Об одном свойстве плотности в пространствах слабо абсолютно непрерывных мер

А.П. Бакланов
baklanov@iiasa.ac.at

Международный институт прикладного системного анализа (Лаксенберг, Австрия)
ИММ УрО РАН (Екатеринбург)
УрФУ (Екатеринбург)

Аннотация

Показана возможность погружения некоторых множеств ступенчатых функций и множеств равномерных пределов упомянутых функций в компактные в $*$-слабой топологии подмножества множества всех ограниченных конечно-аддитивных (к.-а.) мер в виде всюду плотного множества; измеримая структура определяется алгеброй множеств. В частности, рассматривается множество всех ступенчатых функций, интеграл модуля которых по неотрицательной к.-а. мере λ равен единице. Для таких множеств установлена возможность упомянутого погружения в случаях, когда λ является неатомической мерой или мерой с конечным множеством значений. В случае с неатомической мерой λ показано, что упомянутые множества функций допускают погружение в единичный шар (в сильной норме-вариации) пространства слабо абсолютно непрерывных к.-а. мер относительно λ в виде всюду плотного множества. В случае меры λ с конечным множеством значений такие множества функций допускают погружение в единичную сферу пространства слабо абсолютно непрерывных к.-а. мер относительно λ в виде всюду плотного множества. В этом случае упомянутая сфера является замкнутой в $*$-слабой топологии. Полученный результат может иметь интерпретацию с точки зрения одной конструкции расширения линейных задач управления в классе к.-а. мер.

1 Введение

В прикладных задачах управления распространенными являются различные ограничения на расход топлива, а управления полагаются кусочно-постоянными (к.-п.) или кусочно-непрерывными (к.-н.), что отвечает их физической реализуемости. При подходящей измеримой структуре такие управления естественно отождествлять со ступенчатыми и ярусными функциями (равномерные пределы ступенчатых функций), а топливные ограничения идеализированно задавать в виде неравенства на интеграл от функции. Пусть λ — неотрицательная конечно-аддитивная мера. Тогда, например, можно положить, что допустимыми являются к.-п. или к.-н. управления f, которые на заданном промежутке времени E удовлетворяют одному

In: A.A. Makhnev, S.F. Pravdin (eds.): Proceedings of the 47th International Youth School-conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications", Yekaterinburg, Russia, 02-Feb-2016, published at http://ceur-ws.org

из условий:

$$\int_E f\,d\lambda = 1, \text{ где } f \text{ — неотрицательная функция;} \tag{1}$$

$$\int_E f\,d\lambda \leqslant 1, \text{ где } f \text{ — неотрицательная функция;} \tag{2}$$

$$\int_E |f|\,d\lambda \leqslant 1; \tag{3}$$

$$\int_E |f|\,d\lambda = 1. \tag{4}$$

Условие (1) может отвечать требованию на полный расход топлива управляемым объектом с нереверсируемым двигателем, условие (2) ослабляет это требование, определяя лишь запас топлива. Условия (3) и (4) задают ограничение на доступное количество топлива и требование на его полный расход в случае управляемого объекта с реверсируемым двигателем. Отметим также, что условие (1) естественным образом появляется в задачах, связанных с использованием плотностей вероятностей (см., например, [1]).

Известно, что во многих задачах при использовании «обычных управлений» оптимальный результат не достигается, а область достижимости не является замкнутым множеством. Это мотивирует расширение класса «обычных управлений» до обобщенных управлений. Впервые расширение линейных задач управления с импульсным ограничением было предложено Н.Н. Красовским [2]. Для задач с геометрическими ограничениями были предложены конструкции расширения в классе мерозначных функций [3,4] и в классе стратегических мер [5]. В линейных задачах с импульсным ограничением и разрывным коэффициентом при управляющем воздействии свою эффективность доказало расширение в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер [6–8]. Для последнего класса задач процедура расширения заключается в погружении множеств допустимых управлений (1)–(4) в компактные в *-слабой топологии подмножества множества всех к.-а. мер ограниченной вариации в виде всюду плотного множества. Отметим, что в работах [6, 7], [8, (15.37), (15.41), Proposition 15.3] для ограничений (1)–(3) были указаны компакты, дающие возможность такого погружения. Мы же изучаем возможность упомянутого погружения для множества всех управлений, удовлетворяющих (4). Исследование данного вопроса было начато автором в работе [9], где мера λ полагалась неатомической. На примере было показано, что важную роль играет факт наличия атомов у упомянутой «базовой» меры λ; при ограничениях (1)–(3) это не имело значения при компактификации. В этой связи в данной работе исследуется «полярный» случай: случай меры с конечным множеством значений. Мы также намечаем путь для интерпретации работы с точки зрения одной известной конструкции расширения линейных задач управления в классе к.-а. мер (см. теорему 2).

Один из основных результатов работы, теорема 2, указывает на то, что во многих линейных задачах с импульсными управлениями и разрывными коэффициентами при управляющем воздействии мы можем не различать ограничения (3) и (4) при исследовании асимптотических аналогов областей достижимости (множеств притяжения, см. [6–8]) и асимптотики значений максиминов (в русле работ [10–12]). То есть имеется эквивалентность по результату в случаях различных множеств программных управлений (отвечающих (3), (4)). Упомянутая эквивалентность обусловлена совпадением множеств обобщенных управлений для различных множеств «обычных управлений» в (практически интересном) случае неатомической меры λ. В случае меры λ с конечным множеством значений подобная эквивалентность не имеет места.

Отметим, что в работе мы не будем ставить задачу управления и приводить конструкции расширения в классе к.-а. мер, подобный материал уже достаточно подробно изложен ранее (см. [6–8]). Мы сосредоточимся лишь на абстрактном исследовании возможности погружения множеств ступенчатых и ярусных функций (удовлетворяющих (4)), определенных на алгебре, в компактные в *-слабой топологии подмножества множества всех к.-а. мер ограниченной вариации в виде всюду плотного множества.

2 Основные обозначения и определения

Мы используем кванторы, пропозициональные связки, а также принимаем аксиому выбора. Через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению. Семейством будем называть множество, все элементы которого сами являются множествами. Если S — множество, то через $\mathcal{P}(S)$ обозначаем семейство всех подмножеств множества S. Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ — натуральный ряд и $\overline{1, s} \triangleq \{i \in \mathbb{N} \mid i \leqslant s\}$ $\forall s \in \mathbb{N}$.

В дальнейшем линейные операции, умножение и порядок в пространствах вещественнозначных (в/з) функций определяем поточечно. Если $s \in \mathbb{N}$, то через $\mathbb{R}^s$ обозначаем множество всех кортежей $(x_i)_{i\in\overline{1,s}} : \overline{1,s} \to \mathbb{R}$, получая фактически s-мерное арифметические пространство; $\tau_{\mathbb{R}}$ есть обычная $|\cdot|$-топология $\mathbb{R}$.

Если (X,τ) — топологическое пространство (ТП) и $A \in \mathcal{P}(X)$, то $cl(A,\tau)$ есть по определению замыкание множества A в ТП (X,τ), а $\tau|_A \triangleq \{A \cap G : G \in \tau\}$ — топология множества A, индуцированная из ТП (X,τ). Если же (X,τ) — ТП и $x \in X$, то полагаем $N^0_\tau(x) \triangleq \{G \in \tau |\ x \in G\}$,

$$N_\tau(x) \triangleq \big\{Y \in \mathcal{P}(X) \big|\ \exists G \in N^0_\tau(x) : G \subset Y\big\}, \tag{5}$$

получая в (5) фильтр [13, гл. I] окрестностей x в ТП (X,τ).

Направленностью [14, гл. 2] в множестве H называется всякий триплет $(D,\preceq,f)$, где $(D,\preceq)$ — непустое направленное множество [14, гл. 2], а f — отображение из D в H. Если $(D,\preceq,f)$ есть направленность в H, оснащенном топологией τ, и $h \in H$, то сходимость $(D,\preceq,f)$ к h определяется следующим образом:

$$\big((D,\preceq,f) \xrightarrow{\tau} h\big) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \big(\forall S \in N_\tau(h)\ \exists d \in D\ \forall \delta \in D\ (d \preceq \delta) \Rightarrow (f(\delta) \in S)\big). \tag{6}$$

Фиксируем непустое множество E и алгебру [13, гл. I] $\mathcal{L}$ подмножеств E. Через $(add)_+[\mathcal{L}]$ обозначаем конус всевозможных неотрицательных в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, а через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ — линейное пространство (всех) в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную вариацию. Мера $\mu \in (add)_+[\mathcal{L}]$ называется (0,1)-мерой на $\mathcal{L}$, если $\mu(E) = 1$ и $\big(\big(\mu(L) = 0\big)$ или $\big(\mu(L) = 1\big)\big)$ $\forall L \in \mathcal{L}$. Если $\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то по определению v_η есть вариация η как функция множеств (см. [15, гл. III, §1]) и

$$\mathcal{L}[\eta] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \eta(L) \neq 0\}.$$

Через $B_0(E,\mathcal{L})$ обозначим множество всех ступенчатых, в смысле $(E,\mathcal{L})$, в/з функций на множестве E [16, гл. 2]), а через $B(E,\mathcal{L})$ — замыкание $B_0(E,\mathcal{L})$ в топологии sup-нормы $||\cdot||_E$ (см. [15, гл. IV, §2]) пространства $\mathbb{B}(E)$ всех ограниченных в/з функций на E; функции из $B(E,\mathcal{L})$ называют ярусными (в смысле $(E,\mathcal{L})$). Отметим, что в общем случае измеримого пространства $(E,\mathcal{L})$ имеем, что $B(E,\mathcal{L})$, как подпространство $(\mathbb{B}(E), ||\cdot||_E)$, является банаховым пространством, причем пространство $B^*(E,\mathcal{L})$, топологически сопряженное к $B(E,\mathcal{L})$, изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме, определяемой как полная вариация, в этой связи см. [16, §3.6]. Конкретный изометрический изоморфизм $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ на $B^*(E,\mathcal{L})$ определяется простейшей операцией интегрирования [16, § 3.3], используемой ниже без дополнительных пояснений. Итак, $(B(E,\mathcal{L}), \mathbb{A}(\mathcal{L}))$ есть двойственность, что позволяет оснащать $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ стандартной *-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$ (см. [15, гл. 5]).

Через $\tau_0(\mathcal{L})$ обозначим топологию тихоновской степени пространства $(\mathbb{R}, \tau_\partial)$ с индексным множеством $\mathcal{L}$, где τ_∂ – дискретная топология $\mathbb{R}$. Отметим, что для любого ограниченного (в смысле нормы-вариации) множества $H, H \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$, выполняется:

$$\tau_*(\mathcal{L})|_H \subset \tau_0(\mathcal{L})|_H. \tag{7}$$

Через $\mathrm{Fin}(X)$ обозначим семейство всех конечных подмножеств X. Приведем далее описание фундаментальной системы окрестностей для $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ в ТП $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L}))$ и $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L}))$:

$$N^{(\partial)}_{\mathcal{L}}(\nu) \triangleq \big\{\{\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \nu(L) = \eta(L)\ \forall L \in \mathcal{K}\} : \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})\big\}; \tag{8}$$

$$N^*_{\mathcal{L}}(\nu) \triangleq \Big\{\big\{\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \bigm| |\int_E f\,d\eta - \int_E f\,d\nu| < \varepsilon\ \forall f \in \mathcal{K}\big\} : \varepsilon > 0,\ \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(B(E,\mathcal{L}))\Big\}. \tag{9}$$

Подробно о топологиях $\tau_*(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L})$ см. в [7, § 2.6, 4.6], [6, с. 41–46], [8, с. 1113–1115].

Если $\mu \in (add)_+[\mathcal{L}]$, то по определению

$$\mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}] \triangleq \big\{\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \bigm| \forall L \in \mathcal{L}\ \big((\mu(L) = 0) \Rightarrow (\nu(L) = 0)\big)\big\}. \tag{10}$$

В (10) определено множество мер ограниченной вариации слабо абсолютно непрерывных относительно μ. Если Y — непустое множество, то через $\mathbf{1}_Y$ обозначим индикатор Y; $\mathbf{1}_Y \in B_0(E,\mathcal{L})\ \forall Y \in \mathcal{L}$. Для ярусной функции $f \in B(I,\mathcal{L})$ и меры $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ введем $f * \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, что отвечает неопределенному μ-интегралу f (см., например, [16, определение 3.7.1]). Отметим, что $\int_E gf\,d\mu = \int_E g\,d(f*\mu)\ \ \forall g \in B(I,\mathcal{L})$.

Напомним определение полной вариации меры произвольной к.-а. меры $\nu, \nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$:

$$v_\nu(E) = \sup\bigl(\{\xi \in [0,\infty[\mid k \in \mathbb{N}, Y_{i\in\overline{1,k}} \text{ — произвольное } \mathcal{L}\text{-разбиение } E, \sum_{i=1}^{k} |\nu(Y_i)| = \xi\}\bigr). \tag{11}$$

Через $\mathbf{D}$ обозначим множество всех (неупорядоченных) конечных разбиений (см. [6, (3.6.10)]) E элементами $\mathcal{L}$; $\{E\} \in \mathbf{D}$. Множество $\mathbf{D}$ оснастим естественным направлением, характеризуемым свойством вписанности одного разбиения в другое: $\forall \mathcal{Z} \in \mathbf{D}\ \ \forall \mathcal{R} \in \mathbf{D}$

$$(\mathcal{Z} \prec \mathcal{R}) \Longleftrightarrow (\forall R \in \mathcal{R}\ \exists Z \in \mathcal{Z} : R \subset Z).$$

Таким образом, $(\mathbf{D}, \prec)$ есть непустое направленное множество (см. [8, (15.24)]). Значит, для любых разбиений $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ из $\mathbf{D}$ существует их мажоранта в направленном множестве $(\mathbf{D}, \prec)$, которую мы обозначим через

$$\mathcal{K}_1 \vee \mathcal{K}_2.$$

3 Случай неатомической меры

В этом разделе мы исследуем возможность погружения множеств ступенчатых и ярусных функций (удовлетворяющих (4)) в случае, когда слабая абсолютная непрерывность определяется относительно неатомической неотрицательной к.-а. меры. Далее нам понадобится

Определение 1 (см. [17, Definition 5.1.2]) *Неотрицательную к.-а. меру ν будем называть неатомической, если $\forall L \in \mathcal{L}[\nu]\ \exists L_* \in \mathcal{L}[\nu] : (L_* \subset L) \& (\nu(L_*) < \nu(L))$. Эквивалентно, неотрицательная к.-а. мера ν на алгебре $\mathcal{L}$ является неатомической тогда и только тогда, когда $\forall L \in \mathcal{L}[\nu]\ \exists L_* \in \mathcal{L}[\nu] : (L_* \subset L) \& (L \setminus L_* \in \mathcal{L}[\nu])$.*

Если $\lambda \in (add)_+[\mathcal{L}]$, то по определению (см. определение полной вариации в (11))

$$\hat{\mathbf{F}}_\lambda \triangleq \Bigl\{f * \lambda : f \in B_0(E,\mathcal{L}), \int_E |f|\, d\lambda = 1\Bigr\}, \mathbf{F}_\lambda \triangleq \Bigl\{f * \lambda : f \in B(E,\mathcal{L}), \int_E |f|\, d\lambda = 1\Bigr\},$$

$$\mathbf{S}_\lambda \triangleq \bigl\{\mu \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) \bigm| v_\mu(E) = 1\bigr\}, \mathbf{B}_\lambda \triangleq \bigl\{\mu \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) \bigm| v_\mu(E) \leqslant 1\bigr\}.$$

Два последних множества являются сферой и шаром пространства слабо абсолютно непрерывных мер соответственно.

Теорема 1 *Если λ — неатомическая неотрицательная к.-а. мера на алгебре $\mathcal{L}$, то*

$$cl(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau) = cl(\mathbf{F}_\lambda, \tau) = cl(\mathbf{S}_\lambda, \tau) = \mathbf{B}_\lambda\ \forall \tau \in \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем очевидную цепочку

$$\hat{\mathbf{F}}_\lambda \subset \mathbf{F}_\lambda \subset \mathbf{S}_\lambda \subset \mathbf{B}_\lambda. \tag{12}$$

Из теоремы Алаоглу и (7) имеем, что $\mathbf{B}_\lambda = cl(\mathbf{B}_\lambda, \tau)\ \forall \tau \in \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})\}$. Как следствие, $cl(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau) \subset$ $\subset cl(\mathbf{F}_\lambda, \tau) \subset cl(\mathbf{S}_\lambda, \tau) \subset \mathbf{B}_\lambda\ \forall \tau \in \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})\}$. Следовательно,

$$cl(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})) \subset cl(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})) \subset cl(\mathbf{F}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})) \subset cl(\mathbf{S}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})) \subset \mathbf{B}_\lambda, \tag{13}$$

$$cl(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})) \subset cl(\mathbf{F}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})) \subset cl(\mathbf{S}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})) \subset \mathbf{B}_\lambda. \tag{14}$$

Теперь покажем, что $\mathbf{B}_\lambda \subset cl(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L}))$. Зафиксируем произвольную меру $\mu \in \mathbf{B}_\lambda, v_\mu(E) \leqslant 1$. Используем далее определение неатомической меры λ. Пусть функция $\mathbf{p}_\mu$ действует по правилу

$$\mathcal{K} \longmapsto \frac{1 - v_\mu(E)}{2\bigl|\{L \in \mathcal{K} \mid L \in \mathcal{L}[\lambda]\}\bigr|} : \mathbf{D} \to \mathbb{R}.$$

Далее нам потребуется функция множеств, которая бы осуществляла в некотором смысле «хорошее» разбиение произвольного множества из $\mathcal{L}[\lambda]$. Пусть $\mathbf{c} : \mathcal{L}[\lambda] \to \mathcal{L}[\lambda] \times \mathcal{L}[\lambda]$ есть некоторая функция, которая удовлетворяет свойству: $\forall L \in \mathcal{L}[\lambda]$

$$\mathbf{c}(L) \overset{\triangle}{=} (L_*, L \setminus L_*), \text{ где } (L_*, L \setminus L_* \in \mathcal{L}[\lambda])\&(L_* \subset L);$$

существование такой функции следует из аксиомы выбора. Пусть $L \in \mathcal{L}[\lambda]$, тогда для удобства обозначим первую компоненту упорядоченной пары $\mathbf{c}(L)$ через $\mathbf{c}_1(L)$, а вторую – через $\mathbf{c}_2(L)$; значит $\mathbf{c}(L) = (\mathbf{c}_1(L), \mathbf{c}_2(L))$.

Если $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$, то функцию $\Phi_\mu[\mathcal{K}] : E \to \mathbb{R}$ полагаем такой, что $\forall K \in \mathcal{K}, x \in K$:

$$(\lambda(K) = 0) \Rightarrow (\Phi_\mu[\mathcal{K}](x) \overset{\triangle}{=} 0),$$

$$(\lambda(K) \neq 0) \Rightarrow \Big(\Phi_\mu[\mathcal{K}](x) \overset{\triangle}{=} \frac{\mu(K)}{\lambda(\mathbf{c}_1(K))}\mathbf{1}_{\mathbf{c}_1(K)}(x) +$$

$$+\frac{\mathbf{p}_\mu(\mathcal{K})}{\lambda\big(\mathbf{c}_1(\mathbf{c}_2(K))\big)}\mathbf{1}_{\mathbf{c}_1(\mathbf{c}_2(K))}(x) - \frac{\mathbf{p}_\mu(\mathcal{K})}{\lambda\big(\mathbf{c}_2(\mathbf{c}_2(K))\big)}\mathbf{1}_{\mathbf{c}_2(\mathbf{c}_2(K))}(x)\Big);$$

Очевидно, что $\Phi_\mu[\mathcal{K}] \in B_0(E, \mathcal{L})$ $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$. Остановимся подробнее на $\Phi_\mu[\mathcal{K}]$. На множестве K, $K \in \mathcal{K}$, $\lambda(K) \neq 0$, функция «состоит из трех ступенек». Первая отвечает за аппроксимацию μ, то есть $(\Phi_\mu[\mathcal{K}] * \lambda)(K) = \mu(K)$. Вторая и третья «ступеньки» являются «фиктивными», они не влияют на значение $(\Phi_\mu[\mathcal{K}] * \lambda)(K)$. Их роль заключается в обеспечении равенства $\displaystyle\int_E |\Phi_\mu[\mathcal{K}]|\, d\lambda = 1$ $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$.

Пусть $\Phi_\mu[\cdot] * \lambda \overset{\triangle}{=} (\Phi_\mu[\mathcal{K}] * \lambda)_{\mathcal{K} \in \mathbf{D}}$. Обратимся теперь к определению сходимости направленности (см. (6)) и определению фундаментальной системы окрестностей топологии $\tau_0(\mathcal{L})$ (см. (8)). Пусть $T \in N_{\mathcal{L}}^{(\partial)}(\mu)$, тогда существует семейство $\mathcal{K}_*$, которое порождает T (см. (8)). По построению функции $\Phi_\mu[\cdot]$ имеем, что $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$ $\forall K \in \mathcal{K}_*$ $\big(\mathcal{K}_* \prec \mathcal{K}\big) \Rightarrow \big((\Phi_\mu[\mathcal{K}] * \lambda)(K) = (\Phi_\mu[\mathcal{K}_*] * \lambda)(K) = \mu(K)\big)$. Последнее означает, что $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$ $\big(\mathcal{K}_* \prec \mathcal{K}\big) \Rightarrow \big(\Phi_\mu[\mathcal{K}] * \lambda \in T\big)$. Согласно (6), направленность $(\mathbf{D}, \prec, \Phi_\mu[\cdot] * \lambda)$ сходится к μ в $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L}))$. Следовательно, $\mu \in cl(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L}))$. В силу произвольности выбора $\mu \in \mathbf{B}_\lambda$, мы получили, что $\mathbf{B}_\lambda \subset cl(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L}))$. Комбинируя это с (13) и (14), мы завершаем доказательство. □

Теорема 2 *Если λ — неатомическая неотрицательная к.-а. мера на алгебре $\mathcal{L}$, то*

$$\mathbf{S}_\lambda \subset cl(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau) = cl(\mathbf{F}_\lambda, \tau) = cl(\mathbf{S}_\lambda, \tau) = \mathbf{B}_\lambda = cl\big(\big\{f * \lambda : f \in B_0(E, \mathcal{L}), \int_E |f|\, d\lambda \leqslant 1\big\}, \tau\big) =$$

$$= cl\big(\big\{f * \lambda : f \in B(E, \mathcal{L}), \int_E |f|\, d\lambda \leqslant 1\big\}, \tau\big) \ \forall \tau \in \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})\}.$$

Доказательство теоремы получается комбинацией теоремы 1 и [8, (15.37)].

Пример 1 *Отметим существенность требования неатомичности меры в теореме 2. Пусть $E = [0, 1[$, $\mathcal{L} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Big\{\bigcup\limits_{i=1}^{n} [a_i, b_i[\ : \ (a_i)_{i \in \overline{1,n}}, (b_i)_{i \in \overline{1,n}} \in [0, 1]^n\Big\}$. Тогда $\mathcal{L}$ — наименьшая алгебра, порожденная полуалгеброй всевозможных открытых справа промежутков $E = [0, 1[$. Через λ обозначим след меры Дирака, сосредоточенной в точке $\frac{1}{2}$, на $\mathcal{L}$. Пусть $\mu = \frac{1}{2}\lambda$. Легко проверить, что $\mu \in \mathbf{B}_\lambda = \Big\{\eta \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) \mid v_\eta(E) \leqslant 1\Big\}$. Пусть*

$$\mathbb{F} \overset{\triangle}{=} \big\{f \in B_0(E, \mathcal{L}) \ \big| \ \int_E |f|\, d\lambda = 1\big\} = \Big\{f \in B_0(E, \mathcal{L}) \ \Big| \ \Big|f\left(\frac{1}{2}\right)\Big| = 1\Big\}.$$

Выделим одну окрестность меры μ в $*$-слабой топологии (см. (9)): $\mathbb{M} \overset{\triangle}{=} \{\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid |\int_E \mathbf{1}_E\, d\eta - \int_E \mathbf{1}_E\, d\mu| < \frac{1}{4}\}$. Легко видеть, что $\mathbb{M} = \{\eta \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid |\eta(E) - \mu(E)| < \frac{1}{4}\}$. Отметим, что $\forall u \in \mathbb{F}$ выполняется: $|(u * \lambda)\big(E\big)| = 1$; при этом $\mu(E) = \frac{1}{2}$. Очевидно, что не существует функции f из множества $\mathbb{F}$ такой, что $f * \lambda \in \mathbb{M}$. Значит, невозможно построить направленность, которая бы сходилась к μ. Пример показывает, что для меры с атомами теорема 2 не верна.

Отметим, что случай неатомической меры λ является естественным в задачах управления. В таких случаях множества $\hat{\mathbf{F}}_\lambda$ и $\mathbf{F}_\lambda$ отвечают условию (4) на полный расход топлива для системы с реверсируемым двигателем (при этом λ есть мера Лебега). Подобное условие является достаточно частым в задачах космической навигации.

4 Случай меры с конечным множеством значений

Пример мотивирует исследовать случай, когда мера, относительно которой определяется непрерывность, имеет атомы. В этой главе мы исследуем замыкание сферы пространства слабо абсолютно непрерывных к.-а. мер относительно неотрицательной меры с конечным множеством значений. Отметим, что у такой меры обязательно есть атомы.

Определение 2 (см. [17, §11.1]) *Мера $\mu, \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, называется мерой с конечным множеством значений, если $\{\mu(L) : L \in \mathcal{L}\}$ есть конечное множество. Обозначим множество таких мер через $(fr)[\mathcal{L}]$.*

Лемма 1 (см. [17, Lemma 11.1.3]) *Если $\lambda \in (fr)[\mathcal{L}]$, то найдутся попарно дизъюнктные множества $L_1, L_2, \ldots, L_m$ из $\mathcal{L}$, ненулевые действительные коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и к.-а.$(0,1)$-меры $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ на $\mathcal{L}$ такие, что $\lambda_i(L_i) = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ и $\lambda = \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i$.*

Доказательство леммы 1 использует важный в дальнейшем объект, который мы определим следующим образом: $\forall \mu \in (fr)[\mathcal{L}]\ \forall k \in \mathbb{N}$

$$(dis)[\mu, k] \overset{\triangle}{=} \big\{(L_i)_{i\in\overline{1,k}} \in \mathcal{L}[\mu]^k \ \big|\ L_i \cap L_j = \varnothing\ \forall i \in \overline{1,k}\ \forall j \in \overline{1,k} \setminus \{i\}\big\}.$$

При доказательстве леммы [17, Lemma 11.1.3] показано, что для меры $\mu \in (fr)[\mathcal{L}]$ существует наибольшее натуральное число, обозначим его через $\mathbf{k}[\mu]$, такое, что $(dis)[\mu, \mathbf{k}[\mu]] \neq \varnothing$; очевидно, что $\mathbf{k}[\mu] \leqslant |\{\mu(L) : L \in \mathcal{L}\}|$. Более того, именно число $\mathbf{k}[\mu]$ совпадает с числом слагаемых в представлении, указанном в лемме 1. Отметим два важных далее свойства, использованных при доказательстве [17, Lemma 11.1.3]: $\forall \mu \in (fr)[\mathcal{L}]$

(a) $\forall (L_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}[\mu]}} \in (dis)[\mu, \mathbf{k}[\mu]]\ \forall i \in \overline{1,\mathbf{k}[\mu]}$ если для $T \in \mathcal{L}$ выполняется $T \subset L_i$, то верно одно из двух: $\mu(T) = 0$ или $\mu(T) = \mu(L_i)$.

(b) $\forall T \in \mathcal{L}\ \forall (L_i)_{i\in\overline{1,\mathbf{k}[\mu]}} \in (dis)[\mu, \mathbf{k}[\mu]]$ справедлива импликация

$$\left(T \subset E \setminus \bigcup_{i=1}^{\mathbf{k}[\mu]} L_i\right) \Rightarrow (\mu(T) = 0).$$

Для удобства зафиксируем произвольную меру $\lambda, \lambda \in (add)_+[\mathcal{L}] \cap (fr)[\mathcal{L}]$. Пусть $m = \mathbf{k}[\lambda]$. Будем полагать, что для данной меры заданы также наборы коэффициентов $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,m}}$ и к.-а. (0,1)-мер $(\lambda_i)_{i\in\overline{1,m}}$, корректно задающих представление меры λ, отвечающее лемме 1.

Лемма 2 *Для множества всех слабо абсолютно непрерывных к.-а. мер относительно λ выполняется:*

$$\mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) = \Big\{\sum_{i=1}^m \kappa_i \lambda_i \ :\ (\kappa_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m\Big\}. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим множество в правой части (15) через Ω. Очевидно, что $\Omega \subset \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L})$ по определению слабой абсолютной непрерывности и в силу неотрицательности λ.

Докажем теперь, что $\mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) \subset \Omega$. Пусть $\mu \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L})$. Введем в рассмотрение меру $\omega : \omega \overset{\triangle}{=} \sum_{i=1}^m \mu(L_i)\lambda_i$, где $(L_i)_{i\in\overline{1,m}} \in (dis)[\lambda, m]; \omega \in \Omega$ Покажем, что $\mu = \omega$. Пусть $J \in \mathcal{L}$. Возможны два варианта:

(1) $J \notin \mathcal{L}[\lambda]$. В силу слабой абсолютной непрерывности меры ω, μ относительно λ имеем, что $\omega(J) = \mu(J) = \lambda(J) = 0$.

(2) $J \in \mathcal{L}[\lambda]$. Далее используем процедуру, цель которой — построить конечное разбиение множества J таким образом, чтобы значения мер ω, μ на элементах разбиения совпадали; тогда из конечной аддитивности ω, μ будет вытекать равенство $\omega(J) = \mu(J)$. Из $J \in \mathcal{L}[\lambda]$ очевидным образом следует, что $\exists i_1 \in \overline{1,m}\ \exists (L_i)_{i\in\overline{1,m}} \in (dis)[\lambda, m] : L_{i_1} \subset J$. Если при этом $J \setminus L_{i_1} \notin \mathcal{L}[\lambda]$, то процедуру построения

конечного $\mathcal{L}$-разбиения множества J останавливаем; $J = (J \setminus L_{i_1}) \cup L_{i_1}$ и $\omega(J) = 0 + \mu(L_{i_1}) = \mu(J)$. Если при этом $J \setminus L_{i_1} \in \mathcal{L}[\lambda]$, то тогда $\exists i_2 \in \overline{1,m} \setminus \{i_1\}$ $\exists (\widehat{L}_i)_{i\in\overline{1,m}} \in (dis)[\lambda, m] : \widehat{L}_{i_2} \subset J \setminus L_{i_1}$. Если при этом $J \setminus (L_{i_1} \cup \widehat{L}_{i_2}) \notin \mathcal{L}[\lambda]$, то процедуру построения конечного $\mathcal{L}$-разбиения множества J останавливаем; $J = (J \setminus (L_{i_1} \cup \widehat{L}_{i_2})) \cup L_{i_1} \cup \widehat{L}_{i_2}$ и $\omega(J) = 0 + \mu(L_{i_1}) + \mu(\widehat{L}_{i_2}) = \mu(J)$. Если при этом $J \setminus (L_{i_1} \cup \widehat{L}_{i_2}) \in \mathcal{L}[\lambda]$, то проводим третий шаг процедуры. Отметим, что если на первом шаге процедуры мы бы имели s' мер λ_i из разложения ($s' \leqslant m$), для которых можно было бы найти измеримые подмножества J, на которых меры имеют ненулевое значение, то на втором шаге процедуры множество $J \setminus L_{i_1}$ имеет $s' - 1$ мер λ_i из разложения, для которых можно найти подмножества J, на которых меры имеют ненулевое значение. Следовательно, данная процедура потребует не больше m шагов в силу представления меры λ как конечной суммы (0,1)-мер из m слагаемых.

По окончании процедуры мы получим такое конечное $\mathcal{L}$-разбиение множества J, что на каждом элементе разбиения либо мера λ (следовательно, ω и μ) равна нулю, либо их меры ω и μ совпадают. Имеем, что $\omega(J) = \mu(J)$ и в этом случае. Поскольку выбор $J \in \mathcal{L}$ был произвольным, установлено, что $\omega = \mu$. Поскольку выбор $\mu \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L})$ был произвольным, установлено, что $\mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L}) \subset \Omega$. □

Следующем объектом исследования является полная вариация произвольной меры с конечным множеством значений. В этой связи мы приводим следующее

Предложение 1 (см. [17, Proposition 11.1.4]) *Пусть $\mu \in (fr)[\mathcal{L}]$ имеет следующее представление (согласованное с леммой 1): $\mu = \sum_{j=1}^{n} t_j\mu_j$, где $(\mu_j)_{i\in\overline{1,n}}$ есть последовательность к.-а. (0,1)-мер, а $(t_j)_{i\in\overline{1,n}}$ – последовательность ненулевых действительных чисел. Тогда множество значений меры μ совпадает с множеством:*

$$\{0\} \cup \Big\{\sum_{i=1}^{k} t_{i_j} : \ \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \overline{1,n} \ \ and \ \ 1 \leqslant k \leqslant n\Big\}.$$

Следствие 1 *Пусть $\mu \in (fr)[\mathcal{L}]$ имеет следующее представление (согласованное с леммой 1): $\mu = \sum_{j=1}^{n} t_j\mu_j$, где $(\mu_j)_{i\in\overline{1,n}}$ есть последовательность к.-а. (0,1)-мер, а $(t_j)_{i\in\overline{1,n}}$ – последовательность ненулевых действительных чисел. Тогда для полной вариации меры μ выполняется:*

$$v_\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |t_j|.$$

Предложение 2 *Пусть $\mu \in (fr)[\mathcal{L}]$ имеет следующее представление (согласованное с леммой 1): $\mu = \sum_{j=1}^{n} t_j\mu_j$, где $(\mu_j)_{i\in\overline{1,n}}$ есть последовательность к.-а. (0,1)-мер, а $(t_j)_{i\in\overline{1,n}}$ – последовательность ненулевых действительных чисел. Тогда для полной вариации меры μ выполняется:*

$$v_\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} |t_j|.$$

Доказательство является комбинацией следствия 1 и свойств (a), (b). Последние два свойства позволяют показать, что $\forall (L_i)_{i\in\overline{1,n}} \in (dis)[\mu, n]$

$$v_\mu(E) \geqslant |\mu(L_1)| + |\mu(L_2)| + \ldots + |\mu(L_n)| + |\mu(E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} L_i)| = \sum_{i=1}^{n} |t_j|.$$

Лемма 3 *Для единичной сферы и шара пространства всех слабо абсолютно непрерывных к.-а. мер относительно λ выполняется:*

$$\mathbf{S}_\lambda = \Big\{\sum_{i=1}^{m} \kappa_i\lambda_i \mid \big((\kappa_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m\big)\&\big(\sum_{i=1}^{m} |\kappa_i| = 1\big)\Big\}, \ \ \mathbf{B}_\lambda = \Big\{\sum_{i=1}^{m} \kappa_i\lambda_i \mid \big((\kappa_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m\big)\&\big(\sum_{i=1}^{m} |\kappa_i| \leqslant 1\big)\Big\}. \quad (16)$$

Доказательство получено при использовании предложения 2 и леммы 2.

Отметим, что согласно [6, Proposition 4.9.4]

$$\mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}] = cl(\mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}], \tau_*(\mathcal{L})) = cl(\mathbb{A}_\mu[\mathcal{L}], \tau_0(\mathcal{L})) \ \ \forall \mu \in (add)_+[\mathcal{L}]. \quad (17)$$

Напомним, что операция $\vee$ введена в последнем абзаце раздела 2.

Лемма 4 *Если* $\lambda \in (add)_+[\mathcal{L}] \cap (fr)[\mathcal{L}], \nu \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L})$, $(L_j)_{j \in \overline{1, \mathbf{k}[\lambda]}} \in (dis)[\lambda, \mathbf{k}[\lambda]]$, *а* $\mathcal{G}$ *и* $\mathcal{K}$ — $\mathcal{L}$*-разбиения множества* E, *то*

$$\Big(\mathcal{K} = \mathcal{G} \vee \big\{L_1; L_2; \ldots; L_{\mathbf{k}[\lambda]}; E \setminus \bigcup_{i \in \overline{1, \mathbf{k}[\lambda]}} L_i\big\}\Big) \Rightarrow \Big(v_\nu(E) = \sum_{K \in \mathcal{K}} |\nu(K)|\Big).$$

Доказательство основано на следующем факте: $\forall K \in \mathcal{K}$ либо $\exists! i \in \overline{1, \mathbf{k}[\lambda]}$: $(\lambda_i(K) \neq 0) \& (\nu(K) = \kappa_i)$, либо $\nu(K) = \lambda(K) = 0$; мы используем представление $\nu = \sum_{i \in \overline{1, \mathbf{k}[\lambda]}} \kappa_i \lambda_i$ (см. лемму 2).

Теорема 3 *Для* λ, *к.-а. меры с конечным множеством значений, выполняется цепочка равенств:*

$$cl\big(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})\big) = cl\big(\mathbf{F}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})\big) = cl\big(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})\big) = cl\big(\mathbf{F}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})\big) = \mathbf{S}_\lambda. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что

$$cl\big(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})\big) \subset cl\big(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})\big) \subset cl\big(\mathbf{F}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})\big) \subset cl\big(\mathbf{S}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})\big).$$

Дальнейшее доказательство состоит из двух шагов.

(1) Покажем, что $cl\big(\mathbf{S}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})\big) = cl\big(\mathbf{S}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})\big) = \mathbf{S}_\lambda$.

Пусть $\mu_* \in cl\big(\mathbf{S}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})\big)$. В силу (17), имеем $\mu_* \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L})$, а тогда, согласно лемме 2, $\exists (\beta_i)_{i \in m} \in \mathbb{R}^m$: $\mu_* = \sum_{i=1}^m \beta_i \lambda_i$. Более того, для некоторой направленности $(D, \prec, (\mu_d)_{d \in D})$ со значениями в $\mathbf{S}_\lambda$ выполняется $(D, \prec, (\mu_d)_{d \in D}) \overset{\tau_*(\mathcal{L})}{\to} \mu_*$. Из этого вытекает, что для семейства $(L_i)_{i \in \overline{1,m}} \in (dis)[\lambda, m]$ должны выполняться свойства сходимости:

$$(D, \prec, (\mu_d(L_i))_{d \in D}) \overset{\tau_{\mathbb{R}}}{\to} \mu_*(L_i) \quad \forall i \in \overline{1,m}. \tag{19}$$

Так как $\mu_d \in \mathbf{S}_\lambda \;\; \forall d \in D$, то, согласно лемме 3, для каждого значения направленности также имеется представление в виде суммы (0,1)-мер: $\forall d \in D \; \exists (\alpha_i^{(d)})_{i \in \overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m$:

$$\left(\mu_d = \sum_{i=1}^m \alpha_i^{(d)} \lambda_i\right) \;\&\; \left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i^{(d)}| = 1\right).$$

Так как $\mu_*(L_i) = \beta_i \lambda_i(L_i) = \beta_i$, то (19) можно интерпретировать как $(D, \prec, (\alpha_i^{(d)})_{d \in D}) \overset{\tau_{\mathbb{R}}}{\to} \beta_i \; \forall i \in \overline{1,m}$. Следовательно, мы имеем дело со покоординатной сходимостью на единичной m-сфере (в норме «сумма модулей»). Учитывая, что конечномерная сфера в таком случае является замкнутой, мы получаем $\sum\limits_{i=1}^m |\beta_i| = 1$. Значит (см. лемму 3), $\mu_* \in \mathbf{S}_\lambda$. Следовательно, $cl\big(\mathbf{S}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})\big) = \mathbf{S}_\lambda$. Но $\mathbf{S}_\lambda \subset cl\big(\mathbf{S}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})\big) \subset cl\big(\mathbf{S}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})\big)$. Следовательно, $\mathbf{S}_\lambda = cl\big(\mathbf{S}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})\big) = cl\big(\mathbf{S}_\lambda, \tau_*(\mathcal{L})\big)$.

(2) Требуется доказать, что $\mathbf{S}_\lambda \subset cl\big(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})\big)$.

Используем далее направленное множество $(\mathbf{D}, \prec)$ из теоремы 1. Итак, зафиксируем произвольную меру $\mu \in \mathbf{S}_\lambda$, для которой мы далее построим аппроксимирующую направленность. Определим функцию $\theta_+[\mu]$: $\mathcal{L} \to [0, \infty[$ по следующему правилу:

$$\Big(\theta_+[\mu](L) \triangleq 0 \; \forall L \in \mathcal{L} : \lambda(L) = 0\Big) \& \Big(\theta_+[\mu](L) \triangleq \frac{\mu(L)}{\lambda(L)} \; \forall L \in \mathcal{L}[\lambda]\Big).$$

Приведем основное свойство такой функции: $\mu(L) = \lambda(L)\theta_+[\mu](L) \; \forall L \in \mathcal{L}$.

Введем далее оператор, «улучшающий» в некотором смысле семейства из $\mathbf{D}$, используя (произвольный) элемент $(L_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}[\lambda]}}$ из $(dis)[\lambda, \mathbf{k}[\lambda]]$. Определим функцию $\mathbf{i} : \mathbf{D} \to \mathbf{D}$ следующим образом: $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$

$$\mathbf{i}(\mathcal{K}) = \mathcal{K} \vee \big\{L_1; L_2; \ldots; L_{\mathbf{k}[\lambda]}; E \setminus \bigcup_{i \in \overline{1, \mathbf{k}[\lambda]}} L_i\big\}.$$

Предназначение $\mathbf{i}$ — осуществить «измельчение» разбиения $\mathcal{K}$, применив $(L_i)_{i \in \overline{1, \mathbf{k}[\lambda]}}$. Легко показать (см. (12) и лемму 4), что для любой меры η из $\hat{\mathbf{F}}_\lambda$ ее полная вариация $v_\eta(E)$ совпадает с суммой модулей значений меры на элементах разбиения $\mathbf{i}(\mathcal{K}) \; \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$.

Если $\mathcal{K} \in \mathbf{D}$, то ступенчатую функцию $\Theta_\mu^+[\mathcal{K}] : E \to \mathbb{R}$ полагаем такой, что $\forall K \in \mathcal{K}, x \in K$:

$$\Theta_\mu^+[\mathcal{K}](x) \stackrel{\triangle}{=} \theta_+[\mu](K).$$

Пусть $\Theta_\mu^+[\cdot] \stackrel{\triangle}{=} (\Theta_\mu^+[\mathcal{K}])_{\mathcal{K}\in\mathbf{D}}$ и $f \circ g$ обозначает суперпозицию функций f, g. Тогда $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$ $(\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K}) \in B_0(E, \mathcal{L})$. Более того, выполняется: $\forall K \in \mathcal{K}$ $\forall \widehat{K} \in \mathbf{i}(\mathcal{K})$

$$\int_K \Theta_\mu^+[\mathcal{K}]\, d\lambda = \mu(K), \quad \int_{\widehat{K}} (\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K})\, d\lambda = \mu(\widehat{K}), \quad \int_K (\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K})\, d\lambda = \mu(K).$$

Отметим, что $|(\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K})| * \lambda \in \mathbb{A}_\lambda(\mathcal{L})$ $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$. Учитывая это и лемму 4, имеем цепочку равенств:

$$\int_E |(\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K})|\, d\lambda = \sum_{K\in\mathbf{i}(\mathcal{K})} \big(|(\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K})| * \lambda\big)(K) = v_{|(\Theta_\mu^+[\cdot]\circ\mathbf{i})(\mathcal{K})|*\lambda}(E) \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{K\in\mathbf{i}(\mathcal{K})} \big(|(\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K})| * \lambda\big)(K) = \sum_{K\in\mathbf{i}(\mathcal{K})} |\mu(K)| = v_\mu(E) = 1 \quad \forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}.$$

Значит, $\int_E |(\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K})|\, d\lambda = 1$ $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$, а тогда $(\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K}) * \lambda \in \hat{\mathbf{F}}_\lambda$ $\forall \mathcal{K} \in \mathbf{D}$.

Легко получить следующее: $\forall \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in \mathbf{D}$ $\forall K \in \mathcal{K}_1$

$$(\mathcal{K}_1 \prec \mathcal{K}_2) \Rightarrow \Big(\big((\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K}_1) * \lambda\big)(K) = \big((\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K}_2) * \lambda\big)(K)\Big). \tag{20}$$

Пусть $(\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\cdot) * \lambda \stackrel{\triangle}{=} ((\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\mathcal{K}) * \lambda)_{\mathcal{K}\in\mathbf{D}}$. Легко убедиться (см. (6), (8), (20)), что направленность $(\mathbf{D}, \prec, (\Theta_\mu^+[\cdot] \circ \mathbf{i})(\cdot) * \lambda)$, со значениями в $\hat{\mathbf{F}}_\lambda$, сходится к μ в ТП $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_0(\mathcal{L}))$. Тогда $\mu \in cl\big(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})\big)$; в силу произвольности выбора $\mu \in \mathbf{S}_\lambda$ получаем, что $\mathbf{S}_\lambda \subset cl\big(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau_0(\mathcal{L})\big)$. $\square$

Отметим, что

$$cl(\hat{\mathbf{F}}_\lambda, \tau) = cl(\mathbf{F}_\lambda, \tau) = cl(\mathbf{S}_\lambda, \tau) = \mathbf{S}_\lambda \neq \mathbf{B}_\lambda = cl\Big(\big\{f * \lambda : f \in B_0(E, \mathcal{L}), \int_E |f|\, d\lambda \leqslant 1\big\}, \tau\Big) =$$

$$= cl\Big(\big\{f * \lambda : f \in B(E, \mathcal{L}), \int_E |f|\, d\lambda \leqslant 1\big\}, \tau\Big) \quad \forall \tau \in \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})\}.$$

Следовательно, аналог теоремы 2 не имеет места в случае, когда слабая абсолютная непрерывность определяется относительно меры с конечным множеством значений. Однако остается открытым вопрос: а что, если «базовая» мера содержит атомы, но не является мерой с конечным множеством значений. В этой связи интерес представляет теорема Собчика–Хаммера [18], указывающая на возможность разложения любой к.-а. меры в сумму двух к.-а. мер, одна из которых непрерывна, а вторая является счетной суммой (0,1)-мер. Отметим, что теоремы 1–3 являются логическим завершением исследований [6–8], касающихся возможности погружения множеств управлений, удовлетворяющих (1)–(3), в компакты.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No 16-31-00177 мол_а.

Список литературы

[1] A.G. Chentsov. Correct expansion of some unstable problems of statistical information processing, *Cybernetics and Systems Analysis,* 2: 235–250, 2001.

[2] N.N. Krasovskii. *Theory of Motion Control.* Nauka, Moscow, 1968 (in Russian). = Н.Н. Красовский. *Теория управления движением.* М.: Наука, 1968.

[3] R.V. Gamkrelidze. *Principles of optimal control theory.* New York: Plenum Press, 1978.

[4] J. Warga. *Optimal Control of Differential and Functional Equations.* New York, Academic Press, 1972.

[5] A.I. Subbotin, A.G. Chentsov. *Optimization of Guarantee in Control Problems.* Moscow: Nauka, 1981 (in Russian). = А.И. Субботин, А.Г. Ченцов. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

[6] A.G. Chentsov. *Asymptotic attainability.* Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1997.

[7] A.G. Chentsov, S.I. Morina. *Extensions and Relaxations.* Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 2002.

[8] A.G. Chentsov. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems. *Journal of Mathematical Sciences*, 133(2): 1045–1206, 2006.

[9] A. Baklanov. A Density Property of Finitely Additive Measures. *Int. Journal of Math. Analysis*, 8(7): 301–305, 2014.

[10] A.P. Baklanov. A game problem with asymptotic impulse control. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, 3: 3–14, 2011 (in Russian). = А.П. Бакланов. Об одной игровой задаче асимптотически импульсного управления. *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 3: 3–14, 2011.

[11] A.G. Chentsov. About presentation of maximin in the game problem with constraints of asymptotic character. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 3: 104–119, 2010 (in Russian). = А.Г. Ченцов. О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера. *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 3: 104–119, 2010.

[12] A.P. Baklanov. On the representation of maximin of an impulse control problem. *Differential Equations and Control Processes*, 3: 49–69, 2012 (in Russian). = А.П. Бакланов. К вопросу о представлении максимина в одной задаче импульсного управления. *Дифференц. уравнения и процессы управления*, 3: 49–69, 2012.

[13] N. Bourbaki. *General Topology.* Paris: Hermann, 1940.

[14] J.L. Kelley. *General topology.* New York: Van Nostrand, 1955.

[15] N. Dunford, J.T. Schwartz. *Linear Operators. Part 1: General Theory.* New York: Interscience, 1958.

[16] A.G. Chentsov. *Theory of finitely additive measures.I.* Ekaterinburg: RIO UGTU–UPI, 2008 (in Russian). = А.Г. Ченцов. *Элементы конечно-аддитивной теории меры. I.* Екатеринбург: РИО УГТУ–УПИ, 2008.

[17] Rao K. P. S. Bhaskara, Rao M. Bhaskara. *Theory of Charges. A Study of Finitely Additive Measures.* New York: Academic Press, 1983.

[18] A. Sobczyk, P. C. Hammer. A decomposition of additive set functions. *Duke Math. J.*, 11: 839–846, 1944.

On density properties of weakly absolutely continuous measures

Artem P. Baklanov
International Institute for Applied Systems Analysis (Laxenburg, Austria)
Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics (Yekaterinburg, Russia)
Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)

Keywords: finitely additive measures, weak absolute continuity, weak-star topology, non-atomic or atomless measures.

It is shown that some set of all step functions (and the set of all uniform limits of ones) allows an embedding into some compact subset (with respect to weak-star topology) of the set of all finitely additive measures of bounded variation in the form of an everywhere dense subset. Precisely, we considered the set of all step functions (the set of all uniform limits of such functions) such that integral of absolute value of the functions with respect to non-negative finitely additive measure λ is equal to the unit. For these sets, the possibility of the embedding is proved for the cases of non-atomic and finite range measure λ; in the cases the compacts do not coincide. Namely, in the nonatomic measure case, it is shown that the mentioned sets of functions allow the embedding into the unit ball (in the strong norm-variation) of weakly absolutely continuous measures with respect to λ in the form of a everywhere dense subset. In the finite range measure case, it is shown that the mentioned sets of functions allow the embedding into the unit sphere of weakly absolutely continuous measures with respect to λ in the form of a everywhere dense subset. In the last case the sphere is closed in the weak-star topology. An interpretation of these results is given in terms of an approach connected with an extension of linear control problems in the class of finitely additive measures.