

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК



**Дванадцята**  
**Відкрита наукова конференція Інституту**  
**прикладної математики та**  
**фундаментальних наук (ІМФН)**

*присвячена 40-річчю кафедри обчислювальної  
математики та програмування*

**Збірник матеріалів конференції**



2–3 червня 2016 року  
(Львів, Україна)

Львів  
Видавництво Львівської політехніки  
2016 р.

**УДК 513+517+519+539+621+004+541**

**ББК 22.1**

**Організатори конференції:**

Національний університет «Львівська політехніка»

Інститут прикладної математики та фундаментальних наук (ІМФН)

Національного університету «Львівська політехніка»:

- кафедра вищої математики
- кафедра загальної фізики
- кафедра прикладної фізики і наноматеріалознавства
- кафедра нарисної геометрії та інженерної графіки
- кафедра обчислювальної математики та програмування
- кафедра прикладної математики

**Дванадцята відкрита наукова конференція ІМФН: Збірник матеріалів та програма конференції [«PSC-IMFS-12»], (Львів, 2–3 червня 2016 р.) / Національний університет «Львівська політехніка». – Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2016. –138 с. ISBN 978-617-607-398-7**

У збірнику опубліковано матеріали Дванадцятої відкритої наукової конференції Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка». Конференція продовжує багаторічну традицію відкритих наукових конференцій професорсько-викладацького складу ІМФН. Тематика конференції охоплює широке коло фундаментальних та прикладних аспектів математики, механіки, теоретичної, експериментальної та прикладної фізики, матеріалознавства, хімії та хімічних технологій, нарисної геометрії і комп'ютерної графіки, методики викладання точних і природничих наук.

**УДК 513+517+519+539+621+004+541**

**ББК 22.1**

*Тези доповідей подано у авторській редакції*

**ISBN 978-617-607-398-7**

**©Національний університет  
«Львівська політехніка», 2016**

## Організаційний та програмний комітети

### Організаційний комітет

#### Голова оргкомітету

Каленюк П.І., д.ф.-м.н., проф.,  
директор ІМФН.

#### Заступники голови

Понеділок Г.В., к.ф.-м.н., доц. каф. ПФН,  
заступник директора ІМФН;  
Пелех Я.М., к.ф.-м.н., доц., в.о. зав. каф. ОМП.

#### Члени оргкомітету

Будз І.С., к.ф.-м.н., доц. каф. ОПМ;  
Гнатів Л.Б., к.ф.-м.н., доц. каф. ОПМ;  
Кунинець А.В., асист. каф. ОПМ;  
Ментинський С.М., ст.викл. каф. ОПМ;  
Петрович Р.Й., к.ф.-м.н., доц. каф. ОПМ;  
Угрин С.З., асист. каф. ОПМ;  
Філь Б.М., к.ф.-м.н., доц. каф. ОПМ;  
Хімка У.Т., к.ф.-м.н., ст. викл. каф. ОПМ.

#### Секретар оргкомітету

Демків І.І., д.ф.-м.н., проф. каф. ОМП  
(+38 067 920 18 71);

### Програмний комітет

Афтаназів І.С., д.т.н., проф., зав. каф. НГГ;  
Базилевич Л.Є., д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ;  
Бунь Р.А., д.т.н., проф. каф. ПМ;  
Вірт І.С., д.ф.-м.н., проф. каф. ЗФ;  
Григорчак І.І., д.т.н., проф., зав. каф. ПФН;  
Гулай В.В., д.політ.н., доц., зав. каф. МІ;  
Демків І.І., д.ф.-м.н., проф. каф. ОМП;  
Ільків В.С., д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ;  
Ільчук Г.А., д.ф.-м.н., проф. каф. ЗФ;  
Каленюк П. І., д.ф.-м.н., проф, директор ІМФН;  
Кориневський М.А., д.ф.-м.н., проф. каф. ЗФ;  
Костробій П.П., д.ф.-м.н., проф., зав. каф. ПМ;  
Кутнів М.В., д.ф.-м.н., проф. каф. ПМ;  
Лопатинський І.Є., к.ф.-м.н., проф., зав. каф. ЗФ;  
Лукіянець Б.А., д.ф.-м.н., проф. каф. ПФН;  
Мохонько А.З., д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ;  
Мусій Р.С., д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ;  
Нитребич З.М., д.ф.-м.н., проф., зав. каф. ВМ;  
Обшта А.Ф., д.т.н., проф. каф. ВМ;  
Пелех Я.М., к.ф.-м.н., доц., в.о. зав. каф. ОМП;  
Пукач П.Я., д.т.н., проф. каф. ВМ;  
Скульський М.Є., д.ф.-м.н., проф. каф. ЗФ;  
Старчевський В.Л., д.т.н., проф., зав. каф. ЗХ;  
Черемних Є.В., д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ;  
Ющук С.І., д.т.н., проф. каф. ЗФ;

**Михайло Антонович Сухорольський –  
вчений, математик, механік, педагог**

23 лютого 2016 року на 73 році раптово обірвалося життя відомого вченого, доктора фізико-математичних наук, професора, провідного спеціаліста у галузі механіки твердого деформівного тіла Сухорольського Михайла Антоновича.



М. А. Сухорольський народився 10 листопада 1943 року в с. Скородинці Білобожницького (Чортківського) району Тернопільської області. У 1960 році закінчив Білобожницьку середню школу. Трудову діяльність почав електромонтером в 1961-1962 роках. Протягом 1962-1970 років навчався на механіко-математичному факультеті Львівського державного університету імені Івана Франка за перервою для служби в Радянській армії (1962-1965 роки). З 1970 по 1973 роки працював інженером та старшим інженером Львівського ГСП-КТБ по конструюванню машин для хімічного захисту рослин. У 1974 році став молодшим науковим співробітником Львівського філіалу математичної фізики Інституту математики АН УРСР, брав активну участь у розробці держбюджетної тематики, зокрема теми «Розробка методів розрахунку міцності та жорсткості елементів конструкцій зармованих композиційних матеріалів». Одночасно навчався в аспірантурі і активно працював над кандидатською дисертацією «Контактні задачі для трансверсально-ізотропних циліндричних оболонок», яку захистив у 1977 році.

З вересня 1977 р. до останніх днів працював у Національному університеті «Львівська політехніка» на посадах старшого викладача (1977-1982), доцента (1982-2004), професора (2004-2016) кафедри вищої математики.

За результатами кандидатської дисертації у співавторстві з науковим керівником професором Б. Л. Пелехом опублікував у 1980 році наукову монографію «Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – К.: Наукова думка, 1980», яка на сьогодні залишається однією з кращих наукових літератур із теорії анизотропних оболонок. У ній з позицій нових сучасних підходів сформульовано апроксимаційний процес побудови довільних наближень теорій анизотропних оболонок і пластин. Сформульовано відповідні математичні теореми

методу апроксимації функцій за врахування умов для функцій переміщень та їх похідних на поверхнях оболонки. Після опублікування монографії М. А. Сухорольський активно працював як керівник декількох госпдоговірних тем з конструкторським бюро заводу «Автонавантажувачів». При виконанні даних тем він залучав багатьох працівників кафедри вищої математики до наукової роботи. М. А. Сухорольський добре орієнтувався в інженерних питаннях конструкторської роботи в ГСПКТБ по конструюванню машин для хімічного захисту рослин та в спеціальному конструкторському бюро заводу «Автонавантажувачів», вмів вдало змоделювати фізико-механічні процеси у відповідних інженерних конструкціях та описати їх математично, а також удосконалити відомі та розвинути нові методи інженерних розрахунків.

У 90-тих роках 20-го століття М. А. Сухорольський почав активно працювати над математичними проблемами механіки тонкостінних елементів за локальних силових і теплових навантажень. Для вирішення цих проблем він активно почав використовувати і вдосконалювати методи скінчених елементів та граничних інтегральних рівнянь. В цей період він багато публікував отримані результати своїх досліджень, приймав участь у багатьох Міжнародних та вітчизняних конференціях, виступав на наукових семінарах кафедри та в академічних установах.

Підсумком цих досліджень був захист у 2003 році докторської дисертації «Математичні моделі та методи механіки тонкостінних пружних тіл при локальних навантаженнях», науковим консультантом якої був член-кореспондент НАН України Я. Й. Бурак. На основі отриманих у докторській дисертації наукових результатів у 2007 році у співавторстві з Я. Й. Бураком та Ю. К. Рудавським опубліковано наукову монографію «Аналітична механіка локально-навантажених оболонок. – Львів, 2007». Під час побудови функцій Гріна для отримання фундаментальних розв'язків у теорії локально навантажених оболонок М. А. Сухорольський зіткнувся з проблемою підсумовування погано збіжних і розбіжних функціональних рядів, яку успішно вирішив. Результатом цієї роботи було опублікування у 2010 році наступної монографії «Функціональні послідовності та ряди. – Львів, 2010». В цій монографії він розвинув послідовнісний підхід до побудови узагальнених методів підсумовування рядів та узагальнених розв'язків задач математичної фізики.

З 2004 року до останніх днів життя М. А. Сухорольський знаходився на посаді професора кафедри вищої математики і, отримавши вчене звання професора, не менш активно працював над створенням нових навчальних посібників та методичних розробок з відповідних розділів вищої математики, був співавтором електронних навчальних курсів. За його співавторства опубліковано навчальні посібники: «Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач. – Львів, 2002», «Збірник задач з математичного аналізу. Частина 1. – Львів, 2001», «Практикум з елементарної математики. Ч.1, 2 – Львів, 2002, 2012», «Практикум та задачі з математичного аналізу – Київ: Освіта України, 2012». Загалом науковий доробок професора М. А. Сухорольського складає понад 250 наукових публікацій у провідних наукових фахових періодичних виданнях, зокрема таких як Український математичний журнал, Фізико-хімічна механіка матеріалів, Математичні методи та фізико-механічні поля, Теоретична і прикладна механіка, Прикладна механіка, Механіка полімерів, Машинознавство, Доповіді Академії наук УРСР, Фізико-математичне моделювання та інформа-

ційні технології, Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, Journal of Mathematical Sciences, Mathematical modeling and computing.

Наукові інтереси професора М. Сухорольського були спрямовані на дослідження узагальнених методів підсумовування тригонометричних і степеневих рядів, узагальнених розв'язків Фур'є крайових задач в розумінні слабкої збіжності, побудову математичних методів для розрахунку напружено-деформівного стану тонкостінних пружних тіл, побудову математичних моделей локального навантаження тонкостінних тіл, методу граничних інтегральних рівнянь (граничних елементів) в застосуванні до статичних і динамічних задач теорії оболонок, контактних задач теорії оболонок, розвиток методів апроксимації в комплексній області для побудови розв'язків задач математичної фізики.

Поряд з науковою і педагогічною роботою професор Сухорольський багато часу віддавав також науково-організаційній роботі. Він виконував обов'язки заступника редактора фахового видання «Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: фізико-математичні науки» та був членом редколегій періодичних наукових збірників «Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології» та «Mathematical modeling and computing». М. А. Сухорольський був активним членом Наукового товариства ім. Т. Шевченка, працював в секції «Механіка і матеріалознавство», рецензував наукові статті у вказаних наукових виданнях, давав відгуки на автореферати кандидатських та докторських дисертацій. Під керівництвом М. А. Сухорольського захищено одну кандидатську дисертацію Т. В. Шопою та в завершальній стадії знаходились кандидатські дисертації О. З. Любицької та В. В. Достойної.

Наукові здобутки професора М. А. Сухорольського відкривають перспективу подальших досліджень в розвинутих ним наукових напрямках, а його наукові публікації, монографії і навчальні посібники стали базовими для наступних поколінь науковців, педагогів, аспірантів, магістрів і студентів.

Професор М. А. Сухорольський назавжди залишиться в історії Національного університету «Львівська політехніка», як вчений і педагог.

**П. І. Каленюк, д. ф.-м. н., професор, директор ІМФН НУ «ЛП»**

**З. М. Нитребич, д. ф.-м. н., професор, зав. кафедри вищої математики НУ «ЛП»**

**Р. С. Мусій, д. ф.-м. н., професор, професор кафедри вищої математики НУ «ЛП», завідувач кафедри біофізики, інформатики та вищої математики Львівського медичного інституту**

## ЗМІСТ

<b>МАТЕМАТИКА І МЕХАНІКА</b> . . . . .	13
<b>Баранецький Я. О., Каленюк П. І.</b> Мішана задача для параболічного рівняння з узагальненими умовами Самарського-Іонкіна. . . . .	14
<b>Гентош О. Є.</b> Гамільтонова структура суперсиметричної МКП-ієрархії на розширеному фазовому просторі та її додаткових однорідних симетрій . . . . .	15
<b>Дівесєв Б. М.</b> Приклади адаптації числових схем для деяких задач ідентифікації та оптимізації механічних систем . . . . .	17
<b>Жидик У. В.</b> Термомеханічний згин неоднорідних анізотропних пластин . . . . .	19
<b>Ільків В. С.</b> Періодичні та майже періодичні розв'язки задачі з інтегρο-крайовими умовами для системи типу системи Ляме . . . . .	21
<b>Квіт Р. І.</b> Дослідження міцності анізотропних матеріалів з орієнтованою структурою дефектів . . . . .	23
<b>Курбатова І. Н., Регрут В. В.</b> О диффеоморфизмах (псевдо-)риманових пространств со специальной кубической аффинорной структурой . . . . .	26
<b>Лазько В. А., Лозбень В. Л., Желізняк Й. Р.</b> Варіаційний метод дослідження напружено-деформованого стану шаруватих анізотропних структур при наявності зон неідеального міжфазного контакту . . . . .	28
<b>Мединський І. П.</b> Про різні умови Гельдера на коефіцієнти вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова . . . . .	29
<b>Нежуренко А. С., Курбатова І. Н.,</b> Диффеоморфизмы многообразий с рекуррентно-параболической структурой . . . . .	31
<b>Неспляк Д. М., Магеровська Т. В., Гошко З. О.</b> Використання методу скінченних елементів для розв'язування лінеаризованих задач термопластичності просторових тіл . . . . .	33
<b>Нитребич З. М., Маланчук О. М.</b> Про ядро двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними . . . . .	35
<b>Обшта А. Ф.</b> Багатоконтурні задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу . . . . .	36

<b>Олексів І. Я.</b>	
Побудова ізотопій між кривими скінченної довжини за допомогою кривих рівномірно обмеженої довжини . . . . .	37
<b>Пабірівський В. В., Пабірівська Н. В.,</b>	
Про постановку крайової задачі теорії пружності з врахуванням об'ємних сил в голоморфних функціях двох комплексних змінних . . . . .	38
<b>Пігура О. В., Сторож О. Г.</b>	
Про деякі "парадокси" у теорії розширень лінійних відношень	40
<b>Прокіп В. М.</b>	
Про симетричні розв'язки лінійних матричних рівнянь над областю головних ідеалів . . . . .	41
<b>Rukach P. Ya., Vobyk I. O., Sokhan P. L.,</b>	
MATHEMATICAL MODELS FOR VIBRATIONS OF ONE DIMENSIONAL ENVIRONMENTS WITH CONSIDERING NONLINEAR RESISTANCE FORCES . . . . .	43
<b>Сорокати М. І., Войтович М. І., Гук В. М.</b>	
Вплив параметрів елемента пружної підвіски на її малі коливання та стійкість . . . . .	44
<b>Sokhan P. L., Rukach P. P.</b>	
GALERKIN METHOD IN THE INVESTIGATION OF NONLINEAR OSCILLATIONS OF ELASTIC BEAM . . . . .	46
<b>Тайстра Ю. В., Пелих В. О.</b>	
Однонапрявлене ізотропне поле спінора Максвелла та його властивості у метриці Керра . . . . .	47
<b>Угрин С. З.</b>	
Алгоритм піднесення ряду до степеня . . . . .	49
<b>Федюк Є. М., Думанський О. І., Шиманський В. М.</b>	
Побудова конформних відображень для неспівнескінчених областей з торцевими надрізами та їх застосування в інженерно-технічних дослідженнях . . . . .	50
<b>Хаддад М., Курбатова И. Н.,</b>	
Полукватернионные многообразия и их диффеоморфизмы . . . . .	52
<b>Федюк Є. М., Думанський О. І.</b>	
Дослідження міцності пластинчастого елемента конструкції з криволінійним отвором або надрізом при дії зосереджених сил . . . . .	54
<b>ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА</b> . . . . .	57
<b>Будз С. Ф., Будз І. С.,</b>	
Процедура оптимізації процесу цільової термообробки елементів електровакуумних виробів . . . . .	58
<b>Будз І. С.,</b>	
Чисельне дослідження вільних коливань оболонкових елементів конструкцій з попереднім навантаженням . . . . .	60



<b>Воловенко М. В., Кузніченко В. В., Нікітенко О. М.</b>	
Моделювання руху заряджених частинок у схрещених полях з гребінчастою уповільнюючою системою . . . . .	61
<b>Гук Н. А., Присяжна М. К., Бекленищев В. І.</b>	
Налаштування моделі нечіткого логічного виведення «Вибір програм тренувань» на навчальній вибірці . . . . .	64
<b>Демків І. І., Магеровська Т. В., Угрин С. З.</b>	
Знаходження наближеного розв'язку крайової задачі за допомогою інтерполяційного функціонального поліному . . . . .	66
<b>Демків І. І.</b>	
Інтерполяційний інтегральний ланцюговий дрів типу Тіле . . . . .	67
<b>Дем'яненко А. Г.</b>	
Деякі особливості математичних моделей задач динаміки пружних об'єктів з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження на основі неklasичного методу відокремлення змінних . . . . .	68
<b>Kinash A. V., Chabanyuk Ya. M., Khimka U. T.</b>	
STATIONARY POINTS OF THE LORENZ MODEL OF CITY SYSTEM WITH MARKOV SWITCHING . . . . .	70
<b>Костробій П. П., Маркович Б. М.</b>	
Поверхнева енергія напівобмеженого «желе» . . . . .	72
<b>Кукурба В. Р., Чабанюк Я. М.</b>	
Асимптотичне представлення генератора процедури стохастичної оптимізації з імпульсним збуренням . . . . .	73
<b>Кунинець А. В.</b>	
Методи Рунге-Кутта для нелінійних сингулярних задач Коші . . . . .	75
<b>Ментинський С. М., Шувар Б. А.</b>	
Про двосторонню апроксимацію розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь . . . . .	78
<b>Ментинський С. М., Пелех Р. Я., Пелех Я. М.,</b>	
Нелінійні двосторонні методи розв'язування диференціальних та інтегральних рівнянь . . . . .	79
<b>Николишин М. М., Пелех Я. М.</b>	
Інтегральні рівняння задачі про граничну рівновагу неоднорідної по товщині циліндричної оболонки з внутрішньою трищиною довільної конфігурації . . . . .	82
<b>Pelekh Ya. M.</b>	
NONLINEAR NUMERICAL METHODS OF VARIABLE ORDER AND STEP WITH CONTROL OF STABILITY FOR THE SOLUTION CAUCHY PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS . . . . .	85
<b>Петрович Р. Й., Гошко З. О.</b>	
Критерій збіжності багатократних агрегативно-ітеративних алгоритмів . . . . .	88
<b>Петрук М. Е., Ясько М. М.</b>	
Розробка програмного забезпечення для чисельного розв'язування крайових задач для бігармонічного рівняння . . . . .	89

<b>Пізюр Я. В.</b>	
ЗАСТОСУВАННЯ ОБМІННОЇ ТЕОРЕМИ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ ЕР- МІТОВИМИ СПЛАЙНАМИ . . . . .	90
<b>Семенюк С. А., Чабанюк Я. М.</b>	
ВЛАСТИВОСТІ ГЕНЕРАТОРА НЕПЕРЕРВНОГО ПРИХОВАНОГО ПРОЦЕСУ МАРКОВА . . . . .	91
<b>Топилко П. І.</b>	
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕМІСІЇ ПАРНИКОВИХ ГАЗІВ ПРИ ВИ- РОБНИЦТВІ ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЇ В ПОЛЬЩІ (2010-2013 РОКИ) ТА АНАЛІЗ ОДЕРЖАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ . . . . .	92
<b>Чабанюк Я. М., Горун П. П.</b>	
АСИМПТОТИКА ГЕНЕРАТОРА СТРИВКОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ В МАРКОВСЬ- КОМУ СЕРЕДОВИЩІ В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ . . . . .	93
<b>Chabanuk Ya. M., Khimka U. T., Budz I. S.</b>	
ONE GENERATOR OF RANDOM EVOLUTION IN SMALL DIFFUSION SCHEME	95
<b>Яджак М. С., Федьковський П. О., Бекас Б. О.</b>	
ПРОБЛЕМА РЕАЛІЗАЦІЇ ДЕЯКИХ АЛГОРИТМІВ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ НА БАГАТОЯДЕРНИХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СИСТЕМАХ . . . . .	97
<b>ФІЗИКА, ХІМІЯ . . . . .</b>	99
<b>Григорчак І. І., Крушельницька Т. Д., Каркульовська М. С., Товстюк Н. К., Сиркін Є. С., Феодосьєв С. Б.</b>	
КІНЕТИЧНІ ТА ТЕРМОДИНАМІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ІНТЕРКАЛЬОВАНОГО НІКЕЛЕМ INSe . . . . .	100
<b>Koval I.</b>	
AN INFLUENCE OF THE SYSTEM OF [SODIUM BICARBONATE – ACETIC ACID] ON THE MICROBIAL VIABILITY . . . . .	102
<b>Криховець О. В.</b>	
ВПРОВАДЖЕННЯ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЮ В КУРСІ "ХІМІЯ" . . . . .	103
<b>Малик О. П., Петрусь Р. Ю., Родич В. М.</b>	
РУХЛИВІСТЬ ЕЛЕКТРОНІВ У CdS І CdTe . . . . .	105
<b>Олійник Л. П.</b>	
ВИВЧЕННЯ ПРОЦЕСУ ТЕРМОЛІЗУ СКЛАДНИХ КОМПЛЕКСНИХ СПОЛУК .	107
<b>Семків І. В., Зміївська Е. О.</b>	
ОПТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ АРГІРОДИТУ Ag <sub>8</sub> SnSe <sub>6</sub> . . . . .	109
<b>Skulsky M. Yu.</b>	
ABOUT THE WAVE RESONANCES AND THE SPATIAL ORGANIZATION OF THE SOLAR SYSTEM . . . . .	110
<b>ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ . . . . .</b>	111
<b>Halushchak M., Jonas M., Zebrowski P., Jarnicka J., Bun R., Nahorski Z.</b>	
TAKING ADVANTAGE OF THE UNFCCC KYOTO POLICY PROCESS: WHAT CAN WE LEARN ABOUT LEARNING? . . . . .	112

<b>Любінський Б. Б., Гнатів Л. Б., Гладун В. Р.</b> Застосування деяких підходів отримання даних для інвентаризації парникових газів . . . . .	114
<b>Уханська О. М., Сенник А. П., Пабірівський В. В., Патерко О. Я.</b> Веб-орієнтована система обліку методичної роботи кафедри . . . . .	116
<b>НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ . . . . .</b>	119
<b>Беспалов А. Л., Бойко О. О.</b> Оптимізація геометричних параметрів робочої зони автоматизованих лічильних пристроїв . . . . .	120
<b>Болілий І. О., Сердюк М. Є.</b> Автоматизована система безшовного склеювання зображень з використанням різних методів . . . . .	121
<b>Сокол О. О., Сердюк М. Є.</b> Алгоритм візуалізації хвиль на поверхні води та його програмна реалізація . . . . .	123
<b>МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ . . . . .</b>	125
<b>Глинський Я. М., Рязська В. А.</b> Технології розробки відеоуроків для традиційних та дистанційних навчальних курсів . . . . .	126
<b>Дрогомирецька Х. Т., Клапчук М. І., Понеділок Г. В.</b> Дослідження зв'язності рекурентних послідовностей . . . . .	129
<b>Кравець І. Т., Цура О. С.</b> Розвиток логічного мислення у курсах математики та інформатики . . . . .	133
<b>АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ . . . . .</b>	137



# МАТЕМАТИКА І МЕХАНІКА

УДК 517.95

## Мішана задача для параболічного рівняння з узагальненими умовами Самарського-Іонкіна.

Баранецький Я. О., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Каленюк П. І., докт. ф.-м.н., проф. каф. ВМ

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Нехай  $G = \{(t, x); t \in (0, T), x \in (0, 1)\}$ ,  $0 < T < \infty$ ,  $D_x, D_t$  – узагальнені похідні,  $W_2^{2,1}(G) \equiv \{u \in L_2(G) : D_t u, D_x^2 u \in L_2(G)\}$ .

Вивчається мішана задача

$$D_t u - D_x^2 u = f, f \in L_2(G), u|_{t=0} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} l_1 u \equiv a u|_{x=0} + b u|_{x=1} = 0; \\ l_2 u \equiv D_x u|_{x=0} + D_x u|_{x=1} + c(u|_{x=0} - u|_{x=1}) = 0; \end{cases} \quad (2)$$

$$a, b, c \in (-\infty, +\infty)$$

При застосуванні методу відокремлення змінних виникає спектральна задача

$$-D_x^2 v = \lambda v, \lambda \in C, l_1 v = l_2 v = 0. \quad (3)$$

Властивості оператора  $L(a, b, c) : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$  задачі (3)

$D(L(a, b, c)) \equiv \{v \in W_2^2(0, 1), l_j v = 0, j = 1, 2\}$ , описує наступна

**Теорема 1.** 1). Граничні умови (2) регулярні за Біркгофом, але не посилено регулярні. Спектр оператора  $L(a, b, c)$  співпадає з спектром самоспряженого оператора  $L(1, 1, c)$ ;

2). У випадках  $c \neq 0$ , або  $b \neq a$  спектр оператора  $L(a, b, c)$  простий та система власних функцій разом із біортогональною системою необмежені за нормою простору  $L_2(0, 1)$ . Існує приведена система власних функцій оператора  $L(a, b, c)$ , яка утворює базис Рісса в просторі  $L_2(0, 1)$

3). У випадку  $c = 0$ , та  $b \neq a$  оператор  $L(a, b, 0)$  є суттєво несамоспряженим оператором, тобто кратному спектру оператора відповідає зчисленна множина кореневих функцій. Існує приведена система кореневих функцій, яка утворює базис Рісса в просторі  $L_2(0, 1)$ .

**Теорема 2.** Для довільної функції  $f \in L_2(G)$  існує єдиний розв’язок задачі (1),(2) у вигляді ряду за системою кореневих функцій оператора  $L(a, b, c)$ .

УДК 517.9

## Гамільтонова структура суперсиметричної мКП-ієрархії на розширеному фазовому просторі та її додаткових однорідних симетрій

Гентош О. Є., к.ф.-м.н., с.н.с.

Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ  
(вул. Наукова, 3Б, м. Львів, 79060, Україна)

На спряженому просторі  $\mathcal{G}^*$  алгебри Лі  $\mathcal{G}$  супер-інтегро-диференціальних операторів  $A := \partial^p + \sum_{r < 2p} A_r D_\theta^r = \partial^p + \sum_{r < 2p, \nu=0,1} A_r \partial^{[r/2]} D_\theta^\nu$ , де  $A_{2s} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \Lambda_1; \Lambda_0)$ ,  $A_{2s} := A_{2s}(x, \theta) = A_{2s}^0(x) + \theta A_{2s}^1(x)$ ,  $A_{2s+1} \in C^\infty(\mathbb{S} \times \Lambda_1; \Lambda_1)$ ,  $A_{2s+1} := A_{2s+1}(x, \theta) = A_{2s+1}^0(x) + \theta A_{2s+1}^1(x)$ ,  $s < p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}$ ,  $D_\theta := \partial/\partial x + \theta \partial/\partial \theta$ ,  $\theta \in \Lambda_1$ ,  $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$  – алгебра Грассмана над полем  $\mathbb{C} \subset \Lambda_0$ , із стандартним комутатором  $[\cdot, \cdot]$  відносно інваріантного скалярного добутку  $\langle A, B \rangle = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta \text{res}(AB)$ ,  $\text{res} A := A_{-1}$ ,  $A, B \in \mathcal{G}$ , розглядається ієрархія гамільтонових потоків типу Лакса:

$$dL/dt_j = [(\nabla \gamma_j(L))_{\geq 1}, L] = [(L^j)_{\geq 1}, L], \quad j \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

де нижній індекс " $\geq 1$ " позначає проекцію відповідного оператора на підалгебру Лі  $\mathcal{G}_{\geq 1} \subset \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{G} := \mathcal{G}_{\geq 1} \oplus \mathcal{G}_{< 1}$ ,  $\mathcal{G}_{\geq 1} := \{A = \partial^p + \sum_{1 \leq r < 2p} A_r D_\theta^r\}$ ,  $\mathcal{G}_{< 1} := \{A = \sum_{r < 1} A_r D_\theta^r\}$ . Ця ієрархія породжується дужкою Лі-Пуассона

$$\{\gamma, \mu\}_{\mathcal{R}_1}(L) = \langle L, [\nabla \gamma(L), \nabla \mu(L)]_{\mathcal{R}_1} \rangle := \langle \nabla \gamma(L), \tilde{\Theta}_1 \nabla \mu(L) \rangle,$$

де  $[A, B]_{\mathcal{R}_1} := [\mathcal{R}_1 A, B] + [A, \mathcal{R}_1 B]$ ,  $A, B \in \mathcal{G}$ ,  $\mathcal{R}_1 := (P_{\geq 1} - P_{< 1})/2$ ,  $P_{\geq 1} \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\geq 1}$ ,  $P_{< 1} \mathcal{G} = \mathcal{G}_{< 1}$ ,  $P_{\geq 1} \mathcal{G}_{< 1} = 0$ ,  $P_{< 1} \mathcal{G}_{\geq 1} = 0$ ,  $\gamma, \mu \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$  – деякі гладкі за Фреше функціонали на  $\mathcal{G}^*$ ,  $\nabla$  – оператор градієнта,  $\tilde{\Theta}_1 : T^*(\mathcal{G}^*) \rightarrow T(\mathcal{G}^*)$  – оператор Пуассона,  $T(\mathcal{G}^*)$  і  $T^*(\mathcal{G}^*)$  – дотичний та кодотичний простори до  $\mathcal{G}^*$  відповідно, та функціоналами Казимира  $\gamma_j(L) = \frac{P}{j+p} \langle L, L^j \rangle \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

У доповіді досліджується гамільтонова структура ієрархії (1) для оператора

$$L := f_1^{-1} l f_1 = L_{\geq 1} + q_1 + D_\theta^{-1} q_1^* D_\theta + \sum_{k=2}^N q_k D_\theta^{-1} q_k^* D_\theta + \sum_{i=1}^N \varphi_i D_\theta^{-1} \varphi_i^* D_\theta, \quad (2)$$

де  $l = l_+ + \sum_{i=1}^N f_i D_\theta^{-1} f_i^* + \sum_{i=1}^N \Phi_i D_\theta^{-1} \Phi_i^*$ ,  $l_+$  – диференціальна частина оператора  $l$ ,  $f_i \in W := L_2(\mathbb{S} \times \Lambda_1; \Lambda_0)$ ,  $\Phi_i \in \bar{W} := L_2(\mathbb{S} \times \Lambda_1; \Lambda_1)$  – власні функції оператора  $l$ , пов'язані з різними власними значеннями  $\lambda_i$ ,  $f_i^* \in \bar{W}$ ,  $\Phi_i^* \in W$  – відповідні власні функції оператора  $l^*$ , спряженого до  $l$ ,  $i = \bar{1}, \bar{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , оператор  $l \in \mathcal{G}^*$  задовольняє системи еволюційних рівнянь:

$$\begin{aligned} dl/dt_j &= [(l^j)_+, l], \\ df_i/dt_j &= (l^j)_+ f_i, \quad d\Phi_i^*/dt_j = -(l^j)_+^* \Phi_i^*, \\ df_i^*/dt_j &= -(l^j)_+^* f_i^*, \quad d\Phi_i/dt_j = (l^j)_+ \Phi_i, \quad j \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (3)$$

доповненої еволюціями власних функцій  $q_i \in W$ ,  $\varphi_i \in \bar{W}$  оператора  $L$  та власних функцій  $q_i^* \in W$ ,  $\varphi_i^* \in \bar{W}$  оператора  $L^*$ , спряженого до  $L$ :

$$\begin{aligned} dq_i/dt_j &= (L^j)_{\geq 1} q_i, \quad dq_i^*/dt_j = -D_\theta^{-1} ((L^j)_{\geq 1})^* D_\theta q_i^*, \\ d\varphi_i/dt_j &= (L^j)_{\geq 1} \varphi_i, \quad d\varphi_i^*/dt_j = -D_\theta^{-1} ((L^j)_{\geq 1})^* D_\theta \varphi_i^*, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (4)$$

У роботі [1] було доведено, що ієрархія (3) є гамільтоновою відносно дужки Пуассона, породженої оператором Пуассона  $\mathcal{L} = B'(\tilde{\Theta} \otimes \tilde{J})B'^*$ , та гамільтоніанів  $\tilde{\gamma}_j := \gamma_j|_{L=f_1^{-1}l f_1}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Оператор  $\mathcal{L}$  було знайдено як результат перетворення Беклунда  $B : (l_+, f_i, \Phi_i^*, f_i^*, \Phi_i)^\top \mapsto (l = l_+ + \sum_{i=1}^N f_i \partial^{-1} f_i^* + \sum_{i=1}^N \Phi_i D_\theta^{-1} \Phi_i^*, f_i, \Phi_i^*, f_i^*, \Phi_i)^\top$ ,  $i = \overline{1, N}$ , прямої суми операторів Пуассона  $\tilde{\Theta} : T^*(\mathcal{G}^*) \rightarrow T(\mathcal{G}^*)$  і  $\tilde{J} : T^*(W^{2N} \oplus \bar{W}^{2N}) \rightarrow T(W^{2N} \oplus \bar{W}^{2N})$  (див. [1]), на розширеному фазовому просторі  $\mathcal{G}^* \oplus W^{2N} \oplus \bar{W}^{2N}$ .

Перетворення подібності (2) породжує на  $\mathcal{G}^* \oplus W^{2N} \oplus \bar{W}^{2N}$  перетворення Беклунда  $B_1 : (l, f_i, \Phi_i^*, f_i^*, \Phi_i)^\top \mapsto (L = f_1^{-1} l f_1, q_1 = f_1^{-1}(l_+ f_1) + (\partial^{-1} f_1^* f_1) + \sum_{k=2}^N (f_1^{-1} f_k)(\partial^{-1} f_k^* f_1) + \sum_{i=1}^N (f_1^{-1} \Phi_i)(\partial^{-1} \Phi_i^* f_1), q_1^* = -(\partial^{-1} f_1^* f_1), q_k = f_1^{-1} f_k, q_k^* = -(\partial^{-1} f_k^* f_1), \varphi_i = f_1^{-1} \Phi_i, \varphi_i^* = -(D_\theta^{-1} \Phi_i^* f_1)^\top, i = \overline{1, N}, k = \overline{2, N}$ . Таким чином, оператор Пуассона  $\mathcal{L}_1$ , який задає гамільтонове зображення для ієрархії (1) і (4), можна знайти за допомогою безпосередніх обчислень згідно з правилом  $\mathcal{L}_1 = B'_1 \mathcal{L} B_1'^*$ . Відповідними гамільтоніанами є функціонали Казимира  $\gamma_j \in I(\mathcal{G}^*)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Також у статті [1] було показано, що ієрархія (3) володіє множиною  $N$  ієрархій додаткових однорідних симетрій. Ці ієрархії є гамільтоновими відносно оператора Пуассона  $\mathcal{L}$  та натуральних степенів власних значень  $\lambda_i \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , оператора  $l$  як гладких за Фреше функціоналів на  $\mathcal{G}^* \oplus W^{2N} \oplus \bar{W}^{2N}$ . При перетворенні Беклунда  $B_1$  вони набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} dL/d\tau_{j,k} &= -[\tilde{M}_k^j, L], \\ dq_i/d\tau_{j,k} &= (-\tilde{M}_k^j + \delta_k^i L^j) q_i, \\ d\varphi_i/d\tau_{j,k} &= (-\tilde{M}_k^j + \delta_k^i L^j) \varphi_i, \\ dq_i^*/d\tau_{j,k} &= -D_\theta^{-1}(-\tilde{M}_k^j + \delta_k^i L^j)^* D_\theta q_i^*, \\ d\varphi_i^*/d\tau_{j,k} &= -D_\theta^{-1}(-\tilde{M}_k^j + \delta_k^i L^j)^* D_\theta \varphi_i^*, \end{aligned}$$

де  $\tilde{M}_1^j := (L^{j-1} q_1) + \sum_{\rho=0}^{j-1} ((L^\rho \cdot 1) D_\theta^{-1} (D_\theta^{-1} L^{(j-1-\rho)^*} D_\theta q_1^*)) + \sum_{\rho=0}^{j-1} ((L^\rho \varphi_1) \times D_\theta^{-1} (D_\theta^{-1} L^{(j-1-\rho)^*} D_\theta \varphi_1^*))$ ,  $\tilde{M}_k^j := \sum_{\rho=0}^{j-1} ((L^\rho q_k) D_\theta^{-1} (D_\theta^{-1} L^{(j-1-\rho)^*} D_\theta q_k^*)) + \sum_{\rho=0}^{j-1} ((L^\rho \varphi_k) D_\theta^{-1} (D_\theta^{-1} L^{(j-1-\rho)^*} D_\theta \varphi_k^*))$ ,  $k = \overline{2, N}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Гамільтонову структуру для додаткових однорідних симетрій ієрархії (1) і (4) можна отримати як результат композиції перетворень Беклунда  $B$  та  $B_1$ .

- [1] *Hentosh O. Ye.* Lax integrable supersymmetric hierarchies on extended phase spaces / O. Ye. Hentosh *Symmetry, integrability and geometry: methods and applications.* — 2006. — V. 2, 001. — 16 pp. — <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper001>.



УДК 539.3

## Приклади адаптації числових схем для деяких задач ідентифікації та оптимізації механічних систем

Дівеєв Б. М., к.т.н., доц. каф. ТТ

Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Для ефективного застосування числових схем ідентифікації та оптимізації механічних систем часто необхідно виконати попередньо низку допоміжних робіт. На даний час розроблені численні розрахункові схеми (РС) механічних систем. Проте, у деяких випадках пряме застосування цих РС приводить як до великих обчислювальних труднощів та недостатній адекватності математичних моделей до поведінки реальних фізичних об'єктів. Часто труднощі виникають вже на початкових етапах застосування РС. Однією з важливих проблем проектування є необхідність удосконалення методів розрахунку дії динамічних навантажень на машину з метою наближення теоретичних результатів до експериментальних даних. Таке завдання, очевидно, може бути виконано за допомогою сучасних комп'ютерних програм, що широко використовуються в САПР. Зазначимо, що застосування лише цих програм часто недостатнє. Часто машини містять всілякі елементи сухого тертя, ударні елементи, елементи, що взаємодіють з повітрям чи рідиною, розрахунок яких не завжди передбачений у цих пакетах. Важко також ранжувати елементи РС у цих пакетах за важливістю для оптимізації.

Розглядається низка прикладів модифікації моделей механічних схем для ефективного застосування РС зі збереженням їх адекватності. Приведені приклади "пом'якшення" крайових умов та умов спаю для розрахункових схем на основі більш гнучкого моделювання їх фізичних аналогів. Показано, що застосування класичних умов контакту часто приводить до значного сповільнення застосування РС а, часто, до відмови при застосуванні традиційних числових методів, наприклад, методу Гіра для розв'язку задачі Коші.

Завдання ідентифікації параметрів РС обов'язково включає як експериментальний етап, так і етапи побудови моделі розрахунку і, власне, моделі ідентифікації. Побудови моделі розглядається у двох планах. Перший - власне адаптація моделі до виду зразків і експериментального устаткування. Другою - адаптація моделі до схеми ідентифікації. Крім того, на підставі аналізу робастності запропонованих розрахункових схем оцінено достовірність результатів. Тут розглядаються задачі ідентифікації модулів пружності шаруватих композитних балок, задачі ідентифікації та оптимізації динаміки конструкцій з динамічними гасниками коливань різних типів [1-7]. Наводиться ряд нерозв'язаних задач механіки композитних пластин та пластин виготовлених із ФГМ, низка задач підвищення ресурсу колісних, обертових машин, що мають практичне значення.

- [1] *Diveyev B., Butyter I., Shcherbyna N.* Combined evolutionary non-deterministic methods for layered plates mechanical properties identification. // Proceeding of 16th International Congress on Sound and Vibration (ICSV-16), July 5-9, 2009, Krakow, Poland.- Paper 785.

- [2] *Bohdan Diveyev, Orest Horbay, Roman Pelekh, Andrij Smolsky* Acoustical and vibration performance of layered. 19th International Congress on Sound and Vibration 2012 Vilnius, Lithuania, Vol. 2, p. 1491-1498 (Electronic edition).
- [3] *Hennadiy Cherchyk, Diveyev, Yevhen Martyn, Roman Sava* Parameters identification of particle vibration absorber for rotating machines. / Proceeding of ICSV21, Vilnius, Lithuania, July 08-12, 2012.
- [4] *Bohdan Diveyev, Andrij Beshley, Solomiia Konyk, Ivan Kernytsky* Identification of transverse elastic moduli of composite beams by using combined criteria. 22th International Congress on Sound and Vibration 2015 Florence, Italy. Vol. 2, (Electronic edition) 8p.
- [5] *Bohdan Diveyev, Ihor Vikovych, Viktor Martyn, Ihor Dorosh* Optimization of the impact and particle vibration absorbers, 22th International Congress on Sound and Vibration 2015 Florence, Italy. Vol. 2, (Electronic edition) 8p.
- [6] *Bohdan Diveyev* Identifying the elastic moduli of composite plates by using high-order theories. Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Material Science. Vol.1., №1, p.63-82.
- [7] *Bohdan Diveyev* Impact and particle buffered vibration absorbers optimization and design. Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Material Science. Vol.1., №2 (в друці).

УДК 359.3

## Термомеханічний згин неоднорідних анізотропних пластин

Жидик У. В., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Пластинки із композитних анізотропних матеріалів часто використовуються як елементи конструкцій у різних областях сучасної техніки. В процесі експлуатації вони зазнають дії нестационарних силових і температурних навантажень. Тому розрахунок таких конструкцій є важливою науково-технічною задачею. Анізотропні композитні пластинки найповніше досліджені для силових задач. Температурні задачі як для однорідних, так і для неоднорідних матеріалів розв’язувались, в основному, на основі класичних рівнянь. Однак для розрахунку конструкцій з композитних матеріалів, що мають високу анізотропію фізико-механічних властивостей потрібні розширені моделі.

У цій доповіді розглядаються прямокутні в плані пластинки загальною товщиною  $2h$ , складені зі скінченої кількості жорстко з’єднаних між собою ортотропних шарів з однаковою товщиною і властивостями, матеріальні осі яких орієнтовані під кутом  $0^\circ$  або  $90^\circ$  до осей пластинки. Пластина перебуває під дією зовнішнього силового навантаження, а також нагрівається внутрішніми джерелами тепла. За математичну модель, яка описує динамічну поведінку таких неоднорідних пластинок вибрано узагальнену модель Тимошенка, яка передбачає лінійний характер розподілу переміщень і температури по товщині.

$$U(x_1, x_2, z, \tau) = u(x_1, x_2, \tau) + zy(x_1, x_2, \tau),$$

$$t(x_1, x_2, z, \tau) = T_1(x_1, x_2, \tau) + \frac{z}{h}T_2(x_1, x_2, \tau),$$

де  $u = \{u_1, u_2, u_3\}$  — вектор переміщення точок серединної поверхні;  $y = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$  — вектор кутів повороту нормалі  $\gamma_1, \gamma_2$  і поперечної нормальної деформації  $\gamma_3$ ;  $T_n (n = 1, 2)$  — інтегральні характеристики температури  $T_n = \frac{2n-1}{2h^n} \int_{-h}^h tz^{n-1} dz$ .

Методами інтегральних перетворень Фур’є і Лапласа знайдено розв’язок нестационарної задачі теплопровідності та динамічної задачі термопружності для скінченої шарнірно опертої на краях пластинки за локального нагріву джерелами тепла.

Числові дослідження виконували для пластинок, що нагріваються лінійним джерелом тепла, потужність якого раптово збільшується до заданого значення, залишаючись надалі сталою. При цьому розглядали пластинки трьох типів: антисиметричну двошарову ( $0^\circ/90^\circ$ ), симетричну тришарову ( $90^\circ/0^\circ/90^\circ$ ) і однорідну. За матеріал кожного шару взято графітоепоксидний композит армований волокнами бору. В таблиці наведені результати обчислень безрозмірних прогинів  $w'$  та згинних моментів  $M'_1, M'_2$  в центрі пластинки.

	$(0^\circ/90^\circ)$	$(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$	однорідна
$w'$	0.619	0.267	0.176
$M'_1$	-0.0525	0.155	0.275
$M'_2$	0.206	0.0385	0.0243

Із аналізу числових результатів видно, що через неоднорідність матеріалу напружено-деформований стан пластинки може змінюватись не тільки кількісно, але й якісно.

УДК 517.956.4

## Періодичні та майже періодичні розв'язки задачі з інтегро-крайовими умовами для системи типу системи Ляме

Ільків В. С.<sup>1,2</sup>, д.ф.-м.н., проф. каф. ВМ

<sup>1</sup>Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

<sup>2</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України  
(вул. Наукова, 3-б, м. Львів, 79060, Україна)

У  $p + 1$ -вимірній області  $[0, T] \times \mathbb{R}^p$  змінних  $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_p)$  для системи рівнянь

$$\sigma \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{\alpha, \beta, j=1}^p \frac{\partial^2 (\mu^* \bar{a}_{j\alpha} a_{j\beta} u_i + (\lambda^* + \mu^*) a_{i\alpha} \bar{a}_{j\beta} u_j)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}, \quad i = 1, \dots, p, \quad (1)$$

розглядається задача з умовами за змінною  $t$ , зокрема

$$\alpha_j u_i|_{t=(j-1)T} + \beta_j \mathcal{M}(r_j; u_i) = \varphi_{ji}, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, p, \quad (2)$$

де  $\sigma > 0$ ,  $\lambda^* > 0$ ,  $\mu^* > 0$ ,  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$  та  $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$  — комплексні векторні параметри,  $\vec{r} = (r_1, r_2)$  — вектор невід'ємних цілих чисел, що означають порядки моментів

$$\mathcal{M}(r_j; u_i) = \int_0^T \frac{t^{r_j}}{r_j!} u_i(t, \cdot) dt,$$

комплексна матриця  $A$  є невиродженою, число  $\bar{a}$  позначає комплексно спряжене з  $a$  число.

У разі  $p = 3$  і одиничній матриці  $A$  система описує [1] напружений стан ізотропного однорідного пружного тіла у середовищі густини  $\sigma$  з коефіцієнтами Ляме  $\lambda^*$  та  $\mu^*$ .

Координати шуканого розв'язку  $u = \text{col}(u_1, \dots, u_p)$  є функціями змінної  $t \in [0, T]$ , які приймають значення у шкалі просторів  $\{\mathbf{H}_M^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ , функції  $\varphi_{ji}$  також належать цій шкалі. Простір  $\mathbf{H}_M^\alpha$  — гільбертів простір, який отриманий поповненням множини  $\mathbf{H}_M$  (майже) періодичних зі спектром  $M$  многочленів  $v(x) = \sum_k v_k e^{i(\mu_k, x)}$  за нормою, що породжена скалярним добутком

$$(v, w; \mathbf{H}_M^\alpha) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} v_k \bar{w}_k (1 + \|\mu_k\|^2)^\alpha,$$

де  $\|\cdot\|$  — евклідова норма в  $\mathbb{R}^p$ ,  $\mu_k = (\mu_{k1}, \dots, \mu_{kp})$  — елементи спектру  $M \subset \mathbb{R}^p$ , який біективно відображається на  $\mathbb{Z}^p$  і для деяких  $\vec{d} = (d_1, d_2)$  та  $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$  для всіх  $k \in \mathbb{Z}^p$  задовольняє умову зростання

$$d_1 \|k\|^{\theta_1} \leq \|\mu_k\| \leq d_2 \|k\|^{\theta_2}, \quad 0 < d_1 \leq d_2, \quad 0 < \theta_1 \leq \theta_2.$$

При  $\mu_k = k$  маємо простір Соболева  $\mathbf{H}^\alpha$  періодичних функцій.

Задача (1), (2) некоректна у сенсі Адамара, а її дослідження пов'язане з проблемою малих знаменників [2].

Встановлено необхідні і достатні умови єдиності розв’язку задачі (1), (2) у шкалі  $\{\mathbf{H}_M^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  необхідні умови, необхідні і достатні умови та достатні умови його існування.

Показано, що малі знаменники виникають лише за умови  $\alpha_1 \alpha_2 \neq 0$ , а також за умови  $\vec{\alpha} = 0$  для моментів нульового  $\mathcal{M}(0; u)$  та першого  $\mathcal{M}(1; u)$  порядку.

За допомогою метричного підходу [3] на відрізку  $[T_0, T_1]$  зміни параметра  $T$ , де  $0 < T_0 < T_1 < \infty$ , для майже всіх  $T \in [T_0, T_1]$  отримано оцінки знизу абсолютних величин відповідних малих знаменників задачі виразами

$$C_0(1 + \|\mu_k\|^2)^{-\gamma_0/2}$$

зі сталою  $C_0 = C_0(T)$  і незалежною від  $T$  сталою  $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ .

На вужчій підмножині (міри не меншої, ніж  $T_1 - T_0 - \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  — довільне мале число) встановлено рівномірні щодо  $T$  оцінки.

У процесі доведення суттєво використовується умова гіперболічності та асимптотичні властивості спектра  $M$ .

Достатні умови розв’язності задачі (1), (2) у шкалі  $\{\mathbf{H}_M^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$  наближаються до необхідних тим ближче, чим ближче до нуля число  $p/\theta_1$ , де  $p$  — розмірність системи (1), а  $\theta_1$  — швидкість (порядок) зростання довжин векторів  $\mu_k$  зі спектра  $M$  стосовно довжини вектора  $k \in \mathbb{Z}^p$ .

Отримані результати узагальнюють і уточнюють результати роботи [4] та доповнюють попередні результати автора (див. [5]).

- [1] Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1970. — Т. 1. — 492 с.
- [2] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — М.: Наук. думка, 2002. — 416 с.
- [3] Ільків В. С., Пташник Б. Й. Задача з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. — 2006. — 58, № 12. — С. 1624–1650.
- [4] Кузь А. М., Пташник Б. Й. Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь динамічної теорії пружності // Мат. методи і фіз.-мех. поля. — 2013. — 56, № 4. — С. 40–53.
- [5] Ільків В. С., Нитребич З. М., Пучак П. Я. Задача з інтегро-крайовими умовами для системи рівнянь Ляме у просторах майже періодичних функцій // Буков. мат. журн. — 2015. — 3, № 2. — С. 27–41.

УДК 539.4

## Дослідження міцності анізотропних матеріалів з орієнтованою структурою дефектів

Квіт Р. І., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Деякі види технологічних обробок матеріалів і виробів з них (термомеханічна обробка, патентування, гаряча обробка тиском та ін.) ведуть до зміни структури дефектів, їх геометричних параметрів. Для матеріалів, отриманих у результаті таких обробок, характерна анізотропія механічних властивостей [1–3]. Вона зумовлена, перш за все, переважаючою орієнтацією дефектів матеріалу (включень, пустот), а також окремих складових структури. У загальному випадку оцінку міцності анізотропного матеріалу можна звести до задачі про крихку міцність модельного матеріалу з певним чином орієнтованими дефектами типу тріщин. Зокрема, обробка сталі, яка супроводжується пластичною деформацією, приводить до направленої структури неметалічних включень [4].

Розглядаємо ізотропну до технологічної обробки пластину, в якій рівномірно розподілені випадкові тріщини, що не взаємодіють між собою. Пластина перебуває в плоскому двовісному полі однорідних сил  $p$  та  $q$  ( $q = \eta p$ ), які можна трактувати як головні напруження за плоского напруженого стану. Тріщини характеризуються двома параметрами — орієнтацією (кут  $\alpha$  нахилу відносно напрямку дії сили  $p$ ) та довжиною  $2l$ . Приймаємо рівноймовірну орієнтацію дефектів. Тоді щільність імовірності орієнтації дефектів:

$$f(\alpha) = \frac{2}{\pi}, \quad 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Запишемо щільність імовірності орієнтації дефектів після обробки так:

$$f_1(\alpha) = \frac{2}{\pi} \Psi(\alpha), \quad (2)$$

де  $\Psi(\alpha)$  — функція впливу обробки на орієнтацію.

При  $\Psi(\alpha) = 1$  отримуємо диференціальну функцію розподілу (1) (ізотропний матеріал). Для запису функції  $\Psi(\alpha)$  застосуємо зрізаний нормальний розподіл [5] (обробка супроводжується направленою пластичною деформацією):

$$\Psi(\alpha) = \frac{1}{\gamma \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{2\sigma^2}\right), \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2. \quad (3)$$

Тут  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  — структурні константи анізотропного матеріалу,  $\alpha_0$  — параметр положення,  $\sigma$  — параметр масштабу ( $\sigma = \frac{\alpha_2 - \alpha_0}{3}$ ),  $\gamma$  — нормуючий множник (ступінь зрізання):

$$\gamma = \Phi\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_0}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\sigma}\right),$$

де  $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$  — функція Лапласа.

Переважаюча орієнтація дефектів визначається кутом  $\alpha_0$  та інтервалом зрізання  $|\alpha_2 - \alpha_1|$ .

При виборі закону розподілу дефектів за розміром враховуємо, що зі збільшенням розміру дефекту зменшується ймовірність його присутності. Тому щільність імовірності розміру  $l$  дефектів анізотропного матеріалу запишеться у вигляді бета-розподілу:

$$f_2(l) = \frac{r+1}{l_1} \left(1 - \frac{l}{l_1}\right)^r \quad (0 \leq l \leq l_1), \quad (4)$$

де  $r \geq 0$  — характеристика однорідності матеріалу (зі збільшенням  $r$  збільшується ймовірність присутності малих дефектів),  $l_1$  — структурна константа матеріалу.

Для характеристики неоднорідності структури анізотропного матеріалу застосовуємо щільність сумісного розподілу ймовірностей незалежних випадкових величин  $\alpha$  та  $l$ :  $f(\alpha, l) = f_1(\alpha)f_2(l)$ .

Враховуючи співвідношення (2) — (4), отримаємо

$$f(\alpha, l) = \frac{2(r+1)}{\pi l_1} \Psi(\alpha) \left(1 - \frac{l}{l_1}\right)^r. \quad (5)$$

Розглядаємо пластину як сукупність  $N$  первинних елементів (з одною тріщиною). Відповідно до гіпотези Вейбула про найслабшу ланку, граничне (руйнівне) навантаження для пластини співпадає з граничним навантаженням для її найменш міцного елемента. Інтегральна функція розподілу ймовірностей руйнівного навантаження (випадкової величини) для елемента пластини з одним дефектом, аналогічно як і для ізотропного матеріалу [6] :

$$F_1(|p|, \eta) = \frac{2(r+1)}{\pi l_1} \iint_{p(\alpha, l, \eta) \leq p_*} \Psi(\alpha) \left(1 - \frac{l}{l_1}\right)^r d\alpha dl, \quad p_{min} \leq p \leq \infty. \quad (6)$$

Тут інтегрування здійснюється по тих можливих значеннях  $\alpha$  та  $l$  з їх області існування, для яких виконується нерівність  $p(\alpha, l, \eta) \leq p_*$ .

Граничне навантаження  $p_*$  визначається [7] так:

$$|p_*| = Kl^{-0,5} \varphi_i(\alpha, \eta, \rho), \quad K = \pi^{-0,5} K_{Ic} \quad (i = 1, 2),$$

де  $K_{Ic}$  — коефіцієнт інтенсивності напружень (стала, яка характеризує опір матеріалу поширенню тріщини,  $\rho$  — коефіцієнт тертя між її берегами,  $0 \leq \rho \leq 1$ ).

Функція  $\varphi_i(\alpha, \eta, \rho)$  залежно від типу тріщини:

а) для відкритих тріщин,  $\sigma_n \geq 0$

$$\varphi_1(\alpha, \eta) = \sec^2 \frac{\theta_*}{2} \left[ \cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha) - 1,5 (1 - \eta) \sin 2|\alpha| \sin \frac{\theta_*}{2} \right]^{-1},$$

де  $\theta = \theta_*$  — кут, що визначає початковий напрямок поширення тріщини:

$$\theta_* = 2 \arctg \frac{1 - \sqrt{1 + 8b^2}}{4b}; \quad b = \frac{(1 - \eta) \sin 2|\alpha|}{2 (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha)};$$

$\sigma_n$  — нормальні до лінії тріщини напруження ( $\sigma_n = p \sin^2 \alpha + q \cos^2 \alpha$ );



б) для закритих тріщин,  $\sigma_n < 0$

$$\varphi_2(\alpha, \eta, \rho) = 0,25\sqrt{3} [(1 - \eta) \sin 2|\alpha| + 2\rho \operatorname{sign} p (\sin^2\alpha + \eta \cos^2\alpha)]^{-1}.$$

Якщо пластина містить  $N$  дефектів, то функція розподілу руйнівного навантаження для неї, відповідно до виразу (6), буде такою:

$$F_N(|p|, \eta) = 1 - \left( 1 - \frac{2(r+1)}{\pi l_1} \iint_{p(\alpha, l, \eta) \leq p_*} \Psi(\alpha) \left( 1 - \frac{l}{l_1} \right)^r d\alpha dl \right)^N.$$

Якщо відома функція розподілу  $F_N(|p|, \eta)$ , то можна знайти статистичні характеристики міцності анізотропної пластини з відповідними розмірами (відповідною кількістю  $N$  дефектів): середнє та найімовірніше значення, величину навантаження, яка відповідає заданій імовірності зруйнування, дисперсію та коефіцієнт зміни міцності.

- [1] *Yangi Yin-Huan*. The non-local theory solution of orthotropic composite materials on the stress field near the crack tips // *J. Solid Mech. and Mater. Eng.* — 2009. — **3**, No. 9. — P. 1081—1089.
- [2] *Каминский А.А., Курчаков Е.Е., Гаврилов Г.В.* О влиянии растягивающей вдоль трещины нагрузки на формирование зоны пластичности в анизотропном теле // *Прикл. механика*. — 2010. — **46**, № 6. — С. 27—42.
- [3] *Das S., Mukhopadhyay S., Prasad R.* Stress intensity factor of an edge crack in bonded orthotropic materials // *Int. J. Fract.* — 2011. — **168**, No. 1. — P. 117—123.
- [4] *Кислинг Р., Ланге Н.* Неметаллические включения в стали. — *Металлургия*, 1968. — 124 с.
- [5] *Вадзинский Р.Н.* Справочник по вероятностным распределениям. — СПб.: Наука, 2001. — 295 с.
- [6] *Витвицкий П.М., Попина С.Ю.* Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. — Киев: Наукова думка, 1980. — 186 с.
- [7] *Панасюк В.В.* Механика квазихрупкого разрушения материалов. — Киев: Наукова думка, 1991. — 416 с.

УДК 517.764

## О диффеоморфизмах (псевдо-)римановых пространств со специальной кубической аффинорной структурой

Курбатова И. Н., к.ф.-м.н., доц. каф. геометрии и топологии

Регрут В. В., студ. 6 курса

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова  
(ул. Дворянская, 2, г. Одесса, 65001, Украина)

Мы продолжаем начатые в ([1]) исследования рF-планарных отображений (псевдо-)римановых пространств  $(V_n, g_{ij}, F_i^h)$  и  $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$  с абсолютно параллельной кубической структурой, основные уравнения которых в общей по отображению системе координат  $(x^i)$  имеют вид:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^2 \overset{s}{q}_i(x) F_j^h(x),$$

где

$$\overset{0}{F}_i^h = \delta_i^h, \quad \overset{1}{F}_i^h = F_i^h, \quad \overset{2}{F}_i^h = F_i^\alpha F_\alpha^h, \quad \overset{s}{F}_i^h(x) = \overset{s}{\bar{F}}_i^h(x),$$

$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta = \delta_i^h, \quad g_{i\alpha} F_j^\alpha = g_{j\alpha} F_i^\alpha, \quad F_{i,j}^h = F_{i|j}^h = 0,$$

$\Gamma_{ij}^h, \bar{\Gamma}_{ij}^h$  - компоненты объектов связности  $V_n$  и  $\bar{V}_n$ , соответственно;  $\overset{s}{q}_i(x)$  - некоторые ковекторы;  $F_i^h$  - аффинор;  $\langle, \rangle, \langle | \rangle$  - знаки ковариантной производной в  $V_n$  и  $\bar{V}_n$ .

Условия на аффинор указанного типа являются довольно жесткими и влекут за собой приводимость риманова пространства. Таким образом,  $V_n$  и  $\bar{V}_n$ , находящиеся в 2F-планарном отображении, являются локально приводимыми и распадаются в произведение

$$V_n = V_m \times V_{n-m}, \quad \bar{V}_n = \bar{V}_m \times \bar{V}_{n-m}.$$

Мы установили, что на компонентах этого произведения 2F-планарное отображение

$$f : V_n \longrightarrow \bar{V}_n$$

индуцирует геодезическое отображение ([2])

$$f_1 : V_m \longrightarrow \bar{V}_m,$$

и F-планарное отображение ([2])

$$f_2 : V_{n-m} \longrightarrow \bar{V}_{n-m},$$

соответствующее аффинору  $\tilde{F}_A^B(x^C)$  определенного типа  $A, B, C = m+1, m+2, \dots, n$ .

При дальнейшем рассмотрении мы выяснили, что аффино́р  $\tilde{F}_A^B(x^C)$  в пространствах  $V_{n-m}$ ,  $\bar{V}_{n-m}$  характеризуется свойствами

$$\tilde{F}_A^B \tilde{F}_C^A = -\delta_C^B, \quad g_{AB} \tilde{F}_C^B = g_{CB} \tilde{F}_A^B, \quad \tilde{F}_{A,C}^B = \tilde{F}_{A|C}^B = 0,$$

Мы показали, что пространство  $V_n$ , снабженное аффино́рной структурой рассматриваемого типа и допускающее 2F-планарное отображение на плоское

$$f : V_n \longrightarrow \bar{V}_n = \bar{E}_n,$$

является произведением пространства постоянной кривизны  $V_m$  на плоское  $V_{n-m} = E_{n-m}$ .

Мы также доказали аналоги известной в теории геодезических отображений келеровых пространств теоремы Яно-Вестлэйка о том, что римановы пространства с указанной аффино́рной структурой не допускают нетривиальных геодезических и  $F$ -планарных отображений, представляющих собой частные случаи 2F-планарных отображений .

- [1] *Регрут В. В., Курбатова И. Н.* О 2F-планарных отображениях римановых пространств с кубической абсолютно параллельной структурой.— Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе - 2015". Одесса, 2015.— с.84
- [2] *Mikes J., Vanzurova A., Hinterleitner I.* Geodesic Mappings and Some Generalizations.— Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.— 304 с.

УДК 539.3

**Варіаційний метод дослідження  
напружено-деформованого стану шаруватих  
анізотропних структур при наявності зон неідеального  
міжфазного контакту**

Лазько В. А., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Лозбень В. Л., к.т.н., доц. каф. ВМ

Желізняк Й. Р., ст.викл каф. ВМ

Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Розглядається шарувата анізотропна структура, складена з  $N$  однорідних криволінійних шарів, кожен з яких займає трьохвимірну область  $V$ , яка знаходиться під дією силових навантажень, прикладених до зовнішніх поверхонь і крайових зусиль і містить як зони ідеального міжфазного механічного контакту, так і зони зсувного або нормального розшарування. Для розглядувальної структури вводиться функціонал  $I$ . Доведена теорема: варіаційне рівняння  $\delta I = 0$  містить в якості рівнянь Ейлера всі диференціальні рівняння теорії пружності для розглядуваної шаруватої структури, а в якості Ейлерових умов — граничні умови на поверхнях, що обмежують пакет, а також кінематичні умови в зонах контакту. Сформульований варіаційний принцип використаний для побудови двохвимірних рівнянь для шаруватих оболонок і пластин. Розроблений метод  $\{m, n\}$ -апроксимації характеристик напружено-деформованого стану кожного з шарів поліномами Лежандра. В рамках  $\{1, 0\}$ -апроксимації варіаційний метод використаний для дослідження напружено-деформованого стану двохшарової трансверсально-ізотропної пластини з двома крайовими зонами повного розшарування. Проаналізовано залежність контактних напружень в зоні ідеального механічного контакту від фізико-мезанічних і геометричних параметрів пластини.

УДК 517.956.4

## Про різні умови Гельдера на коефіцієнти вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова

Мединський І. П., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Задача побудови фундаментального розв’язку задачі Коші для виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова з коефіцієнтами, які залежать від усіх змінних розв’язувалась за різних припущень на коефіцієнти, зокрема використовувались різні умови Гельдера. Зв’язок між деякими з них розглянуто в повідомленні. Будемо вважати, що просторова змінна  $x \in \mathbb{R}^n$  складається з двох груп змінних: основної групи  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  і групи змінних виродження  $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ , де  $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , так що  $x := (x_1, x_2)$ ,  $1 \leq n_2 \leq n_1$ ,  $n = n_1 + n_2$ . Через  $a$  позначатимемо обмежену й неперервну на  $[0, T] \times \mathbb{R}^n$  комплекснозначну функцію. В праці [1], крім умови параболічності, використовувалась така умова на коефіцієнтами рівняння:

$$\exists H > 0 \exists \alpha \in (0, 1) \forall \{(t, \tau) \subset [0, T] \forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}^n :$$

$$|a(t, x) - a(t, y)| \leq H(d(t, X(t - \tau); \tau, y))^\alpha, \quad (1)$$

де  $X(t) := (X_1(t), X_2(t))$ ,  $X_1(t) := x_1$ ,  $X_2(t) := x_2 + t\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_1 := (x_{11}, \dots, x_{1n_2})$  – параметричні точки;  $d(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|^{m_1/m_2}$ ,  $d(t, x; \tau, y) := |t - \tau|^{m_1} + d(x, y)$  – параболічні відстані;  $m_1 := 1/2$ ,  $m_2 := 3/2$ .

Пропонується використовувати замість (1) наступні умови:

$$\exists H_1 > 0 \exists \alpha_1 \in (0, 1) \forall t \in [0, T] \forall \{x_1, y_1\} \subset \mathbb{R}^{n_1} \forall x_2 \in \mathbb{R}^{n_2} :$$

$$|a(t, (x_1, x_2)) - a(t, (y_1, x_2))| \leq H_1|x_1 - y_1|^{\alpha_1}, \quad (2)$$

$$\exists H_2 > 0 \exists \alpha_2 \in (0, 2/3) \forall \{t, h\} \subset [0, T] \forall x_1 \in \mathbb{R}^{n_1} \forall \{x_2, y_2\} \subset \mathbb{R}^{n_2} :$$

$$|a(t, (x_1, x_2)) - a(t, (x_1, y_2))| \leq H_2(h^{m_2\alpha_2} + |X_2(h) - y_2|^{\alpha_2}). \quad (3)$$

З умови (3) при  $h = 0$  випливає звичайна умова Гельдера за змінною  $x_2$ . Зауважимо, що якщо функція  $a$  задовольняє умову Гельдера за змінною  $t$  з показником  $\alpha/2$ , умови (2) та (3) з показниками  $\alpha_1 = \alpha$  та  $\alpha_2 = \alpha/3$ , відповідно, то умова (1) справджується з показником  $\alpha$ . Дійсно

$$\begin{aligned} |a(t, x) - a(t, y)| &\leq |a(t, x) - a(\tau, x)| + |a(\tau, (x_1, x_2)) - a(\tau, (y_1, x_2))| + \\ &+ |a(\tau, (y_1, x_2)) - a(\tau, (y_1, y_2))| \leq H(d(t, x; \tau, y))^\alpha. \end{aligned}$$

Достатню умову виконання (3) дає наступна лема.

**Лема.** *Нехай  $a$  – неперервна й обмежена функція на  $\Pi_{[0, T]}$ , яка задовольняє умову*

$$\exists H_3 > 0 \exists \alpha_2 \in (1/3, 2/3) \forall \{(t, x), (t, z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0, T]} :$$

$$|\Delta_{x_2}^{z_2} a(t, x)| \leq H_3(T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-m_2\alpha_2} |x_2 - z_2|^{m_2\alpha_2}. \quad (4)$$

Тоді справджується нерівність (3).

**Доведення.** Досить довести обмеженість відношення

$$R := |\Delta_{x_2}^{z_2} a(t, x)| (h^{m_2 \alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2})^{-1}$$

для всіх  $\{(t, x), (t, z^{(2)})\} \subset \Pi_{[0, T]}$  та  $h \in (0, T]$ .

У випадку  $h^{m_2 \alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2} > T^{m_2 \alpha_2}$ , маємо

$$R \leq T^{-m_2 \alpha_2} |\Delta_{x_2}^{z_2} a(t, x)| \leq 2MT^{-m_2 \alpha_2}, \quad (5)$$

де  $M$  – стала, що обмежує модуль функції  $a$ . Нехай тепер справджується протилежна нерівність

$$h^{m_2 \alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2} \leq T^{m_2 \alpha_2}. \quad (6)$$

Будемо використовувати нерівність

$$|x_2 - z_2| \leq h|\hat{x}_1| + |X_2(h) - z_2|, h \in [0, T]. \quad (7)$$

Можливі такі випадки : 1)  $h|\hat{x}_1| \leq |X_2(h) - z_2|$  та

2)  $h|\hat{x}_1| > |X_2(h) - z_2|$ . У першому випадку, за допомогою (4) і (7), отримаємо

$$\begin{aligned} R &\leq H_3(h|\hat{x}_1| + |X_2(h) - z_2|)^{m_2 \alpha_2} (h^{m_2 \alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2})^{-1} \times \\ &\quad \times (T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-m_2 \alpha_2} \leq H_3 2^{\alpha_2} (h^{m_2 \alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2})^{-1} \times \\ &\quad \times |X_2(h) - z_2|^{m_2 \alpha_2} (T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-m_2 \alpha_2} \leq H_4 (T^{m_1} (T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-1})^{m_2 \alpha_2} \times \\ &\quad \times ((T^{-m_1} |X_2(h) - z_2|)^{m_2 \alpha_2} (h^{m_2 \alpha_2} + (T^{-m_1} |X_2(h) - z_2|)^{m_2 \alpha_2})^{-1}) \leq \\ &\quad \leq H_4, \quad H_4 = H_3 2^{m_2 \alpha_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут використано нерівність  $|X_2(h) - z_2|^{\alpha_2} \geq (T^{-m_1} |X_2(h) - z_2|)^{m_2 \alpha_2}$ , яка справджується на підставі (6).

У другому випадку оцінювання відношення  $R$  проводимо аналогічно. Маємо

$$\begin{aligned} R &\leq H_3(h|\hat{x}_1| + |X_2(h) - z_2|)^{m_2 \alpha_2} (h^{m_2 \alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2})^{-1} \times \\ &\quad \times (T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-m_2 \alpha_2} \leq H_3 2^{\alpha_2} (h^{m_2 \alpha_2} + |X_2(h) - z_2|^{\alpha_2})^{-1} \times \\ &\quad \times (|\hat{x}_1| (T^{m_1} + |\hat{x}_1|)^{-1})^{m_2 \alpha_2} \leq H_4. \end{aligned} \quad (9)$$

З нерівностей (5), (8) і (9) випливає потрібна оцінка (3) із сталою  $H_2 = \max\{2MT^{-m_2 \alpha_2}, H_4\}$ .  $\square$

- [1] *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. –2004. – **152**. – 390 p.

УДК 517.764

## Диффеоморфизмы многообразий с рекуррентно-параболической структурой

Нежуренко А. С., студент 6 курса

Курбатова И. Н., к.ф.-м.н., доц. каф. геометрии и топологии

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова  
(ул. Дворянская, 2, г. Одесса, 65001, Украина)

Многообразие  $X_n$  считается наделенным *e-структурой*, если на нем определена аффинорная структура  $F_i^h(x)$ , удовлетворяющая условиям  $F_i^\alpha F_\alpha^h = e\delta_i^h$ , где  $e = -1, 1$  или  $0$ . При  $e = 1$  ее называют гиперболической; при  $e = -1$  - эллиптической; при  $e = 0$  - параболической.

В римановых пространствах, в зависимости от дифференциальных свойств аффинора *e-структуры*, выделяют такие классы:

келерово - при  $F_{i,j}^h = 0$ , где «,» - знак ковариантной производной в  $V_n$ ;

K-пространство - при  $F_{i,j}^h + F_{j,i}^h = 0$ ;

H-пространство - при  $F_{hi,j} + F_{ij,h} + F_{jh,i} = 0$ , где  $F_{hi} = g_{h\alpha}F_i^\alpha$  и др.

В ([1]) было введено понятие *рекуррентно-параболической* аффинорной структуры  $F_i^h(x)$  на римановом пространстве  $(V_n, g_{ij})$ , которая характеризуется условиями

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i},$$

$$F_{i,j}^h = \rho_j(x)F_i^h(x),$$

где  $\rho_j$  - ковектор, «,» - знак ковариантной производной в  $V_n$ . Само  $V_n$  при этом также называется *рекуррентно-параболическим*.

Заметим, что для гиперболического и эллиптического случаев рекуррентность ковариантной производной аффинора приводит просто к ковариантному постоянству  $F_{i,j}^h = 0$ .

Рассмотрим пару рекуррентно-параболических пространств  $(V_n, g_{ij}, F_i^h)$  и  $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ , находящихся в геодезическом отображении ([2]) с сохранением аффинорной структуры. Их основные уравнения в общей по отображению системе координат  $(x^i)$  имеют вид

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_i(x)\delta_j^h,$$

$$\bar{F}_i^h = F_i^h,$$

где  $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$  - компоненты объектов связности пространств  $\bar{V}_n$  и  $V_n$ , соответственно;  $\psi_i$  - ковектор.

При этом

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0,$$

$$F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \quad \bar{F}_{ij} = F_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i},$$

$$F_{i,j}^h = \rho_j(x)F_i^h(x), \quad \bar{F}_{i,j}^h = \bar{\rho}_j(x)\bar{F}_i^h(x),$$

где «|» - знак ковариантной производной в  $\bar{V}_n$ .

Мы показали, что ввиду сохранения структуры такое отображение вырождается в аффинное, то есть является тривиальным. Этот факт представляет собой аналог теоремы Яно-Вестлэйка в теории геодезических отображений келеровых пространств.

В ([1]) изучались некоторые вопросы квази-геодезических отображений (КГО) рекуррентно-параболических пространств, основные уравнения которых в общей по отображению системе координат  $(x^i)$  имеют вид

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x)$$

$$\bar{F}_i^h = F_i^h,$$

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad \bar{F}_{ij} + \bar{F}_{ji} = 0,$$

$$F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \quad \bar{F}_{ij} = F_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i},$$

$$F_{i,j}^h = \rho_j(x)F_i^h(x), \quad F_{i|j}^h = \bar{\rho}_j(x)F_i^h(x),$$

где  $\psi_i, \varphi_i$  - некоторые ковекторы.

В частности, там рассмотрено КГО рекуррентно-параболического  $V_n$  на плоское пространство  $\bar{E}_n$ . Получена структура тензора Римана такого  $V_n$  (квази-плоского). Мы же доказали аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств, а именно, показали, что такая структура тензора Римана рекуррентно-параболического пространства является необходимым и достаточным условием того, чтобы оно допускало квази-геодезическое отображение на плоское пространство.

- [1] Курбатова И.Н., Сисюк О.Т. Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств. — Proceedings of the International Geometry Center, V.8, №1, 2015. — p. 57-66.
- [2] Mikes J., Vanzurova A., Hinterleitner I. Geodesic Mappings and Some Generalizations. — Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009. — 304 p.



УДК 530.145

## Використання методу скінченних елементів для розв'язування лінеаризованих задач термопластичності просторових тіл

Неспляк Д. М.<sup>1,2</sup>, к.ф.-м.н.Магеровська Т. В.<sup>1,2</sup>, к.ф.-м.н., доц. каф. ОМПГошко З. О.<sup>1</sup>, асистент. каф. ОМП

<sup>1</sup>Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

<sup>2</sup>Львівський державний університет внутрішніх справ  
(вул. Городоцька, 26, м. Львів, 79007, Україна)

До числа найпоширеніших методів розв'язування крайових задач відноситься метод скінченних елементів з великою розмаїтістю варіантів дискретних наближень шуканих функцій і наявністю єдиної методики їх комп'ютерного моделювання. Теоретичним і практичним аспектам застосування МСЕ присвячені роботи В. А. Баженова, І. К. Сенченкова, В. Г. Савченка, М. Е. Бабешко, В. В. Піскуна, М. В. Марчука, І. С. Мухи та ін. [1-3].

Побудуємо множину просторових скінченних елементів із комбінованими апроксимаціями. Припустимо, що зайнята просторовим тілом область  $V$  має форму деякого околу базової поверхні  $\Omega$ , яка віднесена до криволінійної ортонормованої системи координат  $\alpha_1, \alpha_2$ . При цьому товщина тіла відраховується вздовж координати  $\alpha_3$  за напрямком нормалі до базової поверхні  $\Omega$ . Бокова поверхня області  $V$  є лінійчатою поверхнею, що складається з відрізків, які визначаються величинами  $\beta_1 = \text{ctg}\varphi_1$ ,  $\beta_2 = \text{ctg}\varphi_2$ ,  $\varphi_1, \varphi_2$  – кути нахилу відрізків бокової поверхні у напрямках  $\alpha_1, \alpha_2$ .

Відзначимо, що значення величин  $\beta_1, \beta_2$ , на бокових поверхнях об'єму  $V$  визначаються однозначно, виходячи з форми зрізу просторового тіла. В середині тіла ці значення потрібно довизначити таким чином, щоб отримані при цьому просторові елементи не обмежувались поверхнями, які перетинаються під дуже гострими кутами.

Розіб'ємо область  $V$  на  $L$  частин за товщиною тіла. Отримаємо множину скінченних елементів  $V = \bigcup_{e=1, N; l=1, L} V_{el}$ , де  $N$  – кількість криволінійних

чотирикутників, на які розбита базова поверхня  $\Omega$ .

Відобразимо куб  $\Xi = \{(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) : -1 \leq \zeta_i \leq 1, i = 1, 3\}$  на область  $V_{el}$  за допомогою перетворення  $\alpha_p(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1; \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} \alpha_{pk_1k_2l-1} \Phi_{k_1k_2, -1} +$

$+ \alpha_{pk_1k_2l-1} \Phi_{k_1k_2, 1}$ , де  $\alpha_{pk_1k_2l-1}$  і  $\alpha_{pk_1k_2l}$  – значення координати  $\alpha_p$  ( $p = 1, 2$ ) на нижній і верхній поверхнях скінченного елемента  $V_{el}$  відповідно,  $\Phi_{k_1k_2, -1} = \Phi_{k_1k_2}^\circ(\zeta_1, \zeta_2) \frac{1 - \zeta_3}{2}$ ,  $\Phi_{k_1k_2, 1} = \Phi_{k_1k_2}^\circ(\zeta_1, \zeta_2) \frac{1 + \zeta_3}{2}$ . При цьому  $\alpha_{pk_1k_2k_3} = \alpha_{pk_1k_2}^\circ - \beta_{pk_1k_2} \alpha_{3k_1k_2k_3}$ ,  $k_3 = l - 1, l$ ,  $\alpha_{3k_1k_20} < \alpha_{3k_1k_21} < \dots < \alpha_{3k_1k_2l-1} < \dots < \alpha_{3k_1k_2L}$ , де  $(\alpha_{1k_1k_2}^\circ, \alpha_{2k_1k_2}^\circ)$  – координати вузла  $(k_1, k_2)$  криволінійного чотирикутника  $\Omega_e$  на базовій поверхні,  $\Phi_{k_1k_2}^\circ(\zeta_1, \zeta_2)$  – біквадратичні базові функції,  $\beta_{pk_1k_2}$  – котангенс

кута нахилу деякої прямої, яка проходить через точку  $(\alpha_{1k_1k_2}^{\circ}, \alpha_{2k_1k_2}^{\circ})$  до  $p$ -тої координатної лінії на базовій поверхні.

Отримаємо просторові скінченні елементи, на краях яких вибрано 16 вузлових точок. Відзначимо, що на відміну від геометрії базової поверхні, яка задається аналітичним шляхом, геометрія лицевих поверхонь тіла зі змінною товщиною моделюється деякими поверхнями другого порядку. Проте ця апроксимація побудована у криволінійній системі координат. Тому вона не спричинює істотних похибок.

- [1] *Баженов В. А., Соловей Н. А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках. Прикладная механика.— 1999. — 45, № 9. — С. 3-40.
- [2] *Marchuk M. V., Khomyak M. M.* Hermitian splines as basis functions of the finite-element method for plotting stress trajectories — Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 168, No 5. — P. 673–687.
- [3] *Mukha I. S., Nespliak D. M.* Numerical analysis of processes of thermoplastic deformation of axisymmetric bodies with regard for unloading — Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 181, No 4. — P. 438–449.

УДК 517.95

## Про ядро двоточкової за часом задачі для рівняння із частинними похідними

Нитребич З. М.<sup>1</sup>, д.ф.-м.н., зав. каф. ВМ,Маланчук О. М.<sup>1,2</sup>, аспірант

<sup>1</sup>Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

<sup>2</sup>Львівський національний медичний університет ім. Д. Галицького  
(вул. Пекарська, 69, м. Львів, 79010, Україна)

Відомо [1], що задачі з багатоточковими за часом умовами для рівнянь із частинними похідними є некоректними крайовими задачами. Це, здебільшого, пов'язано з існуванням нетривіальних розв'язків відповідних однорідних задач. Зокрема, задача для рівняння коливань струни

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] U(t, x) = 0, \quad U(0, x) = 0, \quad U(T, x) = 0, \quad T > 0,$$

має нетривіальні розв'язки вигляду

$$U_k(t, x) = \sin \frac{\pi kt}{T} \sin \frac{\pi kx}{T}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Досліджено множину розв'язків адачі

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + a \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t} + b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] U(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

$$A_i \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) U((i-1)T, x) + B_i \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial U}{\partial t}((i-1)T, x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Диференціальні вирази  $a \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$ ,  $b \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$  в рівнянні (1) є довільними диференціальними поліномами або виразами нескінченного порядку з цілими символами. В умовах (2)  $A_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$ ,  $B_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$ ,  $A_2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$ ,  $B_2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)$  – диференціальні поліноми з комплексними коефіцієнтами, причому для  $\nu \in \mathbb{C}$  виконуються умови:  $|A_1(\nu)|^2 + |B_1(\nu)|^2 \neq 0$ ,  $|A_2(\nu)|^2 + |B_2(\nu)|^2 \neq 0$ .

Встановлено, що множина розв'язків задачі (1), (2) визначається характеристичним визначником вигляду  $\Delta(\nu)$ . У випадку, коли визначник  $\Delta(\nu)$  є відмінним від нуля для  $\forall \nu \in \mathbb{C}$ , задача (1), (2) має лише тривіальний розв'язок. У протилежному випадку задача (1), (2) має нетривіальні цілі розв'язки. Для їх побудови використано диференціально-символьний метод [2].

- [1] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
- [2] Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ “Львівська політехніка”. – 2002. – 292 с.

УДК 517.946

## Багатоконтурні задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу

Обшта А. ф., д.т.н., проф. каф. ВМ

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Застосовано ідеї Лопатинського Я.Б. [1] до дослідження багатоконтурних задач параболічного типу виду:

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = A \left( t, x, \frac{\partial}{\partial x} \right) U(t, x) \quad ((t, x) \in Q), \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow y \in S_r \\ x \in \Omega_r}} B_r \left( y, \frac{\partial}{\partial x} \right) U(t, x) = f_r(t, y) \quad (r = \overline{1, m}), \quad (2)$$

$$U(0, x) = \Theta, \quad (3)$$

де  $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \dots \supset \Omega_r \supset \dots \supset \Omega_m$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) опуклі області в  $R^n$ , які обмежені гладкими опуклими поверхнями  $S_r$  ( $r = \overline{1, m}$ ) типу Ляпунова,  $Q = \{(t, x) \in R^{n+1} : 0 \leq t \leq T, x \in \Omega_1\}$ .  $f_r(t, y) = (f_{r1}(t, y), \dots, f_{rl_r}(t, y))$  достатньо гладкі функції. Умова параболічності розуміється в сенсі [2, с.78].

$$A(t, x, D) = \sum_{(k) \leq 2m} A_{ij}^k(t, x) D^k U(t, x), \quad (k = (k_1, \dots, k_n), U = (U_1, \dots, U_N)).$$

Коефіцієнти  $A_{ij}^k(t, x)$  вважаються неперервно диференційованими функціями за будь-якими послідовностями змінних  $x_1, \dots, x_n, t$  до порядку  $h$ , де  $h$  визначається  $h_r$  ( $r = \overline{1, m}$ ). Матриця умов на поверхнях розбивається на  $m$  груп. Групі відповідає матриця, що складається з  $l_r$  рядків  $\left( \sum_{r=1}^m l_r = mN \right)$ , кожен з яких є  $N$ -мірним вектором диференціальних виразів порядків  $h_r$ .

$$B_r \left( y, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{k=0}^{k=h_r} B_{rk} \left( y, \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad 0 \leq h_r \leq 2m - 1$$

$$B_{rk} \left( y, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \left\| \sum_{(k)} \frac{B_{i_r, j, r}^{k_1, \dots, k_n, k}(y) \partial^k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right\|_{i_r=1, j=1}^{i_r=l_r, j=N}$$

$B_{i_r, j, r}^{k_1, \dots, k_n, k}(y)$  — неперервні функції  $y \in S_r$ . Встановлено достатні умови існування і єдиності класичних розв'язків задачі (1)-(3).

- [1] Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям // Укр. мат. журн. — 1953. — 5, №2. — С. 123-151.
- [2] Загорский Т.Я. Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. Львов. 1961. — С.116.

УДК 513.832

## Побудова ізоотопій між кривими скінченної довжини за допомогою кривих рівномірно обмеженої довжини

Олексів І. Я., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Якщо  $A$  – проста замкнена крива на площині  $E^2$ , то ізотопію  $h_t : A \rightarrow E^2$ ,  $t \in [0; 1]$ , розуміємо, як неперервну сім'ю вкладень кривої  $A$  в площину.

**Теорема 1.** *Нехай проста замкнена крива  $A$ , яка має скінченну довжину, обмежує в площині диск  $D$  і  $\Delta$  – двовимірний симплекс у внутрішності  $D$ . Тоді існує ізотопія  $h_t : \partial\Delta \rightarrow A$ ,  $t \in [0; 1]$ , яка переводить границю  $\partial\Delta$  симплекса  $\Delta$  в криву  $A$  і при цьому довжини кривих  $h_t(\partial\Delta)$  не перевищують довжини  $A$ .*

Це – одна з форм теореми Антуана [1]. Зазвичай в цій теоремі немає обмежень на довжини кривих. Для доведення теореми 1 будуємо в диску  $D$  послідовність простих замкнених ламаних  $\{L_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $L_1 = \partial\Delta$ , які попарно не перетинаються, наближають з середини в диску  $D$  граничну криву  $A$  і мають рівномірно обмежені довжини, які не більші за довжину кривої  $L$  (див., наприклад [2]). Далі для кожного  $n = 1, 2, \dots$ , будуємо ізотопію  $h_t^n : L_n \rightarrow L_{n+1}$ ,  $t \in [0; 1]$ , яка переводить  $L_n$  в  $L_{n+1}$  в межах кільця, обмеженого ламаними  $L_n$  і  $L_{n+1}$ . Для отримання ізотопії  $h_t^n$  користуємося такою теоремою.

**Теорема 2.** *Якщо  $A^{min}$  – найкоротша ламана, яка сполучає дві задані точки  $u$  і  $v$  в полідральному замкненому диску  $\tilde{G}$  і  $A$  – довільна інша ламана в  $\tilde{G}$ , яка має спільні кінцеві точки  $u$  і  $v$  з дугою  $A^{min}$ , то існує кусково-лінійна ізотопія  $H_t$ , яка переводить ламану  $A$  в  $A^{min}$  і для всіх  $t \in [0; 1]$  задовольняє вимоги:*

- 1)  $H_t(u) = u$  і  $H_t(v) = v$  ( $H_t$  є нерухомою на кінцевих точках  $u$  і  $v$ );
- 2)  $H_t(A) \subseteq \tilde{G}$ ;
- 3) *довжина  $H_t(A) \leq$  довжина  $A$ .*

Виконуючи побудову ізоотопій  $h_t^n : L_n \rightarrow L_{n+1}$ ,  $t \in [0; 1]$ , між парами простих замкнених кривих  $L_n$  і  $L_{n+1}$  згідно з теоремою 2, можемо додатково домогтися того, щоб добуток ізоотопій  $h_t = h_t^1 \cdot h_t^2 \cdot \dots$  визначав ізотопію, яка задовольняє твердження теореми 1.

- [1] Л. В. Келдыш. *Топологические вложения в евклидово пространство*. - Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 81. М.:Наука, 1966.
- [2] Jiří Jelinek. *Sur un théorème concernant les courbes de Jordan*. - Чехословацкий матем. журнал. 10(85), (1960), С. 596 - 613.

УДК 539.3

## Про постановку крайової задачі теорії пружності з врахуванням об'ємних сил в голоморфних функціях двох комплексних змінних

Пабірівський В. В., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Пабірівська Н. В., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Розглядається однорідне пружне тверде тіло  $K \cup \partial K$ , яке в початковому не навантаженому стані бієктивно відображається на область  $X \cup \partial X$  евклідового простору. Тіло знаходиться під дією стаціонарного силового навантаження, яке прикладене до його поверхні  $\partial X$  та системи об'ємних сил  $\mathbf{F}$ , яка статично еквівалентна нулю ( $U$  – потенціал об'ємних сил).

Розв'язування лінійної задачі теорії пружності в стаціонарній постановці зводиться до знаходження вектора переміщень  $\mathbf{u}$ , який в області  $X$  задовольняє рівняння рівноваги [1]:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \otimes (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla U = 0 \quad (1)$$

Тут,  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$  – вектор переміщення;  $u_i = u_i(x^1, x^2, x^3)$  ( $i = \overline{1, 3}$ );  $x^i$  – декартові координати довільно вибраної матеріальної точки  $k \in K$  в природному однорідному стані;  $\mathbf{e}_i$  – базисні орти вибраної декартової системи координат  $(0, x^1, x^2, x^3)$ ;  $\nabla$  – диференціальний оператор Гамільтона ( $i = \overline{1, 3}$ );  $\otimes$  – символ діадного добутку;  $\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = x^i \mathbf{e}_i$  – радіус-вектор довільної точки тіла в початковій конфігурації,  $\Delta$  – диференціальний оператор Лапласа;  $\lambda, \mu$  – пружні сталі Ляме. При цьому індекси, які повторюються, є індексами підсумовування.

Тензор напружень  $\hat{\sigma}$  в межах лінійної симетричної теорії пружності подається через вектор переміщень  $\mathbf{u}$  співвідношенням:

$$\hat{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \hat{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla) \quad (2)$$

і задовольняє на боковій поверхні  $\partial X$  граничну умову:

$$(\mathbf{n} \cdot \hat{\sigma})|_{\partial X} \equiv \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{n} \cdot [\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \hat{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla)]|_{\partial X} = \boldsymbol{\sigma}_n^+, \quad (3)$$

де  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль;  $\boldsymbol{\sigma}_n(x^1, x^2, x^3)$  – вектор напружень;  $\boldsymbol{\sigma}_n^+(x^1, x^2, x^3)$  – заданий вектор поверхневих зусиль, який задовольняє інтегральним умовам саморівноважності зовнішнього навантаження на боковій поверхні  $\partial X$ :

$$\int_{\partial X} \boldsymbol{\sigma}_n^+ d\Sigma + \int_X \mathbf{F} dV = 0,$$

$$\int_{\partial X} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}_n^+ d\Sigma + \int_X \mathbf{r} \times \mathbf{F} dV = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння (1) подамо наступним чином:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)},$$

де  $\mathbf{u}^{(1)}$  – частковий розв’язок неоднорідного рівняння (1):

$$\mu\Delta\mathbf{u}^{(1)} + (\lambda + \mu)\nabla \otimes (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) - \nabla U = 0,$$

$\mathbf{u}^{(2)}$  – розв’язок однорідного рівняння (1):

$$\mu\Delta\mathbf{u}^{(2)} + (\lambda + \mu)\nabla \otimes (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) = 0,$$

Частковий розв’язок  $\mathbf{u}^{(1)}$  подамо у вигляді:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \nabla\chi,$$

де  $\chi$  – потенціал складової вектора переміщення  $\mathbf{u}^{(1)}$ , який задовольняє рівняння Пуассона:

$$\Delta\chi = \frac{U}{\lambda + 2\mu} \quad (4)$$

Надалі, будемо вважати, що частковий розв’язок  $\chi$  неоднорідного рівняння (4) є відомим.

У праці [2] подана методика формулювання крайових задач просторової теорії пружності в голоморфних функціях  $\Phi(z_1, z_2)$ ,  $\Phi_0(z_1, z_2)$  двох комплексних змінних  $z_1, z_2$ .

На основі цієї методики для складової вектора переміщення  $\mathbf{u}^{(2)}$ , яка є розв’язком однорідного рівняння (1) формулюється крайова задача теорії пружності в голоморфних функціях  $\Phi(z_1, z_2)$ ,  $\Phi_0(z_1, z_2)$ :

$$\Delta\Phi_0^{(2)}(z_1, z_2) = 0, \quad \Delta\Phi^{(2)}(z_1, z_2) = 0; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \cdot \hat{P}^{(2)}) \Big|_{\partial X} &= \left( \mathbf{n} \cdot \left[ \nabla \otimes \nabla\Phi_0^{(2)} + (\nabla \otimes \nabla \otimes \Phi_0^{(2)}) \cdot \mathbf{r} - \right. \right. \\ &\left. \left. - (1 - 2\nu)(\nabla \otimes \nabla\Phi^{(2)} + \nabla\Phi^{(2)} \otimes \nabla) - 2\nu(\nabla \cdot \Phi^{(2)})\hat{I} \right] \right) \Big|_{\partial X} = \frac{P_n^{(2)(+)}}{2\mu}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким чином, за наявності об’ємних сил крайова задача просторової теорії пружності (1)-(3) зводиться до крайової задачі на голоморфні функції  $\Phi_0(z_1, z_2)$ ,  $\Phi(z_1, z_2)$ , які задовольняють крайові умови (6).

- [1] Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. — Москва: Гостехиздат, 1995. — 492 с.
- [2] Пабирівський В., Пабирівська Н. Про формулювання комплексно-спряжених крайових задач просторової теорії пружності в голоморфних функціях двох комплексних змінних — Випуск 9. — Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2009. — С. 100–107.

УДК 513.88

## Про деякі "парадокси" у теорії розширень лінійних відношень

Пігура О. В.,  
Сторож О. Г.

Національний університет імені Івана Франка  
(вул. Університетська, 1, м. Львів, 79000, Україна)

Нехай  $H$  — комплексний гільбертів простір. Будь-який замкнений лінійний многовид у просторі  $H^2 = H \oplus H$  називають замкненим лінійним відношенням у просторі  $H$ . Пи цьому використовують такі позначення (деталі — див. [1]):

$$\begin{aligned} D(T) &= \{y \in H \mid (\exists z \in H) : (y, z) \in T\}, \\ R(T) &= \{z \in H \mid (\exists y \in H) : (y, z) \in T\}, \\ \ker T &= \{y \in H \mid (y, 0) \in T\}, \\ \text{mul } T &= (\{0\} \oplus H) \cap T \end{aligned}$$

(ці множини називаються відповідно *областю визначення*, *областю значень*, *многовидом нулів* та *багатозначною частиною* відношення  $T$ .) Крім цього,

$$T(0) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in H \mid (0, z) \in T\}, \quad \text{kêr } T \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, 0) : y \in \ker T\}.$$

Нехай  $S, T$  — замкнені лінійні відношення в  $H$ , причому  $S \subset T$ . Розглянемо деякі твердження, які можуть справджуватися або ні:

1.  $S(0) = T(0)$ ;
2.  $(y, z) \in T, y \in D(S) \Rightarrow (y, z) \in (S)$ ;
3.  $S(0) = R(S) \cap T(0)$ ;
4.  $D(S) \cap \ker T = \{0\}$ .

**Теорема 1.**    i) *Твердження 1 та 2 рівносильні.*

ii) *З Твердження 1 випливає твердження 3; якщо  $T(0) \subset R(S)$  (зокрема, якщо  $R(S) = H$ ), то з твердження 3 випливає твердження 1.*

iii) *Якщо  $\ker S = \{0\}$ , то з 1 випливає 4.*

iv) *Якщо  $R(S) = H$ , то з 4 випливає 1.*

**Наслідок 1.** *В умовах попередньої теореми*

- 3'.  $\text{mul } S = S \cap \text{mul } T$ ,
- 4'.  $\ker S = \{0\} \Rightarrow \text{kêr } T = \{0\}$ .

**Приклад 1.** Нехай  $S$  — замкнений щільно визначений оператор в  $H$ ,

$$T = \{(y, Sy + h), y \in D(S), h \in H_0\},$$

де  $H_0$  — лінійний многовид простору  $H$ . Маємо:  $S \subset T, S(0) = \{0\}, T(0) = H_0$ , а отже  $R(S) \cap T(0) = R(S) \cap H_0$ . Зокрема, якщо  $R(S) = H$ , то  $R(S) \cap T(0) = H_0$ .

[1] Arens R. Operational calculus of linear relations // Pacif. J. Math. — 1961. — 11, N 1. P. 9 — 23.



УДК 512.645

## Про симетричні розв'язки лінійних матричних рівнянь над областю головних ідеалів

Прокіп В. М., к.ф.-м.н., ст. н. с.

ІППММ НАН України ім. Я.С. Підстригача  
(вул. Наукова, 36, м. Львів, 79060, Україна)

Нехай  $R_{m,n}$  – множина  $(m \times n)$ -матриць над областю головних ідеалів  $R$  з одиницею  $e \neq 0$ . Позначимо:  $I_n$  – одинична матриця вимірності  $n$ ,  $\otimes$  – прямий добуток матриць,  $t$  – символ транспонування матриць.

Задача про розв'язність матричних рівнянь

$$AX = B, \quad (1)$$

та

$$AX + XB = C, \quad (2)$$

де  $A, B, C \in R_{n,n}$  і  $X$  – невідома матриця із  $R_{n,n}$ , традиційно привертала увагу багатьох математиків (див. [1]– [8] та цитовану там літературу).

Серед досліджень в цьому напрямку належне місце займають роботи, в яких вивчаються умови, за яких розв'язки рівняння (1) належать до певних класів матриць: симетричних, кососиметричних, ермітових, додатньо визначених, із заданим характеристичним многочленом та інших ([3], [5]– [7]). Зокрема, в [3] встановлено необхідні і достатні умови існування симетричних розв'язків рівняння (1) над полем дійсних та комплексних чисел. Доведення основних результатів та вказання симетричних розв'язків рівняння (1) наведено в термінах узагальнених обернених матриць, які побудовані за коефіцієнтами рівняння (1). Проте ці методи доведення не завжди можна перенести для рівняння (1) на кільцях.

В даному повідомленні вкажемо умови, за яких для рівнянь (1) і (2) існують симетричні розв'язки над  $R$ . Надалі будемо використовувати твердження, яке доведено в роботі [8].

**Теорема 1.** *Рівняння (1) розв'язне тоді і тільки тоді, коли матриці  $\begin{bmatrix} A & 0_{n,n} \\ A & B \end{bmatrix}$  правоєквівалентні, тобто (праві) форми Ерміта цих матриць збігаються.*

Наступна теорема встановлює умови, за яких для рівняння (1) існують симетричні розв'язки над областю головних ідеалів  $R$ .

**Теорема 2.** *Рівняння (1) має симетричний розв'язок  $X_0$  ( $X_0 = X_0^t$ ) тоді і тільки тоді, коли воно розв'язне і матриця  $AB^t$  симетрична, тобто  $AB^t = BA^t$ .*

**Наслідок 1.** *Нехай  $A, B \in M_{m,n}(R)$  і  $\text{rank } A = 1$ . Якщо рівняння  $AX = B$  розв'язне, то воно має симетричні розв'язки.*

Якщо симетричні розв'язки рівняння (1) існують, то з доведення теореми 2 отримуємо описання структури та метод побудови цих розв'язків.

В цій частині вкажемо умови, за яких для рівняння (2) існують симетричні розв'язки. Відомо, що рівняння (2) розв'язне тоді і тільки тоді, коли матриці  $\begin{bmatrix} A & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & -B \end{bmatrix}$  і  $\begin{bmatrix} A & C \\ 0_{n,n} & -B \end{bmatrix}$  подібні. Проте цей критерій важко застосувати до побудови розв'язків рівняння (2).

Інший підхід пошуку розв'язків рівняння (2) базується на його лінеаризації, тобто приведені цього рівняння до лінійного одностороннього рівняння  $G(A, B)Z = H(C)$ , де матриці  $G(A, B)$ ,  $H(C)$  і  $Z$  визначені наступним чином:

$$G(A, B) = A \otimes I_n + I_n \otimes B^t \in \mathbb{R}_{n^2, n^2}, H(C) = \begin{bmatrix} C_{1,*}^t \\ C_{2,*}^t \\ \vdots \\ C_{n,*}^t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{n^2, 1}, Z = \begin{bmatrix} X_{1,*}^t \\ X_{2,*}^t \\ \vdots \\ X_{n,*}^t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{n^2, 1},$$

де  $C_{i,*}$  і  $X_{i,*}$  –  $i$ -ті рядки матриць  $C$  та  $X$  відповідно, ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**Теорема 3.** Рівняння (2) має симетричний розв'язок тоді і тільки тоді, коли системи лінійних рівнянь  $G(A, B)Z = H(C)$  і  $G(B^t, A^t)Z = H(C^t)$  мають спільний розв'язок, тобто коли (праві) форми Ерміта матриць

$$\begin{bmatrix} G(A, B) & 0_{n^2, 1} \\ G(B^t, A^t) & 0_{n^2, 1} \end{bmatrix} \quad \text{та} \quad \begin{bmatrix} G(A, B) & H(C) \\ G(B^t, A^t) & H(C^t) \end{bmatrix}$$

збігаються.

- [1] Roth W. E. The equations  $AX - YB = C$  and  $AX - XB = C$  in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. – 1952. – **3**, No.3. – P.392–396.
- [2] Gustafson W. H. Roth's theorems over commutative rings // Linear Algebra Appl. – 1979. – **23**. – P. 245–251.
- [3] Hua Dai. On the symmetric solutions of linear matrix equations // Linear Algebra Appl. – 1990. – **131**. – P.1–7.
- [4] Gouveia M. C. On the solution of Sylvester, Lyapunov and Stein equations over arbitrary rings // Inter. J. Pure and Appl. Math. – 2005. – **24**, No.1. – P.131–137.
- [5] R.A. Horn, V. Sergeichuk, N. Shaked-Monderer. Solution of linear matrix equations in a \*-congruence class // Electr. J. Linear Algebra. – 2005. – **174**. – P.153–156.
- [6] Dajić, Alegra and J. J. Koliha. Equations  $ax = c$  and  $xb = d$  in rings and rings with involution with applications to Hilbert space operators // Linear Algebra Appl. – 2008. – **429**. – P.1779–1809.
- [7] Прокін В. М. Про розв'язки рівняння  $XA_0 = A_1$  із заданими характеристичними многочленами // Праці міжнар. геом. центру. – 2014. – **7**, № 4. – С.23–33.
- [8] Прокін В. М. Про розв'язність системи лінійних рівнянь над областю головних ідеалів // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, №5. – С. 566–570.

УДК 517.95+534.1

## Mathematical models for vibrations of one dimensional environments with considering nonlinear resistance forces

**Pukach P. Ya.**, Dr. of Techn. Sc., Prof. of Higher Mathematics Dpt.

**Bobyk I. O.**, PhD, Ass. Prof. of Higher Mathematics Dpt.

**Sokhan P. L.**, PhD, Ass. Prof. of Higher Mathematics Dpt.

Lviv Polytechnic National University  
(St. Bandera Str.12, Lviv, 79013, Ukraine)

In this talk we consider important classes of one dimensional environments, bending stiffness of which can be neglected. It is impossible to apply approximate analytical method of solution of mathematical models of dynamic processes. So justification of existence and uniqueness of solutions, carried out a qualitative their evaluation, based on numerical analysis are considering. Also the features of dynamic processes of some of examined class of systems are analyzed. Methods of qualitative study of oscillations for restricted and unrestricted bodies under the influence of the resistance forces, described in the talk are based on the general principles of the theory of nonlinear boundary value problems - Galerkin method and the method of monotonicity [1].

Scientific novelty consists in generalization these methods of studying for nonlinear problems at new classes of oscillating systems, justification of solution correctness for specified mathematical models that have practical application in real engineering vibration systems [2].

- [1] *Pukach P. Ya.* Qualitative research methods of mathematical model of nonlinear vibrations of conveyor belt.— *Journal of Mathematical Sciences*, Volume 198, Issue 1, Pages 31-36, April 2014.
- [2] *Pukach P. Ya., Kuzio I. V.* Nonlinear transverse vibrations of semi-infinite cable with consideration paid to resistance.—*Scientific Bulletin of National Mining University*, Issue 3, Pages 82-86, 2013.

УДК 530.145

## Вплив параметрів елемента пружної підвіски на її малі коливання та стійкість

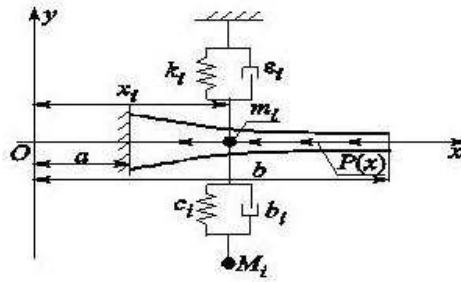
Сорокати М. І.<sup>1</sup>,Войтович М. І.<sup>2</sup>,Гук В. М.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного  
(вул. Героїв Майдану, 32, м. Львів, 79012, Україна)

<sup>2</sup>Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Відомо, що параметри проміжкових пружних опор можуть істотно впливати на частоти коливань та критичні значення навантажень. В багатьох випадках підвищення власних частот коливань можна досягнути за рахунок збільшення числа і жорсткості проміжкових опор. Питання раціонального розташування пружних опор і підбору їх параметрів є важливими для уникнення явищ параметричного резонансу, при яких частота вимушених коливань є близькою до нижчої власної частоти.

Розглянемо поперечні коливання пружного консольного стержня з пружними опорами і зосередженими в точках  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) масами, завантаженого силою  $P(x)$ . (рис.1) Малі поперечні коливання консольного стержня, що має змінну



**Рис. 1.** Схема стержня із пружними опорами і зосередженими масами

жорсткість і масу, в точках  $x_i$  якого розташовані пружно підкріплені маси  $m_i$  і осцилятори  $M_i$ , при завантаженні осьовою силою  $P(x)$ , мають такий вигляд:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + P(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b(x) \frac{\partial u}{\partial t} + c(x)u + \sum_{i=1}^n M_i u \frac{d^2 q_i}{dt^2} \delta(x - x_i) = 0.$$

Переміщення осцилятора  $M_i$  задовольняє рівнянню:

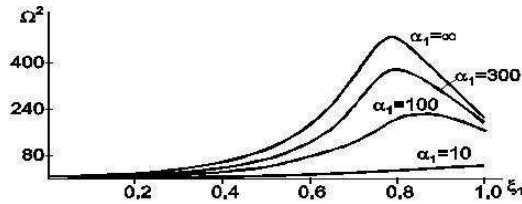
$$M_i \frac{d^2 q_i}{dt^2} + b_i \left( \frac{dq_i}{dt} - \frac{du_i}{dt} \right) + c_i (q_i - u_i) = 0.$$

На кінцях стержня виконуються умови:

$$\begin{cases} u(x, t) = 0 \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0 \end{cases} \text{ при } x = a, \quad \begin{cases} EI(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + G \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \text{ при } x = b.$$

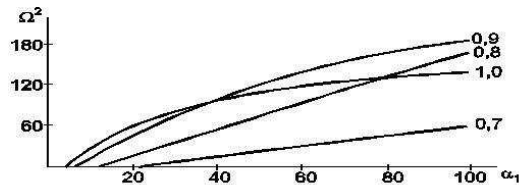
Отримано характеристичне рівняння цієї задачі з використанням функції Коші. Як приклад розглянуто консольний стержень постійної жорсткості, завантажений консервативною силою  $G$  із пружинкою, що має жорсткість  $k_1$ , розташованою в точці  $x_1$ . В цьому випадку характеристичне рівняння приведено до вигляду, зручного для проведення дослідження.

$$F_0(1) + \alpha_1 (F_4(\xi_1) F_0'(1 - \xi_1) + F_4'(\xi_1) F_0(1 - \xi_1)) + \beta (F_2(1) - \alpha_1 (F_4(\xi_1) F_2'(1 - \xi_1) + F_4'(\xi_1) F_2(1 - \xi_1))) = 0.$$



**Рис. 2.** Залежність частоти коливань незавантаженого стержня від розміщення  $\xi_1$  проміжкової опори при різних значеннях параметра жорсткості  $\alpha_1$

При чисельному дослідженні використовувалися представлення функцій, що входять в це рівняння, рядами із послідовним застосуванням двосторонніх оцінок першого їх кореня. Як правило, використовувалися перші п'ять коефіцієнтів характеристичного ряду. Рисунок 2 ілюструє залежність основної частоти коливань незавантаженого стержня від розміщення проміжкової опори при різних значеннях параметра жорсткості  $\alpha_1$ . Кривим (1-4) відповідають такі значення  $\alpha_1$ : 10, 100, 300,  $\infty$  відповідно.



**Рис. 3.** Залежність основної частоти  $\Omega^2$  від параметра жорсткості  $\alpha_1$  при різних значеннях параметра розміщення опори  $\xi_1$  ( $\beta = 6$ ).

На рис.3. показано залежність основної частоти коливань  $\Omega^2$  від параметра жорсткості  $\alpha_1$  при фіксованому  $\beta = 6$ .

УДК 517.95+534.1

## Galerkin method in the investigation of nonlinear oscillations of elastic beam

**Sokhan P. L.** PhD, Ass. Prof. of Higher Mathematics Dpt.

**Pukach P. P.** Student of Applied Mathematics Dpt.

Lviv Polytechnic National University  
(St. Bandera Str.12, Lviv, 79013, Ukraine)

We investigate the solution of the problem on nonlinear transverse vibrations of elastic body subject to the action of dissipative forces in a bounded domain. Such problems have many applications in various technical systems, such as vibration of pipelines, railway lines, drill columns, bridges, electrical wires, optical fiber etc. For the nonlinear oscillations model considered, there is no general analytical methodologies of determining dynamical characteristics of the oscillation process. Thus we propose using the qualitative methods of nonlinear boundary value problems theory to obtain the well-posedness conditions for the problem's local solution in time variable. The methodology of the qualitative study of nonlinear oscillations under the action of dissipative forces is based on the general principles of the nonlinear boundary value problems theory, such as monotony method and Galerkin method.

Let  $Q_T = (0, l) \times (0, T)$ , where  $T < +\infty$ ,  $l < +\infty$ ,  $\tau \in (0, T)$ . In the domain  $Q_T$ , for nonlinear equation

$$u_{tt} + au_{txxxx} + bu_{xxxx} + c|u|^{p-2}u = f(x, t), \quad p > 2 \quad (1)$$

we shall consider the mixed problem with initial conditions

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (2)$$

and boundary conditions

$$u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0, \quad u(l, t) = u_{xx}(l, t) = 0. \quad (3)$$

In equation (1), function  $u(x, t)$  is a cross motion of the beam section with  $x$  coordinate at arbitrary time moment  $t$ ;  $a > 0$ ,  $b > 0$  are constants which can be expressed through geometrical and physico-mechanical parameters of the beam, constant  $c > 0$  describes the nonlinear elastic forces acting in the system,  $f(x, t)$  is the external driving force. Boundary conditions (3) correspond to the model of a beam with fixed pivoting supports on the ends  $x = 0$  and  $x = l$ .

We investigate the oscillating system modeled by problem (1)-(3) and obtain the conditions of existence of a local solution. We show the possibility of applying the Galerkin method to solving the problem.

УДК 537.876.23+517.952+514.744

## Однонаправлене ізотропне поле спінора Максвелла та його властивості у метриці Керра

Тайстра Ю. В.,

Пелих В. О., д.ф.-м.н.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача  
НАН України (вул. Наукова, 3-б, м. Львів, 79060, Україна)

Розв'язування рівнянь Максвелла у викривленому просторі є важливою задачею теоретичної фізики, астрофізики, математичної фізики. У спінорному підході рівняння Максвелла є системою чотирьох диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку для трьох комплексних невідомих функцій

$$\begin{cases} D\varphi_2 + (2\varepsilon - \rho)\varphi_2 = \bar{\delta}\varphi_1 + 2\pi\varphi_1 - \lambda\varphi_0 - j_1, \\ \delta\varphi_2 + (2\beta - \tau)\varphi_2 = \Delta\varphi_1 + 2\mu\varphi_1 - \nu\varphi_0 - j_2, \\ \Delta\varphi_0 - (2\gamma - \mu)\varphi_0 = \delta\varphi_1 - 2\tau\varphi_1 + \sigma\varphi_2 + \bar{j}_1, \\ \bar{\delta}\varphi_0 - (2\alpha - \pi)\varphi_0 = D\varphi_1 - 2\rho\varphi_1 + \kappa\varphi_2 + j_0; \end{cases} \quad (1)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \pi, \nu, \mu, \lambda, \kappa, \tau, \sigma, \rho$  скаляри Ньюмена-Пенроуза (спінові коефіцієнти);  $D, \Delta, \delta, \bar{\delta}$  похідні за напрямками ізотропної тетради;  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  — компоненти спінора  $\varphi_{AB} \in \mathbb{C}$  у спіновій базі;  $j_0, j_1, j_2$  — компоненти спінора 4-струму  $j_B^{A'} \in \mathbb{C}$  у спіновій базі.

Для побудови розв'язку такої системи проводять розщеплення рівнянь. Тьукольським [1] після розщеплення отримано рівняння в частинних похідних другого порядку для компонент  $\varphi_0$  та  $\varphi_2$  спінора Максвелла, а також застосовано метод розділення змінних у просторі Керра, який описує гравітаційне поле масивного тіла, що обертається (чорна діра, нейтронна зірка, тощо).

На противагу до цього ми розглядаємо систему рівнянь першого порядку у просторі Керра. У цьому просторі коефіцієнти  $\kappa, \sigma, \nu, \lambda$  дорівнюють нулю. Спрямувавши спінор Максвелла взовж кратних головних ізотропних напрямків гравітаційного поля у ізотропній тетраді Кіннерслі, отримуємо розщеплену систему двох рівнянь першого порядку для однієї невідомої функції  $\varphi_2$

$$\begin{cases} D\varphi_2 + (2\varepsilon - \rho)\varphi_2 = 0, \\ \delta\varphi_2 + (2\beta - \tau)\varphi_2 = -j_2. \end{cases} \quad (2)$$

Таке поле називаємо *вихідним однонаправленим ізотропним полем* (ОІП) спінора Максвелла.

Нами отримано загальний розв'язок неоднорідної системи рівнянь Максвелла в координатах Бойера-Ліндквіста для вихідного ОІП

$$\begin{cases} \frac{r^2+a^2}{\Delta} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{a}{\Delta} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{r-ia \cos \theta} \varphi_2 = 0, \\ ia \sin \theta \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi} + \left( \text{ctg} \theta + \frac{ia \sin \theta}{r-ia \cos \theta} \right) \varphi_2 = -\sqrt{2}(r + ia \cos \theta) j_2, \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\sin \theta (r - ia \cos \theta)} \left( e^{F(\psi_1, \psi_2)} - \sqrt{2} \int j_2 \Sigma \sin \theta d\theta \right), \quad (4)$$

де  $F(\psi_1, \psi_2)$  — довільна функція,  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 = (r - r_+)(r - r_-)$ ,  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\psi_1, \psi_2$  — інтеграли системи (3)

$$\psi_1 = t - r - M \ln \Delta - \frac{M^2}{\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left( \frac{r - r_+}{r - r_-} \right) + ia \cos \theta, \quad (5)$$

$$\psi_2 = \varphi - \frac{a}{2\sqrt{M^2 - a^2}} \ln \left( \frac{r - r_+}{r - r_-} \right) - i \ln \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}; \quad (6)$$

та досліджено основні властивості такого розв'язку методом розділення змінних.

- [1] *Teukolsky S. A.* Perturbations of a rotating black hole. I. Fundamental equations for gravitational, electromagnetic, and neutrino-field perturbations. — *The Astrophysical Journal* **185**, — 1973.



УДК 519.6

## Алгоритм піднесення ряду до степеня

Угрин С. З., асист. каф. ОМП

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Степеневий ряд можна підносити до степеня в області його рівномірної збіжності для функціональних рядів.

Алгоритми піднесення ряду до степеня розробляються.

Найлегшою виглядає конструкція піднесення ряду до степеня натурального показника.

Складними в усіх іпостаях є перетворення піднесення до додатного раціонального степеня на основі формули Ньютона [2].

Алгоритм піднесення ряду до від’ємного степеня не розроблявся.

Будь-яке піднесення функціонального ряду до натурального степеня передбачає відпрацювання топології [6], яка забезпечить відповідні аспекти збіжності і неперервності.

Алгоритм піднесення часткових сум до степеня натурального показника не вичерпує всіх проблем аналізу.

- [1] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. (В 3-х томах). — М.: Наука, 1966. Т. 2 — 800 с.
- [2] *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика. — М.: Наука, 1969. — 328 с.
- [3] *Кудрявцев Л.Д.* Ряд. // Математическая энциклопедия. (В 5-и томах). — М.: Советская энциклопедия, 1984. Т. 4 — 1215 с.
- [4] *Сухорольський М.А.* Функціональні послідовності та ряди. — Львів: Растр - 7, 2007. — 346 с.
- [5] *Гаврилів О.С., Лужецький Б.М.* Про алгоритм піднесення ряду до степеня натурального показника. // Метода математики, 2016. — № 17.
- [6] *Келли Дж.* Общая топология. — М.: Наука, 1981. — 432 с.

УДК 517.3

## Побудова конформних відображень для непівнескінчених областей з торцевими надрізами та їх застосування в інженерно–технічних дослідженнях

Федюк Є. М.<sup>1</sup>, к. ф.–м. н., доц. каф. ОМПДуманський О. І.<sup>2</sup>, к. ф.–м. н., доц. каф. ІТШиманський В. М.<sup>2</sup>, к. т. н., ст. викл. каф. ІТ<sup>1</sup> Національний університет “Львівська політехніка”

(вул. Ст.Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна)

<sup>2</sup> Національний лісотехнічний університет України

(вул. генерала Чупринки, 103, м. Львів, 79057, Україна)

Конформні перетворення відносяться до одного з основних понять теорії функції комплексної змінної і відіграють важливу роль як у теоретичному відношенні, так і при дослідженні багатьох задач стосовно аеро - і гідромеханіки, теорії пружності, електро – і радіотехніки, теплотехніки та багатьох інших інженерно–технічних досліджень. Застосовність конформних перетворень дає можливість просто і ефективно одержати розв’язки задач, зокрема при дослідженні напружено–деформівного стану пластинчастих елементів конструкцій з різноманітними порушеннями їх однорідності, тобто криволінійними отворами, поверхневими надрізами, виточками, потовщеннями деякої частини області і т. і. Такий шлях реалізації розв’язку поданої математичної моделі задачі є доступним і перспективним, оскільки маємо чудово розроблений апарат комплексних потенціалів, запропонований у роботі М.І.Мусхелішвілі [1], суть якого полягає в тому, що потрібно мати або побудувати конформно відображаючу функцію, що здійснює перетворення області досліджуваного об’єкта на область одиничного круга, або на його зовнішність.

В пропонованій роботі наводяться побудовані відповідні конформно відображаючі функції, згідно яких здійснюється відображення півплощин з торцевими надрізами у фізичній області на внутрішність або зовнішність круга в параметричній області. Зокрема побудовані наступні конформно відображаючі функції:

а) півплощини з одним криволінійним надрізом (виточкою)

$$z = \omega(\zeta) = A \left( \zeta + \frac{m}{\zeta - i} + ib \right),$$

де  $z=x+iy, \zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$  - комплексні змінні відповідно у фізичній  $z$  і параметричній  $\zeta$  площинах,  $A = l/2$ ,  $b = -1 - m/2$ ,  $m = -4(1 + \sqrt{2a})$ ,  $a = r_0/l$ ,  $l$  – глибина нарізу, а  $r_0$  – радіус заокруглення його вершини. При  $r_0 = 0$  – вершина надрізу буде гострокінцевою, що відповідає вершині тріщини. Параметр змінюється на проміжку  $t \in [-1; 0]$  і при  $m = 0$  буде здійснено відображення півплощини без надрізу, а при  $m > 0$  – виступ над півплощиною.

б) півплощина з двома криволінійними надрізами  $z = \omega(\zeta) = iA \left( \frac{\zeta}{\zeta+1} - \frac{2m}{\zeta^2+t} - b \right)$ , де змінні  $z$  і  $\zeta$  є аналогічними, як і вище описано,  $A = 2l\varepsilon$ ,  $m = \frac{t^2-1}{8\varepsilon}$ ,  $t = \frac{\varepsilon-1+\sqrt{2a}}{\varepsilon-1-\sqrt{2a}}$ ,  $a = r_0/l$ ,  $0 \leq \varepsilon < \infty$ . Параметр  $\varepsilon$  відповідає за відстань між вершинами надрізів. Знову же  $l$  – глибина надрізів,  $r_0$  – радіус

заокруглення їх вершин і відповідно при  $r\theta = 0$  – вершини надрізів будуть гострокінцевими, що відповідає вершині тріщини. При зміні знаків у параметрах  $A$  та  $m$  на протилежні та подати параметр  $t = (\varepsilon - 1 - \sqrt{2a})/(\varepsilon + 1 + \sqrt{2a})$ , то у фізичній площині будемо мати півплощину з двома виступами.

Згідно побудованих функцій вдалося зреалізувати дослідження пружного та гранично рівноважного стану пластинчастого елемента конструкцій, торець якого має криволінійний надріз або декілька надрізів. Досліджена міцність пластинчастого елемента, що знаходився в умовах розтягуючи зусиль, чистого та циліндричного згинання. Наведені формули значень коефіцієнтів концентрації напружень у вершині одного надрізу при відповідних зовнішніх навантаженнях

$$K_p = \frac{(3+2\sqrt{2a})(1+\sqrt{2a})}{\sqrt{2a}(1+2\sqrt{2a})} - \text{розтягування, } K_m = \frac{2(1+\sqrt{2a})^2}{\sqrt{2a}(1-2\sqrt{2a})} - \text{чистий згин}$$

$$K_M = \frac{1+\sqrt{2a}}{\sqrt{2a}} \cdot \frac{(3+2\sqrt{2a})(1+\nu)+4\sqrt{2a}}{(1+2\sqrt{2a})(1+\nu)+4((1+\sqrt{2a}))} - \text{циліндричний згин.}$$

- [1] *Мусхелішвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— Москва: Наука, 1966.— 708 С.

УДК 517.764

## Полукватернионные многообразия и их диффеоморфизмы

Хаддад М.<sup>2</sup>, к.ф.-м.н., декан ф-та экономики и бизнесаКурбатова И. Н.<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., доц. каф. геометрии и топологии<sup>1</sup>Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова  
(ул. Дворянская, 2, г. Одесса, 65001, Украина)<sup>2</sup>Wadi International University, Сирия

В ([1]) рассматривали 4-квазипланарные отображения почти кватернионных многообразий различных типов. Затем в ([2]) мы ввели в рассмотрение почти полукватернионное риманово пространство  $V_n$  с заданными на нем почти комплексными структурами  $F^1$  и  $F^2$ , которые удовлетворяют условиям

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad F_i^\alpha F_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad F_i^1 F_\alpha^2 - F_i^2 F_\alpha^1 = 0.$$

Очевидно, что

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = \delta_i^h, \quad F_i^3 = F_i^1 F_\alpha^2,$$

то есть  $F_i^{h3}$  является структурой почти произведения.

Соответственно, мы называем *полукватернионной* полиаффинорную структуру, которая порождается парой почти комплексных структур, коммутирующих между собой.

Как обычно, под келеровой будем понимать полукватернионную структуру на  $V_n$ , для которой

$$F_{i,j}^h = 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

где  $\langle, \rangle$  - знак ковариантной производной в  $V_n$ .

В ([2]) доказано, что келерово полукватернионное пространство приводимо.

Мы показали, что полукватернионные римановы пространства не допускают нетривиальных геодезических отображений ([3]) с сохранением аффинорной структуры.

Рассмотрим (псевдо-)римановы пространства  $(V_n, g_{ij})$  и  $(\bar{V}_n, \bar{g}_{ij})$  с полукватернионными келеровыми структурами  $F^s, \bar{F}^s$ ,  $s = 1, 2, 3$ , находящиеся в 4-квазипланарном отображении (4КПО), сохраняющем структуру. Тогда в общей по отображению системе координат  $(x^i)$  имеют место

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^3 q_{(i}^s(x) F_{j)}^s(x),$$

где

$$F_i^h = \delta_i^h, \quad F_i^3 = F_i^1 F_\alpha^2, \quad F_i^s(x) = \bar{F}_i^s(x),$$

$q_i^s(x)$  - некоторые ковекторы.

Нами доказано, що если при 4КПО хотя бы одна из почти комплексных аффинорных структур  $F^1, F^2$ , образующих полукватернионную структуру, ковариантно постоянна в обоих пространствах, то данное 4КПО вырождается в голоморфно-проективное отображение келеровых пространств ([3])

Построены геометрические объекты, инвариантные относительно рассматриваемых отображений.

Исследовано 4-квазипланарное отображение полукватернионного пространства на плоское. Для пространств, допускающих такое отображение, найден внутренний тензорный признак, а также получены в специальной системе координат их метрики.

- [1] Курбатова И. Н. О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий.— Мат. Студії. - 2013. - Т.40, No. 1.— С. 95-103.
- [2] Курбатова И. Н. 4-квазипланарные отображения почти кватернионных и полукватернионных многообразий.— Proceedings of the International Geometry Center, V.8, №2, 2015.— p. 46-56
- [3] Mikes J., Vanzurova A., Hinterleitner I. Geodesic Mappings and Some Generalizations.— Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.— 304 с.

УДК 539.3

## Дослідження міцності пластинчастого елемента конструкції з криволінійним отвором або надрізом при дії зосереджених сил

Федюк Є. М.<sup>1</sup>, к. ф.–м. н., доц. каф. ОМПДуманський О. І.<sup>2</sup>, к. ф.–м. н., доц. каф. ІТ

<sup>1</sup> Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. Ст.Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна)

<sup>2</sup> Національний лісотехнічний університет України  
(вул. генерала Чупринки, 103, м. Львів, 79057, Україна)

**Мета дослідження.** Міцність твердих тіл визначається не тільки їх фізично-хімічною природою, але і суттєво залежить від дефектності структури. У структурі реальних твердих тіл завжди мають місце різного типу дефекти – концентратори напружень, такі як, наприклад, мікро– і макротріщини, різного походження, порожнини і включення, границі зерен і блоків структур, скупчення дислокацій, вакансій тощо [1].

Окрім цього, у процесі деформації твердого тіла в околі вершин криволінійних отворів маємо високі градієнти концентрація напружень, що приводить до зародкових і росту вже наявних в пластинчастому елементі тріщин, тобто до локального або повного його руйнування.

**Постановка задачі.** Дослідити пружний та гранично-рівноважний стан пластинчастого елемента конструкції, послабленого криволінійним отвором із заокругленими (досліджується концентрація напружень) або гострокінцевими вершинами - розкрита тріщина (розглядається інтенсивність розподілу напружень), при дії зосереджених силових факторів (зосереджених сил інтенсивності  $P$  (рис. 1)).

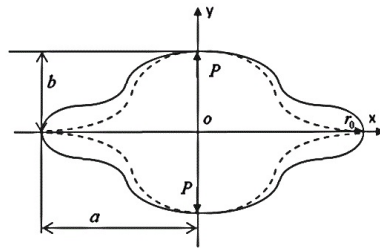


Рис. 1.

**Методи дослідження.** Для розв’язування поставленої задачі використано апарат аналітичних функцій та побудована конформно перетворююча функція, згідно якої відображається зовнішність криволінійного отвору на зовнішність круга, що дало можливість одержати замкнутий аналітичний розв’язок задачі:

$$z = \omega(\zeta) = A \left( \zeta + \frac{m\zeta}{\zeta^2 - t} \right), \quad z = \omega(\zeta) = A \left( \zeta + \frac{m\zeta}{\zeta^2 - t} \right),$$

де  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $\varepsilon = \frac{b}{a}$  і приймає значення  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ,  $A = \frac{a}{2} [1 - t + (1 + t)\varepsilon]$ ,  $m = \frac{(1-\varepsilon)(1-t^2)}{(1-t)+(1+t)\varepsilon}$ ,  $a = x(0)$  - віддаль від центру отвору до найбільш віддаленої

точки отвору;  $b$  – радіус вписаного кола в отвір;  $t$  – параметр який обчислюється згідно формули  $t = \frac{r_0/a(1-2\varepsilon)+\varepsilon(2-\varepsilon)-2\sqrt{r_0/a(1-r_0/a)(1-\varepsilon^2)}}{(2-\varepsilon)^2-r_0/a(5+4\varepsilon)}$  і приймає значення ( $|t| \leq 1$ ),  $r_0$  – радіус заокруглення вершин отвору.

**Результати досліджень.** Одержано відповідні формули, згідно яких обчислюється розподіл концентрації напружень вздовж контуру отвору, коефіцієнти концентрації напружень у його вершинах, що характеризуються високим градієнтом напружень.

У випадку гострокінцевих вершин отвору побудовані формули обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень в їх околі.

Всі основні результати досліджень описані у вигляді графіків.

**Висновки.** При зміні відповідних характерних параметрів, можемо змінювати геометричну конфігурацію контуру криволінійного отвору (від кругового до отворів складної структури), тобто проводити розрахунки розподілу концентрації напружень у випадку заокруглених вершин отвору та інтенсивності напружень – при гострокінцевих вершинах для різноманітної системи отворів.

- [1] *Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацшин А.П.* Розподіл напружень біля тріщин в пластинках та оболонках.— К.: Наукова думка, 1984.— 344 С.





# ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 539.3

## Процедура оптимізації процесу цільової термообробки елементів електровакуумних виробів

Будз С. Ф.<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., ст.н.с.Будз І. С.<sup>2</sup>, к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України  
(вул. Наукова, 3Б, м. Львів, 79060, Україна)

<sup>2</sup> Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна)

Підвищення технологічного рівня електровакуумного виробництва, поліпшення якості продукції, її експлуатаційних характеристик і надійності пов'язані в першу чергу з необхідністю безперервного вдосконалення і оптимізації технологічних процесів, головними з яких є процеси термообробки скляних елементів виробів. Процедура оптимізації режимів цільової термообробки електровакуумних скляних виробів здійснюється за етапами:

1. проведення аналізу розглядуваного технологічного процесу і оцінка впливу технологічних факторів на міцність і надійність виробу при термообробці;
2. розробка математичної моделі конкретного процесу термообробки типового виробу і вибір основних технологічних параметрів управління процесом. Вибір критерію оптимізації і формулювання обмежень на температуру і напруження. Формулювання і розв'язок відповідних задач математичної фізики визначення та оптимізації за напруженнями теплових режимів термообробки скляного виробу;
3. дослідно-промислова перевірка оптимальних за напруженнями режимів термообробки й аналіз адекватності обраної математичної моделі реальному технологічному процесу термообробки. Вироблення пропозицій для впровадження у виробництво раціональних режимів термообробки і системи ефективного керування параметрами теплового режиму.

Як приклад, розглянемо два базові типи термообробки елементів електровакуумних приладів (ЕВП): відпал елементів, зокрема екранів і термовакуумну обробку оболонок. Завданням відпалу екранів є зняття залишкових напружень, що виникли в процесі їх виготовлення, а метою термовакуумної обробки – досягнення заданого ступеня вакууму шляхом дегазації скла при нагріві і відкачці газів із внутрішнього об'єму оболонки. Спільними при оптимізації теплових режимів в обох згаданих типах є критерій оптимізації (мінімум функціоналу енергії пружної деформації елементів ЕВП), оптимізація за рівнем максимальних напружень, а також обмеження на допустиму температуру елементів ЕВП.

У відповідності до суті другого етапу введемо зони допустимої зміни температури і температурних напружень:

$$t_0^\pm \leq t^\pm(\tau) \leq t_*^\pm, \sigma_0^\pm \leq \sigma^\pm(\tau) \leq \sigma_*^\pm, 0 \leq \tau \leq \tau_1$$

на поверхнях  $\gamma = \pm h$  елемента ЕВП, який піддається термообробці (в припущенні, що температура елемента змінюється тільки в часі і по товщині на всьому інтервалі нагріву). Тут  $t_0^\pm, t_*^\pm$  – початкова і максимальна температури на

поверхнях  $\gamma = \pm h$ ,  $\sigma_0^\pm \leq 0$ ,  $\sigma_*^\pm \geq 0$  - задані величини, які окреслюють зону допустимої зміни температурних напружень при  $\gamma = \pm h$  і можуть змінюватися у зв'язку з залежністю механічних і теплофізичних характеристик скла від температури, а також наявністю структурних перетворень;  $\tau$  - час;  $\tau_1$  - тривалість процесу термообробки.

В результаті виконання третього етапу встановлюється можливість технологічних засобів реалізації запропонованого оптимального за напруженнями теплового режиму обробки скляного продукту, перевіряється можливість забезпечення міцнісних характеристик виробу та його технологічних параметрів. Встановлюється роцент руйнування продукту при оптимальному тепловому режимі і підвищення продуктивності обладнання термообробки. Вносяться технологічні корективи, які можуть бути враховані на стадії конструкторської розробки виробу та створення технології його виготовлення і термообробки. Надаються рекомендації для реалізації оптимальних режимів термообробки.

УДК 539.3

## Чисельне дослідження вільних коливань оболонкових елементів конструкцій з попереднім навантаженням

Будз І. С., к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП

Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. Бандери, 12, м. Львів, 79000, Україна)

В різних галузях сучасної техніки широко використовуються оболонкові елементи конструкцій. Моделювання складних механічних та фізичних процесів вимагає більш повного врахування реальних умов роботи таких конструкцій. Зокрема, важливим є вивчення впливу попереднього напружено-деформівного стану, який зумовлений статичним зовнішнім навантаженням на частоти і форми вільних коливань оболонкових конструкцій.

Розглядається задача про вільні гармонійні коливання складеної оболонки обертання типу Тимошенка з врахуванням початкового напружено-деформівного стану.

Використовуючи основні співвідношення геометрично нелінійної теорії Тимошенка [1], отримані лінеаризовані рівняння руху, фізичні та геометричні співвідношення для оболонок з початковим напружено-деформівним станом. Записана варіаційна постановка задачі про вільні коливання тонких оболонок з урахуванням початкового напружено-деформівного стану, отримана матрично-операторна проблема власних значень.

Запропоновано метод визначення і дослідження впливу початкового напружено-деформівного стану на частоти і форми коливань складених тонкостінних конструкцій обертання. При побудові чисельної схеми розв'язку цієї задачі використовується напіваналітичний метод скінченних елементів [2]. Отримана узагальнена проблема на власні значення розв'язується методом ітерацій в підпросторі [3].

Виконані розрахунки частотних характеристик окремих тонкостінних конструкцій, що мають застосування в інженерній практиці.

Для циліндричної оболонки проведено дослідження точності, стійкості та збіжності одержаної обчислювальної схеми та їх залежність від початкового напружено-деформівного стану.

Як приклад, розглядалась також задача про вільні гармонійні коливання скляної оболонки електронно-променевої проекційної трубки. Зроблено кількісні та якісні оцінки. Проведено чисельний аналіз залежності власних частот від початкового напружено-деформівного стану.

- [1] Вагін П. П., Муха І. С., Савула Я. Г. Розв'язування геометрично нелінійних задач статички оболонок типу Тимошенка методом скінченних елементів.— Вісн. Львів. ун-ту Сер. мех.-мат.—1989.—31.— С. 67–74.
- [2] Савула Я. Г., Шинкаренко Г. А., Вовк В. Н. екоторые приложения метода конечных элементов: Учеб. пособие.— Львов, 1981.
- [3] Батэ К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. — М., 1982.

УДК 517.9

## Моделювання руху заряджених частинок у схрещених полях з гребінчастою уповільнюючою системою

Воловенко М. В.<sup>1</sup>, м.н.с,

Кузніченко В. В.<sup>2</sup>, студентка гр. МІВТ-12-1,

Нікітенко О. М.<sup>2</sup>, к.т.н., доц. каф. МВТ

<sup>1</sup>Національний Науковий Центр "Харківський фізико-технічний інститут"  
(вул. Академічна, 1, м. Харків, 61108, Україна)

<sup>2</sup>Харківський національний університет радіоелектроніки  
(просп. Науки, 14, м. Харків, 61166, Україна)

Дослідження та моделювання фізичних процесів реальних об'єктів вимагають в залежності від деталізації опису уточнення або додаткового опису окремих складових частин, що розглядають.

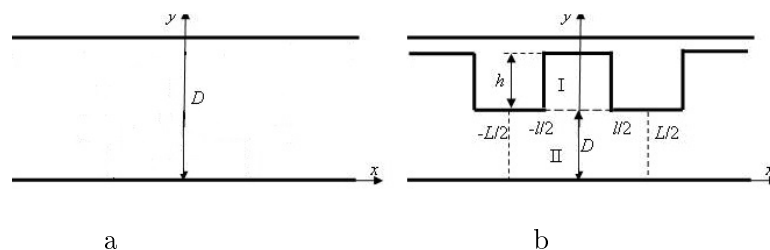
У багатьох задачах вакуумної електроніки під час досліджень фізичних процесів, що мають місце в електронних приладах, постає необхідність досліджень траєкторій руху заряджених частинок в таких системах.

Чільне місце серед приладів НВЧ посідають прилади зі схрещеними статичними полями, однак, треба визнати недостатнім рівень розуміння суті явищ, які відповідають за формування вихідного спектру в них, що не дозволяє оцінювати зміни вихідного сигналу в залежності від умов роботи.

Системи зі схрещеними полями – це електронні лампи, які ефективно перетворюють вхідну потужність сталого струму у НВЧ хвилі з високим ккд. Широкий перелік переваг систем М-типу обумовлює їх застосування у різноманітних радіоелектронних системах під час вирішення задач радіолокації, радіонавігації, зв'язку, радіопротидії та радіоелектронного придушення й медичного та побутового НВЧ-нагрівання. Останнім часом широкого розповсюдження набули НВЧ пічки, які застосовуються для нагрівання їжі [1], де основним елементом є магнетрон.

Теоретичне дослідження взаємодії електронів з полем у багаторезонаторному магнетроні або споріднених з ним приладах починається з розв'язання двовимірної задачі про рух електронів в однорідному магнітному та електричних полях.

Найчастіше під час моделювання НВЧ приладів М-типу при врахуванні розподілу електростатичного потенціалу використовують гладкі електроди (рис. 1а).



**Рис. 1.** Простір взаємодії  
а – гладкі електроди; б – гребінка

При моделюванні електромагнітних полів у просторі взаємодії використовують гребінку або гребінчасту уповільнюючу систему (рис. 1b).

Гребінчаста уповільнююча система застосовується у багатьох приладах НВЧ О-типу, а також при моделюванні приладів М-типу.

Порівнюючи обидві частини рис. 1, можна дійти висновку, що розподіл електростатичного поля в просторі взаємодії має суттєво відрізнитися.

Отже, метою цього дослідження є моделювання поведінки заряджених частинок (електронів) у системах зі схрещеними полями і з'ясувати яким чином впливають геометричні параметри гребінки на траєкторію руху заряджених частинок.

Рівняння руху зарядженої частинки у схрещених полях описується в декартовій системі координат  $(x, y)$  є задачею Коші й визначається такою системою рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \eta \left( E_x + B \frac{dy}{dt} \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \eta \left( E_y - B \frac{dx}{dt} \right),\end{aligned}\tag{1}$$

де  $\eta$  — питомий заряд електрону;

$B$  — напруженість поперечного магнітного поля;

$E_x$  — напруженість електричного поля вздовж осі абсцис;

$E_y$  — напруженість електричного поля вздовж осі ординат.

При цьому початкові умови набувають таких значень:

$$\begin{aligned}x(0) &= 0; \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} &= 0; \\ y(0) &= 0; \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} &= 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Напруженість електростатичного поля для конфігурації (рис. 1a) має вигляд:

$$\begin{aligned}E_x &= 0; \\ E_y &= \eta \frac{U_a}{D},\end{aligned}\tag{3}$$

а для конфігурації (рис. 1b) [2] —

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{4\pi h}{L} A_0 \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin \frac{2\pi n x}{L} \operatorname{sh} \frac{ny}{D}; \\ E_y &= A_0 \left( 1 - \frac{2h}{D} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos \frac{2\pi n x}{L} \operatorname{ch} \frac{ny}{D} \right),\end{aligned}\tag{4}$$

де

$$A_0 = \frac{U_a}{D + \frac{h}{L}},$$

$$A_n = \frac{\sin \frac{\pi n l}{L}}{\left(\frac{\pi n l}{L} + \sin \frac{2\pi n l}{L}\right) \left(\operatorname{sh} \frac{n(h+D)}{D} - \operatorname{sh} n\right) + \pi \operatorname{sh} n}.$$

Розв'язок задачі Коші для системи рівнянь (1) з початковими умовами (2) і конфігурацією електродів (3) (рис. 1а) набуває вигляду

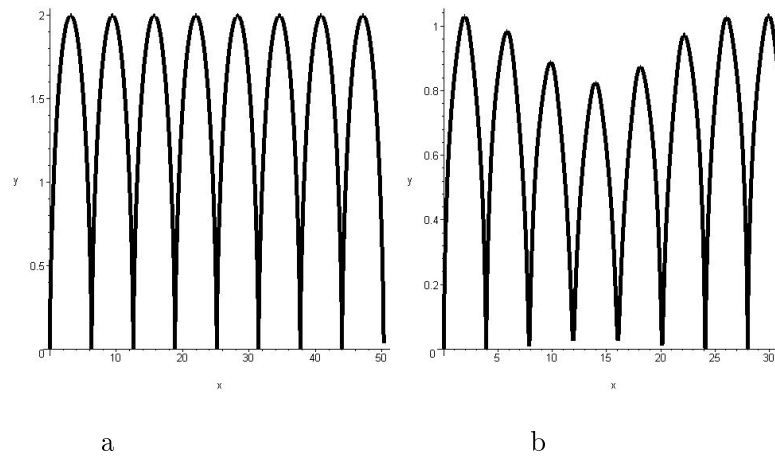
$$x = \frac{U_a}{\eta D B^2} (\omega_H t - \sin \omega_H t);$$

$$y = \frac{U_a}{\eta D B^2} (1 - \cos \omega_H t).$$

Позначивши  $\tau = \omega_H t$  і  $r = \frac{U_a}{\eta D B^2}$ , отримаємо параметричне рівняння циклоїди

$$\begin{aligned} x &= r (\tau - \sin \tau); \\ y &= r (1 - \cos \tau). \end{aligned} \quad (5)$$

Траєкторія руху заряджених частинок для системи (2) наведено на рис. 2.



**Рис. 2.** Траєкторія руху

а – для конфігурації рис. 1а; б – для конфігурації рис. 1б

Порівняння зображень на рис. 2 показує, що під час моделювання врахування розподілу поля, яке притаманне гребінчастій структурі (рис. 1б), виявляє модуляцію потоку, що призводить до суттєвого впливу на еволюцію системи.

- [1] Kawaguchi T. Analysis of Magnetron Operation in Microwave Oven // Toshiba Rebyu, v. 40, No 6, P. 531 -534.
- [2] Корчакова А. С., Нікітенко О. М. Моделювання розподілу електростатичного поля в плоских системах зі складною конфігурацією електродів // «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (КМНТ-2014) С. 200 – 203

УДК 004.04

## Налаштування моделі нечіткого логічного виведення «Вибір програм тренувань» на навчальній вибірці

Гук Н. А., д.ф.-м.н., проф. каф. КТ

Присяжна М. К., ст.викл. каф. фіз.виховання

Бекленищев В. І., студент факультету прикладної математики

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара  
(пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна)

Неправильна організація занять, зневага методичними принципами, виконання фізичних навантажень без урахування стану здоров'я, рівня фізичної підготовленості може призвести до негативних змін в стані здоров'я. Відповідно до навчальної програми при вивченні дисципліни «Фізичне виховання» для кожного студента необхідно раціонально спланувати обсяг і інтенсивність тренувальних навантажень відповідно до функціональної підготовленості і стану студента в режимі реального часу.

У даній роботі створено експертну систему, яка дозволяє частково замінити функції тренера зі складання індивідуальних тренувальних програм.

Для розв'язання сформульованої задачі пропонується використання експертної системи, заснованої на зображенні знань у формі нечітких продукцій і лінгвістичних змінних.

В якості вхідної інформації для роботи системи використовуються фізичні параметри користувача (вага, зріст, стать, довжина кола зап'ястя), на підставі аналізу цих значень система розраховує індекс Соловйова і індекс Кеттла [1]:

$$IS = \text{довжина кола зап'ястя}; \quad BMI = \frac{QM}{IS h^2}, \quad (1)$$

де  $Q$  – константа (для чоловіків дорівнює 19, для жінок - 16),  $M$  – маса людини в кілограмах (кг),  $IS$  – індекс Соловйова в сантиметрах (см), а  $h$  – це зріст в метрах (м).

В якості вихідної змінної використовується тип статури. Саме тип статури є визначальним параметром для вибору загального навантаження і програми тренувань [2]. В експертній системі використовується нечітка база продукційних правил, тому вхідні і вихідні змінні є нечіткими і описуються функціями належності до термів можливих значень.

Для адаптації моделі до реальних даних проводиться налаштування функцій приналежності на навчальній вибірці, складеної на основі результатів оцінювання показників фізичного розвитку студентів, досягнутого в результаті тренувань по запропонованій програмі.

Налаштування параметрів нечіткої моделі полягає у виборі параметрів функцій належності вхідних і вихідних змінних і зводиться до розв'язання задачі:

$$H = \arg \min_{H \in \tilde{H}} \sum_i \left( Y(X_i, H) - Y^*(X_i) \right)^2, \quad (2)$$

де  $H$  – вектор параметрів функції належності;  $Y(X_i, H)$  – розрахункове значення вихідної змінної при заданих вхідних значеннях  $X_i$  і параметрах функцій



приналежності;  $Y^*(X_i)$  – еталонне значення вихідної змінної  $X_i$ , що визначається експертом, при тих же вхідних значеннях;  $i$  – номер елемента навчальної вибірки,  $i = \overline{1, N}$ . Для дотримання умови лінійної впорядкованості термів значень змінних накладаються обмеження.

Для побудови елементів навчальної вибірки оброблялася інформація по студентським групам, отримана при проведенні занять з дисципліни «Фізичне виховання», експертні оцінки було отримано у результати опитування викладачів. Навчальна вибірка представляла собою 380 пар векторів, компонентами яких були фізичні параметри студента і результати експертного оцінювання фізичного стану студентів після виконання тренувальної програми, рекомендованої системою. В результаті розв'язання задачі (2) з використанням методу градієнтного спуску отримані значення параметрів функцій належності.

Використання налаштованої нечіткої моделі дає більший відсоток правильних розв'язків (85%), ніж вихідна модель без налаштування параметрів (67%). Для поліпшення результатів налаштування системи можна запропонувати додаткову обробку фрагментів навчальної вибірки.

Розробка програмного продукту виконана з використанням засобів об'єктно-орієнтованого програмування, має дружній для користувача інтерфейс.

Розвитком запропонованого підходу може стати проектування системи, яка дозволить в якості вхідної інформації використовувати значення параметрів поточного стану спортсмена, які вимірюються датчиками (рівень кисню в крові, пульс, частота дихання та інш.), і коригувати процес під час тренування для досягнення найкращих результатів.

- [1] О соотношении роста и веса. – [http://kouzma.ru/carcas\\_propotion.php](http://kouzma.ru/carcas_propotion.php).
- [2] Программа тренировок для каждого типа телосложения. – <http://ferrum-body.ru/programma-trenirovok-dlya-kazhdogo-tipa-teloslozheniya-chast-1.html>

УДК 519.65

## Знаходження наближеного розв'язку крайової задачі за допомогою інтерполяційного функціонального поліному

Демків І. І., д.ф.-м.н., доцент, проф. каф. ОМП

Магеровська Т. В., к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП

Угрин С. З., асист. каф. ОМП

Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Узагальненням класичної теорії інтерполювання функцій однієї змінної, на випадок нелінійних функціоналів та операторів, займалися багато авторів. Зокрема, у роботі [1] запропоновано шукати інтерполянти типу Ньютона у класі функціональних поліномів вигляду

$$P_n(x(\cdot)) = K_0 + \sum_{s=1}^n \int_0^1 \int_{z_1}^1 \dots \int_{z_{s-1}}^1 K_s(\mathbf{z}^s) \prod_{i=1}^s [x(z_i) - x_{i-1}(z_i)] dz_s \dots dz_1, \quad (1)$$

де через  $x_i(z) \in Q[0, 1]$ ,  $i = 0, 1, \dots$  позначені довільні, фіксовані елементи з простору  $Q[0, 1]$  - кусково-неперервних на відрізьку  $[0, 1]$  функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду. Для відшукування ядер  $K_0$ ,  $K_s(\mathbf{z}^s)$ ,  $s = \overline{1, n}$  було введено континуальну множину вузлів і поставлені континуальні інтерполяційні умови. У вищезгаданій роботі було визначено ядра (1) і показано, що достатньою умовою інтерполяційності полінома  $P_n(x(\cdot))$  на континуальних вузлах є вказане там виконання правила підстановки.

Метою цієї роботи є застосування функціонального поліну Ньютона вигляду (1) для побудови наближення до розв'язку наступної крайової задачі

$$U''(x; q(\cdot)) - q(x)U(x; q(\cdot)) = -f(x), x \in (0, 1), \quad (2)$$

$$U(0; q(\cdot)) = 0, U(1; q(\cdot)) = 0. \quad (3)$$

При фіксованій функції  $f(x)$  розв'язок задачі (2), (3) можна розглядати як нелінійний оператор відносно  $q(x)$ . Уводимо континуальні інтерполяційні вузли і доводимо лему про те, що розв'язок крайової задачі (2), (3), якщо розглядати його як нелінійний оператор від  $q(x)$ , задовільняє правилу підстановки. Задачу (2), (3) розбиваємо на дві крайові задачі з однаковим диференціальним оператором, праві частини в диференціальних рівняннях яких відрізняються числовим множником. Знаходимо в явному вигляді розв'язки цих задач.

- [1] Макаров В.Л., Демків І.І., Михальчук Б.Р. Необхідні і достатні умови існування функціонального інтерполяційного полінома на континуальній множині вузлів. — // Доп. НАН України. — 2003. — № 7. — С. 7–12.

УДК 511.138 + 517.53 + 517.633

## Інтерполяційний інтегральний ланцюговий дріб типу Тіле

Демків І. І., д.ф.-м.н., доцент, проф. каф. ОМП

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Узагальненням дробів Тіле займались ряд авторів. У роботах авторів [1, 2] було показано, як граничним переходом в інтерполяційному інтегральному поліномі типу Ньютона одержати інтерполяційний інтегральний поліном типу Ерміта. Тому, природним чином виникло питання: чи не можна подібним граничним переходом в інтерполяційному інтегральному ланцюговому дробі (ІЛД) [3] перейти до інтерполяційного інтегрального ланцюгового дробу типу Ерміта з довільною кратністю кожного з інтерполяційних вузлів.

Доводиться лема про те, що одержати ІЛД типу Ерміта шляхом граничного переходу з ІЛД типу Ньютона можна лише тоді, коли кожний з інтерполяційних вузлів має кратність не вище двох.

Виникають наступні задачі: 1. Знайти такий звичайний ІЛД, щоб шляхом граничного переходу одержати звичайний ІЛД типу Ерміта з довільною кратністю кожного з вузлів. 2. Узагальнити одержаний результат на ІЛД типу Ерміта. Розв’язком задачі 1 є інтерполяційний дріб Тіле.

Розв’язання задачі 2 починаємо з часткового випадку. Записуємо узагальнення формули Тіле на двоповерховий ІЛД. Перевіримо виконання інтерполяційних умов у континуальному вузлі  $x_{1,2}(z, \xi) = x_1(z) + H(z - \xi)(x_2(z) - x_1(z))$  та у вузлі  $x_0(z)$ , де через  $x_i(z) \in Q[0, 1]$ ,  $i = 0, 1, \dots$  позначені довільні, фіксовані елементи з простору  $Q[0, 1]$  - кусково-неперервних на відріжку  $[0, 1]$  функцій зі скінченною кількістю точок розриву першого роду.

Далі переходимо до одержання загальної інтегральної формули типу Тіле. Аналіз скалярної формули Тіле вказує на структуру, яку повинен мати функціонал на кожному з поверхів дробу.

Переконаємося, що, коли каркас вузлів та невідоме є сталими, одержана формула має вигляд скалярного дробу Тіле.

У загальному випадку граничного переходу, можна одержати формулу типу Тіле – Тейлора.

- [1] Макаров В. Л., Демків І. І., Михальчук Б. Р. Інтегральний ланцюговий дріб – аналог формули Тейлора // Доп. НАН України. — 2004. — № 11. — С. 25–31.
- [2] Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Демків І. І. Функціональні поліноми Ерміта в просторі  $Q[0, 1]$  // Доп. НАН України. — 2007. — № 8. — С. 21–25.
- [3] Макаров В. Л., Демків І. І. Новий клас інтерполяційних інтегральних ланцюгових дробів // Доп. НАН України. — 2008. — № 11. — С. 17–23.

УДК 534.113

## Деякі особливості математичних моделей задач динаміки пружних об'єктів з рухомим інерційним навантаженням та їх дослідження на основі неklasичного методу відокремлення змінних

Дем'яненко А. Г.

Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет  
(вул. Ворошилова 25, м. Дніпропетровськ, Україна)

З дня виникнення проблеми дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди минуло 169 років. За цей час розглянуто і досліджено багато задач впливу рухомих навантажень різних за природою і характером дії на самі різноманітні конструкції, системи і споруди. Сучасний розвиток техніки, збільшення швидкостей і інтенсивності руху транспорту, інтенсифікація виробничих процесів висувають нові задачі, які потребують розробки і застосування більш точних механічних і, відповідно, математичних моделей, які більш повно і точно відображають і викривають суть явища, що в свою чергу призводить до необхідності удосконалення, модифікації традиційних і пошуку нових концепцій і методів дослідження, які дозволяють більш повно виявити якісні та кількісні особливості досліджуваних явищ. В залежності від способу схематизації інерційних властивостей пружного об'єкту та рухомого навантаження існують чотири принципово різних варіанта вибору механічних і відповідних математичних моделей урахування дії рухомого навантаження. Найбільш складною та важливою з точки зору практики є механічна модель в якій водночас приймаються до уваги як сили інерції рухомого навантаження так і сили інерції пружного об'єкту. При визначенні дії інерційного навантаження на пружний об'єкт важливо не змішувати поняття дії яка викликає рух і дію, яка виникає в результаті руху та викликана цим рухом. Але часто маємо такі випадки, де ці дії взаємно зв'язані, коли інерційне поле є причиною динаміки, викликає рух об'єкту і в той же час є викликаним цим рухом. Це є однією з головних особливостей задач динаміки пружних об'єктів під дією рухомого масового навантаження. Вивчення якісних та кількісних характеристик руху таких об'єктів зводиться до дослідження математичної моделі

$$L\left(x, t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)w = L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)q(x, t) \quad (1)$$

з відповідними крайовими та початковими умовами, де

$$q(x, t) = -\frac{q_0 + q_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\frac{q_1 v}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Характерною особливістю математичних моделей при цьому [1,2] є наявність у тому чи іншому вигляді інерційного оператора (2), який визначає дію на пружний об'єкт рухомого інерційного навантаження, яка залежить від інтенсивності ваги об'єкту  $q_0$ , від інтенсивності  $q_1$  і швидкості руху потоку навантаження  $v$ , від деформації пружного об'єкту  $w(x, t)$ , причому, чітко спостерігається залежність силового впливу від прискорення деформації  $w_{tt}(x, t)$ , швидкості кутової

деформації  $w_{tx}(x, t)$  та зміни кривини осі об'єкта  $w_{xx}(x, t)$ , тобто в механічних системах цього класу силова дія на систему слідкує за поведінкою самої системи. Це є другою особливістю задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих масових навантажень. Третьою суттєвою особливістю є наявність у математичній моделі непарної за часом змішаної похідної  $w_{tx}(x, t)$ , яка обумовлена прискоренням Коріоліса рухомого навантаження, яке приймає участь у складному русі. Саме ця складова не дозволяє відокремити просторову  $x$  і часову  $t$  змінні за класичною схемою Фур'є у дійсній області шуканих функцій та викликає труднощі при дослідженні математичних моделей.

У доповіді наведено задачу, часткові розв'язки яких побудовані на основі застосування неklasичного методу відокремлення змінних у вигляді двох доданків

$$w(x, t) = \varphi(x) \cos(\omega t) + \psi(x) \sin(\omega t), \quad (3)$$

що дозволяє для одновимірних пружних об'єктів відокремити змінні та у деяких випадках в межах вихідних гіпотез отримати точні розв'язки задач і на їх основі дослідити кількісний та якісний характер руху та стійкості механічних систем. Остаточно загальний розв'язок диференціального рівняння руху одновимірного пружного об'єкта під дією рухомого розподіленого інерційного навантаження, який задовольняє однорідним крайовим та початковим умовам, має вигляд

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n a_n \varphi_n(x) \cos(\omega_n t + \alpha_n) + \sum_{i=1}^n a_n \psi_n(x) \sin(\omega_n t + \alpha_n), \quad (4)$$

тобто коливання пружного об'єкту відбуваються у вигляді суперпозиції двох груп коливань - власних та супровідних, причому супровідні коливання обумовлені наявністю рухомого інерційного навантаження та суттєво залежать від його параметрів. Виявлено деякі нові якісні особливості руху.

- [1] *Горошко О.О., Дем'яненко А.Г., Киба С.П.* Двохвильові процеси в механічних системах. — К., "Либідь", 1991. — 188с.
- [2] *Доценко П.Д.* Динамика трубопроводных систем."Основа", Харьков, 1998.

УДК 519.21+62

## Stationary points of the Lorenz model of city system with Markov switching

**Kinash A. V.**<sup>1</sup>, postgraduate student of the Applied mathematics department

**Chabanyuk Ya. M.**<sup>2</sup>, dr hab. of Physics and Mathematics, prof. katedry Matematyki Stosowanej

**Khimka U. T.**<sup>1</sup>, PhD of the Applied mathematics department

<sup>1</sup>National University Lviv Polytechnic  
(S. Bandery street, 12, Lviv, 79013, Ukraine)

<sup>2</sup>Lublin University of Technology,  
(Nadbystrzycka 38 D, Lublin, 20 – 618, Poland)

Considering the generalized Lorenz system with diffusion term, which describes the economic model of city system [1]

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X), \\ \frac{dY}{dt} = b_1(b_2X - b_3Y) - b_4XZ, \\ \frac{dZ}{dt} = c_1XY - (c_2 + x(t)c_2)Z + \sigma(X, Y, Z)dw(t). \end{cases} \quad (1)$$

where  $X$  – the volume of products manufactured by the city system;

$Y$  – the number of indigenous people;

$Z$  – land rent,

$x(t), t \geq 0$  – Markov process [2],

$\sigma(X, Y, Z)$  – diffusion,

$w(t)$  - Wiener process.

Parameters  $a_i, b_i, c_i$  are positive.

The asymptotic system for (1) has form

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = a_1(a_2Y - a_3X), \\ \frac{dY}{dt} = b_1(b_2X - b_3Y) - b_4XZ, \\ \frac{dZ}{dt} = c_1XY - c_2Z, \end{cases} \quad (2)$$

which is dissipative.

The dissipativity conditions have form [3]

$$\begin{cases} A_1 < 2a_1a_3, \\ A_1 \leq a_1a_3 + b_1b_3 - \sqrt{(a_1a_3 - b_1b_3)^2 + (a_1a_2 + b_1b_2)^2}, \\ b_4 \geq c_1, \\ A_1 \leq 2c_2. \end{cases} \quad (3)$$

where  $A_1 > 0$  – const.

Let us now find the stationary points for the system (2). We need to solve the following system of the equations

$$\begin{cases} a_1(a_2Y - a_3X) = 0, \\ b_1(b_2X - b_3Y) - b_4XZ = 0, \\ c_1XY - c_2Z = 0. \end{cases}$$

From here Звідси

$$\begin{cases} Y = \frac{a_3}{a_2} X, \\ Z = \frac{1}{b_4 a_2} (a_2 b_1 b_2 - a_3 b_1 b_3), \\ X^2 = \frac{c_2}{b_4 c_1 a_3} (a_2 b_1 b_2 - a_3 b_1 b_3). \end{cases}$$

Hence we get such stationary point

$$K_1(0, 0, 0)$$

and under condition

$$a_2 b_1 b_2 - a_3 b_1 b_3 > 0,$$

there are two more stationary points

$$K_{2,3} = \left( \pm \sqrt{c_2 \frac{a_2 b_1 b_2 - a_3 b_1 b_3}{b_4 c_1 a_3}}, \pm \frac{a_3}{a_2} \sqrt{c_2 \frac{a_2 b_1 b_2 - a_3 b_1 b_3}{b_4 c_1 a_3}}, \frac{a_2 b_1 b_2 - a_3 b_1 b_3}{b_4 a_2} \right).$$

Under the conditions of asymptotic dissipativity points  $K_2$  and  $K_3$  do not exist. Thus, the only stationary point of the system with asymptotic dissipativity property is  $K_1(0, 0, 0)$  point.

- [1] Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории: Пер. с англ. — М. : Мир, 1999. — 355 с.
- [2] Korolyuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. — Singapore: World Scientific, 2005. — 330 p.
- [3] Кінаш А. В., Чабанюк Я. М., Хімка У. Т. Асимптотична дисипативність дифузійного процесу. — Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фізико-математичні науки. Збірник наук. праць. Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка. — 2014. — Вип. 11. — С. 77-87.

УДК 538.93

## Поверхнева енергія напівобмеженого «желе»

Костробій П. П., д.ф.-м.н., професор каф. ПМ

Маркович Б. М., к.ф.-м.н., доцент каф. ПМ

Національний університет «Львівська політехніка»  
(вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013)

На сьогоднішній день квантово-статистична теорія фермі-систем з наявністю поверхні поділу ще далека від завершення. Актуальність теоретичного опису таких систем важко переоцінити у зв'язку з важливістю процесів, які відбуваються за наявності поверхні поділу, та бурхливим розвитком експериментальних методів дослідження поверхні.

Найпопулярнішим теоретичним методом дослідження таких систем є метод функціоналу густини [1, 2, 3], що виник на основі добре відомого методу Томаса-Фермі, який був розроблений для атомів. За своєю природою метод функціоналу густини є одночастинковим підходом і не може коректно врахувати багаточастинкові кореляційні ефекти [4]. Для методу функціонала густини є характерною проблема поверхневої енергії: розрахована за допомогою цього підходу поверхнева енергія напівобмеженого «желе» виявляється від'ємною для великих значень концентрації електронів ( $r_s < 2.5 a_B$ , де  $r_s$  — радіус Вігнера-Зейтца) [5], що фізично неправильно.

Використовуючи метод функціонального інтегрування, ми побудували квантово-статистичну теорію простого напівобмеженого металу у межах моделі напівобмеженого «желе» [6, 7]. Зокрема, отримано загальний вираз для термодинамічного потенціалу. Використовуючи цей вираз, розраховано поверхневу енергію цього металу з використанням скінченного потенціального бар'єру. Висоту потенціального бар'єру знайдено з умови мінімуму поверхневої енергії. Отримано додатні значення поверхневої енергії у всьому характерному для металів діапазоні зміни радіуса Вігнера-Зейтца, ці значення добре узгоджуються з експериментальними даними для простих металів.

- [1] Dreizler R. M., Gross E. K. U. Density Functional Theory (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990).
- [2] Теория неоднородного электронного газа: Пер. с англ. Под ред. С. Лундквиста и Н. Марча. —М.: Мир, 1987. 400 с. [Theory of the inhomogeneous electron gas. Edited by S. Lundqvist, N. H. March (Plenum Press, New York and London, 1983)].
- [3] Партенский М. В. Самосогласованная электронная теория металлической поверхности // Усп. физ. наук. —1979. —Т.128. —С.69–106.
- [4] Сарры А. М., Сарры М. Ф. К теории функционала плотности // Физ. тв. тела. —2012. —Т.54. —С.1237–1243.
- [5] Lang N. D., Kohn W. Theory of metal surfaces: charge density and surface energy // Phys. Rev. —1970. —Vol.B1. —P.4555–4568.
- [6] Kostrobij P. P., Markovych B. M. Semi-infinite jellium: Thermodynamic potential, chemical potential, and surface energy // Phys. Rev. B. —2015. —Vol.92. —P.075441.
- [7] Kostrobij P. P., Markovych B. M. Semi-infinite jellium: Step potential model // Phys. Rev. B. —2016. —Vol.93. —P.155401.



УДК 519.715

## Асимптотичне представлення генератора процедури стохастичної оптимізації з імпульсним збуренням

Кукурба В. Р.,

Чабанюк Я. М.<sup>1</sup>, професор кафедри промислової безпеки та охорони праці

<sup>1</sup> Львівський державний університет безпеки життєдіяльності  
(вул. Клепарівська, 35, м. Львів, 79000, Україна)

Неперервна процедуру стохастичної оптимізації з імпульсними збуреннями та напівмарковськими переключеннями задається еволюційним рівнянням:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)[\nabla_{b(t)}C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^4))dt + \varepsilon d\eta^\varepsilon(t)], \quad (1)$$

де  $\nabla_{b(t)}C(u; x) = \frac{C(u+b(t);x)-C(u-b(t);x)}{2b(t)}$ ,  $u \in R$  [1]. Поряд з незбуреною системою (1) розглядається супроводжуюча система:

$$du_x(t)/dt = a(t)\nabla_{b(t)}C(u_x(t); x), x \in X. \quad (2)$$

Функція регресії  $C(u; x)$ ,  $u \in R$ ,  $x \in X$  задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем(2). Задача розглядається в умовах існування єдиної точки екстремуму  $u_0$ . Напівмарковський процес  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  є рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом  $\pi(B)$ ,  $B \in \mathbf{X}$ , у вимірному фазовому просторі  $(X, \mathbf{X})$ , та задається напівмарковським ядром [2]

$$Q(x, B, t) = P(x, B)G_x(t),$$

де  $G_x(t)$  - функція розподілу часу перебування в стані  $x \in X$ .

Імпульсний процес збурень  $\eta^\varepsilon(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in X$  задається співвідношенням [2], [3]:

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^4)), \quad (3)$$

де сім'я процесів з незалежними приростами (3) задається генераторами [3]:

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\Gamma_1(x)\varphi(w) + \Gamma_2(x)\varphi(w) + \varepsilon^2\theta^\varepsilon(x)\varphi(w) \quad (4)$$

де  $\Gamma_1(x)\varphi(w) = \int_R v\Gamma(dv; x)\varphi'(w)$ ,  $\Gamma_2(x)\varphi(w) = \frac{1}{2} \int_R v^2\Gamma(dv; x)\varphi''(w)$ . Залишковий член такий, що  $\varepsilon^2\theta^\varepsilon(x)\varphi(w) \rightarrow 0$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Введемо розширений процес марковського відновлення (ПМВ), що задається послідовністю:

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n, \quad (5)$$

де  $\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k$ ,  $n \geq 0$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $\theta_k$  є моментами відновлення процесу  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  [2].

Сім'я неоднорідних півгруп  $\mathbf{C}_{t+\varepsilon^4s}^{\varepsilon,t}(x)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in X$  на тест функціях  $\varphi(u) \in C^2(R)$  має представлення

$$\mathbf{C}_{t+\varepsilon^4s}^{\varepsilon,t}(x)\varphi(u) = \varphi(u_x(t + \varepsilon^4s)), u_x(t) := u_x(t, u), u_x(t + s) := u_x(t + s, u). \quad (6)$$

Породжуючий оператор  $\mathbf{C}_t(x)$  півгрупи (6) визначається формулами

$$\mathbf{C}_t(x)\varphi(u) = a(t)\mathbf{C}_b(x)\varphi(u) = a(t)\nabla_{b(t)}C(u; x)\varphi'(u). \quad (7)$$

Компенсуючий оператор ПМВ визначається співвідношенням через математичне сподівання

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u; x) = \varepsilon^{-4}q(x)E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u; x)|u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x].$$

**Лема 1.** Компенсуючий оператор (8) на функціях  $\varphi(u; \cdot) \in C^3(R)$  допускає асимптотичне представлення:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t^\varepsilon(x)\varphi(u, x) = & \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(u, x) + \varepsilon^{-1}a(t)\mathbf{\Gamma}_1(x)\varphi(u, x) + \\ & + \mathbf{C}_t(x)\varphi(u, x) + \varepsilon\theta_L(x)\varphi(u, x), \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\theta_L(x) = \varepsilon^3\theta_{L_a}(x) + \varepsilon^3\theta_{L_b}(x) + \varepsilon^3\theta_{L_{ab}}(x) + a(t)\mathbf{\Gamma}_2(x)q^{-1}(x)$ . Причому  $\|\varepsilon\theta_L(x)\varphi(u, x)\| \rightarrow 0$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\varphi(u, \cdot) \in C^{3,3}(R \times R)$ .

Для побудови асимптотичного представлення генератора ПСО (1) отримаємо розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора

$$\mathbf{L}_{t,0}^\varepsilon = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(u; x) + \varepsilon^{-1}a(t)\mathbf{\Gamma}_1(x) + \mathbf{C}_t(x), \quad (9)$$

на збуреній функції Ляпунова  $V^\varepsilon(u, x, t) = V(u) + \varepsilon^3a(t)V_1(u; x) + \varepsilon^4a(t)V_2(u; x)$ . Функції збурення  $V_1(u; x), V_2(u; x)$  визначається розв'язком проблеми сингулярного збурення (РПСЗ) [2].

**Лема 2.** Компенсуючий оператор  $\mathbf{L}_{t,0}^\varepsilon$  на збуреній функції Ляпунова  $V^\varepsilon(u, x, t)$ , при  $V(u) \in C^4(R)$  допускає представлення

$$\mathbf{L}_{t,0}^\varepsilon V^\varepsilon(u, x, t) = a(t)\mathbf{L}V(u) + \varepsilon\theta_0^\varepsilon(t)V(u), \quad (10)$$

де

$$\mathbf{L}V(u) = \mathbf{P}\mathbf{C}_b(x)V(u) = \mathbf{P}\nabla_b C(u; x)V'(u). \quad (11)$$

Залишковий оператор  $\theta_0^\varepsilon(t)V(u)$ , задовольняє умові  $|\theta_0^\varepsilon(t)V(u)| \leq M$ .

- [1] Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Непрерывные процедуры стохастической аппроксимации—Проблемы передачи информации. 1971. № 2.— С. 58–69.
- [2] Korolyuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space—World Scientific Publishing, 2005. — 330 p.
- [3] Семенюк С. А., Чабанюк Я. М. Стохастичні еволюційні системи з імпульсними збуреннями. — Вісник Національного університету Львівська Політехніка, фізико-математичні науки. № 660, 2009 — С. 56–60.

УДК 519.6

## Методи Рунге-Кутта для нелінійних сингулярних задач Коші

Кунинець А. В., асист. каф. ОМП

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Розглянемо задачу Коші

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^\lambda} \frac{d}{dx} \left( x^\lambda k(x) \frac{du}{dx} \right) &= -f(x, u), \quad 0 < x \leq X, \\ u(0) = u_0, \quad \frac{du(0)}{dx} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $0 < C \leq k(x)$ ,  $f(x, u)$  — задані достатньо гладкі функції,  $\lambda = 1, 2$ .

На відрізку  $[0, X]$  виберемо нерівномірну сітку  $\widehat{\omega}_h = \{x_n \in [0, X], n = \overline{0, N}, x_0 = 0, x_N = X\}$  з кроком  $h_n = x_{n+1} - x_n$ . Для чисельного розв’язування задачі (1) застосуємо такий підхід. На відрізках  $[x_n, x_{n+1}]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N - 1$  використаємо класичні однокрокові методи (рядів Тейлора або Рунге-Кутта), див. напр. [1], а на відрізку  $[0, x_1]$  побудуємо нові методи, які будуть враховувати сингулярність цієї задачі в точці  $x = 0$ . Запишемо розклад в ряд Тейлора в околі точки  $x = x_0$  точного розв’язку  $u(x)$  та похідної  $u'(x)$  задачі (1).

$$\begin{aligned} u_1 = u_0 &- \frac{h^2}{2(1+\lambda)} \frac{f(0, u_0)}{k(0)} - \\ &- \frac{h^3}{3} \left[ \frac{1}{2+\lambda} \frac{\partial f(0, u_0)}{\partial x} \frac{1}{k(0)} + \frac{1}{1+\lambda} f(0, u_0) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{k(x)} \right) \Big|_{x=0} \right] - \\ &- \frac{h^4}{8} \left[ \frac{1}{3+\lambda} \left( \frac{\partial^2 f(0, u_0)}{\partial x^2} - \frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial f(0, u_0)}{\partial u} \frac{f(0, u_0)}{k(0)} \right) \frac{1}{k(0)} + \right. \\ &+ \left. \frac{2}{2+\lambda} \frac{\partial f(0, u_0)}{\partial x} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{k(x)} \right) \Big|_{x=0} + \frac{1}{1+\lambda} f(0, u_0) \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{k(x)} \right) \Big|_{x=0} \right] + \\ &+ O(h^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'_1 &= - \frac{h}{1+\lambda} f(0, u_0) - \frac{h^2}{2+\lambda} \frac{\partial f(0, u_0)}{\partial x} - \frac{h^3}{2(3+\lambda)} \left( \frac{\partial^2 f(0, u_0)}{\partial x^2} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{1+\lambda} \frac{\partial f(0, u_0)}{\partial u} \frac{f(0, u_0)}{k(0)} \right) - \frac{h^4}{6(4+\lambda)} \left[ \frac{\partial^3 f(0, u_0)}{\partial x^3} - \right. \\ &- \left. \frac{3}{1+\lambda} \frac{\partial^2 f(0, u_0)}{\partial x \partial u} \frac{f(0, u_0)}{k(0)} - \frac{\partial f(0, u_0)}{\partial u} \left( \frac{2}{2+\lambda} \frac{\partial f(0, u_0)}{\partial x} \frac{1}{k(0)} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{2}{1+\lambda} f(0, u_0) \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{k(x)} \right) \Big|_{x=0} \right) \right] + O(h^5). \end{aligned}$$

Для чисельного розв'язування в околі точки  $x_0 = 0$  побудуємо метод Рунге-Кутта вигляду

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -f(0, u_0), \\
 g_2 &= -f\left(c_2 h, u_0 + h^2 \frac{a_{21}}{k(0)} g_1\right), \\
 g_3 &= -f\left(c_3 h, u_0 + h^2 \left[\left(\frac{a_{31}}{k(0)} + \frac{a_{32}}{k(c_2 h)}\right) g_1 + \frac{\tilde{a}_{32}}{k(c_2 h)} g_2\right]\right), \\
 y_1 &= u_0 + h^2 \left[\left(\frac{d_{12}}{k(0)} + \frac{d_{13}}{k(c_2 h)} + \frac{d_{14}}{k(c_3 h)}\right) g_1 + \left(\frac{d_{23}}{k(c_2 h)} + \frac{d_{24}}{k(c_3 h)}\right) g_2\right], \\
 y_1' &= h(b_1 g_1 + b_2 g_2 + b_3 g_3),
 \end{aligned} \tag{2}$$

Отримано умови, при яких метод Рунге-Кутта (2) має четвертий порядок точності

$$\begin{aligned}
 d_{12} + d_{13} + d_{14} + d_{23} + d_{24} &= 1/(2(1 + \lambda)), \\
 c_2(d_{23} + d_{24}) &= 1/(3(2 + \lambda)), \\
 (d_{13} + d_{23})c_2 + (d_{14} + d_{24})c_3 &= 1/(3(1 + \lambda)), \\
 c_2^2(d_{23} + d_{24}) &= 1/(4(3 + \lambda)), \\
 (d_{23} + d_{24})a_{21} &= 1/(8(3 + \lambda)(1 + \lambda)), \\
 c_2(d_{23}c_2 + d_{24}c_3) &= 1/(4(2 + \lambda)), \\
 (d_{13} + d_{23})c_2^2 + (d_{14} + d_{24})c_3^2 &= 1/4(1 + \lambda), \\
 b_1 + b_2 + b_3 &= 1/(1 + \lambda), \\
 b_2c_2 + b_3c_3 &= 1/(2 + \lambda), \\
 b_2c_2^2 + b_3c_3^2 &= 1/(3 + \lambda), \\
 b_2a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32} + \tilde{a}_{32}) &= 1/(2(3 + \lambda)(1 + \lambda)), \\
 b_2c_2^3 + b_3c_3^3 &= 1/(4 + \lambda), \\
 b_2c_2a_{21} + b_3c_3(a_{31} + a_{32} + \tilde{a}_{32}) &= 1/(2(4 + \lambda)(1 + \lambda)), \\
 b_3\tilde{a}_{32}c_2 &= 1/(3(4 + \lambda)(2 + \lambda)), \\
 b_3(a_{32} + \tilde{a}_{32})c_2 &= 1/(3(4 + \lambda)(1 + \lambda)).
 \end{aligned} \tag{3}$$

Одним з методів, який задовольняє вимогам (3) при  $\lambda = 1$  є метод вигляду

$$\begin{aligned}
 g_1 &= -f(0, u_0), \\
 g_2 &= -f\left(\frac{9}{16}h, u_0 + h^2 \frac{81}{1024} \frac{g_1}{k(0)}\right), \\
 g_3 &= -f\left(\frac{19}{20}h, u_0 + h^2 \left[\left(-\frac{26657}{216000k(0)} + \frac{1178}{10125k(9h/16)}\right) g_1 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2356}{10125k(9h/16)} g_2\right]\right),
 \end{aligned}$$

$$y_1 = u_0 + h^2 \left[ \left( \frac{25}{2052k(0)} + \frac{128}{2511k(9h/16)} - \frac{170}{15903k(19h/20)} \right) g_1 + \right. \\ \left. + \left( \frac{256}{2511k(9h/16)} + \frac{80}{837k(19h/20)} \right) g_2 \right], \\ y'_1 = h \left( \frac{25}{1026} g_1 + \frac{256}{837} g_2 + \frac{100}{589} g_3 \right),$$

а при  $\lambda = 2$

$$g_1 = -f(0, u_0), \\ g_2 = -f \left( \frac{3}{5}h, u_0 + h^2 \frac{3}{50} \frac{g_1}{k(0)} \right), \\ g_3 = -f \left( \frac{14}{15}h, u_0 + h^2 \left[ \left( -\frac{854}{18225k(0)} + \frac{35}{729k(3h/5)} \right) g_1 + \frac{35}{243k(3h/5)} g_2 \right] \right), \\ y_1 = u_0 + h^2 \left[ \left( \frac{17}{1512k(0)} + \frac{11}{432k(3h/5)} - \frac{1}{112k(14h/15)} \right) g_1 + \right. \\ \left. + \left( \frac{11}{144k(3h/5)} + \frac{1}{16k(14h/15)} \right) g_2 \right], \\ y'_1 = h \left( \frac{1}{168} g_1 + \frac{1}{6} g_2 + \frac{9}{56} g_3 \right).$$

Чисельні експерименти підтверджують ефективність такого підходу.

- [1] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.:Мир, 1990. — 512с.

УДК 517.927

## Про двосторонню апроксимацію розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

Ментинський С. М., ст.викл. каф. ОМП

Шувар Б. А., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Повідомлення присвячене дослідженню двосторонніх ітераційних методів у застосуванні до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Двостороннім ітераційним методам, теорія яких започаткована С.О.Чаплигінім, притаманні відомі переваги перед іншими ітераційними методами. Проте їх використання обмежене кількома несприятливими чинниками. Основні з них неопуклість та немонотонність, а також припущення про диференційовність відповідних операторів. В [1, 2, 3] запропоновані нові підходи до побудови двосторонніх методів для рівнянь з немонотонними та неопуклими правими частинами. В [2, 3], зокрема, досліджено нові двосторонні методи, що не вимагають диференційовності відповідних операторів. При використанні цих методів для апроксимації розв'язків граничних задач слід враховувати їх специфіку, зумовлену потребою побудови операторів відповідної структури в лінеаризованих частинах алгоритмів. Для цього зручно використовувати, зокрема, конструкції чисельно-аналітичного методу А.М.Самойленка [4], який протягом минулих чотирьох десятиліть систематично використовують для дослідження граничних задач для рівнянь із звичайними і частинними похідними.

Пропоноване дослідження використовує зазначені підходи до побудови двосторонніх методів і має за мету побудову загальної схеми двосторонньої апроксимації розв'язків деяких класів крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, яка охоплює відомі та нові алгоритми. В проведених дослідженнях встановлено умови за яких послідовні наближення мають надлінійну (зокрема і квадратичну) швидкість збіжності.

- [1] Курпель Н. С., Шувар Б. А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. - Киев: Наук. думка.- 1980.- 268 с.
- [2] Шувар Б. А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах // Второй симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации, Т. 1.- Талин: Ин-т кибернетики АН ЭССР.- 1981.- с. 68-73.
- [3] Шувар Б. А., Копач М.І, Ментинський С. М., Обшта А. Ф. Двусторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. – 516 с.
- [4] Ronto M., Samoilenko A. M. Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. - Singapore: World Scientific, 2000. - 455 p.



$$\begin{aligned}
 d_{0,0} &= 1, \quad d_{i,0} = - \sum_{m=1}^i d_{i-m,0} \cdot \frac{\sigma_m}{y_n}, \quad i = \overline{1,4}, \\
 d_{\nu,1} &= - \frac{d_{\nu+1,0}}{d_{\nu,0}}, \quad \nu = \overline{1,3}, \quad d_{\mu,2} = d_{\mu+1,1} - d_{\mu,1}, \quad \mu = 1, 2, \\
 d_{1,3} &= d_{1,2} \frac{d_{2,2}}{d_{1,2}}, \quad \sigma_m = h \sum_{i=1}^q a_{mi} k_i, \quad q = k + l, \\
 k_i &= f(x_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^q \beta_{ij} k_j), \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^q \beta_{ij}, \quad y_n \neq 0.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Тут  $h$  - крок інтегрування ( $h = x_{n+1} - x_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $a_{ij}$ ,  $\alpha_i$   $\beta_{ij}$  - параметри.

Наведемо значення параметрів для двосторонніх обчислювальних формул першого порядку точності:

$$a_{21} = -a_{22}, a_{22} = \frac{1 - 2\omega}{2\alpha_2}, \beta_{21} = \alpha_2, \alpha_2 \neq 0, \tag{4}$$

де локальна похибка в кожній вузловій точці оцінюється так:

$$R_2(f) = \omega f \left( \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y} \right) h^2 = \omega h^2 Df \cong \omega h (k_2 - k_1) / \alpha_2;$$

та методів другого порядку точності:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= 1 + a_{13} \frac{(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2}, \quad a_{12} = - \frac{\alpha_3}{\alpha_2} a_{13}, \quad a_{21} = \frac{2a_{23}(\alpha_3 - \alpha_2) - \alpha_2(1 + \omega)}{2\alpha_2}, \\
 a_{22} &= \frac{\alpha_2(1 + \omega) - 2a_{23}\alpha_3}{2\alpha_2}, \quad a_{31} = \frac{2a_{33}(\alpha_3 - \alpha_2) + \omega}{2\alpha_2}, \\
 a_{32} &= - \frac{2a_{33}\alpha_3 + \omega}{2\alpha_2}, \quad a_{33} = \frac{(2 - 3\alpha_2)}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)} - a_{13} - a_{23}, \\
 \beta_{32} &= \frac{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)}, \quad \beta_{21} = \alpha_2, \beta_{31} = \alpha_3 - \beta_{32},
 \end{aligned} \tag{5}$$

де  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ - довільні числа,  $\alpha_2, \alpha_3$  - параметри, причому

$$\alpha_2 \alpha_3 (\alpha_3 - \alpha_2) (2 - 3\alpha_2) (3\alpha_3 - 2) \neq 0.$$

Локальна похибка оцінюється наступним чином:

$$R_3(f) = \omega h^3 y_n^2 k_1 (k_2 - k_1) / (\alpha_2 y_{n-1}) + O(h^4) ..$$

Два набори формул, що відповідають двом різним за знаком значенням  $\omega$ , складають обчислювальні формули двостороннього методу. Півсуму двосторонніх наближень приймаємо на наближений розв'язок у кожній вузловій точці відрізка, а модуль піврізниці дає оцінку похибки. За допомогою варіацій параметрів  $\omega$ , і  $h$ . досягається необхідна точність двосторонніх алгоритмів на всьому відрізку  $I_L$ .



Використовуючи апарат ланцюгових дробів та ідею побудови методів Рунге-Кутта наближений розв'язок нелінійного інтегрального рівняння

$$f(x) = \int_a^x F[x, y, f(y)] dy, \quad x \in I_L, \quad (6)$$

в точці  $x_2 = a + h$  шукаємо у вигляді (2), де вирази  $c_{0,0}$ ,  $d_{i,j}$  при  $k + l = 2$  ( $k = 1, 2; l = 0, 1$ ) мають вигляд:

$$c_{0,0} = h\delta_1, \quad d_{0,0} = 1, \quad d_{1,0} = \frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad (\delta_i \neq 0), \quad d_{2,0} = \frac{\delta_1\delta_3 + \delta_2^2}{\delta_1^2}, \quad d_{1,1} = \frac{d_{2,0}}{d_{1,0}},$$

$$\delta_i = \sum_{j=1}^p a_{ij}k_j, \quad k_j = F \left[ a + \alpha_j h, a + \beta_j h, h \sum_{m=0}^{j-1} \gamma_{jm}k_m \right], \quad \gamma_{j0} = 0.$$

Параметри  $a_{ij}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  ( $i, j = 1, 2$ ),  $\gamma_{21}$  визначаються з умови, щоб різниця між точним ( $f_2$ ) і наближеним розв'язком ( $Y_2^{(k,l)}$ ) в точці  $x_2 = x_1 + h$  мали вигляд:

$$f_2 - Y_2^{[k,l]} = \omega h^p \Psi(F) + O(h^{p+1}),$$

де  $h$  - крок інтегрування,  $\psi(F)$  - деякий диференціальний оператор,  $\omega$  параметр двосторонності.

Теорема 1. Якщо  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\gamma_{21} = \frac{1}{2}$ ,  $a_{11} = 1 - a_{12}$ ,  $a_{21} = 1 - a_{12} - \omega$ ,  $a_{22} = a_{12} - 1 + \omega$ , де  $a_{12}$  - довільне число, то

$$f_2 - Y_2^{[1,0]} = \omega h^2 f_1^{II} + O(h^3) \cong \omega h (k_2 - k_1) .$$

Теорема 2. Якщо параметри приймають значення:

$$\alpha_1 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{2}{3}, \beta_3 = 0, \gamma_{21} = \frac{2}{3}, \gamma_{31} = -1, \quad \gamma_{32} = 1,$$

$$a_{11} = \frac{3}{2}(1 - \omega), \quad a_{12} = \frac{3}{4}\omega, \quad a_{13} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\omega, \quad a_{21} = \frac{3}{2}(1 + \omega),$$

$$a_{22} = -\frac{3}{4}(1 + \omega), \quad a_{23} = -\frac{3}{4}(1 + \omega), \quad a_{31} = -3\omega, \quad a_{32} = \frac{3}{2}\omega, \quad a_{33} = \frac{3}{2}\omega,$$

то

$$f_2 - Y_2^{[2,0]} = \omega h^3 \frac{(2F_x + F_y + FF_z)^2}{F} + O(h^4) .$$

Для знаходження наближеного розв'язку рівняння (2) в наступних точках ( $n \geq 3$ ) застосовуємо метод рухомого початку.

Двосторонність та необхідна точність на всьому інтервалі забезпечується шляхом варіації параметрів  $\omega$  і  $h$  ( $\omega$  - параметр двосторонності,  $h$  - крок інтегрування).

Запропоновані двосторонні формули розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь дають можливість отримувати в кожній вузловій точці не тільки верхні та нижні наближення до точного розв'язку, але й давати інформацію про величину головного члена похибки без додаткових звертань до правої частини диференціального чи інтегрального рівняння, що вигідно відрізняє ці методи від традиційних двосторонніх методів.

УДК 539.378

## Інтегральні рівняння задачі про граничну рівновагу неоднорідної по товщині циліндричної оболонки з внутрішньою тріщиною довільної конфігурації

Николишин М. М.<sup>1</sup>, д.ф.-м.н., проф., зав. відділу механіки твердого деформівного тіла

Пелех Я. М.<sup>2</sup>, к.ф.-м.н., в.о.зав. каф. ОМП

<sup>1</sup>Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ  
(вул. Наукова, 3Б, м. Львів, 79060, Україна)

<sup>2</sup>Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

**Вступ.** В сучасній техніці часто елементи конструкцій працюють в таких умовах, що одна їх поверхня знаходиться в агресивному середовищі з певними фізико-хімічними параметрами, а друга – в середовищі з іншими. У таких випадках доцільно використовувати функціонально градієнтні матеріали (ФГМ), тобто композитні матеріали мікроскопічної неоднорідності, в яких механічні властивості змінюються неперервно за товщиною тіла. Найчастіше ці матеріали виготовляються з кераміки та металу. Почали розробляти ФГМ для космічних кораблів, як матеріали, що витримують надвисокі температури. У даний час такі матеріали набувають більш широкого застосування, що зумовлює необхідність проводити не лише температурний аналіз, а й досліджувати їх напружено-деформований стан, міцність тощо. В цій роботі досліджено вплив ФГМ на граничну рівновагу циліндричної оболонки, ослабленої внутрішньою тріщиною довільної конфігурації.

**Постановка задачі.** Розглянемо виготовлену з ФГМ безмежну кругову циліндричну оболонку, ослаблену поздовжньою або поперечною тріщиною довільної конфігурації завдовжки  $l$ . Глибину тріщини задано двома гладкими кривими  $d_1(x)$  і  $d_2(x)$ . У циліндричній системі координат  $\alpha\beta\gamma$  на випадок поздовжньої тріщини  $x \equiv \alpha$ , а на випадок поперечної –  $x \equiv \beta$ . Початок координат вибрано в центрі тріщини. Вважатимемо, що оболонка і береги тріщини завантажені лише симетричними відносно площини тріщини зусиллями та моментами. Під час деформації береги тріщини не контактують. Розміри тріщини, рівень зовнішнього навантаження та властивості матеріалу передбачаємо такими, що біля тріщини по всій глибині оболонки вузькою смугою розвиваються пластичні деформації. Тепер, відповідно до аналога  $\delta_c$ -моделі [1], зони пластичних деформацій замінимо поверхнями розриву пружних переміщень і кутів повороту, а реакцію матеріалу пластичної зони на пружну – відповідними зусиллями та моментами. Вважатимемо, що на продовженні тріщини в глибину до зовнішньої чи внутрішньої поверхонь оболонки, тобто відповідно в області  $x \in ]-x_0; x_0]$ ,  $\gamma \in [-h + d_2; h] \cup [d_2; h]$ , ( $x_0 = l/R$ ,  $2h$  – товщина оболонки,  $R$  – радіус її серединної поверхні), діють постійні напруження  $\sigma^0 = (\sigma_B + \sigma_T)/2$ , де  $\sigma_B$  – границя міцності, а  $\sigma_T$  – поріг текучості ФГМ. У пластичних зонах на продовженні тріщини по довжині, тобто в областях  $\gamma \in [-h, h]$ ,  $|x| \in [x_0; x_0 + x_p]$  ( $x_p = l_p/R$ ,  $l_p$  – довжина пластичної зони), діють невідомі нормальні зусилля  $N$  та згинний момент  $M$ , які протидіють розкриттю тріщини та задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок.

Таким чином, у рамках прийнятого аналога  $\delta_c$ -моделі пружно-пластичну задачу про граничну рівновагу оболонки з внутрішньою тріщиною довільної конфігурації та заданої довжини  $2l$  зведено до задачі про пружну рівновагу такої ж оболонки з фіктивною наскрізною тріщиною невідомої довжини  $2l_1 = 2(l + l_p)$ , на берегах якої виконуються умови:

$$\begin{aligned} N_2(\alpha) &= \begin{cases} N_2^{(1)} + N^1 - N_2^0, & |x| < x_0; \\ N - N_2^0, & x_0 \leq |x| \leq x_1; \end{cases} \\ M_2(\alpha) &= \begin{cases} M_2^{(1)} + M^1 - M_2^0, & |x| < x_0; \\ M - M_2^0, & x_0 \leq |x| \leq x_1; \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $x_1 = l_1/R$ ,  $N_2^{(1)}$ ,  $M_2^{(1)}$  – зусилля та момент, прикладені до берегів реальної тріщини;  $N_2^0$ ,  $M_2^0$  – ці ж параметри на лінії тріщини в суцільній оболонці, зумовлені зовнішнім навантаженням;  $N_1$ ,  $M_1$  – нормальне зусилля та згинний момент, які є реакцією матеріалу на розрив внутрішніх зв'язків над і під внутрішньою тріщиною та які згідно з прийнятими припущеннями про напруження в цих зонах визначаються за формулами:

$$N^1 = \int_{-h}^{d_1(x)} \sigma_0 d\gamma + \sigma^0 \int_{d_2(x)}^h \sigma_0 d\gamma, \quad M^1 = \int_{-h}^{d_1(x)} \sigma_0 \gamma d\gamma + \int_{d_2(x)}^h \sigma_0 \gamma d\gamma. \quad (2)$$

**Основні співвідношення неоднорідних за товщиною оболонок з тріщиною.** Оболонка виготовлена з ФГМ є неоднорідною за товщиною. Тобто модуль пружності та коефіцієнт Пуассона є функціями нормальної до серединної поверхні координати  $\gamma$

$$E = E(\gamma), \quad \nu = \nu(\gamma). \quad (3)$$

Залежності (3) такі, що характеристики матеріалу оболонки задовольняють узагальнений закон Гука і справедлива гіпотеза недеформованих елементів. Система ключових рівнянь для такої оболонки з поздовжньою наскрізною тріщиною завдовжки  $2l_1$  має вигляд [1]

$$L_{ij}u_i = q_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

де  $L_{ij}$  – диференціальні оператори найвище четвертого порядку;  $u_i$  – компоненти узагальнених переміщень серединної поверхні;  $q_j$  – диференціальні оператори, що діють на скачки узагальнених переміщень.

**Інтегральні рівняння задачі.** Побудований фундаментальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (4) на цій основі записано інтегральне представлення зусиль та моментів (1) і вимагаючи виконання умови (1) отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\sum_{j=1}^2 \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} F_j(\xi) K_{ij}^*(\xi - \alpha) d\xi = f_i(\alpha), \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

де  $K_{ij}^*(z) = -a_{ij} \operatorname{cth} \frac{z}{2} + K_{ij}^0(z)$ ;  $F_i$  – похідні від скачків переміщення і кута повороту  $K_{ij}^0(z)$  – неперервні функції [1].

Відповідно до моделі в системі (5) невідомі границі інтегрування  $\alpha_1$ , а також зусилля  $N$  та  $M$ , що відповідають реакції пластичних зон на пружний об'єм і задовольняють певну умову пластичності тонких оболонок. Тому цю систему розв'язуємо сумісно з умовами пластичності тонких оболонок та умовами обмеженості зусиль та моментів біля кінців фіктивної тріщини. Крім цього праві частини інтегральних рівнянь – розривні функції. Алгоритм числового розв'язування таких систем сумісно зі згаданими умовами приведено в [1].

Інтегруючи розв'язок системи (5), розкриття тріщини  $\delta(\alpha, \gamma)$  у довільній її точці визначаємо за формулою

$$\delta(\alpha, \gamma) = [u_2(\alpha)] + \gamma [\theta_2(\alpha)], \quad |\alpha| < \alpha_1, \quad |\gamma| \leq h.$$

**Числовий аналіз.** Як приклад, розглянуто нескінчену циліндричну оболонку з ФМГ, зовнішня поверхня якої алюміній ( $E_3 = 70\text{GPa}$ ), а внутрішня – германій ( $E_B = 151\text{GPa}$ ). За товщиною модуль пружності  $E(\gamma)$  змінюється за законом [2]

$$E(\gamma) = (E_3 - E_B)V + E_B, \quad V = \left(\xi + \frac{1}{2}\right)^m, \quad \xi = \gamma/2h, \quad (6)$$

а коефіцієнт Пуассона  $\nu(\gamma) = \text{const}$ .

Числовий аналіз проведено для оболонки, що знаходиться під дією внутрішнього тиску інтенсивності  $p$  ( $N_2^0 = Rp$ ,  $M_2^0 = 0$ ) за таких значень параметрів:  $h/R = 0,01$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\sigma_B/\sigma_T = 1,5$ ;  $l_0/R = 0,1$ . Оболонка ослаблена внутрішньою поздовжньою параболічною тріщиною

$$d_1(\alpha) = \frac{1}{\tau_0^2}(h - d'_1 - d'_2)\alpha^2 - h + d'_1, \quad d_2(\alpha) = -\frac{1}{\tau_0^2}(h - d'_1 - d'_2)\alpha^2 + h - d'_2,$$

$d'_1$  та  $d'_2$  віддалі від вершини параболи до внутрішньої та зовнішньої поверхонь оболонки;  $\tau_0^2 = l/l_1$ . Для визначення невідомих  $N$  та  $M$  використовувалась умова пластичності Треска у вигляді поверхневого пластичного шару або пластичного шарніру.

**Висновок.** Якщо за критерій руйнування взяти критерій критичного розкриття фронту тріщини, то руйнування циліндричної оболонки з ФМГ, для розглянутих геометричних і механічних параметрів і навантаження, почнеться на продовженні тріщини в глибину. Закон розподілу модуля пружності  $E(\gamma)$  за товщиною оболонки незначно впливає на її граничний стан на відміну від відношення його граничних значень  $E_3/E_B$ . Умова пластичності мало впливає на розкриття тріщини та розміри пластичних зон.

- [1] Кушнір Р.М. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М.Кушнір, М.М.Николишин, В.А.Осадчук. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
- [2] Ruhi M. Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials / M.Ruhi, A.Angoshtari and R.Naghdabadi // J.Thermal Stresses. – 2005.– 28. – P.391–408.

УДК 517.94:519.62

## Nonlinear numerical methods of variable order and step with control of stability for the solution Cauchy problem for ordinary differential equations

**Pelexh Ya. M.**, Phd., Department of Computational Mathematics and Programming  
Lviv Polytechnic National University  
(12 Bandera street, Lviv, Ukraine, 79013)

Problems involved in the construction and investigation of mathematical models of physicochemical, biological and economic processes, problems of multidimensional optimization, electronic, kinetics, etc lead to the need to solve nonlinear differential equations and its systems.

The continued fractions at corresponding conditions give high-rate to convergence of algorithms, bilateral and monotonous approximations, have low sensitivity to errors of rounding. The process of calculating continued fractions is cyclical and their can be easily programmed.

A research object is initial value problem for ordinary differential equations. The purpose of the study is to develop methods and algorithms to build computational methods for the numerical solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations.

The nonlinear formulas of Runge-Kutta of the third order of accuracy for the solution of Cauchy problem for ordinary differential equations, that are based on continued fractions, are constructed.

A characteristic feature of these algorithms is the fact that for certain values of the parameters it is possible to obtain both new and traditional numerical methods for the solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations.

Consider the Cauchy problem

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad , 0 \leq x \leq X, y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

where  $y(x)$  is a real  $m$ - component vector and  $f$ - a real vector function of a dependent and an independent variable; moreover, it is assumed that the function  $f$  is differentiable as many times as necessary for numerical analysis.

In the present article we propose approximate methods for the solution of problem (1) that are based on continued fractions. Without loss of generality, we will consider approximate formulas for determining the solution of problem (1) in the scalar case, inasmuch as they may be transferred component- wise to systems of equations.

An approximate solution at the point  $x_{n+1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , is to be found in the form

$$y_{n+1}^{[k, l]} = y_n / D_n, \quad (2)$$

where

$$D_n = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \frac{d_{k,0}}{1 + \frac{d_{k,1}}{1 + \dots + \frac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}}$$

The expressions for  $d_{k,l}$  in the case  $k + l = \overline{1,4}$  ( $k = \overline{1,4}; l = \overline{0,3}$ ) have the form

$$\begin{aligned}
 d_{0,0} &= 1, \quad d_{i,0} = - \sum_{m=1}^i d_{i-m,0} \frac{\delta_m}{\delta_0}, \quad i = \overline{1,4}, \quad d_{\nu,1} = - \frac{d_{\nu+1,0}}{d_{\nu,0}}, \nu = 1, 2, 3, \\
 d_{\mu,2} &= d_{\mu+1,1} - d_{\mu,1}, \quad \mu = 1, 2, \quad d_{\mu,2} = d_{\mu+1,1} - d_{\mu,1}, \quad \mu = 1, 2, \\
 d_{1,3} &= d_{2,1} \frac{d_{2,2}}{d_{1,2}}, \quad \sigma_0 = y_0 \neq 0, \quad \sigma_m = h \sum_{i=1}^q a_{mi} k_i, \quad (3) \\
 k_i &= f \left( x_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^q \beta_{ij} k_j \right), \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^q \beta_{ij}, \quad q = k + l.
 \end{aligned}$$

Here,  $h$  is the integration step ( $h = x_{n+1} - x_n, n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $a_{ij}, \alpha_i, \beta_{ij}; i, j = \overline{1,4}$  – are parameters.

By means of these formulas it is possible to obtain both explicit ( $\beta_{ij} = 0$  if  $i \leq j$ ) and implicit numerical methods.

The explicit embedded methods first to third order of accuracy are constructed. As an example, we wrote the three families of parameters for the method of third order of accuracy:

$$\begin{aligned}
 \text{I. } a_{11} &= 1 + \frac{2-3(\alpha_2+\alpha_3)}{6\alpha_2\alpha_3} - a_{33} \frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2} + a_{22} + a_{23}, \\
 a_{12} &= \frac{3\alpha_3 - 2}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)} + a_{33} \frac{\alpha_3}{\alpha_2} - a_{22}, \quad a_{13} = \frac{2 - 3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)} - a_{23} - a_{33}, \\
 a_{21} &= -(a_{22} + a_{23}), \quad a_{31} = a_{33} \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_2}, \quad a_{32} = -a_{33} \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad (4) \\
 \beta_{21} &= \alpha_2, \quad \beta_{32} = \frac{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)}, \quad \beta_{31} = \alpha_3 - \beta_{32},
 \end{aligned}$$

where  $\alpha_2\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2) \left(\alpha_2 - \frac{2}{3}\right) \neq 0$ ;  $a_{22}, a_{23}, a_{33}, \alpha_2, \alpha_3$  – parameters.

**II.** In the case if  $\alpha_2 = \alpha_3$ , we have:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{4} + a_{22} + a_{23}, \quad a_{12} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4\beta_{32}} - a_{22} + a_{33}, \quad a_{13} = \frac{1}{4\beta_{32}} - a_{23} - a_{33}, \\
 a_{21} &= -(a_{22} + a_{23}), \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = -a_{33}, \\
 \alpha_2 &= \alpha_3 = \frac{2}{3}, \quad \beta_{21} = \frac{2}{3}, \quad \beta_{31} = \frac{2}{3} - \beta_{32}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

where  $\beta_{32} \neq 0$ ;  $a_{22}, a_{23}, a_{33}$  – free parameters.

**III.** If  $\alpha_2 = \frac{2}{3}$  we have:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{\beta_{32}} \right) + a_{22} + a_{23} + a_{33}, \quad a_{12} = \frac{3}{4} - a_{22}, \\
 a_{13} &= \frac{1}{4\beta_{32}} - a_{23} - a_{33}, \quad a_{21} = -a_{22} - a_{23}, \quad a_{31} = -a_{33}, \quad a_{32} = 0, \quad (6) \\
 \alpha_2 &= \frac{2}{3}, \quad \beta_{21} = \frac{2}{3}, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_{31} = -\beta_{32},
 \end{aligned}$$

where  $a_{22}, a_{23}, a_{33}$  and  $\beta_{32} \neq 0$  – parameters.

Stability control of numerical methods. The maximum number of own Jacobi matrix system (1) can be calculated by the formula

$$V_n = \beta_{21} \max_{1 \leq i \leq N} \left[ \frac{\gamma_1 k_1^i + \gamma_2 k_2^i + \gamma_3 k_3^i}{k_2 - k_1} \right].$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta_{31} + \beta_{32} - \beta_{21}}{\beta_{21}^2 \beta_{32}}, \quad \gamma_2 = -\frac{\beta_{31} + \beta_{32}}{\beta_{21}^2 \beta_{32}}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{\beta_{21} \beta_{32}}.$$

Projected step calculated by the formula

$$h_{n+1} = \max [h_n, \min (h_a, h_s)],$$

where  $h_n$ – the last successful step of integration,  $h_a$ – a step for precision,  $h_s$ – step for stability.

This formula allows us to stabilize the behavior of the steps in the area of establishing solutions which plays a decisive role sustainability. Using the inequality for the stability control does not increase the computational cost, since the calculation of the maximum eigenvalue of the Jacobian matrix of the system (1) after a pre-calculated phase does not lead to an increase in the number of calls to the right side of the differential equation. Application stability control as a constraint on the growth of the integration step allows you to avoid the negative effects of estimation errors. In the field of establishment of stability by controlling the old errors tend to zero, and the new small because of the smallness of the derivatives of the solution.

УДК 517.94:519.62

## Критерій збіжності багатократних агрегативно-ітеративних алгоритмів

Петрович Р. Й., к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП

Гошко З. О., асист. каф. ОМП

Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

В [1] побудовані ітераційні алгоритми для лінійних рівнянь в скінченновимірному просторі, названі багатократними агрегативно-ітеративними алгоритмами. Ці методи досліджували Л.М.Дудкін, Е.Б.Єршов, Б.А.Щенніков, Л.А.Хіздер, І.М.Ляшенко, М.В.Калініна, В.Я.Стеценко, А.А.Бабаджанян. Одним з основних обмежень, які фігурують в цих роботах, є вимога про знакосталість компонент матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь та ряд інших обмежень, які у цих дослідженнях гарантують збіжність. Для систем лінійних рівнянь вигляду

$$x = Ax + b \quad (1)$$

де  $x, b \in R^N$ ,  $A$  матриця розміру  $N \times N$ , пропонувався ітераційний алгоритм

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a(y^{(n)} - y^{(n+1)}) + b, \quad (2)$$

$$y^{(n+1)} = (I - \Lambda + \alpha)^{-1}(-\Phi^T A_2 x^{(n)} + \alpha y^{(n)}), \quad (3)$$

де  $x^{(n)} \in R^N$ ,  $y^{(m)} \in R^m$ , ітераційні параметри  $\Lambda$ ,  $\alpha$  - матриці розміру  $m \times m$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  а - матриця розміру  $N \times m$ ,  $\Phi$  матриця розміру  $N \times m$ , і  $\Phi^T a + \alpha = \Lambda$ ,  $A_2 = A - \Psi \Lambda \Phi^T$ ,  $\Psi$  - матриця розміру  $N \times m$ ,  $\Phi^T \Psi = I$ ,  $I$  одинична матриця розміру  $m \times m$ . Для вибору початкових наближень було побудовано множину

$$\varepsilon_m = \{\{x, y\} | \Phi^T x + y = (I - \Lambda)^{-1} \Phi^T b, \quad x \in R^N, y \in R^m\}. \quad (4)$$

Запропонований в [1] критерій збіжності використовував інформацію про модулі власних значень матриці переходу методу. Отримано новий критерій збіжності, який легко перевіряється на практиці. На основі цього критерію запропоновано простий спосіб обчислення параметрів  $\Lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\Phi$  та  $\Psi$ , потрібних для побудови агрегативно-ітеративних алгоритмів (2)-(3).

- [1] Петрович Р. Й. Багатократний агрегативно-ітеративний алгоритм для систем лінійних алгебраїчних рівнянь // Вісник Державного університету "Львівська політехніка" N 299, сер. Прикладна математика, Львів, 1996. с.183-185.
- [2] Агрегаційно-ітеративні методи розв'язання операторних рівнянь: монографія / Богдан Антонович Шувар, Анатолій Феліксівич Обшта. — Львів: В-во Львівської політехніки, 2015.—432 с.



УДК 519.635.1

## Розробка програмного забезпечення для чисельного розв'язування крайових задач для бігармонічного рівняння

Петрук М. Е., студент каф. ПК

Ясько М. М., к.ф.-м.н., доц. каф. ПК

Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара  
(пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна)

Бігармонічне рівняння найчастіше зустрічається в теорії пружності та під час опису течії сильно в'язкої нестисливої рідини. Метою даної роботи є розробка програмного забезпечення для розв'язування крайових задач для бігармонічного рівняння яке можна вільно незалежно від платформи.

В процесі розв'язування бігармонічне рівняння було зведено до системи двох рівнянь в частинних похідних другого порядку, для яких був застосований метод граничних елементів [1]. Границя області апроксимувалася постійними граничними елементами. Коефіцієнти результуючої системи лінійних рівнянь обчислювалися аналітично. Розв'язування системи лінійних рівнянь з заповненою матрицею здійснювалося методом Гауса з вибором головного елемента.

Для підготовки вхідних даних була розроблена спеціальна мова яка дозволяла аналітично задати форму границі та крайові умови на ній. Приклад опису крайової задачі наведено в наступному лістингу:

```
Domain 2D Title Rounded triangle
N=80
Segment from (1,1) to (-1,1) elements N part 1
Explicit y=x*x from -1 to 0 elements N ratio 1/0.98 part 2
Explicit y=x**2 from 0 to 1 elements N ratio 0.98 part 2
Part 1 U=(x**4-y**4)/12.0 Un=(x*x*nx-y*y*ny)/3
Part 2 V=x**3 U=x+y
```

Програмне забезпечення що включає інтерпретатор, редактор тексту з підсвіткою синтаксиса та чисельний метод розв'язування було розроблено засобами сучасних Інтернет-технологій, HTML5, CSS2, SVG та JavaScript. Розроблене програмне забезпечення може функціонувати в будь-якому сучасному браузері.

- [1] *C. A. Brebbia, J. Dominguez* Boundary Elements: An Introductory Course. — WIT Press, 1994. — 322 p.

УДК 519.65

## Застосування обмінної теореми для апроксимації функцій ермітовими сплайнами

Пізюр Я. В., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Ермітові сплайни з нелінійними за параметрами виразами в ланках застосовують для підвищення точності апроксимації функцій та їх похідних, що описують фізичні процеси. Знаходження аналітичних виразів для параметрів ермітових сплайнів із складними нелінійними виразами в ланках певного виду за допомогою обмінної теореми можна звести до побудови многочленного ермітового сплайна. Визначення його параметрів відоме і є набагато простіше, бо зводиться до розв’язування СЛАР. Наведу формулювання цієї теореми.

**Теорема.** Нехай для функції  $f(x) = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]^\alpha$ ,  $\{f(x), u(x), v(x)\} \subset \mathbb{C}^n[a, b]$ ,  $u(x)v(x) \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in [a, b]$ . Тоді існує єдине наближення ермітовим сплайном з парною кількістю параметрів  $m + 1$  з вузлами  $\{x_k\}_{k=0}^r$  ( $x_k < x_{k+1}$ ) і ланками виду

$$B_k \varphi(x; \beta_{1k}, \dots, \beta_{mk}) \equiv B_k \varphi(x), \quad B_k \neq 0, \quad m = 2n + 1, \quad k = \overline{1, r}. \quad (1)$$

Тоді для функції  $u(x)$  на проміжку  $[a, b]$  з тими ж вузлами існує єдине наближення ермітовим сплайном з парною кількістю параметрів і ланками виду

$$v(x) [A_k \varphi(x; \alpha_{1k}, \dots, \alpha_{mk})]^\frac{1}{\alpha} \equiv v(x) [A_k \varphi(x)]^\frac{1}{\alpha}, \quad A_k \neq 0, \quad m = 2n + 1, \quad k = \overline{1, r}. \quad (2)$$

Нехай  $\Delta_k$  ( $k = \overline{1, r}$ ) найбільша відносна похибка наближення функції  $f(x)$  на проміжку  $[x_k, x_{k+1}]$  ермітовим сплайном з ланкою (1), а  $\delta_k$  ( $k = \overline{1, r}$ ) найбільша відносна похибка наближення функції  $u(x)$  на проміжку  $[x_k, x_{k+1}]$  ермітовим сплайном з ланкою (2). У цьому випадку між параметрами наближень мають місце співвідношення:

$$A_k = B_k, \quad \alpha_{ik} = \beta_{ik}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

$$\delta_k = 1 - (1 - \Delta_k)^\frac{1}{\alpha}, \quad k = \overline{1, r}. \quad (4)$$

Виходячи із наведеної теореми наближення функції  $u(x)$  ермітовим сплайном з ланкою виду  $v(x) \left[ A \sum_{j=1}^m a_j x^j \right]^\frac{1}{\alpha}$  зводиться до наближення функції  $f(x) = \left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]^\alpha$  ермітовим сплайном з ланкою  $B \sum_{j=1}^m \beta_j x^j$ , а параметри наближень та похибки співвідносяться між собою як це показують формули (3) і (4).

УДК 519.217

## Властивості генератора неперервного прихованого процесу Маркова

Семенюк С. А.<sup>1</sup>, к.ф.-м.н.Чабанюк Я. М.<sup>2</sup>, д.ф.-м.н., проф. каф. ПМ<sup>1</sup>Інститут інформаційних технологій "Інтеліас"  
(Україна)<sup>2</sup>Lublin University of Technology  
(Poland)

Приховані марковські моделі (ПММ) є одними з найбільш популярних методів у машинному навчанні і статистиці для моделювання послідовностей (наприклад послідовностей протеїнів чи мови). ПММ визначає розподіл ймовірностей по послідовності спостережень  $y = (y_1, \dots, y_t)$  що базуються на іншій послідовності невидимих, або прихованих, значень  $x = (x_1, \dots, x_t)$ . Основна ідея в тому, що послідовність прихованих значень має марковську динаміку.

Класична постановка моделі ПММ базується на припущенні, що послідовність спостережень базується на обмеженій кількості можливих прихованих станів. Тому природнім розширенням моделі є використання неперервних просторів.

Розглянемо такий прихований процес Маркова (ППМ) у вигляді двохкомпонентного процесу  $z(t) = (x(t), y(t))$ . Де процес станів  $x(t)$  є рівномірно ергодичним процесом Маркова [1] в стандартному фазовому просторі з генератором:

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) [\varphi(y) - \varphi(x)], \quad \varphi \in \mathbf{B}(X),$$

і процес спостережень задається умовними розподілами [2]:  $b(x, y) = p(y(t) = y | x(t) = x)$ .

Можна показати, що ППМ  $z(t)$  є марковским, більше того ергодичним і стаціонарним, якщо процес станів  $x(t)$  ергодичний і стаціонарний [3].

Для заданого ПММ будується генератор та доводиться його зведено-оборотність. Одержані результати дозволяються застосовувати неперервні ППМ при вивченні складних еволюційних моделей [1].

- [1] *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space. — World Scientific, 2005. — 331 p.
- [2] *Lawrence R., Rabiner A.* A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. — Proceedings of the IEEE, 77(2), 1989 — pp. 257-286.
- [3] *Leroux B. G.* Maximum-likelihood estimation for hidden Markov models. — Stochastic Processes and their Applications, 40, 1992. — pp. 127-143.

УДК 519.876.5

## Математичне моделювання емісії парникових газів при виробництві електроенергії в Польщі (2010–2013 роки) та аналіз одержаних результатів

Топилко П. І., к.т.н., асистент каф. ПМ

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

В останні роки спостерігаються негативні наслідки активної господарської діяльності людства у вигляді різкої зміни погодних умов, зatoryжних посух, танення льодовиків і т. д. Погіршення екологічної ситуації на планеті призводить до втрати значних фінансових ресурсів. Збільшення концентрації парникових газів в атмосфері планети спричиняє значну кількість екологічних проблем світового масштабу, зокрема підвищення середньорічної температури. Тому наукова світова спільнота спрямовує значні зусилля на дослідження негативного явища та вирішення даної проблеми.

Дослідники активно вивчають процеси емісії парникових газів, щоб проаналізувати природу походження цього явища та обґрунтувати шляхи виходу з проблеми. Останні наукові дослідження свідчать про актуальність проблематики, а результати демонструють, що значна частина емісій парникових газів утворюється в результаті спалювання викопного палива в енергетичному секторі, зокрема при виробництві електроенергії [1]. Науковці запропонували узагальнені моделі, які описують процеси емісій на глобальному та регіональному рівнях. Проте, такі підходи не можуть використовуватися для ідентифікації проблемних електрогенеруючих підприємств [2].

Основу електроенергетичної галузі Польщі складають підприємства, які в якості енергетичних ресурсів використовують викопне паливо, зокрема кам'яне та буре вугілля, рідше природний газ. Тому актуальними є задачі розроблення математичного та програмного інструментарію для моделювання процесів емісії парникових газів та аналізу отриманих результатів. Це, в свою чергу, дозволить сформулювати вагомні та обґрунтовані аргументи для підтримки прийняття відповідних рішень щодо зменшення кількості емісій. Представлене дослідження описує особливості математичного моделювання процесів емісії парникових газів при виробництві електроенергії в Польщі з врахуванням особливостей електроенергетичної галузі, здійснено обчислювальні експерименти та проаналізовано динаміку емісій за 2010–2013 роки. Результати моделювання є вагомим аргументом для відповідних владних структур Польщі та керівників електрогенеруючих підприємств.

- [1] *Lesiv M., Bun R., Shpak N., Danylo O., Topylko P.* Spatial analysis of GHG emissions in eastern polish regions: energy production and residential sector. — *Econtechmod.* — 2012. — Vol. 1, n. 2. — P. 17–23.
- [2] *Bun R., Hamal Kh., Gusti M., Bun A.* A Spatial GHG inventory on regional level: Accounting for uncertainty. — *Climatic Change.* Springer Netherlands. — 2010. — Vol. 103, Is. 1. — P. 227–244.

УДК 519.21

## Асимптотика генератора стрибкової оптимізації в марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації

Чабанюк Я. М.<sup>1</sup>, д.ф.-м.н., проф. каф. ПБОП,  
Горун П. П.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Львівський державний університет безпеки життєдіяльності  
(вул. Клепарівська, 35, м. Львів, 79000, Україна)

<sup>2</sup>ПП “Кадр”  
(вул. Коперника, 16, м. Львів, 79000, Україна)

Стрибкова процедура стохастичної оптимізації (ПСО) у схемі дифузійної апроксимації в марковському середовищі із сингулярним збуренням функції регресії задається співвідношенням (покладемо  $\sum_{n=0}^{-1} a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) = 0$ ) [1]:

$$u^\varepsilon(t) = u + \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon (\nabla_b C^\varepsilon(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} C_0(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon)), \quad u^\varepsilon(0) = u, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

в позначеннях [2]  $\nabla_b C(u; \cdot) = \{(C(u^+; \cdot) - C(u^-; \cdot))/2b(t)\}$ ,  $u^\pm = u(t)$ ,  $\gamma$  — показник нормування часу,  $\nu$  — лічильний процес моментів відновлення марковського процесу (МП)  $\tau_n$ ,  $x_n = x(\tau_n)$ ,  $n \geq 0$  — вкладений ланцюг Маркова у рівномірно ергодичний МП  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  у стандартному фазовому просторі станів  $(X, \mathcal{X})$  з генератором  $Q$  [3] та потенціалом  $R_0$ . Функція регресії  $C(u; x)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $x \in X$ , задовільняє умови існування глобального розв’язку супроводжуваних систем:

$$du_x(t)/dt = \nabla_b C^\varepsilon(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} C_0(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon), \quad x \in X$$

в припущенні існування та єдиності точки екстремуму  $u^*$ . В ПСО (1) мають місце вкладеності:  $u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon)$ ,  $x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon)$ ,  $a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon)$ ,  $\tau_n^\varepsilon = \tau_n/\varepsilon^{1/\gamma}$ ,  $n \geq 0$ .

Для узагальнення отриманих результатів розглянуто такі керуючі функції:

$$a(t) = a/t^\alpha, \quad a > 0, \quad b(t) = b/t^\beta, \quad b > 0,$$

де  $\alpha$ ,  $\beta$  такі, що забезпечують умови збіжності ПСО (1) (див. [4, Теорема 1]):  
 $\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty$ ,  $\sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty$ ,  $\sum_{t=0}^{\infty} a(t)b(t) < \infty$ .

Під збіжністю стрибкової ПСО (1) мається на увазі збіжність з ймовірністю 1 до точки рівноваги  $u^*$  (не зменшуючи загальності, вважатимемо, що  $u^* = 0$ ) усередненої системи  $du(t)/dt = C'(u(t))$ ,  $C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u; x)$ .

Нормована ПСО (1) має вигляд  $v^\varepsilon(t) = t^\gamma (u^\varepsilon(t)/\varepsilon - C_0^\varepsilon(t))$ , де  $C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2} \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon C_0(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon)$ . Розглянемо *трьохкомпонентний* МП

$$(v^\varepsilon(t), C_0^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon = x(t/\varepsilon^{1/\gamma}), t \geq 0). \quad (2)$$

Покладемо  $\alpha = 1, \gamma = 1/4$  (класичний випадок). Нехай виконуються умови балансу для функції регресії  $C(u; x)$  та збурення  $C_0(u; x)$  відповідно  $\tilde{\Pi}C_0(0; x) = 0, \tilde{\Pi}C'(0, x) = 0$ , де  $\tilde{\Pi}$  — проектор, що визначається стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова  $x_n, n \geq 0$ , тобто  $\tilde{\Pi}\varphi(x) = \int_X \rho(dx)\varphi(x)$ .

**Лема.** Генератор МП (2) на тест-функціях  $\varphi(v; w) \in C^{1,2}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  має асимптотичне представлення:

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(v; w; x) = [\varepsilon^{-4}Q + \frac{\varepsilon^{-2}}{t}q(x)Q_1(x)\mathbf{P} + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}}q(x)Q_2(x)\mathbf{P} + t^{-1}q(x)Q_3(x)\mathbf{P} + \theta_t^\varepsilon(x)Q_0]\varphi(v; w; x),$$

$$\begin{aligned} \text{де } Q_1(x)\varphi(v; w; x) &= aC_0(0; x)\varphi'_w; \\ Q_2(x)\varphi(v; w; x) &= a \left( C'(0; x)\varphi'_v + \frac{v + t^{1/4}w}{t^{2/4}}C'_0(0; x)\varphi'_w \right); \\ Q_3(x)\varphi(v; w; x) &= a[(v + t^{1/4}w)C''(0; x)\varphi'_v + \frac{(v + t^{1/4}w)^2}{2t^{2/4}}C''_0(0; x)\varphi'_w] + \\ &\quad + \frac{v}{4}\varphi'_v + \frac{a^2}{2t}C_0^2(0; x)\varphi''_w; \\ Q_0\varphi(x) &= q(x) \int_X P(x, dy)\varphi(y), \end{aligned}$$

а залишковий член  $\theta_t^\varepsilon(x)Q_0$  такий, що  $\|\theta_t^\varepsilon(\cdot)Q_0\varphi(v; w; \cdot)\| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

- [1] Горун П.П. Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі / Горун П.П., Чабанюк Я.М., Кукурба В.Р. //XVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties"(PDMU-2010, October 4-8, 2010). Київ: Освіта України. – С. 54.
- [2] Горун П.П. Збіжність дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації. /Горун П.П. Чабанюк Я.М., Семенюк С.А. //Тези доповідей V Міжнар. наук. конференції ОРТІМА-2012: “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації”. Кам’янець-Подільський, 2012. – С. 27-28.
- [3] Korolyuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space /Korolyuk V., Limnios N. – World Scientific Publishing, 2005. – 330 p.
- [4] Я.М. Чабанюк. Збіжність дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації / Я.М. Чабанюк, П.П. Горун //Збірник наукових праць інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України та Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Серія: Фізико-математичні науки, 2012. – №6. – С.234-248.

УДК 519.715

## One generator of random evolution in small diffusion scheme

**Chabanyuk Ya. M.**<sup>1</sup>, prof. Fundamentals of Technology Faculty

**Khimka U. T.**<sup>2</sup>, Phd., Department of Computational Mathematics and Programming

**Budz I. S.**<sup>2</sup>, Phd., Department of Computational Mathematics and Programming

<sup>1</sup> Lublin University of Technology  
(Nadbystrzycka 38 D, Lublin, Poland, 20 – 618)

<sup>2</sup> Lviv Polytechnic National University  
(12 Bandera street, Lviv, Ukraine, 79013)

Consider random evolution with diffusion perturbation defined by stochastic differential equation[1,2]

$$\frac{du^{\varepsilon,\delta}(t)}{dt} = C(u^{\varepsilon,\delta}(t); x(t/\varepsilon^3)) + (\varepsilon^{-1} + \delta^{-1})C_0(x(t/\varepsilon^3)), \quad (1)$$

where  $u^{\varepsilon,\delta}(t) \in R^d, t \geq 0$ , – random evolution [1];  $C_0(x)$  – singular perturbation of regression function  $C(u; x) \in C^2(R^d)$ ;  $x(t)$  – Markov process in phase space of states  $(X, \mathbf{X})$  with stationary distribution  $\pi(B), B \in \mathbf{X}$  [1,2].

Generator of the Markov process  $x(t)$  is given by relation

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X Q(x, dy)[\varphi(y) - \varphi(x)], \varphi \in \mathbf{B}, \quad (2)$$

where  $\mathbf{B}$  – Banach space of real bounded functions  $\varphi$  with supremum norm

$$\|\varphi(x)\| := \sup_{x \in X} |\varphi(x)|.$$

For the generator  $\mathbf{Q}$  potential  $\mathbf{R}_0 = \Pi - [Q + \Pi]^{-1}$  is determined, where  $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)$  - projector on the space of zeroes of the operator  $\mathbf{Q}$ :  $N_{\mathbf{Q}} = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ .

Limited evolution has a representation

$$du(t) = C(u(t))dt + \sqrt{\delta}\sigma dw(t),$$

where

$$C(u) = \int_X \pi(dx)C(u; x).$$

For limited diffusion  $\sigma$  relation  $B = \sigma^T \sigma$ , where

$$B = 2 \int_X \pi(dx)C_0(x)\mathbf{R}_0 C_0(x).$$

Balance condition holds

$$\int_X \pi(dx)C_0(x) = 0.$$

The random evolution (1) is defined by the generator

$$\mathbf{L}^{\varepsilon, \delta}(x)\varphi(u, x) = [\varepsilon^{-3}\mathbf{Q} + (\varepsilon^{-1} + \delta^{-1})\mathbf{C}_0(x) + \mathbf{C}(x)]\varphi(u, x),$$

where  $\mathbf{C}_0(x)\varphi(u) = C_0(x)\varphi'(u)$ ,  $\mathbf{C}(x)\varphi(u) = C(u; x)\varphi'(u)$ .

**Лема 3.** *Solution of singular perturbation problem [2] for generator  $\mathbf{L}^{\varepsilon, \delta}(x)$  on perturbed test-function*

$$\varphi^{\varepsilon, \delta}(u; x) = \varphi(u) + (\varepsilon + \delta)\varphi_1(u; x) + \varepsilon^3\varphi_2(u; x),$$

where  $\frac{\varepsilon}{\delta} \rightarrow 1, \varepsilon \rightarrow 0$ , has form

$$\mathbf{L}^{\varepsilon, \delta}(x)\varphi^{\varepsilon, \delta}(u; x) = \mathbf{L}^\delta\varphi(u) + \theta_L^{\varepsilon, \delta}(x)\varphi(u),$$

where limited generator  $\mathbf{L}^\delta$  is determined from relation

$$\mathbf{L}^\delta = \Pi\mathbf{C}(x)\Pi + \delta\Pi\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x)\Pi$$

and residual term  $\theta_L^{\varepsilon, \delta}(x)\varphi(u)$  is defined by the ratio

$$\sup_{x \in X} \theta_L^{\varepsilon, \delta}(x)\varphi(u) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

The result got in the article allows to consider asymptotic presentation of exponential generator

$$\mathbf{H}^\delta\varphi^\delta(u) \rightarrow \mathbf{H}\varphi(u), \varphi^\delta(u) \rightarrow \varphi(u),$$

in the chart of cerouss with a small parameter  $\delta \rightarrow 0$ .

- [1] *V. Koroliuk and N. Limnios* Stochastic Systems in Merging Phase Space. World Scientific Publishing, 2005, — 330 p.
- [2] *O.I.Kiykovska*. Random evolution in a scheme of asymptotically small diffusion with markov switchings / O.I.Kiykovska, Ya.M.Chabanyuk // Cybernetics and Systems Analysis. — 2013. — V. 49, №2. — P. 303-308.



УДК 519.681.5

## Проблема реалізації деяких алгоритмів цифрової фільтрації на багатоядерних обчислювальних системах

Яджак М. С.<sup>1,2</sup>, д.ф.-м.н., с.н.с., пров.н.с.

Федьковський П. О.<sup>2</sup>, спеціаліст

Бекас Б. О.<sup>3</sup>, ст. викладач

<sup>1</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України

(вул. Наукова, 3-Б, м. Львів, 79060, Україна)

<sup>2</sup>Національний університет “Львівська політехніка”

(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

<sup>3</sup>Національний лісотехнічний університет України

(вул. Ген. Чупринки, 103, м. Львів, 79057, Україна)

Зараз швидкодія обчислювальних систем зростає переважно завдяки тотальному використанню паралелізму на різних рівнях [1]. Найпоширенішими та широко доступними високопродуктивними системами є багатоядерні комп'ютери та кластери [2]. Тому під час розробки паралельних алгоритмів обчислень потрібно орієнтувати їх на реалізацію саме на таких обчислювальних засобах.

У роботі розглядаються задачі цифрової фільтрації (ЗЦФ) різної вимірності. У нашому формулюванні ЗЦФ полягає у виконанні  $C$  переобчислень згладжування деякого масиву значень  $N$  змінних через рухоме вікно розміром  $M$ . У більшості випадків [3] задачі фільтрації потрібно розв'язувати у режимі реального часу, тому з цією метою необхідно розробляти ефективні паралельні алгоритми.

Стандартний послідовний алгоритм розв'язання розглядуваної нами одновимірної ЗЦФ має вигляд:

$$\begin{aligned} &FOR\ j = 1, C\ DO \\ &\quad FOR\ i = 1, N\ DO \\ &\quad\quad \{ p = 0 \\ &\quad\quad\quad FOR\ s = -m, m\ DO \\ &\quad\quad\quad\quad p = p + x(i + s) \cdot f(s) \\ &\quad\quad\quad\quad x(i) = p \}. \end{aligned}$$

Тут  $x(i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  — масив переобчислюваних значень змінних, а  $f(s)$ ,  $s = -m, \dots, m$  — масив вагових коефіцієнтів. У даному разі  $M = 2m + 1$ .

З наведеного послідовного алгоритму випливає, що для переобчислення значень змінної  $x(i)$  на  $j$ -му кроці беруться значення  $x(i - m)$ ,  $x(i - m + 1)$ , ...,  $x(i - 1)$ , які є вже переобчисленими на цьому ж кроці. Для розв'язання одновимірної ЗЦФ пропонується алгоритм з обмеженим паралелізмом, який реалізує асин-

хронну схему обчислень:

$$\begin{aligned}
 &FOR\ j = 1, C\ DO \\
 &\quad FOR\ r = 1, P\ DO\ CONC \\
 &\quad\quad FOR\ i = I(r), J(r)\ DO \\
 &\quad\quad\quad \{ p(i) = 0 \\
 &\quad\quad\quad\quad FOR\ s = -m, m\ DO \\
 &\quad\quad\quad\quad\quad p(i) = p(i) + x(i + s) \cdot f(s) \\
 &\quad\quad\quad\quad\quad x(i) = p(i) \}.
 \end{aligned}$$

Тут  $I(r) = 1 + N(r - 1)/P$ ,  $J(r) = Nr/P$ , а *CONC* — це тип паралельності, що визначає незалежне виконання  $P$  ( $1 < P < N$ ) гілок із взаємодією через спільну пам'ять. Для простоти  $N$  вибираємо кратним до  $P$ . У кожній паралельній гілці відбувається переобчислення значень  $N/P$  змінних.

Аналогічно будується алгоритм з обмеженим паралелізмом для розв'язання двовимірної ЗЦФ, який реалізує асинхронну схему обчислень.

Запропоновані паралельні алгоритми були реалізовані мовою *C* з використанням бібліотеки паралельних завдань (TPL) [4]. При цьому здійснювалась фільтрація зашумлених одновимірних сигналів (гармонічного, широкого прямокутного імпульса та пиловидного), а також відновлювалось бінарне зображення, спотворене імпульсними завадами. Вагові коефіцієнти вибирались за формулами Даніеля, Бартлета, Хемінга та випадковим підбором.

Було розглянуто цілу низку варіантів розв'язання одно- та двовимірної ЗЦФ за різних значень параметрів  $N$ ,  $M$  та  $C$  на багатоядерних системах трьох типів: 2 ядра—2 потоки, 2 ядра—4 потоки, 4 ядра—4 потоки. Для кожного варіанту розв'язання задачі фільтрації на кожній з цих систем фіксувався реальний час спрацювання відповідного алгоритму з обмеженим паралелізмом.

Встановлено, що унаслідок реалізації паралельних алгоритмів фільтрації на двоядерній системі із організацією 4-х потоків порівняно з реалізацією їх на двоядерній системі з організацією 2-х потоків одержуємо незначне прискорення (в 1,03—1,32 рази). Однак, реалізація згаданих алгоритмів на чотирьохядерній системі із організацією 4-х потоків порівняно з їх реалізацією на двоядерній системі дає більш суттєве прискорення обчислень (в 1,23—1,92 рази).

- [1] [www.parallel.ru](http://www.parallel.ru).
- [2] [www.top500.org](http://www.top500.org).
- [3] Яджак М. С., Тютюнник М. И. Оптимальный алгоритм решения задачи цифровой фильтрации с использованием адаптивного сглаживания // Кибернетика и системный анализ. — 2013. — № 3. — С. 142 — 151.
- [4] Toub S. Patterns of Parallel Programming. — Microsoft Corporation, 2010. — 118 p.

# ФІЗИКА, ХІМІЯ

УДК PACS:63.22Nr:84.37+q,63.20-e

## Кінетичні та термодинамічні властивості інтеркальованого нікелем InSe

Григорчак І. І.<sup>1</sup>, д.т.н., проф. зав.каф. ПМ  
Крушельницька Т. Д.<sup>1</sup>, к.ф.м.-н., доц. каф. ПМ  
Каркульовська М. С.<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., доц. каф. Ф  
Товстюк Н. К.<sup>1</sup>, д.ф.-м.н., проф. каф. Ф  
Сиркін Є. С.<sup>2</sup>, д.ф.м.-н., проф. від. ТФ  
Феодосьев С. Б.<sup>2</sup>, д.ф.-м.н., пров. н. спів. від. ТФ  
Середюк Б. О.<sup>3</sup>, к.ф.-м.н., доц. каф. ЕМЕ

<sup>1</sup>Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

<sup>2</sup>Фізико-технічний інститут низьких температур імені Б.І.Веркіна НАН України  
(пр. Леніна, 47, м. Харків, 61103, Україна)

<sup>3</sup>Національна академія сухопутних військ ім. П. Сагайдачного  
(вул. Героїв Майдану, 32, Львів, 79012, Україна)

Вивчається інтеркаляція матеріалів – “господарів” складної молекулярної структури (не менше як з чотириатомними площинами в шарі) і їх напівпровідникових фаз магнітоактивними компонентами. Фактична зацікавленість наноструктурами з почерговими напівпровідниковими та магнітоактивними напрошарками значно ширша – наприклад, це і спінові конденсатори і магнетоелектрети, а також їх застосування в унікальних пристроях аналізу і опрацювання сигналів. У більш далекій перспективі знаходиться квантова когерентна спітроніка. А тому комплексні дослідження таких структур відкривають додаткові можливості виявлення цікавих явищ і ефектів, які змогли б призвести до нових напрямків їх практичного застосування. Цим питанням і присвячена дана робота.

Рентгенофазовий аналіз сполук інтеркалювання  $\text{Ni}_x\text{InSe}$  ( $x=0; 0,25; 0,5; 0,75; 1,0; 1,25, \dots, 10$  ат.) [1, 2] показав, що отриманий матеріал є гомогенним. Фаз заміщення сполук селенідів нікелю, а також вільного нікелю виявлено не було. Відсутність дифракційних максимумів, які відповідають металічному нікелю, відображає пріоритетний вплив одного із основних структуроутворюючих факторів - деформаційних полів, зумовлених зокрема, неузгодженістю постійної ґратки матриці і шару інтеркалянта, яка сприяє утворенню дискретних наноострівців з “гостьового” компоненту, їх репродукції з утворенням фрактальних сіток, тощо. Таким чином, атоми нікелю, які з певною імовірністю могли увійти в ковалентні шари  $\text{Se} - \text{In} - \text{In} - \text{Se}$ , при переході кристалу до рівноважного стану випадають у міжшаровий простір. Концентраційна залежність параметра ґратки  $c$  – немонотонна функція концентрації інтеркалянта, в той час як параметри  $a$ ,  $b$  залишаються незмінними.

Частотні залежності дійсної складової комплексного імпедансу досліджуваних структур показали, що для усіх значень  $x$ , крім  $x=1,25$ , комплексна складова імпедансу є оберненою функцією до зміни параметра ґратки вздовж кристалграфічної осі  $C$ . Враховуючи суттєве зменшення останнього, такий ефект може бути пов’язаний з формуванням квазімолекул шляхом утворення зв’язків між блоками  $\text{Se-In-In-Se}$  через впроваджені іони нікелю [2]. З метою деталізації

механізмів струмопроходження в синтезованих інтеркалатах побудовано діаграми Найквіста – залежності уявної складової комплексного імпедансу від його реальної. Для вихідної матриці вона має однодуговий характер, що відображає ємнісний відгук локалізованих станів і власне частотозалежний імпеданс, вказуючи на вклад у загальну провідність перескоків носіїв заряду по локалізованих станах, або їх збудження в хвості густини станів чи в делокалізовані зони. Після інтеркалювання він в залежності від розподіленості і співвідношення часів релаксацій трансформується або до однодугового виду але синтетичної структури, або до яскраво вираженого дво- чи три- дугового характеру. Це свідчить про модифікацію енергетичного рельєфу вихідної матриці селеніду індію бар'єрами, наведеними гостьовим нікелем. Але найнеординарнішим фактом виявилися деформації низькочастотних віток  $\chi(\omega)$  для  $\chi=0,25$  і  $\chi=0,75$ , при яких  $\chi(\omega)$  має абсолютні максимуми, що може бути пов'язано з індуктивним відгуком кристалу. Найцікавішим є те, що при сильних деформаціях  $\chi(\omega)$  для  $\chi=0,75$  низькочастотна вітка діаграми Найквіста переходить у IV – індуктивний квадрант комплексної імпедансної площини. За найбільш загальним механізмом, індуктивна поведінка виникає навіть тоді коли заряд вводиться в шари малих або надмалих розмірів, тобто, діапазону декількох нанометрів. Тому досліджено і термодинамічні властивості  $\text{InSe}<\text{Ni}_x>$ . При низьких температурах з вимірювань питомої теплоємності слідує відсутність лінійного вкладу  $C$ . Це означає, що досліджуваний зразок з  $\chi=1$  в цій області температур мабуть є ізолятором, чи принаймні напівпровідником з дуже низькою концентрацією носіїв струму. Температура Дебая, отримана з вимірювань теплоємності, повинна корелювати з жорсткістю ґратки. Так, наприклад, при збільшенні параметра ґратки  $C$  при рості  $\chi$  від 0, 25 до 1, яке може бути викликане ростом Ni-Ni взаємодії у ван-дер-ваальсових проміжках і, як наслідок, зменшення стягування шарів, повинно би виразитися в зменшенні температури Дебая. Найцікавішим є те, що при найнижчих температурах  $C$  пропорційне не  $T^3$ , а  $T^{3,2}$ .

Для пояснення експерименту теплоємність описується квазі-феноменологічно описуючи теплоємність в модифікованому Дебаївському наближенні [3]. Причина відхилення  $C$  від дебаївської пояснюється вкладом локалізованих станів, зумовлених гальмуванням акустичних фононів на частоті першої особливості ван Хофа.

- [1] Baran A. et. al., *Low Temperature Physics* **LTP41**, 1191(2015)
- [2] Stakhira Yu. et. al., *Semiconductors* **em Semiconductors45**, 1258(2011)
- [3] Gospodarev A. et. al., *Low Temperature Physics* **LTP34**, 655 (2008).

УДК 66.084+541.182; 628.1; 658.265

## An influence of the system of [sodium bicarbonate – acetic acid] on the microbial viability

Koval I., PhD, department of general chemistry

Lviv Polytechnic National University

(S. Bandera str., 12, Lviv, 79013, Ukraine)

Theme of these studies was to investigate the viability of microorganisms (MO) under gas atmosphere. But gas, means carbon dioxide, wasn't bubbled into the microbial dispersion but extracted from created system. It can help to explained mechanism of cavitation effect at the gas bubbling during water disinfection.

The objects of these investigations were sporogenous bacteria of *Bacillus* type on the different stages of cells development. Cultural features of *Bacillus* is presented in [1].

To study the effect of *pH* of the system on the viability of microorganisms during  $CO_2$  bubbling, carbon dioxide was extracted from the system [sodium bicarbonate – acetic acid]. The system selected in such a way that the value of  $pH_{final}$  of the water system was at least 6. The increase of concentration of sodium bicarbonate in the system to  $16g/dm^3$  did not caused significant death of MO during 1 hour, while adding to the system an acetic acid and release of  $CO_2$  bubbles led to a significant reduction of MO amounts.

Since the main mechanism of the destructive action of cavitation on MO is the formation of microbubbles of gas, released from a solution, it was important to investigate the effect of the volume of released gas from a solution on microbial viability. It was found that the effective dying of microbial cells is observed at an increase of the gas volume in microbubbles approximately in 2 times. The increase of the number of sporogenous bacillary cells to the number of asporogenous, reduces the impact of released  $CO_2$  volume on their viability. That is, if more than 95% of sporogenous *Bacillus* are present, carbon dioxide virtually has no effect on their viability, even at the pressure of **500 kPa**, while in the early stages of development (before the sporogenesis) bacillus are almost completely died at a  $CO_2$  pressure above the system equal to **50 kPa**.

- [1] Koval I., Shevchuk L. Cultural features of microorganisms. — Lviv Polytechnic Publishing House, Lviv, 2015. — P.372–373.

УДК 371.3

## Впровадження тестового контролю в курсі "Хімія"

Криховець О. В., к.х.н., доц.

Українська академія друкарства

(вул. Підголюско, 19, м. Львів, 79020, Україна)

В сучасних умовах розвитку суспільства головним завданням вищої школи є не тільки підготовка висококваліфікованого спеціаліста, але і формування ерудованої, вільної і відповідальної особистості, що поєднує в собі професійну компетентність, постійну потребу у самоосвіті з громадянською відповідальністю. Це вимагає відходу від системи простої передачі студентам суми знань та умінь. Сьогодні вимагає пошуку нових шляхів підвищення якості професійної підготовки, зокрема удосконалення методів контролю навчальних досягнень.

Тестовий контроль є сучасним ефективним методом контролю якості знань студентів. В. Аванесов уважає, що тест — науково обґрунтований метод вимірювання досліджуваних особливостей особистості. Педагогічний тест являє собою сукупність взаємопов'язаних завдань зростаючої складності та специфічної форми, що дозволяє якісно оцінити структуру й виміряти рівень знань [1].

Метою наших досліджень було встановлення особливостей впровадження тестового контролю з дисципліни "Хімія". Об'єктом дослідження вибрано навчально-виховний процес на інженерному факультеті УАД. Предмет дослідження — процес контролю за навчальними досягненнями студентів за допомогою методів тестування.

Найповніша класифікація тестів подана у роботах І.Є.Булах [2]. Тут класифікуються тести за:

1. формою тестування: групові та індивідуальні;
2. призначенням: тести знань та навичок, інтелекту, інтересів, спеціальних здібностей, особистості, психічних функцій;
3. психологічною ознакою: досягнень, розвитку, інтелекту, загальних результатів, успішності, соціальні, психометричні;
4. видом контролю: вхідного, поточного, рубіжного, модульного, заключного;
5. формою тестового завдання: відкритого, напіввідкритого і закритого типу;
6. гомогенністю тестових завдань: однорідні і неоднорідні;
7. технічними засобами: безмашинні, з комп'ютерною обробкою результатів, комп'ютерні.

Ми використовували групові тести на визначення знань та навичок, загальних результатів успішності, закритого і відкритого типу, безмашинні, гомогенні та гетерогенні за складністю. Нами розроблено тести для різного виду контролю:

1. вхідного контролю – використовуються для визначення вхідного рівня знань з дисципліни (містять 10-15 тестів);
2. модульного контролю – використовуються на підсумкових заняттях за модулями (містять 15-25 тестів);
3. проміжного контролю – використовуються при тематичних перевірках (містять 5-10 тестових завдань).

Основна кількість завдань складена у вигляді тестів множинного вибору. Завдання в тестах вхідного і модульного контролю розміщені в порядку зростання їх складності, що дозволяє студентам оптимально використовувати час. Тести модульного контролю поділені за складністю на дві групи. Для тестів I рівня складності мотивування відповідей не наводяться, на їх вирішення відводиться до 1 хвилини і оцінюється в 2 бали. Завдання тестів II рівня складності потребують розгорнутої обгрунтованої відповіді, оскільки містять задачі та рівняння реакцій. На їх вирішення відводиться 4-5 хвилин, оцінюються в 5 балів. Наявність еталонів відповідей усуває суб'єктивний фактор при оцінюванні знань, сприяє експресності методу. Тести для проміжного тематичного контролю потребують обгрунтування та розрахунків, вимагають крім теоретичних знань вміння практичного застосування. Аналіз таких робіт дає можливість вказати студентам на помилки у розв'язанні задач та прогалини у навчальному матеріалі, проблемні питання додатково розглянути на практичних заняттях та консультаціях.

Результатом впровадження тестування у різних видах контролю є підвищення рівня знань студентів. Експресність тестового контролю дозволяє проводити його систематично. Відсутність суб'єктивності сприяє позитивному ставленню студентів до тестового контролю знань. Практична напруженість завдань посилює самоконтроль та мотивацію студентів до навчання. У навчальному процесі тестовий контроль знань студентів варто поєднувати з іншими формами та методами контролю.

- [1] *Аванесов В. С.* Аванесов В. С. Методологическое и теоретическое обоснование тестового педагогического контроля: дис. на соискание учёной степени доктора пед. наук. — С.Пб.: Госуниверситет, 1994. — С. 205–214.
- [2] *Булах І.,Є.* Теорія і методика комп'ютерного тестування успішності навчання (на матеріалах медичних навчальних закладів): дис. доктора пед. наук: 13.00.01/Київський національний університет імені Т.Г. Шевченка. К., 1995. — 430 с.



УДК 621.315.592

## Рухливість електронів у CdS і CdTe

Малик О. П., к.т.н., доц. каф. НПЕ

Петрусь Р. Ю., к.ф.-м.н., с.н.с. каф. ЗФ

Родич В. М., аспірант каф. ЗФ

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Численними дослідженнями протягом останніх десятиліть доведено, що структура CdS/CdTe є перспективним елементом тонкоплівкових сонячних модулів (CdTe виконує функцію поглинаючого шару, CdS – другий компонент гетеропари – служить вікном для ефективного введення випромінювання). Для фотовольтаїчних структур CdS/CdTe малої площі ( $\sim 1 \text{ см}^2$ ) досягнута ефективність перетворення сонячної енергії в електричну 16,5 %, а для модулів великої площі ( $\sim 1400 \text{ см}^2$ ) – 10,5 %. також телурид кадмію застосовують як основний матеріал при виготовленні детекторів радіації. Телурид кадмію застосовують як матеріал при виготовленні детекторів радіації. Подальший прогрес в розробленні приладів, створених на основі цих матеріалів, вимагає детального моделювання фізичних параметрів цього матеріалу. Одним з таких параметрів є рухливість носіїв заряду.

До теперішнього часу розсіяння носіїв заряду в цих матеріалах проводилось на основі далеко діючих моделей розсіяння (наближення часу релаксації). Однак, таке припущення містить наступні протиріччя: а) воно суперечить спеціальній теорії відносності, згідно якої носій взаємодіє тільки з сусідніми областями кристалу; б) воно суперечить атомістичному принципу, згідно з яким носій взаємодіє (віддає енергію) тільки з одним атомом, а не з багатьма атомами одночасно. З іншого боку, в роботах [1–3] запропоновані близькодійючі моделі розсіяння носіїв заряду в сполуках  $A^{II}B^{VI}$  і  $A^{III}B^V$ , в яких вище вказані недоліки були відсутні. При цьому припускалося, що носій взаємодіє з потенціалом дефекту тільки в межах однієї елементарної комірки. Метою роботи було застосування цього підходу для опису процесів розсіяння електронів на різних типах дефектів кристалічної ґратки в CdTe і CdS.

Розглядалися процеси розсіяння електронів на близькодійючому потенціалі викликаному взаємодією з полярним оптичним, неполярним оптичним, п'єзооптичним, п'єзоакустичним, акустичним фононами, іонізованою домішкою та потенціалом статичної деформації в зразках CdTe з концентрацією  $Cl$  ( $\sim 5 \cdot 10^{16} \div 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ) та CdS з концентрацією власних дефектів (ваканції  $S$ ) ( $\sim 5,5 \cdot 10^{15} \div 2,77 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ ). Для розрахунку компонент тензора провідності використовували точний розв'язок стаціонарного рівняння Больцмана, в якому не рівноважна частина функції розподілу електронів шукалася у вигляді розкладу в ряд по степенях енергії. Розраховано температурну залежність рухливості в інтервалі  $25 \div 590 \text{ K}$  для CdTe і  $10 \div 400 \text{ K}$  для CdS. У всьому розглянутому інтервалі температур близькодійючі моделі розсіяння дають достатньо добре узгодження теорії та експерименту, тоді як наближення часу релаксації дає значне відхилення теорії від експерименту.

З врахуванням отриманих параметрів розсіяння була розрахована температурна залежність Холл-фактору електронів, з якої видно, що відбувається пере-

хід від одного механізму розсіяння за низьких температур (розсіяння на потенціалі статичної деформації) до іншого механізму за високих температур (розсіяння на полярно оптичних фононах). Цей перехід спостерігається при тим вищій температурі, чим більша концентрація центрів статичної деформації. На основі принципу близькодії розглянуто процеси розсіяння електронів на різного типу дефектах ґратки в кристалах CdTe і CdS. Встановлено достатньо добру узгодженість теорії та експериментальних даних у дослідженому інтервалі температур. Показано, що близькодючі моделі більш адекватно описують процеси розсіяння електронів у порівнянні з далекодіючими моделями в наближенні часу релаксації.

- [1] *O. P. Malyk* Physica B:Condensed Matter. 2009. 404. 5022-5024.
- [2] *O. P. Malyk* Diamond Relat. Mater. 2012. 23. 23-27
- [3] *O. P. Malyk* Can. J. Phys. 2014. 92. 1372-1379

УДК 541.4.+ 546.7: 543.42

## Вивчення процесу термолізу складних комплексних сполук

Олійник Л. П., к.х.н., доц. каф. ЗХ

Національний університет “Львівська політехніка”  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Методом диференціально – термічного аналізу вивчені процеси термічних перетворень нітрозопентаціанідів заліза (II) з складними етилендіамінвмісними катіонами  $d$ - металу. Наведено схеми розкладу вказаних комплексів та подано їх дериватограми.

Дериватограми знімали на приладі ОД-103 в інтервалі 20–800<sup>0</sup>С в атмосфері аргону з мінімальною швидкістю зростання температур 5 град/хв. Наважка сполук складала 100мг. ДТГ1/10, ДТА 1/10.

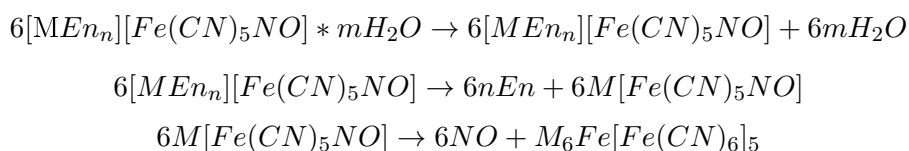
Встановлено, що термічна стійкість і характер термолізу комплексів  $[M(En)_n][Fe(CN)_5NO] * mH_2O$ ,  $M - Co^{2+}, Ni^{2+}, Cu^{2+}, Zn^{2+}, Mn^{2+}$ ,  $n = 2, 3$ ;  $m = 1 - 5$  залежить від способу координації і взаємного розміщення лігандів в координаційній сфері.

Досліджено, що термоліз синтезованих сполук може протікати в декілька стадій. Перша стадія – процес дегідратації. Кристалізаційна вода зв'язана з комплексом відносно слабо і тому при нагріванні виділяється першою. в області температур 40 – 160<sup>0</sup>С, що відповідає відщепленню молекул кристалізаційної води. Для комплексу  $[CuEn_2][Fe(CN)_5NO] * 3H_2O$  при температурі 160<sup>0</sup>С відповідає виділенню одночасно трьох молей кристалізаційної води.

Для  $[MnEn_2][Fe(CN)_5NO] * 3H_2O$  в цій же області низьких температур спостерігається глибокий ендоефект для  $[NiEn_3][Fe(CN)_5NO] * 5H_2O$  в інтервалі 40 – 180<sup>0</sup>С для  $[ZnEn_2][Fe(CN)_5NO] * 3H_2O - 40 - 140^0C$ .

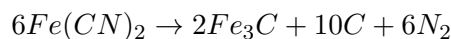
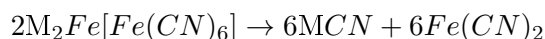
Таким чином сполуки  $[M(En)_n][Fe(CN)_5NO] * mH_2O$ ,  $M - Co^{2+}, Ni^{2+}, Cu^{2+}, Zn^{2+}, Mn^{2+}$ ,  $n = 1 - 3$ ,  $m = 1 - 5$  згідно термічної дегідратації можна розмістити в такому порядку  $Zn > Cu > Ni > Co > Mn$ .

Наступною стадією термолізу є розклад комплексного катіону  $[M(En)_n]^{2+}$  в інтервалі температур 110 – 440<sup>0</sup>С. Водночас в цій же області високих температур проходить розклад комплексного аніону з відщепленням  $NO^+$  та  $CN^-$  групи. На цьому етапі має місце частковий вихід металу комплексоутворювача аніону у зовнішню сферу сполук. Для комплексу  $[CuEn_2][Fe(CN)_5NO] * 3H_2O$  розпад катіону і частковий розпад аніону проходить при 190 – 440<sup>0</sup>С для  $[CoEn_3][Fe(CN)_5NO] * H_2O - 70 - 360^0C$ ,  $[NiEn_3][Fe(CN)_5NO] * 5H_2O - 180 - 400^0C$ ,  $[MnEn_2][Fe(CN)_5NO] * 3H_2O - 110 - 450^0C$ ,  $[ZnEn_2][Fe(CN)_5NO] * 2H_2O - 140 - 420^0C$ . Таким чином, розклад вказаних комплексів може бути представлений схемами:



Наступним етапом термолізу є відщеплення ціану з відновленням  $Fe(III)$  до  $Fe(II)$ .  $M_6Fe[Fe(CN)_6]_5 \rightarrow 3(CN)_2 + 2M_3Fe[Fe(CN)_6]_2$ .

Для комплексу  $[CuEn_2][Fe(CN)_5NO] \cdot 3H_2O$  ці процеси проходять при  $440 - 530^{\circ}C$  для  $[MnEn_2][Fe(CN)_5NO] \cdot 3H_2O - 450 - 600^{\circ}C$ , для комплексу  $[CoEn_3][Fe(CN)_5NO] \cdot H_2O$  спостерігається при  $360 - 470^{\circ}C$ , а  $[NiEn_3][Fe(CN)_5NO] \cdot 5H_2O$  при  $400 - 450^{\circ}C$ . Два ендоефекти на кривій  $[ZnEn_2][Fe(CN)_5NO] \cdot 2H_2O$  спостерігаються при  $420 - 580^{\circ}C$ . У зв'язку з відновленням катіонів до нижчих ступенів окиснення відбувається зміцнення ціанідних комплексів, що утворюються при розкладі, це приводить до значного зростання кінцевої температури розкладу комплексів на прості сполуки. Зростання температури у відповідності до термічної стійкості d-металу катіону можна розмістити в такому порядку  $Co(II) < Ni(II) < Zn(II) < Cu(II) < Mn(II)$ . Таке зміцнення зумовлене тим, що катіони в нижчому ступені окиснення мають меншу поляризуючу дію, це має велике значення для закріплення навколо них іонів  $CN^-$ , які легко деформуються. При подальшому підвищенні температури проходить дисоціація цього попередньо утвореного комплексу згідно схеми



Експериментально визначена втрата маси зразків на окремих стадіях термолізу добре співпадає з розрахованою згідно наведених схем, що підтверджує їх правильність. Порівнюючи результати термічного розкладу синтезованих біядерних сполук з даними термолізу простих вихідних комплексів показує, що процес дегідратації синтезованих сполук протікає при більш низьких температурах ніж вихідні аммінні катіонні комплекси  $[CoEn_2ClBr]Cl \cdot 2H_2O$   $t_{\text{дегідр.}} = 75 - 120^{\circ}C$  [5], а для  $[CoEn_3][Fe(CN)_5NO] \cdot 5H_2O$   $t_{\text{дегідр.}} = 40 - 70^{\circ}C$ . При заміні простих аніонів  $Cl^-$ ,  $Br^-$  в аммінних комплексах на складний  $[Fe(CN)_5NO]^{2-}$  підтверджує, що складний аніон утворює слабко електростатичне поле, оскільки менше піддається поляризації, а це полегшує процес дегідратації.

Термічний розклад комплексних катіонів біядерних комплексних проходить в більш низькому температурному інтервалі ніж для вихідних катіонних комплексів. Так  $[CoEn_3](NO_3)_3$   $t_{\text{розкл.}} = 118 - 260^{\circ}C$  [6] ймовірно це пов'язано з впливом комплексного аніону  $[Fe(CN)_5NO]^{2-}$  на міцність зв'язку  $N - H$  і послаблення  $M - N$ ,  $M - Co^{2+}$ ,  $Ni^{2+}$ ,  $Cu^{2+}$ ,  $Zn^{2+}$ ,  $Mn^{2+}$  що підтверджено ІЧ-спектральними дослідженнями [5].

- [1] Олійник Л.П., Врецена Н.Б., Гориленко Ю.К., Черняк Б.И. Коорд.химия. 1997. Т.23. №4. С.269.
- [2] Врецена Н.Б., Олійник Л.П., Борова О.Я. Журнал общей химии. 1999. Т.69. Вып. 4.
- [3] Олійник Л.П., Врецена Н.Б. Укр. хім. журн. — 2006. Т.72. №10.— с. 75-78.
- [4] Олійник Л.П., Врецена Н.Б., Черняк Б.И. Коорд.химия. 1999. Т.25. №7. С.513-515.
- [5] Сергеева А.Н. Координационные цианиды переходных металлов с однородными и смешанными лигандами. — Львов: Выща школа, 1983. — 76с.
- [6] Кужушкин Ю.Н., Буданова В.Ф., Седанова Г.Н. Термические превращения координационных соединений в твердой фазе.— Л.: Изд. ЛГУ, 1981.—178с.

УДК 538.958, 535.37, 539.26

## Оптичні властивості аргіродиту $\text{Ag}_8\text{SnSe}_6$

Семків І. В., аспірант каф. ЗФ

Змійовська Е. О., к.ф.-м.н., інж. I. кат. каф. ЗФ

Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Потрійні напівпровідникові халькогеніди срібла є перспективними матеріалами в галузі енергозбереження, нелінійної оптики, електроніки та іоніки твердого тіла. Зокрема це зумовлено низькотемпературним фазовим переходом, високим коефіцієнтом оптичного поглинання та змішаною іонно-електронною провідністю де іонна складова провідності зумовлена іонами срібла  $\text{Ag}^+$ . До таких матеріалів належить і досліджуваний нами аргіродит  $\text{Ag}_8\text{SnSe}_6$ . Дана сполука характеризується одним фазовим переходом  $\beta \leftrightarrow \gamma$ , що відбувається при температурі  $83,3^\circ\text{C}$ . Відомо що  $\text{Ag}_8\text{SnSe}_6$  є прямозонним напівпровідником з шириною забороненої зони  $0,83$  еВ.

Синтез сполуки проводився у вакуумованій кварцовій ампулі поступовим нагріванням до  $1050$  К. Вміст ампули складала елементарні  $\text{Ag}$ ,  $\text{Sn}$  та  $\text{Se}$  у відповідних стехіометричних співвідношеннях. В процесі нагрівання проводилися температурні витримки для плавлення селену, утворення бінарних та потрійної сполук ( $500$ ,  $550$ ,  $700$  К відповідно). Результати рентгенівської дифрактометрії показали, що утворена сполука  $\text{Ag}_8\text{SnSe}_6$  є однофазною та не містить домішок чи залишків бінарних сполук.

Дослідження оптичного поглинання синтезованого аргіродиту  $\text{Ag}_8\text{SnSe}_6$  проводилося в діапазоні довжин хвиль  $900 - 1800$  нм. Для визначення ширини забороненої зони аргіродиту спектр поглинання побудовано в координатах  $(\alpha\nu)^{2/n}$  від  $h\nu$ . Оскільки, сполука  $\text{Ag}_8\text{SnSe}_6$  є прямозонним напівпровідником, тому в даному випадку використано значення  $n = 1$ . Екстраполяцією прямолінійної ділянки спектру визначено значення ширини забороненої зони, що становить  $0,82$  еВ. Дослідження спектру оптичного відбивання аргіродиту не показало чітко вираженого краю поглинання. Проте з графіка можна оцінити значення ширини забороненої зони, що знаходиться в діапазоні  $0,81 - 0,87$  еВ.

При температурних досліджень спектрів фотолюмінесценції зразок поміщали у кріостат. В якості джерела збудження використовували лазер потужністю  $256$  мВ. На спектрах фотолюмінесценції спостерігається один асиметричний пік з максимумом локалізованим при  $0,85$  еВ. При збільшенні температури спостерігається зменшення інтенсивності даного піку, та появу другого з максимумом при  $0,74$  еВ.

УДК

## About the wave resonances and the spatial organization of the Solar system

Skulsky M. Yu., Phd., Department of Physics

Lviv Polytechnic National University  
(12 Bandera street, Lviv, Ukraine, 79013)

Our interest in such research coincided with the discovery of extrasolar planet systems. Several hundred studied exoplanets and tens their systems promoted a research of scenarios of their dynamical evolution. The main scenarios of formation of planetary systems are researched on the basis of the so-called Nice Model. The principal conclusion is that there is no universal rule for the ordering of the planets with scientifically proved physical mechanism. Neither the Titius-Bode law and its modifications to the Solar system, or some regularities in the structure of the exoplanet systems were not substantiated certain physical mechanism. At the same time, for the Solar system were revealed principles the ordering of planets on the basis the program of magnetic field registration of the Sun as a star. Our study of these principles offers a wave algorithm of the ordering of planets in the Solar system which we briefly adduce in further exposition.

The spatial organization of the Solar planetary system can be described by two interrelated kinematic algorithms of the single wave mechanism that is similar to the phenomenon of standing waves with length  $\lambda/2$  (here:  $\lambda = c \cdot P = 19.24$  AU,  $c$  is the speed of light and  $P = 160$  min is a period of global oscillations of the Sun). The ordering for outer planets and dwarf planets can be represented in such wave form  $a = n\lambda/2$  or  $a = (2n + 1)\lambda/4$  (where  $a$  is a semi-major axis and  $n$  is a whole number). In this manner their distances from the Sun are proportional to a quarter of the wavelength or else to a half of the wavelength (Jupiter -  $\lambda/4$ , Saturn -  $\lambda/2$ , Uranium -  $2\lambda/2$ , Neptune -  $3\lambda/2$ , Pluto -  $4\lambda/2$ , Eris -  $7\lambda/2$ ). This algorithm also satisfies the conditions of the location of the most major transneptunian objects including comet families. The principle of the orbit ordering for inner planets can be expressed as  $2\pi a = m\lambda'$  with the step  $\lambda' = (1/12)\lambda/2$  and  $m = 3, 6, 8, 12$  for orbit lengths from Mercury to Mars that are the commensurable quantities with the length of standing wave  $\lambda/2$  and its harmonics. Therefore, the spatial organization of the Solar planetary system could be formed in one physical process but in two interrelated kinematic algorithms of the one wave mechanism. These results are quite accurate and can be considered as empirical. It is important that the wave principles of structuring of the planets do not support the idea of the formation of the Solar planetary system in the form of power law including the law of Titius-Bode. Furthermore, it was revealed an explicit and unusual resonance of proper oscillations of the Sun and planets. Their global periods are virtually multiples to  $kP/2$ , where  $k = 1, 2, 3$ . Since  $\lambda = c \cdot P$ , this result makes obvious signs of a quantization of the gravitational interaction of the Sun as a star and planets and confirms the length of the standing wave  $\lambda_{sw} = \lambda/2$  as a factor in the structuring of planets in the Solar system. Wave and gravitational resonances put questions about their origin in the Solar system. Such interconnected findings should be considered as essential on the background of the current knowledge about the laws of structuring planets in the Solar and exoplanet systems.

Keywords: Solar system, wave resonances.

# ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 004.942

## Taking Advantage of the UNFCCC Kyoto Policy Process: What Can We Learn about Learning?

**Halushchak M. O.**<sup>1,2</sup> PhD student at the Department of AM.

**Jonas M.**<sup>1</sup>, Dr.rer.nat., Senior Research Scholar at the Advanced Systems Analysis Program.

**Zebrowski P.**<sup>1</sup>, PhD, Research Assistant at the Advanced Systems Analysis Program.

**Jarnicka J.**<sup>1,3</sup>, PhD, Adjunct professor at the Department of Computer Modeling.

**Bun R.**<sup>2</sup>, PhD, Professor at the Department of AM.

**Nahorski Z.**<sup>3</sup>, PhD, Head of the Department of Computer Modeling .

<sup>1</sup>International Institute for Applied Systems Analysis  
(Schlossplatz, 1, Laxenburg, A-2361, Austria)

<sup>2</sup> Lviv Polytechnic National University  
(Bandery 12, Lviv, 79013, Ukraine)

<sup>3</sup> Systems Research Institute of the Polish Academy of Sciences  
(Newelska 6, Warsaw, 01-447, Poland)

Learning is difficult to anticipate when it happens instantaneously, e.g. in the context of innovations [2]. However, even if learning is anticipated to happen continuously, it is difficult to grasp, e.g. when it occurs outside well-defined lab conditions, because adequate monitoring had not been put in place.

Our study is retrospective. It focuses on the emissions of greenhouse gases (GHGs) that had been reported by countries (Parties) under the Kyoto Protocol (KP) to the United Nations Framework on Climate Change (UNFCCC). Discussions range widely on (i) whether the KP is considered a failure [6] or a success [5] ; and (ii) whether international climate policy should transit from a centralized model of governance to a 'hybrid' decentralized approach that combines country-level mitigation pledges with common principles for accounting and monitoring [1] .

Emissions of GHGs – in the following we refer to  $CO_2$  emissions from burning fossil fuels at country level, particularly in the case of Austria – provide a perfect means to study learning in a globally relevant context. We are not aware of a similar data treasure of global relevance. Our mode of grasping learning is novel, i.e. it may have been referred to in general but, to the best of our knowledge, had not been quantified so far. (That is, we consider the KP a success story potentially and advocate for the hybrid decentralized approach.)

Learning requires 'measuring' differences or deviations. Here we follow Marland et al. [3] who discuss this issue in the context of emissions accounting:

'Many of the countries and organizations that make estimates of  $CO_2$  emissions provide annual updates in which they add another year of data to the time series and revise the estimates for earlier years. Revisions may reflect revised or more complete energy data and ... more complete and detailed understanding of the emissions processes and emissions coefficients. In short, we expect revisions to reflect learning and a convergence toward more complete and accurate estimates.'

The United Nations Framework Convention on Climate Change (UNFCCC) requires exactly this to be done. Each year UNFCCC signatory countries are obliged to provide an annual inventory of emissions (and removals) of specified GHGs from



five sectors (energy; industrial processes and product use; agriculture; land use, land-use change and forestry; and waste) and revisit the emissions (and removals) for all previous years, back to the country specified base years (or periods). These data are made available by means of a database [4].

The time series of revised emission estimates reflect learning, but they are 'contaminated' by (i) structural change (e.g., when a coal-power plant is substituted by a gas-power plant); (ii) changes in consumption; and, rare but possible, (iii) methodological changes in surveying emission related activities. De-trending time series of revised emission estimates allows this contamination to be isolated by country, for which we provide three approaches: (I) parametric approach employing polynomial trend; (II) non-parametric approach employing smoothing splines; and (III) approach in which the most recent estimate is used as trend. That is, after de-trending for each year we are left with a set of revisions that reflect 'pure' (uncontaminated) learning which, is expected to be independent of the year under consideration (i.e., identical from year to year).

However, we are confronted with two non-negligible problems (P): (P.1) the problem of small numbers – the remaining differences in emissions are small (before and after de-trending); and (P.2) the problem of non-monotonic learning – our knowledge of emission-generating activities and emission factors may not become more accurate from revision to revision.

- [1] *Climate Policy Info Hub*, 2015: International Climate Policy Architectures - Top-Down and Bottom-Up. Available at: <http://climatepolicyinfohub.eu/international-climate-policy-architecturesClimate>.
- [2] *Kusiak, A.*, 2015: Put innovation science at the heart of discovery. *Nature*, 530, 255, doi: 10.1038/530255a.
- [3] *Marland, G., K. Hamal and M. Jonas*, 2009: How uncertain are estimates of  $CO_2$  emissions? *J. Ind. Ecol.*, 13(1), 4-7, doi: 10.1111/j.1530-9290.2009.00108.x.
- [4] *National Inventory Report 2003-2016 under UNFCCC Treaty*. Available at: [http://unfccc.int/national\\_reports/annex\\_i\\_ghg\\_inventories/national\\_inventories\\_submissions/items/8812.php](http://unfccc.int/national_reports/annex_i_ghg_inventories/national_inventories_submissions/items/8812.php).
- [5] *Rockstrom, J.*, 2015: A perfect agreement in Paris is not essential. *Nature*, 527, 411, doi: 10.1038/527411a.
- [6] *Victor, D.G. and C.F. Kennel* 2014: Ditch the 2C warming goal. *Nature*, 514, 30-31, doi: 10.1038/514030a.

УДК 519.6

## Застосування деяких підходів отримання даних для інвентаризації парникових газів

Любінський Б. Б., к.т.н., ст. викл. каф. ПМ

Гнатів Л. Б., к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП

Гладун В. Р., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Національний університет “Львівська політехніка”

(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Глобальне потепління — це одна з найактуальніших проблем людства. На сьогодні людство витрачає значні зусилля на розроблення дієвих механізмів зменшення емісій парникових газів та налагодження ефективних процедур інвентаризації таких газів. Методи просторової інвентаризації парникових газів повинні базуватись на відповідних математичних моделях, а також геоінформаційних системах, які відображають результати просторового моделювання. Сьогодні в світі накопичились великі об’єми даних, які зберігаються в «сирому» вигляді. Великі об’єми даних — це петабайти, терабайти інформації, які містять інформацію, що можна використати для проведення просторової інвентаризації. Під «сирими» даними будемо розуміти — неструктуровані дані, які зберігаються на різноманітних носіях інформації в різних форматах даних. Для прикладу, це можуть бути текстові, відео, аудіо файли, в яких містяться дані, які можна використати для просторової інвентаризації. Важливим елементом проведення просторової інвентаризації є побудова математичної моделі, яка залежить від багатьох параметрів. Інколи на практиці важко реалізувати таку модель через недостатню або відсутню кількість даних для параметрів цієї моделі. На сьогоднішній день точність побудови таких моделей залежить від тих даних, які є доступні. В основному такі дані беруться із щорічних звітів статистичних управлінь, а також допоміжних таблиць.

На даний час існує декілька підходів, які можна використати для вирішення поставлених задач в інвентаризації парникових газів.

Перший підхід базується на використанні даних космічного зондування, які містять дані частини земної поверхні, зроблені в різні моменти часу та в різних проєкціях. Такі дані є накопичені в великих об’ємах, є «сирими» і вони підлягають подальшому аналізу з використанням BigData і парадигми Map Reduce.

В основу другого підходу покладено використання готових цифрових продуктів: глобальна карта лісового покриву та зникнення лісів, карта земельного покриву роздільна здатність 30 м, карти емісій від пожеж, глобальні карти опадів і температури, глобальна карта населення, карта емісій вуглецю — 1 км, карти населення для Азії, Африки, Південної Америки і т.д.

Третій підхід базується на використанні **GoogleEarthEngine (GEE)** – платформи, яка використовує ресурси **Google** і містить вже велику кількість імпортованих даних.

У четвертому підході запропоновано використовувати наступний алгоритм отримання даних: 1. Проаналізувати всі ресурси, які можуть містити необхідні дані. 2. З використанням підходу BigData і парадигми Map Reduce отримати необхідні дані для параметрів запропонованої моделі.

Запроповані підходи дають можливість ефективно аналізувати дані для побудови необхідних математичних моделей просторової інвентаризації парникових газів.

УДК 004.651

## Веб-орієнтована система обліку методичної роботи кафедри

Уханська О. М., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Сеник А. П., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Пабірівський В. В., к.ф.-м.н., доц. каф. ПМ

Патерко О. Я., студ. каф. ПМ

Національний університет "Львівська політехніка"

(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

У сучасних умовах реформування і диверсифікації системи вищої освіти особлива роль відводиться формуванню і розвитку методичної роботи. Від її організації, широти і доступності для кожного керівника, викладача, методиста в значній мірі залежить рівень цілісного освітнього процесу. У діяльності кафедри немає жодного питання, не пов'язаного з методичною роботою, з методикою навчання. Цілком справедливе твердження, що кафедра є центром методичної роботи в навчальному закладі. Методична робота повинна забезпечити відповідність змісту, форми викладання і спрямованості кожної навчальної дисципліни вимогам навчального плану. Тому метою цього напрямку роботи кафедри є вдосконалення викладання навчальних предметів та проведення заходів щодо підвищення педагогічної майстерності викладачів. У зв'язку з цим стає актуальним створення програмного продукту для обліку та аналізу методичної роботи кафедри. З метою доступності інформації вказаний програмний продукт пропонується як веб-орієнтований з подальшим розміщенням в межах сайту кафедри прикладної математики за адресою: <http://amath.lp.edu.ua>.

Аналіз методичної роботи відображає реалізацію завдань, якість освіти, рівень виконання робочих програм, ведення документації, а також передбачає діагностику і моніторинг методичної роботи кафедри за різний період часу, порівняння діяльності викладачів і підготовці рекомендацій на наступні часові інтервали роботи. Запропонований програмний продукт в перспективі повинен виконувати заходи з управління методичною роботою і забезпечувати рекомендації з планування, реалізації і контролю результативності стратегії вдосконалення навчального процесу і його методичного забезпечення. Зокрема програма включає такі види діяльності, як:

1. облік наявних в методичному кабінеті кафедри методичних розробок з їх прив'язкою до назви дисципліни; назви та шифру спеціальності; курсу; викладачів - авторів; лекторів; навчальних груп; кількості студентів в групі та в загальному на потоці, кількості примірників; часу публікації;

2. облік наявних методичних розробок в межах віртуального навчального середовища з їх прив'язкою до вищенаведених параметрів, а також часу останнього редагування, кількості зареєстрованих на навчальний комплекс лекторів та студентів, активності студентів.

3. облік наявних методичних розробок в межах розділу "Електронна бібліотека" сайту кафедри з окремою їх прив'язкою до: кількості відвідувань та кількості копіювань.

Облік та аналіз наведеної інформації дозволяє чітко виявляти недостатність або навпаки - достатню кількість наповнення методичною літературою окремих предметів, курсів, спеціальностей, а також проводити прогнозування та планування методичної роботи кафедри в напрямку підготовки навчальних видань. В свою чергу реалізація Веб-орієнтованої системи обліку методичної роботи кафедри буде сприяти вдосконаленню виконання основного завдання кафедри - проведення освітньої діяльності, а також полегшить її моніторинг та планування.

- [1] 1. *Anne Boehm, Zak Ruwalcaba* HTML5 and CSS3, 3rd Edition. — Mike Murach & Associates, 2015. — 688 p.
- [2] 2. *Котеров Д., Костарев А.* РНР 5 в подлиннике — 2-е изд., БХВ-Петербург, 2008. — 1104 с.



# НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

УДК 621.876

## Оптимізація геометричних параметрів робочої зони автоматизованих лічильних пристроїв

Беспалов А. Л., ст.викл., каф. КНГГ

Бойко О. О., к.т.н., доц. каф. КНГГ

Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

Вібраційні бункерні живильники широко застосовуються в автоматизованому технологічному обладнанні і призначені, в основному, для поштучної видачі виробів чи заготовок до їх робочої зони. Окрім того, на основі віброживильників створено цілу низку лічильних та фасувальних автоматів.

Робоча зона таких автоматів включає фотоелектричний датчик, який розташовано на кінці вихідного лотка чаші віброживильника. При перетині променя датчика деталлю, що рухається по лотку, він подає імпульс до лічильного пристрою, який фіксує кожну деталь, що випадає з чаші віброживильника у приймальну тару. В цьому випадку промінь датчика розташовують над лотком таким чином, щоби деталь, яка проходить через його робочу зону, обов'язково перетинала цей промінь. Такий класичний спосіб розташування променя дає надійний результат при відліку деталей, що значно більші за його діаметр. При автоматизації відліку тонких довгих деталей (шпильки, осі, штирі тощо) класичне розташування променя датчика призводить до значних похибок у результатах відліку. Ці похибки виникають завдяки тому, що деталь при вібротранспортуванні рухається з підкиданням, а через те, що її товщина рівна або менша за діаметр променя, вона може декілька разів перетнути цей промінь і, таким чином, може бути порахованою декілька разів.

Для збільшення точності відліку таких деталей запропоновано нову схему робочої зони фотоелектричного датчика (рис. 1). Фотоелемент 3 датчика розта-

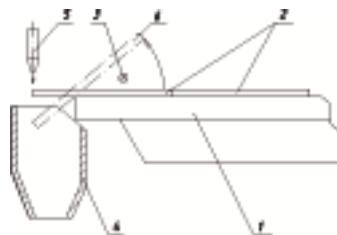


Рис. 1. Конструктивна схема робочої зони фотоелектричного датчика

шовано вище деталей 2, що транспортуються по лотку 1, а на певній відстані від кінця лотка розміщено пневматичне сопло 5, яке повітряним струменем обертає деталь 2 відносно кінця лотка до положення 6 і досилає її до приймального лотка 4. Завдяки цьому кожна деталь при повороті тільки один раз перетинає промінь датчика, що дає змогу усунути недолік класичної схеми і, таким чином, збільшити точність відліку тонких довгих деталей.



УДК 004.92

## Автоматизована система безшовного склеювання зображень з використанням різних методів

Болілій І. О., студент факультету прикладної математики

Сердюк М. Є., к.т.н., доц. каф. КТ

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара  
(просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна)

Задача створення цифрових панорамних зображень шляхом «склеювання» декількох вхідних зображень є актуальною у сьогоденні. Панорамні зображення використовуються у багатьох сферах діяльності. Прикладами можуть служити будь-які дослідження, які використовують знімки або земної поверхні, або космосу, зроблені супутниками з певними невеликими інтервалами часу. На відміну від розрізаних фотознімків широкі панорамні зображення дозволяють брати до уваги набагато більше факторів, на основі яких роблять висновки щодо досліджуваних явищ. Іншими прикладами є застосування панорамних зображень в інтерактивних мапах, на різноманітних сайтах для реалізації віртуальних турів та ін.

Метою даної роботи є створення автоматизованої системи синтезу панорамного зображення на основі двох вхідних зображень з використанням декількох методів склеювання та оцінка застосовності цих методів для різних типів зображень.

Загальний алгоритм створення широких зображень складається з трьох кроків. На першому з них відбувається пошук особливих точок, створення дескрипторів та їх порівняння. Особливі точки мають бути локальними, максимально точними та повторюваними. Типовим прикладом особливої точки може бути світла пляма на темному тлі. Дескриптори особливих точок мають бути, поперше, інваріантними, тобто дескриптори однієї і тієї ж точки на двох різних зображеннях мають бути приблизно однаковими. По-друге, дескриптор особливої точки має бути унікальним, тобто помітно відрізнятися від дескрипторів інших точок. По-третє, дескриптор має бути стійким до зображень, які знаходяться під різними кутами. На другому кроці відбувається побудова проєктивного перетворення для вирівнювання зображень та їх переносу в загальну площину. Заключним кроком є зшиття вирівняних зображень. Реалізація пошуку особливих точок в системі, що пропонується, здійснюється з використанням алгоритмів SURF або SIFT (за вибором користувача).

Алгоритм SIFT[1] спирається на метод гістограм. На першому кроці алгоритму здійснюється побудування піраміди гаусіанів (Gaussian) та різниць гаусіанів, визначення в них точок екстремумів. Гаусіан – це зображення, яке розмите фільтром Гауса. Різниця гаусіанів – зображення, отримане попіксельним відніманням зображень з різними коефіцієнтами розмиття. На наступному кроці відбувається локалізація особливих точок, проведення дослідження околів на предмет місцезнаходження, масштабу, кута повороту головних кривих, а також визначення потенціальних ключових точок, їх розташування, видалення псевдоключових точок. На третьому кроці відбувається створення дескриптора, пошук орієнтації особливих точок та опис локального околу особливої точки. Дескриптор SIFT являє собою локальну гістограму напрямків градієнтів зображення.

Алгоритм SURF[2] визначає особливі точки зображення, спираючись на матрицю Гессе. Детермінант матриці Гессе досягає екстремума в точках максимальної зміни градієнта яскравості. Тому метод застосовує фільтр з Гаусовим ядром до пікселів зображення та знаходить точки, в яких детермінант матриці Гессе набуває максимального значення. Для знайдених особливих точок визначається орієнтація – переважний напрямок перепадів яскравості, для чого використовується фільтр Хаара. На основі отриманої інформації будуються дескриптори особливих точок. Дескриптори SURF уявляють собою набір з 64 або 128 чисел, що відображають флуктуації градієнта навколо особливої точки.

Базова відмінність методів полягає у процедурі описання околу особливої точки: SIFT використовує гістограми зважених градієнтів, а SURF – відгуки вхідного зображення на вейвлети Хаара.

Описані методи були реалізовані в програмному додатку, розробленому на мові C++ з використанням бібліотеки комп'ютерного зору OpenCV. Окрім вищезазначених алгоритмів, в програмі також був використаний метод RANSAC для відсіювання уявних особливих точок та бібліотека FLANN для зіставлення точок. За допомогою програми були протестовані різні види зображень. Так, в результаті обробки тестового зображення з шумом за допомогою алгоритму SIFT було визначено 10 особливих точок, за допомогою алгоритму SURF – 18. Для знешумленого зображення: SIFT – 15 точок (1 псевдодійсна), SURF – 8 точок. Подібні результати були отримані для всіх протестованих зображень. Отже, тестування за допомогою розробленого додатку показало, що метод SURF краще справляється з пошуком особливих точок на зображеннях з шумом та має більшу швидкість роботи. Метод SIFT краще працює на розмитих зображеннях. На якісних зображеннях метод SIFT знаходить більше особливих точок, ніж SURF, але результуюче панорамне зображення є однаковим в обох випадках. В майбутньому передбачається подальше розширення системи з додаванням нових методів та можливістю налаштування на різні види вхідних зображень.

- [1] *Lowe, D.G* Object recognition from Local Scale-Invariant Features. International Conference on Computer Vision, Corfu, Greece. – 1999. – Vol.2, pp. 1150-1157.
- [2] *H. Bay, T. Tuytelaars, L. Van Gool* SURF: Speeded Up Robust Features. Computer Vision–ECCV 2006, 2006 pp. 404-417.

УДК 004.92

## Алгоритм візуалізації хвиль на поверхні води та його програмна реалізація

Сокол О. О., студентка факультету прикладної математики

Сердюк М. Є., к.т.н., доц. каф. КТ

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара  
(пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна)

Задача візуалізації водних поверхонь, зокрема створення динамічних поверхонь з хвилями у реальному часі, є актуальною проблемою в моделюванні, адже її часто доводиться вирішувати в галузях комп'ютерної графіки, у постобробці фільмів, при побудові систем віртуальної реальності. Для опису поведінки рідких середовищ використовують декілька підходів. Один з них використовує теоретичні моделі з представленням результатів у вигляді карти висот. Інший базується на розв'язанні рівнянь Нав'є-Стокса. Прикладом такого підходу є метод гідродинаміки згладжених частинок (SPF). Основною проблемою багатьох підходів є великі обчислювальні затрати, які ускладнюють їх використання.

Метою даної роботи є розробка алгоритму, який дозволяв би відображати динамічні хвилі на поверхні води в реальному часі при невеликих навантаженнях на ресурси комп'ютера, та його програмна реалізація.

Алгоритм, що пропонується, заснований на рівнянні рухомої хвилі, яка задається гармонічними коливаннями [1, ?]. Початкова формула для плоскої хвилі задається нормалізованою синусоїдою:

$$f(x) = \frac{\sin(x) + 1}{2}$$

Щоб була можливість регулювати амплітуду та крутість хвиль, вводимо у формулу відповідні коефіцієнти:

$$f(x, y, t) = A * \left( \frac{\sin(S(x, y, t) + 1)}{2} \right)^k,$$

де  $A$  - амплітуда хвилі,  $k$  - рівень крутості хвилі,  $S(x, y, t)$  - функція, що за координатами  $x, y$  та часом  $t$  визначає положення точки.

Оскільки нам потрібно моделювати двовимірні хвилі, а не плоскі, необхідно обчислити проекцію заданих координат  $x$  та  $y$  на вектор напрямку хвилі шляхом скалярного добутку. Помножимо отриманий добуток на частоту, щоб її можна було регулювати, та додамо час, помножений на фазову сталу.

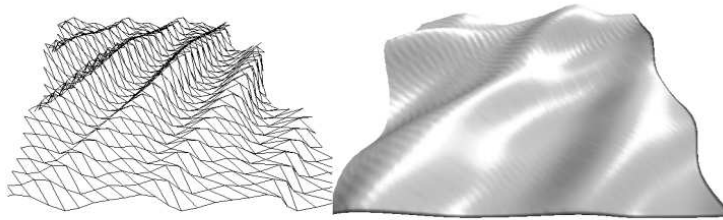
$$S = D(x, y) * P(x, y) * \nu + t * \varphi,$$

де  $D(x, y)$  - вектор напрямку хвилі,  $P(x, y)$  - вектор, що задається координатами вершини сітки,  $\nu$  - частота хвилі,  $t$  - час,  $\varphi$  - фазова стала.

Для того, щоб модель була більш реалістичною, необхідно просумувати висоти декількох хвиль з різними параметрами. Експериментальним шляхом було встановлено, що чотирьох хвиль з різними параметрами достатньо для отримання прийнятної якості моделі морських хвиль на глибині. Алгоритм, що пропонується, передбачає виконання таких кроків:

- 1) побудова об'єктів типу хвиля, в якому задаються амплітуда коливань, довжина хвилі, її швидкість, крутизна та напрям руху;
- 2) генерація сітки вершин за заданою кількістю хвиль та їх параметрами;
- 3) обчислення нормалей вершин сітки;
- 4) рендерінг отриманої моделі засобами OpenGL.

На основі описаного алгоритму було розроблено програмне забезпечення, яке будує динамічну модель водної поверхні з доволі плавними хвилями, що відповідає поведінці води далеко від берега. Приклади миттєвих зображень, які генеруються програмою, представлені на рис. 1



**Рис. 1.** Сітчаста та кішцева моделі

Тестування програми для різних значень параметрів показало, що досить реалістичний вигляд динамічної поверхні з хвилями можна отримати при  $k < 3$ ,  $A \geq 1$  та розміром сітки не більше ніж  $250 \times 250$  точок. Проблемою є те, що алгоритм має складність  $O(n^3)$ , що робить роботу алгоритму повільною на достатньо великих об'ємах даних. Для вирішення цієї проблеми передбачається ввести розпаралелювання обчислень. Для надання моделі океанських або морських хвиль більшої реалістичності планується додати елемент випадковості (шум або динамічну зміну параметрів хвиль).

- [1] *Adam Lake (Intel)* Моделирование поверхности воды в режиме реального времени на платформах с многоядерной архитектурой. – 2009 г. – <https://software.intel.com>.

# МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ

УДК 37.032.5

## Технології розробки відеоуроків для традиційних та дистанційних навчальних курсів

Глинський Я. М., к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП

Ряжська В. А., к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП

Національний університет «Львівська політехніка»  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

З розвитком новітніх інформаційних технологій стає все складніше підтримувати інтерес студентів до традиційних моделей навчання. Тому актуальною є проблема залучення суб'єктів навчання до навчальної діяльності з використанням електронних освітніх ресурсів (електронних навчальних комплексів), що розробляються, зокрема, на платформах edX чи Moodle, і які можуть бути використані в традиційних чи хмарно орієнтованих навчальних середовищах, які у свою чергу можуть бути застосовані для підтримки традиційного (в сенсі стаціонарного) чи дистанційного навчання чи різновиду останнього – мобільного навчання. Компонентами дистанційного електронного відеокурсу є текстово-графічні і відеоматеріали, вдалий підбір і композиція яких можуть забезпечити високу мотивацію до навчання.

Опишемо власний досвід щодо створення і застосування відеолекцій у рамках навчальної дисципліни «Інформатика» для студентів економічних напрямів підготовки НУ «Львівська політехніка». Цей досвід може бути корисний для авторів дистанційних курсів з різних дисциплін.

Фактором успіху відеокурсу є вдалий підбір відеоконтенту і вдала його реалізація. Ми зосередили свою увагу на дослідженні існуючих і створенні власних відеоресурсів, як такої компоненти навчальних курсів, що здатна мотивувати і активізувати пізнавальну діяльність суб'єктів навчання.

Корисним інструментом, який можна ефективно застосувати для організації стаціонарного, дистанційного, а також мобільного навчання, є відеосервіс YouTube. Однак тут виникають певні обмеження і застереження. Проведений аналіз показав, що переважна частина відеоконтенту в YouTube є або англійською, або російськомовною, а також часто застарілою. Відсоток корисних відеоуроків за нашими дослідженнями є невеликий.

Ми зробили спробу створити власні відеоресурси і переконалися, що їх впровадження у навчальний процес веде до отримання значного педагогічного ефекту. Після експериментів з різними темами інформатики ми зупинилися на темі «Основи алгоритмізації та програмування мовою VBA» як складової частини навчально-методичного комплексу з відповідної дисципліни, що читається для студентів економічних напрямів підготовки в НУ «Львівська політехніка». Розроблені відеофільми ми розташували у відеосервісі YouTube на каналі hlinsky1. За призначенням ці відеофільми є компонентами аудиторних відеолекцій для студентів, а також можуть слугувати компонентами дистанційного відеокурсу.

Наші відеоматеріали за обмежений проміжок часу (орієнтовно до 10 хвилин) розкривають теми, які традиційними засобами лектор розкрити не може через недостатню кількість аудиторного часу і специфіку матеріалу. Зауважимо, що в інтернеті за такими відеоматеріалами закріпилася назва відеоуроків, а за сукупністю відеоуроків, які охоплюють розділ навчального курсу чи весь курс, назва

– відеокурс. У нашому випадку ми не претендуємо на відеокурс, оскільки всі теми навчання не охоплені, але створені відеоресурси і проведені відеолекції дали змогу автоматизувати процес навчання шляхом перерозподілу навчального часу на користь позааудиторної самостійної роботи студентів. Відеолекцією ми називаємо традиційну аудиторну лекцію, побудовану на суттєвому використанні відеоматеріалів. Оскільки тематика відеолекцій пов'язана з прагматичними питаннями роботи в програмних середовищах, вдалося вивільнити аудиторний час на користь висвітлення теоретичних питань моделювання, алгоритмізації та програмування, що націлено на підвищення рівня фундаменталізації навчання, що є актуальним питанням. Студентам рекомендується переглядати відеоматеріали багаторазово вдома чи під час лабораторних занять доти, доки вони не освоють основних принципів створення VBA-проектів і навчатися створювати власні проекти самостійно.

Рекомендуємо переглянути як зразок відеоурок "Мій другий VBA-проект"(відеофайл 2.mp4) <https://www.youtube.com/watch?v=7cFmSRSfd5o> на каналі Ярослав Глинський (інші уроки розташовані на каналі [hlynsky1](#)).

Розглянемо сучасні технології, призначені для створення відеоресурсів. Camtasia Studio ([camtasia-studio.ru.softonic.com](http://camtasia-studio.ru.softonic.com)) – одна з кращих програм для створення відеоуроків та скріншотів. Програма має зрозумілий і доступний інтерфейс. Для комфортної роботи вона потребує 2 Гб оперативної пам'яті. За допомогою цієї програми можна створювати відеоматеріали професійної якості. Вартість програми 299 USD. Camtasia Studio містить такі складові: Camtasia Theater, Camtasia MenuMaker, Camtasia Player і Camtasia Recorder, Camtasia Audio Editor. Записане відео можна зберегти в таких форматах: AVI, SWF, FLV, MOV, WMV, GIF. Можна відразу експортувати відеоуроки в YouTube, записувати на CD, DVD, створювати відео для iPhone, iPad, iPod. За нашими спостереженнями найкраща якість відео забезпечується у форматі SWF. Для кодування відео у програмі Camtasia Studio використовується кодек TechSmith Screen Capture Codec (TSCC), який і забезпечує високу якість. Camtasia Studio має вбудований потужний відеоредактор з функціями, яких немає в інших спеціалізованих програмах. На нашу думку Camtasia Studio найкраще підходить для розробки якісного відеоконтенту для дистанційних курсів. Саме 30-денна безкоштовна (trial) версія цієї програми застосовувалась для створення відео для каналу [hlynsky1](#). Для забезпечення балансу між якістю і обсягом файлу ми обмежилися форматом MP4.

На основі нашого досвіду сформулюємо вимоги до створення відеоуроків, які варто враховувати під час розробки дистанційних відеокурсів з різних дисциплін:

- лаконічність подання матеріалу;
- звукова чіткість і емоційна динаміка подання;
- висока відеоякість(HD);
- мінімальна тривалість (оптимально 10-15 хв);
- максимальна якість контенту;
- повнота подання відомостей, головню, прагматичних, що вивільняє обмежений аудиторний час для розгляду теоретичних (фундаментальних) основ навчальної дисципліни.

Результати педагогічних досліджень показали, що поєднання традиційних форм навчання з новими мобільними формами забезпечило досягнення цілей навчання у переважної кількості студентів (у середньому 70

Комп'ютерні відеофільми, як і класичні навчальні фільми з різних предметів, які показували в кінозалах у навчальних закладах 40-50 років тому, є ефективною формою демонстраційного навчання і важливим елементом наповнення сучасного електронного навчально-методичного комплексу чи сучасного відеокурсу, призначеного для дистанційного навчання.

За допомогою сучасних апаратних засобів (зокрема, з використанням відеопроектора) навчання з застосуванням відеофільмів може здійснюватися як у стаціонарному, так і, що особливо важливо, у дистанційному і мобільному режимах. Безсумнівною перевагою такого навчання є можливість повторного перегляду відеофільмів як в географічно іншій точці, так і в зручний час, що забезпечує мобільність навчання в часі та в просторі.



УДК 517.9

## Дослідження збіжності рекурентних послідовностей

Дрогомирецька Х. Т., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Клапчук М. І., к.ф.-м.н., доц. каф. ВМ

Понеділок Г. В., к.ф.-м.н., доц. каф. ПФ

Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

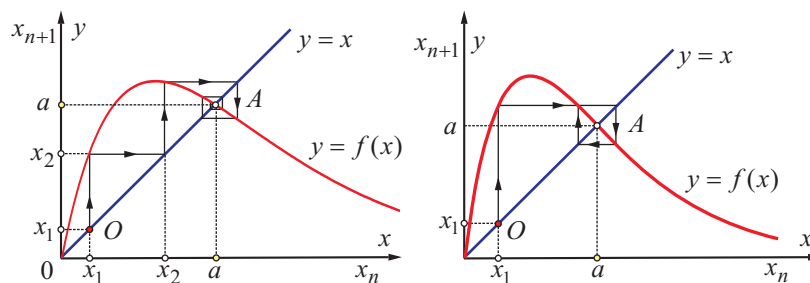
Рекурентні послідовності отримали широке застосування не лише в математиці, особливо в чисельних методах розв'язку рівнянь та в теорії динамічних систем, але і в біології, медицині, соціальних науках тощо [1,2]. Здебільшого методи дослідження рекурентних послідовностей викладають у спеціальних дисциплінах для студентів старших курсів. Зокрема про місце, роль та методику викладання рекурентних співвідношень для студентів математичних та прикладних спеціальностей йшлося в [2]. Але і при вивченні базового курсу математичного аналізу можна досліджувати збіжність чи розбіжність рекурентних послідовностей, застосовуючи методи диференціального числення для перевірки монотонності послідовностей та задіюючи графічні методи їх аналізу. Одним із таких методів є метод павутинних діаграм (cobweb diagrams), який дає змогу візуалізувати поведінку рекурентної послідовності та дослідити її збіжність [3,4].

Розглянемо рекурентну послідовність вигляду

$$\begin{cases} x_1 = p, \\ x_{n+1} = f(x_n), \end{cases} \quad n \geq 1, \quad (1)$$

де  $p$  – початкове значення.

Для графічного аналізу послідовності в одній системі координат будують графік функції  $y = f(x)$ , яка породжує цю послідовність, та пряму  $y = x$  (див. рис. 1).



**Рис. 1.** Графічний метод аналізу збіжності рекурентної послідовності шляхом побудови павутинної діаграми.

Стартуючи з точки  $(x_1; x_1)$  і рухаючись по чергово вздовж горизонтальних і вертикальних ліній між точками їх перетину з графіками побудованих функцій, отримують послідовно значення членів послідовності  $\{x_n\}$ . Візуальний якісний аналіз діаграми дозволяє висунути гіпотезу про поведінку рекурентної послідовності. Зокрема послідовність  $\{x_n\}$  може монотонно збігатися до скінченної границі  $a$  (див. рис. 1 ліворуч), виявляти осциляції (див. рис. 1 праворуч) або прямувати до  $+\infty$  чи  $-\infty$ .

Важливим етапом таких досліджень є встановлення монотонності послідовності, яку проводять на підставі наступної теореми.

**Теорема 1.** Нехай задано відкритий інтервал  $I = (a; b)$ , де  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  та функцію  $f$ , визначену і неперервну на цьому інтервалі, причому  $f(I) \subset I$  та  $f(x) \neq x$  при довільному  $x \in I$ .

Тоді:

– якщо  $f(x) < x$  при  $x \in I$ , то послідовність  $\{x_n\}$  виду (1), яка породжена цією функцією, є монотонно спадною, а її границя дорівнює  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  (див. рис. 2 ліворуч);

– якщо  $f(x) > x$  при  $x \in I$ , то послідовність  $\{x_n\}$  є монотонно зростаючою, а її границя дорівнює  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$  (див. рис. 2 праворуч).

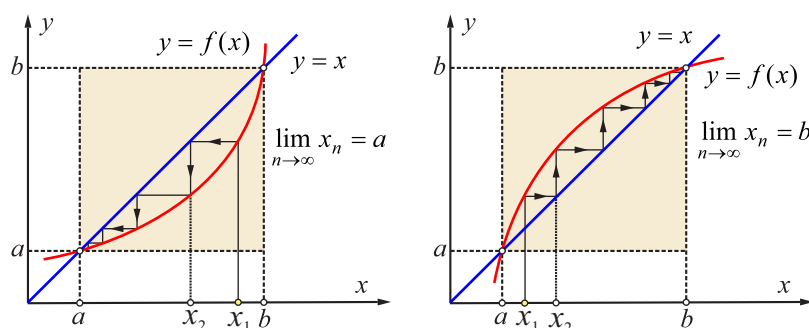


Рис. 2. Монотонні рекурентні послідовності

На підставі цього твердження можна запропонувати наступний **алгоритм дослідження збіжності рекурентної послідовності** (1).

1. Розв'язують рівняння  $f(x) = x$  та знаходять нерухомі точки. Слід зазначити, що задачу знаходження нерухомих точок розв'язують алгебраїчними, чисельними методами, а також геометрично, застосовуючи пакети математичних програм [4].

2. Якщо  $x_1$  є нерухомою точкою, то послідовність є сталою, адже  $x_2 = f(x_1) = x_1, \dots, x_n = f(x_{n-1}) = x_{n-1}$ .

3. Якщо  $x_1$  не є нерухомою точкою, то визначають інтервал  $(a; b)$  з кінцями у нерухомих точках чи  $\pm\infty$ , якому належить точка  $x_1$ .

4. Знаходять інтервал  $(\alpha; \beta)$ , на який функція  $f(x)$  відображає інтервал  $(a; b)$

$$f : (a; b) \rightarrow (\alpha; \beta).$$

Якщо  $a$  і  $b$  – скінченні числа і функцію  $f(x)$  можна неперервно продовжити на відрізок  $[a; b]$ , то  $\alpha$  і  $\beta$  шукають серед значень функції  $f(x)$  в критичних точках з цього відрізка та значень функції у кінцях відрізка. У іншому випадку зіставляють значення функції в критичних точках з інтервалу  $(a; b)$  та границі  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  та  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ . Тоді  $\alpha$  є найменшим із знайдених значень функції  $f(x)$ , а  $\beta$  – найбільшим з них.

5. Перевіряють чи  $(\alpha; \beta) \subseteq (a; b)$ , тобто чи функція  $f(x)$  відображає інтервал  $(a; b)$  на самого себе або на його частину (графічно це означає, що при  $a < x < b$  графік функції не виходить за межі заштрихованого на рис. 2 квадрата).

6. Якщо умови п. 1 – п. 5 виконуються, то послідовність монотонна і її значення перебувають на проміжку  $(a; b)$ . Для виявлення того, зростаючою чи спадною вона є, достатньо або порівняти  $x_1$  та  $x_2$ , або використати опуклість чи вгнутість функції  $f(x)$  на проміжку  $(a; b)$ . Зокрема, якщо  $x_1 < x_2$ , то послідовність монотонно зростаюча і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ; якщо  $x_1 > x_2$ , то послідовність монотонно спадає і її границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

7. Якщо умови п. 4 – п. 5 не виконуються, тоді:

– якщо  $x_1 < x_2 < b$ , то перевіряють, чи функція  $f(x)$  відображає інтервал  $(x_1; b)$  на самого себе;

– якщо  $a < x_2 < x_1$ , то перевіряють, чи функція  $f(x)$  відображає інтервал  $(a; x_1)$  на себе.

Якщо таке відображення має місце, то, як і у п. 6, роблять висновки про монотонність послідовності та її границю.

8. Якщо відображення відповідного інтервала з п. 7 на самого себе не відбувається, то шукають наступний член послідовності і переходять до дій, аналогічних до п. 7.

**Приклад 1.** Довести збіжність рекурентної послідовності та знайти її границю.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}, \\ x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2, \end{cases} \quad n \geq 1. \quad (2)$$

**Розв'язання.** Розглянемо функцію  $f(x) = x^2 - 2x + 2$ , яка породжує задану послідовність.

1. Розв'яжемо рівняння  $f(x) = x$  для знаходження нерухомих точок:

$$x^2 - 2x + 2 = x \Leftrightarrow x = 1 \text{ або } x = 2.$$

Ці точки розбивають область визначення на інтервали  $(-\infty; 1)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(2; +\infty)$ .

2, 3. Перший член послідовності не є нерухомою точкою, тому вибираємо інтервал  $(1; 2)$ , якому він належить і подальші дослідження проводимо виключно на цьому інтервалі.

4, 5. Оскільки кінці інтервалу є нерухомими точками функції  $f(x)$ , то для того, щоб переконатись, що функція  $f(x)$  відображає інтервал  $(1; 2)$  на самого себе, достатньо показати, що вона зростає на цьому інтервалі. Дійсно,  $f'(x) = 2x - 2 > 0$  при  $x \in (1; 2)$ , отже, функція зростаюча.

6. Очевидно, що умови 4, 5 алгоритму виконуються, отже послідовність монотонна і значення її членів залишаються у інтервалі  $(1; 2)$ . Зважаючи на те, що  $x_2 = 5/4 < x_1 = 3/2$ , то послідовність монотонно спадає, причому її границя дорівнює лівому кінцю розглядуваного інтервалу  $(1; 2)$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

Встановити те, що послідовність монотонно спадає можна і наступним чином. Оскільки  $f''(x) = 2 > 0$ , то функція вгнута, тому її графік розміщений під лінією  $y = x$ , а послідовність  $\{x_n\}$  є монотонно спадною.

Використання графічного методу особливо корисне при аналізі складних динамічних систем, які є дуже чутливими до незначних змін початкових умов. Техніка графічного аналізу дає змогу отримати добрі якісні оцінки поведінки рекурентної послідовності, більше того, дає змогу дослідити чутливість розв'язку до зміни зовнішніх параметрів та початкових умов.

Отже, з рекурентними послідовностями студенти можуть ознайомитися набагато раніше у своїй математичній освіті і бути вмотивованими надалі глибше вивчати їх математичні та прикладні застосування.

- [1] *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах: Пер. с англ.— М.: Мир, 1985.— 423 с.
- [2] *Зеліско М. М.* Про вивчення рекурентних співвідношень [Електронний ресурс] / Михайло М. Зеліско, Іван П. Кшановський, Назар М. Пирч // Математика в сучасному технічному університеті : Збірник науково-методичних праць / Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут». — Київ, 2015. — Вип. 1. — С. 123—131.
- [3] *Krainer T.* Recursive sequences in first-year calculus/ Thomas Krainer – International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.— Vol. 47, issue 2, 2016, — pp. 299-314.
- [4] *Prazak P.* Recursively defined sequences and CAS/ Pavel Prazak – Advanced Educational Technologies/6th WSEAS/IASME International Conference on Educational Technologies (EDUTE '10)—Kantaoui, Sousse, Tunisia May 3-6, 2010.— pp. 58–61.

## Розвиток логічного мислення у курсах математики та інформатики

Кравець І. Т.<sup>1,2</sup>, к.ф.-м.н., доц. каф. ОМП

Цура О. С.<sup>2</sup>, учитель математики

<sup>1</sup> Національний університет "Львівська політехніка"  
(вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна)

<sup>2</sup> НВК "Школа-гімназія "Галицька"  
(вул. Замкова, 4, м. Львів, 79011, Україна)

Розвиток логічного мислення молодих людей потрібно починати змалку. Наприклад, залучати учнів на уроках математики та інформатики до роз'язуння цікавих головоломок, що приводить до розвитку логічного мислення та формування ІТ-компетентності учнів.

Метою даної роботи є привернути увагу педагогів до підготовки майбутніх студентів. Акцент ставиться на розвиток пам'яті, кмітливості, активізації логічного мислення.

Розв'язування логічних задач дає можливість навчити учня змінювати звичні шаблони мислення. При цьому розвиваються прийоми порівняння, синтезу, абстрагування. На уроках математики та інформатики слід постійно незначно змінювати умови задач, при цьому ставити нові запитання, шукати розв'язки багатьма способами, на основі даної задачі складати свої логічні задачі, проводити аналіз поставлених задач, систематизувати та аналізувати отримані результати. Тим самим заохочувати учнів до пошуку та пізнання нового, нестандартного.

Для досягнення поставленої задачі в інформатиці можна використовувати програму Scratch. Scratch – це об'єктно-орієнтоване середовище для навчання основ програмування. Програма добра тим, що користуватись нею може людина, яка не володіє жодними знаннями з програмування. З допомогою простих конструкцій можна скласти просту, цікаву програму, намалювати рисунок. Учні можуть самостійно опанувати комп'ютерну грамотність, розробляти комп'ютерні моделі, створювати ігри, анімації, складати музику, при цьому одержувати підготовку до подальшого вивчення програмування. Навчання у Scratch привчає до критичного міркування і системного мислення.

Ще одним корисним продуктом для розвитку логічного мислення і підготовки до вивчення програмування є Code ресурс. Цей ресурс розрахований для усіх вікових категорій користувачів: дошкільнят, учнів різних вікових категорій, студентів з різним складом розуму. Тут є покрокове ігрове навчання. Переходячи від рівня до рівня, задачі ускладнюються. Можна подивитися код даної програми. Якщо користувач успішно виконав вправи, то отримує сертифікат і це є мотивацією до освоєння програмного продукту.

## Кафедра обчислювальної математики і програмування

Кафедра обчислювальної математики та програмування (ОМП) створена в 1976 році. Її організатором та першим завідувачем був кандидат фізико-математичних наук, доцент П.І. Боднарчук.

Завідувачами кафедри були: к.т.н., доц. О.М. Коссака (1987-1993), д.ф.-м.н., проф. П.І. Каленюк (1993-2007), д.т.н., проф. А.Ф. Обшта (2007-2012).

З 2012 року кафедру очолює к.ф.-м.н., ст.н.с., доцент Я.М. Пелех.

За чотири десятиліття, що минули від часу заснування кафедри, її наукові дослідження зазнавали деяких видозмін і на даний час вони розвиваються за напрямками, які охоплюють широкий спектр проблем теоретичного та практичного характеру, а саме:

- математичне і комп'ютерне моделювання, аналітичні та чисельні методи дослідження фізико-математичних задач та їх розв'язку;
- системи комп'ютерної алгебри;
- проблеми розв'язування класичних, неklasичних, некоректних, обернених початкових та крайових задач;
- якісні методи та прикладні аспекти стохастичної оптимізації та топологія просторів ймовірносних мір; стохастична апроксимація в марківському та напівмарківському процесах;
- методика викладання інформатики у середній та вищій школах;

Започаткована професором В.Я. Скоробогатьком теорія гіллястих ланцюгових дробів стала з ініціативи П.І. Боднарчука одним з основних напрямків наукових досліджень кафедри. П.І. Боднарчуку належать дві монографії з цієї тематики, а розвиток і застосування цієї теорії склали предмет його докторської дисертації. З цієї тематики працівниками кафедри захищено низку кандидатських дисертацій (Б.Й. Бандирський, Я.М. Глинський, В.К. Іванел, В.Ф. Марко, Я.М. Пелех), а М.С. Сявакко розвинув разом з учнями континуальний аналог цієї теорії - інтегральні ланцюгові дроби - і завершив свої пошуки здобуттям ступеня доктора фізико-математичних наук.

Істотні результати в метричній теорії чисел та в теорії  $P$ -адичних дробів належать к.ф.-м.н., доц. кафедри Ю.В. Мельничуку. Вони оформлені у вигляді двох його монографій, виданих Інститутом математики Білорусії.

З часу заснування кафедри під керівництвом доц. Козака П.П. розвинувся напрямок застосувань континуальних інтегралів в теорії диференціальних рівнянь. За цією тематикою захищено ряд кандидатських дисертацій (Г.І. Білушак, О.С. Гаврилів, Я.М. Чабанюк). Подальше застосування результатів цієї школи, а саме, розвиток стохастичної оптимізації та другого методу Ляпунова в еволюційних рівняннях з марковськими та напівмарковськими переключеннями, оформлено в докторській дисертації Я.М. Чабанюком (2008р.) та к.ф.-м.н. У.Т. Хімкою.

Під керівництвом к.т.н., доц. О.М. Коссака кафедра започаткувала створення української термінології з інформатики. Вперше в Україні були підготовлені англо-українські словники з інформатики.

Вагомі результати щодо узагальненого методу відокремлення змінних, отримані П.І. Каленюком і його учнями (к.ф.-м.н., доц. Я. О. Баранецький, д.ф.-м.н. З. М. Нитребич, к.ф.-м.н., доц. П.Л. Сохан, к.ф.-м.н., доц. І.В. Когут, к.ф.-м.н. М.Б. Воробець, к.ф.-м.н. У.Б. Ярکا).

Успішно досліджували некоректні задачі для лінійних рівнянь з частинними похідними, які були започатковані членом-кореспондентом НАН України Б.Й. Пташником, д.ф.-м.н., проф. В.С. Ільків і к. ф.-м.н., доц. Б.О. Салига, к.ф.-м.н., доц. Т.В. Магеровська.

В дослідженнях проф. А.Ф. Обшти розвинута ідея про істотний зв'язок властивостей розв'язків (єдиність, обмеженість, стійкість) крайових задач для рівнянь математичної фізики з внутрішньою геометрією областей, у яких ці задачі розглядаються.

Під керівництвом д.ф.-м.н., Х.Й. Кучмінської розроблено основи аналітичної теорії двовимірних неперервних дробів. За цією тематикою захищено кандидатські дисертації С.М. Возної, та О.М. Сусь.

Н.М. Гоблик займається моделюванням електромагнітних хвиль на періодично-неоднорідних структурах методами гіллястих ланцюгових дробів.

Використовуючи апарат ланцюгових дробів та теорію побудови методів Рунге-Кутта, доц. Я.М. Пелех розробляє наближені методи розв'язання задачі Коші для нелінійних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду та нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь типу Вольтерра.

В дослідженнях групи викладачів, які працювали під керівництвом к.ф.-м.н., доц. Б.А. Шуvara, фігурують напрями, що стосуються: двосторонніх операторних нерівностей та побудови і дослідження двосторонніх наближених методів; дослідження методів ітеративного агрегування та побудови і дослідження їх узагальнень; наближеної факторизації поліномів у банахових алгебрах з використанням конструкцій гіллястих ланцюгових дробів (кандидатські дисертації доц. І.І. Демківа та доц. Р.Й. Петровича, роботи викладачів М.А. Шуляра, З.О. Гошко, С.З. Угриня, О.М. Дашка, Р.Р. Столярчук).

Чисельним розв'язуванням нелінійних крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку займається доцент Л.Б. Гнатів. Його результати пов'язані з побудовою триточкових різницевих схем високого порядку точності.

Доценти кафедри В.Є. Анохін, І.С. Будз, І.С. Костенко, О.В. Тумашова, Є.М. Федюк представляють школу академіків Я.С. Підстригача і Я.М. Григоренка. Результати їх наукових досліджень пов'язані з побудовою математичних моделей та чисельними методами дослідження напружено-деформованого стану оболонкових елементів конструкцій зі змінними параметрами та дефектами типу тріщин, а також задачами термпружності для оболонок обертання.

Значний внесок у розвиток загальної теорії нелінійних еволюційних крайових задач складають результати д.т.н., проф. П.Я. Пукача, який розглядає питання коректності розв'язків таких задач в необмежених областях, виникнення явища "руйнування" розв'язку та досліджує якісні властивості розв'язків варіаційних нелінійних нерівностей.

Професор І.І. Демків разом з академіком НАН України В.Л. Макаровим займається питаннями розширення теорії поліноміального інтерполювання функцій на рівень функціоналів та операторів у просторах елементів будь-якої природи і перенесенням основних застосувань поліноміальної інтерполяції функцій на аналогічні задачі операторного рівня. Задачі топології були предметом досліджень д.ф.-м.н. Л.Є. Базилевич.

В різний час на кафедрі працювали відомі науковці, члени-кореспонденти НАН України Р.М. Кушнір, Б.Й. Пташник, д.ф.-м.н., М.Г. Стащук.

Список науковців, які провадили наукові дослідження на кафедрі ОМП і за результатами досліджень захистили докторські дисертації складають: Ільків В.С.(д.ф.-м.н., 2006 р.), Обшта А.Ф.(д.т.н., 2006 р.), Микитюк І.Я. (д.ф.-м.н., 2007 р.), Чабанюк Я.М.(д.ф.-м.н., 2008 р.), Базилевич Л.Є. (д.ф.-м.н., 2012 р.), Кміть І.Я. (д.ф.-м.н., 2012р.), Кучмінська Х.Й. (д.ф.-м.н., 2012 р.), Нитребич З.О. (д.ф.-м.н., 2013 р.), Демків І.І. (д.ф.-м.н., 2013 р.), Пукач П.Я. (д.ф.-м.н., 2014 р.).

Кафедрою ведеться впровадження в навчальний процес систем комп'ютерної математики та статистичного аналізу (Maple, Mathematica, MatLab та інших). Науковцями кафедри (к.ф.м-н., доц. Л.Б. Гнатів, к.ф.м-н., доц. Я.М. Пелех, к.ф.м-н., доц. Б.М. Філь, ст.в. Н.М. Гоблик, ст.в. С.М. Ментинський) використовуються комп'ютерні системи для аналітичних досліджень задач математики, математичної фізики та статистичного аналізу.

Методичні системи навчання інформатики в загальноосвітній і вищій школах досліджувалися доцентами Анохіним В.Є., Ряжською В.А., Глинським Я.М. і супроводжувалися виданням 26 навчальних посібників та підручників для учнів шкіл та студентів, більшість з яких отримали гриф МОН України. Два навчальні посібники були перекладені російською мовою і видані в Санкт-Петербурзі у видавництві "Діасофт".

Протягом чотирьох десятиліть викладання математичних дисциплін, інформатики і програмування ведеться на основі підручників і посібників, створених працівниками кафедри ОМП ( І.А. Анджейчак, В.Є. Анохін, Я.О. Баранецький, Г.І. Білушак, І.С. Будз, Я.М. Глинський, Л.Б. Гнатів, Н.М. Гоблик, Я.І. Дасюк, І.І. Демків, В.С. Ільків, І.Б. Киричинська, Н.Ф. Клочко, Т.Г. Коваленко, О.М. Коссак, І.С. Костенко, І.Т. Кравець, І.І. Ключник, С.М. Ментинський, З.М. Нитребич, Л.О. Новіков, А.Ф. Обшта, Я.М. Пелех, П.Я. Пукач, В.А. Ряжська, Б.О. Салига, П.Л. Сохан, О.В. Тумашова, Б.М. Філь, Є.М. Федюк, Я.М. Чабанюк).

Щорічно кафедра організовує і проводить I тур Всеукраїнської олімпіади з дисципліни "Інформатика в якій беруть участь десятки студентів з різних інститутів. Спонсорами олімпіади в різні часи були такі компанії як "Техніка для бізнесу "Медіавест "Уарнет". Переможці олімпіади брали участь у Всеукраїнській олімпіаді, де здобували призові місця і нагороди.

Кафедрою ОМП налагоджена тісна співпраця з профільними кафедрами університету та відділами Інституту математики НАН України, Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. Підстригача (ІППММ) НАН України, Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Одеським національним політехнічним університетом, та іншими.

Викладачі кафедри підтримують міжнародні наукові зв'язки з вченими, які працюють в наступних закордонних установах: Vienna University of Technology (Vienna, Austria), University of Cooperative Education Eisenach (Eisenach, Germany), University of Defence (Czech Republic), Georgian Technical University, Batumi Shota Rustaveli State University (Georgia), Institute of Mathematics Polish Academy of Science (Poland), Politechnika Lubelska, Wydział Podstaw Techniki (Poland).

**П. І. Каленюк, д. ф.-м. н., професор, директор ІМФН НУ «ЛП»**  
**Я. М. Пелех, к. ф.-м. н., доцент, в.о. кафедри ОМП**



## Алфавітний покажчик авторів

- Ільків В. С., 21  
Bobyk I. O., 43  
Budz I. S., 95  
Bun R., 112  
Chabanuk Ya. M., 70, 95  
Halushchak M., 112  
Jarnicka J., 112  
Jonas M., 112  
Khimka U. T., 70, 95  
Kinash A. V., 70  
Koval I., 102  
Nahorski Z., 112  
Pelexh Ya. M., 85  
Pukach P. P., 46  
Pukach P. Ya., 43  
Skulsky M. Yu., 110  
Sokhan P. L., 43, 46  
Zebrowski P., 112  
Баранецький Я. О., 14  
Бекас Б. О., 97  
Бекленищев В. І., 64  
Беспалов А. Л., 120  
Бойко О. О., 120  
Болілий І. О., 121  
Будз І. С., 58, 60  
Будз С. Ф., 58  
Войтович М. І., 44  
Воловенко М. В., 61  
Гентош О. Є., 15  
Гладун В. Р., 114  
Глинський Я. М., 126  
Гнатів Л. Б., 114  
Горун П. П., 93  
Гошко З. О., 33, 88  
Григорчак І. І., 100  
Гук В. М., 44  
Гук Н. А., 64  
Дівеєв Б. М., 17  
Дем'яненко А. Г., 68  
Демків І. І., 66, 67  
Дрогомирецька Х. Т., 129  
Думанський О. І., 50, 54  
Желізняк Й. Р., 28  
Жидик У. В., 19  
Змійовська Е. О., 109  
Каленюк П. І., 14  
Каркульовська М. С., 100  
Квіт Р. І., 23  
Клапчук М. І., 129  
Костробій П. П., 72  
Кравець І. Т., 133  
Криховець О. В., 103  
Крушельницька Т. Д., 100  
Кузніченко В. В., 61  
Кукурба В. Р., 73  
Кунинець А. В., 75  
Курбатова І. Н., 26, 31, 52  
Лазько В. А., 28  
Лозбень В. Л., 28  
Любінський Б. Б., 114  
Магерівська Т. В., 33, 66  
Маланчук О. М., 35  
Малик О. П., 105  
Маркович Б. М., 72  
Мединський І. П., 29  
Ментинський С. М., 78, 79  
Нікітенко О. М., 61  
Нежуренко А. С., 31  
Неспляк Д. М., 33  
Николишин М. М., 82  
Нитребич З. М., 35  
Обшта А. Ф., 36  
Олійник Л. П., 107  
Олексів І. Я., 37  
Пігура О. В., 40  
Пізюр Я. В., 90  
Пабірівська Н. В., 38  
Пабірівський В. В., 38, 116  
Патерко О. Я., 116  
Пелех Р. Я., 79  
Пелех Я. М., 79, 82  
Пелих В. О., 47  
Петрович Р. Й., 88  
Петрук М. Е., 89  
Петрусь Р. Ю., 105  
Понеділок Г. В., 129  
Присяжна М. К., 64  
Прокіп В. М., 41  
Регрут В. В., 26  
Родич В. М., 105  
Ряжська В. А., 126

Семенюк С. А., 91  
Семків І. В., 109  
Сеник А. П., 116  
Сердюк М. Є., 121, 123  
Сиркін Є. С., 100  
Сокол О. О., 123  
Сорокати́й М. І., 44  
Сторож О. Г., 40  
Тайстра Ю. В., 47  
Товстюк Н. К., 100  
Топилко П. І., 92  
Угрин С. З., 49, 66

Уханська О. М., 116  
Федьковський П. О., 97  
Федюк Є. М., 50, 54  
Феодосьєв С. Б., 100  
Хаддад М., 52  
Цура О. С., 133  
Чабанюк Я. М., 73, 91, 93  
Шиманський В. М., 50  
Шувар Б. А., 78  
Яджак М. С., 97  
Ясько М. М., 89