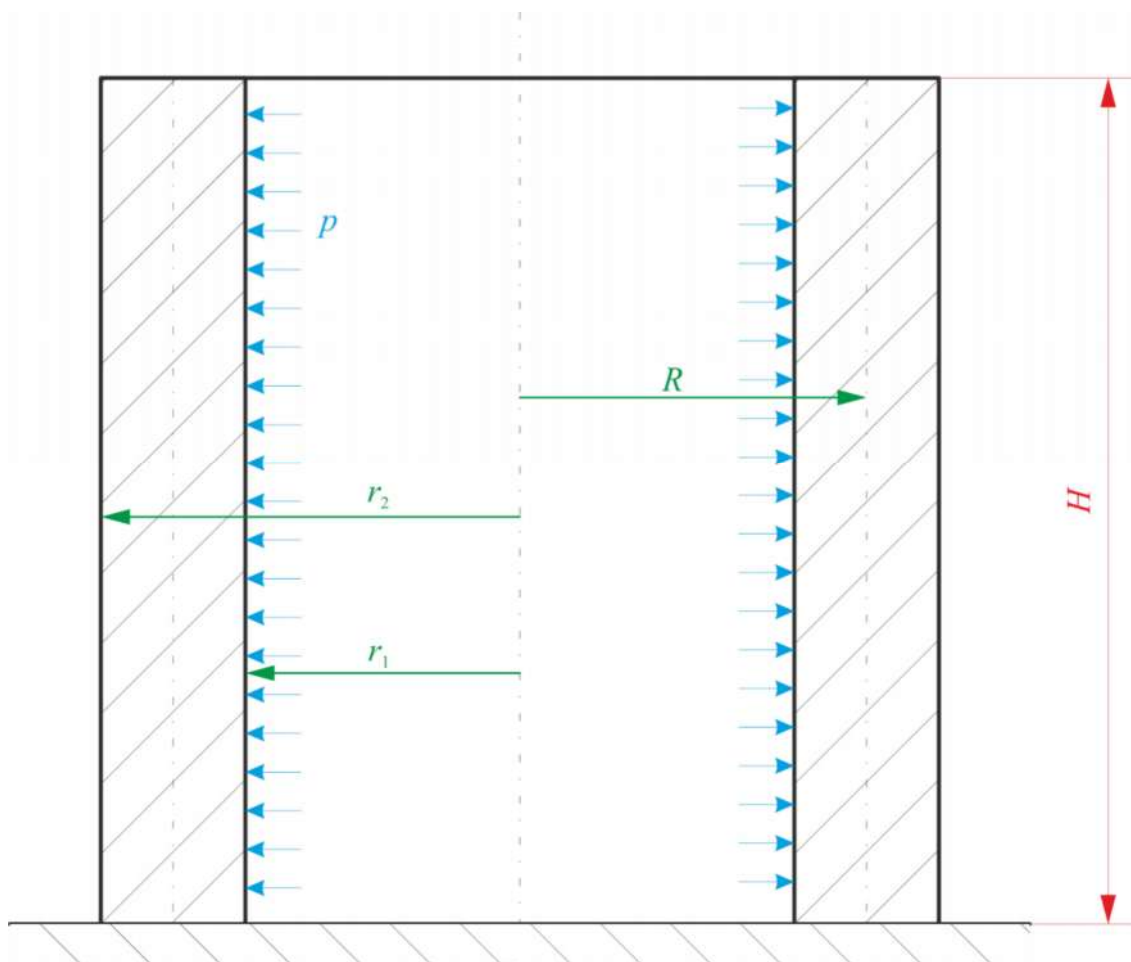


Slika 2.13. Deformirani oblik grede i dinamički progib u mm uz korištenje implicitne metode rješavanja i trajanje opterećenja od $t = 2$ s a) izometrija, b) YZ ravnina i usporedba nedeformiranog i deformiranog oblika

3. ANALIZA DEBELOSTJENE CIJEVI

Debelostjena cijev koja će se analizirati služi za zaštitu okoline od eksplozije prilikom ispitivanja eksploziva. Osim toga, njome se plinovi nastali prilikom eksplozije usmjeravaju vertikalno prema gore, gdje je postavljena ventilacija za njihov odvod. Ta cijev mora imati dovoljno veliki radijus da se u nju može postaviti eksploziv. Drugi uvjet koji mora zadovoljiti je da omjer njezine debljine i srednjeg radijusa bude dovoljno velik da se cijev može smatrati debelostjenom, u skladu s izrazom (4). Potrebno je još zadovoljiti i uvjet da je duljina cijevi dovoljno velika da se cijev može smatrati dugom ljuškom, koji je prikazan izrazom (5).

U proračunu će se koristiti cijev čija je uzdužna os postavljena vertikalno. Na donjem kraju je cijev uklještena, što znači da su spriječeni svi pomaci i zakreti donjeg kraja, dok je gornji kraj slobodan. Cijev je opterećena tlakom iznutra. Na slici 3.1. je prikazana debelostjena cijev, njezino opterećenje i rubni uvjeti.



Slika 3.1. Debelostjena cijev

Parametri koji opisuju geometriju cijevi su:

$$\begin{aligned} r_1 &= 900 \text{ mm}, \\ r_2 &= 1100 \text{ mm}, \\ H &= 2000 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (43)$$

Uvrštavanjem podataka (43) u izraz (4), provjerava se uvjet debelostjene cijevi:

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 &> 0,1 \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}, \\ 1100 - 900 &> 0,1 \cdot \frac{900 + 1100}{2}, \\ 200 &> 100. \end{aligned} \quad (44)$$

Iz izraza (44) je vidljivo da je uvjet debelostjene cijevi zadovoljen. Potrebno je još provjeriti i uvjet duge ljsuke, a za to je potrebno uvrstiti podatke o geometriji cijevi iz izraza (43) u izraz (5):

$$\begin{aligned} H &> 2,33 R \sqrt{\frac{d}{R}}, \\ 2000 &> 2,33 \cdot \frac{900 + 1100}{2} \cdot \sqrt{\frac{1100 - 900}{\frac{900 + 1100}{2}}}, \\ 2000 &> 1042. \end{aligned} \quad (45)$$

Iz izraza (45) je vidljivo da je zadovoljen i uvjet duge ljsuke pa se sa podacima (43) može ući u proračun.

U praksi se cijevi najčešće izrađuju iz čelika pa će se taj materijal koristiti i u proračunu. Svojstva čelika potrebna za proračun su:

$$\begin{aligned} E &= 210\,000 \text{ MPa}, \\ \nu &= 0,3, \\ \rho &= 7850 \text{ kg/m}^3. \end{aligned} \quad (46)$$

Cijev je opterećena tlakom iznutra koji iznosi:

$$p = 45 \text{ MPa}. \quad (47)$$

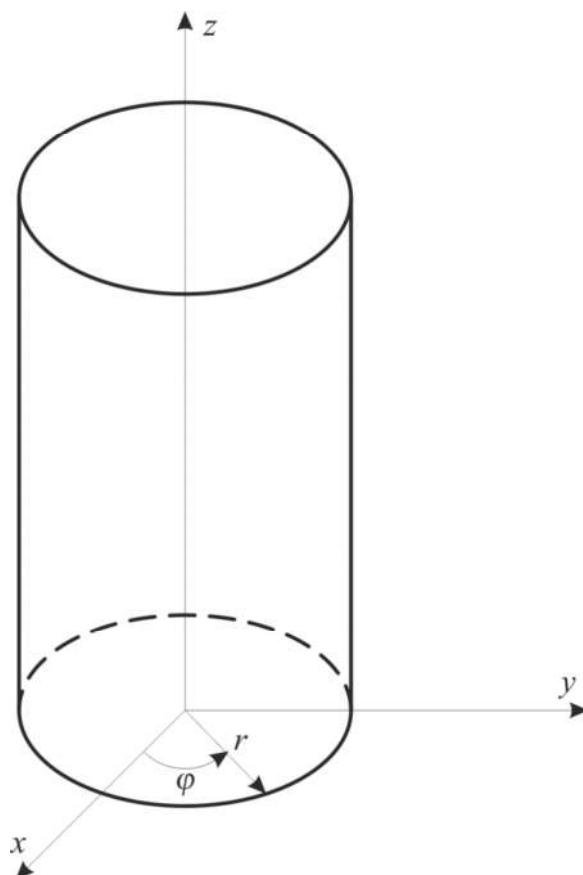
Iznos tlaka je odabran tako da je to reflektirani tlak kojim u cijev udara udarni val nastao eksplozijom 10 kg trinitrotoluena (TNT-a), koji je najčešće primjenjivani vojni eksploziv [9].

Potrebno je analitički i numerički pomoću metode konačnih elemenata odrediti naprezanja i pomake cijevi koji nastaju prilikom eksplozije, tj. naglog povećanja tlaka.

3.1. Statička analiza

3.1.1. Analitički proračun

Najprije se provodi analitički proračun u kojem se izračunaju statička naprezanja i pomaci [2]. Rubni uvjeti i opterećenje su prikazani na slici 3.1. Koristiti će se cilindrični koordinatni sustav (r, φ, z) , u kojem je r radijalna os, φ cirkularna os, a z uzdužna os cijevi. Cilindrični koordinatni sustav je prikazan na slici 3.2.



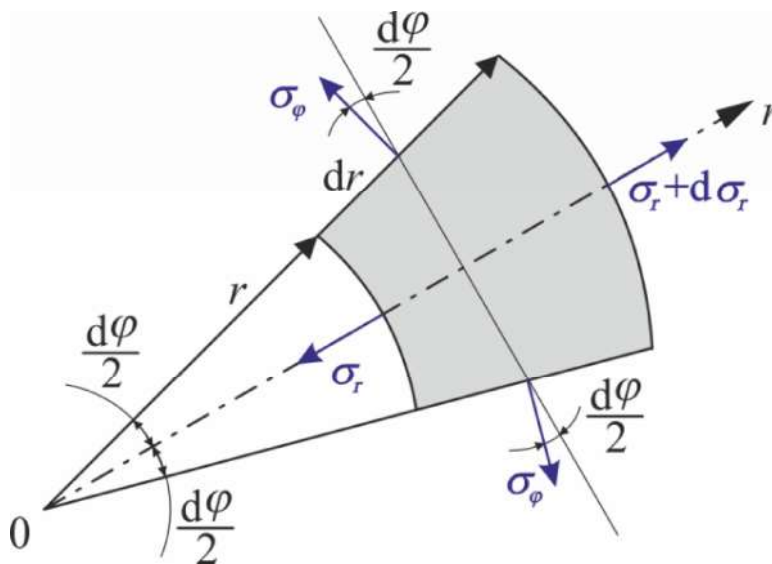
Slika 3.2. Cilindrični koordinatni sustav

U statičkoj analizi debelostjene cijevi se uvode ograničenja i pretpostavke koji olakšavaju izračunavanje nepoznatih podataka, a ne utječu bitnije na iznose dobivenih rezultata. Ograničenja su da se od opterećenja razmatraju samo tlak i inercijske sile, opterećenje ovisi samo o radijalnoj koordinati r i ne razmatra se utjecaj koncentriranih sila i spregova. Također, pomaci i naprezanja se računaju na mjestu dovoljno dalekom od uklještenja na kojem rubni uvjeti ne utječu na rezultate. Pretpostavke koje se uvode u proračun su da se pri deformiranju sve točke pomiču radijalno, a naprezanje σ_z je jednoliko raspoređeno po poprečnom presjeku.

Za dobivanje statičkih naprezanja i pomaka potrebno je riješiti diferencijalnu jednadžbu ravnoteže elementa. Ta se jednadžba izvodi iz uvjeta ravnoteže sila diferencijalnog elementa, koji je prikazan na slici 3.3. Sređivanjem se dobije diferencijalna jednadžba oblika:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = 0, \quad (48)$$

gdje je r radijalna koordinata u cilindričnom koordinatnom sustavu, a u je radijalni pomak cijevi.



Slika 3.3. Diferencijalni element debelostjene cijevi

Integriranjem izraza (48) dobije se opće rješenje te jednadžbe:

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (49)$$

gdje su C_1 i C_2 konstante integracije koje se dobivaju iz rubnih uvjeta. Prema slici 3.1., rubni uvjeti za promatrani slučaj glase:

$$\begin{aligned}\sigma_r(r_1) &= -p, \\ \sigma_r(r_2) &= 0.\end{aligned}\quad (50)$$

Izrazi za radijalno i cirkularno naprezanje, izvedeni geometrijskom analizom i primjenom Hookeova zakona, glase [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z, \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z.\end{aligned}\quad (51)$$

Pomoću općeg izraza za radijalni pomak (49), izvode se pomoćne relacije za izvod radijalnog i cirkularnog napreznja:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dr} &= C_1 + \frac{C_2}{r^2}, \\ \frac{u}{r} &= C_1 - \frac{C_2}{r^2}.\end{aligned}\quad (52)$$

Uvrštavanjem pomoćnih izraza (52) u izraze za napreznja (51), dobije se:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)C_1 - \frac{C_2}{r^2}(1-\nu) \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z, \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)C_1 + \frac{C_2}{r^2}(1-\nu) \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z.\end{aligned}\quad (53)$$

Uvrštavanjem rubnih uvjeta (50) u izraz za radijalno napreznje (53), dobije se sustav od dvije jednačbe sa dvije nepoznate konstante C_1 i C_2 čijim rješavanjem se izračunaju konstante:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{1-\nu}{E} \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{\nu}{E} \sigma_z, \\ C_2 &= \frac{1+\nu}{E} \frac{p r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.\end{aligned}\quad (54)$$

Uvrštavanjem konstanti iz izraza (54) u izraze (49) i (53), dobiju se izrazi za računanje radijalnog pomaka te radijalnog i cirkularnog naprezanja debelostjene cijevi opterećene samo tlakom iznutra:

$$u = \frac{p r_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[(1 - \nu)r + (1 + \nu) \frac{r_2^2}{r} \right] - \frac{\nu}{E} \sigma_z r, \quad (55)$$

$$\sigma_r = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[1 - \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right], \quad (56)$$

$$\sigma_\phi = \frac{p r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left[1 + \left(\frac{r_2}{r} \right)^2 \right]. \quad (57)$$

Kako je cijev na gornjem kraju slobodna, aksijalno naprezanje u bilo kojem presjeku je jednako:

$$\sigma_z = 0, \quad (58)$$

pa konačan izraz za računanje radijalnog pomaka zadane cijevi u tom slučaju ima oblik:

$$u = \frac{p r_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \left[(1 - \nu)r + (1 + \nu) \frac{r_2^2}{r} \right]. \quad (59)$$

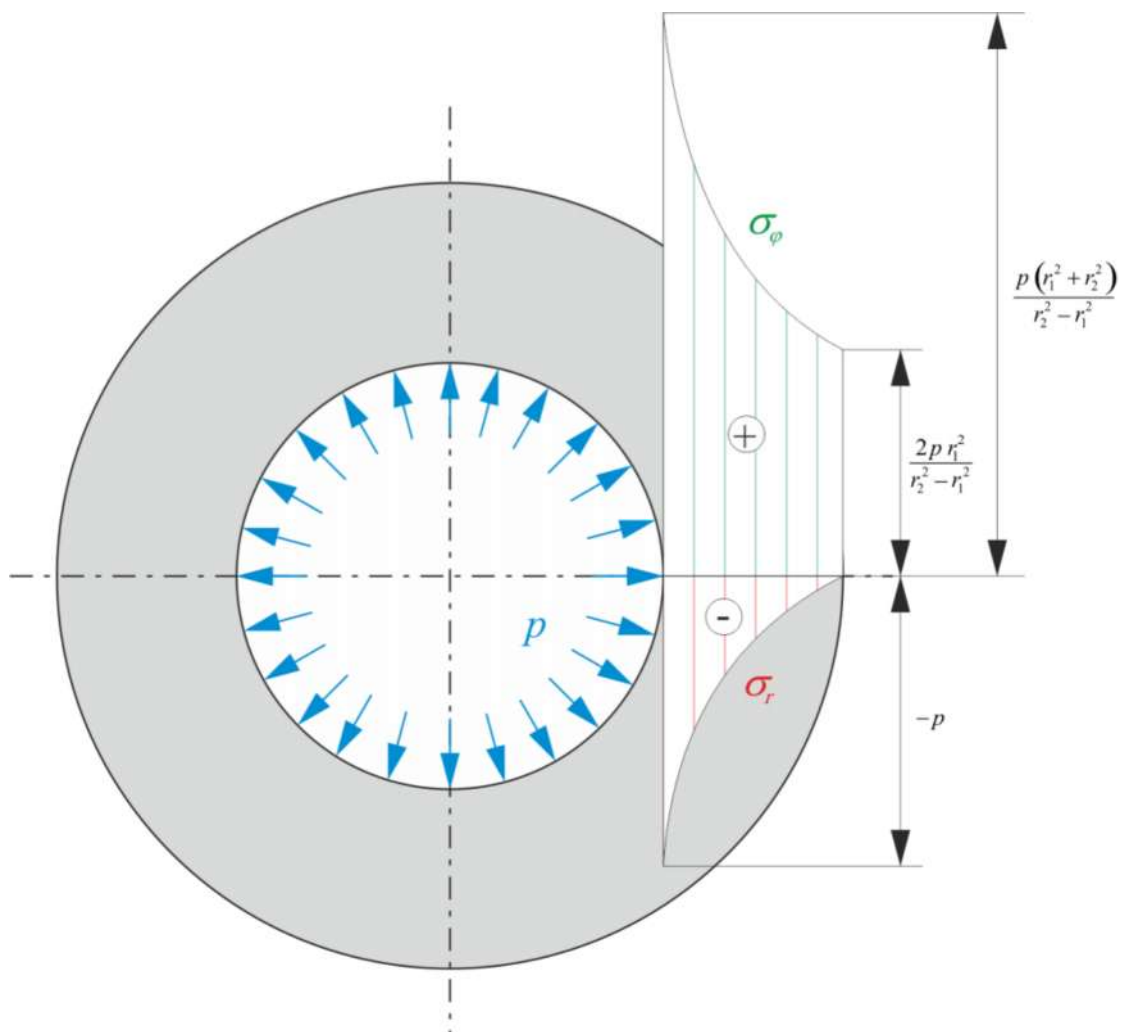
Na slici 3.4. je prikazana raspodjela radijalnih i cirkularnih naprezanja po debljini cijevi.

Na unutarnjem radijusu cijevi, gdje je $r = r_1$, radijalni pomak i radijalna i cirkularna komponenta naprezanja iznose:

$$\begin{aligned} u(r_1) &= 1,03 \text{ mm}, \\ \sigma_r(r_1) &= -45 \text{ MPa}, \\ \sigma_\phi(r_1) &= 227,25 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (60)$$

Na vanjskom radijusu cijevi je $r = r_2$ pa radijalni pomak i radijalna i cirkularna komponenta napreznja iznose:

$$\begin{aligned} u(r_2) &= 0,95 \text{ mm}, \\ \sigma_r(r_2) &= 0, \\ \sigma_\varphi(r_2) &= 182,25 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (61)$$



Slika 3.4. Raspodjela radijalnih i cirkularnih napreznja po debljini cijevi

Prema slici 3.4. je vidljivo da se najveća napreznja u cijevi javljaju na njezinom unutarnjem radijusu. Zbog toga je potrebno za tu točku izračunati ekvivalentno napreznje koje će se dalje uspoređivati s numeričkim rezultatima.

Ekvivalentno naprezanje se može računati prema bilo kojoj od teorija čvrstoće, ali za rastezljive materijale, kao što je i čelik od kojeg je cijev izrađena, najčešće se koristi teorija najveće distorzijske energije ili HMMH teorija. Izraz za računanje ekvivalentnog naprezanja prema toj teoriji glasi [10]:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (62)$$

gdje su σ_1, σ_2 i σ_3 glavna naprezanja poredana po veličini tako da vrijedi da je $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Za promatrani slučaj, uzevši u obzir izraze (58) i (60), na unutarnjem radijusu glavna naprezanja iznose:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_\varphi = 227,25 \text{ MPa}, \\ \sigma_2 &= \sigma_z = 0, \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -45 \text{ MPa}, \end{aligned} \quad (63)$$

pa ekvivalentno naprezanje na unutarnjem radijusu gornjeg ruba cijevi iznosi:

$$\sigma_{\text{ekv}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(227,25 - 0)^2 + (0 + 45)^2 + (-45 - 227,25)^2]} = 252,77 \text{ MPa}. \quad (64)$$

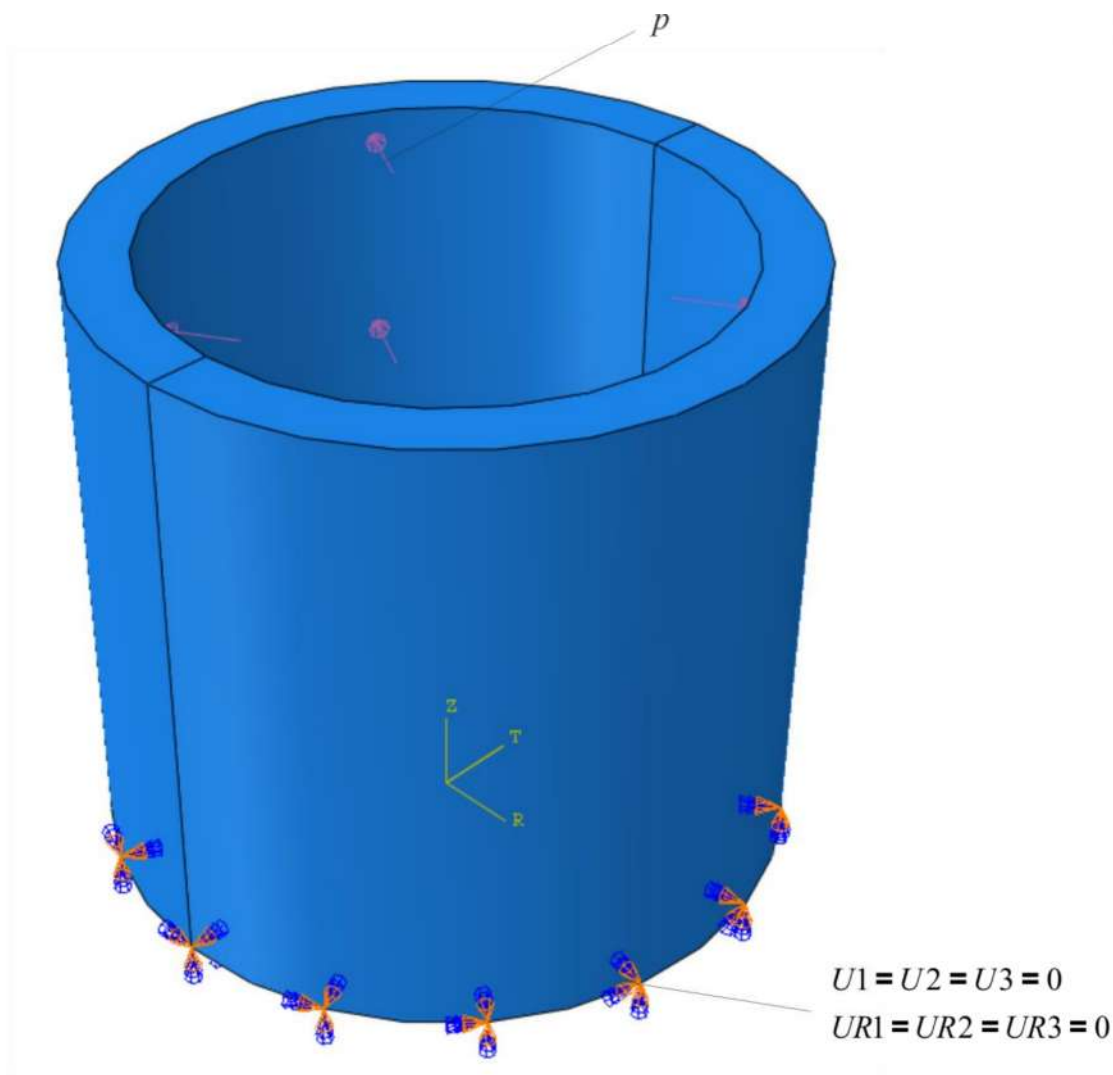
3.1.2. Numerički proračun

Numerički proračun se provodi metodom konačnih elemenata u programskom paketu *Abaqus* [5]. Cijev je modelirana kao trodimenzijsko tijelo i diskretizirana trodimenzijskim elementima prvog reda, koji u *Abaqusu* nose oznaku C3D8.

Najprije se radi statička analiza u kojoj se provjerava konvergencija rješenja i nakon toga se radi dinamička analiza na mreži konačnih elemenata kod koje je rješenje statičke analize konvergiralo. Dinamička analiza se provodi pomoću implicitne metode u *Abaqus/Standard*-u i eksplicitne metode u *Abaqus/Explicit*-u.

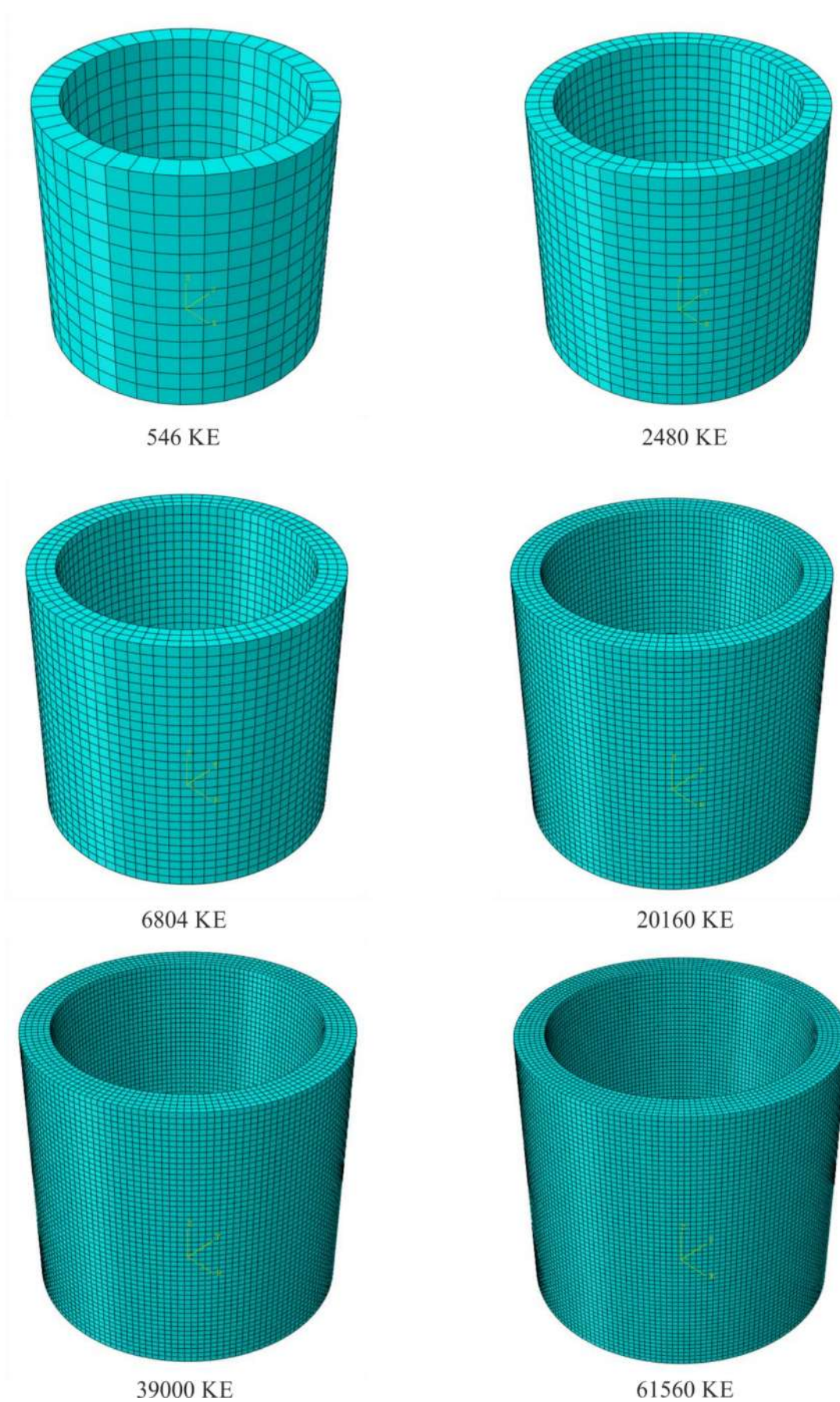
Geometrija, opterećenje i rubni uvjeti proračunskog modela su prikazani na slici 3.5., a ulazni podaci jednaki su onima u analitičkom proračunu zadanim izrazima (43), (46) i (47). Radi boljeg prikaza pomaka i naprezanja, korišten je cilindrični koordinatni sustav (r, φ, z) , a u *Abaqusu* su njegove oznake (R, T, Z) , gdje je r radijalna os, φ cirkularna os, a z je aksijalna os cilindričnog koordinatnog sustava. Cilindrični koordinatni sustav je također prikazan na slici 3.5.

Kako dinamička analiza zahtjeva duže vrijeme računanja od statičke analize, konvergencija rješenja se ispituje statičkom analizom. Provjeravaju se radijalni pomak cijevi u na unutarnjem i vanjskom radijusu cijevi i ekvivalentno naprezanje prema teoriji najveće distorzijske energije na unutarnjem radijusu cijevi na poprečnom presjeku s koordinatom $z = H$.



Slika 3.5. Geometrija, opterećenje i rubni uvjeti proračunskog modela

Statička analiza cijevi je provedena na šest različitih mreža konačnih elemenata (KE), kod kojih se na svakoj mreži smanjuje veličina elementa, čime se povećava broj elemenata po debljini cijevi. Slika 3.6. prikazuje korištene mreže konačnih elemenata kod provjere konvergencije rješenja.



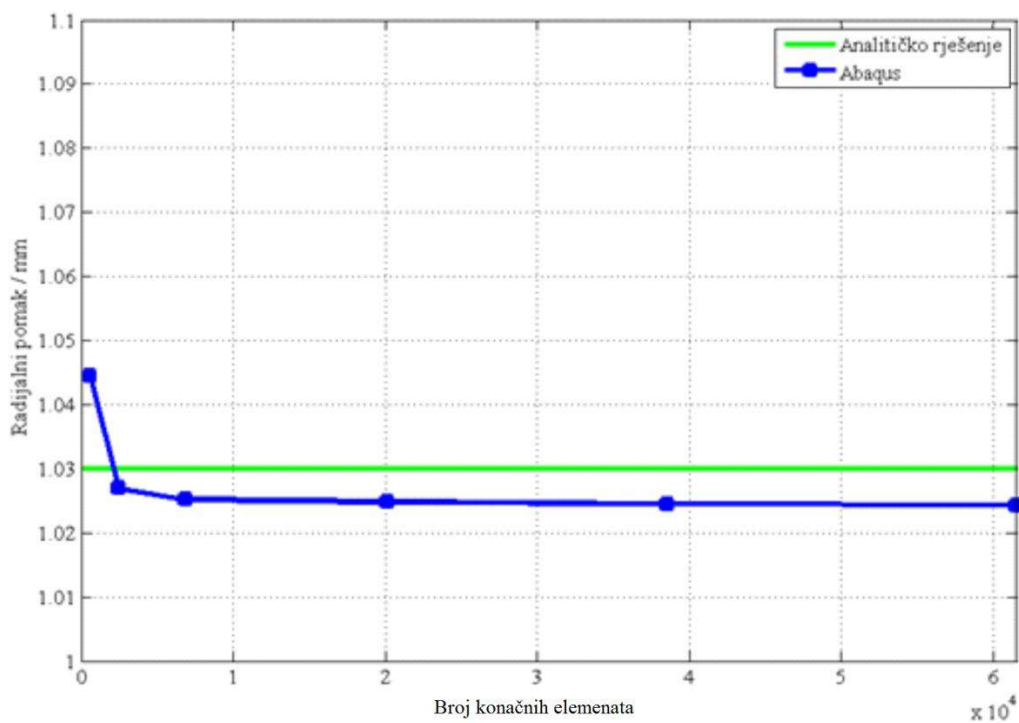
Slika 3.6. Mreže konačnih elemenata

U tablici 3.1. su prikazani dobiveni rezultati radijalnog pomaka u na unutarnjem radijusu cijevi r_1 i vanjskom radijusu cijevi r_2 i ekvivalentnog naprezanja prema teoriji najveće distorzijske energije na unutarnjem radijusu cijevi r_1 na poprečnom presjeku s koordinatom $z = H$ dobiveni za mreže s različitim brojem C3D8 konačnih elemenata.

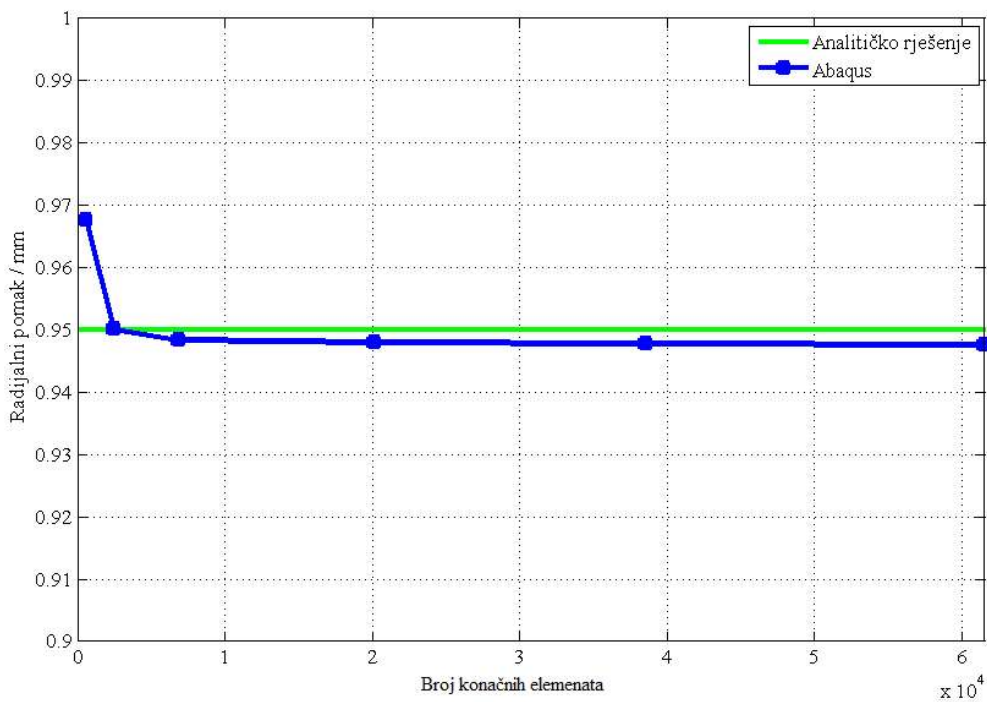
Tablica 3.1. Radijalni pomak i ekvivalentno naprezanje gornjeg dijela cijevi diskretizirane C3D8 konačnim elementima

Broj elemenata	Radijalni pomak u / mm		Ekvivalentno naprezanje σ_{ekv} / MPa
	$r = r_1$	$r = r_2$	$r = r_1$
546	1,045	0,9677	236,14
2480	1,027	0,9501	242,67
6804	1,025	0,9484	245,21
20160	1,025	0,9480	246,57
39000	1,025	0,9478	247,40
61560	1,024	0,9476	247,97

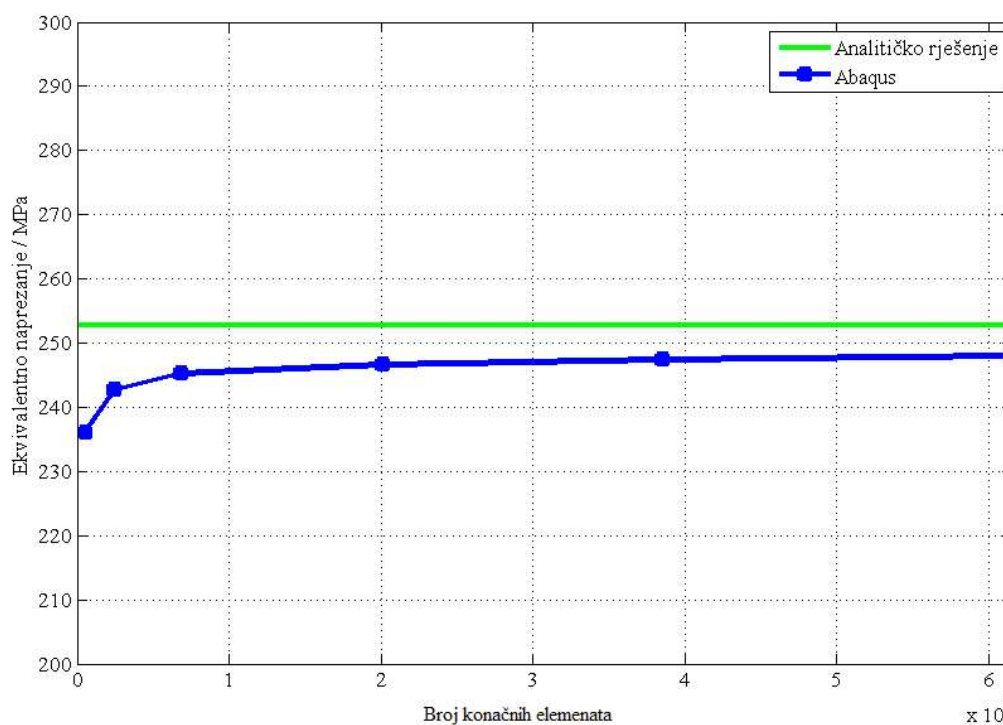
Slika 3.7. prikazuje dijagram konvergencije rješenja radijalnog pomaka na unutarnjem radijusu cijevi, slika 3.8. dijagram konvergencije rješenja radijalnog pomaka na vanjskom radijusu cijevi, a slika 3.9. dijagram konvergencije ekvivalentnog naprezanja na unutarnjem radijusu cijevi. Na svim je slikama prikazana i linija analitičkih rješenja dobivenih izrazima (60), (61) i (64).



Slika 3.7. Konvergencija radijalnog pomaka na unutarnjem radijusu cijevi

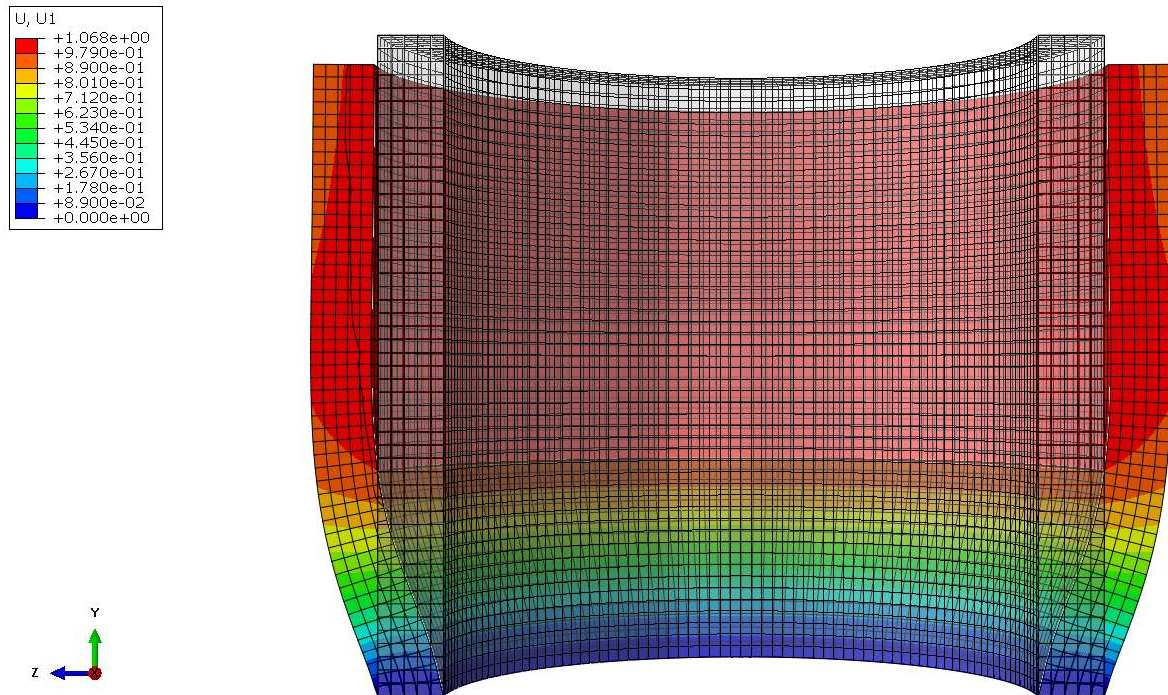


Slika 3.8. Konvergencija radijalnog pomaka na vanjskom radijusu cijevi

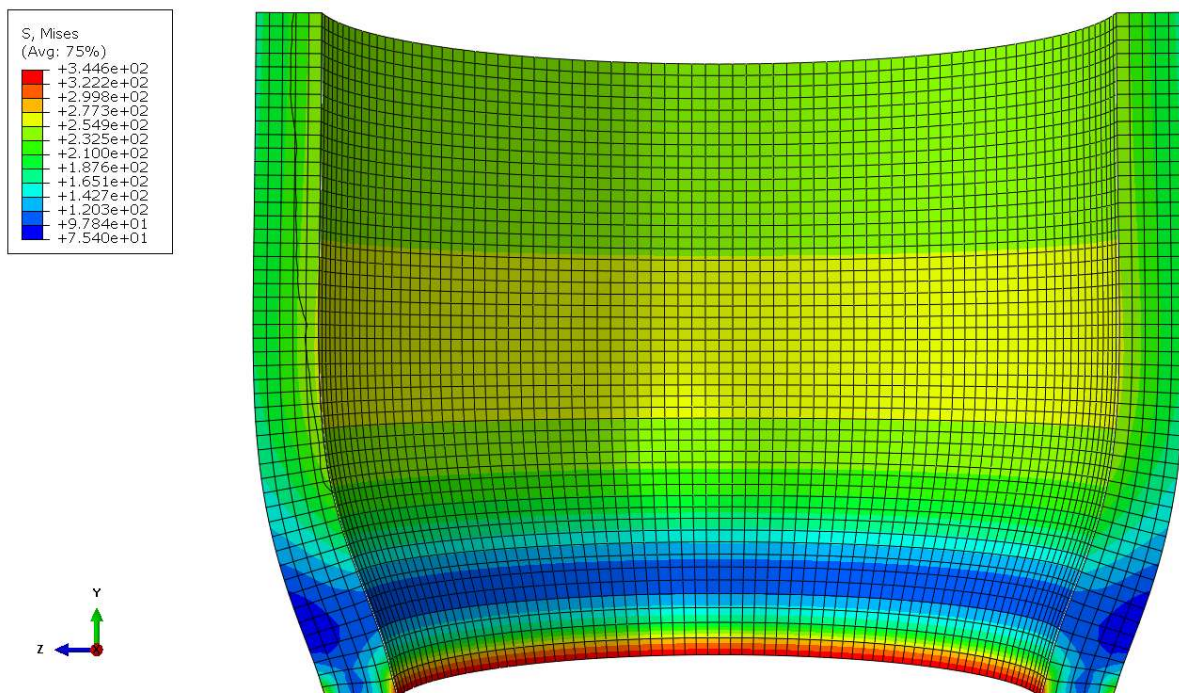


Slika 3.9. Konvergencija ekvivalentnog naprezanja na unutarnjem radijusu cijevi

Iz podataka u tablici 3.1. i dijagramima na slikama 3.7., 3.8. i 3.9. se može zaključiti da kod diskretizacije s 39000 C3D8 elemenata (5 elementa po debljini cijevi), čija je dimenzija svake stranice približno jednaka 40 mm, rješenje radijalnih pomaka na unutarnjem i vanjskom radijusu i ekvivalentnih naprezanja na unutarnjem radijusu konvergira. Daljnjim povećanjem broja elemenata na 61560 (6 elementa po debljini cijevi), rezultat radijalnog pomaka na unutrašnjem radijusu se promijeni za 0,1%, na vanjskom radijusu za 0,02%, a ekvivalentnog naprezanja za 0,2%. Zbog toga se za usporedbu s analitičkim rješenjem uzimaju rezultati kod diskretizacije cijevi s 39000 C3D8 elementa i ta će se mreža koristiti u dinamičkoj analizi. Na slici 3.10. je prikazana usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika cijevi opterećene statičkim tlakom iznutra, diskretizirane s 39000 C3D8 elemenata s vrijednostima radijalnog pomaka u mm, a na slici 3.11. je deformirani oblik te cijevi s vrijednostima ekvivalentnog naprezanja u MPa. Zbog boljeg prikaza deformiranog oblika cijevi, na tim je slikama korišten faktor povećanja deformacija koji iznosi 100.



Slika 3.10. Deformirani i nedeformirani oblik cijevi i radijalni pomak cijevi u mm



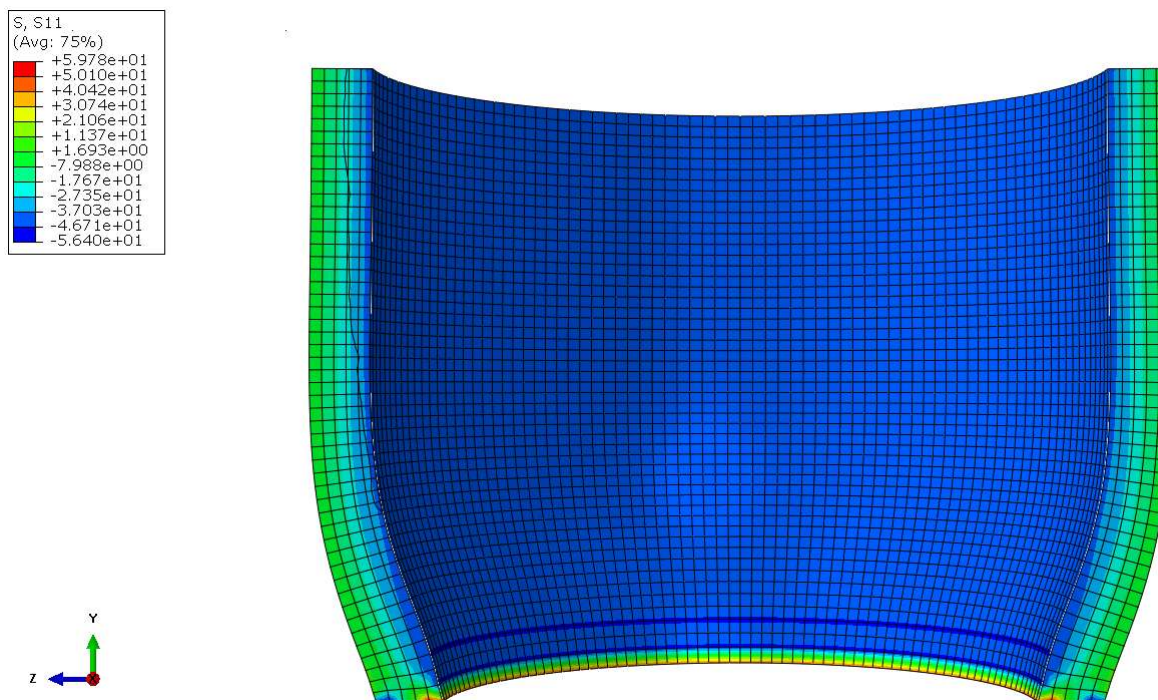
Slika 3.11. Deformirani oblik i ekvivalentno naprezanje cijevi u MPa

Vrijednosti radijalnih, cirkularnih i aksijalnih napreznja na unutarnjem i vanjskom radijusu kod diskretizacije sa 39000 elemenata su prikazane u tablici 3.2. U *Abaqusu* je radijalno napreznje označeno sa $S11$, cirkularno sa $S22$, a aksijalno sa $S33$.

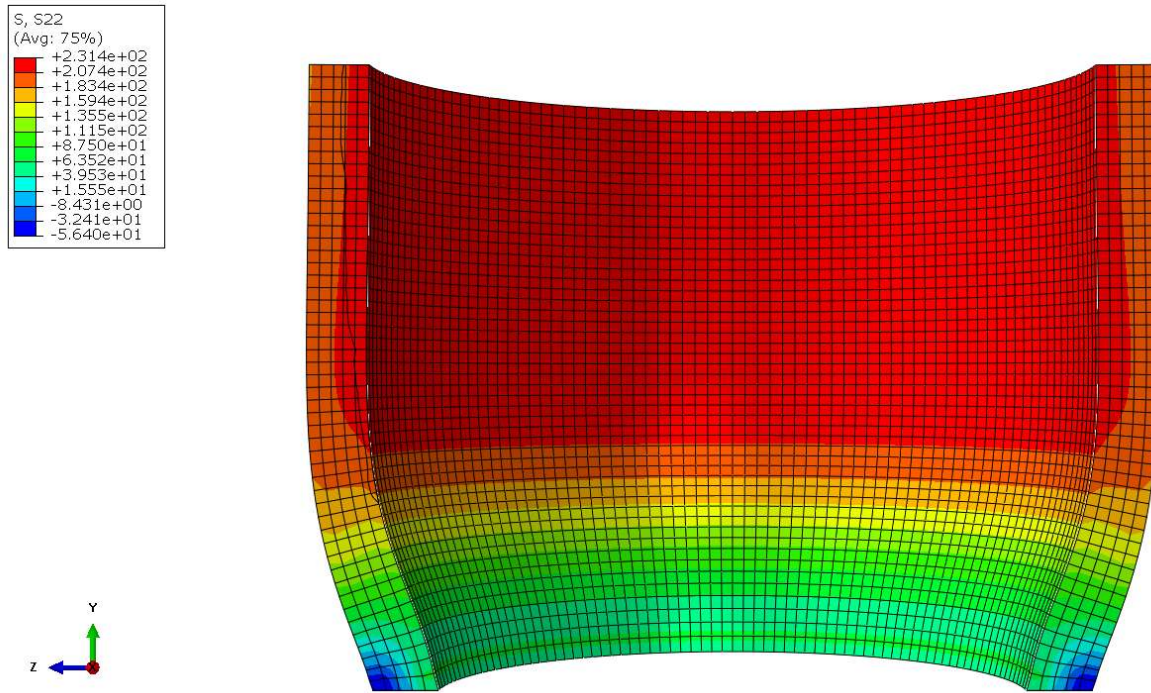
Tablica 3.2. Radijalna, cirkularna i aksijalna napreznja gornjeg dijela cijevi diskretizirane s 39000 C3D8 konačnih elemenata

	$r = r_1$	$r = r_2$
Radijalno napreznje σ_r	-41,31 MPa	-2,073 MPa
Cirkularno napreznje σ_ϕ	223,67 MPa	182,08 MPa
Aksijalno napreznje σ_z	-1,177 MPa	0,7612 MPa

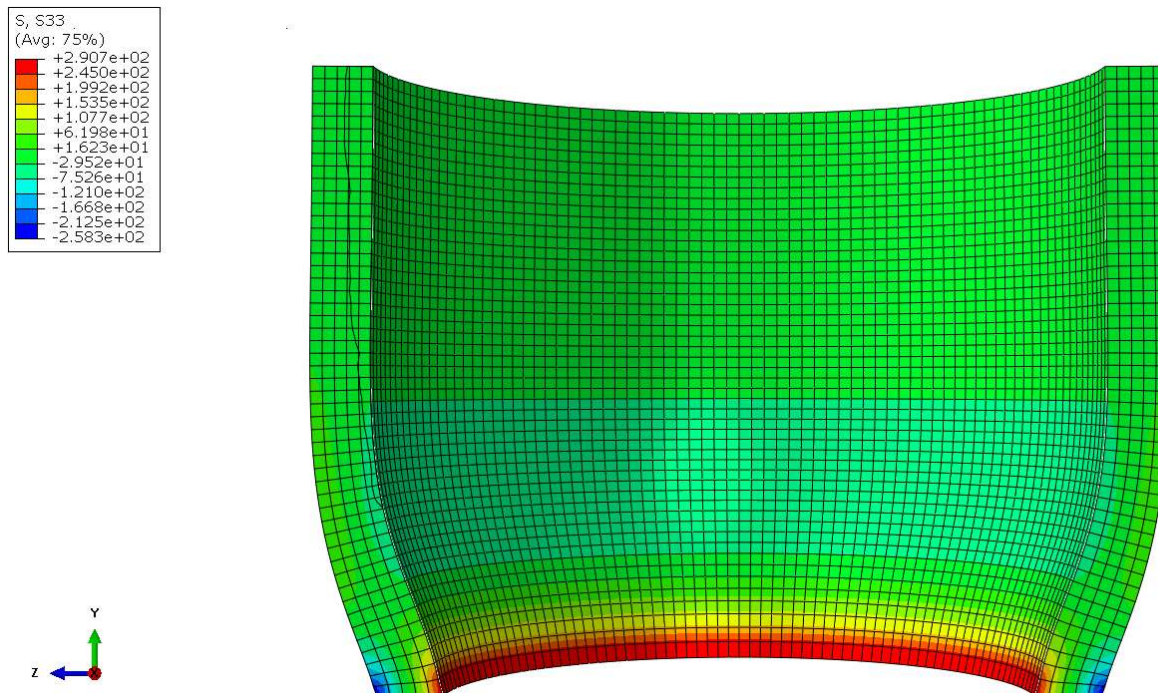
Na slikama 3.12., 3.13. i 3.14. je prikazan deformirani oblik cijevi s vrijednostima radijalnog, cirkularnog i aksijalnog napreznja u MPa. Faktor povećanja deformacija na tim slikama iznosi 100.



Slika 3.12. Deformirani oblik i radijalno napreznje cijevi u MPa



Slika 3.13. Deformirani oblik i cirkularno naprezanje cijevi u MPa



Slika 3.14. Deformirani oblik i aksijalno naprezanje cijevi u MPa

3.1.3. Usporedba rezultata

U tablici 3.3. su prikazana rješenja radijalnih pomaka te radijalnih, cirkularnih i aksijalnih naprezanja na unutarnjem i vanjskom radijusu cijevi i ekvivalentno naprezanje na unutarnjem radijusu dobivena analitičkim i numeričkim proračunom. Izračunata je i relativna razlika numeričkih rezultata u odnosu na analitičke.

Tablica 3.3. Usporedba rezultata

	Analitičko rješenje		Numeričko rješenje			
	r_1	r_2	r_1	Relativna razlika	r_2	Relativna razlika
Radijalni pomak	1,03 mm	0,95 mm	1,025 mm	0,49%	0,9478 mm	0,23%
Ekvivalentno naprezanje	252,77 MPa	-	247,40 MPa	2,1%	-	-
Radijalno naprezanje	-45 MPa	0 MPa	-41,31 MPa	8,2%	-2,073 MPa	-
Cirkularno naprezanje	227,25 MPa	182,25 MPa	223,67 MPa	1,6%	182,08 MPa	0,09%
Aksijalno naprezanje	0 MPa	0 MPa	-1,177 MPa	-	0,7612 MPa	-

U analitički proračun su uvedene neke pretpostavke koje ne utječu bitnije na rezultat, ali ipak unose određenu malu grešku u konačne rezultate. U numeričkom proračunu se kod numeričke integracije također unosi određena greška. Zbog toga je određeno da u slučaju da je razlika između numeričkog i analitičkog rezultata manja od 5%, numerički rezultati se mogu smatrati dovoljno točnima za primjenu u inženjerskoj praksi.

Usporedbom rezultata radijalnih pomaka na unutarnjem i vanjskom radijusu, vidljivo je da je jako mala relativna razlika analitičkog i numeričkog rezultata i dobiveni rezultati su zadovoljavajući. Analitički rezultat ekvivalentnog naprezanja je za oko 2% veći od numeričkog, ali to je još uvijek u granicama zadane točnosti pa se i taj rezultat može smatrati pouzdanim. Rezultat cirkularnog naprezanja je također unutar zadanih granica pa su i ti rezultati zadovoljavajući.

Veća razlika se javlja kod radijalnih i aksijalnih naprezanja. Aksijalna naprezanja po cijelom rubu moraju biti jednaka nuli, a isto tako i radijalna naprezanja na vanjskom rubu, a to se numeričkim proračunom teško može postići. Glavni razlog toga je to da se naprezanja ne računaju u čvorovima konačnih elemenata, kao pomaci, već u točkama integracije i nakon toga se ti rezultati interpoliraju u čvorove konačnih elemenata. Ali ako se uzme u obzir apsolutna vrijednost cirkularnih naprezanja i apsolutna razlika analitičkog i numeričkog rješenja radijalnih i aksijalnih naprezanja, vidljivo je da su te razlike zanemarivo male u odnosu na vrijednost cirkularnog naprezanja pa nemaju prevelik utjecaj na ekvivalentno naprezanje.

Usprkos tim nedostacima numeričkih metoda, one imaju i brojne prednosti. Za razliku od analitičkih izraza, koji su izvedeni za dijelove cijevi dovoljno daleko od uklještenja, primjenom metode konačnih elemenata se vrijednosti naprezanja, pomaka i ostalih veličina mogu izračunati u bilo kojoj točki cijevi, bez obzira imaju li rubni uvjeti utjecaj na rezultate ili ne.

3.2. Dinamička analiza

Dinamička analiza se provodi na mreži konačnih elemenata kod koje je rješenje statičke analize konvergiralo, tj. cijev je diskretizirana s 39000 C3D8 konačnih elemenata, s 5 elemenata po debljini cijevi. Provode se dvije analize, najprije analiza pomoću eksplisitne metode rješavanja, koja se provodi u *Abaqus/Explicit*-u, a zatim analiza pomoću implicitne metode rješavanja, koja se provodi u *Abaqus/Standard*-u.

Dijagram vremenske promjene opterećenja je prikazan na slici 1.5.b). Vrijeme trajanja opterećenja t_p se računa prema izrazu (35), koji opisuje vrijeme opterećivanja u dinamičkoj domeni. Za izračunavanje vlastitog perioda, najprije se provodi numerička analiza kojom se dobije vrijednost prve vlastite frekvencije cijevi i ona iznosi:

$$f = 6,2246 \text{ Hz.} \quad (65)$$

Vlastiti period je recipročna vrijednost vlastite frekvencije pa njegova vrijednost iznosi:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{6,2246} = 0,16 \text{ s.} \quad (66)$$

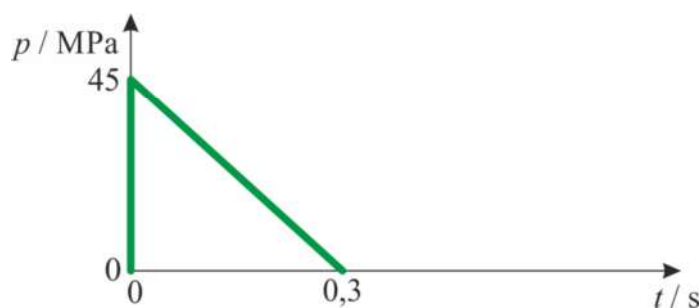
Za dobivanje vremena trajanja opterećenja, izraz (66) se uvrštava u uvjet dinamičke domene (35) pa granice trajanja opterećenja u dinamičkoj domeni iznose:

$$0,064 \text{ s} \leq t_p \leq 0,32 \text{ s.} \quad (67)$$

U skladu s izrazom (67), odabrano vrijeme opterećenja je:

$$t_p = 0,3 \text{ s.} \quad (68)$$

Opterećenje cijevi je udarno, što znači da u nultom trenutku dosegne svoju maksimalnu vrijednost i nakon vremena zadanog izrazom (68) pada na nulu. Dijagram vremenske promjene opterećenja cijevi je prikazan na slici 3.15.



Slika 3.15. Dijagram opterećenja cijevi

U analizi se provjeravaju rezultati radijalnih pomaka, ekvivalentnih naprezanja te radijalnih, cirkularnih i aksijalnih naprezanja.

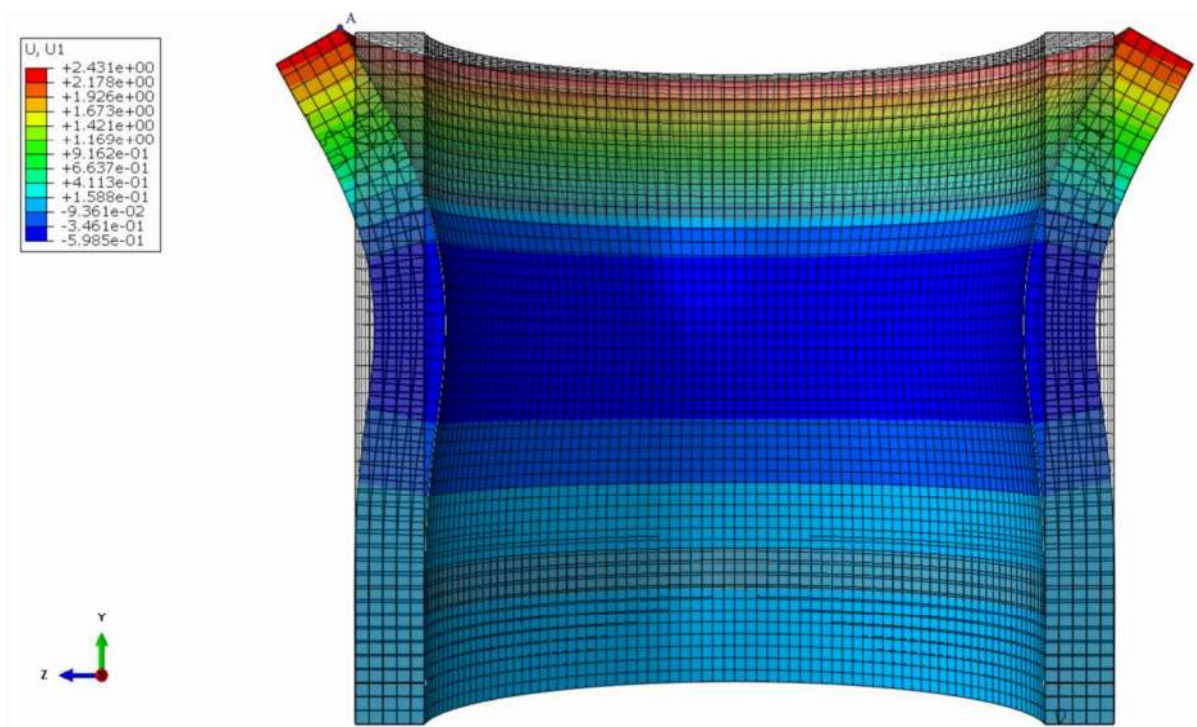
3.2.1. Eksplicitna metoda

Numeričkim proračunom uz primjenu eksplicitne metode se maksimalna naprezanja po apsolutnoj vrijednosti i radijalni pomaci javljaju u trenutku $t = 0,135 \text{ s}$ nakon početka opterećivanja cijevi. Kao i u statičkom proračunu, na unutarnjem radijusu su iznosi apsolutnih vrijednosti radijalnih pomaka, ekvivalentnih, radijalnih i cirkularnih naprezanja nešto veći nego na vanjskom, što se može i očekivati, jer opterećenje djeluje iznutra. Radijalna i aksijalna naprezanja su maksimalna u uklještenju, dok su radijalni pomaci, ekvivalentna i cirkularna naprezanja maksimalni na gornjem rubu. Kako su analitički izrazi izvedeni za gornji rub cijevi, sve veličine će se promatrati u točki A , koja se nalazi na unutarnjem radijusu gornjeg ruba cijevi.

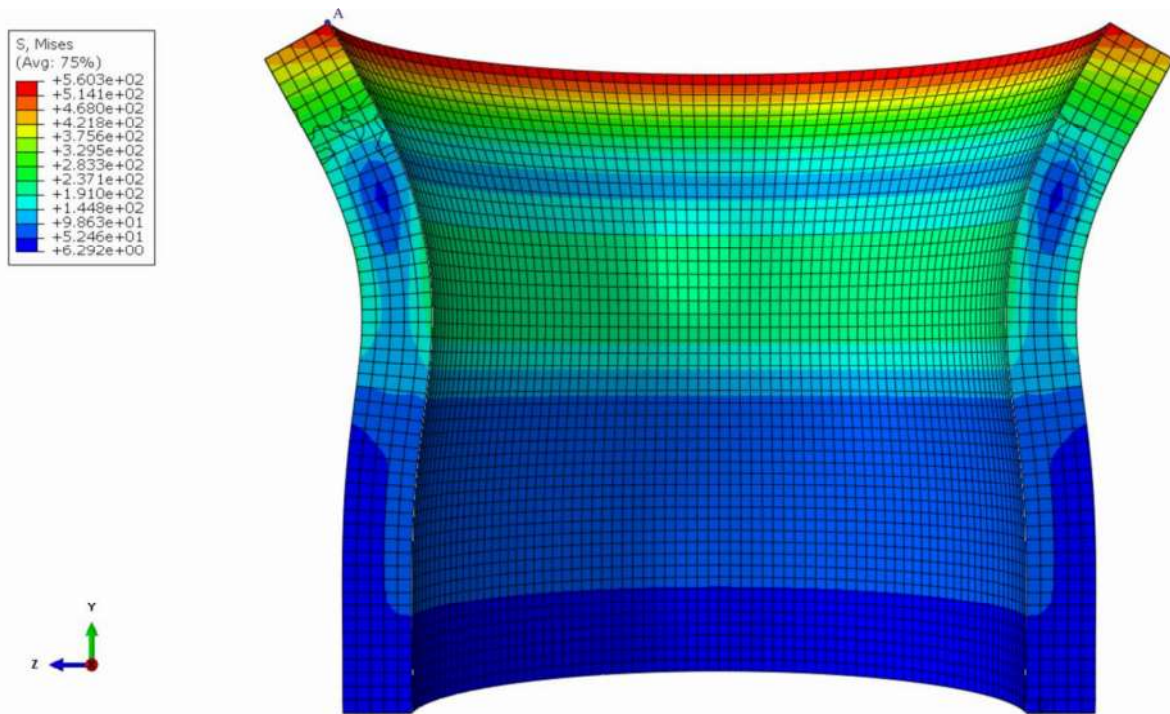
Njihovi iznosi su:

$$\begin{aligned}
 u_A &= 2,612 \text{ mm}, \\
 \sigma_{\text{ekv},A} &= 605,8 \text{ MPa}, \\
 \sigma_{r,A} &= -28,84 \text{ MPa}, \\
 \sigma_{\varphi,A} &= 587,8 \text{ MPa}, \\
 \sigma_{z,A} &= -6,130 \text{ MPa}.
 \end{aligned}
 \tag{69}$$

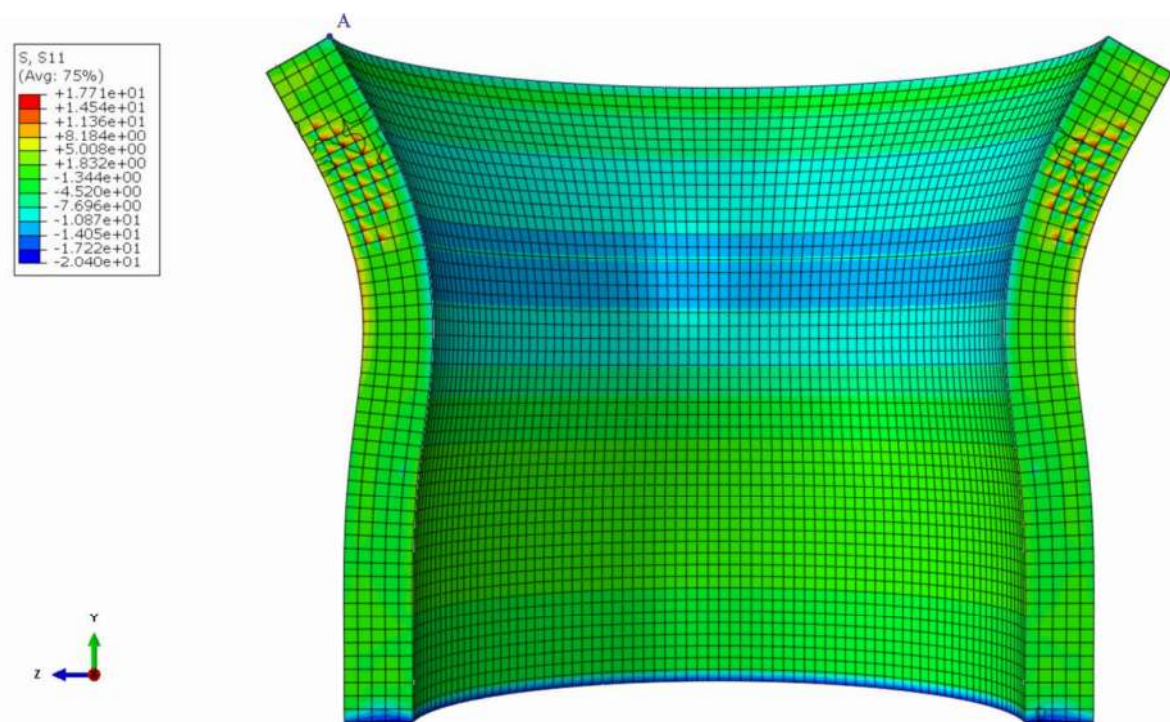
Na slikama 3.16.-3.20. je prikazani deformirani oblik cijevi i vrijednosti radijalnih pomaka te ekvivalentnih, radijalnih, cirkularnih i aksijalnih napreznja u najnepovoljnijem trenutku, tj. u trenutku $t = 0,135 \text{ s}$ kada su iznosi pomaka i napreznja maksimalni. Na slici 3.16. je prikazana i usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika cijevi. Vrijednosti pomaka su u mm, a napreznja u MPa. Faktor povećanja deformacija na tim slikama iznosi 100. Na slikama je označena i točka A u kojoj su izračunate veličine radijalnih pomaka i napreznja.



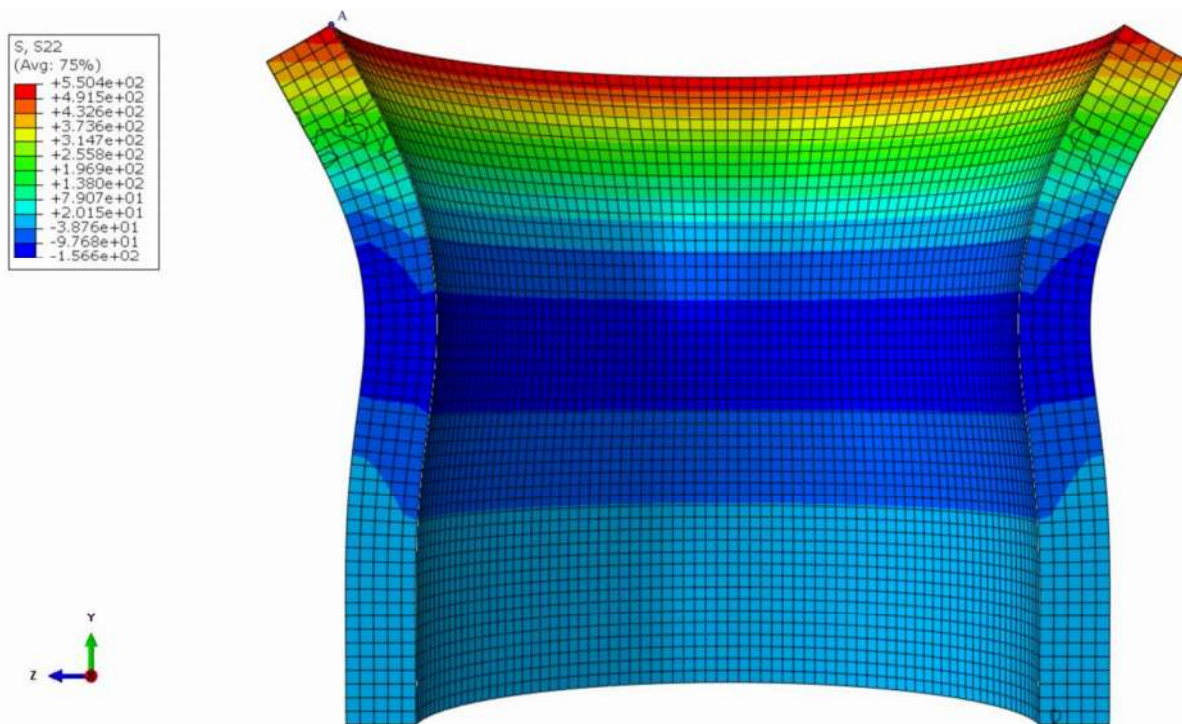
Slika 3.16. Deformirani i nedeformirani oblik cijevi i radijalni pomak cijevi u mm



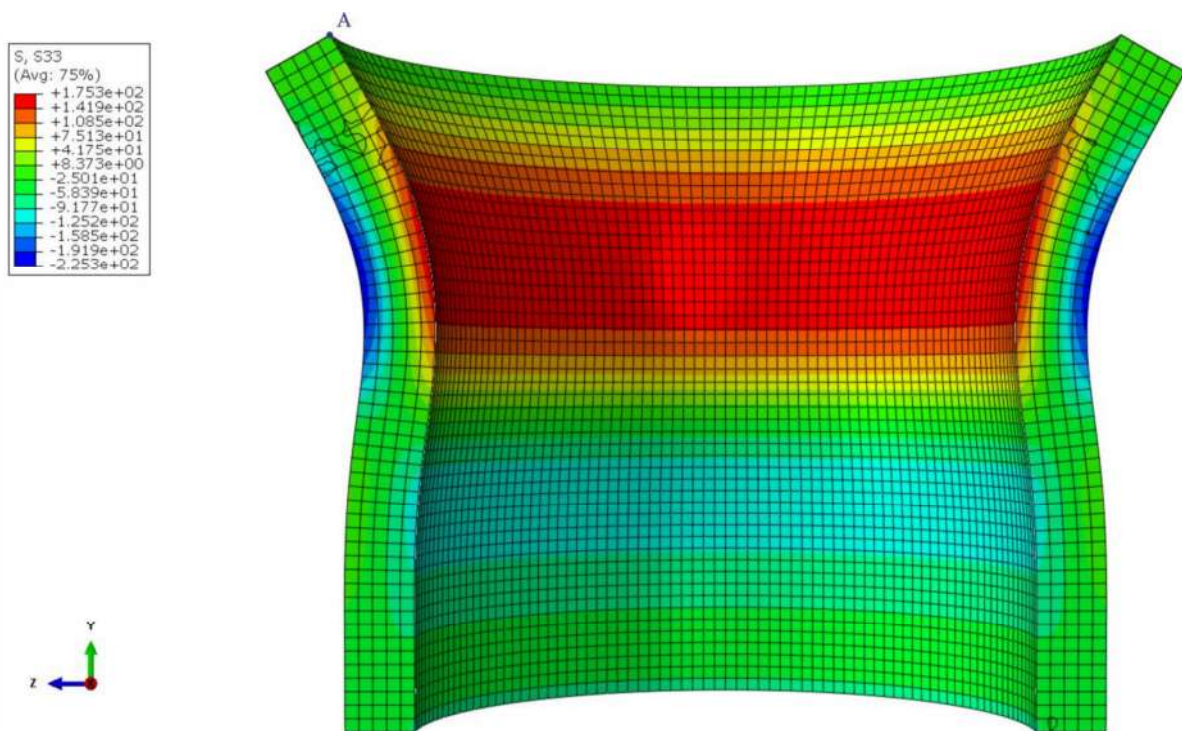
Slika 3.17. Deformirani oblik i ekvivalentno naprezanje cijevi u MPa



Slika 3.18. Deformirani oblik i radijalno naprezanje cijevi u MPa



Slika 3.19. Deformirani oblik i cirkularno naprezanje cijevi u MPa



Slika 3.20. Deformirani oblik i aksijalno naprezanje cijevi u MPa

Vrijednosti radijalnog pomaka i cirkularnih naprezanja na vanjskom radijusu dobivene numeričkim proračunom primjenom eksplicitne metode su:

$$\begin{aligned} u(r_2) &= 2,454 \text{ mm}, \\ \sigma_\varphi(r_2) &= 466,3 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (70)$$

Vrijednosti dinamičkih veličina iz izraza (69) i (70) se mogu usporediti sa statičkim vrijednostima iz tablice 3.3. Vidljivo je da su se sve veličine povećale oko 2,5 puta kod dinamičkog opterećenja pa se može zaključiti da za debelu cijev opterećenu tlakom iznutra, uklještenu na jednom kraju, a na drugom kraju slobodnu, dinamički faktor kod primjene eksplicitne metode iznosi:

$$k_{d, \text{eksp}} \approx 2,5. \quad (71)$$

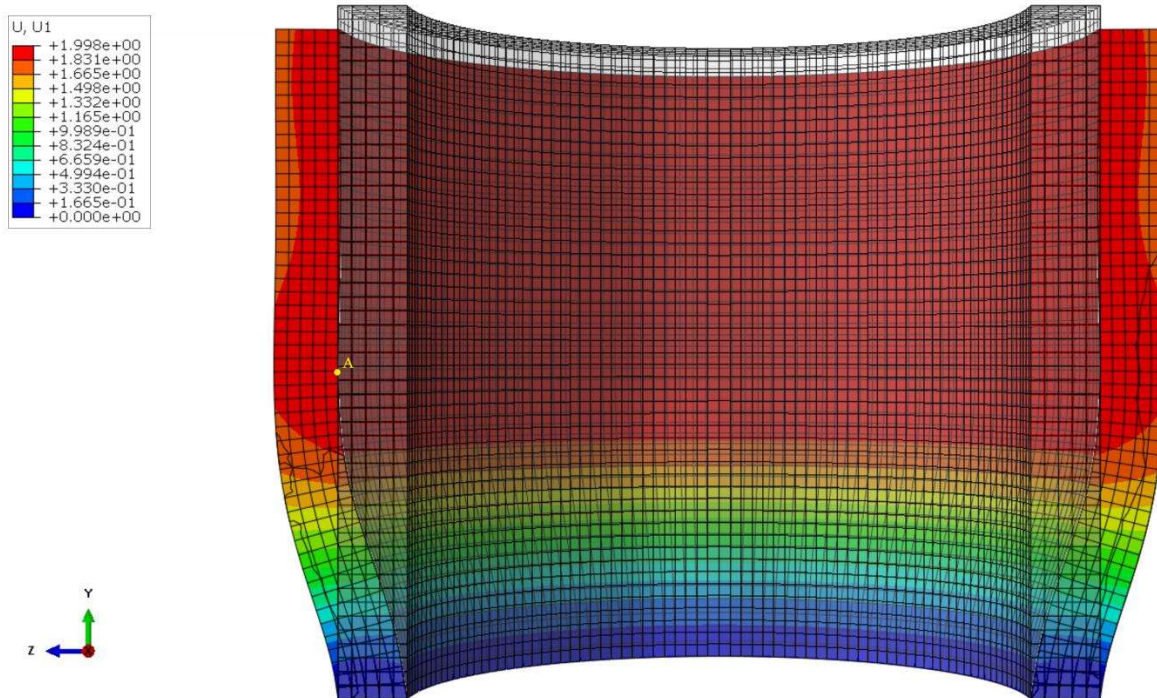
3.2.2. Implicitna metoda

Kod implicitne metode se do rješenja dolazi iterativnim postupkom pa računanje nepoznatih veličina traje nešto duže nego kod primjene eksplicitne metode, kao što je opisano u odjeljku 1.3.1. Maksimalni dinamički radijalni pomak i naprezanja se kod primjene te metode dobiju u trenutku $t=0,0185$ s, tj. odmah na početku opterećivanja. Vrijednosti radijalnog pomaka, ekvivalentnih, radijalnih i cirkularnih naprezanja na unutarnjem radijusu gornjeg ruba cijevi su i primjenom ove metode nešto veće nego na vanjskom radijusu. I u ovome slučaju su radijalna i aksijalna naprezanja maksimalna u uklještenju, ali zbog lakše usporedbe će se njihove vrijednosti računati u točki A u kojoj su ostale veličine maksimalne. Vrijednosti mjerenih veličina u točki A primjenom implicitne metode iznose:

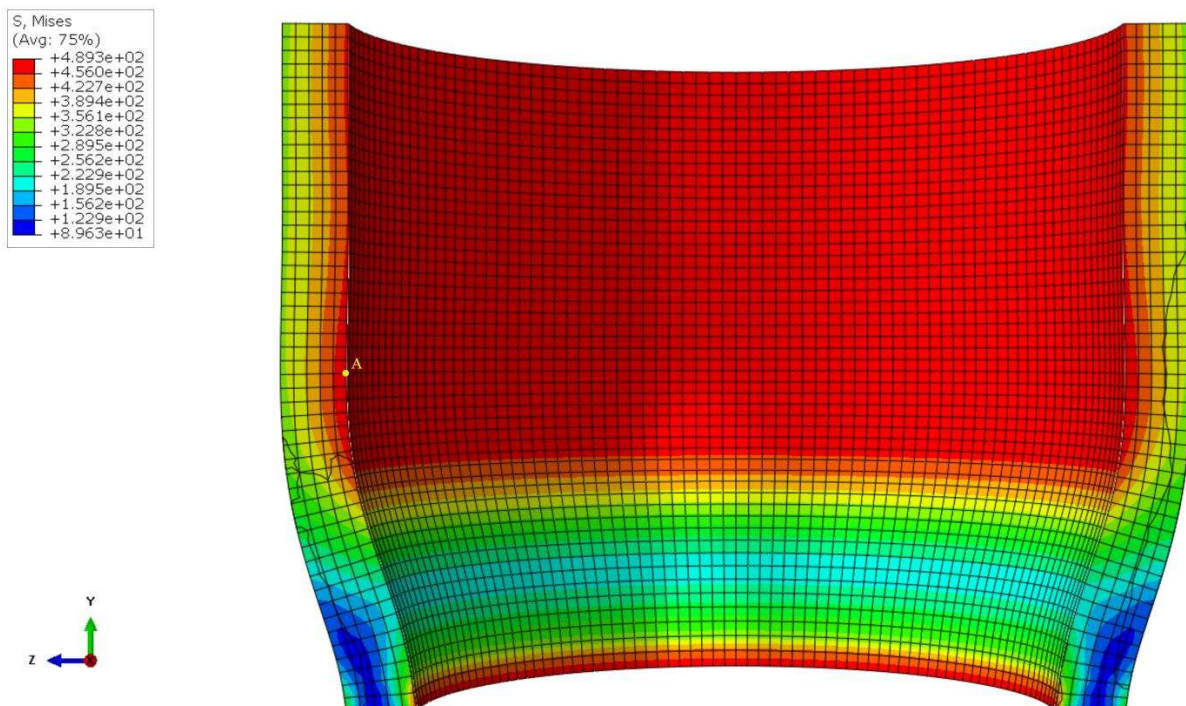
$$\begin{aligned} u_A &= 2,061 \text{ mm}, \\ \sigma_{\text{ekv},A} &= 515,1 \text{ MPa}, \\ \sigma_{r,A} &= -30,58 \text{ MPa}, \\ \sigma_{\varphi,A} &= 453,4 \text{ MPa}, \\ \sigma_{z,A} &= -2,981 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (72)$$

Na slikama 3.21.-3.25. je prikazan deformirani oblik cijevi u trenutku maksimalnih radijalnih pomaka i naprezanja, tj. u trenutku $t=0,0185$ s nakon početka opterećivanja i vrijednosti radijalnih pomaka, ekvivalentnih, radijalnih, cirkularnih i aksijalnih naprezanja. Vrijednosti radijalnih pomaka su u mm, a naprezanja u MPa.

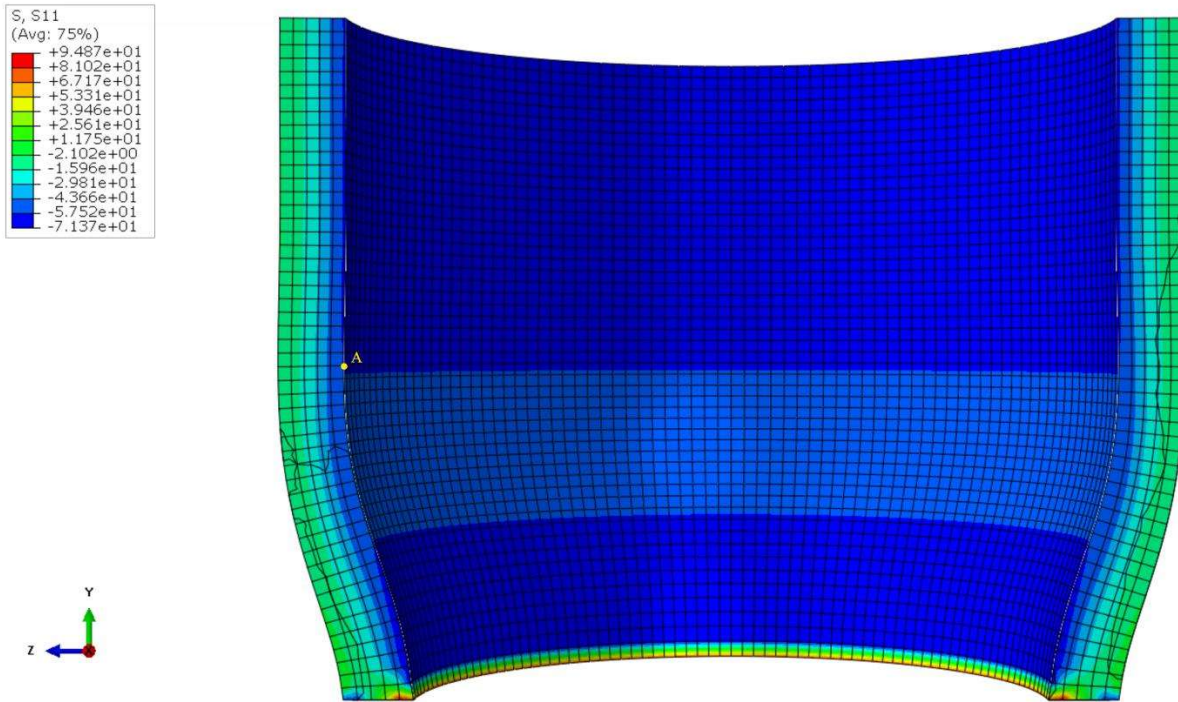
Točka *A* na slikama prikazuje točku u kojoj su izračunate vrijednosti veličina iz izraza (72). Na slici 3.21. je prikazana usporedba deformiranog i nedeformiranog oblika cijevi. Faktor povećanja deformacija na svim slikama iznosi 100.



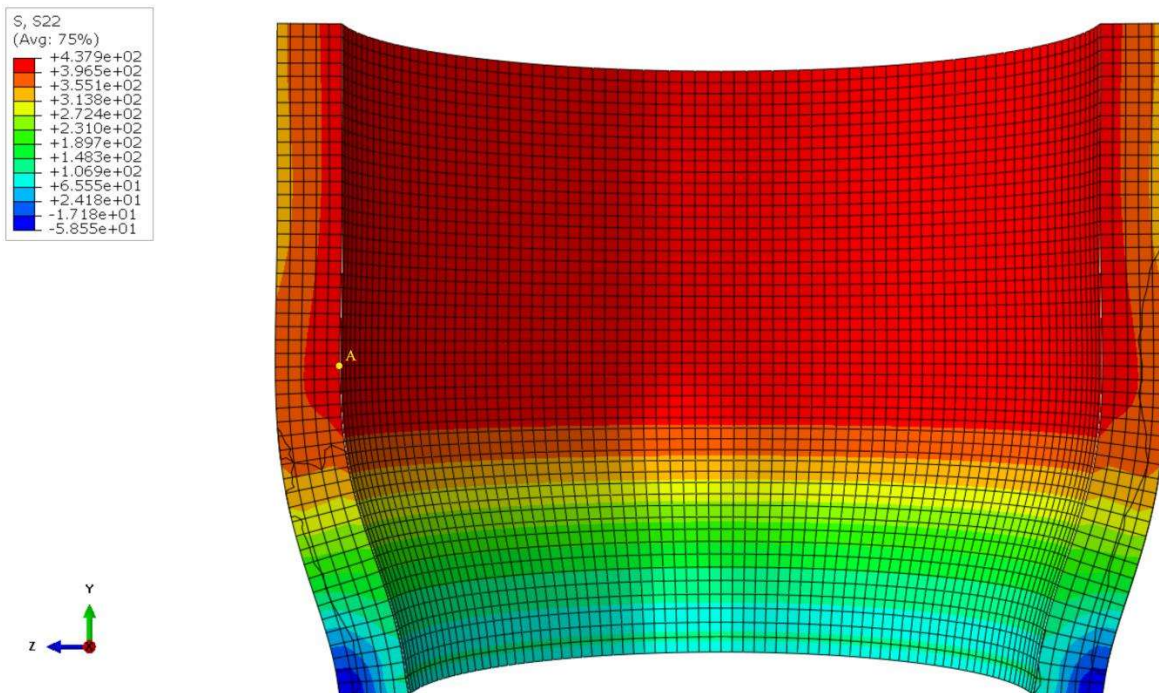
Slika 3.21. Deformirani i nedeformirani oblik cijevi i radijalni pomak cijevi u mm



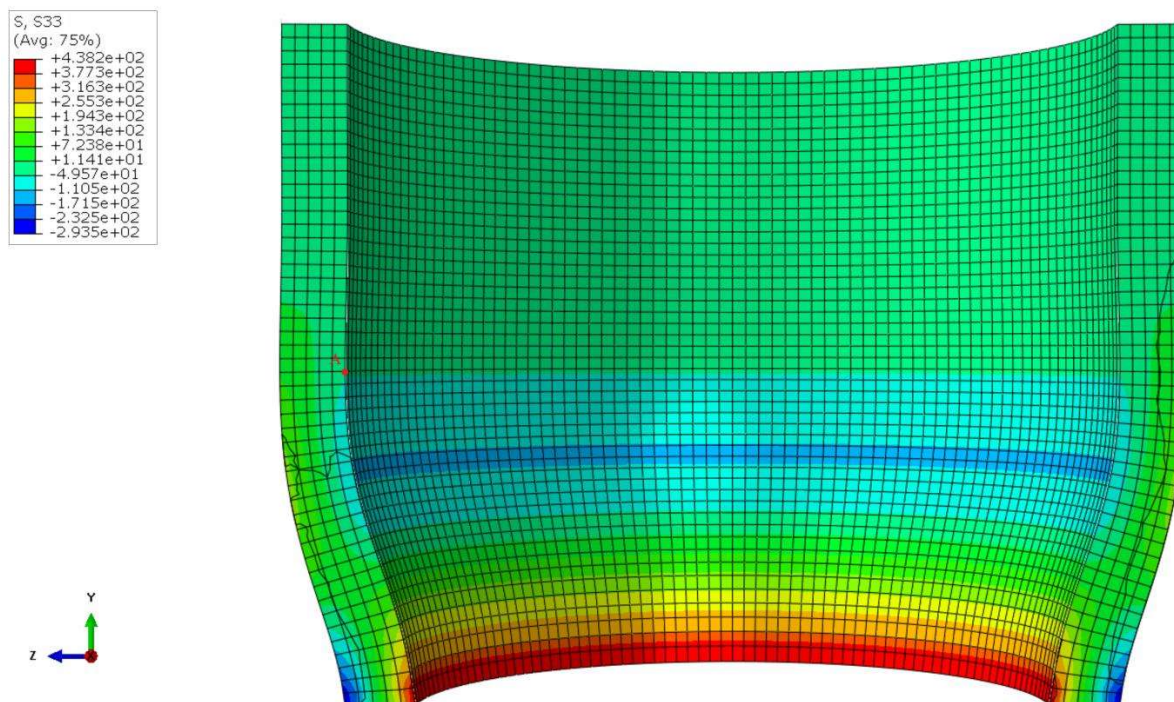
Slika 3.22. Deformirani oblik i ekvivalentno naprezanje cijevi u MPa



Slika 3.23. Deformirani oblik i radijalno naprezanje cijevi u MPa



Slika 3.24. Deformirani oblik i cirkularno naprezanje cijevi u MPa



Slika 3.25. Deformirani oblik i aksijalno naprezanje cijevi u MPa

Vrijednosti radijalnog pomaka i cirkularnih naprežanja na unutarnjem i vanjskom radijusu i ekvivalentnog naprežanja na unutarnjem radijusu slobodnog kraja cijevi dobivene numeričkim proračunom primjenom implicitne metode su:

$$\begin{aligned}
 u(r_1) &= 1,956 \text{ mm}, \\
 \sigma_{\text{ekv}}(r_1) &= 457,9 \text{ MPa}, \\
 \sigma_{\varphi}(r_1) &= 440,4 \text{ MPa}, \\
 u(r_2) &= 1,832 \text{ mm}, \\
 \sigma_{\varphi}(r_2) &= 351,8 \text{ MPa}.
 \end{aligned}
 \tag{73}$$

Vrijednosti dinamičkih veličina iz izraza (73) se mogu usporediti sa statičkim vrijednostima iz tablice 3.3. Vidljivo je da su se sve veličine povećale oko 1,9 puta kod dinamičkog opterećenja pa se može zaključiti da za debelu cijev opterećenu tlakom iznutra, ukleštenu na jednom kraju, a na drugom kraju slobodnu, dinamički faktor kod primjene implicitne metode iznosi:

$$k_{d, \text{impl}} \approx 1,9. \tag{74}$$

3.2.3. Usporedba rezultata dobivenih eksplicitnom i implicitnom metodom

U tablici 3.4. su prikazani rezultati maksimalnog radijalnog pomaka, ekvivalentnog i cirkularnog naprezanja dobiveni eksplicitnom i implicitnom metodom. Kako su vrijednosti radijalnih i aksijalnih naprezanja maksimalne u uklještenju, neće se uspoređivati njihove maksimalne vrijednosti, nego vrijednosti u točki na unutarnjem radijusu gornjeg ruba cijevi, da bi se lakše usporedile vrijednosti dobivene eksplicitnom i implicitnom metodom. U posljednjem stupcu je prikazana relativna razlika rezultata dobivenih primjenom eksplicitne i implicitne metode.

Tablica 3.4. Usporedba rezultata eksplicitne i implicitne metode

	Eksplicitna metoda	Implicitna metoda	Relativna razlika
Radijalni pomak	2,612 mm	2,061 mm	21%
Ekvivalentno naprezanje	605,8 MPa	515,1 MPa	15%
Radijalno naprezanje	-28,84 MPa	-30,58 MPa	6%
Cirkularno naprezanje	587,8 MPa	453,4 MPa	23%
Aksijalno naprezanje	-6,130 MPa	-2,981 MPa	51%

Iz rezultata u tablici 3.4. se može zaključiti da za sve veličine, osim radijalnog naprezanja, eksplicitna metoda daje veće apsolutne vrijednosti naprezanja od implicitne metode. Zato se može zaključiti da je za dimenzioniranje cijevi bolje koristiti eksplicitnu metodu, jer se njome dobiju veći iznosi naprezanja pa je ona više na strani sigurnosti od implicitne metode.

Ako za materijal cijevi postavimo opći konstrukcijski čelik St 70-2, koji se često upotrebljava u inženjerskoj praksi, njegova granica tečenja i vlačna čvrstoća iznose [10]:

$$R_{p0,2} = 420 \text{ MPa.} \quad (75)$$

$$R_m = 850 \text{ MPa.} \quad (76)$$

Usporede li se maksimalne vrijednosti ekvivalentnog naprezanja iz tablice 3.4. s granicom tečenja iz izraza (75), zaključuje se da kod zadane geometrije cijevi i opterećenja ta granica prelazi i materijal ulazi u plastično područje. Da bi se to izbjeglo, potrebno je smanjiti opterećenje cijevi ili promijeniti geometriju ili materijal cijevi. Opterećenje se može smanjiti tako da se smanji masa eksploziva, čime se smanji tlak koji pritišće stijenke cijevi. Ako se koristi ista količina eksploziva, potrebno je povećati unutarnji radijus cijevi, čime se smanjuje tlak kojim je cijev opterećena ili povećati debljinu stijenke, čime se smanje naprezanja u cijevi. Treći način kojim se može spriječiti ulazak u plastično područje je da se koristi materijal s višom granicom tečenja od maksimalnog ekvivalentnog naprezanja.

Uspoređivanjem maksimalnog ekvivalentnog naprezanja s vlačnom čvrstoćom, može se zaključiti da su ta naprezanja puno niža pa neće doći do pucanja materijala.

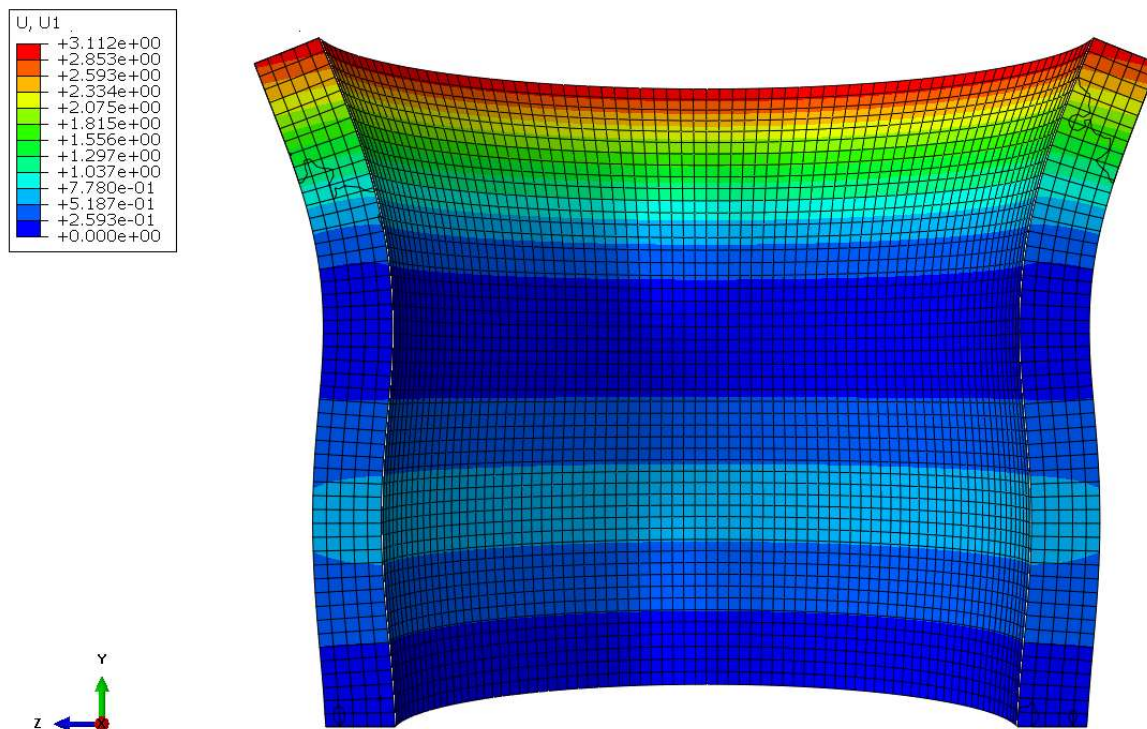
Prikazani rezultati su dobiveni za vrijeme trajanja opterećenja $t_p = 0,3$ s, ali kako je pokazano na verifikacijskom primjeru, bolji rezultati se dobiju ako se to vrijeme poveća 3,33 puta. Zato je napravljena dinamička analiza na cijevi diskretiziranoj s 39000 konačnih elemenata s vremenom trajanja opterećenja $t_p = 1$ s. Rezultati maksimalnih radijalnih pomaka, ekvivalentnih i cirkularnih naprezanja, dobiveni primjenom eksplicitne i implicitne metode, prikazani su u tablici 3.5. Iznosi radijalnih i cirkularnih naprezanja su maksimalni u uklještenju pa je radi lakše usporedbe rezultata u tablici 3.5. prikazana njihova vrijednost na unutarnjem radijusu gornjeg ruba cijevi.

Tablica 3.5. Usporedba rezultata eksplicitne i implicitne metode za $t_p = 1$ s

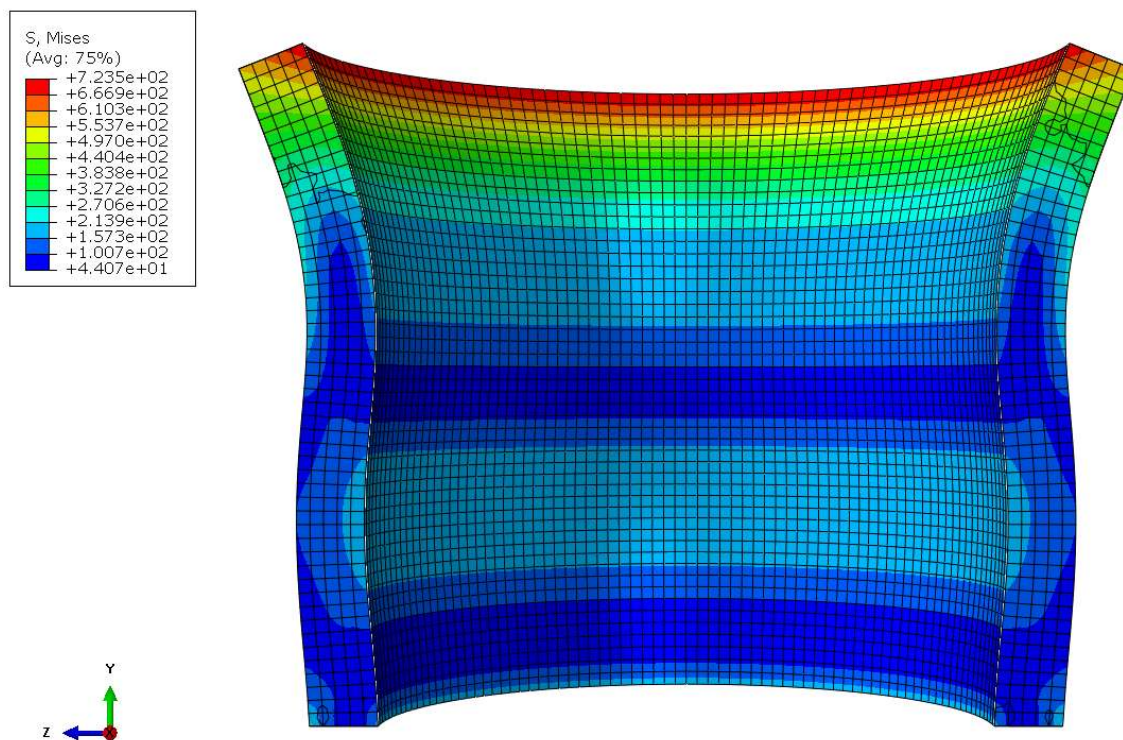
	Eksplicitna metoda	Implicitna metoda	Relativna razlika
Radijalni pomak	3,112 mm	2,055 mm	34%
Ekvivalentno naprezanje	723,5 MPa	483,0 MPa	33%
Radijalno naprezanje	-37,14 MPa	-41,91 MPa	13%
Cirkularno naprezanje	699,1 MPa	458,6 MPa	34%
Aksijalno naprezanje	-10,41 MPa	-4,514 MPa	57%

Primjenom eksplicitne metode, maksimalne vrijednosti veličina iz tablice 3.5. se postižu u trenutku $t = 0,2851$ s, a kod primjene implicitne metode je to u trenutku $t = 0,2080$ s. Na slikama 3.26. i 3.27. je prikazan deformirani oblik cijevi i vrijednosti radijalnog pomaka u mm i ekvivalentnog naprezanja u MPa dobiveni primjenom eksplicitne metode u trenutku $t = 0,2851$ s, a na slikama 3.28. i 3.29. je prikazan deformirani oblik cijevi i vrijednosti radijalnog pomaka u mm i ekvivalentnog naprezanja u MPa dobiveni primjenom implicitne metode u trenutku $t = 0,2080$ s. Vrijeme trajanja opterećenja na sve četiri slike je $t = 1$ s.

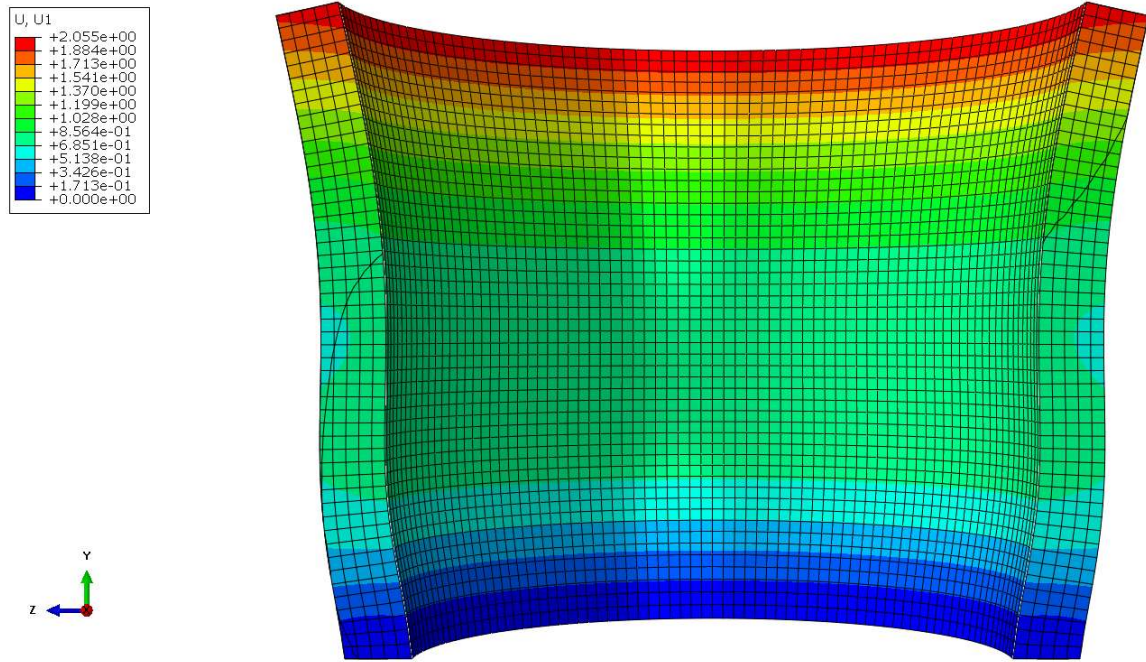
Ako se usporede rezultati iz tablica 3.4. i 3.5., vidljivo je da se primjenom eksplicitne metode kod svih veličina povećala apsolutna vrijednost. U tom se slučaju sve maksimalne vrijednosti nalaze na unutarnjem radijusu gornjeg ruba cijevi. Kod implicitne metode je to nešto drugačije. Vrijednost maksimalnog radijalnog pomaka i ekvivalentnog naprezanja se smanjila, dok su se apsolutne vrijednosti maksimalnog radijalnog, cirkularnog i ekvivalentnog naprezanja povećale. Uz to, kod duljeg trajanja opterećenja se maksimalne vrijednosti tih veličina nalaze na unutarnjem radijusu slobodnog kraja, jednako kao i kod eksplicitne metode, dok se kod kraćeg trajanja opterećenja te maksimalne vrijednosti nalaze na unutarnjem radijusu cijevi, ali na nešto nižoj aksijalnoj koordinati. To se može dobro vidjeti na dijagramima na slikama 3.30. i 3.31., gdje je prikazana raspodjela radijalnog pomaka i ekvivalentnog naprezanja po visini cijevi za sva četiri promatrana slučaja.



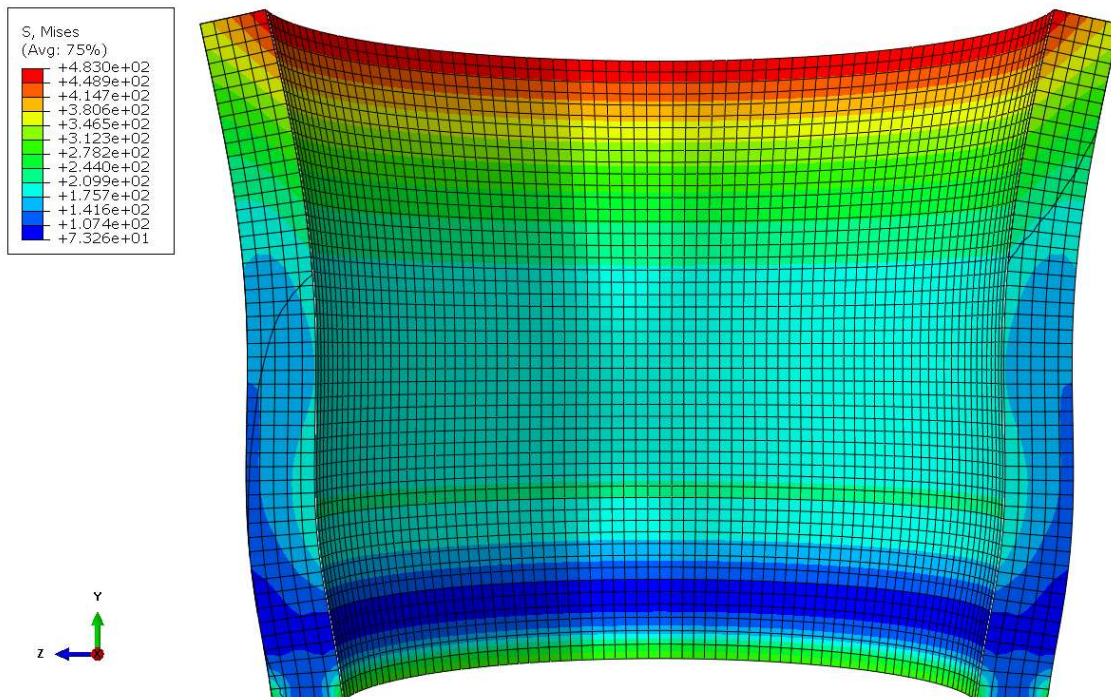
Slika 3.26. Deformirani oblik i radijalni pomak cijevi u mm dobiven eksplicitnom metodom za vrijeme trajanja opterećenja $t = 1$ s



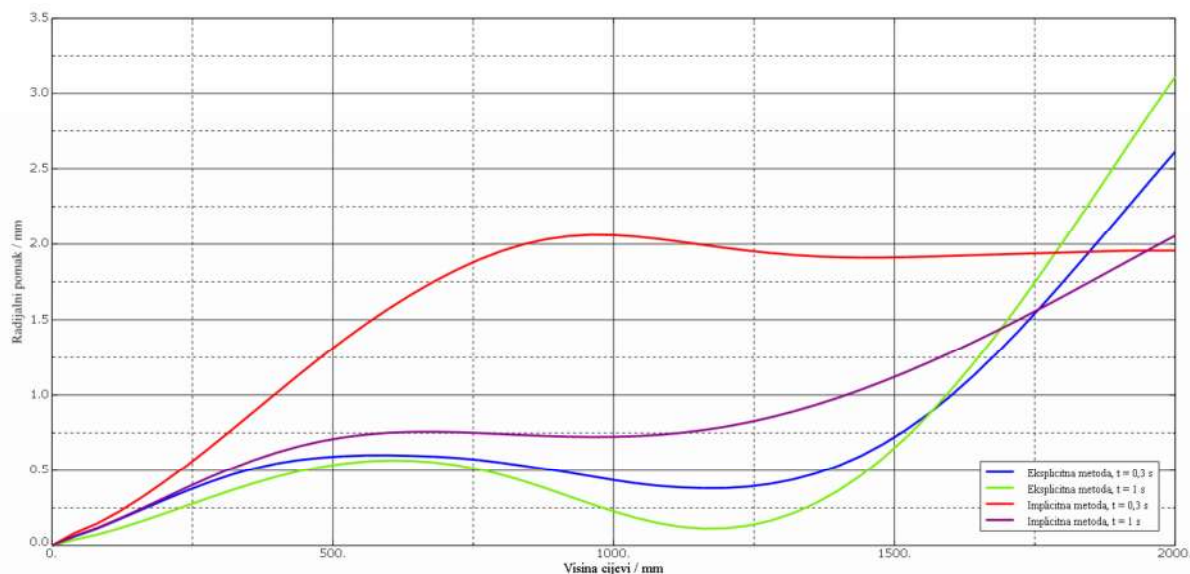
Slika 3.27. Deformirani oblik i ekvivalentno naprezanje u MPa dobiven eksplicitnom metodom za vrijeme trajanja opterećenja $t = 1$ s



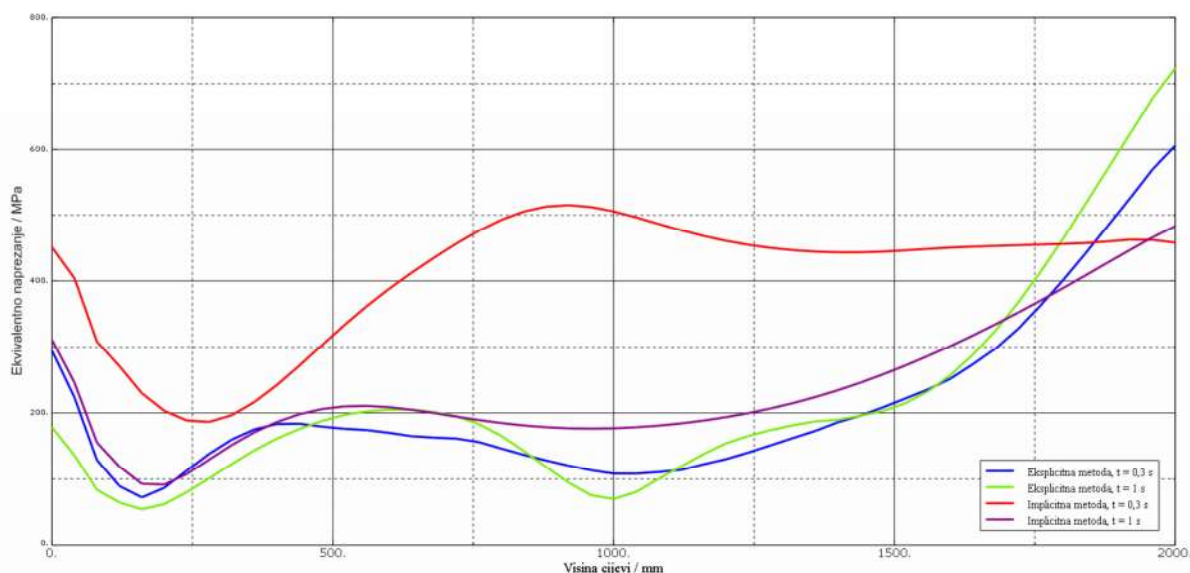
Slika 3.28. Deformirani oblik i radijalni pomak cijevi u mm dobiven implicitnom metodom za vrijeme trajanja opterećenja $t = 1$ s



Slika 3.29. Deformirani oblik i ekvivalentno naprezanje u MPa dobiven implicitnom metodom za vrijeme trajanja opterećenja $t = 1$ s



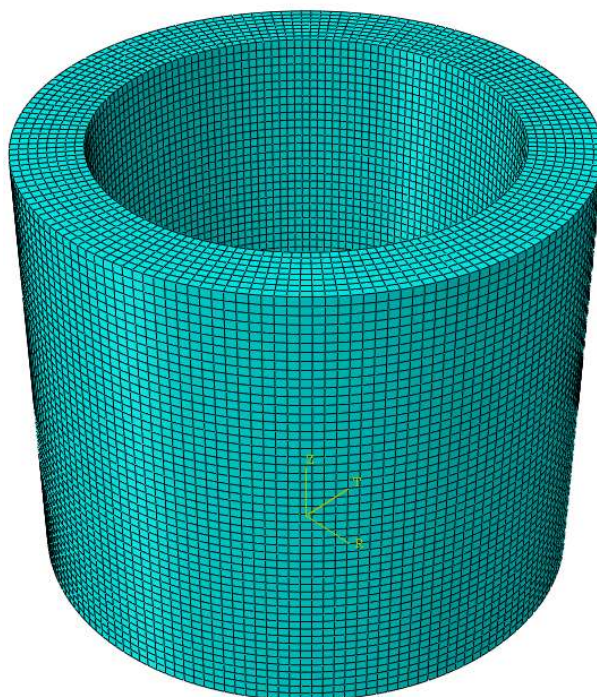
Slika 3.30. Dijagram raspodjele radijalnog pomaka po visini cijevi



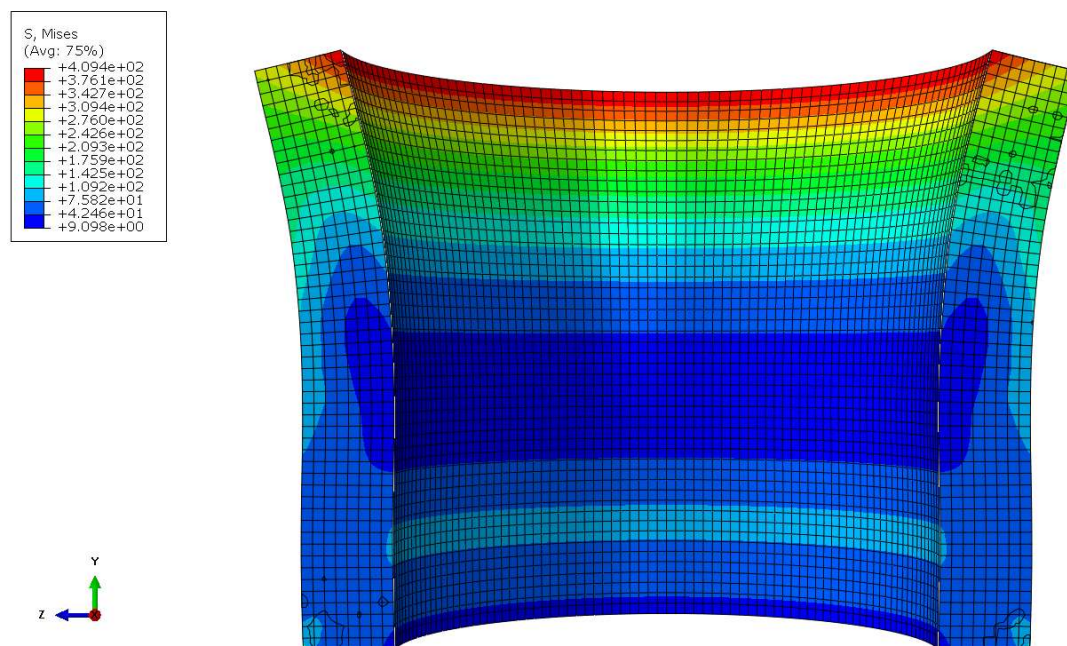
Slika 3.31. Dijagram raspodjele ekvivalentnog naprezanja po visini cijevi

Kako je u proračunu korištena cijev debljine $d = 200$ mm i u tom su slučaju naprezanja u cijevi bila veća od granice tečenja, napravljena je analiza cijevi čiji je vanjski radijus povećan za 100 mm, a ostali podaci vezani za geometriju, materijal, rubne uvjete i opterećenje cijevi su jednaki kao i u prošlom proračunu. Veličina konačnih elemenata je također jednaka veličini konačnih elemenata kod koje je rješenje cijevi debljine $d = 200$ mm konvergiralo, tj. dimenzija stranice konačnog elementa je približno 40 mm. Time se dobije cijev diskretizirana s ukupno 65600 C3D8 elemenata. Na slici 3.32. je prikazana mreža konačnih elemenata kojom je diskretizirana cijev debljine $d = 300$ mm.

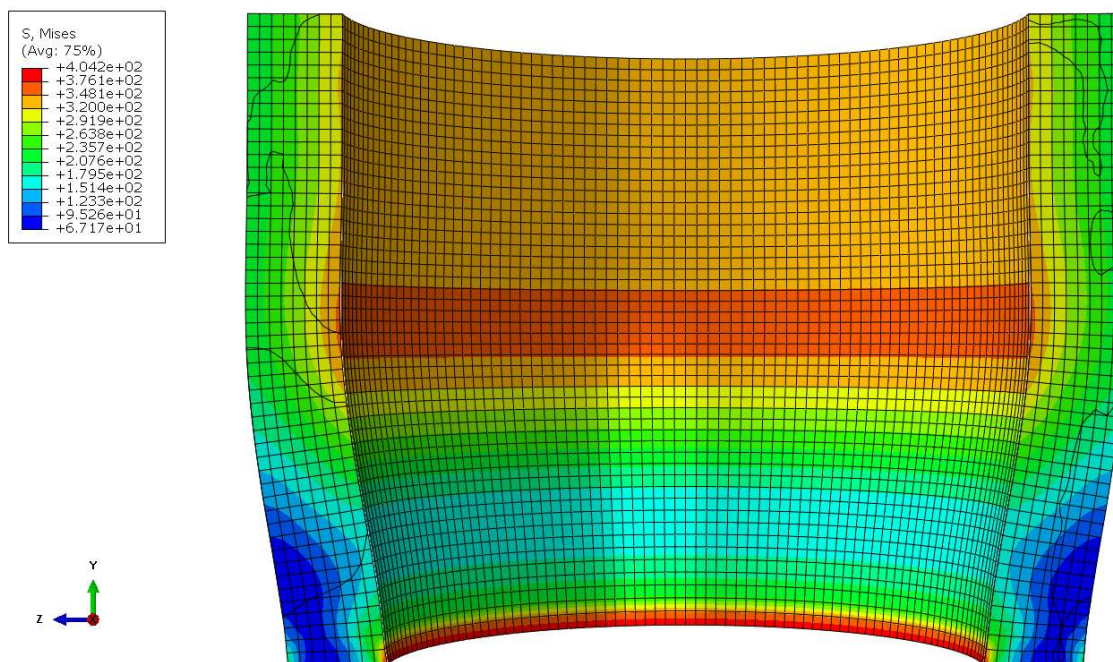
Na slikama 3.33. i 3.34. su prikazani deformirani oblici takve cijevi i vrijednosti ekvivalentnih napreznja u MPa dobivene primjenom eksplicitne i implicitne metode u dinamičkoj analizi.



Slika 3.32. Cijev debljine $d = 300$ mm diskretizirana s 65600 konačnih elemenata



Slika 3.33. Deformirani oblik cijevi debljine $d = 300$ mm i ekvivalentno napreznje cijevi u MPa dobiveno primjenom eksplicitne metode



Slika 3.34. Deformirani oblik cijevi debljine $d = 300$ mm i ekvivalentno naprezanje cijevi u MPa dobiveno primjenom implicitne metode

Iz slika 3.33. i 3.34. se mogu iščitati maksimalne vrijednosti ekvivalentnog naprezanja koje iznose:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ekv, eksp}} &= 409,4 \text{ MPa,} \\ \sigma_{\text{ekv, impl}} &= 404,2 \text{ MPa.}\end{aligned}\tag{77}$$

Ako se vrijednosti maksimalnih ekvivalentnih naprezanja iz izraza (77) usporede s granicom tečenja čelika St 70-2 iz izraza (75), zaključuje se da su u slučaju da se debljina cijevi poveća na 300 mm naprezanja takva da se cijev u svakom trenutku nalazi u elastičnom području i ne dolazi do plastičnih deformacija pa se vrijednosti dobivene numeričkom analizom te cijevi mogu smatrati pouzdanima. Također, ovdje se isto može primjetiti da kod eksplicitne metode maksimalno naprezanje se nalazi na gornjem rubu, a kod implicitne na nižoj aksijalnoj koordinati.

4. ZAKLJUČAK

U radu je provedena numerička analiza debelostjene cijevi koja služi za ispitivanja eksploziva. Provedeni su analitički proračuni za probleme za koje postoji analitičko rješenje i numerički proračun metodom konačnih elemenata u programskom paketu *Abaqus*. Kako se kod eksplozije u jako kratkom vremenskom periodu opterećenje povećava do svoje maksimalne vrijednosti i nakon toga pada, potrebno je provesti dinamičku analizu, jer se kod statičke analize vrijednost opterećenja sporo mijenja od nule do maksimalne vrijednosti. Dinamička analiza je provedena primjenom implicitne metode u *Abaqus/Standard*-u i primjenom eksplicitne metode u *Abaqus/Explicit*-u i rezultati su uspoređeni s rezultatima statičke analize i analitičkim izrazima. Korišteni su C3D8 heksaedarski konačni elementi prvog reda, jer *Abaqus/Explicit* ne podržava korištenje elemenata višeg reda.

Najprije je provedena verifikacija na jednostavnom modelu grede na dva oslonca, za koji postoji analitičko rješenje za statički i dinamički maksimalni progib. Za izračunavanje statičkog progiba je korišten drugi Castiglianov teorem, a dinamički progib se izračunao približnim proračunom udarnih naprezanja. Numerički proračun je proveden na 3D modelu grede korištenjem heksaedarskih elemenata prvog reda. Konvergencija rješenja je provedena na statičkom opterećenju cijevi, da bi se uštedilo na vremenu. Statička analiza je dala gotovo jednake rezultate kao i analitičko rješenje. Provedene su dvije dinamičke analize. U prvoj je vrijeme opterećivanja odabrano prema vrijednostima iz literature. Eksplicitna i implicitna metoda su dale gotovo jednake rezultate, ali je to rješenje imalo veliko odstupanje od analitičkog rješenja. Zbog toga je bilo potrebno povećati vrijeme opterećivanja nešto više od tri puta i tako su se dobili rezultati bliži analitičkim. I u ovome slučaju su se primjenom eksplicitne i implicitne metode dobili gotovo jednaki rezultati. Iz toga se može zaključiti da se za zadani model mogu dobiti dobra numerička rješenja i pomoću eksplicitne i pomoću implicitne metode, ali je bolje koristiti eksplicitnu metodu zbog kraćeg vremena računanja.

Nakon provedene verifikacije, napravljena je analiza na 3D modelu debelostjene cijevi. Debljina cijevi i srednji radijus su odabrani tako da cijev zadovoljava uvjet debele ljuske, a visina tako da se zadovolji uvjet duge ljuske, tj. da rubni uvjeti jednog kraja cijevi ne utječu na rezultate mjerene na drugom kraju cijevi. Cijev je na jednom kraju uklještena, a na drugom slobodna i opterećena tlakom iznutra, čiji je iznos jednak tlaku koji nastane eksplozijom 10 kg TNT-a na udaljenosti 900 mm.

Zbog lakšeg opisivanja geometrije cijevi, korišten je cilindrični koordinatni sustav i provjeravale su se vrijednosti radijalnog pomaka te ekvivalentnog, radijalnog, cirkularnog i aksijalnog naprezanja. Najprije se na tom modelu cijevi proveo analitički proračun i to za slučaj statičkog opterećenja. Time su izračunate vrijednosti radijalnih pomaka, ekvivalentnih, radijalnih, cirkularnih i aksijalnih naprezanja slobodnog kraja cijevi, gdje uklještenje nema veliki utjecaj i zato se za te veličine može izračunati analitičko rješenje. Numerički proračun je proveden na 3D modelu debelostjene cijevi diskretiziranom heksaedarskim konačnim elementima prvog reda. Konvergencija rješenja maksimalnog radijalnog pomaka i maksimalnog ekvivalentnog naprezanja je provedena za slučaj statičkog opterećenja, jer statička analiza ima puno kraće vrijeme računanja od dinamičke pa se tako uštedilo na vremenu. Nakon što je rješenje iskonvergiralo, uspoređeni su rezultati radijalnog pomaka te ekvivalentnog, radijalnog, cirkularnog i aksijalnog naprezanja na slobodnom kraju cijevi dobiveni analitičkim i numeričkim proračunom. Iz rezultata se može zaključiti da se za radijalne pomake i ekvivalentna i cirkularna naprezanja analitički i numerički rezultati jako malo razlikuju pa se numerički rezultati mogu smatrati pouzdanima. Iznosi radijalnih i aksijalnih naprezanja se nešto više razlikuju. Do te razlike dolazi zato jer su numeričke vrijednosti mjerene na rubu cijevi, u čvorovima konačnih elemenata u kojima bi njihova vrijednost trebala biti jednaka nuli. Te vrijednosti nisu potpuno točne, jer se u *Abaqusu* naprezanja računaju u točkama integracije i nakon toga interpoliraju po ostalim točkama elementa. Točke integracije nisu na rubovima elemenata i zato u tim točkama iznos radijalnih i aksijalnih naprezanja nije jednak nuli, a interpolacijom se uvodi određena numerička pogreška u vrijednosti naprezanja u ostalim točkama elementa. Ali kako su te razlike zanemarivo male u odnosu na maksimalni iznos ekvivalentnog naprezanja, one se mogu zanemariti.

Nakon toga je provedena dinamička analiza na mreži konačnih elemenata kod koje je iskonvergiralo rješenje kod statičkog opterećenja cijevi. Kod modela cijevi je uočena bitnija razlika između eksplicitne i implicitne metode. Vrijednosti naprezanja i pomaka dobivene eksplicitnom metodom su veće od vrijednosti dobivenih implicitnom metodom. Vrijednosti maksimalnih naprezanja u oba slučaja su bile veće od granice tečenja materijala, što znači da neki dijelovi cijevi ulaze u plastično područje pa se te vrijednosti ne mogu smatrati točnima, jer je proračun proveden za linearno-elastični materijal. Da bi se spriječio ulazak cijevi u plastično područje, potrebno je smanjiti opterećenje koje djeluje na cijev, povećati debljinu cijevi ili izraditi cijev od materijala s višom granicom tečenja.

Na verifikacijskom modelu se pokazalo da je potrebno povećati vrijeme opterećivanja da bi se dobili rezultati bliži analitičkima. Zbog toga je provedena dinamička analiza s duljim trajanjem opterećenja. Primjenom eksplicitne metode dobiveni su rezultati maksimalnog radijalnog pomaka i maksimalnog ekvivalentnog naprezanja i dalje na unutarnjem radijusu gornjeg ruba cijevi, a njihove vrijednosti su se povećale za oko 20%. Primjenom implicitne metode su se te vrijednosti puno manje promijenile, ali se povećanjem vremena opterećivanja maksimalni radijalni pomaci i ekvivalentna naprezanja javljaju također na unutarnjem radijusu gornjeg ruba cijevi, dok su kod kraćeg vremena opterećivanja maksimalni radijalni pomaci i ekvivalentna naprezanja bili na unutarnjem radijusu, ali na nižoj aksijalnoj koordinati. Iz toga se može zaključiti da implicitna metoda puno više ovisi o vremenu trajanja opterećenja od eksplicitne, koja je primjerenija za dinamičke analize s kraćim vremenom i većom brzinom opterećivanja.

Zbog toga je napravljena još jedna dinamička analiza uz korištenje eksplicitne i implicitne metode kod koje je promijenjena debljina cijevi s $d = 200$ mm na $d = 300$ mm uz nepromijenjene ostale podatke. U ovome slučaju su naprezanja u svakome trenutku niža od granice tečenja pa se ti rezultati mogu smatrati pouzdanima. Također su i ovdje maksimalne vrijednosti naprezanja dobivenih eksplicitnom metodom veće od vrijednosti maksimalnih naprezanja dobivenih implicitnom metodom.

Za razliku od grede na dva oslonca, u slučaju cijevi opterećene tlakom iznutra eksplicitna i implicitna metoda nisu dale jednake rezultate. U 1. poglavlju je opisano da je eksplicitna metoda prikladnija za dinamičku analizu s velikom brzinom i kratkim trajanjem opterećivanja, a implicitna metoda za dinamičku analizu s nižom brzinom i duljim trajanjem opterećivanja. Kako prilikom eksplozije tlak u jako kratkom vremenskom periodu naraste na svoju maksimalnu vrijednost i nakon toga velikom brzinom padne na nulu, zaključuje se da je za ovaj proračun prikladnija eksplicitna metoda. Na verifikacijskom modelu je pokazano da je za jednostavne primjere svejedno koristi li se eksplicitna ili implicitna metoda kod dinamičke analize, ali na primjeru cijevi je pokazano da se kod složenijih geometrija i opterećenja rezultati razlikuju pa je potrebno odabrati koja metoda će se koristiti, s obzirom na brzinu i vrijeme opterećivanja. Također, vrijeme računanja primjenom eksplicitne metode je bitno kraće od vremena koje je potrebno da se rezultati izračunaju primjenom implicitne metode i to je još jedna prednost eksplicitne metode u odnosu na implicitnu.

LITERATURA

- [1] Alfirević, I.: Linearna analiza konstrukcija, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 2011.
- [2] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći II, Golden marketing, Zagreb, 1999.
- [3] Su, A.: Analysis of Explosion Load Effects in Pipe-racks, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2012.
- [4] Sorić, J.: Metoda konačnih elemenata, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2004.
- [5] Abaqus 6.13. Documentation, Abaqus/CAE User's manual, ABAQUS Inc., programski paket Abaqus 6.13-1
- [6] <http://imechanica.org/files/0-overview%20Explicit.pdf>
- [7] Sorić, J.: Materijali s predavanja iz kolegija „Nelinearna numerička analiza konstrukcija“
- [8] Kraut, B.: Strojarski priručnik, Sajema d.o.o., Zagreb, 2009.
- [9] <https://www.un.org/disarmament/un-safeguard/kingery-bulmash/>
- [10] Alfirević, I.: Nauka o čvrstoći I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

PRILOZI

- I. CD-R disc