Einschließungs- und Nichtexistenzsätze in der geometrischen Maßtheorie

Von der Fakultät für Mathematik der
Universität Duisburg-Essen
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
genehmigte Dissertation

von

Patrick Henkemeyer

aus Oberhausen

Referent: Prof. Dr. Ulrich Dierkes
Korreferent: Prof. Dr. Friedrich Sauvigny

Datum der mündlichen Prüfung: 10.02.2017

Zusammenfassung

Ein stetiges, lineares Funktional auf der Menge der n-dimensionalen Differentialformen mit kompaktem Träger in einer offenen Menge des $\mathbb{R}^{n+k}$ heißt n-dimensionaler Strom mit Kodimension k. Wir betrachten n-dimensionale rektifizierbare Ströme mit kompaktem Träger, welche durch Integration über eine rektifizierbare Menge M entstehen. Diese Objekte erweitern die klassische Differentialgeometrie auf Flächen, welche nicht notwendigerweise glatt sind, durch Verallgemeinerung der Konzepte in einem maßtheoretischen Weg.

In dem ersten Teil dieser Arbeit beweisen wir Einschließungssätze für Area-stationäre Ströme, Ströme mit mittlerem Krümmungsvektor sowie für Area-stationäre Ströme in einem Gravitationsfeld und in Untermannigfaltigkeiten. Falls alle Randkomponenten in einer verallgemeinerten nichtkonvexen Menge liegen, dann ist bereits der gesamte Träger des Stroms in dieser Menge enthalten. Dazu setzen wir geeignete Barrierevektorfelder in die jeweiligen ersten Variationsformeln ein. Weiterhin zeigen wir, dass die Träger der Ströme in diesen verschiedenen Situationen nicht durch die Spitze eines Doppelkegels verlaufen können. Das führt zu Nichtexistenzsätzen für zusammenhängende, verallgemeinerte Flächen unter gewissen Bedingungen. In dem Fall der Area-stationären Ströme mit Kodimension Eins vergrößern wir den Öffnungswinkel des Kegels und geben den größtmöglichen Kegel mit der Nichtexistenz-Eigenschaft an.
In dem zweiten Abschnitt betrachten wir Krümmungsflüsse für Flächen ohne Ränder, sodass wir mit rektifizierbaren Varifaltigkeiten arbeiten. Wir beweisen ein Einschließungsresultat für den Brakke-Fluss in eine zeitabhängige nichtkonvexe Menge und analysieren die Entwicklung von Singularitäten. Wir enden mit der Definition eines schwachen mittleren Krümmungsflusses in einem Gravitationsfeld. Zusätzlich zu den Beweisen der grundlegenden Eigenschaften konzentrieren wir uns auf Vergleichs- und Einschließungssätze.

Abstract

A continuous linear functional on the set of n-dimensional differential forms with compact support in an open set of $\mathbb{R}^{n+k}$ is called an n-dimensional current with codimension k. We consider n-dimensional rectifiable currents with compact support which are obtained by integration over a rectifiable set M. These objects extend the classical differential geometry to surfaces that are not necessarily smooth by generalizing the concepts in a measure theoretic way.

In the first part of this thesis we prove enclosure theorems for area stationary currents, currents with mean curvature vector and for area stationary currents in a gravity field as well as in submanifolds. If all boundary components are in a generalized nonconvex set then the whole support of the current is contained in this set. To see this we plug appropriate barrier vector fields into the first variation formulas. Furthermore we show that the supports of currents in all these different situations cannot pass through the vertex of a double-cone. This leads to non-existence theorems for connected generalized surfaces under certain conditions. In case of area stationary currents of codimension one we are able to enlarge the angle of the cone and state the largest cone with the non-existence property.

In the second part we consider curvature flows of surfaces without boundaries, thus we deal with rectifiable varifolds. We prove an enclosure result for the Brakke-flow in a time dependent nonconvex set and we analyze the development of singularities. We end with the definition of a weak mean curvature flow in a gravity field. In addition to the proofs of basic properties we focus on compare and enclosure theorems.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Notationen und grundlegende Definitionen **9**

2 Geometrische Maßtheorie **14**
2.1 Rektifizierbare Mengen 15
2.2 Varifaltigkeiten 17
2.3 Ströme 19

3 Einschließungs- und Nichtexistenzresultate für stationäre Ströme **22**
3.1 Stationäre Flächen des Area-Funktionals 22
3.1.1 Klassische Minimalflächen 22
3.1.2 Stationäre Ströme 24
3.1.3 Ein Einschließungssatz 26
3.1.4 Ein Nichtexistenzsatz 29
3.1.5 Notwendige Bedingungen für zusammenhängende Ströme 32
3.2 Area-stationäre Ströme in einer Kodimension 34
3.2.1 Die Konstruktion minimaler Enveloppen 35
3.2.2 Ein optimaler Nichtexistenzsatz 38
3.2.3 Verbesserte notwendige Bedingungen für den Zusammenhang 43
3.3 Flächen mit mittlerer Krümmung 44
3.3.1 Klassische Flächen mit mittlerer Krümmung 44
3.3.2 Ströme mit mittlerer Krümmung 45
3.3.3 Ein Einschließungssatz 48
3.3.4 Ein Nichtexistenzsatz 51
3.4 Flächen unter Einfluss einer Schwerkraft 58
3.4.1 Klassische schwere Flächen 58
3.4.2 Stationäre Ströme unter Einfluss einer Schwerkraft 59
3.4.3 Ein Maximumprinzip und Einschließungssätze 60
3.4.4 Ein Nichtexistenzsatz 65
3.5 Stationäre Ströme in einer Untermannigfaltigkeit 73
3.5.1 Krümmungsdefinitionen und -abschätzung 73
3.5.2 Stationäre Ströme in gekrümmten Flächen 76
3.5.3 Einschließungs- und Nichtexistenzsätze 77
3.5.4 Nichtexistenz von stationären Strömen in Sphären 78

4 Einschließungs- und Nichtexistenzresultate für Krümmungsflüsse **80**
4.1 Der Brakke-Fluss 83
4.1.1 Ein Einschließungssatz 91
4.1.2 Singularitätenbildung und ein Nichtexistenzsatz 94
4.1.3 Der klassische mittlere Krümmungsfluss 96
4.2 Der Brakke-Fluss in einem Schwerefeld 98
4.2.1 Eine allgemeine konvexe Einschließungsmenge 104
4.2.2 Vergleichs- und Einschließungssätze 107
4.2.3 Ein Beispiel zu der Singularitätenbildung 113

Literaturverzeichnis **114**

Einleitung

Taucht man zwei Drahtringe in Seifenlauge und zieht diese parallel und koaxial in einem hinreichend kleinen Abstand voneinander wieder heraus, so bildet sich eine zusammenhängende Seifenfläche mit kleinstmöglicher Oberfläche zwischen den beiden Drahtringen. Diese Fläche besitzt die Form eines Katenoids. Sind die Randringe weiter voneinander entfernt, so entsteht keine zusammenhängende Fläche mehr. Das Objekt mit minimaler Oberfläche zerfällt in mehrere Komponenten und besteht in diesem Fall aus den zwei disjunkten Kreisscheiben innerhalb der Ringe. Besitzen die beiden Randringe jeweils den Radius 1 und einen Abstand voneinander, welcher größer als $3,01775912307664\ldots$ ist, dann kann die Fläche *nicht* aus einem zusammenhängenden Stück bestehen.

Wie kann man dieses und ähnliche, komplexere Phänomene in einem möglichst allgemeinen mathematischen Kontext beschreiben? Welche Aussagen über Flächen lassen sich treffen, falls nicht nur Kreisränder, sondern beliebige Randkonfigurationen mit beliebig vielen Komponenten zugelassen werden? Was passiert, wenn nicht nur glatte zweidimensionale Flächen betrachtet werden, vielmehr in beliebigen Dimensionen und Kodimensionen gerechnet wird sowie eine unvorstellbar große Klasse von Singularitäten zugelassen ist? Weiterhin ist man bestrebt nicht nur Flächenminimierer zu betrachten, sondern auch stationäre Flächen von verallgemeinerten Energien und die Entwicklung von geschlossenen Flächen zu untersuchen, welche sich in einem zeitlichen Verlauf in Abhängigkeit ihrer Krümmung verformen.

Schon in den einfachsten Fällen ist in der Regel eine explizite Lösung kaum berechenbar. Dennoch ist man an den Ausmaßen der Flächen interessiert, um einen konkreten Überblick über das Aussehen der Lösungsfläche zu bekommen. Eine zweite beachtenswerte Frage ist, ob bei den gegebenen Randdaten eine zusammenhängende Fläche existieren kann oder eine mögliche Lösung in mehrere Komponenten zerfallen muss. Bei der Untersuchung von zeitlich fließenden Flächen ist man erneut an dem Ausmaß der Familie der Flächen und besonders an der Entstehung von Singularitäten interessiert. Die weitreichende Beantwortung dieser Fragestellungen ist Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Was bisher bekannt war

Wir gehen hier kurz auf die dieser Arbeit zugrunde liegenden Veröffentlichungen ein. In den einzelnen Kapiteln wird die Literatur genauer vorgestellt.

Es war bereits T. Radó [31] bekannt, dass eine zweidimensionale Fläche in dem dreidimensionalen Euklidischen Raum mit minimaler Oberfläche in der konvexen Hülle ihrer Randwerte liegt. Ohne die Lösung explizit zu kennen, erhält man damit eine grobe Abschätzung für die Form der Fläche. Das Resultat ist unabhängig von der Anzahl der Randkomponenten. S. Hildebrandt [21] erweiterte dieses Ergebnis, in dem Sinne, dass er nichtkonvexe Einschließungsmengen für die Lösung fand. Liegen die Randwerte beispielsweise in einem Doppelkegel, so liegt auch die Minimalfläche oder - unter geeigneten Bedingungen - eine Fläche mit vorgeschriebener mittlerer Krümmung innerhalb dieses Kegels. Außerdem ist es für die Fläche, welche durchaus Verzweigungspunkte besitzen kann, nicht möglich durch die Kegelspitze zu verlaufen und die Fläche muss somit in mehrere Komponenten zerfallen, falls ihre Randdaten in den beiden Kegelhälften liegen.

Diese Ergebnisse wurden von U. Dierkes [6] sowie von U. Dierkes und D. Schwab [10] auf beliebige Dimensionen und Kodimensionen verallgemeinert, jedoch werden in ihren Untersuchungen nur glatte Flächen ohne Singularitäten zugelassen.
Für Minimalflächen in einer Kodimension konnte U. Dierkes [6] außerdem den Öffnungswinkel des Doppelkegels verbessern, basierend auf einer Idee von R. Osserman und M. Schiffer [30] für den zweidimensionalen Fall. Dieser Doppelkegel besitzt den größtmöglichen Öffnungswinkel, um das Nichtzusammenhängen von Flächen bei geeigneter Lage der Ränder zu beweisen.

Eine gute Übersicht dieser Resultate liefert auch das Buch von U. Dierkes, S. Hildebrandt und A. J. Tromba [8, §4.1-§4.3].

Bei der Betrachtung von Hyperflächen mit konstanter Dichte in einem Schwerefeld verändern sich die Ergebnisse. Erste Resultate für nichtkonvexe Einschließungsmengen existieren für den zweidimensionalen Fall unter Bedingungen an die äußeren Daten von R. Böhme, S. Hildebrandt und E. Tausch [3] und die Erweiterung auf glatte Flächen beliebiger Dimension stammt von S. Winklmann [39].

Ist eine Fläche in einem nichtstationären Zustand gegeben, so wird sich diese in dem zeitlichen Verlauf verformen, um in eine „physikalisch" günstigere Form zu gelangen. Eine gute Beschreibung dieses Phänomens liefert das Fließen in Normalenrichtung der Fläche, wobei die Fließstärke durch die mittlere Krümmung bestimmt wird. K. Ecker [13] betrachtete diesen mittleren Krümmungsfluss für glatte, beliebig dimensionale Flächen einer Kodimension und konnte, adaptierend auf dem oben genannten Resultat von U. Dierkes, ein Einschließungsresultat beweisen, welches außerdem einen direkten Beweis für die Entstehung von Singularitäten in endlicher Zeit zulässt.

Für Hyperflächen in einem Schwerefeld wurde der entsprechende Fluss für glatte parametrische Flächen von S. Winklmann [39] betrachtet. Durch vergleichbare Bedingungen wie in dem stationären Fall sowie an die Höhe der Anfangsfläche konnte er den gesamten Fluss in eine nichtkonvexe Menge einschließen.

Was bisher *nicht* bekannt war

Alle beschriebenen Forschungsergebnisse weisen eine Gemeinsamkeit auf:

Zunächst existierten die entsprechenden Resultate fast immer für zweidimensionale Abbildungen in den dreidimensionalen Raum; solche Flächen können Verzweigungspunkte aufweisen, also zumindest einen sehr eingeschränkten Typ von Singularitäten besitzen. Bei Flächen beliebiger Dimension wurde in *allen* existierenden Arbeiten gefordert, dass diese mindestens zweimal stetig differenzierbar in dem Sinne einer Untermannigfaltigkeit sind.

In der vorliegenden Arbeit wird diese starke Voraussetzung an die Regularität vollständig aufgehoben. Es werden beliebig dimensionale Flächen mit - in der Regel - beliebiger Kodimension betrachtet, die zusätzlich jede nur vorstellbare Singularität besitzen dürfen. Trotzdem konnten wir alle Aussagen in analoger Weise darstellen und mithilfe anderer Techniken beweisen. Häufig erweitern wir zusätzlich die nichtkonvexen Einschließungsmengen gegenüber dem glatten Fall. Des Weiteren werden weitergehende verwandte Problemstellungen untersucht, die kein Pendant in dem klassischen Kontext besitzen. Dazu zählt die Untersuchung von nichtglatten Flächen in Untermannigfaltigkeiten und die weitreichenden neuen Resultate des Flusses von Flächen in einem Schwerefeld. Für letzteren beweisen wir eine Integralschreibweise für geschlossene Flächen, geben eine Definition des Flusses über Singularitäten hinaus an und enden mit einer ausführlichen Diskussion über Vergleichs- und Einschließungssätze.

Aufbau der vorliegenden Arbeit und deren Hauptergebnisse

Zu Beginn stellen wir die wichtigsten Notationen dieser Arbeit vor und besprechen einige grundlegende Funktionen mit ihren wichtigsten Eigenschaften, die wiederholt in der Arbeit benötigt werden.
Anschließend geben wir in dem zweiten Kapitel eine kurze Einführung in die geometrische Maßtheorie. In diesem werden die Definitionen angegeben und Resultate dargestellt, welche für die weiteren Sätze und Beweise essentiell sind.
Mit Kapitel 3 und 4 folgen die beiden Hauptteile der Arbeit, zunächst die Untersuchung der stationären verallgemeinerten Flächen in verschiedenen Kontexten und anschließend die Bearbeitung zweier Krümmungsflüsse.

Wir geben nun eine Übersicht über die grundlegenden Definitionen und die neu bewiesenen Resultate dieser Arbeit. Dazu seien $n \geq 2$ und $k \geq 1$ natürliche Zahlen.

Für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ bezeichne $\mathcal{D}^n(U)$ die Menge aller n-dimensionalen C^∞-Differentialformen ω in U mit kompaktem Träger in dem üblichen Sinne. Der Dualraum $\mathcal{D}_n(U) := (\mathcal{D}^n(U))^*$ ist der Raum der n-dimensionalen Ströme. Für ein $T \in \mathcal{D}_n(U)$ können wir in natürlicher Weise den Rand $\partial T \in \mathcal{D}_{n-1}(U)$ durch $\partial T(\omega) := T(d\omega)$ mit $\omega \in \mathcal{D}^{n-1}(U)$ definieren. Der Träger $\operatorname{spt} T$ ist das Komplement der größten offenen Menge $\Omega \subset U$, sodass $T(\omega) = 0$ für $\omega \in \mathcal{D}^n(\Omega)$, die Masse oder der Flächeninhalt ist vermöge $\mathbf{M}(T) := \sup_{|\omega|\leq 1} T(\omega)$ definiert und das Bild $f_\# T$ eines Stroms T unter einer Abbildung f wird über die zurückgeholte Differentialform gebildet.
Wir sind im Speziellen an rektifizierbaren Strömen $T \in \mathcal{R}_n(U)$ interessiert. Ein Strom gehört zu der Klasse, falls dieser die Darstellung

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \, \theta(x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) = \int_M \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \, \mathrm{d}\mu_T(x), \quad \omega \in \mathcal{D}^n(U)$$

besitzt. Dabei ist M eine $\mathcal{H}^n$-messbare, abzählbar n-rektifizierbare Teilmenge von U, θ eine positive, lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbare Funktion und $\xi\colon M \to \Lambda_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ist eine $\mathcal{H}^n$-messbare Funktion, die den $\mathcal{H}^n$-f.ü. existierenden approximativen Tangentialraum $\mathcal{T}_x M$ von M orientiert; die Einschränkung $\mathcal{H}^n \llcorner \theta$ bezeichnen wir mit μ_T.
Für diese Klasse lässt sich in natürlicher Weise mit einer geeigneten Diffeomorphismus-Einparameterfamilie $\phi_t, |t| < \varepsilon$ die erste Variation $\delta T := d/dt\, \mathbf{M}(\phi_{t\#}(T \llcorner K))|_{t=0}, K \subset \mathbb{R}^{n+k}$ kompakt, bestimmen und wir können von stationären Strömen reden, welche $\delta T = 0$ für alle glatten Variationsvektorfelder erfüllen. Diese erweitern den klassischen Begriff der minimalen Untermannigfaltigkeit auf nichtreguläre Mengen.

Damit können wir bereits den ersten Satz der vorliegenden Arbeit formulieren, welcher ein Einschließungsresultat in eine nichtkonvexe Menge für stationäre Ströme ist und anschließend zu einer Nichtexistenzaussage führt.

Aussagen, in denen wir etwas über die Ausmaße einer Fläche nur aus der Lage ihrer Randwerte erfahren, indem wir beweisen, dass die Fläche innerhalb einer anderen Menge liegt, also eingeschlossen ist, nennen wir *Einschließungssätze*. Weiterhin bezeichnen wir in der vorliegenden Arbeit Resultate, in denen wir aus der Lage der Randwerte schließen können, dass keine zusammenhängende Fläche existieren kann, als *Nichtexistenzsätze*.

Für eine Signatur $j = 1, \dots, n-1$ definieren wir die beiden quadratischen Polynome $r_j(x) := x_1^2 + \ldots + x_{n+k-j}^2$ und $s_j(x) := x_{n+k-j+1}^2 + \ldots + x_{n+k}^2$.

Satz A *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein stationärer Strom in $\mathbb{R}^{n+k}$ mit kompaktem Träger* $\operatorname{spt} T$ *und die Randwerte erfüllen* $\operatorname{spt} \partial T \subset \mathcal{H}_j(R) := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon r_j - (n-j)/j\ s_j \leq R\}$ *für ein $j = 1, \dots, n-1$ und ein $R \in \mathbb{R}$. Dann gilt* $\operatorname{spt} T \subset \mathcal{H}_j(R)$.
Liegen weiterhin Randkomponenten $\operatorname{spt} \partial T$ *sowohl in der oberen Kegelhälfte* $\mathcal{H}_1(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon x_{n+k} > 0\}$ *als auch in* $\mathcal{H}_1(0) \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon x_{n+k} < 0\}$, *dann kann* $\operatorname{spt} T$ *nicht zusammenhängend sein.*

In dem Fall $k = 1$ erhalten wir mithilfe einer anderen Beweismethode, statt des Öffnungswinkels $\beta = \arctan(\sqrt{n-1})$ des Doppelkegels $\mathcal{H}_1(0)$, einen Nichtexistenzkegel mit größerem, *optimalem* Öffnungswinkel. Mit dieser Konstruktion ist der Abstand der beiden Randringe des Seifenhautexperiments zu Beginn der Einleitung zu erklären.

Ist die totale Variation $\|\delta T\|$ ein Radonmaß und gilt $\|\delta T\| \llcorner \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon D_{\mu_T} \|\delta T\|(x) = +\infty\} = 0$, dann kann $-D_{\mu_T}\|\delta T\| \sigma =: \mathbf{H} \in L^1(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k}; \mu_T)$, mit einer geeigneten Signatur $\sigma \in L^1(\mathbb{R}^{n+k}, \mathcal{S}^{n+k-1}(1); \mu_T)$, als der mittlere Krümmungsvektor des Stroms T interpretiert werden. Hierbei bezeichnet $D_{\nu_1}\nu_2$ die Radon-Nikodym-Ableitung für zwei Radonmaße $\nu_i, i = 1, 2$. Wir erhalten unter geeigneten Bedingungen an den mittleren Krümmungsvektor exemplarisch das folgende Resultat.

Satz B *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein Strom mit kompaktem Träger* $\operatorname{spt} T$ *und mittlerem Krümmungsvektor* $\mathbf{H}$. *Die Randwerte erfüllen* $\operatorname{spt} \partial T \subset \mathcal{H}_j(R) := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon r_j - (n-j)/j\, b\, s_j \leq R\}$ *für ein $j = 1, \dots, n-1$, ein $b \in [0,1]$ und ein $R \in \mathbb{R}$. Weiterhin gelte $q := |x||\mathbf{H}(x)| < 1$ für μ_T-f.a. $x \in \mathbb{R}^{n+k} \setminus \mathcal{H}_j(R)$ und der Parameter erfülle $b \leq 1 - q$. Dann gilt* $\operatorname{spt} T \subset \mathcal{H}_j(R)$.
Ist zusätzlich $\theta(x) \geq 1$ μ_T-f.ü., $\mathbf{H} \in L^p_{\mathrm{loc}}(B_\varepsilon(0), \mathbb{R}^{n+k}; \mu_T)$ für ein $p > n$ sowie sowohl $\operatorname{spt} \partial T \cap \mathcal{H}_1(0) \cap \{x \colon x_{n+k} > 0\} \neq \emptyset$ *als auch* $\operatorname{spt} \partial T \cap \mathcal{H}_1(0) \cap \{x \colon x_{n+k} < 0\} \neq \emptyset$, *dann kann* $\operatorname{spt} T$ *nicht zusammenhängend sein.*

Untersucht man nicht die erste Variation der Masse $\mathbf{M}(T)$ eines Stroms, sondern betrachtet stattdessen eine beliebige stetige Funktion $F \colon U \times \Lambda_n \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$, welche homogen in der zweiten Komponente ist, so lässt sich für das Integral von F über einen Strom T erneut die erste Variation bestimmen. Wir betrachten $F(x, \zeta) = x_{n+1}^\alpha |\zeta|, \alpha > 0$ für $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1} \cap \{x \colon x_{n+1} > 0\})$, da diese Funktion für $\alpha = 1$ die potentielle Energie einer homogenen Fläche in einem Schwerefeld modelliert. Kritische Lösungen der ersten Variationsformel dieser Masse nennen wir α-stationäre Ströme.

Es sind eine Reihe von Vorarbeiten nötig, um geeignete Einschließungssätze zu beweisen. Für diese Klasse erhalten wir mithilfe eines Maximumprinzips zunächst eine Aussage von dem Typ eines Konvexen-Hülle-Satzes in $\mathbb{R}^{n+1}_+ := \mathbb{R}^{n+1} \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n+1} > 0\}$. Dazu sei $\operatorname{conv}(A)$ die konvexe Hülle einer Menge A und $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}$ die orthogonale Projektion auf den $\mathbb{R}^n$.

Satz C *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein α-stationärer Strom, dann gilt*

$$\operatorname{spt} T \subset \operatorname{conv}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(\operatorname{spt} \partial T)) \times \big[\min_{x \in \operatorname{spt} T} x_{n+1}, \max_{x \in \operatorname{spt} \partial T} x_{n+1}\big].$$

Weiterhin erhalten wir eine allgemeine nichtkonvexe Menge als verschärfte Aussage; dazu sei in diesem Fall $\mathcal{H}_j(R)$ ein um $v > 0$ in positiver x_{n+1}-Richtung verschobenes Hyperboloid. Stellen wir eine geeignete Bedingung an die „äußeren Daten", also an die Geometrie des Hyperboloiden, an α und an die Höhe der Randwerte ∂T, so folgt die entsprechende Einschließung ohne Kenntnisse der mittleren Krümmung einer Lösung $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$.

Zusätzlich beweisen wir für diesen Integranden die folgende Monotonieformel.

Lemma D *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein α-stationärer Strom in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ mit $\partial T = 0$ in U und $h_* := \min_{x \in \operatorname{spt} T} x_{n+1} > 0$. Für $p > n$ gilt*

$$\left(\sigma^{-n}\mu_T(B_\sigma(y))\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\rho^{-n}\mu_T(B_\rho(y))\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{h_*}\frac{\alpha}{p-n}\left(\mu_T(B_R(y))\right)^{\frac{1}{p}}\left(\rho^{1-\frac{n}{p}} - \sigma^{1-\frac{n}{p}}\right)$$

für alle $0 < \sigma < \rho \le R$, sodass $\bar{B}_R(y) \subset U$.

Mit dieser Formel können wir unter der Voraussetzung $\theta \ge 1$ μ_T-f.ü. die Existenz von stationären Tangentialkegeln in allen Punkten des Trägers zeigen und damit beweisen wir die Nichtexistenz von α-stationären Strömen mit zusammenhängenden Trägern, falls die Randdaten eine geeignet getrennte Lage besitzen. Ist ein Strom sogar α-minimierend unter allen Vergleichsströmen, so merken wir an, dass in diesem Fall auch jeder Tangentialkegel Area-minimierend ist.

Wir beenden diesen ersten Abschnitt, indem wir nun fordern, dass $T \in \mathcal{R}_n(U)$ und $U \subset \mathcal{N}$, wobei $\mathcal{N}$ eine beliebig dimensionale glatte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ ist. Es lassen sich wiederum stationäre Ströme definieren, wobei die erste Variationsformel von der Krümmung der gesamten geometrischen Situation abhängt, das heißt von $\mathcal{N}$ und der Lösung T. Ist speziell $\mathcal{N}$ eine Hyperfläche, so geben wir eine Bedingung für einen Einschließungssatz an, die nur von der Krümmung der umgebenden Untermannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ abhängt und nicht mehr von der stationären Lösung T selber. Dazu definieren wir eine neue Art von Krümmung. Es bezeichne $\Lambda_n(x)$ die Summe der n betragsmäßig größten Hauptkrümmungen von $\mathcal{N}$ in x und wir erhalten ein analoges Resultat zu dem Satz B, indem $\mathbf{H}$ durch Λ_n ersetzt wird.

In dem zweiten Teil der Arbeit betrachten wir verallgemeinerte Flächen, welche nicht stationär sind, sondern mit der Zeit in Richtung und Stärke ihrer mittleren Krümmung fließen und in dem letzten Kapitel zusätzlich einer äußeren Schwerkraft unterworfen sind. Diese Flächen sollen keinen Rand besitzen, sodass wir in den Kontext der Varifaltigkeiten gehen. Wir untersuchen die Ausmaße der Flächen, indem wir allgemeine, zeitabhängige Mengen definieren, in denen der gesamte Fluss enthalten ist. Wir sprechen erneut von *Einschließungssätzen* und beweisen, dass bei einer geeigneten Startvarifaltigkeit die Träger in dem zeitlichen Verlauf nicht zusammenhängend bleiben können und formulieren diese Aussage als *Nichtexistenzsatz.*

Sei $G(n+k, n)$ die Menge aller n-dimensionalen Teilräume des $\mathbb{R}^{n+k}$ und für ein offenes $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ definieren wir $G_n(U) := U \times G(n+k, n)$ mit einer geeigneten Metrik. Eine Varifaltigkeit V in U ist dann ein Radonmaß auf $G_n(U)$.

Sei M eine abzählbar n-rektifizierbare Menge und $\mathcal{T}M$ die Menge aller Paare $(x, \mathcal{T}_x M) \in G_n(U)$, mit Punkten x, in denen der approximative Tangentialraum $\mathcal{T}_x M$ existiert. Ist weiter eine positive, lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbare Funktion θ gegeben, dann wird für $\mathcal{A} \subset G_n(U)$ durch $V(\mathcal{A}) := \mathcal{H}^n \llcorner (\theta\, \chi_{\pi(\mathcal{T}M \cap \mathcal{A})})$ eine n-rektifizierbare Varifaltigkeit $V = v(M, \theta)$ definiert. Dabei ist χ die charakteristische Funktion und π die Projektion von $G_n(U)$ auf U. Mit diesen Objekten, welche wir in der Klasse $\mathcal{V}_n(U)$ zusammenfassen, arbeiten wir. Analog zu den rektifizierbaren Strömen existiert ein assoziiertes Radonmaß $\mu_V := \mathcal{H}^n \llcorner \theta$ auf U und es lässt sich die erste Variation δV bestimmen.

Ist wieder das totale Variationsmaß $\|\delta V\|$ lokal endlich und absolutstetig bezüglich μ_V, dann existiert ein mittlerer Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ für $V \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ und ist dieser zusätzlich in $L^2(\mu_V)$, dann definieren wir in dieser nichtsingulären Situation für eine beliebige Testfunktion $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ den Brakke-Kern

$$\mathcal{B}(V, \phi) := \int_{\mathbb{R}^{n+k}} -\phi |\mathbf{H}|^2 + \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M}(D\phi), \mathbf{H} \rangle \, \mathrm{d}\mu_V$$

und andernfalls setzen wir $\mathcal{B}(V, \phi) := -\infty$. Eine Familie $(V_t)_{t \in [0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ist ein Brakke-Fluss, falls mit der oberen Ableitung $\overline{D}_t \mu_{V_t}(\phi) \leq \mathcal{B}(V_t, \phi)$ für alle $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ und für alle Zeiten $t \in [0, T]$ gilt. Für diesen Fluss erhalten wir das folgende Einschließungsresultat, welches bei nichtpositiver rechter Seite interessante geometrische Folgerungen zulässt.

Satz E *Sei* $(V_t)_{t \in [0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *ein Brakke-Fluss in* $\mathbb{R}^{n+k}$ *mit* $\operatorname{spt} V_0$ *kompakt. Für ein* $j = 1, \ldots, n-1$, *ein* $\beta > 0$ *und ein* $R > 0$ *gelte* $\operatorname{spt} V_0 \subset \mathcal{H}_j(R) := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon r_j - (n - j - \beta)/j\ s_j \leq R\}$, *dann ist* $\operatorname{spt} V_t \subset \mathcal{H}_j(R - 2\beta t)$ *für alle Zeiten* $t \in [0, T]$.

Folgerung F *Es gelten die Voraussetzungen von Satz E. Wir betrachten den speziellen Fall* $j = 1$ *sowie* $\beta < n - 1$ *und gehen von* $T > \tau := R/(2\beta)$ *aus. Gilt* $0 \in \operatorname{spt} V_\tau$, *so gehört dieser Punkt zu der singulären Menge der Varifaltigkeit und für Zeiten* $t > \tau$ *kann der Träger des Brakke-Flusses* V_t *nicht zusammenhängend sein, falls Komponenten des Trägers in den beiden Halbräumen* $\mathfrak{h}^\pm := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon \pm x_{n+k} > 0\}$ *liegen.*

In dem letzten Kapitel dieser Arbeit beweisen wir zuerst eine Integraldarstellung für den Fluss von Flächen in einem Schwerefeld. Durch die Berechnung der Evolution des Flächenelements können wir zeigen, dass eine glatte Familie von eingebetteten n-dimensionalen Hyperflächen $\mathcal{M}_t \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ mit der Gaußabbildung $\nu \colon \mathcal{M}_t \to \mathcal{S}^n(1)$ und dem stetigen mittleren Krümmungsvektor $\vec{H}(x) := -(\operatorname{div}_{\mathcal{M}_t} \nu(x))\, \nu(x)$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \phi\, x_{n+1}^\alpha \, \mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}_t} = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Big(-\phi |\vec{H} - \alpha x_{n+1}^{-1} \nu_{n+1} \nu|^2 + \langle D\phi, (\vec{H} - \alpha x_{n+1}^{-1} \nu_{n+1} \nu) \rangle \Big) x_{n+1}^\alpha \, \mathrm{d}\mu_{\mathcal{M}_t}$$

für alle Testfunktionen $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R})$ erfüllt.
In einem nächsten Schritt zeigen wir, wie sich die rechte Seite der Gleichung auch für rektifizierbare Varifaltigkeiten $V \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}_+^{n+1})$ interpretieren lässt und wir definieren einen α-Brakke-Kern $\mathcal{B}^\alpha(V, \phi)$. Der entsprechende α-Brakke-Fluss für eine Familie $(V_t)_{t \in [0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ist dann durch $\overline{D}_t \mu_{V_t}(\phi\, x_{n+1}^\alpha) \leq \mathcal{B}^\alpha(V_t, \phi)$ für beliebige Testfunktionen $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^+)$ und alle Zeiten $t \in [0, T]$ gegeben sowie der Forderung, oberhalb der horizontalen Ebene $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n+1} = h_*\}$ mit einem $h_* > 0$ für alle Zeiten zu bleiben.

Wir zeigen, dass für diesen Fluss grundlegende Eigenschaften über Beschränktheit und Stetigkeit erfüllt sind und geben hier die Einschließung des gesamten Flusses in einen zeitunabhängigen konvexen Zylinder an.

Satz G *Sei* $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *ein* α*-Brakke-Fluss mit* $\operatorname{spt} V_0 \subset K \times [h_*, h^*]$ *mit einer abgeschlossenen, konvexen Menge* $K \subset \mathbb{R}^n$ *und einer Zahl* $h^* \in (h_*, \infty)$*. Dann gilt ebenfalls* $\operatorname{spt} V_t \subset K \times [h_*, h^*]$ *für alle Zeiten* $t \in [0, T]$*.*

Dieser wichtige Satz liefert die natürliche Möglichkeit bei unseren Vergleichs- und Einschließungssätzen jeweils nur $\operatorname{spt} V_0$ als eine kompakte Menge vorauszusetzen. Diese Kompaktheit überträgt sich auf die Träger aller Zeiten.
Wir beweisen eine Reihe von Sätzen, welche konkrete Aussagen über den Verlauf eines α-Brakke-Flusses machen und enden wieder mit einem Einschließungsresultat in einen Hyperboloid, wobei wir keine Bedingungen an den konkreten Fluss stellen müssen. Dieser Satz erlaubt eine Startvarifaltigkeit zu konstruieren, sodass sich eine Singularität bilden kann, wie wir an dem Beispiel konkret zeigen.

Beispiel H *Sei* $(V_t)_{t\in[0,(n+1)^{-1}]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *ein* 1*-Brakke-Fluss mit* $\max_{x\in\operatorname{spt} V_0} x_{n+1} \leq 20$*. Weiterhin sei* $\operatorname{spt} V_0$ *kompakt und in* $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2+\ldots+x_n^2-\frac{1}{2}(n-1)(x_{n+1}-10)^2 \leq \frac{1}{2(n-1)}\}$ *enthalten sowie disjunkt von den beiden Kugeln* $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2+\ldots+x_n^2+(x_{n+1}-15)^2 \leq \frac{5}{2}\}$ und $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 + (x_{n+1} - 5)^2 \leq \frac{5}{2}\}$*. Umläuft der Träger die beiden Kugeln und tritt kein plötzlicher Verlust von Masse auf, so liegt in dem Punkt* $(0, \ldots, 0, 10) \in \operatorname{spt} V_{(n+1)^{-1}}$ *eine Singularität vor und es kann ein Fluss konstruiert werden, der anschließend in mehrere Komponenten zerfällt.*

Mein Dank gilt Herrn Professor **U. Dierkes** für viele interessante Vorlesungen während meines Studiums, mit denen er frühzeitig meine Begeisterung für die Analysis wecken konnte, und besonders für die Betreuung dieser Arbeit und jegliche Unterstützung während meiner Promotionszeit.
Ich möchte der **Studienstiftung des deutschen Volkes** für die ideelle und finanzielle Förderung danken. Diese hat mein Leben durch den Austausch mit Doktoranden aller Fachrichtungen sowie durch viele weitere Kontakte und Veranstaltungen bereichert.
Ferner gilt mein Dank der Stanford Universität in den USA, insbesondere danke ich Herrn Professor **B. White** und Herrn Professor **L. Simon**, für die Möglichkeit meines Forschungsaufenthalts an dem mathematischen Institut, der unter anderem für die erste Hälfte dieser Dissertation inspirierend war.
Schließlich bedanke ich mich bei meinen Kollegen **Tristan Jenschke**, **Peter Lewintan** und **Tobias Tennstädt** für die fruchtbaren Diskussionen und die gemeinsame Arbeit in der Lehre. Sowie bei Tristan für die unzähligen Gespräche über Berggipfel in den Alpen und auf der ganzen Welt.

1 Notationen und grundlegende Definitionen

Wir verwenden in der vorliegenden Arbeit die folgenden Bezeichnungen und Definitionen in der Regel ohne weitere Erklärungen. Sei $N \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ eine natürliche Zahl.

Vektoren, Mengen und Funktionen

$\mathbb{R}^N$ ist der reelle, N-dimensionale *Euklidische Raum* mit der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_N\}$, wobei der Vektor $e_j := (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ die Eins an der j-ten Stelle hat. Vereinzelt verlangen wir von der $(N+1)$.-Koordinate eine Positivitätsbedingung, sodass $\mathbb{R}^{N+1}_+ := \mathbb{R}^{N+1} \cap \{x \in \mathbb{R}^{N+1} \colon x_{N+1} > 0\}$, und in einer Dimension ist mit dem Plus der nichtnegative reelle Zahlenstrahl $\mathbb{R}^+ := \mathbb{R} \cap \{t \in \mathbb{R} \colon t \geq 0\}$ gekennzeichnet.
Sind $u = (u_1, \ldots, u_N), v = (v_1, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ zwei Vektoren, dann bezeichnet $\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^N u_i v_i$ das (euklidische) *Skalarprodukt* und $|u| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ die (euklidische) *Norm* von u. Das Quadrat der (euklidischen) *Norm* einer linearen Abbildung $\mathbb{R}^{N \times N} \ni Q = (q_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ ist durch $|Q|^2 = \sum_{i,j=1}^N q_{ij}^2$ gegeben. Außerdem stellt $\mathbb{I}_N$ die $N \times N$-Einheitsmatrix oder Identitätsabbildung dar.

$\bar{A}, \mathring{A}$ bezeichnet den *Abschluss* respektive das *Innere* einer Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ und ∂A deren (topologischen) *Rand*. Der *Durchmesser* einer Menge A ist $\operatorname{diam}(A) := \sup\{|x - y| \colon x, y \in A\}$. $B_\rho(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^N \colon |x - x_0| < \rho\}$ bezeichnet den *offenen Ball* mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^N$ und Radius $\rho > 0$. Falls wir betonen wollen, dass der Ball in $\mathbb{R}^N$ liegt, so schreiben wir $B^N_\rho(x_0)$. Mit einer anderen, aber sinnvollen Notation ist $\mathcal{S}^N(\rho) := \partial B^{N+1}_\rho(0) = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} \colon |x| = \rho\}$ die N-dimensionale *Sphäre* in dem $\mathbb{R}^{N+1}$ mit Radius ρ sowie $\mathcal{S}^N(x_0, \rho)$ die entsprechende Sphäre mit dem Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$. Dieselben Bezeichnungen gelten in analoger Form für einen beliebigen metrischen Raum $\mathfrak{X}$ mit der Metrik d.

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ besitzt die charakteristische Funktion $\chi_A(x)$ den Wert Eins, falls $x \in A$ und sie verschwindet für Punkte $x \in \mathbb{R}^N \setminus A$. Das Kronecker-Delta δ_{ij} ist Eins in dem Fall gleicher Indizes $i = j$ und andernfalls Null.

Funktionenräume

Seien $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, U eine offene Menge des $\mathbb{R}^{N_1}$ oder eines beliebigen metrischen Raumes $\mathfrak{X}$ und $V \subset \mathbb{R}^{N_2}$. Eine Funktion $f \colon U \to V$ gehört zu der Klasse $f \in C^j(U, V)$ für eine natürliche Zahl $j \in \mathbb{N}$, falls jede Komponentenfunktion $f_i, i = 1, \ldots, N_2$ alle partiellen Ableitungen bis zu der einschließlich j-ten Ordnung besitzt und diese zusätzlich stetig sind. Ist $V = \mathbb{R}$, so schreiben wir $f \in C^j(U)$. Es ist $f \in C^\infty(U, V)$, falls $f \in C^j(U, V)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ und $f \in C^0(U, V)$, falls alle f_i stetig sind. Der *Träger* einer stetigen Funktion f ist der Abschluss aller Punkte $x \in U$, sodass $f(x) \neq 0$. Schließlich bezeichnet $f \in C^j_c(U, V)$ für ein $j \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ eine $C^j(U, V)$-Funktion mit kompaktem Träger in U.

Für $f \in C^1(U, V)$ ist Df die *Jacobi-Matrix* von f und in dem Fall $f \in C^2(U)$ bezeichnet Df den üblichen *Gradienten* und $D^2 f$ die *Hesse-Matrix* zu der Funktion f.

Maßtheorie

Sei $\mathfrak{X}$ ein separabler, lokal kompakter metrischer Raum. Wir bezeichnen mit $2^{\mathfrak{X}}$ die *Menge aller Teilmengen* von $\mathfrak{X}$. Ein (äußeres) *Maß* ν auf $\mathfrak{X}$ ist eine monotone, subadditive Funktion $\nu \colon 2^{\mathfrak{X}} \to [0, \infty]$ mit $\nu(\emptyset) = 0$ und eine Menge $A \subset \mathfrak{X}$ ist *ν-messbar*, falls

$\nu(S) = \nu(S \setminus A) + \nu(S \cap A)$ für jede Teilmenge $S \subset \mathfrak{X}$ gilt. Das *eingeschränkte Maß* $\nu \llcorner S$ für $S \subset \mathfrak{X}$ ist gemäß $(\nu \llcorner S)(A) = \nu(S \cap A)$ definiert. Die *Borelmengen* sind die Teilmengen, welche die kleinste σ-Algebra (in dem üblichen Sinne der Maßtheorie) bilden, die die offenen Mengen von $\mathfrak{X}$ enthält. Ein Maß ν heißt *Borel-regulär*, falls alle Borelmengen ν-messbar sind und für jede Menge $A \subset \mathfrak{X}$ eine Borelmenge $B \supset A$ existiert, sodass $\nu(B) = \nu(A)$. Schließlich können wir das für diese Arbeit wichtige *Radonmaß* μ definieren, welches ein Borel-reguläres Maß bezeichnet, das endlich auf kompakten Mengen ist.

Der *Träger* $\operatorname{spt}\mu$ eines Radonmaßes μ auf $\mathfrak{X}$ ist gegeben durch $\operatorname{spt}\mu := \mathfrak{X} \setminus \mathcal{O}$, wobei $\mathcal{O} := \cup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ und $\mathcal{O}_{i \in I}$ die Familie aller offenen Mengen mit μ-Maß Null ist.

In dem Fall $(\mathfrak{X}, d) = (\mathbb{R}^N, |\cdot|)$ betrachten wir häufig die folgenden Maße: Für zwei Maße ν_i auf $\mathbb{R}^{N_i}, i = 1, 2$, definieren wir zunächst das *Produktmaß* $\nu_1 \times \nu_2 \colon 2^{\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}} \to [0, \infty]$ für eine Menge $S \subset \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ durch $(\nu_1 \times \nu_2)(S) := \inf \big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \nu_1(A_i)\nu_2(B_i) \colon S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i), A_i \subset \mathbb{R}^{N_1}\ \nu_1\text{-messbar}, B_i \subset \mathbb{R}^{N_2}\ \nu_2\text{-messbar} \big\}$
Das *eindimensionale Lebesguemaß* auf $\mathbb{R}$ ist für eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ gegeben durch $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}^1(A) := \inf \big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{diam}(C_i) \colon A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, C_i \subset \mathbb{R} \big\}$ und das *N-dimensionale Lebesguemaß* auf $\mathbb{R}^N$ ist induktiv durch $\mathcal{L}^N := \mathcal{L}^{N-1} \times \mathcal{L}$ definiert. $\omega_N := \mathcal{L}^N(B_1^N(0))$ bezeichnet das N-dimensionale Lebesguemaß des Einheitsballs in $\mathbb{R}^N$. Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^N$ und ein $m \in \mathbb{N}$ ist $\mathcal{H}^m(A) := \lim_{\delta \searrow 0} \inf \big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \omega_m \big(\frac{1}{2} \operatorname{diam}(A_i)\big)^m \colon A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \operatorname{diam}(A_i) < \delta \big\}$ das *m-dimensionale Hausdorffmaß*. Dieses ist im Allgemeinen *kein* Radonmaß.

Die *N-dimensionale Dichte* eines Maßes ν in dem Punkt $x \in \mathfrak{X}$ ist definiert vermöge $\Theta^N(\nu, x) := \lim_{\rho \searrow 0} \omega_N^{-1} \rho^{-N} \nu(\bar{B}_\rho(x))$, falls der Limes existiert.

Lemma 1.1 *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge und μ ein Radonmaß auf U. Dann gilt für alle, bis auf abzählbar viele $\rho \geq 0$, die Identität $\mu(\partial B_\rho(y)) = 0$ für ein beliebiges $y \in U$, sodass $\bar{B}_\rho(y) \subset U$.*
Aus diesem Grund können wir bei Radonmaßen auf einem Euklidischen Raum in der Definition der Dichte den abgeschlossenen durch einen *offenen* Ball ersetzen.

Beweis: Die Funktion $\rho \mapsto \mu(B_\rho(y))$ ist schwach monoton wachsend und somit existieren höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, siehe S. Hildebrandt [23, §2.4, Satz 2]. Sei ρ_0 ein Radius, in dem die Abbildung stetig ist, dann folgt $0 \leq \mu(\partial B_{\rho_0}(y)) = \mu(\bar{B}_{\rho_0}(y)) - \mu(B_{\rho_0}(y)) = \mu(\bar{B}_{\rho_0}(y)) - \lim_{\rho \nearrow \rho_0} \mu(\bar{B}_\rho(y)) = 0$, da das Radonmaß einer beliebigen Menge von innen durch kompakte Teilmengen approximiert werden kann. $\square$

Eine Funktion $f : U \to V$ mit $U \subset \mathfrak{X}, V$ Teilmenge eines topologischen Raumes, heißt *ν-messbar*, falls $f^{-1}(\Omega)$ für alle offenen Mengen $\Omega \subset V$ eine ν-messbare Menge ist.
Das *Integral* $\int_U f \,\mathrm{d}\nu$ einer ν-messbaren Funktion $f \colon U \to \mathbb{R}$ ist in dem üblichen Sinne mithilfe der Approximation durch einfache Funktionen definiert. f heißt *ν-integrierbar* respektive *lokal ν-integrierbar*, falls $\int_U |f| \,\mathrm{d}\nu < \infty$ beziehungsweise $\int_K |f| \,\mathrm{d}\nu < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset U$ erfüllt ist. Wir schreiben außerdem $\mathrm{d}t$ anstelle von $\mathrm{d}\mathcal{L}^1(t)$.

Eine Folge von Radonmaßen $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auf $\mathfrak{X}$ *konvergiert* gegen ein Radonmaß μ auf $\mathfrak{X}$, in Zeichen $\mu_i \to \mu, i \to \infty$, falls $\lim_{i \to \infty} \int_{\mathfrak{X}} f \,\mathrm{d}\mu_i = \int_{\mathfrak{X}} f \,\mathrm{d}\mu$ für jede Funktion $f \in C_c^0(\mathfrak{X})$ gilt. Diese Eigenschaft wird in der Literatur häufig schwache Konvergenz genannt.

Eine Funktion $f : U \to V$ gehört zu dem Raum $L^p(U, V; \nu), 1 \leq p < \infty$, für ein Maß ν, falls f ν-messbar ist und $\|f\|_{L_p(U)} := (\int_U |f|^p \,\mathrm{d}\nu)^{1/p} < \infty$ erfüllt. Weiterhin ist $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(U, V; \nu)$, falls $f \in L^p(K, V; \nu)$ für alle kompakten Mengen $K \subset U$ gilt.

Multilineare Algebra

Seien $n \leq N$ zwei natürliche Zahlen. Für die Vereinfachung der Darstellungen sei im Folgenden $(i_1, \ldots, i_n)$ eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ und $\alpha = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ ein Multivektor sowie $I_{n,N} := \{\alpha \in \mathbb{N}^n \colon 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq N\}$ die geordnete Multiindexmenge. Mit dem Dach $\wedge$ ist die übliche multilineare und alternierende Verknüpfung von Vektoren gemeint.

Mit $\Lambda_n\mathbb{R}^N$ bezeichnen wir den Raum aller *n-Vektoren*. Jedes Objekt $v \in \Lambda_n\mathbb{R}^N$ kann mithilfe der Standardbasis des $\mathbb{R}^N$ dargestellt werden als $v = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq N} a_{i_1 \ldots i_n} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} = \sum_{\alpha \in I_{n,N}} a_\alpha e_\alpha$ mit $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Das *innere Produkt* von $\Lambda_n\mathbb{R}^N$ - induziert von $\mathbb{R}^N$ - ist definiert vermöge $\langle \sum_{\alpha \in I_{n,N}} a_\alpha e_\alpha, \sum_{\alpha \in I_{n,N}} b_\alpha e_\alpha \rangle := \sum_{\alpha \in I_{n,N}} a_\alpha b_\alpha$, sodass $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I_{n,N}}$ eine Orthonormalbasis von $\Lambda_n\mathbb{R}^N$ ist. Für eine lineare Abbildung $Q \colon \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$ und einen n-Vektor $v = \sum_{\alpha \in I_{n,N_1}} a_\alpha e_\alpha \in \Lambda_n\mathbb{R}^{N_1}$ definieren wir das Bild $Q_\# v \in \Lambda_n\mathbb{R}^{N_2}$ durch

$$Q_\# v := \sum_{\alpha \in I_{n,N_1}} a_\alpha \, Q_\# e_\alpha = \sum_{\alpha = (i_1, \ldots, i_n) \in I_{n,N_1}} a_\alpha \, Q(e_{i_1}) \wedge \ldots \wedge Q(e_{i_n}). \tag{1.1}$$

Ein n-Vektor heißt *einfach*, falls er als einfaches Dachprodukt $v = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ von Vektoren $v_j \in \mathbb{R}^N$ geschrieben werden kann. Einfache n-Vektoren stehen in einer direkten Korrespondenz zu orientierten n-dimensionalen Ebenen durch den Ursprung des $\mathbb{R}^N$. Das erweitert die Identifikation von Vektoren mit orientierten eindimensionalen Linien auf höher dimensionale lineare Objekte. Wir begründen diesen Zusammenhang genauer:
Sei L ein orientierter n-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^N$ und $\tau_1, \ldots, \tau_n$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von L. Wir definieren den einfachen n-Vektor $\xi_L := \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n \in \Lambda_n\mathbb{R}^N$. Ist $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ eine weitere Basis von L, dann gilt mit einer linearen Abbildung $Q = (q_{ij}) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ der Zusammenhang $\sigma_i = \sum_{j=1}^n q_{ij}\tau_j$ und mit den Eigenschaften des Dachproduktes folgt $\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n = \det Q \; \tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n$. Ist $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ eine andere *orientiere orthonormale Basis* von L, so folgt $\det Q = 1$. Das heißt der n-Vektor ξ_L ist eindeutig durch die orientiere n-dimensionale Ebene L und unabhängig von der Basis definiert. Betrachtet man allgemeiner nur eine orientiere Basis $\tau_1, \ldots, \tau_n$ von L, so ist der entsprechende n-Vektor durch $\xi_L = (\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n) \,/\, |\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n|$ gegeben.
Sei umgekehrt $0 \neq \xi \in \Lambda_n\mathbb{R}^N$ ein einfacher n-Vektor. Wir definieren $L_\xi := \{v \in \mathbb{R}^N \colon \xi \wedge v = 0\}$. Dann ist L_ξ ein n-dimensionaler linearer Teilraum von $\mathbb{R}^N$. Da ξ einfach ist, besitzt dieser eine Darstellung $\xi = v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ und die Vektoren v_i sind linear unabhängig, weil wir $\xi \neq 0$ vorausgesetzt haben sowie nach den Eigenschaften des Dachproduktes. Genauer gilt sogar $v \in L_\xi$ genau dann, wenn v eine Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ ist und somit folgt $L_\xi = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Orientiert man L_ξ in der Weise, dass die $v_1, \ldots, v_n$ positiv orientiert sind, so folgt $\xi_{L_\xi} = \xi / |\xi|$. Das erklärt den behaupteten Zusammenhang.

Sei $e^1, \ldots, e^N$ die duale Basis des Dualraumes $(\mathbb{R}^N)^*$ von $\mathbb{R}^N$, welche durch $\langle e_i, e^j \rangle = \delta_{ij}$ charakterisiert ist. $\Lambda^n\mathbb{R}^N := \Lambda_n(\mathbb{R}^N)^*$ bezeichnet den Raum aller *n-Kovektoren*. Jedes Element $w \in \Lambda^n\mathbb{R}^N$ besitzt eine Darstellung in der Form $w = \sum_{\alpha \in I_{n,N}} a_\alpha e^\alpha$. Das *innere Produkt* von $\Lambda^n\mathbb{R}^N$ ist analog durch $\langle \sum_{\alpha \in I_{n,N}} a_\alpha e^\alpha, \sum_{\alpha \in I_{n,N}} b_\alpha e^\alpha \rangle := \sum_{\alpha \in I_{n,N}} a_\alpha b_\alpha$ gegeben.
Betrachtet man für ein $i = 1, \ldots, N$ die Funktion $x_i \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, (p_1, \ldots, p_N) \mapsto p_i$, so gilt für das totale Differential angewandt auf den Basisvektor e_j in dem üblichen Sinne $\langle dx_i(p), e_j \rangle = \frac{d}{dt} x_i(p + te_j)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(p_i + t\delta_{ij})|_{t=0} = \delta_{ij}$, sodass wir im Folgenden für die Basisvektoren $e^i = dx_i$ schreiben.

Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, dann verstehen wir unter einer (glatten) *n-Differentialform* ω eine Abbildung $U \to \Lambda^n\mathbb{R}^N$. Diese besitzt eine Form $\omega = \sum_{\alpha\in I_{n,N}} a_\alpha dx_\alpha$ mit $a_\alpha \in C^\infty(U)$ und die Menge aller n-Differentialformen auf U bezeichnen wir mit $\mathcal{E}^n(U)$.
Die *äußere Ableitung* $\mathcal{E}^n(U) \to \mathcal{E}^{n+1}(U)$ ist definiert durch $d\omega = \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha\in I_{n,N}} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_\alpha$. Die *zurückgeholte Form* $f^\#\omega$ für eine Abbildung $f\colon U \to V \subset \mathbb{R}^{N_2}$ und eine Differentialform $\omega = \sum_{\alpha\in I_{n,N_2}} a_\alpha(y)dy_\alpha \in \mathcal{E}^n(V)$ ist gegeben vermöge $f^\#\omega := \sum_{\alpha=(i_1,\ldots,i_n)\in I_{n,N_2}} a_\alpha \circ f df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_n} \in \mathcal{E}^n(U)$, wobei $df_j := \sum_{i=1}^{N_1} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i, j = 1, \ldots, N_2$.
Der *Träger* einer Differentialform ω ist der Abschluss der Menge $\{x \in U\colon \omega(x) \neq 0\}$. Die Menge aller glatten n-Differentialformen mit kompaktem Träger auf U bezeichnen wir mit $\mathcal{D}^n(U)$. Für jedes $\omega \in \mathcal{D}^n(U)$ ist die *Norm* durch $|\omega| := \sup_{x\in U} \langle\omega(x), \omega(x)\rangle^{\frac{1}{2}}$ definiert.

Für zwei Funktionen $\omega = \sum_{\alpha\in I_{n,N}} a_\alpha dx_\alpha \colon U \to \Lambda^n\mathbb{R}^N$ und $\xi = \sum_{\alpha\in I_{n,N}} b_\alpha e_\alpha \colon U \to \Lambda_n\mathbb{R}^N$ ist das *Dualitätsprodukt* gegeben durch $\langle\omega(x), \xi(x)\rangle := \sum_{\alpha\in I_{n,N}} a_\alpha(x)b_\alpha(x)$.

Generalvoraussetzungen für die gesamte Arbeit

Anstelle des $\mathbb{R}^N$ betrachten wir in der Regel den Raum $\mathbb{R}^{n+k}$. Falls nicht anders angegeben sind *stets* $n \geq 2, k \geq 1$ natürliche Zahlen. Dabei bezeichnet n die Dimension einer verallgemeinerten Fläche und k deren Kodimension, welche in dem $\mathbb{R}^{n+k}$ enthalten ist. Wir betrachten also *keine* eindimensionalen Flächen. Außerdem ist $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ immer eine offene Menge.

Wir stellen abschließend für dieses Kapitel drei Funktionen mit ihren grundlegenden Eigenschaften vor, welche wir in der gesamten Arbeit vielfach benötigen.

i) Die orthogonale Projektion $\mathcal{P}_L$

Sei L ein n-dimensionaler linearer Teilraum des $\mathbb{R}^{n+k}$. Mit $\mathcal{P}_L\colon \mathbb{R}^{n+k} \to L$ bezeichnen wir die orthogonale Projektion des $\mathbb{R}^{n+k}$ auf L und $(p_{ij})_{i,j=1,\ldots,n+k}$ sind die Einträge der Matrix $\mathcal{P}_L$ bezüglich der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_{n+k}$ des $\mathbb{R}^{n+k}$. Wir wiederholen die Eigenschaften der orthogonalen Projektion, welche wichtig für die Resultate in dieser Arbeit sind.

Eine Projektion ist symmetrisch und idempotent, sie erfüllt also $\mathcal{P}_L^t = \mathcal{P}_L$ sowie $\mathcal{P}_L^2 = \mathcal{P}_L$ und somit ist

$$\langle\mathcal{P}_L(x), y\rangle = \langle x, \mathcal{P}_L(y)\rangle \text{ und } \langle\mathcal{P}_L(x), x\rangle = |\mathcal{P}_L(x)|^2 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^{n+k} \tag{1.2}$$

sowie

$$|\mathcal{P}_L(x)|^2 = \langle\mathcal{P}_L(x), x\rangle \leq |\mathcal{P}_L(x)||x|, \text{ das heißt } |\mathcal{P}_L(x)| \leq |x| \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}^{n+k}. \tag{1.3}$$

Bei einer Projektionsmatrix sind alle Eigenwerte Null oder Eins und es gilt

$$\operatorname{rang} \mathcal{P}_L = \operatorname{spur} \mathcal{P}_L = \sum_{i=1}^{n+k} p_{ii} = n. \tag{1.4}$$

Betrachten wir außerdem die Rechnung

$$p_{ii} = \sum_{j=1}^{n+k} p_{ij}p_{ji} = \sum_{j=1}^{n+k} (p_{ij})^2 = (p_{ii})^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+k} (p_{ij})^2 \geq (p_{ii})^2,$$

so folgt

$$0 \leq p_{ii} \leq 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, n+k \tag{1.5}$$

und da die i-te Spalte das projizierte Bild des Einheitsvektors e_i ist, gilt

$$p_{ii} = 1 \text{ genau dann, wenn } e_i \in L \text{ für jedes } i = 1, \dots, n+k. \tag{1.6}$$

Häufig verwenden wir zur Verkürzung die Schreibweise $(\cdot)^\top$ für die orthogonale Projektion $\mathcal{P}_L$. Mit $\mathcal{P}_{L^\perp} \colon \mathbb{R}^{n+k} \to L^\perp$ bezeichnen wir außerdem die orthogonale Projektion auf das k-dimensionale orthogonale Komplement $L^\perp$ des Raumes L und schreiben in diesen Fall verkürzt $(\cdot)^\perp$.

ii) Die Zoomfunktion $\eta_{y,\lambda}$

Die Funktion $\eta_{y,\lambda} \colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ ist für einen Parameter $\lambda > 0$ und einen Punkt $y \in \mathbb{R}^{n+k}$ definiert durch

$$\eta_{y,\lambda}(x) := \lambda^{-1}(x - y).$$

Insbesondere ist $\eta_{y,1}$ die *Translation* $x \mapsto x - y$ sowie $\eta_{0,\lambda}$ die *Homothetie* $x \mapsto \lambda^{-1}x$. Die Jacobi-Matrix der Abbildung lautet

$$D\eta_{y,\lambda}(x) = \lambda^{-1}\mathbb{I}_{n+k}. \tag{1.7}$$

Lemma 1.2 *Die Zoomfunktion* $\eta_{y,\lambda} \colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ *ist eigentlich.*

Seien $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen. Eine invertierbare Funktion $f \colon U \to \tilde{U}$ heißt *eigentlich* (auf U), falls für jede kompakte Menge $K \subset \tilde{U}$ folgt, dass die Menge $f^{-1}(K)$ kompakt in U ist.

Beweis: Für die Umkehrfunktion gilt $\eta_{y,\lambda}^{-1}(w) = \lambda w + y$. Ist $K \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine kompakte Menge, dann ist $K \subset B_\rho(0)$ für ein $\rho > 0$. Für das Bild der Umkehrabbildung haben wir die Inklusion $\eta_{y,\lambda}^{-1}(K) \subset B_{\lambda\rho}(y)$ und dieses ist somit beschränkt.
Für die Abgeschlossenheit betrachten wir eine beliebige konvergente Folge $(w_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \eta_{y,\lambda}^{-1}(K)$ mit $w_i \to w, i \to \infty$. Aufgrund der Stetigkeit $K \ni \lim_{i\to\infty} \eta_{y,\lambda}(w_i) = \eta_{y,\lambda}(\lim_{i\to\infty} w_i) = \eta_{y,\lambda}(w)$ gilt für den Grenzwert $w \in \eta_{y,\lambda}^{-1}(K)$. □

iii) Die Abschneidefunktion $\Psi_A(x)$

Diese Abschneidefunktion wird bei der Konstruktion geeigneter Testfunktionen wiederholt benötigt, da die Aussagen in der Regel nur unter bestimmten Kompaktheitsvoraussetzungen gelten.
Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ bezeichnet die Funktion $\Psi_A(x)$ in der gesamten Arbeit eine *Abschneidefunktion bezüglich der Menge* A, das heißt $\Psi_A \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+k}, [0,1])$ mit $\Psi_A(x) \equiv 1$ für alle Punkte x in einer hinreichend kleinen Umgebung um die Menge A und außerhalb nimmt die Funktion in glatter Weise den Wert Null an.
In der Regel ist die Menge A kompakt, sodass wir $\Psi_A \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+k}, [0,1])$ erhalten.

2 Geometrische Maßtheorie

Die geometrische Maßtheorie ist ein Gebiet der Analysis, welches geometrische Probleme durch Techniken der Maßtheorie löst. Sie erweitert die Notationen der Differentialgeometrie auf Abbildungen und Flächen, die nicht notwendigerweise glatt sind, durch Verallgemeinerung dieser Konzepte in einem maßtheoretischen Weg.

Warum ist geometrische Maßtheorie notwendig?
Die historische Entwicklung der Suche nach minimalen Flächen:

Ist ein Rand in dem Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ vorgegeben, dann besteht ein typisches Problem in dem Finden einer Fläche mit diesem gegebenen Rand und kleinstmöglicher Oberfläche. Man denke beispielsweise an zweidimensionale Seifenhäute, die in Drahtgestelle eingespannt werden und nach einem Zustand minimaler Oberflächenenergie streben. Das Problem ist nach dem Physiker J. A. F. Plateau (1801-1883) benannt, der solche Seifenhaut-Experimente durchführte.
Das Plateau-Problem: Existiert zu einer vorgegebenen geschlossenen Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit minimalem Flächeninhalt, welche von der Kurve Γ aufgespannt wird?

Eine mögliche Lösung des Problems stammt von J. Douglas [11] aus dem Jahr 1931. Er betrachtete Abbildungen von der Einheitskreisscheibe $B := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ und der Rand der Scheibe ∂B wird homöomorph auf eine gegebene geschlossene Kurve Γ abgebildet. Dann existiert eine Abbildung, sodass das Bild kleinstmöglichen Flächeninhalt hat. Wir werden Flächen dieser Art in dem weiteren Verlauf auch Flächen von dem „*Abbildungstyp*“ nennen.

Satz 2.1 (Existenzsatz nach J. Douglas) *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine einfach geschlossene Kurve und $\mathcal{C} := \{\mathcal{X}\colon B \to \mathbb{R}^3, \mathcal{X}|_{\partial B}$ homöomorph auf $\Gamma\}$, dann existiert eine Parametrisierung $\mathcal{X}_0 \in \mathcal{C}$ mit $\operatorname{Area}(\mathcal{X}_0(B)) = \inf_{\mathcal{X}\in\mathcal{C}} \operatorname{Area}(\mathcal{X}(B))$.*

Es stellt sich jedoch heraus, dass diese Methode gravierende Nachteile bei der Suche nach Flächen mit minimierender Oberfläche aufweist. Sie liefert Lösungen, die nicht der physikalischen Realität entsprechen und auch bei der Realisierung beispielsweise durch Seifenlauge und Drahtgestelle niemals auftauchen. Es wird in dem Allgemeinen nicht der wirkliche Flächenminimierer gefunden, sondern nur der Minimierer in dieser sehr speziellen Klasse von Flächen. Es existieren aber einfach geschlossene Kurven in dem $\mathbb{R}^3$, sodass die Fläche mit minimierender Oberfläche nicht durch eine Abbildung von der Kreisscheibe parametrisiert werden kann.

Betrachtet man als Randkurve einen Kreisring mit einer länglichen Ausbuchtung, wobei diese mittig durch den Kreisring verläuft, dann ist die minimale Fläche von dem Abbildungstyp nicht eingebettet, sondern besitzt einen Selbstdurchschnitt. Der reale Flächenminimierer hat einen kleineren Flächeninhalt sowie topologisch gesehen ein höheres Geschlecht, vermeidet dadurch den Selbstdurchschnitt und ist eine eingebettete Fläche. Für Abbildungen dieses Phänomens verweisen wir auf das Buch von F. Morgan [29, §8].

Man könnte daher zusätzlich Abbildungen von Flächen mit höherem Geschlecht zulassen. Jedoch ist diese Idee nicht sehr zielführend. Betrachtet man erneut den Kreisring mit Ausbuchtung, sodass an dem Ende dieses Art Schwanzes erneut ein Kreisring ist, welcher koaxial über dem ersten Ring liegt, so werden von dieser Randkonfiguration bei geeignet angepasster Skalierung sogar zwei verschiedene Flächenminimierer von dem Abbildungstyp gefunden. Die wirklich minimierende Fläche besitzt hingegen erneut das Geschlecht $g = 1$. Diese Randkurve lässt sich in selbstähnlich schrumpfender Weise geeignet zu einer Kette zusammenbauen, sodass man eine rektifizierbare Randkurve erhält, deren eingespannte minimale Fläche von *unendlichem* Geschlecht ist. U. Dierkes et al. [7, §4.1] nennen dieses Beispiel die „*Monsterfläche*“.

Ebenso lässt sich diese Methode von J. Douglas nicht auf höhere Dimensionen und Kodimensionen verallgemeinern. Es fehlen Kompaktheitseigenschaften bezüglich der natürlichen Topologie, denn üblicherweise möchte man solche Probleme mit der *direkten Methode der Variationsrechnung* lösen:

(1) Betrachte eine Folge von Flächen, deren Flächeninhalt gegen das Infimum strebt (*Minimalfolge*),

(2) extrahiere eine konvergente Teilfolge,

(3) zeige, dass der Limes die Fläche mit kleinstem Flächeninhalt ist.

Ein geeigneter Raum für diese Methode wurde mithilfe der Maßtheorie gefunden. H. Federer und W. H. Fleming [17] führten 1960 die Theorie der rektifizierbaren Ströme ein und konnten Plateaus Problem in diesem sehr allgemeinen Kontext lösen. Die Geburtsstunde der *geometrischen* Maßtheorie. Grob gesprochen zeigen sie für beliebige Dimension n und Kodimension k und ohne vorherige Fixierung auf einen topologischen Typ:

Satz 2.2 (Existenzsatz nach H. Federer und W. H. Fleming) *Sei R ein $(n-1)$-dimensionaler Strom in dem $\mathbb{R}^{n+k}$ ohne Rand. Dann existiert ein n-dimensionaler Strom T, sodass $\partial T = R$ und $\mathrm{Area}(T) \leq \mathrm{Area}(S)$ für alle n-dimensionalen Ströme S mit $\partial S = R$.*

Die fundamentalen Objekte in der geometrischen Maßtheorie sind *rektifizierbare Mengen.* Wir werden diese in dem folgenden Kapitel kurz vorstellen. Anschließend folgt eine Einführung in die Theorie der *Varifaltigkeiten* sowie *Ströme*, welche beide in speziellen Fällen auf den rektifizierbaren Mengen „leben“.
Wir verwenden im Wesentlichen die Notationen aus L. Simon [33] und alle Referenzen dieses Kapitels beziehen sich ebenfalls auf diese Quelle. Wir diskutieren nur die Eigenschaften, welche wir in dem weiteren Verlauf der Arbeit benötigen werden. Insbesondere geben wir nicht immer die allgemeinsten Definitionen oder die bestmöglichen Folgerungen an.

2.1 Rektifizierbare Mengen

Eine rektifizierbare Menge ist beliebig nahe - in einem Maß-Sinne - an einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit und besitzt trotzdem eine sehr große Klasse von Singularitäten. Es existieren zwei äquivalente Definitionen, mit denen wir direkt beginnen.

Definition 2.3 (rektifizierbare Menge) *$M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist eine n-dimensionale, abzählbar rektifizierbare Menge (im Folgenden: rektifizierbare Menge), falls*

$M = M_0 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} F_j(A_j)\right)$, wobei $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ und $F_j \colon A_j \to \mathbb{R}^{n+k}, A_j \subset \mathbb{R}^n$, ist eine abzählbare Familie von Lipschitzstetigen-Abbildungen.

oder

$M \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathcal{N}_j$, wobei $\mathcal{H}^n(\mathcal{N}_0) = 0$ und jedes $\mathcal{N}_j, j \geq 1$ ist eine n-dimensionale eingebettete C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$.

Definition 2.4 (approximativer Tangentialraum) *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine $\mathcal{H}^n$-messbare Menge und θ eine positive, lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbare Funktion auf M. Ein n-dimensionaler Unterraum P ist der approximative Tangentialraum von M in dem Punkt x bezüglich θ, falls*

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \lambda^{-n} \int_M f\Big(\frac{z-x}{\lambda}\Big)\theta(z)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(z) = \theta(x)\int_P f(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(y)$$

für jede Funktion $f \in C_c^0(\mathbb{R}^{n+k})$ gilt. Durch die Transformation $z = x + \lambda y$ können wir die linke Seite auch durch $\lim_{\lambda\searrow 0}\int_{\eta_{x,\lambda}(M)} f(y)\,\theta(x+\lambda y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(y)$ ausdrücken.

Ist eine weitere positive, lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbare Funktion $\tilde{\theta}$ auf M gegeben, so stimmen die jeweiligen approximativen Tangentialräume $\mathcal{H}^n$-f.ü. überein [33, Rmk. 11.5] und wir schreiben daher $P = \mathcal{T}_x M$ ohne eine Indizierung mit der Funktion θ.

Es gilt die bemerkenswerte *äquivalente Charakterisierung* [33, Thm. 11.6]: M ist genau dann rektifizierbar, wenn es eine positive, lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbare Funktion θ auf M gibt, bezüglich welcher der approximative Tangentialraum $\mathcal{T}_x M$ für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in M$ existiert.

Da rektifizierbare Mengen M somit $\mathcal{H}^n$-f.ü. einen Tangentialraum besitzen, lässt sich auf diesen Mengen Analysis betreiben und wir definieren die grundlegenden Konzepte. Dazu können wir eine *disjunkte* Zerlegung $M = \bigcup_{j=0}^{\infty} M_j$ annehmen, wobei $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$, M_j ist $\mathcal{H}^n$-messbar und $M_j \subset \mathcal{N}_j$ für $j \geq 1$, wobei jedes $\mathcal{N}_j$ eine eingebettete n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ ist [33, Rmk. 11.7].

Definition 2.5 *Es sei M eine rektifizierbare Menge, $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen mit $M \subset U$ und $f : U \to \mathbb{R}$ lokal Lipschitzstetig in U sowie $F : U \to \mathbb{R}^{n+k}$, sodass jede Komponente $F_j, j = 1, \ldots, n+k$, lokal Lipschitzstetig in U ist. Dann definieren wir in den Punkten $x \in M$, in denen der approximative Tangentialraum $\mathcal{T}_x M$ existiert,*

$$\begin{aligned}
\textit{approx. Normalraum } \mathcal{T}_x^{\perp} M &:= \{\nu \in \mathbb{R}^{n+k} \colon \langle \nu, \tau\rangle = 0 \ \textit{ für alle } \tau \in \mathcal{T}_x M\},\\
\nabla_M f(x) &:= \nabla_{\mathcal{N}_j} f(x) \textit{ für } x \in M_j,\\
d^M f_x \colon \mathcal{T}_x M \to \mathbb{R},\ d^M f_x(\tau) &:= \langle \tau, \nabla_M f(x)\rangle \textit{ für } \tau \in \mathcal{T}_x M,\\
d^M F_x \colon \mathcal{T}_x M \to \mathbb{R}^{n+k},\ d^M F_x(\tau) &:= \sum_{j=1}^{n+k} \langle \tau, \nabla_M F_j(x)\rangle e_j \textit{ für } \tau \in \mathcal{T}_x M,\\
J_M F(x) &:= \sqrt{\det\big((d^M F_x)^* \circ (d^M F_x)\big)},\ (\,\cdot\,)^* := \textit{adjungierte Abb.},\\
\operatorname{div}_M F(x) &:= \sum_{j=1}^{n+k} \langle \nabla_M F_j(x), e_j\rangle.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die klassischen Begriffe der Differentialgeometrie über glatte Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ auf rektifizierbare Mengen M erweitert. Insbesondere gilt für diese Mengen auch buchstäblich wie in dem glatten Fall die *Area-Formel* [33, §12]. Dazu sei $g \in L^1(M, \mathbb{R}^+; \mathcal{H}^n)$ und $F \colon M \to \mathbb{R}^{n+k}$ injektiv sowie jedes F_j lokal Lipschitzstetig, dann folgt

$$\int_{F(M)} g \circ F^{-1}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_M g\, J_M F\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n. \tag{2.1}$$

2.2 Varifaltigkeiten

Sei $G(n+k,n)$ die Menge aller n-dimensionalen linearen Teilräume des $\mathbb{R}^{n+k}$ ausgestattet mit der Metrik $d\colon G(n+k,n)\times G(n+k,n)\to\mathbb{R}$, $d(S,T):=|\mathcal{P}_S-\mathcal{P}_T|$. Dabei ist $\mathcal{P}_S$ die orthogonale Projektion des $\mathbb{R}^{n+k}$ auf den Teilraum S bezüglich der Standardbasis.
Für eine Menge $A\subset\mathbb{R}^{n+k}$ definieren wir das Produkt $G_n(A):=A\times G(n+k,n)$. Ausgestattet mit der Produktmetrik wird $G_n(A)$ zu einem metrischen Raum, $G_n(K)$ ist kompakt für jede kompakte Menge $K\subset\mathbb{R}^{n+k}$ und $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ist lokal homöomorph zu einem euklidischen Raum der Dimension $n+k+nk$ [33, §38]; uns stehen daher die Begriffe aus dem ersten Kapitel zur Verfügung. Weiter sei π die Projektion $(x,S)\mapsto x$ von $G_n(A)$ auf A.

Definition 2.6 (allgemeine Varifaltigkeit) *Eine n-dimensionale allgemeine Varifaltigkeit V in einer offenen Menge $U\subset\mathbb{R}^{n+k}$ ist ein Radonmaß auf $G_n(U)$.*

Für $U\subset\mathbb{R}^{n+k}$ ist mit der Notation $V\in\mathcal{G}_n(U)$ in dieser Arbeit ein Radonmaß V auf dem Raum $G_n(U)$ gemeint, sodass V also eine allgemeine Varifaltigkeit darstellt.

Zu einer allgemeinen Varifaltigkeit $V\in\mathcal{G}_n(U)$ lässt sich ein *Radonmaß* μ_V auf U assoziieren, welches durch $\mu_V(A):=(\pi(V))(A)$ für $A\subset U$ definiert ist.

Ist eine Folge von allgemeinen Varifaltigkeiten $(V_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\mathcal{G}_n(U)$ gegeben, dann ist mit einem Grenzwert $V\in\mathcal{G}_n(U)$ die *Konvergenz* $V_i\to V, i\to\infty$ die übliche Konvergenz von Radonmaßen auf $G_n(U)$.

Seien $U,\tilde{U}\subset\mathbb{R}^{n+k}$ offen und $f\in C^1(U,\tilde{U})$ eine Funktion, die eigentlich auf der Menge $\operatorname{spt}\mu_V\cap U$ ist, dann ist das *Bild* $f_\#V\in\mathcal{G}_n(\tilde{U})$ von $V\in\mathcal{G}_n(U)$ durch f gegeben vermöge

$$f_\#V(\mathcal{A}):=\int_{F^{-1}(\mathcal{A})}J_Sf(x)\,\mathrm{d}V(x,S),\quad \mathcal{A}\subset G_n(\tilde{U})\text{ Borelmenge, [33, §39].}$$

Dabei ist df_x die bestmögliche lineare Approximation von f in x in dem üblichen Sinn [33, §7] und $J_Sf(x):=\sqrt{\det\big((df_x|_S)^*\circ(df_x|_S)\big)}$ die Jacobische, sodass die Abbildung $F\colon\{(x,S)\in G_n(U)\colon J_Sf(x)\neq 0\}\to G_n(\tilde{U})$ durch $F(x,S):=(f(x),df_x(S))$ definiert ist.

Grob gesprochen dienen allgemeine Varifaltigkeiten der Untersuchung und maßtheoretischen Beschreibung von Flächen, bei denen in ihren Punkten eine Vereinigung von linearen Räumen mit verschiedener Vielfachheit assoziiert werden kann. In vielen Anwendungen ist in $\mathcal{H}^n$-f.a. Punkten einfach ein Tangentialraum mit Vielfachheit gegeben. Wir werden diese speziellen Varifaltigkeiten, welche wir erneut mit V bezeichnen, nun definieren und grundlegende Definitionen angeben, welche mit den obigen allgemeinen Definitionen verträglich sind, aber häufig eine handlichere Form besitzen.

Ist eine rektifizierbare Menge $M\subset U$ gegeben und eine positive, lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbare Funktion θ auf M, welche auf $U\setminus M$ identisch verschwindet, dann definieren wir die n-dimensionale *rektifizierbare Varifaltigkeit* $V=v(M,\theta)$ durch

$$V(\mathcal{A})=\int_{\pi(\mathcal{T}M\cap\mathcal{A})}\theta(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x),\quad \mathcal{A}\subset G_n(U),\tag{2.2}$$

wobei $\mathcal{T}M:=\{(x,\mathcal{T}_xM)\colon x\in M,\text{ sodass }\mathcal{T}_xM\text{ existiert}\}$. Wir bezeichnen den Raum aller n-dimensionalen rektifizierbaren Varifaltigkeiten (im Folgenden: Varifaltigkeiten) in U mit

$\mathcal{V}_n(U)$. Besitzt die Funktion θ nur positive ganzzahlige Werte, so bezeichnen wir diesen Teilraum mit $\mathcal{IV}_n(U)$ und wir sprechen von einer *(rektifizierbaren) Varifaltigkeit mit ganzzahliger Vielfachheit.*

Für eine Varifaltigkeit $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ ist das assoziierte Radonmaß μ_V auf U durch $\mu_V := \mathcal{H}^n \llcorner \theta$ gegeben. Ist also $A \subset U$ eine $\mathcal{H}^n$-messbare Menge, dann gilt

$$\mu_V(A) = \int_{A\cap M} \theta \,\mathrm{d}\mathcal{H}^n$$

und wir erhalten die folgende wichtige Struktureigenschaft, T. Ilmanen [25, 1.3].

Lemma 2.7 *Sei $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ eine Varifaltigkeit mit assoziiertem Radonmaß $\mu_V = \mathcal{H}^n \llcorner \theta$, dann folgt für μ_V-f.a. $x \in U$, dass die Dichte $\Theta^n(\mu_V, x)$ existiert und in diesen Punkten die Gleichheit $\Theta^n(\mu_V, x) = \theta(x)$ gilt.*

Beweis: Wir können wieder eine disjunkte Zerlegung der rektifizierbaren Menge $M = M_0 \cup \bigcup_{j=1}^\infty M_j$ mit $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$ und $M_j \subset \mathcal{N}_j$ annehmen und definieren das eingeschränkte Maß $\mu_j := \mu_V \llcorner \mathcal{N}_j$. Nach [33, Thm. 3.5] gilt für ein Borel-reguläres Maß μ und eine μ-messbare Menge A mit endlichem Maß die Aussage $\Theta^n(\mu\llcorner A, x) = 0$ für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in \mathbb{R}^{n+k} \setminus A$. Daher ist $\Theta^n(\mu_V, x) = \Theta^n(\mu_j, x)$ für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in \mathcal{N}_j$. Somit gilt für $\mathcal{H}^n$-f.a. Punkte $x \in \mathcal{N}_j$

$$\Theta^n(\mu_V, x) = \Theta^n(\mu_j, x) = \lim_{r\searrow 0} \frac{\mu_j(B_r(x))}{\omega_n r^n} = \lim_{r\searrow 0} \Big(\frac{\mu_j(B_r(x))}{\mathcal{H}^n(B_r(x)\cap\mathcal{N}_j)} \frac{\mathcal{H}^n(B_r(x)\cap\mathcal{N}_j)}{\omega_n r^n} \Big).$$

Der zweite Faktor konvergiert für $r \searrow 0$ per Definition gegen die Dichte $\Theta^n(\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{N}_j, x)$, welche den Wert 1 besitzt, da $\mathcal{N}_j$ eine glatte Untermannigfaltigkeit ist und der Punkt x in dieser liegt.
Der erste Faktor konvergiert ebenfalls, da dieser Term exakt die Radon-Nikodym Ableitung $D_{\mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{N}_j} \mu_j$ ist und diese $\mathcal{H}^n$-f.ü. existiert [33, Thm. 4.7]. Ausgerechnet folgt

$$\lim_{r\searrow 0} \frac{\mu_j(B_r(x))}{\mathcal{H}^n(B_r(x)\cap\mathcal{N}_j)} = \lim_{r\searrow 0} \frac{\mu_V(B_r(x)\cap\mathcal{N}_j)}{\mathcal{H}^n(B_r(x)\cap\mathcal{N}_j)} = \lim_{r\searrow 0} \frac{\int_{B_r(x)\cap\mathcal{N}_j} \theta(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(y)}{\int_{B_r(x)\cap\mathcal{N}_j} \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y)} = \theta(x),$$

sodass insgesamt mithilfe des Grenzwertsatzes die Behauptung folgt. □

Weiterhin seien die folgenden üblichen Definitionen für eine Varifaltigkeit $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ gegeben [33, §15]:

Masse von V: $\mathbf{M}(V) := \mu_V(\mathbb{R}^{n+k})$,

Tangentialraum von V in x: $\mathcal{T}_x V := \mathcal{T}_x M$ für $\mathcal{H}^n$-f.a. $x \in M$,

Träger von V: $\operatorname{spt} V := \operatorname{spt} \mu_V$.

Für eine beliebige $\mathcal{H}^n$-messbare Menge $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ist die *eingeschränkte Varifaltigkeit* $V\llcorner A$ definiert durch

$$V\llcorner A := v(M\cap A, \theta\big|_{M\cap A}) \in \mathcal{V}_n(U). \tag{2.3}$$

Seien $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen und ist $f\colon \operatorname{spt} V \cap U \to \tilde{U}$ eine eigentliche, injektive Lipschitzstetige-Abbildung, dann definieren wir das *Bild* $f_\# V$ von V unter f vermöge

$$f_\# V := v(f(M), \theta\circ f^{-1}) \in \mathcal{V}_n(\tilde{U}). \tag{2.4}$$

Da $f(M)$ eine rektifizierbare Menge und $\theta\circ f^{-1}$ lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbar ist, stellt $f_\# V$ wieder eine rektifizierbare Varifaltigkeit dar. In dem Vergleich zu einer allgemeinen Varifaltigkeit benötigen wir hier weniger Regularität an die Funktion f.

2.3 Ströme

Die Varifaltigkeiten besitzen keine Orientierung und daher besteht keine Möglichkeit einen geeigneten Rand für diese verallgemeinerten Flächen zu definieren. Wir betrachten aus diesem Grund ein weiteres, stärkeres Konzept der geometrischen Maßtheorie: Ströme [33, §26]. Wiederum beginnen wir zunächst in einem allgemeinen Kontext und konkretisieren dann durch die Betrachtung von *rektifizierbaren Strömen.*
Erneut sei $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine beliebige offene Menge und für *dieses* Kapitel lassen wir aus Gründen der Anschauung einzelner Beispiele ausnahmsweise $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zu.

Definition 2.8 (Strom) *Ein n-dimensionaler Strom T auf U ist ein stetiges, lineares Funktional auf dem Raum $\mathcal{D}^n(U)$.*

Die Menge aller n-dimensionalen Ströme in U ist somit der Dualraum $(\mathcal{D}^n(U))^*$, welchen wir in dem Folgenden mit $\mathcal{D}_n(U)$ bezeichnen.

Beispiele

i) Sei $a \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt und $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ eine 0-Differentialform, dann ist durch $\delta_a(f) := f(a) \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ ein 0-dimensionaler Strom auf $\mathbb{R}$ definiert. Die 0-dimensionalen Ströme auf $\mathbb{R}$ werden auch *Distributionen* genannt.

ii) Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale orientierte Untermannigfaltigkeit. Dann ist durch $[\![\mathcal{M}]\!](\omega) := \int_{\mathcal{M}} \omega \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein n-dimensionaler Strom definiert, wobei das Integral in dem klassischen differentialgeometrischen Sinne zu verstehen ist.

Definition 2.9 (Rand) *Sei $T \in \mathcal{D}_n(U)$, dann ist für $n \geq 1$ der Rand $\partial T \in \mathcal{D}_{n-1}(U)$ des Stroms T definiert durch $\partial T(\omega) := T(d\omega)$ für $\omega \in \mathcal{D}^{n-1}(U)$ und $\partial T = 0$, falls $n = 0$.*

Beispiele

i) Sei $T = [\![(a,b)]\!] \in \mathcal{D}_1(\mathbb{R})$ und mit der 0-Differentialform $f \in \mathcal{D}^0(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ liefert die Rechnung $\partial[\![(a,b)]\!](f) = [\![(a,b)]\!](df) = [\![(a,b)]\!](f'(x)\,\mathrm{d}x) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = (\delta_b - \delta_a)(f)$ den Ausdruck $\partial[\![(a,b)]\!] = \delta_b - \delta_a$.

ii) Ist $T = [\![\mathcal{M}]\!] \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, so gilt nach dem Satz von Stokes $\partial[\![\mathcal{M}]\!](\omega) = [\![\mathcal{M}]\!](d\omega) = \int_{\mathcal{M}} d\omega = \int_{\partial\mathcal{M}} \omega = [\![\partial\mathcal{M}]\!](\omega)$. Also $\partial[\![\mathcal{M}]\!] = [\![\partial\mathcal{M}]\!]$ und die Definition 2.9 verallgemeinert den klassischen Rand einer orientierten Untermannigfaltigkeit.

Für einen Strom $T \in \mathcal{D}_n(U)$ definieren wir die *Masse* $\mathbf{M}$ sowie die *lokale Masse* $\mathbf{M}_W$ für ein offenes $W \subset U$ durch

$$\mathbf{M}(T) := \sup\{T(\omega) \colon \omega \in \mathcal{D}^n(U), |\omega| \leq 1\} \text{ respektive}$$
$$\mathbf{M}_W(T) := \sup\{T(\omega) \colon \omega \in \mathcal{D}^n(U), \operatorname{spt}\omega \subset W, |\omega| \leq 1\}$$

und der *Träger* $\operatorname{spt} T$ ist definiert durch

$$\operatorname{spt} T := U \setminus \Big\{ \bigcup W \text{ offen} \colon T(\omega) = 0 \text{ für alle } \omega \in \mathcal{D}^n(U) \text{ mit } \operatorname{spt}\omega \subset W \Big\}.$$

Definition 2.10 (Bild) *Sei $T \in \mathcal{D}_n(U)$ ein Strom und $f \colon U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine C^1-Funktion mit $f|_{\operatorname{spt} T}$ eigentlich. Dann ist das Bild $f_\# T$ von T unter f definiert vermöge $f_\# T(\omega) := T(\Psi f^\# \omega)$ für $\omega \in \mathcal{D}^n(\tilde{U})$. Dabei ist $\Psi = \Psi_{\operatorname{spt} T \cap \operatorname{spt} f^\# \omega} \in C_c^\infty(U)$ eine beliebige Abschneidefunktion, die Eins in einer Umgebung der Menge $\operatorname{spt} T \cap \operatorname{spt} f^\# \omega$ ist. Die Definition ist unabhängig von dieser Funktion [33, 26.20].*

Lemma 2.11 (Eigenschaften des Bildes) *Sei $T \in \mathcal{D}_n(U)$ und $f \in C^1(U, \tilde{U})$ eigentlich auf $f|_{\operatorname{spt} T}$. Dann gelten die folgenden Aussagen*

i) $\partial(f_\# T) = f_\#(\partial T)$,

ii) $\operatorname{spt}(f_\# T) \subset f(\operatorname{spt} T)$.

iii) Ist f zusätzlich ein Diffeomorphismus, so folgt die Gleichheit $\operatorname{spt}(f_\# T) = f(\operatorname{spt} T)$.

Bemerkung

i) Mit einem fixierten $0 < \lambda < \infty$ gilt für die Homothetie $\eta_{0,\lambda} \colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}, \eta_{0,\lambda}(x) = \lambda^{-1} x$ bei der Vertauschung von Bild und Träger die Gleichheit $\operatorname{spt}(\eta_{0,\lambda\#} T) = \eta_{0,\lambda}(\operatorname{spt} T)$.

Beweis: Zu i) Sei $\omega \in \mathcal{D}^n(U)$ eine beliebige n-Differentialform, dann folgt

$$\partial f_\# T(\omega) = f_\# T(d\omega) = T(\Psi f^\# d\omega) \overset{(*)}{=} T(d(\Psi f^\# \omega)) = \partial T(\Psi f^\# \omega) = f_\#(\partial T)(\omega),$$

wobei in $(*)$ die Zurückholung mit der äußeren Ableitung kommutiert, [33, 25.5].
Zu ii) Sei $\omega \in \mathcal{D}^n(\tilde{U})$ mit $\operatorname{spt} \omega \cap f(\operatorname{spt} T) = \emptyset$. Dann gilt $(f_\# T)(\omega) = T(\Psi f^\# \omega) = 0$, denn die zurückgeholte Form $f^\# \omega$ hat einen disjunkten Träger von der Menge $\operatorname{spt} T$ und daher ist $\operatorname{spt} f_\# T \subset f(\operatorname{spt} T)$.
Zu iii) Die Umkehrabbildung f^{-1} ist aufgrund der Zusatzvoraussetzung ebenfalls eine eigentliche C^1-Funktion. Mit zweimaliger Anwendung von der Aussage ii) folgt

$$\operatorname{spt} T = \operatorname{spt}(f^{-1}_\#(f_\# T)) \subset f^{-1}(\operatorname{spt}(f_\# T)) \subset f^{-1}(f(\operatorname{spt} T)) = \operatorname{spt} T$$

und somit herrscht überall die Gleichheit. □

Wir konkretisieren nun unsere Betrachtung auf einen speziellen Teilraum von $\mathcal{D}_n(U)$ und gehen erneut von einer rektifizierbaren Menge $M \subset U$ aus, deren Tangentialraum $\mathcal{T}_x M$ wir orientieren und mit einer Vielfachheit belegen wollen [33, §27].

Definition 2.12 (Rektifizierbarer Strom) *Ein $T \in \mathcal{D}_n(U)$ ist ein n-dimensionaler, rektifizierbarer Strom in U, falls dieser die folgende Darstellung besitzt*

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \, \theta(x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x), \quad \omega \in \mathcal{D}^n(U),$$

dabei ist M eine $\mathcal{H}^n$-messbare, rektifizierbare Teilmenge von U, θ eine lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbare Funktion mit positiven Werten und $\xi \colon M \to \Lambda_n \mathbb{R}^{n+k}$ ist eine $\mathcal{H}^n$-messbare Funktion, sodass diese in $\mathcal{H}^n$-f.a. Punkten $x \in M$ die Darstellung $\xi(x) = \tau_1(x) \wedge \ldots \wedge \tau_n(x)$ besitzt, wobei $\{\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)\}$ eine orthonormale Basis des approximativen Tangentialraumes $\mathcal{T}_x M$ von M in x ist.

Die Klasse aller n-dimensionalen, rektifizierbaren Ströme (im Folgenden: Ströme) in U bezeichnen wir mit $\mathcal{R}_n(U)$ und schreiben für diese Objekte auch $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$. Die Funktion θ heißt die *Vielfachheit* und die Funktion ξ die *Orientierung* des Stroms T.
Besitzt $\theta \in \mathbb{N}$ nur ganzzahlige positive Werte, so sprechen wir von einem (*rektifizierbaren*) *Strom mit ganzzahliger Vielfachheit* und bezeichnen diesen Raum mit $\mathcal{IR}_n(U)$.
Offensichtlich gelten mit diesen Definitionen die Inklusionen $\mathcal{IR}_n(U) \subset \mathcal{R}_n(U) \subset \mathcal{D}_n(U)$.

Für einen Strom $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ ist der *approximative Tangentialraum* einfach der approximative Tangentialraum $\mathcal{T}_x M$ der rektifizierbaren Menge M. Weiterhin assoziieren wir zu T ein *Radonmaß* auf U vermöge $\mu_T := \mathcal{H}^n \llcorner \theta$, sodass wir auch die folgende Darstellung für einen Strom T dieser Klasse erhalten

$$T(\omega) = \int_M \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \, \mathrm{d}\mu_T(x).$$

Ist $A \subset U$ eine Borelmenge, dann definieren wir die *Einschränkung* $T \llcorner A \in \mathcal{R}_n(U)$ durch

$$(T \llcorner A)(\omega) := \int_A \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \, \theta(x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) = \int_A \langle \omega(x), \xi(x) \rangle \, \mathrm{d}\mu_T(x).$$

Außerdem gelten die Zusammenhänge $\mathbf{M}(T) = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \theta \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n = \mu_T(\mathbb{R}^{n+k})$ sowie $\operatorname{spt} T = \operatorname{spt} \mu_T$ und für das Bild von T unter einer eigentlichen Lipschitzstetigen-Abbildung f erhalten wir mit (1.1) die explizite Darstellung [33, Rmks. 26.21 & Rmks. 27.2]

$$(f_{\#} T)(\omega) = \int_M \left\langle \omega(f(x)), d^M f_{x\#} \xi(x) \right\rangle \theta(x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x). \tag{2.5}$$

Für zwei Ströme $T_1 = \tau(M_1, \theta_1, \xi_1) \in \mathcal{R}_{n_1}(U_1)$ und $T_2 = \tau(M_2, \theta_2, \xi_2) \in \mathcal{R}_{n_2}(U_2)$ mit zwei offenen Mengen $U_1 \subset \mathbb{R}^{n_1+k_1}, U_2 \subset \mathbb{R}^{n_2+k_2}$ und $n_i, k_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i = 1, 2$, definieren wir das *kartesische Produkt* durch [33, Def. 26.16 & Rmks. 27.2]

$$T_1 \times T_2 := \tau(M_1 \times M_2, \theta_1 \theta_2, \xi_1 \wedge \xi_2) \in \mathcal{R}_{n_1+n_2}(U_1 \times U_2). \tag{2.6}$$

Zusammenhänge zwischen Varifaltigkeiten und Strömen

Zu einem rektifizierbaren Strom $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit $\partial T = 0$ in U wird eine rektifizierbare Varifaltigkeit $V = v(M, \theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ assoziiert. Durch das Ignorieren der Orientierung ξ von T wird die Varifaltigkeit V wie in (2.2) mit der Menge M und der Funktion θ des Stroms T definiert. Daher übertragen sich alle Eigenschaften der Funktion θ von T auch auf die Varifaltigkeit V [33, §27].
Wir werden in dieser Arbeit wiederholt von diesem Fakt Gebrauch machen. Für Aussagen über einen rektifizierbaren Strom in seinem Inneren, das heißt in einer Menge U mit $\partial T \llcorner U = 0$, wechseln wir gelegentlich in den Kontext der Varifaltigkeiten, da die entsprechenden Definitionen dann zusammenfallen.

Weiterhin korrespondiert zu einem rektifizierbaren Strom $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ mit $\partial T = 0$ in U auch eine allgemeine Varifaltigkeit $V \in \mathcal{G}_n(U)$. Für eine Menge $\mathcal{A} \subset G_n(U)$ wird das Radonmaß V definiert durch $V(\mathcal{A}) := \mu_T(\pi(\mathcal{A}))$, wobei $\pi(\mathcal{A})$ die Menge $\{x \in U \colon (x, <\xi(x)>) \in \mathcal{A}\}$ bezeichnet und $<\xi(x)>$ den zu dem n-Vektor ξ korrespondierenden n-dimensionalen linearen Teilraum meint, vergleiche [33, Ch. 8] und Kapitel 1.
Für allgemeine Varifaltigkeiten, die in dieser Art aus einem rektifizierbaren Strom entstanden sind, fallen daher die allgemeinen Definitionen mit den spezielleren für die rektifizierbaren Varifaltigkeiten zusammen. Diesen Fakt werden wir ebenfalls verwenden.

Das folgende Diagramm verdeutlicht die beschriebenen Zusammenhänge:

$$\begin{tikzcd}
Varifaltigkeiten: & \mathcal{IV}_n(U) & \subset & \mathcal{V}_n(U) & \subset & \mathcal{G}_n(U) \\
Ströme: & \mathcal{IR}_n(U) \arrow[u, "definiert"'] & \subset & \mathcal{R}_n(U) \arrow[u, "definiert"'] \arrow[urr, "definiert"'] & \subset & \mathcal{D}_n(U)
\end{tikzcd}$$

3 Einschließungs- und Nichtexistenzresultate für stationäre Ströme

In diesem Kapitel betrachten wir die folgenden vier unterschiedlichen Klassen von Strömen:

- Stationäre Ströme des Area-Funktionals
- Ströme mit vorgeschriebener mittlerer Krümmung
- Stationäre Ströme in einem Schwerefeld
- Area-stationäre Ströme in glatten Untermannigfaltigkeiten

In den ersten drei Fällen existieren verwandte Resultate für zweidimensionale Flächen von dem Abbildungstyp $\mathcal{X} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, sowie für n-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ des $\mathbb{R}^{n+1}$ beziehungsweise $\mathbb{R}^{n+k}$. Der vierte untersuchte Fall besitzt keine direkte klassische Vorlage.

Die bestehenden Resultate verwenden jeweils ein klassisches Maximumprinzip für subharmonische oder allgemeine elliptische Differentialgleichungen. Diese liefern eine einfache, aber starke Möglichkeit, um von Informationen über die Randdaten auf das Innere einer Fläche zu schließen. Bei den Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{M}$ in beliebigen Dimensionen n wird „auf der Fläche“ gerechnet und daher müssen diese mindestens von der Regularitätsklasse C^2 sein, damit der Laplace-Beltrami Operator $\Delta_{\mathcal{M}}$ definiert ist.
Wir verwenden kein Maximumprinzip, sondern eine Methode, bei der wir geeignete Testfunktionen in Integralgleichungen einsetzen. Damit können wir eine „Barriere“ konstruieren, welche die Flächen nicht überwinden können. Anstelle von Einschließungssätzen könnte man auch von Barriereprinzipien sprechen, wegen der starken geometrischen Bedeutung haben wir uns jedoch für Ersteres entschieden.
Die Nichtexistenz von zusammenhängenden Flächen ist bei den bestehenden Arbeiten in der Regel eine direkte Konsequenz aus der Regularität der betrachteten Flächen. Unsere Vorgehensweise ist deutlich umfangreicher und auf den jeweiligen Kontext zugeschnitten.

In den folgenden Abschnitten werden wir zunächst jeweils die klassischen Resultate kurz darstellen, anschließend die Klasse der betrachteten Ströme genauer definieren und schließlich die neuen Aussagen formulieren und beweisen. Einzelne Bemerkungen weisen auf weiterführende Ergebnisse hin oder verdeutlichen die Einbettung des Satzes in den übergeordneten Kontext.

3.1 Stationäre Flächen des Area-Funktionals

3.1.1 Klassische Minimalflächen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, zusammenhängend und beschränkt und wir schreiben typischerweise $w = (u, v) \in \Omega$ für einen Punkt in dieser Menge. Dann heißt eine nichtkonstante Abbildung $\mathcal{X} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ eine *(endliche, zusammenhängende) Minimalfläche*, falls $\Delta\mathcal{X} := \mathcal{X}_{uu} + \mathcal{X}_{vv} = 0$ und $|\mathcal{X}_u|^2 = |\mathcal{X}_v|^2, \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle = 0$ in Ω erfüllt ist.

Wir bezeichnen mit $\operatorname{conv}(A) := \bigcap\{K\colon A \subset K, K \text{ konvex}\}$ die *konvexe Hülle* einer Menge A. Es war bereits dem ungarischen Mathematiker T. Radó [31] in dem Jahr 1933 bekannt, dass eine Minimalfläche in der konvexen Hülle ihrer Randwerte liegt, also $\mathcal{X}(\bar{\Omega}) \subset \operatorname{conv}(\mathcal{X}(\partial\Omega))$ erfüllt ist. Der Beweis benötigt ausschließlich die Harmonizität $\Delta\mathcal{X} = 0$ der Fläche und der Satz gilt daher für jede harmonische Abbildung.

Verwendet man zusätzlich die Konformitätsrelationen $|\mathcal{X}_u|^2 = |\mathcal{X}_v|^2, \langle\mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v\rangle = 0$, dann lassen sich unter Umständen stärkere Aussagen treffen. In dem Jahr 1972 betrachtete S. Hildebrandt [21, §1] nichtkonvexe Mengen und erhielt den folgenden Einschließungssatz.

Satz 3.1 (Einschließungssatz nach S. Hildebrandt) *Sei $\mathcal{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche, deren Rand $\mathcal{X}(\partial\Omega)$ innerhalb des Hyperboloids*

$$\mathcal{H}(R) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 - z^2 \leq R\}, \quad R \in \mathbb{R}$$

liegt, dann gilt bereits für die komplette Fläche die Inklusion $\mathcal{X}(\bar{\Omega}) \subset \mathcal{H}(R)$.

Der Beweis dieses Satzes basiert auf dem Maximumprinzip für subharmonische Funktionen, indem gezeigt wird, dass die Verknüpfung $f \circ \mathcal{X}$ mit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ eine subharmonische Funktion in Ω ist. Da $f \circ \mathcal{X}(w) \leq R$ für Punkte $w \in \partial\Omega$, folgt aufgrund des Maximumprinzips die Ungleichung ebenfalls für innere Punkte $w \in \Omega$.

In dem Grenzfall $R = 0$ erhält man den Doppelkegel $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon x^2 + y^2 \leq z^2\}$ und der Einschließungssatz bleibt weiterhin gültig. Wir nehmen nun an, dass Komponenten des Randes $\mathcal{X}(\partial\Omega)$ in den beiden disjunkten Kegelhälften $K^\pm := K \cap \{\pm z > 0\}$ liegen. Da Ω zusammenhängend ist, existiert ein $w_0 \in \Omega$, sodass der Punkt $\mathcal{X}(w_0)$ in der Kegelspitze liegt, also $\mathcal{X}(w_0) = 0$ erfüllt. Allerdings besitzt $\mathcal{X}$ in *jedem* Punkt eine (verallgemeinerte) Tangentialfläche, da stets der Grenzwert

$$\lim_{w \to w_0} \nu(w) = \lim_{w \to w_0} \frac{\mathcal{X}_u \wedge \mathcal{X}_v}{|\mathcal{X}_u \wedge \mathcal{X}_v|}(w)$$

für eine Normale ν existiert, und somit die Relation $\mathcal{X}(w_0) = 0$ unmöglich ist. S. Hildebrandt erhielt weiterhin einen Nichtexistenzsatz.

Satz 3.2 (Nichtexistenzsatz nach S. Hildebrandt) *Es existiert keine Minimalfläche $\mathcal{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit Randkomponenten in K, welche sowohl in K^+ als auch in K^- liegen.*

Etwa zwanzig Jahre später wurden die Resultate zunächst von U. Dierkes [6] und nach weiteren 14 Jahren allgemeiner in einer gemeinsamen Arbeit von U. Dierkes und D. Schwab [10] auf beliebige kompakte n-dimensionale minimale Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit beliebiger Kodimension k erweitert. Diese können durch die Gleichung $\Delta_{\mathcal{M}} x = 0$ charakterisiert werden. Es werden Hyperboloide $\mathcal{H}(R)$ mit verschiedener Signatur als Einschließungsmengen angegeben. Der Beweis beruht erneut auf einer Form des Maximumprinzips für subharmonische Funktionen, daher müssen die Untermannigfaltigkeiten von der Regularitätsklasse C^2 sein. Wir zitieren hier exemplarisch das Hyperboloid $\mathcal{H}(R) := \{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon x_1^2 + \ldots + x_{n+k-1}^2 - (n-1)\, x_{n+k}^2 \leq R\}$, welches für $R = 0$ in einen geeigneten Doppelkegel übergeht, und da glatte Flächen nicht durch die Punktsingularität der Kegelspitze verlaufen können, erhält man somit das folgende Resultat.

Satz 3.3 (Einschließungs- und Nichtexistenzsatz nach U. Dierkes) *Es sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine kompakte, n-dimensionale, minimale C^2-Untermannigfaltigkeit mit Randwerten $\partial\mathcal{M}$ innerhalb des Hyperboloids $\mathcal{H}(R)$ für eine Zahl $R \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die gesamte Fläche die Einschließung $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}(R)$.*
Weiterhin existiert keine zusammenhängende, kompakte, n-dimensionale, minimale C^2- Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit $\partial\mathcal{M} \subset K := \mathcal{H}(0)$, sodass Randkomponenten sowohl in $K^+ := K \cap \{x_{n+k} > 0\}$ als auch in $K^- := K \cap \{x_{n+k} < 0\}$ liegen.

Es sei angemerkt, dass eine Minimalfläche oder eine minimale Untermannigfaltigkeit *nicht* den Flächeninhalt minimieren muss, sondern nur eine kritische Lösung des Flächenfunktionals ist. Wir sprechen jedoch nicht von stationären Flächen, sondern schließen uns der allgemein verbreiteten Ausdrucksweise an.

Es stellt sich die Frage, ob wir analoge Resultate für eine n-dimensionale Fläche in dem $\mathbb{R}^{n+k}$ beweisen können, für die wir keine Regularität fordern müssen. In den folgenden Kapiteln werden wir diese Frage positiv beantworten und dazu in den Kontext der geometrischen Maßtheorie gehen. Wir wollen ebenfalls nur kritische Lösungen des Area-Funktionals betrachten und keine Flächen, die den Flächeninhalt minimieren. In der geometrischen Maßtheorie wird dann in der Regel von stationären Strömen gesprochen. Wir folgen dieser Ausdrucksweise.

3.1.2 Stationäre Ströme

Im Folgenden sei $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen und für $\varepsilon > 0$ bezeichne $(\phi_t)_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \colon U \to U$ eine Einparameterfamilie von Diffeomorphismen mit den folgenden Eigenschaften

(1) $\phi_0(x) = x$ für alle $x \in U$,

(2) $(x, t) \mapsto \phi_t(x)$ ist eine glatte Abbildung $U \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$,

(3) es existiert eine kompakte Menge $K \subset U$, sodass $\phi_t(x)|_{U\setminus K} = x$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Weiterhin sei $X(x) := \frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}\big|_{t=0}$ die *Anfangsgeschwindigkeit* für die Familie (ϕ_t). Anstelle eines Stroms $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ betrachten wir zunächst allgemeiner eine rektifizierbare Varifaltigkeit $V = v(M, \theta) \in \mathcal{V}_n(U)$. Dann gilt nach dem Kapitel 2.2 über die Varifaltigkeiten

$$\begin{aligned}\mathbf{M}\big(\phi_{t\#}(V \llcorner K)\big) &\overset{(2.3)\,\&\,(2.4)}{=} \mathbf{M}\big(v(\phi_t(M \cap K), \theta\big|_{M\cap K} \circ \phi_t^{-1})\big) = \int_{\phi_t(M\cap K)} \theta \circ \phi_t^{-1} \,\mathrm{d}\mathcal{H}^n \\ &= \int_M J_M\psi_t \;\theta \,\mathrm{d}\mathcal{H}^n,\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aufgrund der Area-Formel (2.1) gilt und wir $\psi_t := \phi_t|_{M\cap U}$ gesetzt haben. Wegen der Entwicklung $J_M\psi_t = 1 + t\,\mathrm{div}_M X + o(t)$, vergleiche L. Simon [33, §9], folgt für die erste Variation schließlich

$$\delta V(X) := \frac{d}{dt}\mathbf{M}\big(\phi_{t\#}(V \llcorner K)\big)\big|_{t=0} = \int_M \mathrm{div}_M X \;\theta \,\mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_M \mathrm{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_V.$$

Somit erhalten wir die folgenden sinnvollen Definitionen der Area-Stationarität für rektifizierbare Varifaltigkeiten und Ströme. Wir werden im Folgenden „Area“ unterdrücken und einfach von stationären Objekten sprechen.

Definition 3.4 (Stationäre Varifaltigkeit) *Eine Varifaltigkeit* $V = v(M, \theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ *heißt stationär in* U*, falls*

$$\int_U \mathrm{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_V = 0$$

für alle $X \in C_c^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ *gilt.*

Definition 3.5 (Stationärer Strom) *Ein Strom* $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ *heißt stationär in* U*, wenn die zugehörige Varifaltigkeit* $V = v(M, \theta) \in \mathcal{V}_n(U \backslash \mathrm{spt}\, \partial T)$ *stationär in* $U \backslash \mathrm{spt}\, \partial T$ *ist.*

In äquivalenter Weise können wir stationäre Ströme direkt charakterisieren, indem wir in der ersten Variationsformel Anfangsgeschwindigkeiten einsetzen, die auf dem Träger des Randes eines Stromes verschwinden.

Definition 3.6 (Stationärer Strom) *Ein Strom* $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ *heißt stationär in* U*, falls*

$$\delta T(X) := \int_U \mathrm{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_T = 0 \tag{3.1}$$

für alle $X \in C_c^1(U \setminus \mathrm{spt}\, \partial T, \mathbb{R}^{n+k})$ *gilt.*

Ein wichtiges Hilfsmittel für die Beweise der Aussagen über die stationären Ströme stellt die sogenannte Monotonieformel dar, welche wir für spätere Referenzen hier zitieren. Wir formulieren diese direkt in dem Kontext der stationären Ströme; natürlich gilt das analoge Resultat für jede stationäre Varifaltigkeit. Wir werden in den späteren Kapiteln noch weitere Monotonieformeln in anderen Kontexten betrachten.

Satz 3.7 (Monotonieformel für stationäre Ströme) *Sei* $T \in \mathcal{R}_n(U)$ *ein stationärer Strom in* U*,* $y \in U \setminus \mathrm{spt}\, \partial T$ *ein beliebiger Punkt und* $R > 0$ *so gewählt, dass* $\bar{B}_R(y) \subset U$ *und* $\bar{B}_R(y) \cap \mathrm{spt}\, \partial T = \emptyset$*. Dann ist für* $0 < \rho < R$ *die Funktion* $f(\rho) := \rho^{-n} \mu_T(B_\rho(y)) = \rho^{-n} \mathbf{M}(T \llcorner B_\rho(y))$ *(schwach) monoton wachsend in* ρ*.*

Beweis: L. Simon [33, Thm. 17.6] mit $\Lambda \equiv 0$. □

Wir werden in den folgenden Bemerkungen vereinzelt von der stärkeren Voraussetzung der Area-*minimierenden* Ströme sprechen. Daher geben wir hier die entsprechende Definition nach L. Simon [33, Def. 33.1] an.

Definition 3.8 (Minimierender Strom) *Ein* $T \in \mathcal{R}_n(U)$ *heißt Area-minimierend in* U*, falls* $\mathbf{M}_W(T) \leq \mathbf{M}_W(S)$ *für alle offenen* $W \subset\subset U$ *und für alle* $S \in \mathcal{R}_n(U)$ *mit* $\partial S = \partial T$ *in* U *gilt, sodass* $\mathrm{spt}(S - T)$ *eine kompakte Teilmenge von* W *ist.*

Diese Klasse von Strömen minimieren also tatsächlich den Flächeninhalt unter fixierten Randwerten. Es ist leicht zu sehen, dass ein Area-minimierender Strom die Variationsformel (3.1) für stationäre Ströme erfüllt. Dazu betrachten wir die Deformation $\phi(t, x)\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to U, \phi(t, x) = \phi_t(x) := x + tX(x)$ mit einem C^1-Vektorfeld X auf U, welches kompakten Träger in $U \setminus \mathrm{spt}\, \partial T$ besitzt. Dann gilt $\partial(\phi_{t\#} T) = \phi_{t\#}(\partial T) = \partial T$ sowie $\mathrm{spt}(\phi_{t\#} T - T) = \mathrm{spt}\, X$, sodass $\phi_{t\#} T$ ein zulässiger Vergleichsstrom ist und die Definition 3.8 liefert für jedes offene $W \supset \mathrm{spt}\, X$ die Abschätzung $\mathbf{M}_W(T) = \mathbf{M}_W(\phi_{0\#} T) \leq \mathbf{M}_W(\phi_{t\#} T)$. Somit folgt mit $K := \bar{W}$ notwendigerweise $\delta T(X) = \frac{d}{dt} \mathbf{M}(\phi_{t\#}(T \llcorner K))\big|_{t=0} = 0$.

3.1.3 Ein Einschließungssatz

In der Literatur ist in dem Kontext der geometrischen Maßtheorie bisher nur der folgende Konvexe-Hülle Satz für stationäre Ströme bekannt, L. Simon [33, Thm. 19.2 & Rmk. 34.2(2)]. Weitere Einschließungssätze oder gar Nichtexistenzsätze existieren nach Wissen des Autors nicht.

Satz 3.9 (Konvexe-Hülle Satz) *Es sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein stationärer Strom in $\mathbb{R}^{n+k}$ mit kompaktem Träger und Randwerten ∂T. Dann gilt $\operatorname{spt} T \subset \operatorname{conv}(\operatorname{spt} \partial T)$.*

Wir beweisen einen Einschließungssatz mit nichtkonvexen Mengen. Dazu definieren wir für jedes $j = 1, \dots, n-1$ eine quadratische Funktion $q_j(x) = q_j(x_1, \dots, x_{n+k})\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ vermöge

$$q_j(x) := \sum_{i=1}^{n+k-j} x_i^2 - \frac{n-j}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} x_i^2.$$

Definieren wir die Polynome $r_j(x)$ und $s_j(x)$ durch

$$r_j(x) := \sum_{i=1}^{n+k-j} x_i^2 \text{ und } s_j(x) := \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} x_i^2,$$

so erhalten wir $q_j(x) = r_j(x) - (n-j)/j\, s_j(x)$. Weiterhin betrachten wir das *verallgemeinerte Hyperboloid* $\mathcal{H}_j(R) := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} : q_j(x) \leq R\}$ für ein beliebiges $R \in \mathbb{R}$, welches im Allgemeinen nicht konvex ist. Wir nennen den Parameter j die *Signatur* des Hyperboloids. Damit können wir den allgemeinen Einschließungssatz für stationäre Ströme formulieren.

Satz 3.10 (Einschließungssatz) *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein stationärer Strom in $\mathbb{R}^{n+k}$ mit kompaktem Träger $\operatorname{spt} T$ und die Randwerte erfüllen $\operatorname{spt} \partial T \subset \mathcal{H}_j(R)$ für ein $R \in \mathbb{R}$ und ein $j = 1, \dots, n-1$. Dann gilt $\operatorname{spt} T \subset \mathcal{H}_j(R)$.*

Bemerkungen

i) Die Aussage gilt auch für eine Menge, welche kongruent zu dem Hyperboloid $\mathcal{H}_j(R)$ ist, das heißt durch Anwendungen von Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen aus dem Körper $\mathcal{H}_j(R)$ hervorgeht.

ii) Die Behauptung ist ebenfalls für Signaturen $n \leq j \leq n+k$ gültig, jedoch erhalten wir dann für die Menge $\mathcal{H}_j(R)$ einen konvexen Körper und die Aussage ist in diesen Fällen sogar schwächer als der Satz 3.9 über den Einschluss in die konvexe Hülle der Randwerte. Konkret erhalten wir für den Körper $\mathcal{H}_j(R)$ bei $j = n$ einen Zylinder, für $n+1 < j < n+k$ einen Ellipsoiden mit $n+k-j$ Halbachsen der Länge $\sqrt{R}$ sowie j Halbachsen der Länge $\sqrt{Rj/(j-n)}$ und für den Grenzfall $j = n+k$ eine Kugel mit Radius $\sqrt{R\,(n+k)/k}$, indem wir in diesem Fall $r_j(x) \equiv 0$ interpretieren.
In allen diesen Fällen ist $-(n-j)/j > 0$ und daher ist auch der Beweis des Satzes elementar, da der unten abzuschätzende Ausdruck $\operatorname{div}_M \hat{x}$ in diesem Fall μ_T-f.ü. positiv ist.

Beweis: Wir definieren die offene Menge $U := \mathbb{R}^{n+k} \setminus \mathcal{H}_j(R)$. Dann ist nach Voraussetzung $\partial T = 0$ in U und wir können in der Variationsformel (3.1) mit Vektorfeldern X testen, welche kompakten Träger in U besitzen.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \gamma(t)$, bezeichnet eine beliebige nichtnegative

und nichtfallende C^1-Funktion, es gilt also $\gamma(t) \geq 0$ und $\gamma'(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Diese soll folgende zusätzliche Eigenschaften erfüllen: $\gamma(t) \equiv 0$ für $t \leq R + \varepsilon$ und $\gamma(t) > 0$ sowie $\gamma'(t) > 0$ für $t > R + \varepsilon$. Wir definieren weiter eine Funktion $\hat{x} \colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ durch

$$\hat{x}(x) := \Big(x_1, \ldots, x_{n+k-j}, -\frac{n-j}{j} x_{n+k-j+1}, \ldots, -\frac{n-j}{j} x_{n+k}\Big)$$

und betrachten das Vektorfeld $X(x) := \Psi_{\operatorname{spt} T}(x)\, \gamma(q_j(x))\, \hat{x}(x)$. Aufgrund der Konstruktion gilt $X \in C^1_c(U, \mathbb{R}^{n+k})$ und somit ist X eine zulässige Testfunktion in der ersten Variationsformel. Auf dem Träger des Maßes μ_T ist die Funktion $\Psi_{\operatorname{spt} T}(x)$ konstant Eins, sodass wir sie bei den Rechnungen nicht weiter berücksichtigen müssen.

Im Folgenden bezeichne $\mathcal{T}_x M$ den approximativen Tangentialraum von T, welcher μ_T-f.ü. existiert. Weiter sei $\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M} \colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathcal{T}_x M$ die orthogonale Projektion mit der Matrixdarstellung $(p_{ij})_{i,j=1,\ldots,n+k}$ bezüglich der Standardbasis $e_1, \ldots, e_{n+k}$ des $\mathbb{R}^{n+k}$ und wir verwenden zusätzlich abkürzend $(\,\cdot\,)^\top$ für diese Projektion.

Für die Divergenz auf der Menge M folgt mithilfe der Produktregel $\operatorname{div}_M X = \langle \nabla_M \gamma, \hat{x} \rangle + \gamma \ \operatorname{div}_M \hat{x}$. Wir berechnen die verschiedenen Ausdrücke getrennt. Zunächst gilt

$$\nabla_M \gamma(q_j) = \gamma'(q_j)\ (Dq_j)^\top = 2\gamma'(q_j)\ \hat{x}^\top$$

und damit erhalten wir den folgenden Ausdruck für den ersten Summanden

$$\langle \nabla_M \gamma(q_j), \hat{x} \rangle = 2\gamma'(q_j) \langle \hat{x}^\top, \hat{x} \rangle \overset{(1.2)}{=} 2\gamma'(q_j)\ |\hat{x}^\top|^2,$$

welcher nichtnegativ ist. Zweitens ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_M \hat{x} &= \sum_{i=1}^{n+k} \langle \nabla_M \hat{x}_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+k-j} \langle \nabla_M x_i, e_i \rangle - \frac{n-j}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} \langle \nabla_M x_i, e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+k-j} \langle e_i^\top, e_i \rangle - \frac{n-j}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} \langle e_i^\top, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+k-j} p_{ii} - \frac{n-j}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n+k} p_{ii} - \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} - \frac{n-j}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} \overset{(1.4)}{=} n - \frac{n}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii},
\end{aligned}$$

welcher nach (1.5) erneut nichtnegativ ist.
Setzen wir die Terme in die Variationsformel (3.1) ein, so erhalten wir die Integralgleichung

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \gamma(q_j) \left\{ n - \frac{n}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} \right\} + 2\,\gamma'(q_j)\, |\hat{x}^\top|^2 \,\mathrm{d}\mu_T.$$

Wir untersuchen den Integranden im Detail. Für jedes $i = n+k-j+1, \ldots, n+k$ gilt wie in (1.6) für das Matrixelement $p_{ii} = 1$ genau dann, wenn $e_i \in \mathcal{T}_x M$. In anderen Worten ausgedrückt, wir haben für μ_T-f.a. $x \in M$

$$\left\{ n - \frac{n}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} \right\} = 0 \text{ genau dann, wenn } p_{ii} = 1 \text{ für alle } i = n+k-j+1, \ldots, n+k$$

und andernfalls ist der Term strikt positiv. Wir definieren die Menge E durch

$$E := \{x \in M\colon \mathcal{T}_x M \text{ existiert und } e_{n+k-j+1}, \dots, e_{n+k} \in \mathcal{T}_x M\}$$

und betrachten die disjunkten Mengen E und $\mathbb{R}^{n+k} \setminus E$. Einerseits haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus E} \gamma(q_j) \left\{ n - \frac{n}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} \right\} + 2\gamma'(q_j)\, |\hat{x}^\top|^2 \, \mathrm{d}\mu_T \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus E} \gamma(q_j) \left\{ n - \frac{n}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} \right\} \mathrm{d}\mu_T \geq 0 \end{aligned}$$

und damit die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus E} \gamma(q_j) \left\{ n - \frac{n}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} \right\} \mathrm{d}\mu_T = 0.$$

Der Ausdruck in den Klammern $\{\dots\}$ ist positiv in der betrachteten Menge und da die Funktion γ so gewählt ist, dass $\gamma(t) > 0$ für $t > R + \varepsilon$ ist, folgt

$$\operatorname{spt} \mu_T \cap (\mathbb{R}^{n+k} \setminus E) \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon q_j(x) \leq R + \varepsilon\} = \mathcal{H}_j(R + \varepsilon).$$

Andererseits gilt $\{\dots\} = 0$ in der Menge E und daher

$$0 = \int_E \gamma(q_j) \left\{ n - \frac{n}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} \right\} + \gamma'(q_j)\, |\hat{x}^\top|^2 \, \mathrm{d}\mu_T = \int_E \gamma'(q_j)\, |\hat{x}^\top|^2 \, \mathrm{d}\mu_T.$$

Es ist $|\hat{x}^\top|^2 = 0$ genau dann, wenn $\hat{x} \perp \mathcal{T}_x M$ und in der Menge E heißt das $x_{n+k-j+1} = \ldots = x_{n+k} = 0$, da $e_{n+k-j+1}, \dots, e_{n+k} \in \mathcal{T}_x M$. Formulieren wir dies in der Kontraposition, so bekommen wir

$$x_{n+k-j+l} \neq 0 \text{ für (mindestens) ein } l = 1, \dots, j \;\Rightarrow\; |\hat{x}^\top|^2 > 0 \text{ in } E.$$

Wiederum, aufgrund der speziellen Wahl von γ und der Ableitung, erhalten wir

$$\operatorname{spt} \mu_T \;\cap (E \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon x_{n+k-j+l} \neq 0 \text{ für ein } l = 1, \dots, j\}) \subset \mathcal{H}_j(R + \varepsilon).$$

Fassen wir beide Ergebnisse zusammen, so folgt

$$\operatorname{spt} \mu_T \subset \mathcal{H}_j(R + \varepsilon) \cup (E \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon x_{n+k-j+1} = 0, \dots, x_{n+k} = 0\}). \tag{3.2}$$

Schließlich gilt $E \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon x_{n+k-j+1} = 0, \dots, x_{n+k} = 0\} \subset \mathcal{H}_j(R + \varepsilon)$. Nehmen wir dazu im Widerspruch an, es existiert ein Punkte $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n+k}) \in \operatorname{spt} \mu_T$ mit $\tilde{x} \in E$ sowie $\tilde{x}_{n+k-j+1} = \ldots = \tilde{x}_{n+k} = 0$, aber $\tilde{x} \notin \mathcal{H}_j(R + \varepsilon)$.
Wir wählen eine Funktion $f \in C^0_c(\mathbb{R}^{n+k})$, welche $f \equiv 0$ auf der Menge $\{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon x_{n+k-j+1} = 0, \dots, x_{n+k} = 0\}$ und sonst strikt positiv in einem hinreichend großen Ball $B_\rho(0), \rho \gg 1$, ist. Da $\tilde{x}$ außerhalb des abgeschlossenen Hyperboloiden liegt und weil wir die Einschließung (3.2) bereits bewiesen haben, müssen Punkte des Trägers von T in einer hinreichend kleinen Umgebung alle $x_{n+k-j+1} = 0, \dots, x_{n+k} = 0$ erfüllen und somit folgt mit der konkreten Wahl der Funktion f

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \int_{\eta_{\tilde{x},\lambda}(M)} f(y)\, \theta(\tilde{x} + \lambda y)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y) = 0.$$

Da aber außerdem $\tilde{x} \in E$, folgt $e_{n+k-j+1}, \ldots, e_{n+k} \in \mathcal{T}_{\tilde{x}}M$ oder anders ausgedrückt $\mathcal{T}_{\tilde{x}}M \not\subset \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon x_{n+k-j+1} = 0, \ldots, x_{n+k} = 0\}$ und daher der Widerspruch zu der Definition 2.4 des approximativen Tangentialraumes

$$\theta(\tilde{x}) \int_{\mathcal{T}_{\tilde{x}}M} f(y) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y) > 0.$$

Insgesamt gilt somit $\operatorname{spt} T = \operatorname{spt} \mu_T \subset \mathcal{H}_j(R + \varepsilon)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist der Satz bewiesen. $\square$

3.1.4 Ein Nichtexistenzsatz

Genauso wie S. Hildebrandt und U. Dierkes sind auch wir an zusammenhängenden Strömen T interessiert beziehungsweise unter welchen allgemeinen Bedingungen an $\operatorname{spt} \partial T$ solche *nicht* existieren können. Zunächst ist jedoch überhaupt nicht klar, was zusammenhängend in dem Kontext der Maßtheorie bedeuten soll. Wir führen dazu den Begriff *zusammenhängender Strom* ein.

Definition 3.11 (Zusammenhängender Strom) *Ein Strom $T \in \mathcal{R}_n(U)$ heißt zusammenhängend, falls $\operatorname{spt} T$ eine zusammenhängende Menge in U ist. Das bedeutet $\operatorname{spt} T$ kann nicht in zwei disjunkte, nichtleere, abgeschlossene Mengen zerlegt werden.*

Wir betrachten in diesem Kapitel das spezielle Hyperboloid mit der Signatur $j = 1$. Ist R negativ, so zerfällt der Körper in zwei disjunkte Schalen, denn es existieren keine Punkte des Hyperboloids in der gesamten $\{x_{n+k} \equiv 0\}$-Ebene, und wir sprechen von einem zweischaligen Hyperboloid. Somit erhalten wir mit Hilfe des Einschließungssatzes 3.10 direkt:

Proposition 3.12 (Prä-Nichtexistenzsatz) *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein stationärer Strom in $\mathbb{R}^{n+k}$ mit kompaktem Träger. Für ein $R < 0$ gelte $\operatorname{spt} \partial T \subset \mathcal{H}_1(R)$, sodass sowohl $\operatorname{spt} \partial T \cap (\mathcal{H}_1(R) \cap \{x_{n+k} > 0\}) \neq \emptyset$ als auch $\operatorname{spt} \partial T \cap (\mathcal{H}_1(R) \cap \{x_{n+k} < 0\}) \neq \emptyset$. Dann kann $\operatorname{spt} T$ nicht zusammenhängend sein.*

Wir betrachten jetzt das einschalige Hyperboloid mit $R \geq 0$ und zeigen, dass wir in dem Grenzfall $R = 0$ erneut einen Nichtexistenzsatz erhalten. Für $R = 0$ bekommen wir den Körper

$$\mathcal{H}_1(0) = K := \{(x_1, \ldots, x_{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k} : x_1^2 + \ldots + x_{n+k-1}^2 \leq (n-1)x_{n+k}^2\}.$$

Anhand der Definition von K lässt sich sofort nachprüfen, dass dieser $\eta_{0,\lambda}(K) = K$ für alle $\lambda > 0$ erfüllt und somit der Körper K ein Kegel ist. Wir bezeichnen mit $K^{\pm} := K \cap \{\pm x_{n+k} > 0\}$ die beiden *disjunkten* Kegelhälften.

Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein stationärer, *zusammenhängender* Strom mit kompaktem Träger. Wir zeigen in diesem Kapitel, dass die Situation $\operatorname{spt} \partial T \subset K^+ \cup K^-$, sodass sowohl $\operatorname{spt} \partial T \cap K^+$ als auch $\operatorname{spt} \partial T \cap K^-$ nichtleer sind, unmöglich ist. Ein solcher Strom kann *nicht* existieren, obwohl dieser Singularitäten besitzen darf und daher auch Kegelspitzen im Allgemeinen „durchdrungen“ werden können. Konkret können wir uns dazu die folgenden Beispiele anschauen. Sei

$$S_{p,q} := \mathcal{S}^p\left(\sqrt{\frac{p}{p+q}}\right) \times \mathcal{S}^q\left(\sqrt{\frac{q}{p+q}}\right) \subset \mathcal{S}^{p+q+1}(1) \subset \mathbb{R}^{p+q+2},\ p, q \in \mathbb{N}$$

und $\mathcal{C}(S_{p,q}) := \{tx\colon 0 \le t < 1, x \in S_{p,q}\}$ der Kegel über der Menge $S_{p,q}$. Dann gilt, dass der Kegel $\mathcal{C}(S_{1,5})$ - aufgefasst als rektifizierbarer Strom - zwar nicht Area-minimierend in dem $\mathbb{R}^8$ unter seinen eigenen Randwerten ist, dafür aber eine stationäre Lösung mit Singularität in dem Ursprung darstellt.
Die allgemeine Situation ist sogar noch schlimmer, denn die Kegel $\mathcal{C}(S_{2,4}), \mathcal{C}(S_{3,3})$ und $\mathcal{C}(S_{p,q}), p+q \ge 7$ sind allesamt Area-minimierend unter ihren eigenen Randwerten und besitzen eine Singularität in dem Nullpunkt.
Eine umfangreiche Übersicht dazu liefert die Notiz von P. Simoes [32]. Unser Resultat wirkt daher zunächst erstaunlich.

Für den Beweis des Nichtexistenzsatzes definieren wir die beiden eingeschränkten Ströme $T^{\pm} := T\llcorner\{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon \pm x_{n+k} > 0\} \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Dann gilt nach dem Einschließungssatz 3.10 aus dem vorherigen Kapitel $\operatorname{spt} T^+ \subset \bar{K}^+ = K^+ \cup \{0\}$ sowie $\operatorname{spt} T^- \subset \bar{K}^- = K^- \cup \{0\}$ und wir zeigen, dass die beiden Ströme weiterhin stationär sind.

Lemma 3.13 *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein stationärer Strom in $\mathbb{R}^{n+k}$ und $\operatorname{spt} T \subset K$. Dann sind die Ströme $T^+ \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ und $T^- \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ebenfalls stationär in $\mathbb{R}^{n+k}$.*

Beweis: Wir betrachten nur den Strom T^+, da der Beweis für T^- vollkommen analog durchführbar ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\phi_\varepsilon(t)$ eine nichtnegative $C^1(\mathbb{R})$-Funktion mit $\phi_\varepsilon(t) \equiv 0$ für $t \le 0$ und $\phi_\varepsilon(t) \equiv 1$ für $t > \varepsilon$ sowie $0 \le \phi'_\varepsilon(t) \le C_0/\varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit einer fixierten Konstanten $C_0 > 0$.
Aufgrund der speziellen Eigenschaft der Kegelhälfte K^+, welche in dem Halbraum $\mathfrak{H} := \{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon x_{n+k} > 0\}$ enthalten ist, bekommen wir die Inklusion

$$K^+ \cap \{x\colon x_{n+k} < \varepsilon\} \subset B_{\frac{\varepsilon}{\cos(\beta)}}(0) = B_{C_1\varepsilon}(0) \tag{3.3}$$

mit einer weiteren Konstanten $C_1 := \cos(\beta)^{-1} > 0$, die nur von dem Öffnungswinkel β des Kegels und somit nur von der Flächendimension n abhängt.
Wir verwenden nun den Satz 3.7 über die Monotonieformel für den stationären Strom T. Für ein hinreichend kleines $\varepsilon_0 > 0$ sind die Voraussetzungen erfüllt, sodass für $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ die Abschätzung $\varepsilon^{-n}\mu_T(B_\varepsilon(0)) \le \varepsilon_0^{-n}\mu_T(B_{\varepsilon_0}(0))$ gilt. Somit finden wir noch eine weitere Konstante $C_2 > 0$ mit

$$\mu_T(B_{C_1\varepsilon}(0)) \le C_2\varepsilon^n \text{ für kleines } \varepsilon > 0. \tag{3.4}$$

Sei X ein beliebiges C^1-Vektorfeld mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^{n+k}$ und $\operatorname{spt} X \cap \operatorname{spt} \partial T^+ = \emptyset$. Das Vektorfeld $\phi_\varepsilon(x_{n+k})X$ verschwindet dann auf dem gesamten Rand $\operatorname{spt} \partial T$ und da T nach Voraussetzung stationär ist, können wir diese Funktion in der ersten Variationsformel (3.1) verwenden. Unter Berücksichtigung der Voraussetzung $\operatorname{spt} T \subset K$ und allen Vorüberlegungen folgt mit einer generischen Konstante C die Abschätzung

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \operatorname{div}_M(\phi_\varepsilon(x_{n+k})X)\,\mathrm{d}\mu_T = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle \nabla_M \phi_\varepsilon(x_{n+k}), X\rangle + \phi_\varepsilon(x_{n+k})\operatorname{div}_M X\,\mathrm{d}\mu_T \\
&= \int_{K^+\cap\{x_{n+k}<\varepsilon\}} \phi'_\varepsilon(x_{n+k})\langle e^\top_{n+k}, X\rangle\,\mathrm{d}\mu_T + \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi_\varepsilon(x_{n+k})\operatorname{div}_M X\,\mathrm{d}\mu_T \\
&\le \frac{C}{\varepsilon}\ |e^\top_{n+k}| \sup_{\mathbb{R}^{n+k}} |X| \int_{B_{C\varepsilon}(0)} \mathrm{d}\mu_T + \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi_\varepsilon(x_{n+k})\operatorname{div}_M X\,\mathrm{d}\mu_T \\
&\le \frac{C}{\varepsilon}\mu_T(B_{C\varepsilon}(0)) + \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi_\varepsilon(x_{n+k})\operatorname{div}_M X\,\mathrm{d}\mu_T
\end{aligned}$$

$$\le C\varepsilon^{n-1} + \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi_\varepsilon(x_{n+k})\,\mathrm{div}_M X\,\mathrm{d}\mu_T$$
$$\xrightarrow{\varepsilon\searrow 0} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \chi_{\{x_{n+k}\ge 0\}}\,\mathrm{div}_M X\,\mathrm{d}\mu_T = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \mathrm{div}_M X\,\mathrm{d}\mu_{T^+}$$

Dieselbe Abschätzung ist gültig für das Vektorfeld $-X$ anstelle von X und wir erhalten die Stationarität von T^+, da $\delta T^+(X) = 0$ für alle $X \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+k} \setminus \operatorname{spt}\partial T^+, \mathbb{R}^{n+k})$ gilt. □

Bemerkung

i) Es ist offensichtlich, dass exakt die gleiche Argumentation für rektifizierbare Varifaltigkeiten funktioniert, da die Monotonieformel auch für Varifaltigkeiten gilt und an keiner Stelle in dem obigen Beweis die Orientierung verwendet worden ist. Wir halten für eine spätere Referenz daher noch fest:

Lemma 3.14 *Sei $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ eine in $\mathbb{R}^{n+k}$ stationäre Varifaltigkeit mit* $\operatorname{spt} V \subset K$. *Dann sind die beiden Varifaltigkeiten $V^\pm := V \llcorner \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon \pm x_{n+k} > 0\}$ ebenfalls stationär in $\mathbb{R}^{n+k}$.*

Nun lässt sich auf die beiden Ströme T^+ und T^- der Konvexe-Hülle Satz 3.9 anwenden und, da $\operatorname{spt}\partial T^\pm \subset K^\pm$, erhalten wir sofort, dass der Ursprung nicht in dem Träger von T enthalten sein kann.

Alle Rechnungen sind invariant unter Kongruenzabbildungen und wir haben somit das folgende Resultat bewiesen.

Satz 3.15 (Nichtexistenzsatz) *Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \cup \{p_0\} \cup \mathcal{K}^- \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ein Kegel mit Spitze p_0, welcher kongruent zu dem Kegel K ist. Dann existiert kein stationärer Strom $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, sodass* $\operatorname{spt} T$ *eine kompakte und zusammenhängende Menge ist und mit Randwerten* $\operatorname{spt}\partial T \subset \mathcal{K}^+ \cup \mathcal{K}^-$, *sodass sowohl* $\operatorname{spt}\partial T \cap \mathcal{K}^+$ *als auch* $\operatorname{spt}\partial T \cap \mathcal{K}^-$ *nicht leer sind.*

Bemerkungen

i) Wir bemerken, dass mit zunehmender Dimension n der Fläche auch der Öffnungswinkel β des Nichtexistenzkegels $\mathcal{K}$ größer wird. Konkret gilt für den Öffnungswinkel

$$\tan\beta = \frac{1}{1/\sqrt{n-1}} = \sqrt{n-1}, \text{ also } \beta = \arctan(\sqrt{n-1}), \tag{3.5}$$

dementsprechend wächst β mit zunehmendem n und es gilt $\beta \to 90°$ für $n \to \infty$. Der Öffnungswinkel (in °) für die Dimensionen $n = 2, \ldots, 10$ ist auf zwei Nachkommastellen gerundet in der Tabelle dargestellt.

Dimension	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Öffnungswinkel	45,00	54,74	60,00	63,43	65,91	67,79	69,30	70,53	71,57

ii) Keines der Resultate in diesem und in dem vorherigen Kapitel benötigt die Ganzzahligkeit der Vielfachheitsfunktion θ, da die Beweise nur auf der Variationsformel aufbauen.

iii) Der Einschließungs- und Nichtexistenzsatz erweitert den (reinen) Existenzsatz für Area-*minimierende* Ströme mit ganzzahliger Vielfachheit, L. Simon [33, Lem. 34.1]. Ist ein Strom $S \in \mathcal{IR}_{n-1}(\mathbb{R}^{n+k})$ mit $\operatorname{spt} S$ kompakt und $\partial S = 0$ gegeben, so existiert ein Strom $T \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mit kompaktem Träger und $\partial T = S$, der Area-minimierend in dem Sinne der Definition 3.8 ist. Unsere Sätze liefern zusätzliche Informationen über die Form des Stroms T oder beweisen, dass der Träger bei geeigneter Lage von S in mindestens zwei Komponenten zerfällt.

iv) Betrachtet man speziell Area-*minimierende* Ströme mit $\theta \in \mathbb{N}$ in den Dimensionen $n \leq 6$ und mit der Kodimension $k = 1$, dann sind die Flächen in dem Inneren glatte Untermannigfaltigkeiten. Dieses Ergebnis wurde sukzessive bewiesen, zuerst von W. Fleming [18] in dem Jahr 1961 für 2-dimensionale Lösungen im $\mathbb{R}^3$ sowie 1966 von F. J. Almgren [1] für 3-dimensionale Ströme im $\mathbb{R}^4$ und schließlich von J. Simons [35] für bis zu 6-dimensionale Area-Minimierer des $\mathbb{R}^7$ in dem Jahr 1968. In höheren Dimensionen ist die Aussage tatsächlich falsch, wie wir durch das Beispiel

$$\partial [\![\{(x,y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \colon |x| < |y|\}]\!] \llcorner B_1(0)$$

von E. Bombieri, E. de Giorgi und E. Giusti [4] wissen, vergleiche auch die Diskussion über die Kegel $\mathcal{C}(S_{p,q})$ zu Beginn dieses Abschnittes.
Der Einschließungs- und Nichtexistenzsatz folgt für Minimierer mit $\theta = 1$ in den kleinen Dimensionen somit aus der Arbeit von U. Dierkes [6] sowie U. Dierkes und D. Schwab [10]. Die von dem Autor bewiesenen Sätze gelten jedoch in beliebiger Dimension sowie Kodimension und die Flächen müssen nur stationär sein und nicht zusätzlich Area-minimierend, weiterhin dürfen diese mit einer beliebigen positiven Vielfachheit ausgestattet sein.

v) Es existiert offensichtlich *kein* analoges Ergebnis für eindimensionale Ströme. Der Körper $\mathcal{H}_j(R)$ würde in diesem Fall zu einem Zylinder entarten. Es existiert aber auch kein anderer Kegel mit einer entsprechenden Eigenschaft, da eine Gerade als stationäre Lösung von zwei geeigneten Randpunkten, stets durch eine Kegelsingularität verlaufen kann.

3.1.5 Notwendige Bedingungen für zusammenhängende Ströme

In diesem Abschnitt geben wir allgemeine notwendige Bedingungen für die Lage der Randwerte $\operatorname{spt} \partial T$ an, damit ein stationärer Strom $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mit einem zusammenhängenden Träger $\operatorname{spt} T$ existieren kann. Dazu verwenden wir den Nichtexistenzsatz 3.15. Für glatte n-dimensionale C^2-Flächen $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ geht der entsprechende Satz auf U. Dierkes [6, Cor. 3] in dem Fall $k = 1$ sowie auf U. Dierkes und D. Schwab [10] für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ zurück.

Satz 3.16 *Es seien $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^{n+k}$ zwei abgeschlossene Mengen und $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein zusammenhängender, stationärer Strom in $\mathbb{R}^{n+k}$. Die Randwerte erfüllen* $\operatorname{spt} \partial T \subset B_1 \cup B_2$, *sodass sowohl* $\operatorname{spt} \partial T \cap B_1 \neq \emptyset$ *als auch* $\operatorname{spt} \partial T \cap B_2 \neq \emptyset$. *Wir erhalten die beiden folgenden Aussagen:*

i) Falls $B_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon |x - y_i| \leq \delta_i\}, i = 1, 2,$ abgeschlossene Bälle mit Mittelpunkten y_i und Radien δ_i sind und $R := |y_1 - y_2|$ den Abstand der Mittelpunkte bezeichnet, dann gilt

$$R \leq \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{1/2} (\delta_1 + \delta_2).$$

ii) Falls B_1 und B_2 beliebige kompakte Mengen mit Diameter d_1 und d_2 sind, welche durch eine Scheibe der Dicke $r > 0$ getrennt sind, dann gilt

$$r \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2n\,(n+k)}{(n-1)(n+k-1)}\right)^{1/2}(d_1 + d_2).$$

Beweis: Nach einer möglichen Rotation und Translation können wir annehmen, dass die Mittelpunkte der Kugeln durch $y_1 = (0, \ldots, 0, \frac{R\delta_1}{\delta_1+\delta_2})$ und $y_2 = (0, \ldots, 0, -\frac{R\delta_2}{\delta_1+\delta_2})$ gegeben sind und somit den Abstand R voneinander besitzen.
Wie in (3.5) gilt für den Öffnungswinkel des Nichtexistenzkegels K die Formel $\tan\beta = \sqrt{n-1}$ und weiterhin folgt aus elementargeometrischen Überlegungen für den Abstand ρ der Mittelpunkte y_i zu dem Kegelmantel ∂K die Relation $\rho = |x_{n+k}| \sin\beta$. Wir verwenden außerdem die Identität $\sin\beta = \frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$ für die trigonometrischen Funktionen.

Wir nehmen an, dass $R > \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2}(\delta_1 + \delta_2)$ und zeigen, dass $\delta_i < \rho$ gilt. Somit liegen die beiden Kugeln in der oberen sowie unteren Kegelhälfte $K^{\pm}$ und es kann nach dem Nichtexistenzsatz 3.15 kein zusammenhängender Strom existieren. Direktes Nachrechnen liefert in der Tat

$$\begin{aligned}
\rho = \frac{R\delta_i}{\delta_1 + \delta_2}\sin\beta &> \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2}\delta_i \sin\beta = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2}\delta_i \frac{\tan\beta}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} \\
&= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2}\delta_i \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{1+(n-1)}} = \delta_i
\end{aligned}$$

und damit den Beweis der ersten Aussage. Für den zweiten Teil verwenden wir die folgende Hilfsaussage aus H. Federer [16, 2.10.41].

Lemma 3.17 (Satz von Jung) *Sei $S \subset \mathbb{R}^N$ eine beliebige Menge mit $0 < \operatorname{diam} S < \infty$. Dann ist S in einer eindeutigen abgeschlossenen Kugel mit minimalem Durchmesser enthalten, welcher nicht größer als $(2N(N+1)^{-1})^{1/2} \operatorname{diam} S$ ist.*

Daher sind die Mengen B_i in Kugeln mit Radius $\delta_i \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2(n+k)}{n+k+1}\right)^{1/2} d_i, i = 1, 2,$ enthalten und wir gelangen zu der Abschätzung

$$\begin{aligned}
r \leq |Y_1 - Y_2| = R &\overset{i)}{\leq} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2}(\delta_1 + \delta_2) \\
&\leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2}\frac{1}{2}\left(\frac{2\,(n+k)}{n+k+1}\right)^{1/2}(d_1 + d_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{2n\,(n+k)}{(n-1)(n+k-1)}\right)^{1/2}(d_1 + d_2),
\end{aligned}$$

welche der Behauptung entspricht. □

3.2 Area-stationäre Ströme in einer Kodimension

Es stellt sich die Frage, ob wir den Öffnungswinkel β des Nichtexistenzkegels K vergrößern und weiterhin beweisen können, dass kein zusammenhängender Strom existieren kann, falls Randwerte in den beiden disjunkten Kegelhälften K^+ und K^- vorhanden sind. Betrachten wir nur Ströme mit der Kodimension $k = 1$, so lässt sich in der Tat der Kegel „weiter öffnen". Wir geben sogar den *optimalen* Kegel mit der „Nichtexistenz-Eigenschaft" an.

Für zweidimensionale Minimalflächen $\mathcal{X}$ von dem Abbildungstyp in den $\mathbb{R}^3$ wurde dieses Resultat von R. Osserman und M. Schiffer [30, Thm. 6] in dem Jahr 1975 bewiesen. Ihre Idee besteht aus der Konstruktion einer Familie von Katenoiden $(C_a)_{a>0} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 < a^2 \cosh^2(z/a)\}$. Es lässt sich zeigen, dass diese Familie einen Kegel K „umhüllt". Dabei verstehen wir unter dem Begriff „umhüllen" in beliebig dimensionalen Räumen die folgende Definition nach U. Dierkes [6, §2]: Eine Familie von Mengen $(C_a)_{a>0}$ *umhüllt* eine Menge K in dem $\mathbb{R}^{n+1}$, falls gilt

(1) C_a ist stetig in dem Parameter a, das heißt für jedes $a_0 > 0$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass in dem Fall $|a - a_0| < \delta$ folgt, dass $C_a \Delta C_{a_0} := (C_a \cup C_{a_0}) \setminus (C_a \cap C_{a_0}) \subset T_\varepsilon(\partial C_{a_0}) := \{p \colon \operatorname{dist}(p, \partial C_{a_0}) < \varepsilon\}$,

(2) $K \subset C_a$ für jedes $a > 0$,

(3) jeder Punkt $p \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ gehört *nicht* zu mindestens einem der C_a,

(4) jede kompakte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ liegt in mindestens einem der C_a.

Es ist wichtig zu bemerken, dass jede Katenoidfläche $\partial C_a \subset \mathbb{R}^3$ selber wieder eine zweidimensionale minimale Untermannigfaltigkeit ist. Um nun zu zeigen, dass eine Minimalfläche $\mathcal{X}$ innerhalb des Kegels K liegen muss, falls nur für die Randwerte $\mathcal{X}(\partial\Omega) \subset \mathring{K}$ gilt, verwendet man ein Maximumprinzip über Minimalflächen, welches besagt, dass zwei Minimalflächen entweder disjunkt sind oder übereinstimmen. Dazu kann man diese zunächst lokal als Graph schreiben. Ist der Berührungspunkt ein Verzweigungspunkt der Fläche $\mathcal{X}$, dann lässt sich jedes einzelne „Blatt" der Minimalfläche als Graph schreiben. Die Konstruktion ist beschrieben in U. Dierkes et al. [8, Thm. 1]. Beide Flächen erfüllen dann eine (gleiche) quasilineare elliptische Differentialgleichung. In dem Beweis von Theorem 10.7 zeigen D. Gilbarg und N. S. Trudinger [19] wie sich dieser Fall auf den linearen Fall reduzieren lässt und die Übereinstimmung folgt dann mit dem Hopfschen Maximumprinzip [19, Thm. 3.5 ff.]. Daher kann die Fläche $\mathcal{X}$ keine der Katenoidenflächen $\partial C_a, a > 0$ berühren und muss daher innerhalb des eingehüllten Kegels K liegen.
Zusätzlich ist dieses Resultat in dem Sinne optimal, dass sich der Öffnungswinkel nicht vergrößern lässt, da andernfalls zwei koaxiale, parallele Kreise ein Katenoid berandet würden.

Diese Konstruktion wurde von U. Dierkes [6, §2] erweitert, um einen Nichtexistenzsatz für n-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeiten in dem $\mathbb{R}^{n+1}$ zu erhalten. Dabei sind zwei Schwierigkeiten zu überwinden: Zunächst muss eine n-dimensionale Familie von minimalen Flächen konstruiert werden, welche die Katenoide auf beliebige Dimensionen verallgemeinert. Diese Flächen werden dann *n-Katenoide* genannt. Zweitens muss gezeigt werden, dass diese Familie als Volumenmenge betrachtet einen Kegel umhüllen, der die Nichtexistenz-Eigenschaft besitzt. Per Konstruktion ist ein so definierter Kegel dann ebenfalls optimal. In dem Beweis wird ein Maximumprinzip für zwei minimale Untermannigfaltigkeiten verwendet, welches die Glattheit beider Flächen erfordert. Somit ist diese Erweiterung auf höhere Dimensionen erneut nur für C^2-Flächen anwendbar.

Wir zeigen in diesem Kapitel, dass wir mithilfe der Konstruktion von U. Dierkes auch geeignete Flächen erhalten, um einen Kegel zu umhüllen, welcher die Nichtexistenz-Eigenschaft für zusammenhängende stationäre Ströme $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ erfüllt. Wir müssen hier ebenfalls auf ein Maximumprinzip zurückgreifen, sodass wir nur den Fall $k = 1$ betrachten. In den abschließenden Bemerkungen dieses Kapitels erläutern wir, dass bei höherer Kodimension stets eine strikte n-Konvexität oder positive n-mittlere Krümmung, eine Zusammensetzung der n kleinsten Hauptkrümmungen, benötigt wird.

Wir wiederholen der Vollständigkeit halber zunächst die Konstruktion der n-Katenoide nach U. Dierkes [6, §2] und zeigen, dass diese einen Kegel umhüllen.

3.2.1 Die Konstruktion minimaler Enveloppen

Wir konstruieren rotationssymmetrische minimale Untermannigfaltigkeiten und betrachten dazu eine Kurve $(x, y(x))$ in der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und ihren rotationssymmetrischen n-dimensionalen Graph $\mathfrak{G}_{\text{rot}} := \{(x, y(x)\,\omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x \in [x_0, x_1], \omega \in \mathcal{S}^{n-1}(1)\}$. Wir wollen den Flächeninhalt minimieren. Definieren wir $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $F(x, z, p) = F(z, p) := z^{n-1}\sqrt{1 + p^2}$, dann ist der Flächeninhalt des Graphen $\mathfrak{G}_{\text{rot}}$ proportional zu dem eindimensionalen Variationsintegral

$$\mathcal{I}(y) := \int_{x_0}^{x_1} F(y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} y^{n-1}(x)\sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Die Extremalen von $\mathcal{I}$ korrespondieren somit zu n-dimensionalen rotationssymmetrischen minimalen Untermannigfaltigkeiten in dem $\mathbb{R}^{n+1}$, welche wir „*n-Katenoide*“ nennen.

Da der Integrand F nicht explizit von x abhängt, lässt sich ein klassisches Resultat der Variationsrechnung anwenden. Die Funktion $\Phi(z, p) := pF_p(z, p) - F(z, p)$ ist ein erstes Integral und daher erfüllt jede Lösung $y(x)$ der Relation $\Phi(y(x), y'(x)) = C$ für eine beliebige Konstante C auch die Eulergleichung zu $\mathcal{I}$, S. Hildebrandt [22, §2.4, Satz 5 f.]. Wir nehmen dazu an, dass die Ableitung $y'(x)$ nur isolierte Nullstellen besitzt, eine geometrisch legitime Forderung. Andernfalls ist der obige Schluss in dieser Richtung nicht möglich. In unserem Fall erhalten wir

$$y^{n-1}(x) = a\sqrt{1 + y'(x)^2} \text{ für ein beliebiges } a > 0. \tag{3.6}$$

Es folgt $dx/dy = a(y^{2(n-1)} - a^2)^{-1/2}$ und die Integration von $\sqrt[n-1]{a}$ bis y liefert für eine Lösung $y(x)$ die Inverse

$$x(y) = a\int_{\sqrt[n-1]{a}}^{y} \frac{1}{\sqrt{\xi^{2(n-1)} - a^2}}\,\mathrm{d}\xi + c. \tag{3.7}$$

Diese inverse Funktionen $x(y)$ sind für alle $a > 0, c \in \mathbb{R}$ und für jedes $y \geq \sqrt[n-1]{a}$ definiert.

Bemerkung

i) Für $n = 2$ erhalten wir

$$x(y) = a\int_a^y \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}} = a\ln\left(\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1} + \frac{y}{a}\right) = a\,\mathrm{arcosh}\left(\frac{y}{a}\right)$$

und daher als Lösung die klassische Kettenlinie $y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, welche auch R. Osserman und M. Schiffer in ihrer Konstruktion verwendet haben. Denn durch die Rotation der Kettenlinie entsteht ein Katenoid, welches eine zweidimensionale minimale Untermannigfaltigkeit ist.

Lemma 3.18 *Jedes Mitglied der Einparameterfamilie von n-Kettenlinien*

$$x = g(y,a) := a \int_{\sqrt[n-1]{a}}^{y} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^{2(n-1)} - a^2}}, \qquad a > 0,\ y \geq \sqrt[n-1]{a}$$

tangiert die von a unabhängige Halbgerade $y = \tau_0 x, x > 0$, wobei z_0 die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\frac{z}{\sqrt{z^{2(n-1)} - 1}} = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^{2(n-1)} - 1}}. \tag{3.8}$$

bezeichnet und $\tau_0 := \left(z_0^{2(n-1)} - 1\right)^{1/2}$ gesetzt ist. Außerdem ist jeder Punkt der Halbgerade in genau einem Familienmitglied enthalten.

Beweis: Wir schauen uns die Lösungsfamilie $x = g(y,a), a > 0$ genauer an. Durch Berechnung der beiden ersten Ableitungen

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{\sqrt{y^{2(n-1)} - a^2}} > 0, \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{a(n-1)y^{2n-3}}{(y^{2(n-1)} - a^2)^{3/2}} < 0$$

erkennen wir, dass jede Lösung $x = g(y,a)$ eine strikt monoton wachsende und strikt konkave Funktion ist, falls sie als Graph über y betrachtet wird. Aufgrund der strikten Monotonie folgt, dass sie als Graph über x betrachtet strikt konvex ist. Zusätzlich gilt offensichtlich

$$\lim_{y \searrow \sqrt[n-1]{a}} \left(\frac{d}{dy} x(y)\right) = +\infty. \tag{3.9}$$

Für jeden Parameter $a > 0$ existiert nun eine eindeutige Tangente, die durch den Ursprung verläuft. Es existierten also eindeutige Zahlen $x = x(a) > 0$ und $y = y(a) > 0$, sodass

$$x(a) = g(y(a), a) \text{ und } y(a) = y'(x(a))x(a),$$

wobei $y'(x(a))$ die Steigung der Kurve $x = g(y,a)$ bezeichnet, aufgefasst als Funktion $y(x)$ in dem speziellen Punkt $x(a)$. Wir bezeichnen die Steigung mit $\tau(a) := y'(x(a))$, diese Zahl ist somit für jedes $a > 0$ ebenfalls eindeutig bestimmt.

Aus dem ersten Integral der Bewegung (3.6) erhalten wir für die Ableitung den Ausdruck $y' = a^{-1}\sqrt{y^{2(n-1)} - a^2}$ und können damit schreiben

$$\tau(a) = \frac{y(a)}{x(a)} = y'(x(a)) = \frac{\sqrt{y^{2(n-1)}(a) - a^2}}{a} = \sqrt{\left(\frac{y(a)}{\sqrt[n-1]{a}}\right)^{2(n-1)} - 1}. \tag{3.10}$$

Wir zeigen nun, dass der Quotient $Q(a) := y(a)/\sqrt[n-1]{a}$ sogar unabhängig von a konstant ist. Damit ist die Steigung der eindeutig bestimmten Ursprungstangenten für jeden Parameter a der Familie identisch.

Es gilt einerseits nach der Gleichung (3.10) direkt

$$x(a) = \frac{y(a)}{\tau(a)} = \frac{y(a)}{\sqrt{Q^{2(n-1)}(a) - 1}} = \frac{Q(a) \sqrt[n-1]{a}}{\sqrt{Q^{2(n-1)}(a) - 1}}$$

und andererseits ist aufgrund (3.7)

$$x(a) = a \int_{\sqrt[n-1]{a}}^{y(a)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^{2(n-1)} - a^2}} = \int_{\sqrt[n-1]{a}}^{y(a)} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(\xi / \sqrt[n-1]{a})^{2(n-1)} - 1}}.$$

Eine Substitution mit $\xi = \zeta \sqrt[n-1]{a}$ liefert

$$x(a) = \int_1^{y(a)/\sqrt[n-1]{a}} \frac{1}{\sqrt{\zeta^{2(n-1)} - 1}} \sqrt[n-1]{a}\, \mathrm{d}\zeta = \int_1^{Q(a)} \frac{1}{\sqrt{\zeta^{2(n-1)} - 1}} \sqrt[n-1]{a}\, \mathrm{d}\zeta.$$

Setzen wir beide Ausdrücke gleich, erkennen wir mit einer anschließenden Division von $\sqrt[n-1]{a}$, dass $Q(a)$ die Gleichung (3.8) erfüllt.
Es existiert nur eine Lösung der Gleichung (3.8), da beide Seiten stetig in z sind, sogar differenzierbar, und für die Ableitungen gilt

$$\frac{d}{dz} \frac{z}{\sqrt{z^{2(n-1)} - 1}} = \frac{(2-n)z^{2(n-1)} - 1}{(z^{2(n-1)} - 1)^{3/2}} < 0 \text{ und } \frac{d}{dz} \int_1^z \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi^{2(n-1)} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{z^{2(n-1)} - 1}} > 0,$$

sodass die linke Seite strikt monoton fällt, während die rechte Seite strikt monoton wächst. Die Lösung der Gleichung ist somit eindeutig und diese hatten wir mit z_0 bezeichnet, also $z_0 = Q(a) = y(a)/\sqrt[n-1]{a}$ und mit der Gleichung (3.10) folgt der Ausdruck für τ.

Wir haben also gezeigt, dass jedes Mitglied der Familie $g(y, a), a > 0, y \geq \sqrt[n-1]{a}$, die Halblinie $y = \tau_0 x, \tau_0 = ({z_0}^{2(n-1)} - 1)^{1/2}$, welche fixierte Steigung unabhängig von a besitzt, in genau einem Punkt berührt, nämlich in

$$x_0(a) = \frac{y_0(a)}{\tau_0} = \frac{Q(a) \sqrt[n-1]{a}}{\tau_0} = \frac{z_0}{\tau_0} \sqrt[n-1]{a}, \qquad y_0(a) = z_0 \sqrt[n-1]{a}.$$

Außerdem ist jeder Punkt der Halblinie $y = \tau_0 x, x > 0$, Kontaktpunkt für genau ein Mitglied der Familie $g(\cdot, a), a > 0$. Damit ist das Lemma bewiesen. □

Sei $f(\cdot, a)$ die Familie der inversen Funktionen, diese erfüllt also

$$\begin{aligned} f(g(y,a),a) &= y \quad \text{für } y \geq \sqrt[n-1]{a}, \\ g(f(x,a),a) &= x \quad \text{für } x \geq 0. \end{aligned}$$

Wir erweitern f durch eine Achsenspiegelung, $f(x, a) = f(-x, a)$ für $x \leq 0$, damit wir eine glatte Funktion $f(\cdot, a) \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erhalten. Dies folgt unter Berücksichtigung des Grenzwertes in (3.9). Definieren wir $\rho := (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, dann besteht die Familie

$$\mathcal{M}_a := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \rho = f(x_{n+1}, a)\}, \quad a > 0$$

aus glatten n-dimensionalen minimalen Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+1}$. Weiterhin umhüllen die Mengen

$$C_a := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \rho \leq f(x_{n+1}, a)\}, \quad a > 0$$

aufgrund ihrer Konstruktion den Kegel

$$K \cup \{0\} := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \rho < \pm\tau_0 x_{n+1}\} \cup \{0\}.$$

3.2.2 Ein optimaler Nichtexistenzsatz

Wir beweisen, dass sich der oben konstruierte offene Doppelkegel K als Einschließungsmenge für einen stationären Strom eignet, falls die Randwerte in diesem enthalten sind. Zusätzlich kann der Träger des Stroms nicht durch die Kegelspitze des Abschlusses $\bar{K}$ verlaufen.

Proposition 3.19 (Einschließungssatz) *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ ein stationärer Strom in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit kompaktem Träger und die Randwerte erfüllen* $\operatorname{spt} \partial T \subset K = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \rho < \pm\tau_0 x_{n+1}\}$. *Dann gilt* $\operatorname{spt} T \subset \bar{K}$.

Wir werden im Folgenden zeigen, dass $\operatorname{spt} T \subset C_a$ für jedes $a > 0$ gilt, und wegen $\bigcap_{a>0} C_a = \bar{K}$ folgt die Behauptung der Proposition.
Dazu nehmen wir an, es gelte $\operatorname{spt} T \not\subset C_a$ für ein $a > 0$, und betrachten die Kontraktion $\eta_{0,\lambda\#}T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ in Richtung des Ursprungs mit dem minimalem $\lambda > 1$, sodass $\operatorname{spt}(\eta_{0,\lambda\#}T) \subset C_a$ gilt. Wegen der Minimalität von λ existiert (mindestens) ein $p \in \operatorname{spt}(\eta_{0,\lambda\#}T)$ mit $p \in \partial C_a$. Der kontrahierte Strom liegt somit vollständig auf einer Seite der glatten Fläche ∂C_a und berührt diese in dem Punkt p. Bevor wir ein Maximumprinzip anwenden können, benötigen wir einige Hilfsresultate, die im Wesentlichen aussagen, dass Eigenschaften von T auch für die Kontraktion $\eta_{0,\lambda\#}T$ gültig sind.

Wir verwenden in dem gesamten restlichen Kapitel die beiden *Kurzschreibweisen* $\eta(x) := \eta_{0,\lambda}(x)$ sowie $\tilde{T} := \eta_{0,\lambda\#}T = \eta_\#T$ für die Homothetie respektive den abgebildeten Strom.

Lemma 3.20 *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ mit* $\operatorname{spt} \partial T \subset K$, *dann gilt auch für die Randwerte des kontrahierten Stroms* $\operatorname{spt} \partial\tilde{T} \subset K$.

Beweis: Der Beweis folgt mit Anwendung des Lemmas 2.11 über die Eigenschaften des Bildes, wodurch unter Berücksichtigung der Voraussetzung $\operatorname{spt} \partial T \subset K$ und der Definition eines Kegels direkt $\operatorname{spt} \partial(\eta_\#T) = \operatorname{spt} \eta_\#(\partial T) \subset \eta(\operatorname{spt}(\partial T)) \subset \eta(K) = K$ folgt. □

Wir kommen nun zu weiteren Aussagen, welche wir für spätere Referenzen direkt in beliebiger Kodimension k beweisen, und zudem betrachten wir nicht nur Kontraktionen, sondern lassen für die Homothetie $\eta := \eta_{0,\lambda} \colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine beliebig fixierte Zahl $\lambda > 0$ zu.

Lemma 3.21 *Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine rektifizierbare Menge. Für die Homothetie-Abbildung $\eta = \eta_{0,\lambda} \colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ gilt $J_M \eta_{0,\lambda} = \lambda^{-n}$.*

Beweis: Wir betrachten einen beliebigen, fixierten Punkt $x \in M$, in dem der approximative Tangentialraum $\mathcal{T}_xM$ existiert und legen das Koordinatensystem des $\mathbb{R}^{n+k}$ mit der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_{n+k}\}$ so, dass $\mathcal{T}_xM = \{y \in \mathbb{R}^{n+k} \colon y_{n+1} = \ldots = y_{n+k} = 0\} \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ entspricht. Daher besitzt die Projektion $(\,\cdot\,)^\top := \mathcal{P}_{\mathcal{T}_xM}$ auf diesen Unterraum die Blockmatrix

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}_xM} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$$

und wegen der Jacobi-Matrix $D\eta(x) = \lambda^{-1}\mathbb{I}_{n+k}$ gilt dann für jedes $i = 1, \ldots, n+k$, wobei wir Vektoren stets als Spaltenvektoren auffassen, der Ausdruck

$$\nabla_M \eta^i(x) = (D\eta^i(x))^\top = \mathcal{P}_{\mathcal{T}_xM}[\lambda^{-1}e_i] = \begin{cases} (0, \ldots, \lambda^{-1}, \ldots, 0), & \text{falls } i \leq n, \\ (0, \ldots, 0), & \text{falls } i \geq n+1. \end{cases}$$

Da $d^M\eta_x(\tau) = \sum_{i=1}^{n+1}\langle\tau, \nabla_M\eta^i(x)\rangle e_i$ eine lineare Abbildung des $\mathcal{T}_xM$ in den $\mathbb{R}^{n+k}$ ist, setzen wir die Standardbasis des approximativen Tangentialraums ein, um an eine Matrixdarstellung zu kommen. Nach Konstruktion besteht die Basis aus den Vektoren $\{e_1, \ldots, e_n\}$ aufgefasst in dem $\mathbb{R}^{n+k}$ und für die j-te Spalte, $j = 1, \ldots, n$, gilt

$$\sum_{i=1}^{n+k}\langle e_j, \nabla_M\eta^i(x)\rangle e_i = (0, \ldots, \lambda^{-1}, \ldots, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+k}.$$

Somit ist eine Darstellung der Abbildung $d^M\eta_x : \mathcal{T}_xM \to \mathbb{R}^{n+1}$ durch die Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1}\mathbb{I}_n \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+k)\times n}$$

gegeben, $(d^M\eta_x)^* : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathcal{T}_xM$ ist die transponierte Matrix und wir erhalten schließlich

$$J_M\eta = \sqrt{\det\left((d^M\eta_x)^* \circ (d^M\eta_x)\right)} = \sqrt{\det\left(\lambda^{-2}\mathbb{I}_n\right)} = \sqrt{\lambda^{-2n}} = \lambda^{-n}. \qquad \square$$

Lemma 3.22 *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Der approximative Tangentialraum $\mathcal{T}_xM$ von T existiert in dem Punkt $x \in \mathbb{R}^{n+k}$ genau dann, wenn der des kontrahierten Stroms $\mathcal{T}_{\eta(x)}\eta(M)$ in dem entsprechenden Punkt $\eta(x)$ existiert und es gilt die Gleichheit $\mathcal{T}_xM = \mathcal{T}_{\eta(x)}\eta(M)$.*

Beweis: Der Beweis folgt direkt mit der Definition 2.4 des approximativen Tangentialraumes, dazu sei $f \in C_c^0(\mathbb{R}^{n+k})$ eine beliebige Funktion. Beachten wir, dass $\lambda > 0$ eine fixierte Zahl ist, so liefert eine kurze Rechnung

$$\begin{aligned}\lim_{s\searrow 0} s^{-n}\int_M f\Big(\frac{z-x}{s}\Big)\theta(z)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(z) &\overset{\substack{\text{Ersetze } s\\ \text{durch } \lambda s}}{=} \lim_{s\searrow 0} s^{-n}\lambda^{-n}\int_M f\Big(\frac{z}{\lambda s} - \frac{x}{\lambda s}\Big)\theta(z)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(z)\\ &\overset{\substack{\text{Transf.}\\ y = z/\lambda}}{=} \lim_{s\searrow 0} s^{-n}\int_{\eta(M)} f\Big(\frac{y-\eta(x)}{s}\Big)\theta(\eta^{-1}(y))\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(y)\end{aligned}$$

und der Grenzwert auf einer der beiden Seiten existiert nach Voraussetzung, da diese genau die Definitionen für den approximativen Tangentialraum $\mathcal{T}_xM$ und $\mathcal{T}_{\eta(x)}\eta(M)$ darstellen. Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 3.23 *Sei $T = \tau(M, \theta_T, \xi_T) \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein stationärer Strom in $\mathbb{R}^{n+k}$, dann ist auch der mit einem $\lambda > 0$ gestauchte oder gestreckte Strom $\tilde{T} = \eta_{0,\lambda\#}T = \tau(\eta(M), \theta_{\tilde{T}}, \xi_{\tilde{T}}) \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ stationär in $\mathbb{R}^{n+k}$.*

Beweis: Sei $Y \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+k} \setminus \operatorname{spt}(\partial(\eta_{0,\lambda\#}T)), \mathbb{R}^{n+k})$ ein beliebiges Vektorfeld, dann müssen wir das Verschwinden der ersten Variationsformel

$$\delta\tilde{T}(Y) = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \operatorname{div}_{\eta(M)} Y \,\mathrm{d}\mu_{\tilde{T}} = 0$$

zeigen.

Mit diesem beliebigen Y definieren wir das Vektorfeld $X(x) := Y \circ \eta(x)$ und behaupten, dass dieses in der Klasse $C_c^1(\mathbb{R}^{n+k} \setminus \operatorname{spt}(\partial T), \mathbb{R}^{n+k})$ liegt, sodass X ein gültiges Vektorfeld

für die erste Variation δT des Stroms T ist.
Die Homothetie $x \mapsto \eta(x)$ ist eine C^∞-Abbildung und daher bleibt nur zu zeigen, dass der Träger von X außerhalb des Randes $\operatorname{spt}\partial T$ liegt.
Wir erhalten zunächst $Y \in C^1_c(\mathbb{R}^{n+k} \setminus \eta(\operatorname{spt}(\partial T)), \mathbb{R}^{n+k})$, da nach dem Lemma 2.11 über die Eigenschaften des Bildes die Identität $\operatorname{spt}(\partial(\eta_\# T)) = \operatorname{spt}(\eta_\#(\partial T)) = \eta(\operatorname{spt}(\partial T))$ gilt. Hier wird insbesondere die Gleichheit bei der Vertauschung der Abbildung mit dem Träger benötigt, welche in dem Fall einer Homothetie erfüllt ist; wir verweisen dazu speziell auf das Lemma 2.11 iii) und die anschließende Bemerkung.
Wir nehmen jetzt an, es existiere ein Punkt $x_0 \in \operatorname{spt}(\partial T) \cap \operatorname{spt} X$. Definieren wir $y_0 := \eta(x_0)$, dann gelten die beiden Aussagen

$$
\begin{aligned}
&x_0 \in \operatorname{spt}(\partial T) \Rightarrow \eta(x_0) \in \eta(\operatorname{spt}(\partial T)) \Rightarrow y_0 \in \eta(\operatorname{spt}(\partial T)) \text{ und} \\
&0 < |X(x_0)| = |Y \circ \eta(x_0)| = |Y(y_0)|
\end{aligned}
$$

und somit $y_0 \in \eta(\operatorname{spt}\partial T) \cap \operatorname{spt} Y$, was ein Widerspruch zu der angenommenen Existenz des Punktes x_0 darstellt, da der Träger des Vektorfeldes Y außerhalb der Menge $\eta(\operatorname{spt}\partial T)$ liegt.

Wir berechnen die erste Variation des kontrahierten Stroms

$$
\begin{aligned}
\delta\tilde{T}(Y) &= \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \operatorname{div}_{\eta(M)} Y(y)\, \mathrm{d}\mu_{\tilde{T}}(y) = \int_{\eta(M)} \operatorname{div}_{\eta(M)} Y(y)\ \theta_{\tilde{T}}(y)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\eta(M)} \operatorname{div}_{\eta(M)}(X \circ \eta^{-1}(y))\ \theta_T \circ \eta^{-1}(y)\, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y).
\end{aligned}
$$

Eine detaillierte Betrachtung des ersten Faktors des Integranden ermöglicht die folgenden Umformungen

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}_{\eta(M)}(X \circ \eta^{-1}(y)) &= \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \nabla_{\eta(M)}(X_i \circ \eta^{-1}(y)), e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_y \eta(M)}[D(X_i \circ \eta^{-1}(y))], e_i \right\rangle \\
&\overset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_y \eta(M)}[DX_i \circ \eta^{-1}(y)\ D\eta^{-1}(y)], e_i \right\rangle \overset{(1.7)}{=} \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_y \eta(M)}[DX_i \circ \eta^{-1}(y)\ \mathbb{I}_{n+k}\lambda], e_i \right\rangle \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_y \eta(M)}[DX_i \circ \eta^{-1}(y)], e_i \right\rangle \overset{y=\eta(x)}{=} \lambda \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_{\eta(x)} \eta(M)}[DX_i \circ \eta^{-1}(y)], e_i \right\rangle \\
&\overset{(*)}{=} \lambda \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_{\eta(x)} \eta(M)}[DX_i], e_i \right\rangle \circ \eta^{-1}(y) \overset{\substack{\text{Lemma}\\3.22}}{=} \lambda \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M}[DX_i], e_i \right\rangle \circ \eta^{-1}(y) \\
&= \lambda \sum_{i=1}^{n+k} \left\langle \nabla_M(DX_i), e_i \right\rangle \circ \eta^{-1}(y) = \lambda\ (\operatorname{div}_M X) \circ \eta^{-1}(y).
\end{aligned}
$$

Wir liefern noch den Beweis für die Relation $(*)$ nach. Für einen beliebigen Punkt $y \in \operatorname{spt}\tilde{T}$, in dem der approximative Tangentialraum von $\tilde{T}$ existiert, drehen wir das Koordinatensystem erneut so, dass $\mathcal{T}_y\eta(M) \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+k}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{P}_{\mathcal{T}_y \eta(M)}[DX_i \circ \eta^{-1}] = \mathcal{P}_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}[(D_{x_1} X_i \circ \eta^{-1}, \ldots, D_{x_{n+k}} X_i \circ \eta^{-1})] \\
&= (D_{x_1} X_i \circ \eta^{-1}, \ldots, D_{x_n} X_i \circ \eta^{-1}, 0, \ldots, 0) = (D_{x_1} X_i, \ldots, D_{x_n} X_i, 0, \ldots, 0) \circ \eta^{-1} \\
&= (\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n \times \{0\}}[DX_i]) \circ \eta^{-1}
\end{aligned}
$$

und daher ist die *Verkettung* der Homothetie η^{-1} mit der *orthogonalen Projektion* „vertauschbar".

Somit erhalten wir für die erste Variationsformel

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{T}(Y) &= \int_{\eta(M)} \operatorname{div}_{\eta(M)} Y(y)\,\mathrm{d}\mu_{\tilde{T}}(y) = \lambda \int_{\eta(M)} (\operatorname{div}_M X\ \theta_T)\circ\eta^{-1}(y)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(y) \\
&\overset{\substack{\text{Area-F.}\\(2.1)}}{=} \lambda \int_M \operatorname{div}_M X(x)\ \theta_T(x)\ J_M\eta\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) \overset{\substack{\text{Lemma}\\3.21}}{=} \lambda\lambda^{-n} \int_M \operatorname{div}_M X(x)\ \theta_T(x)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) \\
&= \lambda^{-n+1} \int_M \operatorname{div}_M X(x)\,\mathrm{d}\mu_T(x) \overset{\substack{T\text{ ist}\\\text{stationär}}}{=} 0
\end{aligned}$$

und da das Vektorfeld Y beliebig war, folgt die Stationarität des Stroms $\tilde{T}$ in $\mathbb{R}^{n+k}$. $\square$

In dem Beweis haben wir die folgende allgemeine Aussage gezeigt, welche wir in dem Kapitel 3.3.4 wieder aufgreifen werden.

Korollar 3.24 *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ und $\eta := \eta_{0,\lambda}$ die Homothetie mit einem beliebig fixiertem $\lambda > 0$. Für einen beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^{n+k}$ betrachte den Ball $B_r(x_0), r > 0$, sodass $\bar{B}_r(x_0) \cap \operatorname{spt}(\partial(\eta_\# T)) = \emptyset$. Sei Y ein beliebiges C^1-Vektorfeld auf $\mathbb{R}^{n+k}$ mit $\operatorname{spt} Y \subset B_r(x_0)$ und $|Y| \leq 1$. Definiere das Vektorfeld $X := Y \circ \eta$, dann gilt $\operatorname{spt} X \subset \eta^{-1}(B_r(x_0)) = B_{\lambda r}(x_0)$ und $|X| \leq \lambda$ sowie die folgende Identität $\delta(\eta_\# T)(Y) = \lambda^{-n+1}\delta T(X)$ für die erste Variationsformel.*

Wir führen nun den Beweis des Einschließungssatzes zu Ende. Wir haben einen stationären Strom $\tilde{T} \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ konstruiert, der auf einer Seite einer glatten minimalen Hyperfläche ∂C_a liegt und diese in einem Punkt p berührt. Es sei festgehalten, dass der Schnitt von zwei abgeschlossenen Mengen weiterhin abgeschlossen ist.
Wir benötigen nun die vorausgesetzte Kompaktheit des Trägers $\operatorname{spt} T$. Diese überträgt sich offensichtlich auf die Kontraktion und es existiert daher ein Ball $B_\rho(0), \rho \gg 1$, mit $B_\rho(0) \cap \operatorname{spt}\tilde{T} = \emptyset$.
Nun lässt sich das Maximumprinzip von B. Solomon und B. White [36] anwenden, welches die Übereinstimmung von $\operatorname{spt}\tilde{T}$ und ∂C_a in einer offenen Umgebung liefert, vergleiche auch die untenstehende Bemerkung. Eine nichtleere Schnittmenge, die offen und abgeschlossen ist, kann nur bei Gleichheit beider Flächen eintreten. Dies ist ein Widerspruch, da auch die Randwerte der Kontraktion $\operatorname{spt}\partial\tilde{T}$ nach Lemma 3.20 innerhalb des Kegels liegen. Das beweist die Proposition 3.19.

Mit *exakt* der gleichen Argumentation wie in Abschnitt 3.1.4 folgt der optimale Nichtexistenzsatz, da der hier betrachtete Kegel K ebenfalls die wichtige Eigenschaft (3.3) besitzt, also $K^+ \cap \{x\colon x_{n+1} < \varepsilon\} \subset B_{C\varepsilon}(0)$ mit einer Konstanten $C = C(n)$ erfüllt.

Satz 3.25 (*Optimaler* Nichtexistenzsatz) *Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \cup \{p_0\} \cup \mathcal{K}^- \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Kegel mit Spitze p_0, welcher kongruent zu dem Kegel $K^\pm \cup \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 - \tau_0^2 x_{n+1}^2 < 0, \pm x_{n+1} > 0\} \cup \{0\}$ ist. Dann existiert kein stationärer Strom $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ mit kompaktem Träger, sodass $\operatorname{spt} T$ eine zusammenhängende Menge ist und für den Rand $\operatorname{spt}\partial T \subset \mathcal{K}^+ \cup \mathcal{K}^-$ gilt, wobei sowohl $\operatorname{spt}\partial T \cap \mathcal{K}^+$ als auch $\operatorname{spt}\partial T \cap \mathcal{K}^-$ nicht leer sind.*

Bemerkungen

i) Per Konstruktion ist dieser Kegel in dem Sinne optimal, dass kein Kegel dieser Art mit größerem Öffnungswinkel existiert, der die Nichtexistenz-Eigenschaft besitzt. Mit zunehmender Dimension wird der Öffnungswinkel des Nichtexistenzkegels erneut größer. Konkret gilt für den Öffnungswinkel $\beta = \arctan(\tau_0)$. Die Lösung z_0, die Konstante τ_0 und der Öffnungswinkel (in °) für die Dimensionen $n = 2, \ldots, 10$ sind auf zwei Nachkommastellen gerundet in der Tabelle dargestellt. Die Rechnungen wurden jeweils mit einer Genauigkeit von vier Nachkommastellen in dem Programm MATLAB R2016a ausgeführt.

Dimension	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_0	1,81	1,60	1,49	1,42	1,36	1,33	1,30	1,27	1,25
τ_0	1,51	2,37	3,15	3,89	4,62	5,33	6,03	6,73	7,42
Öffnungswinkel	56,47	67,10	72,38	75,60	77,79	79,38	80,59	81,54	82,32

Weiterhin ergibt sich beispielsweise für die Dimension $n = 1000$ mit dieser Rechengenauigkeit ein Öffnungswinkel von $88,42°$.

ii) Mit diesem Nichtexistenzsatz lässt sich die Zahl $3,01775912307664\ldots$ in der Einleitung erklären. Für $n = 2$ wird die Gleichung (3.8) zu $z(z^2-1)^{-1/2} = \int_1^z (\xi^2-1)^{-1/2}\,\mathrm{d}\xi = \operatorname{arcosh}(z)$ und diese besitzt die eindeutige Lösung $z_0 = 1,81017058069898\ldots$. Die Zahl $\tau_0 := (z_0^2-1)^{1/2} = 1,50887956153832\ldots$ gibt in diesem Fall genau die x_3-Höhe h an, in welcher der Schnitt des Kegels mit den $\{x_3 \equiv \pm h\}$-Ebenen einen Kreis mit Radius 1 darstellt. Zwei parallele und koaxiale Einheitskreisringe, die einen Abstand größer als $2\tau_0$ besitzen, liegen somit innerhalb des Kegels und können keinen zusammenhängenden Strom berandeb.

iii) Das Maximumprinzip von B. SOLOMON und B. WHITE [36] gilt sogar für eine deutlich allgemeinere Klasse von Stationarität. Sie betrachten sogenannte F-stationäre Flächen. Dazu sei $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \times \Lambda_n(\mathbb{R}^{n+1}) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften: $F(x, t\zeta) = tF(x,\zeta), t \geq 0$, für jedes x ist F symmetrisch in der zweiten Variablen und es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass die Abbildung $\zeta \mapsto F(x,\zeta) - \varepsilon|\zeta|$ konvex ist.
Ist nun $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ eine rektifizierbare Varifaltigkeit, dann kann das Integral von F über V, definiert durch $\int_V F := \int_M F(x,\zeta(x))\,\mathrm{d}\mu_V$, betrachtet werden. Ist die betrachtete Fläche sogar ein rektifizierbarer Strom $T = \tau(M,\theta,\xi) \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$, dann kann $\zeta(x)$ mit der Orientierung $\xi(x)$ identifiziert werden. Mit einer üblichen Einparameterfamilie ϕ_t wie in Kapitel 3.1.2 folgt, V ist F-stationär, falls für alle Anfangsgeschwindigkeiten $\partial\phi/\partial t|_{t=0}$

$$\frac{d}{dt}\int F\big(\phi_t(x), D\phi_t(x)_{\#}\zeta(x)\big)\,\mathrm{d}\mu_V\big|_{t=0} = 0$$

gilt. Die Abbildung in der zweiten Komponente ist gemäß (1.1) zu verstehen.
Das Maximumprinzip gilt dann für zwei F-stationäre Hyperflächen in einem offenen Ball $B_\rho(0), \rho \in \mathbb{R}$. Die eine Fläche muss eine eingebettete, glatte und zusammenhängende Untermannigfaltigkeit sein und die andere Fläche kann eine rektifizierbare Varifaltigkeit sein, deren Träger komplett auf einer Seite der glatten Fläche liegt. Existiert ein gemeinsamer Punkt des Trägers mit der glatten Fläche, so liegt bereits der komplette Träger der Varifaltigkeit in der Untermannigfaltigkeit. Offensichtlich ist $F(x,\zeta) := |\zeta|$ eine zulässige Funktion und das Area-Funktional daher ein Spezialfall dieses allgemeinen Resultats.

iv) Die verwendete Beweismethode lässt sich nicht auf den Fall mit höherer Kodimension verallgemeinern. Betrachtet man verallgemeinerte Flächen mit Dimension n in dem $\mathbb{R}^{n+k}, k > 1$, und berühren diese eine glatte Hyperfläche, dann ist das Maximumprinzip von

B. White [38] zu verwenden. Dazu muss die Hyperfläche strikt n-konvex sein, das bedeutet die n-mittlere Krümmung $H_n := \kappa_1 + \ldots + \kappa_n$, welche sich aus der Summe der n kleinsten Hauptkrümmungen $\kappa_i \leq \kappa_{i+1}$ ergibt, muss positiv sein. Die vorgestellte Konstruktion von U. Dierkes liefert zwar eine Familie von minimalen Hyperflächen $\mathcal{M}_a$, allerdings keine Information über die einzelnen Hauptkrümmungen.

v) Ist man speziell an Area-*minimierenden* Flächen interessiert, so existiert ein entsprechendes Maximumprinzip von L. Simon [34], bei dem beide Flächen singulär in dem Sinne von rektifizierbaren Strömen sein können. In unserer Situation, in der die eine Fläche eine glatte Untermannigfaltigkeit ist, greift sogar ein elementares Beweiskonzept, welches wir kurz wiedergeben möchten. Alle Referenzen beziehen sich auf L. Simon [33].
Betrachtet man eine hinreichend kleine Umgebung um den Berührungspunkt, dann gilt dort $\partial T = 0$ und Ströme T mit der Kodimension 1 lassen sich zerlegen in Ränder der Form $T = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \partial[\![E_j]\!]$ und zusätzlich verhalten sich die jeweiligen Massen additiv [33, Thm. 27.6]. Dabei sind die E_j eine Folge von $\mathcal{L}^{n+1}$-messbaren Mengen, die lokal endlichen Perimeter in $\mathbb{R}^{n+1}$ besitzen und $E_{j+1} \subset E_j$ für jedes j erfüllen. Weiterhin ist jeder einzelne Strom $\partial[\![E_j]\!]$ selbst wieder Area-minimierend [33, Lem. 33.4]. Mithilfe der Monotonieformel aus dem Satz 3.7 lässt sich zeigen, dass nur endlich viele Ränder eine kompakte Teilmenge schneiden können, sodass wir ohne Einschränkung annehmen können, dass unser minimierender Strom die Form $T = \partial[\![E]\!]$ besitzt.
Berührt ein in dieser Form gegebener Strom eine glatte Untermannigfaltigkeit in einem Punkt p ohne diese zu schneiden, dann gehört der Punkt zu der regulären Menge [33, Cor. 37.6]. Innerhalb einer offenen Menge ist der Strom daher eine glatte Fläche. Jetzt greift die klassische Theorie, wie sie bereits zu Beginn dieses Kapitels dargestellt worden ist. Wir können beide Flächen lokal als Graph interpretieren, welche die gleiche elliptische Differentialgleichung erfüllen, und mit dem klassischen Maximumprinzip folgt, dass sie in einer offenen Umgebung übereinstimmen. Da der Schnitt somit offen und abgeschlossen ist, müssen sie komplett identisch sein, in dem Widerspruch dazu, dass die Randwerte innerhalb des Kegels liegen.

3.2.3 Verbesserte notwendige Bedingungen für den Zusammenhang

Wir verbessern die notwendigen Bedingungen aus dem Kapitel 3.1.5 für den Fall der Kodimension $k = 1$. Dafür ist nur zu beachten, dass der *optimale* Kegel den größeren Öffnungswinkel $\tan\beta = \tau_0$ besitzt und der Beweis bleibt identisch.

Satz 3.26 *Es seien* $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *zwei abgeschlossene Mengen und* $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ *ein zusammenhängender, stationärer Strom in* $\mathbb{R}^{n+1}$. *Die Randwerte erfüllen* $\operatorname{spt} \partial T \subset B_1 \cup B_2$, *sodass sowohl* $\operatorname{spt} \partial T \cap B_1 \neq \emptyset$ *als auch* $\operatorname{spt} \partial T \cap B_2 \neq \emptyset$. *Dann erhalten wir die beiden folgenden Aussagen:*
i) Falls $B_i := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon |x - y_i| \leq \delta_i\}, i = 1, 2,$ *abgeschlossene Bälle mit Mittelpunkten* y_i *und Radien* δ_i *sind und* $R := |y_1 - y_2|$ *den Abstand der Mittelpunkte bezeichnet, dann gilt*

$$R \leq \Big(1 + \frac{1}{\tau_0^2}\Big)^{1/2} (\delta_1 + \delta_2).$$

ii) Falls B_1 *und* B_2 *beliebige kompakte Mengen mit Diameter* d_1 *und* d_2 *sind, welche durch eine Scheibe der Dicke* $r > 0$ *getrennt sind, so folgt*

$$r \leq \frac{1}{2} \left(2\Big(1 + \frac{1}{\tau_0^2}\Big) \frac{n+1}{n} \right)^{1/2} (d_1 + d_2).$$

3.3 Flächen mit mittlerer Krümmung

3.3.1 Klassische Flächen mit mittlerer Krümmung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, zusammenhängend und beschränkt und $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt eine Abbildung $\mathcal{X} \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ eine *(endliche, zusammenhängende) Fläche mit mittlerer Krümmung H* (kurz: „*H-Fläche*“), falls $\Delta\mathcal{X} = H(\mathcal{X})\mathcal{X}_u \wedge \mathcal{X}_v$ und $|\mathcal{X}_u|^2 = |\mathcal{X}_v|^2, \langle \mathcal{X}_u, \mathcal{X}_v \rangle = 0$ in Ω erfüllt ist. Häufig wird die mittlere Krümmung noch mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ multipliziert; wir haben jedoch diese Definition gewählt, um konsistent mit der Definition zu sein, welche üblicherweise in der geometrischen Maßtheorie verwendet wird.

Es stellt sich die Frage, ob unter geeigneten Bedingungen an die mittlere Krümmung H ein Einschließungssatz existiert. S. Hildebrandt [21] beantwortet diese Frage in dem gleichen Artikel, in welchem er auch den Fall der Minimalflächen untersuchte, positiv. Wir geben hier direkt ein Einschließungsresultat in einen Doppelkegel an.

Satz 3.27 (Einschließungssatz nach S. Hildebrandt) *Sei $\mathcal{X} \colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit mittlerer Krümmung H, sodass*

$$\sup_{w \in \bar{\Omega}} |\mathcal{X}(w)||H(\mathcal{X}(w))| =: q < 1. \tag{3.11}$$

Mit $b := 1 - q \in (0, 1]$ gelte für die Randwerte $\mathcal{X}(\partial\Omega) \subset K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq bz^2\}$, dann folgt bereits $\mathcal{X}(\bar{\Omega}) \subset K$.

Wir erkennen, dass sich die Fläche $\mathcal{X}$ immer mehr einer Minimalfläche angleichen muss, je weiter sie von dem Ursprung entfernt ist, um weiterhin die Bedingung (3.11) zu erfüllen. Aus diesem Satz folgt direkt ein entsprechendes Nichtexistenzresultat, falls die Randwerte in den beiden Kegelhälften liegen, denn andernfalls muss die Fläche durch die Kegelspitze verlaufen. Dieses ist nicht möglich, da auch bei Flächen mit mittlerer Krümmung H in jedem Punkt eine (verallgemeinerte) Tangentialebene existiert, S. Hildebrandt [20, §4, Bem. 3d]. Es greift daher die gleiche Argumentation wie in dem Fall der Minimalflächen.

Die Verallgemeinerung auf *glatte* n-dimensionale Flächen mit mittlerer Krümmung in einer Kodimension stammt ebenfalls von U. Dierkes [6] sowie von U. Dierkes und D. Schwab [10] für den Fall beliebiger Kodimension.
Eine n-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ des $\mathbb{R}^{n+k}$ besitzt den (stetigen) mittleren Krümmungsvektor $\vec{H}$ gegeben durch $\vec{H}(x) := -\sum_{\alpha=1}^{k}(\mathrm{div}_{\mathcal{M}}\nu_\alpha(x))\nu_\alpha(x)$ für eine lokal um x definierte Orthonormalbasis $\{\nu_\alpha\}_{\alpha=1,\ldots,k}$ des Normalraums $\mathcal{T}_x^\perp\mathcal{M}$. Eine weitere Charakterisierung des Vektors ist durch die elliptische Differentialgleichung $\Delta_{\mathcal{M}} x = \vec{H}(x)$ gegeben. Unter geeigneten Bedingungen an $\vec{H}$ lässt sich erneut zeigen, dass ein entsprechendes quadratisches Polynom subharmonisch ist, und mit dem Maximumprinzip folgt ein Einschließungsresultat in einen Hyperboloid. Betrachtet man im Speziellen einen Kegel, so kann die glatte Untermannigfaltigkeit nicht durch die Spitze gehen und man erhält das folgende Nichtexistenzresultat.

Satz 3.28 (Nichtexistenzsatz nach U. Dierkes und D. Schwab) *Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine kompakte n-dimensionale C^2-Untermannigfaltigkeit mit mittlerem Krümmungsvektor $\vec{H}$, der $q := \sup_{x \in \mathcal{M}} |x||\vec{H}(x)| < 1$ erfüllt. Mit $b := 1 - q$ gelte für den Rand $\partial\mathcal{M} \subset K := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon x_1^2 + \ldots + x_{n+k-1}^2 \leq (n-1)\, b\, x_{n+k}^2\}$, sodass sowohl $\partial\mathcal{M} \cap K^+ \neq \emptyset$ als auch $\partial\mathcal{M} \cap K^- \neq \emptyset$. Dann kann $\mathcal{M}$ nicht zusammenhängend sein.*

Wir vermeiden erneut die C^2-Regularität der betrachteten Fläche. Zusätzlich schwächen wir die Stetigkeitsbedingung an den mittleren Krümmungsvektor ab, denn in der geometrischen Maßtheorie genügt es, dass dieser lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbar ist. Weiterhin ist die Bedingung an den mittleren Krümmungsvektor für den Einschließungssatz leicht schwächer gegenüber dem klassischen Fall; für den Nichtexistenzsatz müssen wir allerdings als Bedingung eine L_p-Integrierbarkeit des Krümmungsvektors sowie für die Vielfachheit $\theta \geq 1$ voraussetzen.

3.3.2 Ströme mit mittlerer Krümmung

Im Folgenden sei $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine offene Menge.

Definition 3.29 (Strom mit mittlerer Krümmung) *Sei $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ ein rektifizierbarer Strom und $\mathbf{H} \in L^1_{\text{loc}}(M \cap U, \mathbb{R}^{n+k}; \mu_T)$. Dann besitzt T den mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ in U, falls die Variationsgleichung*

$$\int_U \operatorname{div}_M X \, \mathrm{d}\mu_T = -\int_U \langle \mathbf{H}, X \rangle \, \mathrm{d}\mu_T \tag{3.12}$$

für alle $X \in C^1_c(U \setminus \operatorname{spt} \partial T, \mathbb{R}^{n+k})$ erfüllt ist.

Ist ein Strom gegeben durch $T = [\![\mathcal{M}]\!] \in \mathcal{R}_n(U)$ für eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit $\mathcal{M} \subset U$ mit $\partial\mathcal{M} \cap U = \emptyset$, dann entspricht der mittlere Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ aus der Variationsgleichung (3.12) exakt dem klassischen mittleren Krümmungsvektor $\vec{H}$ von $\mathcal{M}$, L. Simon [33, Rmk. 16.6].

Wir wollen nun Charakterisierungen für Ströme $T \in \mathcal{R}_n(U)$ angeben, sodass diese einen mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ besitzen, der die Variationsgleichung (3.12) erfüllt. Wir untersuchen einerseits die zu T assoziierten Maße genauer und können so auf die Existenz eines mittleren Krümmungsvektors schließen. Weiterhin betrachten wir eine gewisse Klasse von Strömen genauer, welche ein bestimmtes Funktional minimieren und somit eine mittlere Krümmung besitzen.

Wir erinnern uns, dass die erste Variation der Masse (3.1) in U durch

$$\delta T(X) = \int_U \operatorname{div}_M X \, \mathrm{d}\mu_T \quad \text{für } X \in C^1_c(U \setminus \operatorname{spt} \partial T, \mathbb{R}^{n+k})$$

gegeben ist. Das *totale Variationsmaß* $\|\delta T\| \colon 2^U \to \mathbb{R}$ ist als das größte Borel-reguläre Maß auf U festgelegt für eine Menge $A \subset U$ durch

$$\|\delta T\|(A) := \sup\{|\delta T(X)| \colon X \in C^1_c(U \setminus \operatorname{spt} \partial T, \mathbb{R}^{n+k}), \operatorname{spt} X \subset A, |X| \leq 1\}. \tag{3.13}$$

Falls $\|\delta T\|$ ein Radonmaß ist, dann existiert nach dem Satz von Riesz, L. Simon [33, Thm. 4.1], eine $\|\delta T\|$-messbare Funktion $\sigma \colon U \to \mathbb{R}^{n+k}$ mit $|\sigma(x)| = 1$ $\|\delta T\|$-f.ü. in U, sodass

$$\delta T(X) = \int_U \langle X, \sigma \rangle \, \mathrm{d}\|\delta T\|.$$

Die *Radon-Nikodym Ableitung* des Maßes $\|\delta T\|$ nach dem Maß μ_T ist definiert durch

$$D_{\mu_T}\|\delta T\|(x) := \lim_{r \searrow 0} \frac{\|\delta T\|(B_r(x))}{\mu_T(B_r(x))}$$

und nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert diese Ableitung μ_T-f.ü., ist μ_T-f.ü. endlich sowie μ_T-messbar.
Sei $\mathcal{Z} := \{x \in U\colon D_{\mu_T}\|\delta T\|(x) = +\infty\}$, die Menge erfüllt also $\mu_T(\mathcal{Z}) = 0$, und wir definieren die singuläre Menge $\|\delta T\|_{\text{sing}} := \|\delta T\| \llcorner \mathcal{Z}$. Nach dem Zerlegungssatz von Lebesgue können wir schließlich für die erste Variation

$$\int_U \langle X, \sigma\rangle \,\mathrm{d}\|\delta T\| = \int_U D_{\mu_T}\|\delta T\| \langle X, \sigma\rangle \,\mathrm{d}\mu_T + \int_U \langle X, \sigma\rangle \,\mathrm{d}\|\delta T\|_{\text{sing}}$$

schreiben. Alle genannten Definitionen und Resultate stammen aus L. Simon [33, Thm. 4.7]. Wir erhalten somit die folgende Aussage.

Proposition 3.30 *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt: Ist $\|\delta T\|$ ein Radonmaß und ist $\|\delta T\|_{\text{sing}} = 0$, dann existiert der mittlere Krümmungsvektor und ist durch die μ_T-messbare Funktion $\mathbf{H}(x) = -D_{\mu_T}\|\delta T\|(x)\sigma(x) \in \mathbb{R}^{n+k}$ gegeben.*

Bemerkung

i) Es gilt $\|\delta T\|_{\text{sing}} = 0$, falls $\|\delta T\|$ *absolut stetig* bezüglich μ_T ist. Das bedeutet aus $\mu_T(A) = 0$ folgt auch $\|\delta T\|(A) = 0$ für jede Menge $A \subset U$.

λ-minimierende Ströme

Wir betrachten nun eine gewisse Klasse von *minimierenden* Strömen mit ganzzahliger Vielfachheit und greifen dazu auf das Konzept der λ-minimierenden Ströme von F. Duzaar und K. Steffen [12] zurück.

Definition 3.31 (λ-minimierend) *Sei $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ und $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen. Dann heißt der Strom T λ-minimierend in U für eine Zahl $0 \leq \lambda < \infty$, falls*

$$\mathbf{M}(T) \leq \mathbf{M}(T + \partial Q) + \lambda \mathbf{M}(Q) \tag{3.14}$$

für alle Ströme $Q \in \mathcal{IR}_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k})$ mit Träger $\operatorname{spt} Q \subset U$ gilt.

Dass jeder λ-minimierender Strom einen mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ in dem Sinn unserer Definition 3.29 besitzt, zeigt die Berechnung der ersten Variation.

Satz 3.32 (Erste Variation) *Sei $T \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ λ-minimierend in U. Dann existiert ein μ_T-messbares Vektorfeld $\mathbf{H}$ auf $\mathbb{R}^{n+k}$, sodass $|\mathbf{H}| \leq \lambda$ und die Variationsgleichung*

$$\int \operatorname{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_T = -\int \langle \mathbf{H}, X\rangle \,\mathrm{d}\mu_T \tag{3.15}$$

für alle Vektorfelder $X \in C^1_c(U \setminus \operatorname{spt}\partial T, \mathbb{R}^{n+k})$ erfüllt ist.

Beweis: Wie bei den Area-minimierenden Strömen betrachten wir wieder die spezielle Deformation $\phi(t,x)\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$, $\phi(t,x) = \phi_t(x) := x + tX(x)$ mit einem C^1-Vektorfeld $X(x)$ auf $\mathbb{R}^{n+k}$, welches einen kompakten Träger in $U \setminus \operatorname{spt}\partial T$ besitzt.
Wir definieren gemäß (2.6) den Strom $Q_t := \phi_\#([\![(0,t)]\!] \times T) \in \mathcal{IR}_{n+1}(\mathbb{R}^{n+k})$ und für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ besitzt dieser Strom einen kompakten Träger in $U \setminus \operatorname{spt}\partial T$, da das „Deformationsvektorfeld“ X kompakten Träger in dieser offenen Menge hat. Der Strom

Q_t ist damit ein zulässiger Vergleichsstrom in der Definition der λ-minimierenden Ströme. Mit der Homotopieformel, L. Simon [33, 26.22], folgt

$$\phi_{t\#}T - \underbrace{\phi_{0\#}T}_{\mathbb{I}_{n+k\#}T=T} = \partial \underbrace{\phi_{\#}([\![(0,t)]\!] \times T)}_{=Q_t} + \underbrace{\phi_{\#}([\![(0,t)]\!] \times \partial T)}_{=0},$$

also die Identität

$$\phi_{t\#}T = T + \partial Q_t. \tag{3.16}$$

Für eine kompakte Menge $K \subset U$ mit $\operatorname{spt} X \subset \mathring{K}$ resultiert aus der λ-Minimalität

$$\mathbf{M}(T \llcorner K) \overset{(3.14)}{\leq} \mathbf{M}(T \llcorner K + \partial Q_t) + \lambda \mathbf{M}(Q_t) \overset{(3.16)}{=} \mathbf{M}(\phi_{t\#}(T \llcorner K)) + \lambda \mathbf{M}(Q_t)$$

und für ein beliebiges $t > 0$ erhalten wir die Ungleichung

$$\frac{1}{t}\big(\mathbf{M}(\phi_{t\#}(T \llcorner K)) - \mathbf{M}(T \llcorner K)\big) + \frac{\lambda}{t}\mathbf{M}(Q_t) \geq 0.$$

Der erste Summand konvergiert für $t \searrow 0$ gegen die einseitige Ableitung $\frac{d}{dt}\mathbf{M}(\phi_{t\#}(T \llcorner K))|_{t=0}$ und diese existiert genau wie in dem Kapitel 3.1.2 über Area-stationäre Ströme und ist gegeben durch das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \operatorname{div}_M X \, \mathrm{d}\mu_T.$$

Für die Berechnung des zweiten Summanden machen wir zunächst einige Anmerkungen. Für einen rektifizierbaren Strom R bezeichne ξ_R dessen Orientierung. Nach L. Simon [33, 26.23] gilt $\xi_{[\![(0,t)]\!] \times T} = e_1 \wedge \xi_T$ und für das assoziierte Radonmaß $\mu_{[\![(0,t)]\!] \times T} = \mathcal{L}^1 \times \mu_T$, wobei wir das Produktmaß in dem ersten Kapitel definiert haben. Weiterhin verwenden wir die explizite Darstellung (2.5) des Bildes eines rektifzierbaren Stroms, kennzeichnen die induzierte lineare Abbildung mit d und erhalten die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda}{t}\mathbf{M}(Q_t) = \frac{\lambda}{t}\mathbf{M}\Big(\phi_{\#}([\![(0,t)]\!] \times T)\Big) = \frac{\lambda}{t} \sup_{|\omega| \leq 1} \Big(\phi_{\#}([\![(0,t)]\!] \times T)\Big)(\omega) \\
&\overset{(2.5)}{=} \frac{\lambda}{t} \sup_{|\omega| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^{n+k+1}} \Big\langle \omega(\phi(t,x)), d\phi_{(t,x)\#}(\xi_{[\![(0,t)]\!] \times T}) \Big\rangle \, \mathrm{d}\mu_{[\![(0,t)]\!] \times T} \\
&= \frac{\lambda}{t} \sup_{|\omega| \leq 1} \int_0^t \int_M \Big\langle \omega(\phi(s,x)), d\phi_{(s,x)\#}(e_1 \wedge \xi_T) \Big\rangle \, \mathrm{d}\mu_T \, \mathrm{d}s \\
&\leq \frac{\lambda}{t} \sup_{|\omega| \leq 1} \sup_{s \in [0,t]} \int_M \Big\langle \omega(\phi(s,x)), d\phi_{(s,x)\#}(e_1 \wedge \xi_T) \Big\rangle \, \mathrm{d}\mu_T \int_0^t \mathrm{d}s \\
&\leq \lambda \sup_{|\omega| \leq 1} \sup_{s \in [0,t]} \int_M \Big\langle \omega(\phi(s,x)), d\phi_{(s,x)\#}(e_1 \wedge \xi_T) \Big\rangle \, \mathrm{d}\mu_T \\
&\leq \lambda \sup_{|\omega| \leq 1} \sup_{s \in [0,t]} \int_M \Big|\omega(\phi(s,x))\Big| \Big|d\phi_{(s,x)\#}(e_1 \wedge \xi_T)\Big| \, \mathrm{d}\mu_T \\
&\leq \lambda \sup_{s \in [0,t]} \int_M \Big|d\phi_{(s,x)\#}(e_1 \wedge \xi_T)\Big| \, \mathrm{d}\mu_T \overset{(1.1)}{=} \lambda \sup_{s \in [0,t]} \int_M \Big|\frac{\partial}{\partial t}\phi(s,x) \wedge d(\phi_s)_{x\#}\xi_T)\Big| \, \mathrm{d}\mu_T \\
&= \lambda \sup_{s \in [0,t]} \int_M \Big|X \wedge \big((\mathbb{I}_{n+k} + s dX)_{\#}\xi_T\big)\Big| \, \mathrm{d}\mu_T \xrightarrow{t \searrow 0} \lambda \int_M |X \wedge \xi_T| \, \mathrm{d}\mu_T.
\end{aligned}$$

Zusammengenommen erhalten wir die folgende Variationsungleichung

$$\int \operatorname{div}_M X \, \mathrm{d}\mu_T + \lambda \int |X \wedge \xi| \, \mathrm{d}\mu_T \geq 0.$$

Dieselbe Rechnung ist auch für das Vektorfeld $-X$ anstelle von X gültig und wegen den Eigenschaften des Dachproduktes $|-X \wedge \xi| = |\xi \wedge X| = |X \wedge \xi| \leq |X||\xi|$ folgt

$$\Big| \int \operatorname{div}_M X \, \mathrm{d}\mu_T \Big| \leq \lambda \int |X \wedge \xi| \, \mathrm{d}\mu_T \overset{|\xi|=1}{\leq} \lambda \int |X| \, \mathrm{d}\mu_T.$$

Die Existenz des mittleren Krümmungsvektors $\mathbf{H}$ ergibt sich aus den vorangestellten Überlegungen. Denn für eine beliebige Menge $A \subset U$ erhalten wir die Abschätzung

$$\|\delta T\|(A) \leq \lambda \sup_{|X| \leq 1} \int_A |X| \, \mathrm{d}\mu_T \leq \lambda \, \mu_T(A). \tag{3.17}$$

Ist die Menge A kompakt, so ist die rechte Seite endlich, da μ_T ein Radonmaß ist, und somit ist auch $\|\delta T\|$ ein Radonmaß. Aus der Abschätzung folgt außerdem direkt, dass $\|\delta T\|$ absolut stetig bezüglich μ_T ist. Die Proposition 3.30 liefert die Existenz des mittleren Krümmungsvektors $\mathbf{H} := -D_{\mu_T} \|\delta T\| \sigma$. Abschließend schätzen wir noch den Betrag ab

$$|\mathbf{H}(x)| = \big| - D_{\mu_T} \|\delta T\| \sigma \big| = \big| D_{\mu_T} \|\delta T\| \big| = \lim_{r \searrow 0} \frac{\|\delta T\|(B_r(x))}{\mu_T(B_r(x))} \overset{(3.17)}{\leq} \lambda \lim_{r \searrow 0} \frac{\mu_T(B_r(x))}{\mu_T(B_r(x))} = \lambda$$

und damit ist der Satz vollständig bewiesen. □

Wir werden im Folgenden lediglich mit der Variationsformel (3.12) arbeiten.

3.3.3 Ein Einschließungssatz

Wir definieren erneut die beiden quadratischen Polynome

$$r_j(x) := \sum_{i=1}^{n+k-j} x_i^2 \quad \text{sowie} \quad s_j(x) := \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} x_i^2$$

und betrachten für ein $j = 1, \ldots, n-1$ und einen freien Parameter $b \in [0,1]$ die quadratische Funktion $q_j(x) := r_j(x) - (n-j)/j \, b \, s_j(x)$. Für ein $R \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_j(R)$ wieder das verallgemeinerte Hyperboloid $\mathcal{H}_j(R) := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon q_j(x) \leq R\}$ und beweisen einen Einschließungssatz für Ströme mit vorgegebener mittlerer Krümmung unter geeigneten Voraussetzungen an den mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$.

Satz 3.33 (Einschließungssatz) *Es sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein Strom in $\mathbb{R}^{n+k}$ mit mittlerer Krümmung $\mathbf{H}(x)$ und kompaktem Träger* $\operatorname{spt} T$. *Für die Randwerte gelte* $\operatorname{spt} \partial T \subset \mathcal{H}_j(R)$ *für ein $R \in \mathbb{R}$, ein $j = 1, \ldots, n-1$ und ein $b \in [0,1]$. Der mittlere Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ erfülle die Bedingung*

$$b + |\mathbf{H}(x)| \left[\frac{r_j(x)}{(n-j)^2} + \frac{b^2}{j^2} s_j(x) \right]^{1/2} \leq 1 \text{ für } \mu_T - \text{f.a. } x \in \mathbb{R}^{n+k} \setminus \mathcal{H}_j(R). \tag{3.18}$$

Dann gilt $\operatorname{spt} T \subset \mathcal{H}_j(R)$.

Bemerkungen

i) Es ist nur eine Bedingung an $\mathbf{H}$ außerhalb des Hyperboloiden $\mathcal{H}_j(R)$ zu stellen. Die Bedingung ist also leicht schwächer, als die in dem klassischen Fall von U. Dierkes und D. Schwab [10] benötigte Abschätzung.

ii) Für einen Area-stationären Strom $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, welcher $\mathbf{H} \equiv 0$ erfüllt, können wir $b = 1$ wählen und erhalten damit den vorherigen Einschließungssatz 3.10.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $\partial T = 0$ in der offenen Menge $U := \mathbb{R}^{n+k} \setminus \mathcal{H}_j(R)$. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ sei die Funktion $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \gamma(t)$, erneut eine C^1-Funktion mit $\gamma(t) \geq 0, \gamma'(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ sowie $\gamma(t) \equiv 0$ in dem Fall $t \leq R+\varepsilon$ und $\gamma(t) > 0, \gamma'(t) > 0$ für jedes $t > R + \varepsilon$. Wir betrachten die Abbildung $\hat{x}\colon \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ vermöge

$$\hat{x}(x) := \Big(x_1, \ldots, x_{n+k-j}, -\frac{n-j}{j}\ b\ x_{n+k-j+1}, \ldots, -\frac{n-j}{j}\ b\ x_{n+k}\Big)$$

und definieren das Vektorfeld $X(x) := \Psi_{\operatorname{spt} T}(x)\, \gamma(q_j(x))\, \hat{x}(x)$, welches von der Klasse $C^1_c(U, \mathbb{R}^{n+k})$ und somit zulässig in der Variationsformel (3.12) ist.
Es gelten die gleichen Bezeichnungen für die Projektion $\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M}$ wie in dem Fall der stationären Ströme und wir berechnen die einzelnen Ausdrücke wieder getrennt. Für den ersten Term gilt mithilfe *exakt* der gleichen Rechenschritte

$$\nabla_M \gamma(q_j) = \gamma'(q_j)\ (Dq_j)^\top = 2\gamma'(q_j)\ \hat{x}^\top$$

und somit

$$\langle \nabla_M \gamma(q_j), \hat{x}\rangle = 2\gamma'(q_j)\langle \hat{x}^\top, \hat{x}\rangle \overset{(1.2)}{=} 2\gamma'(q_j)\ |\hat{x}^\top|^2.$$

Die Divergenz des Vektorfeldes $\hat{x}$ berechnet sich vermöge

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_M \hat{x} &= \sum_{i=1}^{n+k} \langle \nabla_M \hat{x}_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n+k-j} \langle \nabla_M x_i, e_i\rangle - \frac{n-j}{j}\ b \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} \langle \nabla_M x_i, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+k-j} \langle e_i^\top, e_i\rangle - \frac{n-j}{j}\ b \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} \langle e_i^\top, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n+k-j} p_{ii} - \frac{n-j}{j}\ b \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n+k} p_{ii} - \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} - \frac{n-j}{j}\ b \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} = n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\ b\Big) \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii}.
\end{aligned}$$

Den Term mit dem mittleren Krümmungsvektor können wir schließlich durch die gewöhnliche Cauchy-Schwarzsche Ungleichung leicht nach unten abschätzen

$$\langle \mathbf{H}, \hat{x}\rangle \geq -|\mathbf{H}||\hat{x}| = -|\mathbf{H}|\Big[r_j(x) + \Big(\frac{n-j}{j}\Big)^2 b^2 s_j(x)\Big]^{1/2}. \tag{3.19}$$

Das Einsetzen aller Ausdrücke in die Variationsgleichung liefert

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle \nabla_M \gamma(q_j), \hat{x}\rangle + \operatorname{div}_M \hat{x}\ \gamma(q_j) + \gamma(q_j)\langle \hat{x}, \mathbf{H}\rangle \,\mathrm{d}\mu_T \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \gamma(q_j)\Big\{n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\ b\Big) \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} - |\mathbf{H}|\Big[r_j + \Big(\frac{n-j}{j}\Big)^2 b^2 s_j\Big]^{1/2}\Big\} \\
&\qquad + 2\gamma'(q_j)|\hat{x}^\top|^2 \,\mathrm{d}\mu_T.
\end{aligned}$$

Den Ausdruck $\{\ldots\}$ können wir punktweise wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
&n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\, b\Big) \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} - |\mathbf{H}| \Big[r_j + \Big(\frac{n-j}{j}\Big)^2 b^2 s_j\Big]^{1/2} \\
&\geq n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\, b\Big)\, j - |\mathbf{H}| \Big[r_j + \Big(\frac{n-j}{j}\Big)^2 b^2 s_j\Big]^{1/2} \qquad (3.20)\\
&= (n-j)(1-b) - |\mathbf{H}| \Big[r_j + \Big(\frac{n-j}{j}\Big)^2 b^2 s_j\Big]^{1/2} \\
&= (n-j)\bigg((1-b) - |\mathbf{H}| \Big[\frac{r_j}{(n-j)^2} + \Big(\frac{b}{j}\Big)^2 s_j\Big]^{1/2}\bigg)
\end{aligned}$$

und dieser ist nach Voraussetzung in $\mathbb{R}^{n+k} \setminus \mathcal{H}_j(R)$ für μ_T-f.a. Punkte x nicht negativ.

Wir definieren wieder die Menge $E := \{x \in M \colon \mathcal{T}_x M$ existiert und $e_{n+k-j+1}, \ldots, e_{n+k} \in \mathcal{T}_x M\}$ und betrachten zuerst den Teilraum $\mathbb{R}^{n+k} \setminus E$.
Da der Term $2\gamma'(q_j)|\hat{x}^\top|^2$ nicht negativ ist, erhalten wir sofort

$$0 \geq \int_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus E} \gamma(q_j) \bigg\{ n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\, b\Big) \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} - |\mathbf{H}| \Big[r_j + \Big(\frac{n-j}{j}\Big)^2 b^2 s_j\Big]^{1/2} \bigg\}\, \mathrm{d}\mu_T.$$

Für den Ausdruck $\{\ldots\}$ bekommen wir in der betrachteten Menge $\mathbb{R}^{n+k} \setminus E$ die strikte Ungleichheit in der Zeile (3.20), da außerhalb E nicht *alle* Summanden p_{ii} den Wert Eins haben können, also

$$\{\ldots\} > (n-j)\bigg((1-b) - |\mathbf{H}| \Big[\frac{r_j}{(n-j)^2} + \Big(\frac{b}{j}\Big)^2 s_j\Big]^{1/2}\bigg)$$

und dieser Term ist, wie schon erwähnt, in $\mathbb{R}^{n+k} \setminus \mathcal{H}_j(R)$ für μ_T-f.a. x nicht negativ. Aufgrund der speziellen Wahl der Funktion γ mit der Eigenschaft $\gamma(q_j) > 0$ für $q_j > R+\varepsilon$ folgt $\operatorname{spt}\mu_T \cap (\mathbb{R}^{n+k} \setminus E) \subset \mathcal{H}_j(R+\varepsilon)$.

Wir hatten festgestellt, dass in $\mathbb{R}^{n+k} \setminus \mathcal{H}_j(R)$ der Ausdruck $\{\ldots\}$ nicht negativ ist und erhalten außerhalb des Hyperboloiden $\mathcal{H}_j(R)$ die Abschätzung

$$0 \geq \int_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus \mathcal{H}_j(R)} 2\gamma'(q_j)|\hat{x}^\top|^2 \, \mathrm{d}\mu_T \geq 0$$

und somit die Gleichheit. Insbesondere verschwindet in der Menge E das Integral

$$0 = \int_{E \cap (\mathbb{R}^{n+k}\setminus \mathcal{H}_j(R))} \gamma'(q_j)|\hat{x}^\top|^2 \, \mathrm{d}\mu_T.$$

Wie schon in dem Beweis des Einschließungssatzes 3.10 für die stationären Ströme gilt $|\hat{x}^\top|^2 > 0$ außerhalb der Menge $\{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon x_{n+k-j+1} = \ldots = x_{n+k} = 0\}$. Aufgrund der speziellen Forderung an die strikte Positivität der Ableitung $\gamma'(q_j)$ für $q_j > R+\varepsilon$ folgt

$$\operatorname{spt}\mu_T \cap \big(E \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon x_{n+k-j+l} \neq 0 \text{ für ein } l = 1, \ldots, j\}\big) \subset \mathcal{H}_j(R+\varepsilon).$$

Der letzte Beweisschritt folgt wieder exakt wie in dem stationären Fall, das heißt es gilt für die verbleibende Menge ebenfalls die Inklusion $E \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon x_{n+k-j+1} = 0, \ldots, x_{n+k} = 0\} \subset \mathcal{H}_j(R+\varepsilon)$, und da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt der Einschließungssatz. $\square$

Wir geben abschließend noch zwei hinreichende Charakterisierungen für den mittleren Krümmungsvektor **H** an, sodass die Bedingung (3.18) erfüllt ist.

Lemma 3.34 *Die Bedingung* (3.18) *ist erfüllt, wenn*

i) $q := |x||\mathbf{H}(x)| < 1$ *für* μ_T*-f.a.* $x \in \mathbb{R}^{n+k} \setminus \mathcal{H}_j(R)$ *gilt und* $b \leq 1 - q$ *gesetzt ist oder*

ii) $q := |x||\mathbf{H}(x)| < n - j$ *für* μ_T*-f.a.* $x \in \mathbb{R}^{n+k} \setminus \mathcal{H}_j(R)$ *gilt und* $b \leq \min\left\{\frac{1}{n-1}, 1 - \frac{q}{n-j}\right\}$ *gesetzt ist.*

Beweis: Wir stellen fest, dass der Wert des Parameters b in beiden Fällen wohldefiniert ist, da dieser nicht größer als Eins ist. In dem ersten Fall gilt

$$b + |\mathbf{H}|\left[\frac{r_j(x)}{(n-j)^2} + \frac{b^2}{j^2}s_j(x)\right]^{1/2} \leq b + |\mathbf{H}||x| = b + q \leq 1$$

und in dem zweiten Fall können wir das b nach oben abschätzen und erhalten

$$\begin{aligned}
b + |\mathbf{H}|\left[\frac{r_j(x)}{(n-j)^2} + \frac{b^2}{j^2}s_j(x)\right]^{1/2} &= b + |\mathbf{H}|\frac{1}{n-j}\left[r_j(x) + \left(\frac{n-j}{j}\right)^2 b^2 s_j(x)\right]^{1/2} \\
\leq 1 - \frac{1}{n-j}q + |\mathbf{H}|\frac{1}{n-j}\left[r_j(x) + \left(\frac{n-j}{j}\right)^2\left(\frac{1}{n-1}\right)^2 s_j(x)\right]^{1/2} \\
\leq 1 - \frac{1}{n-j}q + |\mathbf{H}|\frac{1}{n-j}|x| = 1 - \frac{1}{n-j}q + \frac{1}{n-j}q = 1,
\end{aligned}$$

wobei die Relation $\left(\frac{n-j}{j}\frac{1}{n-1}\right)^2 \leq 1$ ausgenutzt wurde. □

3.3.4 Ein Nichtexistenzsatz

Setzen wir in dem allgemeinen Hyperboloid $\mathcal{H}_j(R)$ die Signatur $j = 1$, so erhalten wir ein gewöhnliches Hyperboloid, welches für $R < 0$ in zwei disjunkte Hälften zerfällt. Liegen Komponenten der Randwerte $\operatorname{spt}\partial T$ in den beiden Schalen, so kann ein Strom $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mit mittlerem Krümmungsvektor **H**, der die Voraussetzung (3.18) des Einschließungssatzes erfüllt, offenbar nicht zusammenhängend sein. In dem Grenzfall $R = 0$ erhalten wir den Doppelkegel

$$K := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} : x_1^2 + \ldots + x_{n+k-1}^2 \leq (n-1)\, b\, x_{n+k}^2\}.$$

Wir bezeichnen mit $K^\pm := K \cap \{\pm x_{n+k} > 0\}$ die beiden disjunkten Kegelhälften und werden auch für diesen Grenzfall ein entsprechendes Nichtexistenzresultat herleiten.

Dazu sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein *zusammenhängender* Strom mit mittlerer Krümmung **H**, welcher die Bedingung (3.18) oder eine der hinreichenden Bedingungen aus dem Lemma 3.34 erfüllt. Weiterhin gelte $\operatorname{spt}\partial T \subset K^+ \cup K^-$, sodass sowohl $\operatorname{spt}\partial T \cap K^+$ als auch $\operatorname{spt}\partial T \cap K^-$ nicht leer sind. In dem Fall klassischer Flächen mit mittlerer Krümmung würde nun das gleiche Argument greifen wie bei minimalen Flächen: zweidimensionale Flächen des Abbildungstyps in den $\mathbb{R}^3$ besitzen auch in Verzweigungspunkten eine verallgemeinerte Tangentialfläche und glatte Untermannigfaltigkeiten können erst recht nicht durch die Kegelspitze verlaufen. In der geometrischen Maßtheorie haben wir in dem Fall $\mathbf{H} \not\equiv 0$ aber nicht den Konvexe-Hülle

Satz 3.9 zur Verfügung und können daher nicht den Beweis aus dem vorangegangenen Kapitel 3.1.4 adaptieren, sondern müssen einen anderen Weg wählen.

Aufgrund der Voraussetzungen gilt nach dem Einschließungssatz des vorherigen Kapitels insbesondere $0 \in \operatorname{spt} T \backslash \operatorname{spt} \partial T$ und es existiert eine komplette Umgebung $U := B_\varepsilon(0)$, $\varepsilon > 0$, um den Ursprung, in der $\partial T = 0$ erfüllt ist. Wir rechnen nun nur noch in dieser Umgebung und benötigen im Moment nicht mehr die Orientierung ξ des Stroms. Daher betrachten wir zu dem Strom $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ die assoziierte Varifaltigkeit $V = v(M, \theta) \in \mathcal{V}_n(U)$, welche die Variationsgleichung

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \operatorname{div}_M X \, \mathrm{d}\mu_V = - \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle \mathbf{H}, X \rangle \, \mathrm{d}\mu_V \tag{3.21}$$

für alle $X \in C_c^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ erfüllt. In diesem Fall sagen wir dann, dass V die mittlere Krümmung $\mathbf{H}$ besitzt. Wir zeigen zunächst, dass V in dem Ursprung einen Tangentialkegel besitzt, der Area-stationär in dem gesamten Raum $\mathbb{R}^{n+k}$ ist. Dazu verwenden wir den folgenden Satz aus L. Simon [33, Thm. 19.3].

Satz 3.35 (Existenz von Tangentialkegeln) *Sei $V = v(M, \theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ eine Varifaltigkeit in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ mit $0 \in U$, sodass die Dichte in dem Ursprung $\Theta^n(\mu_V, 0) = \lim_{\rho \searrow 0} (\omega_n \rho^n)^{-1} \mu_V(\bar{B}_\rho(0))$ existiert und mit einer Folge $\lambda_j \searrow 0, j \to \infty$ gelte für die Bildvarifaltigkeiten $V_j := \eta_{0,\lambda_j \#} V$, dass die assoziierten Radonmaße $\mu_{V_j} \to \mu_C, j \to \infty$, in $\mathbb{R}^{n+k}$ konvergieren, dabei ist der Limes μ_C assoziiert zu einer rektifizierbaren Varifaltigkeit $C \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, die Area-stationär in $\mathbb{R}^{n+k}$ ist.*
Dann gilt, dass C ein Kegel ist und daher eine Darstellung der Form $C = v(N, \vartheta)$ besitzt, mit einer rektifizierbaren Menge N, die $\eta_{0,\lambda}(N) = N$ für jedes $\lambda > 0$ erfüllt, und mit einer positiven, lokal $\mathcal{H}^n$-integrierbaren Funktion ϑ auf N, die $\vartheta \circ \eta_{0,\lambda} = \vartheta$ für jedes $\lambda > 0$ erfüllt.

Bemerkung:

i) Wir nennen einen solchen Grenzwert $C \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ einen *Tangentialkegel* in 0. Ein Tangentialkegel muss nicht eindeutig sein, da nicht klar ist, ob der Limes von der speziellen Folge λ_j abhängt. Ein Tangentialkegel ist somit wiederum eine Varifaltigkeit, im Gegensatz zu dem Tangentialraum $\mathcal{T}_x V$, der nur eine Menge darstellt.

Der Satz beinhaltet eine Reihe von Voraussetzungen und wir werden jetzt zeigen, dass diese in unserer Situation erfüllt sind. Dazu müssen wir einerseits für die Vielfachheitsfunktion $\theta \geq 1$ μ_V-f.ü. und für den mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H} \in L^p_{\text{loc}}(U, \mathbb{R}^{n+k}; \mu_V)$ für ein $p > n$ fordern. Falls die betrachtete Varifaltigkeit zu einem Strom mit positiver ganzzahliger Vielfachheit assoziiert ist, dann gilt automatisch $\theta \geq 1$ μ_V-f.ü. Wir prüfen im Prinzip die Gültigkeit der beiden Behauptungen aus L. Simon [33, 42.1] nach und erläutern ausführlich, dass aus diesen die Bedingungen des obigen Satzes folgen.

Behauptung 1: In dem Ursprung existiert die Dichte und ist nicht kleiner als Eins, das heißt $\Theta^n(\mu_V, 0) = \theta_0 \in [1, \infty)$.

Beweis der Behauptung: In dem Lemma 2.7 haben wir bereits bewiesen, dass die Dichte $\Theta^n(\mu_V, x)$ in μ_V-f.a. Punkten $x \in U$ existiert. Die nun zusätzlich angenommene lokale L_p-Regularität sichert, dass die Dichte in *jedem* Punkt $x \in U$ existiert. Dies folgt direkt aus der *Monotonierelation* für Varifaltigkeiten mit mittlerer Krümmung $\mathbf{H}$, welche für $p > n$ besagt, dass

$$\big(\sigma^{-n}\mu_V(B_\sigma(y))\big)^{\frac{1}{p}} \leq \big(\rho^{-n}\mu_V(B_\rho(y))\big)^{\frac{1}{p}} + \frac{\|\mathbf{H}\|_{L_p(B_R(y))}}{p-n}\big(\rho^{1-\frac{n}{p}} - \sigma^{1-\frac{n}{p}}\big) \tag{3.22}$$

für alle $0 < \sigma < \rho \leq R$ gilt, wobei $\bar{B}_R(y) \subset U$ beliebig fixiert ist. Somit ist die Funktion

$$f(\rho) := \big(\rho^{-n}\mu_V(B_\rho(y))\big)^{\frac{1}{p}} + \|\mathbf{H}\|_{L_p(B_R(y))}(p-n)^{-1}\rho^{1-\frac{n}{p}}$$

schwach monoton wachsend in ρ und daher existiert der Grenzwert $\rho \searrow 0$, welcher mit p potenziert der Dichte in dem Punkt y entspricht, vergleiche L. Simon [33, Thm. 17.7 & Cor. 17.8].

Weiterhin ist die Dichte $\Theta^n(\mu_V, \cdot)$ eine oberhalbstetige Funktion in U, das heißt $\Theta^n(\mu_V, x) \geq \limsup_{y\to x}\Theta^n(\mu_V, y)$ für jeden Punkt $x \in U$; die Dichte kann in dem Limes daher nicht kleiner werden. Die Behauptung folgt ebenfalls mit Hilfe der Monotonieformel (3.22) aus L. Simon [33, Cor. 17.8].

Nun ist $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ eine rektifizierbare Varifaltigkeit mit einer Funktion $\theta \geq 1$ μ_V-f.ü. nach der zusätzlichen Annahme. Weithin gilt nach dem Lemma 2.7 die Gleichheit $\theta(x) = \Theta^n(\mu_V, x)$ μ_V-f.ü. Für einen beliebigen Punkt $x \in \operatorname{spt} V = \operatorname{spt}\mu_V$ findet sich daher eine Folge von Punkten $y_j \to x, j \to \infty$, mit $\Theta^n(\mu_V, y_j) \geq 1$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Zusammen mit der Oberhalbstetigkeit folgt schließlich $\Theta^n(\mu_V, x) \geq 1$ für *jeden* Punkt $x \in \operatorname{spt}\mu_V$. Da der Ursprung in dem Träger liegt, erhalten wir insbesondere $\Theta^n(\mu_V, 0) = \theta_0 \geq 1$ und damit die Gültigkeit der ersten Behauptung. □

Wir zeigen jetzt, dass ein Radonmaß μ_C als Grenzwert existiert, welches zu einer in $\mathbb{R}^{n+k}$ stationären, rektifizierbaren Varifaltigkeit $C \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ korrespondiert, um die Voraussetzungen des Satzes zu komplettieren.

Ist eine Folge von stationären, rektifizierbaren Strömen $T_j \in \mathcal{R}_n(U)$ gegeben, die gegen einen Strom T konvergieren, also $T_j(\omega) \to T(\omega), j \to \infty$, für alle $\omega \in \mathcal{D}^n(U)$ erfüllen, dann lässt sich zeigen, dass der Strom T wieder rektifizierbar ist. Allerdings ist nicht klar, ob der Grenzwert ebenfalls stationär ist. Im Allgemeinen konvergieren die assoziierten Radonmaße μ_{T_j} nämlich nicht gegen μ_T. Zu dem Strom $T = \tau(M,\theta,\xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ betrachten wir daher die assoziierte (allgemeine) Varifaltigkeit $V \in \mathcal{G}_n(U)$, die wir ebenfalls mit V bezeichnen. Wie am Ende des zweiten Kapitels beschrieben, ist V ein Radonmaß auf $G_n(U)$, welches durch $V(\mathcal{A}) := \mu_T(\pi(\mathcal{A})) = \mu_T(\{x \in U \colon (x, <\xi(x)>) \in \mathcal{A}\})$ für eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset G_n(U)$ gegeben ist.

Behauptung 2: Für alle Punkte $x \in U$ gilt

$$\lim_{\rho\searrow 0}\rho^{1-n}\|\delta V\|(B_\rho(x)) = 0. \tag{3.23}$$

Dabei ist $\|\delta V\|$ das totale Variationsmaß gemäß (3.13) zu der ersten Variation $\delta V(X) := \int_{G_n(U)} \operatorname{div}_S X \, dV(x,S)$ für $X \in C^1_c(U, \mathbb{R}^{n+k})$, diesmal aufgefasst bezüglich der allgemeinen Varifaltigkeit $V \in \mathcal{G}_n(U)$, sodass S ein Element in $G(n+k, n)$ ist. Die Behauptung entspricht der zweiten Bedingung in L. Simon [33, 42.1]

Beweis der Behauptung: Da die allgemeine Varifaltigkeit V aus einem rektifizierbaren Strom entstanden ist und dieser durch Unterdrückung der Orientierung wiederum zu einer rektifizierbaren Varifaltigkeit assoziiert ist, fallen die allgemeinen Definitionen für Radonmaße auf $G_n(U)$ mit den speziellen für $V \in \mathcal{V}_n(U)$ zusammen.
Somit gilt für ein beliebiges Vektorfeld $X \in C_c^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ die Identität

$$\delta V(X) = \int_{G_n(U)} \operatorname{div}_S X \,\mathrm{d}V(x,S) = \int_U \operatorname{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_V$$

und aus der Variationsgleichung (3.21) folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\Big| \int_U \operatorname{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_V \Big| = \Big| - \int_U \langle X, \mathbf{H} \rangle \,\mathrm{d}\mu_V \Big| \leq \int_U |\langle X, \mathbf{H}\rangle| \,\mathrm{d}\mu_V \leq \int_U |X| \,|\mathbf{H}| \,\mathrm{d}\mu_V.$$

Schauen wir uns erneut die Monotonieformel (3.22) an, so erhalten wir durch das Weglassen des negativen Summanden auf der rechten Seite und anschließendem Potenzieren mit p für alle $0 < \sigma < R$ die Ungleichung

$$\sigma^{-n} \mu_V(B_\sigma(y)) \leq \Big\{ \big(R^{-n} \mu_V(B_R(y)) \big)^{\frac{1}{p}} + \frac{\|\mathbf{H}\|_{L_p(B_R(y))}}{p-n} R^{1-\frac{n}{p}} \Big\}^p,$$

wobei erneut $\bar{B}_R(y) \subset U$ vorausgesetzt ist. Das ist die Erklärung zu der Bemerkung in L. Simon [33, Rmk. 17.9(3)], welche die Existenz einer Konstanten c liefert, sodass für hinreichend kleines $\rho > 0$ die Schranke

$$\mu_V(B_\rho(y)) \leq c \rho^n \tag{3.24}$$

erfüllt ist. Es ist zudem die Erweiterung zu der analogen Abschätzung des Area-stationären Falles (3.4) auf Varifaltigkeiten mit mittlerer Krümmung $\mathbf{H} \in L^p_{\text{loc}}(U, \mathbb{R}^{n+k}; \mu_V)$ für $p > n$.
Wir gelangen somit für ein kleines $\rho > 0$ und ein beliebiges $x \in U$ zu der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|\delta V\|(B_\rho(x)) &= \sup_{\substack{|X| \leq 1 \\ \operatorname{spt} X \subset B_\rho(x)}} \Big| \int_{G_n(U)} \operatorname{div}_S X \,\mathrm{d}V(x,S) \Big| = \sup_{\substack{|X| \leq 1 \\ \operatorname{spt} X \subset B_\rho(x)}} \Big| \int_U \operatorname{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_V \Big| \\
&\leq \sup_{\substack{|X| \leq 1 \\ \operatorname{spt} X \subset B_\rho(x)}} \int_U |X| \,|\mathbf{H}| \,\mathrm{d}\mu_V \leq \int_{B_\rho(x)} |\mathbf{H}| \,\mathrm{d}\mu_V \\
&\overset{\substack{\text{Hölder-} \\ \text{Ungleichung}}}{\leq} \|\mathbf{H}\|_{L^p(B_\rho(x))} \big(\mu_V(B_\rho(x)) \big)^{1-\frac{1}{p}} \overset{(3.24)}{\leq} \|\mathbf{H}\|_{L^p(B_\rho(x))} (c\rho^n)^{1-\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Mit dieser beweisen wir die Behauptung (3.23) und benötigen dafür erneut die lokale L^p-Regularität in U des mittleren Krümmungsvektors. Für ein $p > n$ folgt mit einer generischen Konstante c schließlich

$$\rho^{1-n} \|\delta V\|(B_\rho(x)) \leq \rho^{1-n} \|\mathbf{H}\|_{L^p(B_\rho(x))} (c\rho^n)^{1-\frac{1}{p}} = c\,\rho^{1-n+n-\frac{n}{p}} \to 0 \text{ für } \rho \searrow 0. \qquad \square$$

Wir betrachten die Folge $V_j := \eta_{0,\lambda_j \#} V \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mit $\lambda_j \searrow 0$ als (allgemeine) Varifaltigkeiten in dem gesamten Raum. Dann gilt für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^{n+k}$ und jedes $R > 0$ die Abschätzung

$$\lim_{j \to \infty} \|\delta V_j\|(B_R(x)) = \lim_{j \to \infty} \|\delta(\eta_{0,\lambda_j \#} V)\|(B_R(x)) \overset{(*)}{=} \lim_{j \to \infty} \lambda_j^{-n+1} \|\delta V\|(B_{\lambda_j R}(x)) \overset{(3.23)}{=} 0.$$

Die Relation $(*)$ folgt aus dem Korollar 3.24, dessen Aussage ebenfalls für rektifizierbare Varifaltigkeiten gilt. Da außerdem die Varifaltigkeiten V und V_j alle rektifizierbar sind, fallen die allgemeinen Definitionen für Radonmaße auf $G_n(U)$ mit den speziellen für $V \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ zusammen. Der Ausdruck $V_j(G_n(B_R(x))) = \int_{G_n(B_R(x))} \mathrm{d}V_j(x,S) \leq \|\delta V_j\|(B_R(x))$ ist daher für jedes $j \in \mathbb{N}$ ebenfalls beschränkt und wir können den üblichen Kompaktheitssatz für Radonmaße, L. Simon [33, Thm. 4.4], anwenden. Es existiert somit eine Teilfolge j', sodass $V_{j'} \to C, j' \to \infty$, für ein Radonmaß C, das heißt eine allgemeine Varifaltigkeit $C \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Wir bezeichnen die Teilfolge j' in dem Folgenden wieder mit j.

Wir erläutern jetzt, dass dieser Grenzwert C stationär in $\mathbb{R}^{n+k}$ ist, das heißt die erste Variation $\delta C(X) = \int_{G_n(\mathbb{R}^{n+k})} \mathrm{div}_S X \, \mathrm{d}V(x,S)$ verschwindet für alle Vektorfelder $X \in C^1_c(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^{n+k})$. Wir zeigen, dass das totale Variationsmaß $\|\delta C\|$ auf allen offenen Bällen $B_R(x) \subset \mathbb{R}^{n+k}$ Null ist.

Dies folgt aus den bisher gezeigten Abschätzungen und aus der folgenden Aussage gemäß L. Simon [33, Rmk. 40.7(1)]: Seien $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und C allgemeine Varifaltigkeiten auf dem Raum $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ und es gelte $V_j \to C, j \to \infty$, im Sinne von Radonmaßen in $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, dann ist $\|\delta C\|(W) \leq \liminf_{j\to\infty} \|\delta V_j\|(W)$ für alle offenen Mengen $W \subset\subset \mathbb{R}^{n+k}$. Somit gilt erneut für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^{n+k}$ und jedes $R > 0$ die gewünschte Abschätzung $\|\delta C\|(B_R(x)) \leq \liminf_{j\to\infty} \|\delta V_j\|(B_R(x)) = 0$.

Wir haben die Existenz eines Grenzwertes gezeigt, welcher stationär in dem gesamten Raum $\mathbb{R}^{n+k}$ ist, allerdings in dem Sinne einer allgemeinen Varifaltigkeit $C \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$. Als letztes müssen wir zeigen, dass der Grenzwert mehr Regularität besitzt als ein beliebiges Radonmaß in $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ und C wieder eine rektifizierbare Varifaltigkeit ist.

Dazu benötigen wir die Voraussetzung $\theta = \theta_V \geq 1$ μ_V-f.ü. und den Satz aus L. Simon [33, Thm. 40.6], welcher besagt, falls $V_j \to C, j \to \infty$, in $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$, jedes V_j lokal beschränkte erste Variation besitzt und $\Theta^n(V_j, y) \geq 1\, \mu_{V_j}$-f.ü., dann gilt auch für den Grenzwert $\Theta^n(\mu_C, y) \geq 1\, \mu_C$-f.ü. Die beiden Bedingungen sind aufgrund der obigen Abschätzung und der Definition (2.4) der Bildvarifaltigkeit V_j zusammen mit der Voraussetzung an θ_V erfüllt.

Durch die μ_C-f.ü. Positivität der Dichte $\Theta^n(\mu_C, y)$ steht schließlich der Satz über die Rektifzierbarkeit nach L. Simon [33, Thm. 42.4] zur Verfügung, sodass der allgemeine Grenzwert $C \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ eine rektifizierbare Varifaltigkeit $C \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ darstellt und sogar in der Klasse $\mathcal{IV}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ enthalten ist, falls V ganzzahlige Vielfachheit besitzt, L. Simon [33, Rmk. 42.8].

Damit ist in der Tat der Satz über die Existenz von Tangentialkegeln 3.35 anwendbar und C besitzt eine Form $C = v(N, \vartheta)$ mit $\eta_{0,\lambda}(N) = N$ sowie $\vartheta \circ \eta_{0,\lambda} = \vartheta$ für jedes positive λ.

Wir beweisen im Folgenden, dass der Träger eines Tangentialkegels C im Ursprung in dem Nichtexistenzkegel K enthalten ist.

Satz 3.36 *Es seien $V = v(M,\theta)$ und $C = v(N,\vartheta)$ zwei Varifaltigkeiten wie in dem obigen Satz 3.35 über die Existenz von Tangentialkegeln. Weiterhin gelte* $\operatorname{spt} V \subset K := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} : x_1^2 + \ldots + x_{n+k-1}^2 \leq (n-1)\, b\, x_{n+k}^2\}$*, dann ist auch* $\operatorname{spt} C \subset K$.

Wir benötigen vorab das folgende Hilfsresultat über die „Vertauschbarkeit“ von Grenzwertbildung und Träger bei einer konvergenten Folge von Radonmaßen.

Lemma 3.37 *Es seien* $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}, \mu$ *Radonmaße mit* $\mu_j \to \mu, j \to \infty$, *in* $\mathbb{R}^{n+k}$. *Weiterhin gelte für eine abgeschlossene Menge* A, *dass* $\operatorname{spt}\mu_j \subset A$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$. *Dann folgt* $\operatorname{spt}\mu \subset A$.

Beweis: Wir zeigen hier die Implikation aus $x \notin A$ folgt $x \notin \operatorname{spt}\mu$, also dass ein $\rho > 0$ existiert mit $\mu(B_\rho(x)) = 0$.
Da nach Annahme x nicht in der abgeschlossenen Menge A liegt, ist $\operatorname{dist}(x, A) > \varepsilon > 0$ und wir wählen den positiven Radius $\rho := \frac{1}{3}\operatorname{dist}(x, A)$. Aufgrund der Voraussetzung $\operatorname{spt}\mu_j \subset A$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$B_{2\rho}(x) \cap \operatorname{spt}\mu_j = \emptyset \text{ für jedes } j \in \mathbb{N}. \tag{3.25}$$

Wir wählen eine stetige Funktion $\phi : \mathbb{R}^{n+k} \to [0,1]$ mit $\phi|_{B_\rho(x)} \equiv 1$ und $\phi|_{\mathbb{R}^{n+k}\setminus B_{2\rho}(x)} \equiv 0$, dann ist ϕ lokal μ_j-integrierbar für alle $j \in \mathbb{N}$, denn ϕ hat einen kompakten Träger und μ_j ist ein Radonmaß. Es folgt schließlich die Behauptung

$$0 \le \mu(B_\rho(x)) \le \liminf_{j\to\infty} \mu_j(B_\rho(x)) \overset{\text{Def. von } \phi}{\le} \liminf_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi \, \mathrm{d}\mu_j = \liminf_{j\to\infty} \int_{\operatorname{spt}\mu_j} \phi \, \mathrm{d}\mu_j \overset{(3.25)}{=} 0.$$

Dabei haben wir in dem zweiten Schritt die schwache Unterhalbstetigkeit verwendet, die für eine Folge $\mu_j \to \mu, j \to \infty$ besagt, dass $\mu(\Omega) \le \liminf_{j\to\infty} \mu_j(\Omega)$ für jede offene Menge Ω erfüllt ist, L. C. Evans und R. F. Gariepy [15, §1.9, Thm. 1]. □

Beweis zum Satz 3.36: Es sei wieder $V_j := \eta_{0,\lambda_j\#}V$ und wir zeigen zunächst die Inklusion $\operatorname{spt}V_j \subset K$ für jedes j

$$\operatorname{spt}V_j = \operatorname{spt}(\eta_{0,\lambda_j\#}V) \subset \eta_{0,\lambda_j}(\operatorname{spt}(V)) \overset{\text{Vorauss.}}{\subset} \eta_{0,\lambda_j}(K) \overset{K=\text{Kegel}}{=} K.$$

Der Satz 3.35 liefert uns die Konvergenz $\mu_{V_j} \to \mu_C, j \to \infty$, und daher folgt mit dem Lemma 3.37 die Behauptung $\operatorname{spt}C = \operatorname{spt}\mu_C \subset K$, indem die Menge A durch den abgeschlossenen Kegel K ersetzt wird. □

Wir betrachten nun die beiden eingeschränkten Varifaltigkeiten

$$C^\pm := C \llcorner \{x\colon \pm x_{n+k} > 0\} = v(N \cap \{x\colon \pm x_{n+k} > 0\}, \vartheta|_{N\cap\{x\colon \pm x_{n+k}>0\}})$$

mit $\operatorname{spt}C^+ \subset \bar{K}^+ = K^+ \cup \{0\} \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon x_{n+k} \ge 0\}$ und $\operatorname{spt}C^-$ liegt entsprechend in dem abgeschlossenen Halbraum $\{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon x_{n+k} \le 0\}$.

Beide Varifaltigkeiten sind weiterhin Kegel und wie in Lemma 3.14 erklärt, ist sowohl C^+ als auch C^- stationär in $\mathbb{R}^{n+k}$. Somit können wir auf beide Flächen getrennt das folgende Lemma anwenden, L. Simon [33, Thm. 36.5 & Rmk. 36.6].

Lemma 3.38 *Sei* $C = v(N, \vartheta) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *eine rektifizierbare Varifaltigkeit, die stationär in* $\mathbb{R}^{n+k}$ *ist und* $\eta_{0,\lambda\#}C = C$ *für alle* $\lambda > 0$ *erfüllt. Weiterhin sei* $\operatorname{spt}C \subset \bar{\mathfrak{H}}$, *wobei* $\mathfrak{H}$ *ein offener Halbraum des* $\mathbb{R}^{n+k}$ *mit* $0 \in \partial\mathfrak{H}$ *ist. Dann gilt* $\operatorname{spt}C \subset \partial\mathfrak{H}$.

Es ist $\operatorname{spt} C^{\pm} \subset \{x_{n+k} = 0\}$ in dem Widerspruch zu $\operatorname{spt} C^{\pm} \subset \bar{K} = K$, da nach Konstruktion offensichtlich $C \not\equiv 0$ ist. Somit kann der stationäre Tangentialkegel nicht durch die Kegelspitze verlaufen und daher kann der Ursprung nicht in dem Träger des Stromes T liegen und wir erhalten das folgende allgemeine Nichtexistenzresultat.

Satz 3.39 (Nichtexistenzsatz) *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein Strom mit kompaktem Träger $\operatorname{spt} T$ und mittlerer Krümmung $\mathbf{H}$. Für die Randwerte gelte mit einem $b \in [0,1]$ die Inklusion*

$$\operatorname{spt} \partial T \subset K^{\pm} := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon \sum_{i=1}^{n+k-1} x_i^2 \leq (n-1)\, b\, x_{n+k}^2, \pm x_{n+k} > 0 \right\},$$

sodass sowohl $\operatorname{spt} \partial T \cap K^+$ als auch $\operatorname{spt} \partial T \cap K^-$ nichtleer sind. Definiere die quadratische Funktion $r_1(x) := x_1^2 + \ldots + x_{n+k-1}^2$. Der mittlere Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ erfülle sowohl

$$b + |\mathbf{H}| \left[\frac{r_1(x)}{(n-1)^2} + b^2 x_{n+k}^2 \right]^{1/2} \leq 1 \text{ für } \mu_T - f.a.\ x \in \mathbb{R}^{n+k} \setminus K \tag{3.26}$$

als auch in einer Umgebung U um Null

$$\mathbf{H} \in L^p_{\mathrm{loc}}(U, \mathbb{R}^{n+k}; \mu_T) \text{ für ein } p > n \text{ und}$$

$$\theta(x) \geq 1 \text{ für } \mu_T\text{-f.a. } x \in U.$$

Dann kann $\operatorname{spt} T$ nicht zusammenhängend sein.

Bemerkungen

i) Anstelle der Bedingung (3.26) kann auch eine der Forderungen aus dem Lemma 3.34 mit $j = 1$ und $R = 0$ erfüllt sein.

ii) Die Bedingung $\theta \geq 1$ μ_T-f.ü. ist für Ströme $T \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ automatisch gegeben.

iii) Betrachtet man λ-minimierende Ströme $T \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ in $\mathbb{R}^{n+k}$ mit mittlerem Krümmungsvektor $\mathbf{H}$, dann ist nur die Bedingung (3.26) an den mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ zu stellen, die lokale L^p-Regularität ist nicht notwendig. Ein λ-minimierender Strom T besitzt in *jedem* Punkt $x \in \operatorname{spt} T$ einen in $\mathbb{R}^{n+k}$ Area-*minimierenden* Tangentialkegel $C = \tau(M_C, \theta_C, \xi_C) \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, welcher $\eta_{0,\lambda\#} C = C$ für jedes $\lambda > 0$ erfüllt, siehe F. Duzaar und K. Steffen [12, Prop. 5.1]. Somit ist die zugehörige Varifaltigkeit $V = v(M_C, \theta_C)$ stationär, L. Simon [33, Lem. 33.2], und erfüllt die geforderten Invarianzen unter der Homothetie $\eta_{0,\lambda}$. Der Satz 3.35 über die Existenz von Tangentialkegeln wird demzufolge für diese Klasse von Strömen nicht benötigt und damit entfällt die L^p_{loc}-Forderung.

3.4 Flächen unter Einfluss einer Schwerkraft

Die Betrachtung von stationären Strömen des Area-Integranden ist nur ein spezieller Fall von vielen möglichen Variationsproblemen. Bei einem allgemeinen Problem kann der Integrand variabel von dem Ort und der Orientierung abhängen. Dazu sei wieder $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen und $F\colon U \times \Lambda_n\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}, (x,\zeta) \mapsto F(x,\zeta)$, eine beliebige stetige Funktion, die in der zweiten Komponente homogen vom Grad Eins ist, also $F(x,t\zeta) = tF(x,\zeta)$ für $t \geq 0, x \in U$ und $\zeta \in \Lambda_n\mathbb{R}^{n+k}$ erfüllt. Für einen n-dimensionalen rektifizierbaren Strom $T = \tau(M,\theta,\xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ ist das Integral von F über T definiert durch

$$\int_T F := \int_M F(x,\theta(x)\xi(x))\,\mathrm{d}\mathcal{H}^n(x) = \int_U F(x,\xi(x))\,\mathrm{d}\mu_T(x).$$

Man erkennt, dass durch $F(x,\zeta) := |\zeta|$ die gewöhnliche Masse eines Stroms gegeben ist. Wir sind in diesem Kapitel an einem speziellen Integranden interessiert, welcher eine besondere physikalische Interpretation besitzt. Dazu schauen wir uns zunächst die klassischen Resultate an.

3.4.1 Klassische schwere Flächen

Ist man auf der Suche nach minimalen Flächen, die einer weiteren, äußeren Kraft wie beispielsweise einer Gravitationskraft unterworfen sind, so verändert sich die Problemstellung gegenüber dem Area-stationären Kontext. Es existieren verschiedene Ansätze, die alle ihre Berechtigung verdienen. Wir wollen hier Flächen mit konstanter Massendichte unter einer konstanten Gravitationskraft betrachten, sodass eine Fläche mit möglichst niedrigem Schwerpunkt bei fixierten Randwerten gesucht ist.
Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{X}\colon \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \cap \{z > 0\}$ eine Fläche von dem Abbildungstyp, dann beträgt die potentielle Energie unter einer Gravitationskraft in z-Richtung

$$\int_\Omega z\,\mathrm{d}A = \int_\Omega z\,|\mathcal{X}_u \wedge \mathcal{X}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

falls (u,v) die Koordinaten in dem Parametergebiet $\bar{\Omega}$ sind und $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ in dem Bildbereich liegen. Zu diesem Funktional können stationäre Lösungen bestimmt werden und wir sprechen dann von Flächen unter Einfluss einer Schwerkraft oder kurz von *schweren Flächen*. Stellt man sich eine Lösung nach oben umgedreht vor, so liefert das Funktional außerdem die optimale Form einer Kuppel. Dieses Variationsintegral wurde in der Klasse der Sobolevfunktionen $\mathcal{X} \in H_2^1(B_1(0),\mathbb{R}^3)$ ausführlich von R. Böhme, S. Hildebrandt und E. Tausch [3] in dem Jahr 1980 behandelt.
Sie waren insbesondere an der Existenz von Lösungen bei *einer* vorgegebenen rektifizierbaren Randkurve Γ interessiert, die oberhalb der Hyperebene $\{z = \varepsilon\}, \varepsilon > 0$, liegt. Um einen Überblick über das Aussehen der Lösungen dieses Hindernisproblems zu bekommen, wurden eine Reihe von Einschließungssätzen bewiesen. Unter Bedingungen an die äußeren Daten sowie an die Höhe ε liegt eine Lösungsfläche in einem geeigneten Zylinder, Ellipsoid, Kegel oder Paraboloid, falls nur die Randkurve in diesen Körpern enthalten ist, R. Böhme et al. [3, Thm. 4, 5, 6 & 7].

25 Jahre später wurden durch S. Winklmann [39] glatte Abbildungen $X = (X_1 \ldots, X_{n+1})$ von n-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}$ in den $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^{n+1} \cap \{y_{n+1} > 0\}$ betrachtet, die stationäre Punkte des Energiefunktionals

$$\int_{\mathfrak{M}} X_{n+1}^\alpha\,\mathrm{d}A, \quad \alpha > 0,$$

sind. Mit $\alpha = 1$ wird der physikalisch interessante Fall der potentiellen Energie von Flächen unter einer Gravitationskraft abgedeckt.
Betrachtet man den speziellen Fall der Graphen in einem euklidischen Raum, es sei also $\mathfrak{M} = \mathbb{R}^n$ und $X(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_n))$ mit einer positiven C^2-Funktion y sowie zusätzlich $\alpha = n - 1$, dann erkennen wir das Variationsintegral aus dem Kapitel 3.2.1 über den optimalen Nichtexistenzsatz wieder. Durch Rotation liefern die Lösungen also rotationssymmetrische Minimalflächen in dem gewöhnlichen euklidischen Raum ohne äußere Kräfte. Diese Lösungen hatten wir *n-Katenoide* genannt.
Ist X eine beliebige kritische Lösung des Funktionals, dann ist die vektorwertige Gleichung $LX = \alpha X_{n+1}^{-1} e_{n+1}$ mit einem elliptischen Operator L erfüllt. Somit lassen sich mit Hilfe des Maximumprinzips für elliptische Differentialgleichungen Einschließungssätze unter geeigneten Zusatzbedingungen beweisen, die aber teilweise explizit von der Lösung abhängen, im Wesentlichen ein verallgemeinerter Konvexe-Hülle Satz und Einschließungsresultate in einen Ellipsoiden sowie in einen speziellen Hyperboloiden, S. Winklmann [39, Thm. 3.1, 3.2 & 3.3].

In den folgenden Kapiteln werden wir erneut die bestehende Lücke in der Abschwächung der Regularität schließen. Auch für n-dimensionale Flächen mit Singularitäten, die stationär in einem Schwerefeld sind, existieren Einschließungssätze. Weiterhin betrachten wir im Gegensatz zu S. Winklmann Hyperboloide mit verschiedener Signatur, erweitern die entsprechende Bedingung an die äußeren Daten und werden zusätzlich noch die Frage nach einem Nichtexistenzsatz beantworten. Wie in den klassischen Fällen untersuchen wir ausschließlich Flächen mit der Kodimension $k = 1$.

3.4.2 Stationäre Ströme unter Einfluss einer Schwerkraft

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^{n+1} \cap \{y_{n+1} > 0\}$ eine offene Menge des oberen Euklidischen Halbraumes und die Funktion $F \colon U \times \Lambda_n \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sei durch $F(x, \zeta) = x_{n+1}^\alpha |\zeta|$ mit einer reellen Zahl $\alpha > 0$ gegeben. Wir betrachten Ströme $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$, welche stationär für das Integral

$$\mathbf{M}^\alpha(T) := \int_T F = \int_U x_{n+1}^\alpha \, \mathrm{d}\mu_T = \int_M x_{n+1}^\alpha \theta \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n$$

sind. Für den Grenzfall $\alpha = 0$ erhalten wir die gewöhnliche Masse oder den Flächeninhalt eines rektifizierbaren Stroms. Wir nennen $\mathbf{M}^\alpha(T)$ die *α-Masse* von T und definieren außerdem noch das Radonmaß $\mu_T^\alpha := \mu_T \llcorner x_{n+1}^\alpha = \mathcal{H}^n \llcorner (\theta \, x_{n+1}^\alpha)$.

Zunächst wollen wir eine Variationsformel für diese Klasse von Strömen herleiten. Dazu betrachten wir eine beliebige Varifaltigkeit $V = v(M, \theta) \in \mathcal{V}_n(U)$. Für ein $\varepsilon > 0$ sei $(\phi_t)_{t \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \colon U \to U$ eine Einparameter-Familie mit den gleichen Eigenschaften wie in Kapitel 3.1.2. Bezeichnet $[g]_{n+1} := \langle g, e_{n+1} \rangle$ die $(n+1)$.-Komponente einer vektorwertigen Funktion g, dann gilt mit Hilfe der Area-Formel (2.1)

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^\alpha(\phi_{t\#}(V \llcorner K)) &\overset{(2.4)}{=} \int_{\phi_t(M \cap K)} x_{n+1}^\alpha \; \theta \circ \phi_t^{-1} \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_{\phi_t(M \cap K)} (x_{n+1}^\alpha \circ \phi_t \; \theta) \circ \phi_t^{-1} \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n \\
&= \int_{\phi_t(M \cap K)} ([\phi_t]_{n+1}^\alpha \; \theta) \circ \phi_t^{-1} \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n = \int_M [\phi_t]_{n+1}^\alpha J_M \psi_t \; \theta \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n,
\end{aligned}$$

wobei erneut $\psi_t := \phi_t|_{M \cap U}$ definiert wurde. Wir wenden die Produktregel an, um

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}^\alpha(\phi_{t\#}(V \llcorner K)) = \int_M \alpha [\phi_t]_{n+1}^{\alpha - 1} \left[\frac{\partial \phi_t}{\partial t} \right]_{n+1} J_M \psi_t + [\phi_t]_{n+1}^\alpha \frac{\partial}{\partial t} J_M \psi_t \, \mathrm{d}\mu_V$$

zu berechnen. Die Auswertung an der Stelle $t = 0$ liefert schließlich eine Formel für die Stationarität der α-Masse. Wir werden im Folgenden kurz von *α-stationär* sprechen.

Definition 3.40 (α-stationäre Varifaltigkeit) *Eine Varifaltigkeit $V = v(M, \theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ heißt α-stationär in U, falls*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left(\operatorname{div}_M X + \alpha \frac{X_{n+1}}{x_{n+1}} \right) x^\alpha_{n+1} \, \mathrm{d}\mu_V = 0 \tag{3.27}$$

für alle $X \in C^1_c(U, \mathbb{R}^{n+1})$.

Definition 3.41 (α-stationärer Strom) *Ein Strom $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ heißt α-stationär in U, falls die assoziierte Varifaltigkeit $V = v(M, \theta)$ α-stationär in $U \setminus \operatorname{spt} \partial T$ ist oder mit anderen Worten die Variationsformel*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left(\operatorname{div}_M X + \alpha \frac{X_{n+1}}{x_{n+1}} \right) x^\alpha_{n+1} \, \mathrm{d}\mu_T = 0 \tag{3.28}$$

für jedes Vektorfeld $X \in C^1_c(U \setminus \operatorname{spt} \partial T, \mathbb{R}^{n+1})$ erfüllt ist.

3.4.3 Ein Maximumprinzip und Einschließungssätze

Zu Beginn beweisen wir eine Aussage, die sehr intuitiv ist, wenn man sich die physikalische Situation vor Augen führt: Eine stationäre Fläche strebt der $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n+1} \equiv 0\}$-Ebene entgegen, sodass kein Punkt in dem Träger der Fläche weiter oben in x_{n+1}-Richtung als die höchste Randkomponente liegen wird. In dem klassischen Kontext ist dieses Resultat tatsächlich eine direkte Konsequenz aus dem Maximumprinzip für elliptische Gleichungen. In der geometrischen Maßtheorie ist die Überlegung dagegen umfangreicher. Dazu bezeichne in dem gesamten Kapitel $\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M} \colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathcal{T}_x M$ wieder die orthogonale Projektion auf den approximativen Tangentialraum mit den entsprechenden Darstellungen und Schreibweisen wie in den vorangegangenen Kapiteln.

Satz 3.42 (Maximumprinzip) *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein α-stationärer Strom in $\mathbb{R}^{n+1}_+$, der kompakten Träger $\operatorname{spt} T$ besitzt, dann gilt*

$$\max_{x \in \operatorname{spt} T} x_{n+1} = \max_{x \in \operatorname{spt} \partial T} x_{n+1}.$$

Beweis: Wir definieren

$$h^* := \max_{x \in \operatorname{spt} \partial T} x_{n+1}$$

und die offene Menge $U := \mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus \{x \colon x_{n+1} \leq h^*\}$, sodass $\partial T = 0$ in U ist. Sei $\gamma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \gamma(t)$, eine beliebige C^1-Funktion mit $\gamma(t), \gamma'(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\gamma \equiv 0$ für $t \leq (h^* + \varepsilon)^2$ mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$. Wir definieren weiterhin die vektorwertige Funktion $\hat{x}(x) := (0, \ldots, 0, x_{n+1}) = x_{n+1} e_{n+1}$ und betrachten das Vektorfeld $X(x) = \Psi_{\operatorname{spt} T}(x) \, \gamma(x^2_{n+1}) \, \hat{x}(x)$, welches von der Klasse $C^1_c(U, \mathbb{R}^{n+1})$ ist. Wir berechnen die einzelnen Ausdrücke der Divergenz $\operatorname{div}_M X$. Es gilt

$$\nabla_M \gamma(x^2_{n+1}) = 2\gamma'(x^2_{n+1}) \; \hat{x}^\top$$

und somit

$$\langle \nabla_M \gamma(x_{n+1}^2), \hat{x}\rangle \overset{(1.2)}{=} 2\gamma'(x_{n+1}^2)|\hat{x}^\top|^2 \geq 0$$

sowie

$$\mathrm{div}_M \hat{x} = \sum_{j=1}^{n+1} \langle \nabla_M \hat{x}_j, e_j\rangle = \langle \nabla_M x_{n+1}, e_{n+1}\rangle = \langle e_{n+1}^\top, e_{n+1}\rangle = p_{n+1n+1} \overset{(1.5)}{\geq} 0.$$

Das Einsetzen dieser Terme in die Variationsformel (3.28) liefert die Abschätzung

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \mathrm{div}_M X + \alpha \frac{X_{n+1}}{x_{n+1}} \,\mathrm{d}\mu_T^\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} 2\gamma'(x_{n+1}^2)|\hat{x}^\top|^2 + \ \mathrm{div}_M \hat{x}\ \gamma(x_{n+1}^2) + \alpha \frac{\gamma(x_{n+1}^2)x_{n+1}}{x_{n+1}} \,\mathrm{d}\mu_T^\alpha \\ &\geq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \alpha\gamma(x_{n+1}^2) \,\mathrm{d}\mu_T^\alpha \geq 0 \end{aligned}$$

und daher schließlich

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \gamma(x_{n+1}^2) x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_T = 0.$$

Wählen wir die Funktion $\gamma(t)$ so, dass $\gamma(t) > 0$ für jedes $t > (h^* + \varepsilon)^2$ gilt, dann verschwindet auch der mit x_{n+1}^α gewichtete Integrand dort nicht und es folgt $\operatorname{spt} \mu_T = \operatorname{spt} T \subset \{x\colon x_{n+1}^2 \leq (h^* + \varepsilon)^2\}$ und, da $\varepsilon > 0$ beliebig vorausgesetzt war, ist die Behauptung $\operatorname{spt} T \subset \{x\colon x_{n+1} \leq h^*\}$ gezeigt. □

Wir beweisen nun einen Konvexe-Hülle Satz für α-stationäre Ströme. Wir benötigen zunächst einige vorbereitende Hilfsresultate. Da wir Bälle in niedrigerer Dimension betrachten werden, indizieren wir zusätzlich die Dimension, um Verwechselungen auszuschließen.

Lemma 3.43 *Für ein beliebiges $y' \in \mathbb{R}^n$ und ein $R > 0$ sei die offene Menge $U := \mathbb{R}_+^{n+1} \setminus (\bar{B}_R^n(y') \times [0,\infty))$ gegeben. Weiterhin sei $T = \tau(M,\theta,\xi) \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ein α-stationärer Strom in U mit kompaktem Träger $\operatorname{spt} T$, der $\partial T = 0$ in U erfüllt. Dann liegt der gesamte Träger des Stroms in dem Halbzylinder $\operatorname{spt} T \subset \bar{B}_R^n(y') \times [0,\infty)$.*

Beweis: Sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \gamma(t)$, eine beliebige C^1-Funktion mit $\gamma(t), \gamma'(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\gamma \equiv 0$ für $t \leq R + \varepsilon$ mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$. Wir definieren die Vektorfunktion $\hat{x}(x) := (x_1, \ldots, x_n, 0)$ und den Punkt $y := (y', 0) = (y'_1, \ldots, y'_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sowie $r(x) := |\hat{x}(x) - y|$. Wir testen mit dem Vektorfeld $X(x) = \Psi_{\operatorname{spt} T}(x)\, \gamma(r(x))\, (\hat{x}(x) - y) \in C_c^1(U, \mathbb{R}^{n+1})$.

Wir müssen nur in der Menge U rechnen, da X andernfalls identisch Null ist, und somit können wir für die folgende Rechnung den Wert $r(x)$ für jedes $x \in U$ stets als strikt positiv annehmen. Aus

$$\nabla_M \gamma(r) = \frac{\gamma'(r)}{r}(\hat{x} - y)^\top \quad \text{folgt} \quad \langle \nabla_M \gamma(r), (\hat{x} - y)\rangle \overset{(1.2)}{=} \frac{\gamma'(r)}{r}|(\hat{x} - y)^\top|^2$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{div}_M(\hat{x} - y) &= \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_M x_j, e_j\rangle + 0 = \sum_{j=1}^{n} \langle e_j^\top, e_j\rangle = \sum_{j=1}^{n+1} p_{jj} - p_{n+1n+1} \\ &= \operatorname{spur} \mathcal{P} - p_{n+1n+1} \overset{(1.4)}{=} n - p_{n+1n+1} \overset{(1.5)}{\geq} n - 1 > 0. \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen der Ausdrücke in die Variationsgleichung (3.27) erhalten wir

$$0 \geq \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} (n-1)\gamma(r) + \frac{1}{r}\gamma'(r)|(\hat{x}-y)^\top|^2 + 0 \, \mathrm{d}\mu_T^\alpha \geq (n-1) \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \gamma(r) \, \mathrm{d}\mu_T^\alpha \geq 0.$$

Das bedeutet

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \gamma(r) \, \mathrm{d}\mu_T^\alpha = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \gamma(r) x_{n+1}^\alpha \, \mathrm{d}\mu_T = 0.$$

Wählen wir jetzt $\gamma(t)$ so, dass $\gamma(t) > 0$ für $t > R + \varepsilon$, dann folgt die „horizontale Einschließung" in den Ball und, da wir keine Kontrolle über die Höhe besitzen, insgesamt $\operatorname{spt} \mu_T = \operatorname{spt} T \subset \bar{B}^n_{R+\varepsilon}(y') \times [0, \infty)$ sowie, weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, schließlich die Behauptung $\operatorname{spt} T \subset \bar{B}^n_R(y') \times [0, \infty)$. □

Lemma 3.44 *Für eine beliebige kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ definiere die offene Menge $\tilde{U} := \mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus K$. Weiter sei $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein Strom mit kompaktem Träger, der α-stationär in $\tilde{U}$ ist und $\partial T = 0$ in $\tilde{U}$ erfüllt. Dann gilt*

$$\operatorname{spt} T \subset \operatorname{conv}(\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(K)) \times \Big[\min_{x \in \operatorname{spt} T} x_{n+1}, \max_{x \in \operatorname{spt} T} x_{n+1} \Big].$$

Beweis: Der Strom T ist insbesondere α-stationär in $U := \mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus (\bar{B}^n_R(y') \times [0, \infty))$ für alle n-dimensionalen Bälle $\bar{B}^n_R(y'), y' \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(K) \subset \bar{B}^n_R(y')$, denn dann herrscht die Inklusion $U \subset \tilde{U}$. Nach dem obigen Lemma ist in diesem Fall $\operatorname{spt} T \subset \bar{B}^n_R(y') \times [0, \infty)$ und da dieses Ergebnis für alle solche Bälle gilt, muss der auf den $\mathbb{R}^n$ projizierte Träger in dem Schnitt dieser Bälle liegen; dies ist gerade die konvexe Hülle der Projektion von K. □

In Verbindung mit dem Maximumprinzip 3.42 und der Definition $K := \operatorname{spt} \partial T$ erhalten wir den folgenden Satz für α-stationäre Ströme.

Satz 3.45 (Konvexe-Hülle Eigenschaft) *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ α-stationär in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ mit kompaktem Träger. Setze*

$$h_* := \min_{x \in \operatorname{spt} T} x_{n+1}, \quad h^* := \max_{x \in \operatorname{spt} \partial T} x_{n+1}, \quad A := \mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(\operatorname{spt} \partial T).$$

Dann gilt

$$\operatorname{spt} T \subset \operatorname{conv}(A) \times [h_*, h^*].$$

Wir stellen uns nun die Frage, ob wir die Aussage verschärfen können und nichtkonvexe Mengen existieren, die sich für einen Einschließungssatz eignen. Unter geeigneten Bedingungen an den Parameter α und die Höhe des Körpers sowie den Rand des Stroms ist dies in der Tat der Fall. Für eine Höhe $v > 0$ und eine Signatur $j = 1, \dots, n-1$ definieren wir die Funktion $q_j \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ vermöge

$$q_j(x) := \begin{cases} x_1^2 + \ldots + x_n^2 - (n-1)\, b\, (x_{n+1} - v)^2, & \text{falls } j = 1, \\ x_1^2 + \ldots + x_{n+1-j}^2 - \frac{n-j}{j}\, b \left(x_{n+1-j+1}^2 + \ldots + x_n^2 + (x_{n+1} - v)^2 \right), & \text{falls } j > 1 \end{cases}$$

mit einem beliebigen Parameter $b > 0$. Weiter betrachten wir das um v in die positive x_{n+1}-Richtung verschobene verallgemeinerte Hyperboloid $\mathcal{H}_j(R) := \big\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon q_j(x) \leq R \big\}$ für ein $R \in \mathbb{R}$.

Satz 3.46 (Einschließungssatz) *Sei* $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *ein* α*-stationärer Strom in* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *mit kompaktem Träger* $\operatorname{spt} T$*. Die Randwerte erfüllen* $\operatorname{spt} \partial T \subset \mathcal{H}_j(R)$ *für ein* $j = 1, \ldots, n-1$, $v > 0$ *sowie ein* $R \in \mathbb{R}$ *und definiere die maximale Randhöhe durch*

$$h^* := \max_{x \in \operatorname{spt} \partial T} x_{n+1}.$$

Gilt $\frac{1}{b} - (1 + \frac{\alpha}{j}) + \frac{\alpha}{j} \frac{v}{h^*} \geq 0$*, dann folgt* $\operatorname{spt} T \subset \mathcal{H}_j(R)$*.*

Bemerkungen

i) Wir stellen hier *keine* Bedingung an die mittlere Krümmung $\mathbf{H}$ einer Lösung T wie in dem vorherigen Kapitel, sondern nur an die Randwerte ∂T und die äußeren Daten α, v, j.

ii) Das Energiefunktional $\mathbf{M}^\alpha(\cdot)$ ist invariant unter horizontalen Translationen $\eta_{w,1} \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, \eta_{w,1}(y) = y - w$, mit einem Vektor $w = (w_1, \ldots, w_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Daher bleibt der Einschließungssatz gültig, falls wir das allgemeine Hyperboloid durch die Menge $\eta_{w,1}(\mathcal{H}_j(R))$ ersetzen.

Beweis: Wie üblich schauen wir die offene Menge $U := \mathbb{R}^{n+1}_+ \setminus \mathcal{H}_j(R)$ an, in der $\partial T = 0$ ist. Wir definieren die vektorwertige Funktion

$$\hat{x}(x) := \begin{cases} \big(x_1, \ldots, x_n, -(n-1)\, b\, (x_{n+1} - v)\big), & \text{falls } j = 1 \\ \Big(x_1, \ldots, x_{n+1-j}, -\frac{n-j}{j}\, b\, x_{n+1-j+1}, \ldots, -\frac{n-j}{j}\, b\, x_n, -\frac{n-j}{j}\, b\, (x_{n+1} - v)\Big), & \text{falls } j > 1 \end{cases}$$

und mit einer beliebigen C^1-Funktion $\gamma(t)$ mit $\gamma(t), \gamma'(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\gamma(t) \equiv 0$ für $t \leq R + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ beliebig betrachten wir das Vektorfeld $X(x) := \Psi_{\operatorname{spt} T}(x)\, \gamma(q_j(x))\, \hat{x}(x)$, welches von der Klasse $C^1_c(U, \mathbb{R}^{n+1})$ ist.

Wir berechnen die einzelnen Ausdrücke der Variationsformel separat. Aus $\nabla_M \gamma(q_j) = \gamma'(q_j)\, (Dq_j)^\top = 2\gamma'(q_j)\, \hat{x}^\top$ folgt wieder $\langle \nabla_M \gamma(q_j), \hat{x} \rangle = 2\gamma'(q_j) \langle \hat{x}^\top, \hat{x} \rangle = 2\gamma'(q_j)\, |\hat{x}^\top|^2$. Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_M \hat{x} &= \sum_{i=1}^{n+1-j} \langle \nabla_M x_i, e_i \rangle - \frac{n-j}{j}\, b \sum_{i=n+2-j}^{n} \langle \nabla_M x_i, e_i \rangle - \frac{n-j}{j}\, b\, \langle \nabla_M (x_{n+1} - v), e_{n+1} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1-j} \langle e_i^\top, e_i \rangle - \frac{n-j}{j}\, b \sum_{i=n+2-j}^{n} \langle e_i^\top, e_i \rangle - \frac{n-j}{j}\, b\, \langle e_{n+1}^\top, e_{n+1} \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1-j} p_{ii} - \frac{n-j}{j}\, b \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii} = \sum_{i=1}^{n+1} p_{ii} - \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii} - \frac{n-j}{j}\, b \sum_{i=n+2-j}^{n+k} p_{ii} \\
&= n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\, b\Big) \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii},
\end{aligned}$$

wobei die leere Summe in dem Fall $j = 1$ hier und im Folgenden den Wert Null besitzt und außerdem erhalten wir

$$\begin{aligned}
\gamma(q_j) \operatorname{div}_M \hat{x} + \alpha \frac{X_{n+1}}{x_{n+1}} &= \gamma(q_j) \operatorname{div}_M \hat{x} - \gamma(q_j)\ \alpha\ \frac{n-j}{j}\ b\ \Big(\frac{x_{n+1} - v}{x_{n+1}}\Big) \\
&= \gamma(q_j) \Big\{ \operatorname{div}_M \hat{x} - \alpha \frac{n-j}{j}\ b\ \Big(1 - \frac{v}{x_{n+1}}\Big) \Big\} \\
&= \gamma(q_j) \Big\{ n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\ b\Big) \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii} - \alpha \frac{n-j}{j}\ b\ \Big(1 - \frac{v}{x_{n+1}}\Big) \Big\}.
\end{aligned}$$

Setzen wir die Terme in die erste Variationsformel (3.28) ein, so bekommen wir

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \gamma(q_j)\Big\{n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\ b\Big) \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii} - \alpha \frac{n-j}{j}\ b\ \Big(1 - \frac{v}{x_{n+1}}\Big)\Big\} + 2\gamma'(q_j)\ |\hat{x}^\top|^2\, \mathrm{d}\mu_T^\alpha.$$

Den Ausdruck $\{\ldots\}$ können wir μ_T-f.ü. punktweise wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
& n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\ b\Big) \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii} - \alpha \frac{n-j}{j}\ b\ \Big(1 - \frac{v}{x_{n+1}}\Big) \\
& \geq n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\ b\Big) \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii} - \alpha \frac{n-j}{j}\ b\ \Big(1 - \frac{v}{h^*}\Big) \\
& \geq n - \Big(j + (n-j)\ b\Big) - \alpha \frac{n-j}{j}\ b\ \Big(1 - \frac{v}{h^*}\Big) \qquad (3.29) \\
& = (n-j)\ b\ \Big(\frac{1}{b} - 1 - \frac{\alpha}{j}\Big(1 - \frac{v}{h^*}\Big)\Big) \\
& = (n-j)\ b\ \Big(\frac{1}{b} - \Big(1 + \frac{\alpha}{j}\Big) + \frac{\alpha}{j}\frac{v}{h^*}\Big)
\end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist aufgrund der verlangten Voraussetzung an die äußeren Daten nichtnegativ.

Wir betrachten wieder die Menge $E := \{x \in M \colon \mathcal{T}_x M$ existiert und $e_{n+2-j}, \ldots, e_{n+1} \in \mathcal{T}_x M\}$ und schauen uns zuerst das Komplement dieser Menge an. Da der Term $2\gamma'(q_j)|\hat{x}^\top|^2$ nichtnegativ ist, folgt sofort

$$0 \geq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1} \setminus E} \gamma(q_j)\Big\{n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\ b\Big) \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii} - \alpha \frac{n-j}{j}\ b\ \Big(1 - \frac{v}{x_{n+1}}\Big)\Big\}\, \mathrm{d}\mu_T^\alpha.$$

Für den Ausdruck $\{\ldots\}$ erhalten wir in der betrachteten Menge $\mathbb{R}^{n+1} \setminus E$ die strikte Ungleichung in der Zeile (3.29), sodass also

$$\{\ldots\} > (n-j)\ b\ \Big(\frac{1}{b} - \Big(1 + \frac{\alpha}{j}\Big) + \frac{\alpha}{j}\frac{v}{h^*}\Big) \geq 0$$

gilt. Wählen wir $\gamma(t)$ so, dass $\gamma(t) > 0$ für $t > R+\varepsilon$, so folgt $\operatorname{spt}\mu_T \cap (\mathbb{R}^{n+k} \setminus E) \subset \mathcal{H}_j(R+\varepsilon)$.

Für die Betrachtung in der Menge E nutzen wir die Nichtnegativität des ersten Summanden aus und erhalten

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1} \cap E} \gamma'(q_j)|\hat{x}^\top|^2\, \mathrm{d}\mu_T^\alpha.$$

Durch die genaue Analyse des Vektors $\hat{x}(x)$ in der Menge E folgt die Äquivalenz

$$|\hat{x}^\top(x)|^2 = 0 \text{ genau dann, wenn } \begin{cases} x_{n+2-j} = \ldots = x_n = 0, x_{n+1} = v, & \text{falls } j > 1, \\ x_{n+1} = v, & \text{falls } j = 1. \end{cases}$$

Und mit Hilfe der analogen Überlegungen wie in dem stationären Fall folgt durch die spezielle Wahl der Ableitung $\gamma'(t)$, welche wir strikt positiv für $t > R + \varepsilon$ annehmen können, die Inklusion

$$\operatorname{spt}\mu_T \cap \left(E \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \begin{cases} x_{n+1-j+l} \neq v\delta_{jl} \text{ für ein } l=1,\ldots,j, & \text{falls } j>1 \\ x_{n+1} \neq v, & \text{falls } j=1. \end{cases} \right\} \right) \subset \mathcal{H}_j(R+\varepsilon).$$

Der Abschluss des Beweises folgt *exakt* wie in dem Einschließungssatz 3.10 der stationären Ströme. □

3.4.4 Ein Nichtexistenzsatz

Wir werden zeigen, dass auch Ströme T, die stationär bezüglich des α-Funktionals $F(x,\zeta) = x_{n+1}^{\alpha}|\zeta|$ sind, nicht durch die Kegelspitze $\tilde{v} := (0,\ldots,0,v)$ des Doppelkegels $K = \mathcal{H}_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq (n-1)\, b\, (x_{n+1} - v)^2\}$ verlaufen können. Da dieser Integrand in der geometrischen Maßtheorie noch nicht weiter untersucht worden ist, benötigen wir zunächst einige Vorarbeiten, bevor wir den entsprechenden Nichtexistenzsatz beweisen können.
Wir beweisen zuerst, dass ein α-stationärer Strom eine Variations*un*gleichung vom mittleren Krümmungstyp mit einem konstanten mittleren Krümmungsvektor erfüllt.

Lemma 3.47 *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ein α-stationärer Strom in $\mathbb{R}_+^{n+1}$ mit $h_* := \inf_{x \in \operatorname{spt} T} x_{n+1} > 0$. Dann erfüllt T die Variationsungleichung*

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_T \leq -\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \langle \mathbf{H}, X \rangle \,\mathrm{d}\mu_T \tag{3.30}$$

für alle Vektorfelder $X \in C_c^1(\mathbb{R}_+^{n+1} \setminus \operatorname{spt}\partial T, \mathbb{R}^{n+1})$ mit dem konstanten mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H} := (0,\ldots,0,\alpha h_*^{-1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Bemerkungen

i) Besitzt $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}_+^{n+1})$ kompakten Träger in dem offenen Raum $\mathbb{R}_+^{n+1}$, dann ist die Bedingung $h_* > 0$ automatisch gegeben.

ii) Die Klasse der α-stationären Ströme erfüllen natürlich auch die Variations*gleichung* (3.12) mit einem ortsabhängigen mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}(x)$. Für unsere Arbeit ist die Ungleichung ausreichend und von Bedeutung, dass in diesem Fall die mittlere Krümmung konstant ist. Wir definieren für die weiteren Resultate des Kapitels den Betrag des mittleren Krümmungsvektors $\Gamma := |\mathbf{H}| = \alpha h_*^{-1} > 0$.

Beweis: Ist ein Strom T mit den Voraussetzungen des Lemmas gegeben, dann genügt dieser per Definition der Variationsformel (3.28) und wir schätzen ab

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{div}_M X x_{n+1}^{\alpha} + \alpha X_{n+1} x_{n+1}^{\alpha-1} \,\mathrm{d}\mu_T \geq \inf_{x \in \operatorname{spt} T} x_{n+1}^{\alpha} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_T \\ &\quad + \inf_{x \in \operatorname{spt} T} x_{n+1}^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \alpha X_{n+1} \,\mathrm{d}\mu_T = h_*^{\alpha} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_T + h_*^{\alpha-1} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \alpha X_{n+1} \,\mathrm{d}\mu_T \end{aligned}$$

für alle $X \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+1,+} \setminus \operatorname{spt}\partial T, \mathbb{R}^{n+1})$. Durch Umformung dieser Ungleichung folgt

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \operatorname{div}_M X \,\mathrm{d}\mu_T \leq -\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} X_{n+1} \alpha \frac{h_*^{\alpha-1}}{h_*^{\alpha}} \,\mathrm{d}\mu_T$$

für jedes gültige Vektorfeld X und damit die Behauptung. □

Wir möchten in diesem Kapitel ähnlich vorgehen, wie in dem Kapitel über die Ströme mit mittlerer Krümmung und zeigen, dass für einen zusammenhängenden Strom, welcher durch den Kegelmittelpunkt $\tilde{v}$ des nach oben verschobenen Doppelkegels K verläuft, dort ein Tangentialkegel existiert, welcher Area-stationär in dem gesamten Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.
Zunächst benötigen wir dazu wieder die Existenz und Positivität der Dichte $\Theta^n(\mu_T, \tilde{v}) := \lim_{\rho \searrow 0}(\omega_n \rho^n)^{-1} \mu_T(\bar{B}_\rho(\tilde{v}))$. Bei den Strömen mit mittlerer Krümmung mussten wir voraussetzen, dass der mittlere Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ lokal L^p-integrierbar mit einem $p > n$ ist, um die Existenz der Dichte $\Theta^n(\mu_T, x)$ in *jedem* Punkt x zu garantieren. Analog zu diesem Resultat lässt sich für α-stationäre Ströme *ohne* L^p-Bedingung zeigen, dass die Dichte überall existiert.
In den folgenden allgemein formulierten Resultaten kann die offene Menge U so hinreichend klein gewählt werden, dass für den Kegelmittelpunkt $\tilde{v} \in U$ und für den Rand $\partial T \llcorner U = 0$ gilt, da wir stets $\operatorname{spt} \partial T \subset K \cap \{\pm x_{n+1} > v\}$ annehmen.

Satz 3.48 *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein Strom mit $h_* > 0$, der α-stationär in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ ist und $\partial T = 0$ in U erfüllt. Dann existiert die Dichte $\Theta^n(\mu_T, y)$ in jedem Punkt $y \in U$.*

Beweis: Wir verwenden die Variationsungleichung (3.30) mit einer geeigneten Testfunktion $X \in C^1_c(U, \mathbb{R}^{n+1})$. Sei $y \in U$ ein beliebig fixierter Punkt und - verschieden von den sonstigen Testfunktionen - $\gamma \in C^1(\mathbb{R})$, wobei $\gamma'(t) \le 0$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) \equiv 1$ für $t \le \rho/2$ und $\gamma(t) \equiv 0$ für $t > \rho$, mit einem Radius $\rho > 0$, sodass $\bar{B}_\rho(y) \subset U$. Definiere $r = r(x) := |x - y|$, dann betrachten wir die Funktion $X(x) := \gamma(r(x))(x - y) \in C^1_c(U, \mathbb{R}^{n+1})$.

Es gilt $\operatorname{div}_M X = \gamma(r) \operatorname{div}_M(x - y) + \langle \nabla_M \gamma(r), x - y \rangle$ und für den ersten Summanden daher

$$\operatorname{div}_M(x - y) = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla_M (x - y)_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \langle e_i^\top, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} p_{ii} = \operatorname{spur}(\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M}) \overset{(1.4)}{=} n.$$

Weiterhin erhalten wir mit der orthogonalen Projektion auf den approximativen Normalraum $(\cdot)^\perp = \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M}$ die Identität

$$\nabla_M \gamma(r) = \gamma'(r) \nabla_M |x - y| = \gamma'(r) \Big(\frac{x - y}{|x - y|} \Big)^\top = \gamma'(r) \Big[\Big(\frac{x - y}{|x - y|} \Big) - \Big(\frac{x - y}{|x - y|} \Big)^\perp \Big]$$

und somit für den zweiten Summanden

$$\langle \nabla_M \gamma(r), x - y \rangle = r\gamma'(r) - \frac{|x - y|}{|x - y|} \gamma'(r) \Big\langle x - y, \Big(\frac{x - y}{|x - y|} \Big)^\perp \Big\rangle \overset{(1.2)}{=} r\gamma'(r) - r\gamma'(r)(Dr)^\perp.$$

Das Einsetzen des kompletten Ausdrucks in die Variationsungleichung liefert

$$n \int_U \gamma(r) \, \mathrm{d}\mu_T + \int_U r\gamma'(r) \, \mathrm{d}\mu_T \le - \int_U \langle \mathbf{H}, x - y \rangle \gamma(r) \, \mathrm{d}\mu_T + \int_U r\gamma'(r) |(Dr)^\perp|^2 \, \mathrm{d}\mu_T.$$

Wir betrachten jetzt eine beliebige Funktion $\phi \in C^1(\mathbb{R}, [0, 1])$, sodass $\phi(t) \equiv 1$ für $t \le 1/2, \phi(t) \equiv 0, t \ge 1$ und $\phi'(t) \le 0$ für alle t. Dann können wir die obige Integralungleichung mit der Funktion $\gamma(r) = \phi(r/\rho)$ verwenden. Wir definieren

$$\begin{aligned} I(\rho) &:= \int_U \phi\Big(\frac{r}{\rho}\Big) \, \mathrm{d}\mu_T, \\ L(\rho) &:= \int_U \phi\Big(\frac{r}{\rho}\Big) \, \langle x - y, \mathbf{H} \rangle \, \mathrm{d}\mu_T, \\ J(\rho) &:= \int_U \phi\Big(\frac{r}{\rho}\Big) \, |(Dr)^\perp|^2 \, \mathrm{d}\mu_T \end{aligned}$$

und aufgrund der Relation $r\gamma'(r) = r\rho^{-1}\phi'(r/\rho) = -\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\big(\phi(r/\rho)\big)$ folgt die Ungleichung

$$nI(\rho) - \rho I'(\rho) \leq -\rho J'(\rho) - L(\rho).$$

Durch Multiplikation mit dem negativen Faktor $-\rho^{-n-1}$ erhalten wir

$$\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{-n}I(\rho)\big) \geq \rho^{-n}J'(\rho) + \rho^{-n-1}L(\rho) \overset{J'(\rho)\geq 0}{\geq} \rho^{-n-1}L(\rho).$$

Wir betrachten das Integral $L(\rho)$ im Detail und schätzen ab

$$\begin{aligned}
L(\rho) &= \int_U \phi\Big(\frac{r}{\rho}\Big)\langle x-y, \mathbf{H}\rangle\,\mathrm{d}\mu_T \geq -\int_U \phi\Big(\frac{r}{\rho}\Big)|x-y|\,|\mathbf{H}|\,\mathrm{d}\mu_T \overset{|x-y|\leq\rho}{\geq} -\rho\int_U \phi\Big(\frac{r}{\rho}\Big)|\mathbf{H}|\,\mathrm{d}\mu_T \\
&= -\rho\,\Gamma\int_U \phi\Big(\frac{r}{\rho}\Big)\,\mathrm{d}\mu_T \overset{\substack{\text{Hölder-}\\ \text{Ungleichung}}}{\geq} -\rho\,\Gamma\,\mu_T(B_R(y))^{\frac{1}{n+1}}\bigg(\int_U \phi\Big(\frac{r}{\rho}\Big)^{\frac{n+1}{n}}\,\mathrm{d}\mu_T\bigg)^{\frac{n}{n+1}} \\
&\overset{\phi(\cdot)\leq 1}{\geq} -\rho\,\Gamma\,\mu_T(B_R(y))^{\frac{1}{n+1}}\bigg(\int_U \phi\Big(\frac{r}{\rho}\Big)\,\mathrm{d}\mu_T\bigg)^{\frac{n}{n+1}} = -\rho\,\Gamma\,\mu_T(B_R(y))^{\frac{1}{n+1}}\,I(\rho)^{\frac{n}{n+1}},
\end{aligned}$$

sodass wir

$$\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{-n}I(\rho)\big) \geq -\rho^{-n}\,\Gamma\,\big(\mu_T(B_R(y))\big)^{\frac{1}{n+1}}I(\rho)^{\frac{n}{n+1}} \tag{3.31}$$

erhalten. Die Konstante $\Gamma = \alpha h_*^{-1}$ bezeichnet den Betrag des mittleren Krümmungsvektors wie in der obigen Bemerkung definiert. Schließlich bekommen wir die Differentialungleichung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho}(\rho^{-n}I(\rho))^{\frac{1}{n+1}} &= \frac{1}{n+1}(\rho^{-n}I(\rho))^{-\frac{n}{n+1}}\frac{d}{d\rho}\big(\rho^{-n}I(\rho)\big) \\
&\overset{(3.31)}{\geq} -\frac{1}{n+1}(\rho^{-n})^{-\frac{n}{n+1}}I(\rho)^{-\frac{n}{n+1}}\rho^{-n}\,\Gamma\,\big(\mu_T(B_R(y))\big)^{\frac{1}{n+1}}I(\rho)^{\frac{n}{n+1}} \\
&= -\frac{1}{n+1}\rho^{-\frac{n}{n+1}}\Gamma\,\big(\mu_T(B_R(y))\big)^{\frac{1}{n+1}}.
\end{aligned}$$

Die Integration dieser Ungleichung über das Intervall (σ,ρ) mit $0<\sigma<\rho\leq R$ liefert

$$\int_\sigma^\rho \frac{d}{d\tilde\rho}(\tilde\rho^{-n}I(\tilde\rho))^{\frac{1}{n+1}}\,\mathrm{d}\tilde\rho \geq -\frac{1}{n+1}\Gamma\,\big(\mu_T(B_R(y))\big)^{\frac{1}{n+1}}\int_\sigma^\rho \tilde\rho^{-\frac{n}{n+1}}\,\mathrm{d}\tilde\rho,$$

also nach der Ausführung der Integration

$$\begin{aligned}
\big(\rho^{-n}I(\rho)\big)^{\frac{1}{n+1}} - \big(\sigma^{-n}I(\sigma)\big)^{\frac{1}{n+1}} &\geq -\frac{1}{n+1}\Gamma\,\big(\mu_T(B_R(y))\big)^{\frac{1}{n+1}}\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}}\big(\rho^{\frac{1}{n+1}} - \sigma^{\frac{1}{n+1}}\big) \\
&= -\Gamma\,\big(\mu_T(B_R(y))\big)^{\frac{1}{n+1}}\big(\rho^{\frac{1}{n+1}} - \sigma^{\frac{1}{n+1}}\big).
\end{aligned}$$

Lassen wir nun ϕ gegen die charakteristische Funktion von $(-\infty,1)$ streben, siehe L. Simon [33, §17] für ein ähnliches Argument, dann erhalten wir die folgende *Monotonieformel*

$$\big(\sigma^{-n}\mu_T(B_\sigma(y))\big)^{\frac{1}{n+1}} \leq \big(\rho^{-n}\mu_T(B_\rho(y))\big)^{\frac{1}{n+1}} + \Gamma\,\big(\mu_T(B_R(y))\big)^{\frac{1}{n+1}}\big(\rho^{\frac{1}{n+1}} - \sigma^{\frac{1}{n+1}}\big). \tag{3.32}$$

Diese Ungleichung bedeutet, dass die Funktion

$$f(\rho) := \big(\rho^{-n}\mu_T(B_\rho(y))\big)^{\frac{1}{n+1}} + \Gamma\,\big(\mu_T(B_R(y))\big)^{\frac{1}{n+1}}\rho^{\frac{1}{n+1}}$$

schwach monoton wachsend in ρ ist und daher existiert der Limes $\lim_{\rho\searrow 0} f(\rho)$, siehe S. Hildebrandt [23, §2.3, Satz 5]. Somit besitzt auch der erste Summand den Grenzwert $\lim_{\rho\searrow 0} \rho^{-n}\mu_T(B_\rho(y))$ und die Existenz der Dichte ist damit gezeigt. □

Wir halten noch fest, dass durch eine einfache Modifikation unseres obigen Beweises die allgemeine Monotonieformel für α-stationäre Ströme $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ folgt.

Proposition 3.49 (Allgemeine Monotonieformel) *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein Strom mit $h_* > 0$, der α-stationär in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ ist und $\partial T = 0$ in U erfüllt. Dann gilt für jedes $p > n$ mit $\Gamma := \alpha h_*^{-1}$ die Monotonieformel*

$$\left(\sigma^{-n}\mu_T(B_\sigma(y))\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\rho^{-n}\mu_T(B_\rho(y))\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\Gamma}{p-n}\left(\mu_T(B_R(y))\right)^{\frac{1}{p}}\left(\rho^{1-\frac{n}{p}} - \sigma^{1-\frac{n}{p}}\right)$$

für alle $0 < \sigma < \rho \leq R$, sodass $\bar{B}_R(y) \subset U$.

Wir kommen nun zu einer weiteren Aussage über die Dichtefunktion $x \mapsto \Theta^n(\mu_T, x)$, welche ebenfalls bei den Strömen mit der mittleren Krümmung verwendet worden ist.

Lemma 3.50 *Gegeben sei ein Strom T mit denselben Voraussetzungen wie in dem Satz 3.48. Dann ist die Dichte $\Theta^n(\mu_T, \cdot)$ eine oberhalbstetige Funktion in U, also gilt $\Theta^n(\mu_T, y) \geq \limsup_{x\to y} \Theta^n(\mu_T, x)$ für alle $y \in U$.*

Beweis: Mit der oben bewiesenen Monotonieformel (3.32) folgt der Beweis nun *exakt* wie in L. Simon [33, Cor. 17.8] mit $p := n+1$ und $c := \Gamma\left(\mu_T(B_R(y))\right)^{\frac{1}{n+1}}$. □

Wir nehmen nun wieder an, dass in der Umgebung U um die Kegelspitze der Strom $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ mit $\partial T = 0$ eine Funktion besitzt, die $\theta \geq 1$ μ_T-f.ü. erfüllt. Diese Bedingung ist automatisch für Ströme $T \in \mathcal{IR}_n(U)$ mit ganzzahliger Vielfachheit gegeben. Weiterhin gilt nach dem Strukturlemma 2.7 μ_T-f.ü. die Gleichheit $\theta(x) = \Theta^n(\mu_T, x)$ und daher folgt mit dem Satz 3.48 über die Existenz der Dichte und durch die geeignete Wahl einer Folge von Punkten in Verbindung mit dem Lemma 3.50 über die Oberhalbstetigkeit, dass $\Theta^n(\mu_T, x) \geq 1$ in *jedem* Punkt $x \in \operatorname{spt} T$ gilt. Insbesondere ist auch in der Kegelspitze $\tilde{v} = (0, \ldots, 0, v)$ die Dichte strikt positiv. Das ist erneut die erste Bedingung in L. Simon [33, 42.1].

Aus der Monotonieformel (3.32) erhalten wir eine wichtige Abschätzung über das Wachstum des Radonmaßes μ_T für einen α-stationären Strom T, die wir auch in dem Area-stationären Fall und bei den Strömen mit mittlerer Krümmung bewiesen haben. Für einen Strom T, der die Voraussetzungen der Monotonieformel erfüllt, existiert eine Konstante c, sodass für ein hinreichend kleines $\rho > 0$ die Abschätzung

$$\mu_T(B_\rho(x)) \leq c\rho^n \tag{3.33}$$

gilt.

Denn aus (3.32) folgt durch Streichen des negativen Summanden auf der rechten Seite und mit $\rho = R$ die Ungleichung

$$\left(\sigma^{-n}\mu_T(B_\sigma(x))\right)^{\frac{1}{n+1}} \leq \left(R^{-n}\mu_T(B_R(x))\right)^{\frac{1}{n+1}} + \Gamma\left(\mu_T(B_R(x))\right)^{\frac{1}{n+1}} R^{\frac{1}{n+1}}$$

und anschließendes Potenzieren mit $n+1$ liefert die geforderte Ungleichung.

Bemerkung

i) Die Resultate 3.48, 3.49 und 3.50 sowie die Relation (3.33) gelten offensichtlich auch für α-stationäre rektifizierbare Varifaltigkeiten $V \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Wir haben die Formulierung in dem Kontext der Ströme gewählt, da alle Aussagen zur Vorbereitung des Nichtexistenzsatzes für α-stationäre *Ströme* dienen.

Wir zeigen nun die zweite Bedingung aus L. Simon [33, 42.1]. Dazu sei wieder $V \in \mathcal{G}_n(U)$ die allgemeine Varifaltigkeit, welche zu dem Strom $T \in \mathcal{R}_n(U), U \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ assoziiert wird. Für die exakten Definitionen und die genauen Ausführungen der einzelnen Rechenschritte verweisen wir auf das analoge Vorgehen in dem Kapitel 3.3.4 über den Nichtexistenzsatz für Ströme mit mittlerem Krümmungsvektor.

Für das totale Variationsmaß dieser Varifaltigkeit gilt dann

$$\lim_{\rho \searrow 0} \rho^{1-n} \|\delta V\|(B_\rho(x)) = 0. \tag{3.34}$$

Dieser Grenzwert folgt mit Hilfe der Variationsungleichung (3.30) mit konstanter mittlerer Krümmung direkt aus den folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned}\|\delta V\|(B_\rho(x)) &= \sup_{\substack{|X|\le 1 \\ \operatorname{spt} X \subset B_\rho(x)}} \left| \int_{G_n(U)} \operatorname{div}_S X \, \mathrm{d}V(x,S) \right| = \sup_{\substack{|X|\le 1 \\ \operatorname{spt} X \subset B_\rho(x)}} \left| \int_U \operatorname{div}_M X \, \mathrm{d}\mu_V(x) \right| \\ &\le \sup_{\substack{|X|\le 1 \\ \operatorname{spt} X \subset B_\rho(x)}} \int_U |X| \, |\mathbf{H}| \, \mathrm{d}\mu_V(x) \le \Gamma \, \mu_V(B_\rho(x)) \overset{(3.33)}{\le} \Gamma \, c \, \rho^n. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Aus der wichtigen Relation (3.34) folgt wiederum für die Folge $\eta_{x,\lambda_j \#} V \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R}^{n+1}), \lambda_j \searrow 0$, mit Hilfe des Korollars 3.24 die Abschätzung $\lim_{j\to\infty} \|\delta V_j\|(B_R(x)) = 0$ und daher sind die Voraussetzungen des Kompaktheitssatzes für Radonmaße gegeben. Es existiert ein abstraktes Radonmaß C auf $G_n(\mathbb{R}^{n+1})$, sodass $\eta_{x,\lambda_{j'} \#} V \to C, j' \to \infty$ für eine Teilfolge j', die wir nun wieder mit j bezeichnen.
Weiterhin folgt wegen der Ungleichung $\|\delta C\|(B_R(x)) \le \liminf_{j\to\infty} \|\delta V_j\|(B_R(x))$ direkt die Area-Stationarität der allgemeinen Varifaltigkeit C in dem gesamten Raum $\mathbb{R}^{n+1}$.

Der letzte Schritt besteht wieder aus dem Beweis, dass $C \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ eine rektifizierbare Varifaltigkeit ist und damit in dem Raum $\mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ liegt.

Wir müssen zuerst wissen, dass für das assoziierte Radonmaß μ_C von C für die Dichte $\Theta^n(\mu_C, y) \ge 1$ μ_C-f.ü. gilt. Der Beweis ist erneut derselbe wie bei den Strömen mit der mittleren Krümmung, da sich $\Theta^n(V_j, x) \ge 1 \, \mu_{V_j}$-f.ü. auf den Grenzwert in der verlangten Form überträgt.
Mithilfe des Satzes über die Rektifizierbarkeit L. Simon [33, Thm. 42.4] folgt schließlich die Behauptung $C \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ und es kann der gewöhnliche Satz 3.35 über die Existenz von Tangentialkegeln angewandt werden.

Mit *exakt* der gleichen Argumentation wie bei dem Nichtexistenzsatz von Strömen mit mittlerer Krümmung beenden wir schließlich dieses Kapitel mit dem Satz über die Nichtexistenz von zusammenhängenden α-stationären Strömen bei bestimmter Lage der Randwerte.

Satz 3.51 (Nichtexistenzsatz) *Sei $T \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein α-stationärer Strom in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ mit kompaktem Träger* $\operatorname{spt} T$*. Für einen Vektor $w = (w_1, \ldots, w_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sei $\eta_{w,1}(y) := y - w$ die horizontale Translationsfunktion und $K := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 - (n-1)\, b\, (x_{n+1} - v)^2 \leq 0\}$ mit $v, b > 0$ ein in positiver x_{n+1}-Richtung verschobener Kegel. Die Randwerte erfüllen* $\operatorname{spt} \partial T \subset \eta_{w,1}(K)$*, sodass sowohl* $\operatorname{spt} \partial T \cap (\eta_{w,1}(K) \cap \{x_{n+1} \geq v\}) \neq \emptyset$ *als auch* $\operatorname{spt} \partial T \cap (\eta_{w,1}(K) \cap \{x_{n+1} \leq v\}) \neq \emptyset$*. Gilt weiterhin mit $h^* := \max_{x \in \operatorname{spt} \partial T} x_{n+1}$ die Bedingung $\frac{1}{b} - (1+\alpha) + \alpha \frac{v}{h^*} \geq 0$ und $\theta \geq 1$ μ_T-f.ü. in einer Umgebung um den Punkt $\eta_{w,1}((0, \ldots, 0, v))$, dann kann* $\operatorname{spt} T$ *nicht zusammenhängend sein.*

Bemerkung

i) Betrachtet man spezieller *α-minimierende* Ströme $T \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, dann existiert in *jedem* Punkt $x_0 \in \operatorname{spt} T \setminus \operatorname{spt} \partial T$ ein Tangentialkegel, der Area-*minimierend* in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Dabei ist T α-minimierend, falls $\mathbf{M}^\alpha_W(T) \leq \mathbf{M}^\alpha_W(S), W \subset\subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ für alle $S \in \mathcal{IR}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ mit $\partial S = \partial T$ in $\mathbb{R}^{n+1}_+$, sodass $\operatorname{spt}(S-T)$ eine kompakte Teilmenge von W ist. Wir *skizzieren* den Beweis in sechs Schritten, da dieser verschieden von der Argumentation des Area-minimierenden Falls ist, vergleiche dazu L. Simon [33, Thm. 34.5], und in der Literatur bisher nicht auftaucht.

Beweis: *1.) Der gezoomte Strom konvergiert gegen einen Strom*
Für eine Folge $\lambda_j \searrow 0, j \to \infty$, betrachten wir die Bildfolge $T_j = \eta_{j\#} T := \eta_{x_0, \lambda_j \#} T$ von gezoomten Strömen um den Punkt x_0. Diese Folge erfüllt die gleichförmige Massenbeschränkung $\sup_{j \in \mathbb{N}} (\mathbf{M}_W(T_j) + \mathbf{M}_W(\partial T_j)) \leq C < \infty$ für jedes offene $W \subset\subset \mathbb{R}^{n+1}$, denn für einen beliebigen Ball gilt $\mathbf{M}_{B_r(0)}(\eta_{j\#} T) = \lambda_j^{-n} \mathbf{M}_{\eta_j^{-1}(B_r(0))}(T) = \lambda_j^{-n} \mathbf{M}_{B_{\lambda_j r}(x_0)}(T) = \omega_n r^n (\omega_n (\lambda_j r)^n)^{-1} \mathbf{M}_{B_{\lambda_j r}(x_0)}(T) \to \omega_n r^n \Theta^n(\mu_T, x_0), j \to \infty$, und das ist nach dem Satz 3.48 eine endliche Zahl. Da $x_0 \in \operatorname{spt} T \setminus \operatorname{spt} \partial T$, gilt weiterhin $\partial T_j = 0$ auf $B_r(0)$ für ein hinreichend großes j. Nach L. Simon [33, Thm. 27.3 & Thm. 31.2] existiert dann eine Teilfolge, welche wir erneut mit j bezeichnen, und ein Strom $C \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+1})$, sodass $\flat_W(T_j, C) \to 0, j \to \infty$, für jedes offene $W \subset\subset \mathbb{R}^{n+1}$ in der Flat-Metrik $\flat$, L. Simon [33, §31].

2.) Der gezoomte Strom minimiert ein skaliertes und translatiertes Funktional
Aufgrund der horizontalen Translationsinvarianz nehmen wir ohne Einschränkung an, dass der Punkt x_0 von der Form $x_0 = (0, \ldots, 0, v) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ ist. Für drei positive Zahlen $\alpha, \lambda, u > 0$ definieren wir den Integranden $F^{(\alpha,\lambda,u)} \colon U \times \Lambda_n \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, \zeta) \mapsto F^{(\alpha,\lambda,u)}(x, \zeta) := (\lambda x_{n+1} + u)^\alpha |\zeta|$. Für einen Strom $P = (M, \theta, \xi) \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ und eine offene Menge $W \subset\subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist das Integral von $F^{(\alpha,\lambda,u)}$ über P in W gegeben durch $\int_{P \llcorner W} F^{(\alpha,\lambda,u)} = \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda,u)}_W(P) := \int_{M \cap W} (\lambda x_{n+1} + u)^\alpha \theta(x) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x)$. Wir sagen, dass P die skalierte und translatierte α-Masse minimiert, falls $\mathbf{M}^{(\alpha,\lambda,u)}_W(P) \leq \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda,u)}_W(Q)$ für alle Vergleichsströme $Q \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\partial Q = \partial P$ und $\operatorname{spt}(Q - P) \subset\subset W$ gilt. Wir erhalten das folgende Resultat: *Sei $T \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ α-minimierend in $\mathbb{R}^{n+1}_+$, dann minimiert jedes Folgenglied $T_j = \eta_{x_0, \lambda_j \#} T$ die skalierte und translatierte α-Masse $\mathbf{M}^{(\alpha, \lambda_j, v)}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.*
Denn sei $j \in \mathbb{N}$ beliebig fixiert und $w \colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, y \mapsto w(y) := (\lambda_j y_{n+1} + v)^\alpha$, dann folgt

$$\mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}_W(T_j) \overset{(2.4)}{=} \int_{\eta_j(M_T) \cap W} (\lambda_j y_{n+1} + v)^\alpha \, \theta_T \circ \eta_j^{-1}(y) \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(y) = \int_{\eta_j(M_T \cap \eta_j^{-1}(W))}$$

$$\big((w \circ \eta_j)\, \theta_T\big) \circ \eta_j^{-1} \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n \overset{(2.1)\,\&\,\text{Lem. 3.21}}{=} \lambda_j^{-n} \int_{M_T \cap \eta_j^{-1}(W)} (\lambda_j\, (x_{n+1} - v)/\lambda_j + v)^\alpha \, \theta_T \, \mathrm{d}\mathcal{H}^n(x)$$

$$= \lambda_j^{-n} \mathbf{M}^\alpha_{\eta_j^{-1}(W)}(T) \leq \lambda_j^{-n} \mathbf{M}^\alpha_{\eta_j^{-1}(W)}(S),$$

wobei die letzte Ungleichung aus der α-Minimalität von T resultiert, da $\eta_j^{-1}(W)$ offen ist und S bezeichne einen geeigneten Vergleichsstrom. Alle Ströme $Q \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\partial Q = \partial T_j$ erhalten wir durch $Q := \eta_{j\#}S$, dann ergibt sich mit exakt der gleichen Rechnung $\mathbf{M}_W^{(\alpha,\lambda_j,v)}(Q) = \lambda_j^{-n}\mathbf{M}^\alpha_{\eta_j^{-1}(W)}(S)$, sodass insgesamt die verlangte Ungleichung $\mathbf{M}_W^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j) \leq \mathbf{M}_W^{(\alpha,\lambda_j,v)}(Q)$ folgt. Außerdem gilt $\operatorname{spt}(Q - T_j) = \operatorname{spt}(\eta_{j\#}S - \eta_{j\#}T) \overset{\text{nach Def. 2.10}}{=} \operatorname{spt}(\eta_{j\#}(S - T)) \overset{\text{Lem. 2.11 } ii)}{\subset} \eta_j(\operatorname{spt}(S-T)) \subset\subset \eta_j(\eta_j^{-1}(W)) = W$, womit die Minimierung bewiesen ist.

3.) Der Grenzwert ist Area-minimierend
Sei $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine beliebige kompakte Menge und $\Psi_K(x)$ so gewählt, dass $\operatorname{spt}\Psi_K \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \operatorname{dist}(x,K) < \varepsilon\}$ mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$ und für ein $0 \leq q < 1$ definieren wir die offene Menge $W_q := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \Psi_K(x) > q\}$.
Die Konvergenz in der Flat-Metrik in dem ersten Schritt liefert die Existenz von zwei Stromfolgen $R_j \in \mathcal{IR}_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ und $S_j \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+1})$, sodass $C - T_j = \partial R_j + S_j$ in W_0 und $\mathbf{M}(R_j) + \mathbf{M}(S_j) \to 0, j \to \infty$, erfüllt ist. Für einen Parameter $0 < t < 1$ definieren wir den Schnitt $P_j = \langle R_j, \Psi_K, t_+\rangle := -\partial(R_j\llcorner\{x\colon \Psi_K(x) > t\}) + (\partial R_j)\llcorner\{x\colon \Psi_K(x) > t\} = -\partial(R_j\llcorner W_t) + (\partial R_j)\llcorner W_t$. Nach L. Simon [33, §28] folgt $P_j \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+1})$, $\operatorname{spt} P_j \subset \partial W_t$ sowie für eine Teilfolge, die wir erneut mit j bezeichnen, $\mathbf{M}(P_j) \to 0, j \to \infty$. Die letzte Behauptung resultiert aus der allgemeinen Ungleichung des oberen Integrals $\int_a^{*b} \mathbf{M}_W(\langle R_j, f, t_+\rangle)\,\mathrm{d}t \leq \operatorname{ess\,sup}_W |Df|\,\mathbf{M}_W(R_j\llcorner\{a < f < b\}) =: c$, aus der nach Übergang zu einer Teilfolge der Integrand durch $2c/(b-a)$ abgeschätzt werden kann und $\mathbf{M}(R_j)$ konvergiert gegen Null.
Schränken wir die obige Gleichung auf die Menge W_t ein, so erhalten wir $C\llcorner W_t - T_j\llcorner W_t = \partial R_j\llcorner W_t + S_j\llcorner W_t$ beziehungsweise mit dem definierten Schnittstrom $C\llcorner W_t - T_j\llcorner W_t = \partial(R_j\llcorner W_t) + P_j + S_j\llcorner W_t$. Nach dem Lemma 1.1 können wir außerdem annehmen, dass t so gewählt ist, dass $\mathbf{M}(T_j\llcorner\partial W_t) = 0$ für alle j sowie $\mathbf{M}(C\llcorner\partial W_t) = 0$ gilt.
Sei $Z \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ ein beliebiger Strom mit $\partial Z = 0$ und $\operatorname{spt} Z \subset K$. Wir zeigen die Ungleichung $\mathbf{M}_{\mathring{K}}(C) \leq \mathbf{M}_{\mathring{K}}(C+Z)$, welche aufgrund des beliebigen K äquivalent zu der Definition 3.8 ist und die Area-Minimierung des Grenzwertes C beweist.
Nach dem zweiten Schritt gilt $\mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner W_q) \leq \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner W_q + Z + \partial(R_j\llcorner W_t))$ für $q > t$, da $Z + \partial(R_j\llcorner W_t)$ ein zulässiger Vergleichsstrom ist, und der Übergang $q \searrow t$ liefert die Abschätzung $\mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner \bar{W}_t) \leq \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner \bar{W}_t + Z + \partial(R_j\llcorner W_t))$, welche nach unten durch $\mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner W_t)$ beschränkt ist. Für die rechte Seite folgt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner \bar{W}_t + Z + (\partial R)\llcorner W_t - P_j) \leq \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner W_t + Z + S_j\llcorner W_t + (\partial R_j)\llcorner W_t) \\
&+ \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(P_j) + \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(S_j\llcorner W_t) + \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner\partial W_t) = \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(C\llcorner W_t + Z) \\
&+ \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(P_j) + \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(S_j\llcorner W_t) + \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner\partial W_t) =: \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(C\llcorner W_t + Z) + \delta_j.
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass für die drei Summanden des Strafterms $\delta_j \searrow 0, j \to \infty$, gilt.
(I) $0 \leq \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(P_j) = \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(P_j\llcorner\partial W_t) \leq \sup_{\partial W_t}(\lambda_j x_{n+1} + v)^\alpha \mathbf{M}_{\partial W_t}(P_j) \overset{j\to\infty}{\to} v^\alpha 0 = 0$.
(II) $0 \leq \mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(S_j\llcorner W_t) \leq \sup_{\bar{W}_t}(\lambda_j x_{n+1} + v)^\alpha \mathbf{M}_{W_0}(S_j) \to 0, j \to \infty$.
(III) Einerseits ist $\mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner\partial W_t) \leq \sup_{\bar{W}_t}(\lambda_j x_{n+1} + v)^\alpha \mathbf{M}(T_j\llcorner\partial W_t)$ und andererseits $\mathbf{M}^{(\alpha,\lambda_j,v)}(T_j\llcorner\partial W_t) \geq \inf_{\bar{W}_t}(\lambda_j x_{n+1} + v)^\alpha \mathbf{M}(T_j\llcorner\partial W_t)$, wobei die jeweiligen Faktoren konstant sind und die Masse nach der obigen Bemerkung verschwindet.

Durch eine erneute Abschätzung nach oben respektive nach unten erhalten wir die Ungleichung $(*)$ $\inf_{\bar{W}_t}(\lambda_j x_{n+1} + v)^\alpha \mathbf{M}(T_j\llcorner W_t) \leq \sup_{\bar{W}_t}(\lambda_j x_{n+1} + v)^\alpha \mathbf{M}(C\llcorner W_t + Z) + \delta_j$, welche für alle $j \in N$ gültig ist, und somit folgt auch

$$\liminf_{j\to\infty}\left(\inf_{\bar{W}_t}(\lambda_j x_{n+1}+v)^\alpha \mathbf{M}(T_j \llcorner W_t)\right) \le \liminf_{j\to\infty}\left(\sup_{\bar{W}_t}(\lambda_j x_{n+1}+v)^\alpha \mathbf{M}(C\llcorner W_t + Z) + \delta_j\right).$$

Die rechte Seite konvergiert gegen den Ausdruck $v^\alpha \mathbf{M}(C\llcorner W_t + Z)$ und die linke Seite lässt sich mithilfe der Unterhalbstetigkeit der Masse, L. Simon [33, 26.13], gegen $v^\alpha \mathbf{M}(C\llcorner W_t)$ abschätzen. Die entstandene Ungleichung ist äquivalent zu der Behauptung $\mathbf{M}_{\mathring{K}}(C) \le \mathbf{M}_{\mathring{K}}(C+Z)$.

4.) Die assoziierten Radonmaße μ_{T_j}, μ_C konvergieren ebenfalls gegeneinander
Bemerkung: Diese Aussage gilt *nicht* in den stationären Fällen, weswegen wir in jenem Kontext auf die allgemeinen Varifaltigkeiten ausweichen müssen.
Mit $Z = 0$ folgt aus der Ungleichung $(*)$ die Abschätzung

$$\frac{\inf_{\bar{W}_t}(\lambda_j x_{n+1}+v)^\alpha}{\sup_{\bar{W}_t}(\lambda_j x_{n+1}+v)^\alpha}\mathbf{M}(T_j\llcorner W_t) - \frac{\delta_j}{\sup_{\bar{W}_t}(\lambda_j x_{n+1}+v)^\alpha} \le \mathbf{M}(C\llcorner W_t).$$

Der Vorfaktor konvergiert gegen Eins und der zweite Summand gegen Null, sodass wegen $K \subset W_t \subset \{x\colon \operatorname{dist}(x,K) < \varepsilon\}$ die Ungleichung $\limsup_{j\to\infty}\mu_{T_j}(K) \le \mathbf{M}_{\{x\colon \operatorname{dist}(x,K)<\varepsilon\}}(C)$ folgt, welche mit $\varepsilon \searrow 0$ in $\limsup_{j\to\infty}\mu_{T_j}(K) \le \mu_C(K)$ übergeht. Mithilfe des Teilfolgen-von-Teilfolgen-Prinzips lässt sich die Abschätzung auch für die ursprüngliche Folge beweisen. Andererseits gilt aufgrund der Unterhalbstetigkeit der Masse $\mu_C(W) \le \liminf_{j\to\infty}\mu_{T_j}(W)$ für alle offenen Mengen $W \subset\subset \mathbb{R}^{n+1}$. Da beide Ungleichungen für beliebige Mengen gelten, folgt $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\,\mathrm{d}\mu_{T_j} \to \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f\,\mathrm{d}\mu_C$, $j\to\infty$, für alle Funktionen $f \in C^0_c(\mathbb{R}^{n+1})$.

5.) Die Dichte von T in dem Punkt x_0 und von C in dem Ursprung stimmen überein
Es gilt $\sigma^{-n}\mu_C(B_\sigma(0)) \overset{\text{Lem. 1.1}}{=} \sigma^{-n}\mu_C(\bar{B}_\sigma(0)) \overset{4.)}{=} \lim_{j\to\infty}\sigma^{-n}\mu_{T_j}(\bar{B}_\sigma(0)) \overset{\text{Def. der } T_j}{=} \lim_{j\to\infty} (\lambda_j\sigma)^{-n}\mu_T(\bar{B}_{\lambda_j\sigma}(x_0)) = \omega_n\Theta^n(T,x_0)$ für ein beliebiges $\sigma > 0$. Division durch ω_n und $\sigma \searrow 0$ liefert die Behauptung $\Theta^n(C,0) = \Theta^n(T,x_0)$.

6.) Der Grenzwert C ist ein Kegel
Der Area-minimierende Strom C, kann mit einer stationären Varifaltigkeit V assoziiert werden, L. Simon [33, Lem. 33.2], sodass die Formel nach L. Simon [33, 17.5] $\sigma^{-n}\mu_V(B_\sigma(0)) = \rho^{-n}\mu_V(B_\rho(0)) - \int_{B_\rho(0)\setminus B_\sigma(0)} |x|^{-n}|\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M}(D|x|)|^2\,\mathrm{d}\mu_V$ für $0 < \sigma \le \rho$ erfüllt ist. Nach Schritt 5.) ist das gleichbedeutend mit $|\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M}(D|x|)|^2 = 0$ μ_V-f.ü. Wegen $D|x| = |x|^{-1}x$, gilt $\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M}(x) = 0$ μ_V-f.ü., das heißt $x \in \mathcal{T}_x M$ μ_V-f.ü. oder in der Terminologie des Stroms $C = (M_C, \xi_C, \theta_C)$ ausgedrückt $\xi_C \wedge x = 0$ μ_C-f.ü. Da $\partial C = 0$, bedeutet das außerdem trivialerweise $\xi_{\partial C} \wedge x = 0$, sodass nach H. Federer [16, 4.3.14] folgt, dass C ein Kegel ist und $\eta_{0,\lambda\#}C = C$ für jedes $\lambda > 0$ erfüllt.

Q.E.D.

Aus diesem Grund lässt sich der Nichtexistenzsatz 3.51 elementarer beweisen, falls ein *α-minimierender* Strom gegeben ist. In diesem Fall existiert ein Area-minimierender Tangentialkegel in der Kegelspitze $\tilde{v}$ des Nichtexistenzkegels K und der Beweis kann exakt wie in dem zweiten Teil des Nichtexistenzresultats von Strömen mit mittlerer Krümmung geführt werden.

3.5 Stationäre Ströme in einer Untermannigfaltigkeit

In diesem Kapitel betrachten wir stationäre Ströme nicht in dem gesamten Euklidischen Raum $\mathbb{R}^{n+k}$, sondern in beliebig gekrümmten Untermannigfaltigkeiten. Dazu sei $\mathcal{N}$ für ein $0 \leq l \leq k$ eine $(n+l)$-dimensionale eingebettete C^2-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$. Für einen Strom $T = \tau(M, \theta, \xi)$ respektive eine Varifaltigkeit $V = v(M, \theta)$ fordern wir $M \subset \mathcal{N}$, sodass diese in der Untermannigfaltigkeit enthalten sind. Weiterhin ist $U \subset \mathcal{N}$ stets eine beliebige offene Menge.

Wir werden sehen, dass stationäre Ströme in $\mathcal{N}$ im Prinzip einem Strom mit einem speziellen mittleren Krümmungsvektor in dem Euklidischen Raum entsprechen. Diese abstrakte mittlere Krümmung werden wir in dem nächsten Kapitel definieren und ihren Betrag geeignet abschätzen. Unter geeignet verstehen wir die Abschätzung durch eine Größe, welche nur von der Krümmung der Fläche $\mathcal{N}$ abhängt und nicht von der Lösung T oder V selber. Anschließend leiten wir die erste Variationsgleichung eines stationären Stroms her und beweisen einen Einschließungs- und Nichtexistenzsatz, für den kein Analogon mit klassischen C^2-Flächen existiert. Den Abschluss bildet ein Beispiel über die Nichtexistenz von zusammenhängenden stationären Flächen in Sphären, falls die Randwerte eine spezielle Lage besitzen.

3.5.1 Krümmungsdefinitionen und -abschätzung

Wir definieren die benötigten Krümmungsgrößen und beweisen die beschriebene geeignete Abschätzung.

Für einen Punkt $x \in \mathcal{N}$ sei $\{\nu_{l+1}, \ldots, \nu_k\}$ eine lokal definierte Orthonormalbasis des Normalraumes $\mathcal{T}_x^\perp\mathcal{N}$, die Vektoren erfüllen also $\langle \nu_\alpha(z), \nu_\beta(z)\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ und $\nu_\alpha(z) \in \mathcal{T}_z^\perp\mathcal{N}$ für alle Punkte z in einer Umgebung von x in $\mathcal{N}$. Da nach Voraussetzung $\mathcal{N} \in C^2$ gilt, ist jeder Normalenvektor $\nu_\alpha(x)$ differenzierbar. Es bezeichnet D_t die Ableitung in dem Punkt x in die Richtung eines Tangentialvektors $t \in \mathcal{T}_x\mathcal{N}$; ist γ eine C^1-Kurve in $\mathcal{N}$ mit $\gamma(0) = x, \dot\gamma(0) = t$, dann ist für eine Funktion $f\colon \mathcal{N} \to \mathbb{R}^{n+k}$ die Ableitung vermöge $D_t f := \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0}$ definiert. Aufgrund der Normierung $|\nu_\alpha(x)|^2 = 1$ folgt sofort die Orthogonalitätsrelation $\langle \nu_\alpha(x), D_t\nu_\alpha(x)\rangle = 0$, sodass der Vektor $D_t\nu_\alpha(x)$ in dem Tangentialraum $\mathcal{T}_x\mathcal{N}$ liegt. Die folgenden beiden Definitionen sind daher sinnvolle Größen.

Definition 3.52 (Weingartenabbildung) *In einem Punkt $x \in \mathcal{N}$ ist die Weingartenabbildung $-d\nu_\alpha(x)$ bezüglich des Normalenvektors ν_α für ein $\alpha = l+1, \ldots, k$ von $\mathcal{N}$ die lineare Abbildung gegeben durch*

$$\begin{aligned} -\,d\nu_\alpha(x)\colon \mathcal{T}_x\mathcal{N} &\to \mathcal{T}_x\mathcal{N}, \\ t \mapsto -\,d\nu_\alpha(x)(t) &:= -D_t\nu_\alpha(x). \end{aligned}$$

Definition 3.53 (Zweite Fundamentalform) *Die (vektorwertige) zweite Fundamentalform $B_x = B_x(\cdot,\cdot)$ von $\mathcal{N}$ in einem Punkt $x \in \mathcal{N}$ ist definiert durch die Bilinearform*

$$\begin{aligned} B_x\colon \mathcal{T}_x\mathcal{N} \times \mathcal{T}_x\mathcal{N} &\to \mathcal{T}_x^\perp\mathcal{N}, \\ (t,\tau) \mapsto B_x(t,\tau) &:= -\sum_{\alpha=l+1}^{k} \langle d\nu_\alpha(x)(t), \tau\rangle \nu_\alpha(x) = -\sum_{\alpha=l+1}^{k} \langle D_t\nu_\alpha, \tau\rangle \nu_\alpha\big|_x. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine Varifaltigkeit $V = v(M, \theta)$ und einen Punkt $x \in \operatorname{spt} V$, in dem der approximative Tangentialraum $\mathcal{T}_x M$ existiert. Weiter sei $\tau_1, \ldots, \tau_n$ eine beliebige Orthonormalbasis von $\mathcal{T}_x M$. Wir halten fest, dass mit Hilfe der tangentiellen Divergenz dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} B_x(\tau_i, \tau_i) = -\sum_{\alpha=l+1}^{k} \sum_{i=1}^{n} \langle D_{\tau_i} \nu_\alpha, \tau_i \rangle \nu_\alpha = -\sum_{\alpha=l+1}^{k} (\operatorname{div}_M \nu_\alpha) \nu_\alpha. \tag{3.36}$$

Diese Berechnung von $\operatorname{div}_M(\cdot)$ ist konsistent mit dem in Definition 2.5 gegebenen Ausdruck, da

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left\langle D_{\tau_i} \nu, \tau_i \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle D_{\tau_i} \sum_{j=1}^{n+k} \nu_j e_j, \tau_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n+k} \sum_{i=1}^{n} \left\langle D_{\tau_i} \nu_j e_j, \tau_i \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n+k} \left\langle e_j, \sum_{i=1}^{n} D_{\tau_i} \nu_j \tau_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n+k} \left\langle e_j, \nabla_M \nu_j \right\rangle. \end{aligned}$$

Wir können nun mit Hilfe der (vektorwertigen) zweiten Fundamentalform $B_x(\cdot,\cdot)$ von $\mathcal{N}$ den *auf M eingeschränkten mittleren Krümmungsvektor von $\mathcal{N}$* vermöge

$$\mathbf{H} \llcorner M(x) = \mathbf{H}_M(x) := \sum_{i=1}^{n} B_x(\tau_i, \tau_i) = \operatorname{spur}(B_x)\big|_{\mathcal{T}_x M} \in \mathbb{R}^{n+k} \tag{3.37}$$

definieren. Diese Größe wird bei den stationären Strömen in einer Untermannigfaltigkeit eine zentrale Rolle spielen. Wir wollen diesen abstrakten Vektor nun genauer charakterisieren. Das Ziel besteht darin, den Betrag von $\mathbf{H}_M$ durch eine Größe nach oben abzuschätzen, die nur noch von der zugrunde liegenden Untermannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ abhängt und nicht mehr von der Varifaltigkeit $V = v(M, \theta)$ selbst. Die entsprechende Abschätzung scheint bisher in der Literatur nicht aufzutauchen.

Dazu sei $l := k - 1$, sodass $\mathcal{N}$ eine Hyperfläche in dem $\mathbb{R}^{n+k}$ ist. Bis auf das Vorzeichen existiert dann für $x \in \mathcal{N}$ nur *eine* Normale $\nu(x) := \nu_k(x)$. In der klassischen Differentialgeometrie wird die folgende Definition gemacht.

Definition 3.54 (Hauptkrümmungen) *Die Hauptkrümmungsrichtungen von $\mathcal{N}$ in dem Punkt $x \in \mathcal{N}$ sind gegeben als die Eigenvektoren der Weingartenabbildung $-d\nu(x)$ und die Hauptkrümmungen $\kappa_1(x), \ldots, \kappa_{n+k-1}(x)$ als die zugehörigen Eigenwerte.*

Setzen wir $\mathrm{II}_x \colon \mathcal{T}_x\mathcal{N} \times \mathcal{T}_x\mathcal{N} \to \mathbb{R}, (t, \tau) \mapsto \mathrm{II}_x(t, \tau) := -\langle D_t \nu(x), \tau \rangle$, so können wir $B_x(t, \tau) = \mathrm{II}_x(t, \tau)\nu(x)$ schreiben. Wir nennen II_x die *skalare zweite Fundamentalform* von $\mathcal{N}$ in dem Punkt x. Die Abbildung $t \mapsto \mathrm{II}_x(t) := \mathrm{II}_x(t, t)$ definiert eine quadratische Form auf dem Tangentialraum von $\mathcal{N}$ mit den Hauptkrümmungen $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n+k-1}$ als Eigenwerte. Im Folgenden unterdrücken wir meist die Abhängigkeit von dem speziellen Punkt $x \in \mathcal{N}$ und betrachten eine neue Krümmungsgröße.

Definition 3.55 (n-mittlere Krümmung) *Es seien $|\kappa_1| \geq \ldots \geq |\kappa_{n+k-1}|$ die (betragsmäßig) geordneten Hauptkrümmungen von $\mathcal{N}$. Dann definieren wir die (skalare) n-mittlere Krümmung Λ_n von $\mathcal{N}$ durch*

$$\Lambda_n := |\kappa_1| + \ldots + |\kappa_n|.$$

Bemerkungen

i) Die Größe Λ_n ist unabhängig von der Wahl der (beiden) Normalen $\pm\nu$ und daher eine sinnvoll definierte Zahl, welche nur von der Fläche $\mathcal{N}$ abhängt.

ii) Wir weisen darauf hin, dass sich unsere Definition von der *n-mittleren Krümmung* unterscheidet, welche in L. P. Jorge und F. Tomi [26] oder in U. Dierkes und D. Schwab [10] eingeführt wird.

Um nun die Größe $\mathbf{H}_M$ mit der n-mittleren Krümmung Λ_n in Verbindung zu bringen, benötigen wir die folgende allgemeine Hilfsaussage aus der linearen Algebra, basierend auf einem ähnlichen Resultat in L. P. Jorge und F. Tomi [26, Lem. 2.3]. Dabei sind $N \geq n \geq 1$ natürliche Zahlen.

Lemma 3.56 *Es sei $Q\colon \mathfrak{V} \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form auf einem N-dimensionalen Euklidischen Vektorraum $\mathfrak{V}$ mit den geordneten Eigenwerten $|\kappa_1| \geq \ldots \geq |\kappa_N|$. Dann gilt für jeden n-dimensionalen Teilraum $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}$ die Abschätzung*

$$\left|\operatorname{spur}(Q)\big|_{\mathfrak{W}}\right| \leq |\kappa_1| + \ldots + |\kappa_n|.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage mit Hilfe von vollständiger Induktion über $N + n$. Für den Induktionsanfang betrachten wir $N + n = 2$, sodass die beiden Räume $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ eindimensional sind und daher zusammenfallen. Wir erhalten die Gleichheit

$$\left|\operatorname{spur}(Q)\big|_{\mathfrak{W}}\right| = \left|\operatorname{spur}(Q)\right| = |\kappa_1|.$$

In der Induktionsbehauptung nehmen wir nun an, die Behauptung gelte für alle quadratischen Formen Q sowie für alle linearen Räume $\mathfrak{V}$ der Dimension N und deren n-dimensionalen Unterräumen $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}$ mit $N + n \leq n_0$ für ein $n_0 \geq 2$.
Für gegebene Q, $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ setzen wir in dem Induktionsschritt voraus, dass $N + n = n_0 + 1$ ist. Mit $v_1 \in \mathfrak{V}$ bezeichnen wir einen Eigenvektor von Q, der zu dem betragsmäßig größten Eigenwert κ_1 korrespondiert. Wir definieren außerdem $\mathfrak{V}_1 := (\operatorname{span} v_1)^{\perp}$ als das $(N-1)$-dimensionale orthogonale Komplement von v_1. Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle:

Fall 1: $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}_1$
Da der Oberraum eine Dimension kleiner ist, $\dim \mathfrak{V}_1 = N - 1$, können wir die Induktionsbehauptung verwenden und weil κ_2 nun der betragsmäßig größte Eigenwert ist, folgt

$$\left|\operatorname{spur}(Q)\big|_{\mathfrak{W}}\right| \leq |\kappa_2| + \ldots + |\kappa_{n+1}| \overset{|\kappa_{i+1}| \leq |\kappa_i|}{\leq} |\kappa_1| + \ldots + |\kappa_n|.$$

Fall 2: $\mathfrak{W} \not\subset \mathfrak{V}_1$
Es gilt weiterhin $\mathfrak{W} \subset \mathfrak{V}$ und da $\mathfrak{W} \not\subset \mathfrak{V}_1$ muss somit $v_1 \in \mathfrak{W}$ gelten. Setzen wir $w_1 := v_1$, so können wir eine orthonormale Basis $\frac{w_1}{|w_1|}, w_2, \ldots, w_k$ von $\mathfrak{W}$ wählen. Nach Konstruktion stehen die $w_2, \ldots, w_k$ orthogonal zu v_1, das bedeutet $w_2, \ldots, w_k \in \mathfrak{V}_1$.
Wir definieren $\mathfrak{W}_1 := \operatorname{span}(w_2, \ldots, w_k)$ und wenden die Induktionsannahme auf das Tripel $Q|_{\mathfrak{V}_1}, \mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{W}_1$ an. Diese liefert die Abschätzung

$$\left|\operatorname{spur}(Q)\big|_{\mathfrak{W}_1}\right| = \left|\sum_{i=2}^{n} Q(w_i)\right| \leq |\kappa_2| + \ldots + |\kappa_n|$$

und insgesamt folgt

$$\Big|\operatorname{spur}(Q)\big|_{\mathfrak{W}}\Big| = \Big|\sum_{i=2}^{n} Q(w_i) + Q\Big(\frac{w_1}{|w_1|}\Big)\Big| \leq \Big|\sum_{i=2}^{n} Q(w_i)\Big| + \Big|Q\Big(\frac{w_1}{|w_1|}\Big)\Big|$$
$$\leq |\kappa_2| + \ldots + |\kappa_n| + \Big|Q\Big(\frac{w_1}{|w_1|}\Big)\Big| \leq |\kappa_1| + |\kappa_2| + \ldots + |\kappa_n|. \qquad \square$$

Aus dem Lemma folgt mit $Q(\cdot) := \mathrm{II}_x(\cdot), N := n+k-1, \mathfrak{V} := \mathcal{T}_x\mathcal{N}, \mathfrak{W} := \mathcal{T}_x M$ nun die wichtige Abschätzung

$$|\mathbf{H}_M(x)| = \Big|\operatorname{spur}(B_x)\big|_{\mathcal{T}_xM}\Big| = \Big|\operatorname{spur}(\mathrm{II}_x)\big|_{\mathcal{T}_xM}\nu\Big| = \Big|\operatorname{spur}(\mathrm{II}_x)\big|_{\mathcal{T}_xM}\Big| \leq \Lambda_n(x)$$
$$\text{für } \mu_V\text{-f.a. } x \in M. \tag{3.38}$$

Natürlich ist diese Abschätzung nur μ_V-f.ü. gültig, da der approximative Tangentialraum $\mathcal{T}_xM$ nur in μ_V-f.a. Punkten x existiert.

3.5.2 Stationäre Ströme in gekrümmten Flächen

Sei $(\phi_t)_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)}\colon U \to U$ die gleiche Einparameterfamilie, wie in dem Kapitel 3.1.2 über stationäre Ströme des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^{n+k}$, wobei wir jetzt zusätzlich $U \subset \mathcal{N}$ fordern. Wir wollen erneut einen Ausdruck für die erste Variation $\frac{d}{dt}\mathbf{M}(\phi_{t\#}(V \llcorner K))|_{t=0}, K \subset U$ kompakt, einer Varifaltigkeit $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ bestimmen. Es folgt dieselbe Integralgleichung $\int_U \operatorname{div}_M X_y \,\mathrm{d}\mu_V = 0$, wobei jetzt mit Vektorfeldern $X_y \in \mathcal{T}_y\mathcal{N}$ für jeden Punkt $y \in M$ zu testen ist, L. Simon [33, §9].

Wir können diese Bedingung handlicher ausdrücken. Dazu sei $\{\nu_1,\ldots,\nu_k\}$ eine orthonormale Familie von Vektorfeldern, definiert in einer Umgebung eines Punktes x, in dem der approximative Tangentialraum $\mathcal{T}_xM$ existiert, und die normal zu M sind. Dabei seien $\nu_1,\ldots,\nu_l$ tangential zu $\mathcal{N}$ und $\nu_{l+1},\ldots,\nu_k$ normal zu $\mathcal{N}$.

Ist X ein beliebiges Vektorfeld auf M, dann können wir dieses in den tangentiellen und normalen Anteil bezüglich $\mathcal{N}$ zerlegen: $X = \mathcal{P}_{\mathcal{T}_z\mathcal{N}}(X) + \mathcal{P}_{\mathcal{T}_z^{\perp}\mathcal{N}}(X) =: X^{\top} + X^{\perp}$ für alle Punkte z in einer Umgebung von x in $\mathcal{N}$. Für den Normalanteil gilt

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}_z^{\perp}\mathcal{N}}(X) = X^{\perp} = \sum_{\alpha=l+1}^{k} \langle \nu_\alpha, X\rangle \nu_\alpha.$$

Wir berechnen von diesem Anteil die bezüglich M tangentielle Divergenz und erhalten

$$\operatorname{div}_M X^{\perp} = \sum_{\alpha=l+1}^{k} \underbrace{\langle \nabla_M\langle \nu_\alpha, X\rangle, \nu_\alpha\rangle}_{=0} + \sum_{\alpha=l+1}^{k} \langle \nu_\alpha, X\rangle \operatorname{div}_M\nu_\alpha = \sum_{\alpha=l+1}^{k} \langle \nu_\alpha, X\rangle \operatorname{div}_M\nu_\alpha.$$

Ist $\{\tau_1,\ldots,\tau_n\}$ eine Basis des approximativen Tangentialraumes $\mathcal{T}_xM$, dann folgt

$$\operatorname{div}_M X = \operatorname{div}_M X^{\top} + \sum_{\alpha=l+1}^{k} \langle \nu_\alpha, X\rangle \operatorname{div}_M\nu_\alpha \overset{(3.36)}{=} \operatorname{div}_M X^{\top} - \sum_{i=1}^{n} \langle X, B_x(\tau_i,\tau_i)\rangle$$
$$\overset{(3.37)}{=} \operatorname{div}_M X^{\top} - \langle X, \mathbf{H}_M\rangle.$$

Für eine in $U \subset \mathcal{N}$ stationäre Varifaltigkeit V verschwindet bei der Integration über U bezüglich des Radonmaßes μ_V der Ausdruck $\int_U \operatorname{div}_M X^\top \, \mathrm{d}\mu_V$ und wir erhalten die folgende Charakterisierung.

Definition 3.57 (Stationäre Varifaltigkeit) *Für ein $0 \le l \le k$ sei $\mathcal{N}$ eine $(n+l)$-dimensionale eingebettete C^2-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ und $U \subset \mathcal{N}$ offen. Eine Varifaltigkeit $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ mit $M \subset \mathcal{N}$ heißt stationär in U, falls mit dem eingeschränkten mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}_M$ wie in (3.37) die Variationsgleichung*

$$\int_U \operatorname{div}_M X \, \mathrm{d}\mu_V = -\int_U \langle \mathbf{H}_M, X \rangle \, \mathrm{d}\mu_V$$

für alle Vektorfelder $X \in C_c^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ gilt.

Definition 3.58 (Stationärer Strom) *Es sei die Geometrie wie in der obigen Definition. Ein Strom $T = \tau(M,\theta,\xi) \in \mathcal{R}_n(U)$ mit $M \subset \mathcal{N}$ heißt stationär in U, falls die assoziierte Varifaltigkeit $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(U \setminus \operatorname{spt} \partial T)$ stationär in $U \setminus \operatorname{spt} \partial T$ ist.*

Ein in einer Untermannigfaltigkeit stationärer Strom entspricht also einem Strom mit einem mittleren Krümmungsvektor im $\mathbb{R}^{n+k}$. Damit können wir weitestgehend die Ergebnisse aus dem entsprechenden Kapitel 3.3 verwenden.

3.5.3 Einschließungs- und Nichtexistenzsätze

Wir definieren erneut die quadratischen Polynome

$$r_j(x) := \sum_{i=1}^{n+k-j} x_i^2, \quad s_j(x) := \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} x_i^2 \text{ sowie } q_j(x) := r_j(x) - \frac{n-j}{j} \, b \, s_j(x)$$

für ein $j = 1, \ldots, n-1$, ein $b \in [0,1]$ und es sei $\mathcal{H}_j(R) := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon q_j(x) \le R\}$ das verallgemeinerte Hyperboloid mit einer Zahl $R \in \mathbb{R}$. Für $j = 1$ und $R = 0$ erhalten wir den Kegel $K := \mathcal{H}_1(0)$ mit den beiden disjunkten Kegelhälften $K^\pm := K \cap \{\pm x_{n+k} > 0\}$.

Der Vollständigkeit halber formulieren wir zunächst den Satz mit der abstrakten eingeschränkten mittleren Krümmung $\mathbf{H}_M$.

Satz 3.59 (Allgemeiner Einschließungs- und Nichtexistenzsatz) *Sei $\mathcal{N}$ eine $(n+l)$-dimensionale eingebettete C^2-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ für ein $0 \le l \le k$. Weiter sei $T = \tau(M,\theta,\xi) \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mit $M \subset \mathcal{N}$ und kompaktem Träger $\operatorname{spt} T$ ein stationärer Strom in $\mathcal{N}$. Für ein $R \in \mathbb{R}$ gelte*

$$b + |\mathbf{H}_M(x)| \left[\frac{r_j(x)}{(n-j)^2} + \frac{b^2}{j^2} s_j(x) \right]^{1/2} \le 1 \text{ für } \mu_T-\text{f.a. } x \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{H}_j(R). \tag{3.39}$$

Ist nun $\operatorname{spt} \partial T \subset \mathcal{H}_j(R)$, dann folgt $\operatorname{spt} T \subset \mathcal{H}_j(R)$.

Gilt (3.39) mit $j = 1$ sowie $R = 0$ und ist zusätzlich für ein $\varepsilon > 0$ einerseits $\theta \ge 1$ μ_T-f.ü. in $B_\varepsilon(0)$ sowie $\mathbf{H}_M \in L^p_{\mathrm{loc}}(B_\varepsilon(0), \mathbb{R}^{n+k}; \mu_T)$ für ein $p > n$ und gilt $\operatorname{spt} \partial T \subset K^\pm$, sodass sowohl $\operatorname{spt} \partial T \cap K^+ \ne \emptyset$ als auch $\operatorname{spt} \partial T \cap K^- \ne \emptyset$, dann kann $\operatorname{spt} T$ nicht zusammenhängend sein.

Beweis: Zunächst wird die Variationsformel für stationäre Ströme in Untermannigfaltigkeiten aus dem Kapitel 3.5.2 benötigt. Anschließend ist der Beweis *exakt* identisch mit dem des Einschließungssatzes für Ströme mit mittlerer Krümmung in Kapitel 3.3.3 und des entsprechenden Nichtexistenzsatzes in 3.3.4. □

Der wesentlich „natürlichere" Satz ist hingegen das folgende Resultat.

Satz 3.60 (Einschließungs- und Nichtexistenzsatz in Hyperflächen) *Es sei $\mathcal{N}$ eine $(n+k-1)$-dimensionale eingebettete C^2-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$. Weiter sei $T = \tau(M,\theta,\xi) \in \mathcal{R}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mit $M \subset \mathcal{N}$ und kompaktem Träger $\operatorname{spt} T$ ein stationärer Strom in $\mathcal{N}$. Für ein $R \in \mathbb{R}$ erfülle die n-mittlere Krümmung Λ_n von $\mathcal{N}$*

$$b + \Lambda_n(x)\left[\frac{r_j(x)}{(n-j)^2} + \frac{b^2}{j^2}s_j(x)\right]^{1/2} \leq 1 \text{ für } \mu_T - \text{f.a. } x \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{H}_j(R). \tag{3.40}$$

Ist nun $\operatorname{spt} \partial T \subset \mathcal{H}_j(R)$, dann folgt $\operatorname{spt} T \subset \mathcal{H}_j(R)$.

Gilt (3.40) mit $j = 1$ sowie $R = 0$ und ist zusätzlich für ein $\varepsilon > 0$ einerseits $\theta \geq 1$ μ_T-f.ü. in $B_\varepsilon(0)$ sowie $\Lambda_n \in L^p_{\text{loc}}(B_\varepsilon(0), \mathbb{R}; \mu_T)$ für ein $p > n$ und gilt $\operatorname{spt} \partial T \subset K^\pm$, sodass sowohl $\operatorname{spt} \partial T \cap K^+ \neq \emptyset$ als auch $\operatorname{spt} \partial T \cap K^- \neq \emptyset$, dann kann $\operatorname{spt} T$ nicht zusammenhängend sein.

Beweis: Der Beweis verläuft genau wie in dem obigen allgemeinen Satz und es ist zusätzlich die Abschätzung (3.38) für die eingeschränkte Krümmung $\mathbf{H}_M$ in dem Beweis des Einschließungssatzes 3.33 für Ströme mit mittlerem Krümmungsvektor in der Gleichung (3.19) zu verwenden. □

Bemerkungen

i) Anstelle der Bedingung (3.39) beziehungsweise (3.40) ist auch eine der Bedingungen aus dem Lemma 3.34 - substituiert mit der entsprechenden Krümmung - hinreichend.

ii) Ströme mit ganzzahliger Vielfachheit $T \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ erfüllen automatisch die Bedingung $\theta \geq 1$ μ_T-f.ü. in dem ganzen $\mathbb{R}^{n+k}$.

iii) Statt stationärer Ströme kann man spezieller Area-*minimierende* Ströme mit ganzzahliger Vielfachheit in Untermannigfaltigkeiten betrachten. Dabei ist ein $T \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ Area-minimierend in $\mathcal{N}$, falls $\mathbf{M}_W(T) \leq \mathbf{M}_W(S)$ für alle $W \subset\subset \mathbb{R}^{n+k}$ und für alle $S \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mit $\partial S = \partial T$ in $\mathbb{R}^{n+k}$ gilt, sodass $\operatorname{spt}(S-T)$ eine kompakte Teilmenge von $W \cap \mathcal{N}$ ist. Dann ist keine L^p_{loc}-Bedingung an die Krümmung $\mathbf{H}_M$ respektive Λ_n für die Nichtexistenz von zusammenhängenden Strömen nötig, da in diesem Fall in jedem Punkt $x \in \operatorname{spt} T \setminus \operatorname{spt} \partial T$ ein in $\mathbb{R}^{n+k}$ Area-minimierender Kegel existiert, L. Simon [33, Thm. 35.1].

3.5.4 Nichtexistenz von stationären Strömen in Sphären

Wir beenden dieses dritte Kapitel mit konkreteren Beispielen von stationären Flächen in Sphären $\mathcal{S}^{n+k-1}(x_0, R) := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} : |x - x_0| = R\}$. Diese besitzen wie der $\mathbb{R}^{n+k}$ konstante Krümmung und sind daher ein wichtiges Objekt in der Forschung der Minimalflächen. Im

Gegensatz zu dem Euklidischen Raum existieren in Sphären auch geschlossene Minimalflächen, beispielsweise die Äquatorlinie. Wir wollen hier aber erneut Randwertprobleme in dem Kontext der geometrischen Maßtheorie untersuchen und einfache Bedingungen für die Nichtexistenz von zusammenhängenden Ströme angeben.

Betrachten wir eine $(n+k-1)$-dimensionale Sphäre mit Radius R, dann besitzt diese die Hauptkrümmungen $\kappa_1 = \ldots = \kappa_{n+k-1} = \frac{1}{R}$ und daher die n-mittlere Krümmung

$$\Lambda_n := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R} = \frac{n}{R}.$$

Diese ist als konstante Zahl insbesondere lokal L_p für jedes p integrierbar. Wir stellen uns jetzt weiter vor, dass der Nullpunkt in der Sphärenfläche liegt, damit ein in der Sphäre stationärer Strom durch den Ursprung verlaufen kann. Zusammen mit dem Satz 3.60 und Lemma 3.34 i) erhalten wir dann exemplarisch das folgende Resultat.

Satz 3.61 (Nichtexistenzsatz von stationären Strömen in Sphären) *Wir definieren die verschobene Sphäre* $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{n+k-1}(x_0, R) := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon |x - x_0| = R\}$ *mit* $0 \in \mathcal{S}$. *Weiterhin sei* $T = \tau(M, \theta, \xi) \in \mathcal{IR}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *mit* $M \subset \mathcal{S}$ *ein in* $\mathcal{S}$ *stationärer Strom mit kompaktem Träger* $\operatorname{spt} T$ *und*

$$q := \sup_{x \in \operatorname{spt} T} |x| \, \frac{n}{R} < 1.$$

Die Randwerte erfüllen $\operatorname{spt} \partial T \subset K := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon x_1^2 + \ldots + x_{n+k-1}^2 \leq (n-1)\,(1-q)\, x_{n+k}^2\}$, *sodass sowohl* $\operatorname{spt} \partial T \cap (K \cap \{x_{n+k} > 0\}) \neq \emptyset$ *als auch* $\operatorname{spt} \partial T \cap (K \cap \{x_{n+k} < 0\}) \neq \emptyset$ *gilt. Dann kann* $\operatorname{spt} T$ *nicht zusammenhängend sein.*

4 Einschließungs- und Nichtexistenzresultate für Krümmungsflüsse

In dem zweiten Teil der Arbeit betrachten wir Flächen ohne Ränder und untersuchen ihre zeitliche Entwicklung, falls sie einer Evolutionsgleichung unterworfen sind.

Das Paradebeispiel für eine solche zeitliche Verformung von Flächen ist der mittlere Krümmungsfluss, bei dem eine Fläche $\mathcal{M}$ in jedem Punkt x in die Richtung ihres mittleren Krümmungsvektors $\vec{H}(x)$ mit der Geschwindigkeit des Betrags $|\vec{H}(x)|$ fließt.
Betrachten wir beispielsweise eine Sphäre $\mathcal{S}^n(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+k}$, so wird diese mit einem sehr großen Radius $\rho \gg 1$ zu Beginn sehr viel langsamer schrumpfen, als eine Sphäre mit einem kleinen Radius, da der mittlere Krümmungsvektor nach innen zeigt und sein Betrag das Reziproke des Radius multipliziert mit der Dimension n ist.

Eine physikalische Anwendung findet sich in der Betrachtung des Erstarrungsprozesses von geschmolzenem Aluminium. Dabei kommt es an willkürlichen Punkten zu einer Kristallisation und es entsteht ein Aluminiumgitter. Diese einzelnen Regionen, auch *Körner* genannt, werden schließlich aneinander stoßen, jedoch besitzen sie eine unterschiedliche atomare Struktur. Betrachtet man ein Atom an dem Rand eines Korns, dann ist es nur einseitig in das Gitter eingebunden und befindet sich daher in einem leicht erhöhten Energiezustand. Somit besteht die Möglichkeit, dass ein Atom spontan das Korn wechselt und zu einer benachbarten Region überspringt. Durch experimentelle Beobachtung stellte sich heraus, dass die Wahrscheinlichkeit eines Wechsels größer ist, je mehr die Korngrenze konvex gekrümmt ist. Genauer sogar, dass sich die Korngrenzen mit einer Geschwindigkeit proportional zu ihrer mittleren Krümmung bewegen. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in dem Anhang in K. A. Brakke [5, App. A].

Die systematische Untersuchung des mittleren Krümmungsflusses hat mit der Arbeit von K. A. Brakke [5] in dem Jahr 1978 begonnen. Er wählte einen Zugang mithilfe der geometrischen Maßtheorie und konnte somit den Fluss sowohl über Unstetigkeiten in dem zeitlichen Verlauf als auch über Singularitäten der Fläche hinaus definieren. Beides sind typisch auftretende Phänomene, so können ganze Flächenteile plötzlich verschwinden oder es werden in der Fläche beispielsweise Spitzen oder Zacken gebildet.
G. Huisken [24] hat in dem Jahr 1984 den klassischen differentialgeometrischen Zugang zu dem mittleren Krümmungsfluss gewählt und viele Resultate wurden in den folgenden Jahren zuerst für diesen glatten Fluss bewiesen. Für glatte Einbettungen erhalten wir die folgende Definition.

Definition 4.1 (Mittlerer Krümmungsfluss) *Gegeben sei eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ sowie eine Familie von glatten Einbettungen $F_t = F(t,\cdot)\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^{n+k}$ und wir definieren die Flächen $\mathcal{M}_t := F_t(\mathfrak{M})$ für alle $t \in [0,T]$ mit einem fixierten $T \in (0,\infty)$. Dann heißt $(\mathcal{M}_t)_{t\in[0,T]}$ ein (eingebetteter) mittlerer Krümmungsfluss, falls für alle $t \in [0,T]$ und für alle $p \in \mathfrak{M}$ die Gleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,p) = \vec{H}(F(t,p))$$

erfüllt ist. Dabei bezeichnet $\vec{H}(x)$ den mittleren Krümmungsvektor in dem Punkt $x \in \mathcal{M}_t$, welchen wir in Kapitel 3.3.1 definiert haben.

Wir werden so oft wie möglich die explizite Einbettungsabbildung F unterdrücken und stattdessen einfach mit $x = F(p,t)$ die mittlere Krümmungsgleichung $\partial x/\partial t = \vec{H}(x)$ betrachten. Wir hatten ebenfalls in dem Kapitel 3.3.1 die Charakterisierung $\vec{H}(x) = \Delta_{\mathcal{M}} x$ angegeben, sodass wir die Gleichung $\partial x/\partial t = \Delta_{\mathcal{M}_t} x$ für den mittleren Krümmungsfluss erhalten. Dennoch unterscheidet sich dieser Fluss von der Wärmeleitungsgleichung, da sich der Laplace-Beltrami Operator in dem zeitlichen Verlauf mit der Fläche ändert und wir daher eine *nichtlineare* Gleichung vorliegen haben.

Wir sind wie in dem dritten Kapitel erneut an Einschließungsmengen interessiert. Dabei wollen wir diesmal beweisen, dass der gesamte Fluss $\mathcal{M}_t, t \in [0,T]$, in einer speziellen Menge liegt, falls nur die Anfangsfläche $\mathcal{M}_0$ in dieser enthalten ist. Dabei kann sich die Einschließungsmenge ebenfalls mit der Zeit t verändern, sodass wir stärkere Resultate erhalten. Wieder sind die Konvexität der Einschließungsmengen und die Glattheit sowie die Kodimension der Flächen des Flusses $\mathcal{M}_t$ wichtige Eigenschaften bei den bereits existierenden Ergebnissen und besonders bei den offenen Fragestellungen in dieser Richtung.

Das bekannteste und älteste Resultat dieser Art ist die Einschließung in eine Sphäre: Liegt die Startfläche $\mathcal{M}_0$ eines mittleren Krümmungsflusses in einer Sphäre, dann werden auch die Flächen $\mathcal{M}_t$ für jedes $t \in [0,T]$ von dieser eingeschlossen, wobei sich der Radius der Sphäre mit der Zeit verringert. Das Resultat gilt für Flächen mit beliebiger Dimension und Kodimension und diese müssen nicht glatt sein *und* nicht glatt bleiben, da das Ergebnis bereits von K. A. Brakke [5, Thm. 3.9] in dem Kontext der geometrischen Maßtheorie bewiesen wurde.

Das nach Wissen des Autors erste und einzige Einschließungsresultat in eine nichtkonvexe Menge stammt von K. Ecker [13, Prop. 3]. Er betrachtete jedoch nur n-dimensionale Flächen mit der Kodimension $k = 1$ und diese müssen die ganze Zeit über zwangsläufig glatt sein, da die verwendete klassische Theorie bei einer Singularität zusammenbricht. Insbesondere kann eine Aussage nur maximal bis zu dem Zeitpunkt getroffen werden, in dem der Körper zu einem Doppelkegel mit einer Singularität in der Spitze entartet.

Satz 4.2 (Einschließungssatz nach K. Ecker) *Sei $(\mathcal{M}_t)_{t\in[0,T]}$ ein n-dimensionaler mittlerer Krümmungsfluss in $\mathbb{R}^{n+1}$. Für ein $0 \le \beta \le n$ und ein $R > 0$ gelte*
$$\mathcal{M}_0 \subset \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 - (n-1-\beta)\, x_{n+1}^2 \le R\big\},$$
dann folgt die Einschließung
$$\mathcal{M}_t \subset \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 - (n-1-\beta)\, x_{n+1}^2 \le R - 2\beta t\big\},$$
für alle Zeiten $t \le T^*, T^* := \min\{T, R/(2\beta)\}$, solange die Fläche bis dahin glatt bleibt.

Wir schließen in dieser Arbeit erneut die vorhandenen Lücken und beweisen ein Einschließungsresultat für Flächen mit beliebiger Dimension *und* Kodimension unter dem mittleren Krümmungsfluss, die nicht notwendigerweise glatt sind und auch in dem zeitlichen Verlauf nicht glatt bleiben müssen, sowie für Flächen, die plötzlich „große“ Teilstücke verlieren dürfen. Wir erweitern das Hyperboloid von K. Ecker durch verschiedene Signaturen und können außerdem den Fluss über den Zeitpunkt hinaus untersuchen, in dem das Hyperboloid zu einem Doppelkegel wird. Unser Einschließungssatz bleibt auch gültig nach dem Zerfall in ein *unzusammenhängendes*, zweischaliges Hyperboloid und wir formulieren das Ergebnis als Nichtexistenzsatz für Flüsse mit zusammenhängenden Flächen.

In dem zweiten Teil dieses vierten Kapitels untersuchen wir den mittleren Krümmungsfluss in einem zusätzlich angelegten Schwerefeld oder genauer ausgedrückt, wir möchten den Fluss zu dem Funktional $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} x^\alpha_{n+1}\, \mathrm{d}\mu, \alpha > 0$, aus dem Kapitel 3.4 betrachten, den wir daher kurz *α-Krümmungsfluss* nennen.

In dem Jahr 1994 betrachtete A. Stone [37] den entsprechenden Fluss als nichtparametrisches Randwertproblem. Ist eine Anfangsfläche $u_0 \colon \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}_+$ hinreichend glatt und liegt in der positiven x_{n+1}-Richtung hoch genug, wobei die hinreichende Höhe in Abhängigkeit der Größe des Definitionsgebietes Ω, der mittleren Krümmung von $\partial\Omega$ und der Dimension n gegeben ist, dann existiert eine Lösung u_t des α-Krümmungsflusses, welche für $t \to \infty$ gegen die Lösung des stationären Problems konvergiert. Damit ist eine weitere Lösungsmethode bewiesen worden im Gegensatz zu U. Dierkes und G. Huisken [9], welche die Existenz einer Lösung für das stationäre Randwertproblem mit einer Fixpunktmethode gezeigt haben.
Für den parametrischen Kontext existiert wohl nur die Arbeit von S. Winklmann [39] aus dem Jahr 2006, in der erneut die Glattheit der Flächen gefordert wird. Wir geben seine Definition des Flusses mit fixierten Randwerten an.

Definition 4.3 (α-Krümmungsfluss) *Gegeben sei eine n-dimensionale, orientierte, zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ mit nichtleerem Rand $\partial\mathfrak{M}$ und ihrer Gaußabbildung $\nu \colon \mathfrak{M} \to \mathcal{S}^n(1)$. Weiter sei $F \colon [0,T) \times \bar{\mathfrak{M}} \to \mathbb{R}^{n+1}_+, F_t := F(t,\cdot)$, eine glatte Familie von eingebetteten Hyperflächen, deren Bild wir mit $\mathcal{M}_t := F_t(\mathfrak{M})$ bezeichnen. Ist F eine Lösung der Gleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,p) = \vec{H}(F(t,p)) - \alpha\, F^{-1}_{n+1}(t,p)\, \nu_{n+1}(p)\, \nu(p) \quad \text{in } [0,T) \times \bar{\mathfrak{M}}$$

unter der Randbedingung $F_t = F_0$ auf $\partial\mathfrak{M}$, dann heißt $(\mathcal{M}_t)_{t\in[0,T)}$ ein α-Krümmungsfluss.

Für diesen Fluss beweist er zwei Einschließungsresultate unter geeigneten Bedingungen an die äußeren Daten und die Startfläche $\mathcal{M}_0$. Der gesamte Fluss lässt sich in einen Ellipsoiden einschließen und für den nichtkonvexen Fall konnte er das folgende Resultat beweisen.

Satz 4.4 (Einschließungssatz nach S. Winklmann) *Sei $(\mathcal{M}_t)_{t\in[0,T)}$ ein α-Krümmungsfluss in $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Für ein $c > 0$, ein $v \geq 0$ und ein $R > 0$ gelte*

$$\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{H}(R) := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 - \frac{n-1}{c^2}(x_{n+1} - v)^2 \leq R \right\}$$

sowie $\partial\mathcal{M}_0 := F_0(\partial\mathfrak{M}) \subset \mathcal{H}(0) \cap \{x \colon x_{n+1} \geq v\}$. Weiterhin sei die Bedingung $c^2 - (1+\alpha) + \alpha\, v\, (\sup_{\bar{\mathcal{M}}_t} x_{n+1})^{-1} - c^2\, (n-1)^{-1}\, C \geq 0$ erfüllt, dann gilt $\bar{\mathcal{M}}_t \subset \mathcal{H}(R - 2Ct)$ für alle Zeiten $t < T^*, T^* := \min\{T, R/(2C)\}$.

Wir beweisen erstmalig eine Beschreibung dieses glatten α-Krümmungsflusses $\mathcal{M}_t$ für innere Punkte in Integralform und formulieren daraus eine Definition des Flusses, welche auch für eine Familie von Varifaltigkeiten $V_t = v(M_t, \theta_t) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ sinnvoll ist.
Dann werden wir die grundlegenden Eigenschaften über die Beschränktheit des Flusses und Stetigkeitsaussagen beweisen. Anschließend zeigen wir neben den Einschließungen in konvexe Mengen und Vergleichssätzen mit sinkenden Ebenen auch eine Einschließung in eine nichtkonvexe Menge. Letztere eignet sich für einen einfachen Beweis für die Existenz von Singularitäten und den Zerfall der Fläche in mehrere Komponenten. Zum Abschluss geben wir ein solches Beispiel an.

4.1 Der Brakke-Fluss

Wir definieren in diesem Kapitel den mittleren Krümmungsfluss in der geometrischen Maßtheorie, den wir im Folgenden Brakke-Fluss nennen. Wir geben grundlegende Eigenschaften an, wodurch wir schließlich ein Resultat über orts- *und* zeitabhängige Testfunktionen beweisen können, welches für den Einschließungssatz wichtig ist. Wir bereiten hier Ergebnisse aus K. A. Brakke [5] und A. Lahiri [27] auf, sodass sie in den Gesamtkontext der Arbeit passen. Ersterer erklärt einen Fluss für allgemeine Varifaltigkeiten $V \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ und letzterer für rektifizierbare Varifaltigkeiten mit ganzzahliger Vielfachheit $V \in \mathcal{IV}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, wir hingegen betrachten beliebige rektifizierbare Varifaltigkeiten $V \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ und folgen damit beispielsweise dem Weg von T. Ilmanen [25].
Bevor wir mit der Definition des Brakke-Flusses beginnen, definieren wir die obere Ableitung einer eindimensionalen Funktion und betrachten zwei wichtige Hilfsergebnisse.

Definition 4.5 (Obere Ableitung) *Für eine Funktion $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$, und einen Punkt $t_0 \in (a,b)$ ist die obere Ableitung $\overline{D}_t$ in dem Punkt t_0 gegeben durch*

$$\overline{D}_t f(t_0) := \limsup_{h\to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} \in [-\infty, \infty].$$

Die obere Ableitung existiert somit immer.

Lemma 4.6 *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}, t \mapsto f(t)$, eine $\mathcal{L}$-messbare Funktion.*

i) *Falls $\overline{D}_t f(t) \leq 0$ für alle $t \in (a,b)$ gilt, dann ist f schwach monoton fallend.*

ii) *Falls $\overline{D}_t f(t) \leq \Gamma$ für eine Konstante $\Gamma \in \mathbb{R}$ und jedes $t \in (a,b)$ ist, dann gilt für alle $a < t_1 < t_2 < b$ die Relation*

$$f(t_2) - f(t_1) \leq \int_{t_1}^{t_2} \overline{D}_t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Beweis: Ein Beweis zu der Aussage i) findet sich beispielsweise in M. Mateljević, M. Svetlik, M. Albijanić und N. Savić [28, §4].
Für die zweite Behauptung nehmen wir zunächst an, dass für die Konstante $\Gamma \leq 0$ gilt, sodass die Funktion f nach i) schwach monoton fällt. Definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionenfolge $g_n(t) := n(f(t+n^{-1}) - f(t))$, dann sind die Folgenglieder nicht positiv. Wir verwenden das Lemma von Fatou und bleiben geringfügig von t_2 entfernt, damit die Funktionen g_n sinnvoll erklärt sind. Somit erhalten wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2-\varepsilon} g_n(s)\,\mathrm{d}s \leq \int_{t_1}^{t_2-\varepsilon} \limsup_{n\to\infty} g_n(s)\,\mathrm{d}s$$

für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$. Durch die erneute Ausnutzung der Monotonie folgt für jedes $n > \varepsilon^{-1}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2-\varepsilon} g_n(s)\,\mathrm{d}s = n\int_{t_1}^{t_2-\varepsilon} f(s+n^{-1})\,\mathrm{d}s - n\int_{t_1}^{t_2-\varepsilon} f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= n\int_{t_1+n^{-1}}^{t_2-\varepsilon+n^{-1}} f(s)\,\mathrm{d}s - n\int_{t_1}^{t_2-\varepsilon} f(s)\,\mathrm{d}s \geq f(t_2 \underbrace{-\varepsilon+n^{-1}}_{<0}) - f(t_1) \geq f(t_2) - f(t_1).
\end{aligned}$$

Es gilt $\limsup_{n\to\infty} g_n(s) \leq \overline{D}_t f(s)$ und mit allen Abschätzungen zusammen ist für jedes hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ daher

$$f(t_2) - f(t_1) \leq \int_{t_1}^{t_2-\varepsilon} \overline{D}_t f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Wir möchten jetzt den Grenzwert $\varepsilon \searrow 0$ untersuchen und betrachten daher die Funktionen $h_n(t) := \overline{D}_t f(t) \chi_{[t_1,t_2-n^{-1}]}$, welche punktweise und monoton gegen $\overline{D}_t f$ auf dem Intervall (t_1, t_2) konvergieren. Der Satz von Beppo Levi liefert die Konvergenz des Integrals für $\varepsilon \searrow 0$ und somit die Behauptung.
Falls $\Gamma > 0$ ist, dann betrachten wir die Funktion $\tilde{f}(t) := f(t) - \Gamma t$, welche eine nichtpositive obere Ableitung besitzt. Die Anwendung des bereits Bewiesenen auf die Funktion $\tilde{f}$ liefert die Ungleichung

$$f(t_2) - \Gamma t_2 - f(t_1) + \Gamma t_1 \leq \int_{t_1}^{t_2} \overline{D}_t f(s) - \Gamma\,\mathrm{d}s$$

und damit direkt die Aussage des Lemmas. □

Wir erinnern noch einmal an die Definition aus dem Kapitel 3.3.2 über den mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ in der geometrischen Maßtheorie.

Definition 4.7 (Varifaltigkeit mit mittlerer Krümmung) *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen und $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(U)$ eine rektifizierbare Varifaltigkeit in U. Diese besitzt den mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H} \in L^1_{\mathrm{loc}}(M \cap U, \mathbb{R}^{n+k}; \mu_V)$ in U, falls die Variationsgleichung*

$$\int_U \operatorname{div}_M X\,\mathrm{d}\mu_V = -\int_U \langle \mathbf{H}, X\rangle\,\mathrm{d}\mu_V \tag{4.1}$$

für alle Vektorfelder $X \in C^1_c(U, \mathbb{R}^{n+k})$ erfüllt ist.

In dem glatten Fall ist es wohlbekannt, dass der (stetige) mittlere Krümmungsvektor $\vec{H}$ senkrecht auf dem Tangentialraum einer C^2-Untermannigfaltigkeit $\mathcal{N}$ steht, also $\vec{H}(x) \in \mathcal{T}_x^\perp \mathcal{N}$ erfüllt, L. Simon [33, 7.4]. Der nächste Satz zeigt, dass dies auch μ_V-f.ü. für den mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ von Varifaltigkeiten $V = v(M,\theta) \in \mathcal{IV}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mit *ganzzahliger* Vielfachheit gilt. Das ist ein tiefliegendes Resultat von K. A. Brakke [5, Thm. 5.8].

Satz 4.8 *Sei $V = v(M,\theta) \in \mathcal{IV}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ eine Varifaltigkeit mit ganzzahliger Vielfachheit in $\mathbb{R}^{n+k}$ und mit mittlerem Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ gemäß der Definition 4.7, dann ist $\mathbf{H}(x) \in \mathcal{T}_x^\perp M$ für μ_V-f.a. Punkte $x \in \mathbb{R}^{n+k}$.*

Definition 4.9 (Brakke-Kern) *Für eine Varifaltigkeit $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ und eine Testfunktion $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ definieren wir den Brakke-Kern $\mathcal{B}(V,\phi)$ wie folgt:*
Falls V einen mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ wie in der Definition 4.7 besitzt und dieser L^2-integrierbar bezüglich des Radonmaßes μ_V ist, dann bezeichnen wir diese Situation als nichtsingulär und definieren

$$\mathcal{B}(V,\phi) := \int_{\mathbb{R}^{n+k}} -\phi|\mathbf{H}|^2 + \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M}(D\phi), \mathbf{H}\rangle\,\mathrm{d}\mu_V,$$

andernfalls setzen wir $\mathcal{B}(V,\phi) := -\infty$ und bezeichnen diesen als den singulären Fall.

Bemerkungen

i) Nach der Proposition 3.30 in dem Kapitel 3.3 über die Ströme mit mittlerer Krümmung gilt $\mathcal{B}(V,\phi) = -\infty$, außer das totale Variationsmaß $\|\delta V\|$ ist lokal endlich, das heißt ein Radonmaß, und $\|\delta V\|_{\text{sing}} = 0$, also das Maß $\|\delta V\|$ ist absolutstetig bezüglich μ_V sowie der dann existierende mittlere Krümmungsvektor $\mathbf{H} = -D_{\mu_V}\|\delta V\|\sigma$ ist in $L^2(\mu_V)$.

ii) Der erste Summand des Brakke-Kerns lässt sich mit Hilfe der Variationsformel (4.1) und der Definition 3.4 der ersten Variation δV auch wie folgt formulieren

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} -\phi|\mathbf{H}|^2 \,\mathrm{d}\mu_V = -\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\phi\rangle \,\mathrm{d}\mu_V = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \operatorname{div}_M(\mathbf{H}\phi)\,\mathrm{d}\mu_V = \delta V(\mathbf{H}\phi).$$

iii) Für eine Varifaltigkeit $V = v(M,\theta) \in \mathcal{IV}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ mit *ganzzahliger* Vielfachheit können wir nach dem Satz 4.8 für den Brakke-Kern in dem nichtsingulären Fall auch

$$\mathcal{B}(V,\phi) = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} -\phi|\mathbf{H}|^2 + \langle D\phi, \mathbf{H}\rangle \,\mathrm{d}\mu_V$$

schreiben.

Wir sind nun für den Brakke-Fluss ausgerüstet. Um einen Fluss einer Familie $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ von Varifaltigkeiten zu definieren, müssen wir eine Testfunktion integrieren und anschließend nach t differenzieren. Dies wird aber im Allgemeinen nicht möglich sein, da wir den Flächen erlauben wollen, dass Flächenteile mit positivem $\mathcal{H}^n$-Maß zu einem Zeitpunkt augenblicklich komplett verschwinden. Dieses Phänomen bezeichnen wir als *plötzlichen Masseverlust*. Das ist bei dem klassischen mittleren Krümmungsfluss nicht möglich, doch K. A. Brakke [5, App. C5] erläutert ein konkretes Beispiel, in dem der plötzliche Masseverlust auftritt. Somit ist der Ausdruck $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi \,\mathrm{d}\mu_{V_t}$ für eine glatte Testfunktion *nicht* stetig in t und daher erst recht nicht differenzierbar. Wir verwenden aus diesem Grund die obere Ableitung, welche stets existiert.

Das zu der Familie $V_t = v(M_t,\theta_t) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ assoziierte Radonmaß $\mu_{V_t} = \mathcal{H}^n \llcorner \theta_t$ werden wir in der Regel durch μ_t abkürzend darstellen, falls Missverständnisse ausgeschlossen sind. Außerdem schreiben wir häufig mit einer Testfunktion $\phi \in C_c^0(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ für das Integral $\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi \,\mathrm{d}\mu_t =: \mu_t(\phi)$.

Definition 4.10 (Brakke-Fluss) *Eine Familie von Varifaltigkeiten $V_t = v(M_t,\theta_t) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$, $t \in [0,T]$ mit einem Endzeitpunkt $T \in (0,\infty)$, ist ein Brakke-Fluss in $\mathbb{R}^{n+k}$, falls $\overline{D}_t\mu_t(\phi) \le \mathcal{B}(V_t,\phi)$ für jede Testfunktion $\phi \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+k},\mathbb{R}^+)$ und alle Zeiten $t \in [0,T]$ erfüllt ist.*

Beispiele

i) Sei $V_0 = v(\mathcal{S}^n(r),1) = v(\partial B_r^{n+1}(0),1) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ eine n-dimensionale Varifaltigkeit in dem $\mathbb{R}^{n+1}$, dann ist $V_t = v(\mathcal{S}^n(\sqrt{r^2-2nt}),1)$ für $t \in [0, r^2/(2n)]$ ein Brakke-Fluss. Wir können jeden Punkt $x \in \operatorname{spt} V_t$ darstellen durch $x = r(t)\nu_x = \sqrt{r^2-2nt}\,\nu_x$, wobei ν_x die nach außen zeigende Einheitsnormale der glatten Fläche $\mathcal{S}^n(\sqrt{r^2-2nt})$ in dem Punkt x ist. Dann erhalten wir

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} r(t)\,\nu_x = \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{r^2-2nt}\,\nu_x = \frac{-n}{\sqrt{r^2-2nt}}\,\nu_x = \mathbf{H},$$

da $n(r^2-2nt)^{-1/2}$ die skalare mittlere Krümmung einer n-dimensionalen Sphäre mit Radius $\sqrt{r^2-2nt}$ ist und wir so den nach innen zeigenden mittleren Krümmungsvektor $\vec{H} = \mathbf{H}$ erhalten. Die Definition des Brakke-Flusses $\overline{D}_t\mu_t(\phi) = \mathcal{B}(V_t,\phi)$ ist in diesem Fall mit Gleichheit erfüllt, indem die Berechnungen des späteren Kapitels 4.1.3 berücksichtigt werden.

ii) Sei $V_0 = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ eine *beliebige* Varifaltigkeit. Dann ist $V_t \equiv 0, t \in (0,T]$, ein (trivialer) Brakke-Fluss.

Ein Brakke-Fluss ist somit *nicht* eindeutig, denn für die Startfläche $V_0 = v(\mathcal{S}^n(r),1) \in \mathcal{IV}_n(\mathbb{R}^{n+1})$ liefern die beiden Beispiele zwei unterschiedliche zeitliche Verläufe.

Wir zeigen zunächst, dass der Brakke-Kern $\mathcal{B}(V,\phi)$ durch eine Konstante, die nur von der Testfunktion abhängt, beschränkt bleibt und anschließend, dass auch ein Brakke-Fluss lokal endlich ist, also der Wert $\mu_t(K) := \int_K \mathrm{d}\mu_t$ für ein kompakte Menge K beschränkt ist. Vorab wird ein Hilfsresultat aus T. Ilmanen [25, Lem. 6.6] benötigt und wir schreiben in dem Folgenden $\{\phi > 0\}$ für die Menge $\{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon \phi(x) > 0\}$.

Lemma 4.11 *Für eine Funktion $\phi \in C^2_c(\mathbb{R}^{n+k},\mathbb{R}^+)$ ist auf der Menge $\{\phi > 0\}$ die Abschätzung*

$$\frac{|D\phi|^2}{\phi} \le 2 \sup_{\{\phi>0\}} |D^2\phi| < \infty$$

erfüllt.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und definiere $f^\varepsilon(x) := |D\phi(x)|^2/(\phi(x)+\varepsilon)$. Dann ist f^ε eine C^1-Funktion mit kompaktem Träger und besitzt daher ein globales Maximum in einem Punkt x_0. Falls $\phi \not\equiv 0$, dann liegt der Punkt x_0 in der offenen Menge $\{\phi > 0\}$. In diesem Maximum verschwindet der Gradient der Funktion f^ε und wir erhalten die Gleichung

$$0 = Df^\varepsilon(x_0) = \frac{2\,D^2\phi(x_0)\,D\phi(x_0)}{\phi(x_0)+\varepsilon} - \frac{|D\phi(x_0)|^2\,D\phi(x_0)}{(\phi(x_0)+\varepsilon)^2},$$

welche wir wie folgt umformen

$$|2\,D^2\phi(x_0)\,D\phi(x_0)| = \frac{|D\phi(x_0)|^2\,|D\phi(x_0)|}{\phi(x_0)+\varepsilon}.$$

Da $D\phi(x_0) \neq 0$ in dem Maximum x_0 von f^ε ist und natürlich $f^\varepsilon(x) \le f^\varepsilon(x_0)$ für jeden Punkt $x \in \{\phi > 0\}$ gilt, folgt zunächst

$$\frac{|D\phi(x)|^2}{\phi(x)+\varepsilon} = f^\varepsilon(x) \le f^\varepsilon(x_0) = \frac{|D\phi(x_0)|^2}{\phi(x_0)+\varepsilon} = 2\left|D^2\phi(x_0)\frac{D\phi(x_0)}{|D\phi(x_0)|}\right| \le 2 \sup_{\{\phi>0\}} |D^2\phi(x)|$$

und mit $\varepsilon \to 0$ schließlich die gewünschte Ungleichung auf $\{\phi > 0\}$. □

Satz 4.12 (Beschränktheit des Brakke-Kerns) *Gegeben seien $V \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ und $\phi \in C^2_c(\mathbb{R}^{n+k},\mathbb{R}^+)$ eine beliebige Funktion, dann existiert eine Konstante $C = C(\phi) \in \mathbb{R}$, sodass $\mathcal{B}(V,\phi) \le C$ gilt.*

Beweis: In dem singulären Fall $\mathcal{B}(V,\phi) = -\infty$ ist nichts zu zeigen. Wir untersuchen den nichtsingulären Fall. Da ϕ nichtnegativ ist, verschwindet auch der Gradient $D\phi$ in den Punkten, in denen die Funktion Null wird. Somit reicht es aus über die Menge $\{\phi > 0\}$ zu integrieren und wir erhalten mit einer quadratischen Ergänzung und der Kurzschreibweise $(\cdot)^\perp := \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M}(\cdot)$ für die orthogonale Projektion die Abschätzung

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(V,\phi) &= \int_{\mathbb{R}^{n+k}} -\phi|\mathbf{H}|^2 + \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M}(D\phi), \mathbf{H}\rangle \,\mathrm{d}\mu_V = \int_{\{\phi>0\}} -\phi|\mathbf{H}|^2 + \langle (D\phi)^\perp, \mathbf{H}\rangle \,\mathrm{d}\mu_V \\ &= \int_{\{\phi>0\}} -\phi\Big|\mathbf{H} - \frac{1}{2}\frac{(D\phi)^\perp}{\phi}\Big|^2 + \frac{1}{4}\frac{|(D\phi)^\perp|^2}{\phi}\,\mathrm{d}\mu_V \le \int_{\{\phi>0\}} \frac{1}{4}\frac{|(D\phi)^\perp|^2}{\phi}\,\mathrm{d}\mu_V \\ &\overset{(1.3)}{\le} \int_{\{\phi>0\}} \frac{1}{4}\frac{|D\phi|^2}{\phi}\,\mathrm{d}\mu_V \overset{\text{Lem. 4.11}}{\le} \frac{1}{2}\sup_{\{\phi>0\}} |D^2\phi|\;\mu_V(\operatorname{spt}\phi) =: C(\phi) < \infty.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist aufgrund des Radonmaßes μ_V und der Regularität $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ beschränkt. □

Satz 4.13 (Beschränktheit des Brakke-Flusses) *Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein Brakke-Fluss in $\mathbb{R}^{n+k}$ und $K \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine kompakte Menge. Dann existiert eine Konstante $\Gamma \in (1,\infty)$, sodass $\mu_t(K) \le \Gamma$ für alle Zeiten $t \in [0,T]$ gilt. Die Zahl Γ kann von dem Fluss $(V_t)_{t\in[0,T]}$ sowie der Menge K abhängen.*

Beweis: Wir fixieren ein $\delta \in (0,1)$ und erweitern den Fluss auf das Intervall $[0, T+\delta]$ durch $V_t \equiv 0$ für $t \in (T, T+\delta]$. Dann ist der erweiterte Fluss $(V_t)_{t\in[0,T+\delta]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ weiterhin ein Brakke-Fluss, vergleiche dazu das einführende Beispiel ii).
Da K kompakt ist, können wir als zulässige Testfunktion $\phi(x) := \Psi_K(x) \in C_c^2(\mathbb{R}^{n+k}, [0,1])$ wählen, welche somit $\phi(x) = 1$ für alle $x \in K$ erfüllt.
Sei nun $t \in [0,T]$ ein beliebiger Zeitpunkt. Nach der Definition des Limes superior finden wir ein $h_t \in (0,\delta)$, sodass für alle Schrittweiten $h \in (0, h_t]$ die Ungleichung

$$h^{-1}\big(\mu_{t+h}(\phi) - \mu_t(\phi)\big) \le \overline{D}_t\mu_t(\phi) + 1$$

erfüllt ist. Es folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\mu_{t+h}(\phi) &\le \mu_t(\phi) + h\left(\overline{D}_t\mu_t(\phi) + 1\right) \overset{\text{Def. 4.10}}{\le} \mu_t(\phi) + h\left(\mathcal{B}(V_t,\phi) + 1\right) \\ &\overset{\text{Satz 4.12}}{\le} \mu_t(\phi) + h\left(\frac{1}{2}\sup_{\{\phi>0\}} |D^2\phi|\,\mu_t(\operatorname{spt}\phi) + 1\right) = \mu_t(\phi) + h\,\Gamma_t \end{aligned} \tag{4.2}$$

für alle $h \in (0, h_t]$ mit einer Konstanten $\Gamma_t := \frac{1}{2}\sup_{\{\phi>0\}} |D^2\phi|\,\mu_t(\operatorname{spt}\phi) + 1 \in (1,\infty)$, die von der Funktion ϕ und damit von der Menge K abhängt sowie von dem Radonmaß μ_t, welches zu der Varifaltigkeit V_t assoziiert ist.

Es gilt $[0 + h_0, T] \subset \bigcup_{t\in[0,T]}(t, t+h_t)$ und da das Intervall $[h_0, T]$ kompakt ist, existieren nach dem Satz von Heine-Borel endlich viele Zeiten $t_i \in (0,T], i = 1,\dots,N$ mit $t_i < t_{i+1}$, sodass $[h_0, T] \subset \bigcup_{i=1}^N (t_i, t_i + h_{t_i})$. Definieren wir noch als Anfangszeit $t_0 := 0$, dann erhalten wir die Inklusion

$$(0,T] \subset \bigcup_{i=0}^N (t_i, t_i + h_{t_i}).$$

Jeder Zeitpunkt $t \in (0, T]$ ist somit in mindestens einem der Intervalle $(t_i, t_i + h_{t_i})$ mit $i = 0, \dots, N$ enthalten.

Wir betrachten jetzt eine beliebig fixierte Zeit $t^* \in (0, 0 + h_0)$, dann folgt

$$\mu_{t^*}(\phi) \leq \mu_0(\phi) + h\,\Gamma_0 \leq \mu_0(\phi) + \Gamma_0.$$

Dabei erhalten wir die erste Ungleichung aus der obigen Abschätzung (4.2), welche für alle $h \in (0, h_0]$ gilt, und die zweite folgt einfach aus $h \leq h_0 < \delta < 1$.

Betrachten wir einen Zeitpunkt $t^* \in (t_1, t_1 + h_{t_1})$, dann ist analog $\mu_{t^*}(\phi) \leq \mu_{t_1}(\phi) + \Gamma_{t_1}$ und da $t_1 \in (0, h_0)$, kommen wir zusammen mit der obigen Ungleichung zu dem Ausdruck

$$\mu_{t^*}(\phi) \leq \mu_0(\phi) + \Gamma_0 + \Gamma_{t_1}.$$

Dieses Verfahren lässt sich iterativ fortsetzen, sodass wir für ein beliebiges $t \in (t_i, t_i + h_{t_i}), i = 0, \dots, N$ die Abschätzung

$$\mu_t(\phi) \leq \mu_0(\phi) + \sum_{j=0}^{i} \Gamma_{t_j}$$

erhalten. Aufgrund der Überdeckung des Intervalls $(0, T]$ folgt damit für jedes $t \in (0, T]$ schließlich

$$\mu_t(\phi) \leq \mu_0(\phi) + \sum_{j=0}^{N} \Gamma_{t_j}$$

und da ϕ kompakten Träger in $\mathbb{R}^{n+k}$ besitzt, ist der Ausdruck auf der rechten Seite endlich. Wir schätzen die linke Seite noch wie folgt nach unten ab

$$\mu_t(\phi) = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi \,\mathrm{d}\mu_t \geq \int_K \phi \,\mathrm{d}\mu_t = \int_K \mathrm{d}\mu_t = \mu_t(K).$$

Insgesamt erhalten wir somit für jede Zeit $t \in [0, T]$ die endliche Schranke

$$\mu_t(K) \leq \mu_0(\phi) + \sum_{j=0}^{N} \Gamma_{t_j} =: \Gamma < \infty.$$

□

Satz 4.14 (Stetigkeitseigenschaften) *Sei* $(V_t)_{t \in [0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *ein Brakke-Fluss in* $\mathbb{R}^{n+k}$ *und* $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$*, dann gelten die folgenden Aussagen*

i) $\overline{D}_t \mu_t(\phi) = \limsup_{h \to 0} h^{-1}(\mu_{t+h}(\phi) - \mu_t(\phi)) \leq L < \infty$ *für alle* $t \in [0, T]$*, wobei die Konstante* $L \in \mathbb{R}$ *von* ϕ *und dem ganzen Fluss* (V_t) *abhängen kann, aber nicht explizit von dem Zeitpunkt* t*,*

ii) $\lim_{\delta \searrow 0} \mu_{t+\delta}(\phi) \leq \mu_t(\phi) \leq \lim_{\delta \searrow 0} \mu_{t-\delta}(\phi)$ *für alle* $t \in (0, T)$*,*

iii) *für* $\mathcal{L}$*-f.a. Zeiten* $t \in [0, T]$ *ist* $\lim_{h \to 0} \mu_{t+h}(\vartheta) = \mu_t(\vartheta)$ *für jede Testfunktion* $\vartheta \in C_c^0(\mathbb{R}^{n+k})$ *ohne Vorzeichenbeschränkung.*

Beweis: Da die Testfunktion ϕ in der Klasse $C_c^2(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ ist, existiert eine Konstante $L_1 \in (0, \infty)$, sodass $\sup_{\mathbb{R}^{n+k}} |D^2\phi| \le L_1$ gilt. Definieren wir die kompakte Menge $K := \operatorname{spt}\phi$, dann folgt nach dem Satz 4.13 die Existenz einer weiteren Konstante $L_2 \in (1, \infty)$ mit $\mu_t(K) \le L_2$ für jede Zeit $t \in [0, T]$. Wir erhalten also durch die gleiche Vorgehensweise wie in dem Beweis des Satzes 4.12 die Abschätzung

$$\overline{D}_t\mu_t(\phi) \le \mathcal{B}(V_t, \phi) \le \int_{\mathbb{R}^{n+k}} |D^2\phi| \,\mathrm{d}\mu_t = \int_K |D^2\phi| \,\mathrm{d}\mu_t \le \sup_K |D^2\phi| \, \mu_t(K) \le L_1L_2 =: L$$

für alle $t \in [0, T]$, was der ersten Behauptung entspricht.

Wir betrachten die Funktion $g\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $t \mapsto g(t) := \mu_t(\phi) - Lt$. Dann gilt $\overline{D}_tg(t) = \overline{D}_t\mu_t(\phi) - L \le L - L = 0$ und folglich ist g nach Lemma 4.6 i) schwach monoton fallend. Für schwach monotone Funktionen existieren in jedem Punkt die einseitigen Grenzwerte, vergleiche S. Hildebrandt [23, §2.3, Satz 5], und die zweite Behauptung folgt somit aus $\lim_{\delta\searrow 0} g(t + \delta) \le g(t) \le \lim_{\delta\searrow 0} g(t - \delta)$, da der lineare Teil von g stetig ist.

Für die dritte Aussage betrachten wir erneut die Funktion g. Die Anzahl der Unstetigkeitsstellen bei monotonen Funktionen ist abzählbar, vergleiche S. Hildebrandt [23, §2.4, Satz 2]. Demnach ist auch für jedes $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ die Abbildung $t \mapsto \mu_t(\phi)$ für $\mathcal{L}$-f.a. Zeiten $t \in [0, T]$ stetig.
Wählen wir nun eine abzählbare Menge $A \subset C_c^2(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$, sodass A dicht in $C_c^0(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ ist, dann wissen wir, dass für $\mathcal{L}$-f.a. $t \in [0, T]$ der Grenzwert $\lim_{h\to 0} \mu_{t+h}(\phi) = \mu_t(\phi)$ für jede Funktion $\phi \in A$ existiert. Ein beliebiges $\vartheta \in C_c^0(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R})$ zerlegen wir in den positiven und negativen Anteil $\vartheta = \vartheta_+ - \vartheta_-$ mit den beiden nichtnegativen Funktionen $\vartheta_+(x) := \max\{\vartheta(x), 0\}$ sowie $\vartheta_- := \max\{0, -\vartheta(x)\}$ und die Approximation von ϑ_+, ϑ_- durch Funktionen aus A liefert die Behauptung. $\square$

Zum Abschluss in dieses einführende Kapitel in den Brakke-Fluss betrachten wir Testfunktionen $\phi(t, x)$, die zusätzlich von der Zeit t abhängen.

Satz 4.15 (Zeitabhängige Testfunktionen) *Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein Brakke-Fluss in $\mathbb{R}^{n+k}$ und $\phi \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ mit $\phi_t := \phi(t, \cdot) \in C_c^1(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ für alle $t \in [0, T]$. Dann gilt für $\mathcal{L}$-f.a. Zeiten $s \in (0, T)$ die Abschätzung*

$$\overline{D}_t\big(\mu_t(\phi_t(x))\big)\big|_{t=s} \le \mathcal{B}(V_s, \phi_s(x)) + \mu_s\Big(\frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x)\big|_{t=s}\Big).$$

Beweis: Wir berechnen die obere Ableitung

$$\begin{aligned}
\overline{D}_t\big(\mu_t(\phi_t)\big)\big|_{t=s} &= \limsup_{h\to 0} h^{-1}\big(\mu_{s+h}(\phi_{s+h}) - \mu_s(\phi_s)\big) \\
&= \limsup_{h\to 0} \Big[h^{-1}\big(\mu_{s+h}(\phi_{s+h}) - \mu_{s+h}(\phi_s) + \mu_{s+h}(\phi_s) - \mu_s(\phi_s)\big) \\
&\qquad + \mu_{s+h}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s, \cdot)\Big) - \mu_{s+h}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s, \cdot)\Big)\Big] \\
&\le \limsup_{h\to 0} h^{-1}\big(\mu_{s+h}(\phi_s) - \mu_s(\phi_s)\big) \\
&\qquad + \limsup_{h\to 0} h^{-1} \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \Big(\phi_{s+h}(x) - \phi_s(x) - h\frac{\partial\phi}{\partial t}(s, x)\Big) \,\mathrm{d}\mu_{s+h}(x) \\
&\qquad + \limsup_{h\to 0} \mu_{s+h}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s, \cdot)\Big) \\
&=: (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}).
\end{aligned}$$

Für den ersten Summanden gilt nach der Definition 4.5 der oberen Ableitung und der Definition 4.10 des Brakke-Flusses

$$(\mathrm{I}) = \limsup_{h\to 0} h^{-1}[\mu_{s+h}(\phi_s) - \mu_s(\phi_s)] = \overline{D}_t\mu_t(\phi_s)\big|_{t=s} \leq \mathcal{B}(V_s, \phi_s).$$

Für den zweiten Summanden beachten wir, dass $\phi_t(x)$ kompakten Träger in $\mathbb{R}^{n+k}$ hat. Definieren wir die kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^{n+k}$ durch $K := \operatorname{spt}\phi_t(x)$, dann gilt auch $\operatorname{spt}\frac{\partial\phi}{\partial t} \subset K$ und wir verwenden außerdem die Abschätzung $\sup_{t\in[0,T]}\mu_t(K) \leq \Gamma$ für eine Schranke $\Gamma \in (1,\infty)$ aus dem Satz 4.13. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \Big(\phi_{s+h}(x) - \phi_s(x) - h\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,x)\Big)\,\mathrm{d}\mu_{s+h}(x)\\
&= \int_K \Big(\phi(s+h,x) - \phi(s,x) - h\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,x)\Big)\,\mathrm{d}\mu_{s+h}(x)\\
&= \int_K\int_0^h \Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s+r,x) - \frac{\partial\phi}{\partial t}(s,x)\Big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\mu_{s+h}(x)\\
&\leq \sup_{r\in(-|h|,|h|)}\int_K \Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s+r,x) - \frac{\partial\phi}{\partial t}(s,x)\Big)\,\mathrm{d}\mu_{s+h}(x)\int_0^h \mathrm{d}r\\
&= h\sup_{r\in(-|h|,|h|)}\int_K \Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s+r,x) - \frac{\partial\phi}{\partial t}(s,x)\Big)\,\mathrm{d}\mu_{s+h}(x)\\
&\leq h\sup_{r\in(-|h|,|h|)}\sup_{x\in K}\Big|\frac{\partial\phi}{\partial t}(s+r,x) - \frac{\partial\phi}{\partial t}(s,x)\Big|\int_K \mathrm{d}\mu_{s+h}(x)\\
&\leq \Gamma\, h\sup_{r\in(-|h|,|h|)}\sup_{x\in K}\Big|\frac{\partial\phi}{\partial t}(s+r,x) - \frac{\partial\phi}{\partial t}(s,x)\Big|.
\end{aligned}$$

Da insbesondere $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ stetig in der Zeitvariablen ist, folgt

$$(\mathrm{II}) = \limsup_{h\to 0} h^{-1}\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \Big(\phi_{s+h}(x) - \phi_s(x) - h\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,x)\Big)\,\mathrm{d}\mu_{s+h}(x) = 0.$$

Wir weisen darauf hin, dass man keine Information über das Vorzeichen der Ableitung $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ besitzt. Aus diesem Grund unterscheidet sich unser Aufbau dieses Kapitels von dem ursprünglichen Vorgehen in K. A. Brakke [5, §3]. Nach dem Satz 4.14 ist mit einer beliebigen Funktion $\vartheta \in C^0_c(\mathbb{R}^{n+k})$ die Abbildung $t \mapsto \mu_t(\vartheta)$ für $\mathcal{L}$-f.a. Zeiten t stetig, sodass sich für den dritten Summanden

$$(\mathrm{III}) = \limsup_{h\to 0}\mu_{s+h}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,\cdot)\Big) = \mu_s\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,\cdot)\Big) \quad \text{für } \mathcal{L}\text{-f.a. } s$$

ergibt und zusammengenommen ist der Satz damit bewiesen. □

Wir verwenden die Abschätzung des Satzes, um eine wichtige Ungleichung zu erhalten, auf welcher der Beweis des Einschließungssatzes aufbauen wird. Da die Summanden für alle Zeiten $t \in [0,T]$ beschränkt bleiben, können wir das Lemma 4.6 ii) anwenden und mit der $\mathcal{L}$-f.ü. gültigen Abschätzung erhalten wir mit Testfunktionen $\phi(t,x)$ wie in dem Satz 4.15 und für beliebige Zeiten $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ für einen Brakke-Fluss die Ungleichung

$$\mu_{t_2}(\phi_{t_2}(x)) - \mu_{t_1}(\phi_{t_1}(x)) \leq \int_{t_1}^{t_2}\Big(\mathcal{B}(V_t,\phi_t(x)) + \int_{\mathbb{R}^{n+k}}\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}\mu_t(x)\Big)\,\mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

Mit diesem Ausdruck folgt der interessante Fakt, dass der Brakke-Kern $\mathcal{B}(V_t, \phi_t)$ für $\mathcal{L}$-f.a. Zeiten t nichtsingulär ist und daher der mittlere Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ existiert und $L^2(\mu_V)$-integrierbar ist.

In dem folgenden Kapitel werden wir eine spezielle orts- und zeitabhängige Testfunktion $\phi(t,x) = \phi_t(x)$ wählen, sodass der gesamte Integrand auf der rechten Seite der Ungleichung nicht positiv ist. Außerdem werden wir für die Anfangsfläche fordern, dass zu dem Startzeitpunkt $t_1 := 0$ auch $\mu_0(\phi_0(x))$ gilt. Aus der Ungleichung (4.3) folgt somit die Relation $\mu_t(\phi_t(x)) = 0$ für *alle* Zeiten $t \in [0,T]$, welche Interpretationen für das Aussehen der Flächen $\operatorname{spt} V_t$ zulässt.

4.1.1 Ein Einschließungssatz

Wir beweisen, dass wir einen Brakke-Fluss in beliebiger Dimension und Kodimension in eine nichtkonvexe Menge einschließen können. Dabei wird erneut die Kompaktheit der Flächen eine natürliche und essentielle Bedingung darstellen. Eine mögliche Voraussetzung wollen wir dabei nur an die Startvarifaltigkeit V_0 stellen und *nicht* an den gesamten Fluss $(V_t)_{t\in[0,T]}$. Aus diesem Grund benötigen wir das folgende Resultat von K. A. Brakke [5, Thm. 3.8] über *konvexe* Mengen.

Lemma 4.16 *Sei* $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *ein Brakke-Fluss in* $\mathbb{R}^{n+k}$ *und* $\operatorname{spt} V_0 \subset A$ *für eine abgeschlossene konvexe Menge* $A \subset \mathbb{R}^{n+k}$*. Dann gilt* $\operatorname{spt} V_t \subset A$ *für jedes* $t \in [0,T]$.

Eine Kompaktheitsbedingung müssen wir daher nur an den Träger der Anfangsfläche stellen und diese Kompaktheit überträgt sich auf den gesamten Fluss.

Wir definieren jetzt erneut die quadratischen Polynome

$$r_j(x) := \sum_{i=1}^{n+k-j} x_i^2 \quad \text{und} \quad s_j(x) := \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} x_i^2$$

für eine Signatur $j = 1, \ldots, n-1$. Für ein reelles $\beta > 0$ betrachten wir das verallgemeinerte Hyperboloid

$$\mathcal{H}_j(R) := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon r_j(x) - \frac{n-j-\beta}{j} s_j(x) \leq R \right\}$$

mit einem $R > 0$.

Wir charakterisieren diese Menge nun genauer. Gilt für den Parameter $\beta > n-j$, so stellt der Körper ein Ellipsoid dar und speziell eine Kugel in dem Fall $\beta = n$. Ist $\beta = n-j$, dann entartet die Menge $\mathcal{H}_j(R)$ zu dem Zylinder $B^{n+k-j}_{R^{1/2}}(0) \times \mathbb{R}^j$. Der interessante Fall liegt bei $\beta < n-j$ vor, da die Menge in diesem Fall ein verallgemeinertes Hyperboloid beschreibt und daher im Allgemeinen nicht konvex ist.

Satz 4.17 (Einschließungssatz) *Es sei* $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *ein Brakke-Fluss in* $\mathbb{R}^{n+k}$ *und* $\operatorname{spt} V_0$ *sei kompakt. Es gelte* $\operatorname{spt} V_0 \subset \mathcal{H}_j(R)$ *für ein* $j = 1, \ldots, n-1$*, ein* $\beta > 0$ *und ein* $R > 0$*, dann folgt*

$$\operatorname{spt} V_t \subset \mathcal{H}_j(R - 2\beta t)$$

für alle Zeiten $t \in [0,T]$.

Bemerkungen

i) Ist $T > R/(2\beta)$, dann gilt die Aussage des Satzes auch für Zeiten $t > R/(2\beta)$, das heißt die Familie V_t bleibt eingeschlossen in dem verallgemeinerten Hyperboloid mit *negativer* rechter Seite. Für tiefergehende Untersuchungen dieses Falles verweisen wir auf das nächste Kapitel.

ii) Der Satz lässt aufgrund von Invarianzen des Brakke-Flusses auch translatierte und rotierte Körper des Hyperboloids $\mathcal{H}_j(R)$ zu.

Beweis: Wegen der Voraussetzung an die Kompaktheit des Trägers der Startvarifaltigkeit, ist $\operatorname{spt} V_0 \subset K$ für eine *kompakte*, konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und nach dem anfangs erwähnten Lemma 4.16 gilt die Inklusion $\operatorname{spt} V_t \subset K$ für alle $t \in [0, T]$.

Wir wählen nun eine spezielle orts- und zeitabhängige Testfunktion $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ und zeigen damit - wie bereits erwähnt - die Ungleichung

$$\mathcal{B}(V_t, \phi_t(x)) + \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) \, \mathrm{d}\mu_{V_t}(x) \leq 0.$$

Es bezeichne $\{h\}_+ := \max\{h, 0\}$ erneut den positiven Anteil einer Funktion h. Dann definieren wir zunächst die Funktion $f(z) = \{R^{-1}z - 1\}_+^3$, welche aufgrund der dritten Potenz zweimal stetig differenzierbar mit den *nichtnegativen* Ableitungen

$$f'(z) = 3R^{-1}\{R^{-1}z - 1\}_+^2, \quad f''(z) = 6R^{-2}\{R^{-1}z - 1\}_+$$

ist, da wir $R > 0$ vorausgesetzt haben. In den Punkten $f(z) \neq 0$ ist die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{|f'(z)|^2}{f(z)} &= \frac{|3R^{-1}\{R^{-1}z - 1\}_+^2|^2}{\{R^{-1}z - 1\}_+^3} = \frac{9R^{-2}\{R^{-1}z - 1\}_+^4}{\{R^{-1}z - 1\}_+^3} = 9R^{-2}\{R^{-1}z - 1\}_+ \\ &\leq 24R^{-2}\{R^{-1}z - 1\}_+ = 4f''(z) \end{aligned} \tag{4.4}$$

erfüllt. Weiterhin betrachten wir die in x quadratische und in t lineare Funktion

$$q(t, x) = q_t(x) := \sum_{i=1}^{n+k-j} x_i^2 - \frac{n - j - \beta}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} x_i^2 + 2\beta t.$$

Wir testen mit der Funktion $\phi(t, x) := f(q(t, x))\Psi_K(x) \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$, welche $\phi_t = \phi(t, \cdot) \in C_c^2(\mathbb{R}^{n+k}, \mathbb{R}^+)$ erfüllt. Da die Abschneidefunktion $\Psi_K(x) \equiv 1$ in der Menge K erfüllt und in dieser die Träger *aller* $(V_t)_{t\in[0,T]}$ liegen, brauchen wir diese Funktion bei den Rechnungen nicht weiter zu berücksichtigen.

Für die folgenden Rechnungen definieren wir die Vektorfunktion

$$\hat{x}(x) := \Big(x_1, \ldots, x_{n+k-j}, -\frac{n - j - \beta}{j} x_{n+k-j+1}, \ldots, -\frac{n - j - \beta}{j} x_{n+k}\Big),$$

sodass wir für den Gradienten $Dq_t(x) = 2\hat{x}(x)$ erhalten. Die Projektionsmatrix $\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M_t}$ kürzen wir mit $(\cdot)^\top$ ab und bezeichnen deren Komponenten mit $(p_{ij})_{1\leq i,j\leq n+k}$. Für die tangentielle

Divergenz des Vektors $\hat{x}$ gilt die Abschätzung $\operatorname{div}_{M_t}\hat{x} =$

$$\sum_{i=1}^{n+k-j} \langle \nabla_{M_t} x_i, e_i\rangle - \frac{n-j-\beta}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} \langle \nabla_{M_t} x_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n+k-j} p_{ii} - \frac{n-j-\beta}{j} \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii}$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n+k-j} p_{ii} - (n-j-\beta) = \sum_{i=1}^{n+k} p_{ii} - \sum_{i=n+k-j+1}^{n+k} p_{ii} - n + j + \beta \geq n - j - n + j + \beta = \beta.$$

Außerdem verwenden wir die elementare Zerlegung

$$\langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M_t}(D\phi_t(x)), \mathbf{H}(x)\rangle = \langle D\phi(x), \mathbf{H}(x)\rangle - \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M_t}(D\phi_t(x)), \mathbf{H}(x)\rangle$$

und untersuchen zunächst den ersten Term. Mit Hilfe der Variationsformel (4.1) des mittleren Krümmungsvektors folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle D\phi_t(x)), \mathbf{H}(x)\rangle \,\mathrm{d}\mu_t = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle D\big(f(q_t(x))\big), \mathbf{H}(x)\rangle \,\mathrm{d}\mu_t \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle f'(q_t(x))\, 2\hat{x}, \mathbf{H}(x)\rangle \,\mathrm{d}\mu_t = -\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \operatorname{div}_{M_t}\big(f'(q_t(x))\, 2\hat{x}\big) \,\mathrm{d}\mu_t \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle \nabla_{M_t} f'(q_t(x)), \hat{x}\rangle \,\mathrm{d}\mu_t - 2\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \underbrace{f'(q_t(x))}_{\geq 0} \underbrace{\operatorname{div}_{M_t}\hat{x}}_{\geq \beta} \,\mathrm{d}\mu_t \\
&\leq -4\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f''(q_t(x)) \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M_t}\hat{x}, \hat{x}\rangle \,\mathrm{d}\mu_t - 2\beta \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f'(q_t(x)) \,\mathrm{d}\mu_t \\
&= -4\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f''(q_t(x)) |\hat{x}^\top|^2 \,\mathrm{d}\mu_t - 2\beta \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f'(q_t(x)) \,\mathrm{d}\mu_t.
\end{aligned}$$

Wir haben insbesondere die Nichtnegativität der Ableitung $f'(z)$ verwendet.
Da mit $\phi_t(x_0) = 0$ auch der Gradient in diesem Punkt verschwindet, $D\phi_t(x_0) = 0$, ist es ausreichend über die Menge $\{\phi_t > 0\} := \{x \in \mathbb{R}^{n+k} \colon \phi_t(x) > 0\}$ zu integrieren. Durch eine quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n+k}} -\phi_t(x)|\mathbf{H}(x)|^2 - \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M}(D\phi_t(x)), \mathbf{H}(x)\rangle \,\mathrm{d}\mu_t \\
&= \int_{\{\phi_t > 0\}} -\phi_t(x) \left|\mathbf{H}(x) + \frac{1}{2}\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M_t}(D\phi_t(x))\,\phi_t(x)^{-1}\right|^2 + \frac{1}{4}\left|\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M_t}(D\phi_t(x))\right|^2 \phi_t(x)^{-1} \,\mathrm{d}\mu_t \\
&\leq \int_{\{\phi_t > 0\}} \frac{1}{4}\left|\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M_t}(D\phi_t(x))\right|^2 \phi_t(x)^{-1} \,\mathrm{d}\mu_t = \int_{\{\phi_t > 0\}} \frac{1}{4}\left|2f'(q_t(x))\,\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M_t}(\hat{x})\right|^2 \phi_t(x)^{-1} \,\mathrm{d}\mu_t \\
&= \int_{\{\phi_t > 0\}} |f'(q_t(x))|^2 f(q_t(x))^{-1}\, |\hat{x}^\top|^2 \,\mathrm{d}\mu_t \overset{(4.4)}{\leq} 4\int_{\{\phi_t > 0\}} f''(q_t(x))\, |\hat{x}^\top|^2 \,\mathrm{d}\mu_t
\end{aligned}$$

und insgesamt können wir somit abschätzen

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(V_t, \phi_t(x)) &= \int_{\mathbb{R}^{n+k}} -\phi_t(x)|\mathbf{H}(x)|^2 - \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M_t}(D\phi_t(x)), \mathbf{H}(x)\rangle + \langle D\phi_t(x), \mathbf{H}(x)\rangle \,\mathrm{d}\mu_t \\
&\leq \int_{\{\phi_t > 0\}} 4f''(q_t(x))\, |\hat{x}^\top|^2 - 4f''(q_t(x))\, |\hat{x}^\top|^2 - 2\beta\, f'(q_t(x)) \,\mathrm{d}\mu_t \\
&= -2\beta \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f'(q_t(x)) \,\mathrm{d}\mu_t = -\int_{\mathbb{R}^{n+k}} f'(q_t(x)) \frac{\partial}{\partial t} q(t,x) \,\mathrm{d}\mu_t \\
&= -\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \frac{d}{dt} f(q(t,x)) \,\mathrm{d}\mu_t.
\end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung $\operatorname{spt} V_0 \subset \mathcal{H}_j(R)$ folgt $\mu_0(\phi(0,x)) = 0$, sodass wir mit der Ungleichung (4.3) in der Schlussbemerkung des letzten Kapitels

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi(t,x)\,\mathrm{d}\mu_t = 0$$

für alle Zeiten $t \in [0,T]$ enthalten. Somit müssen die Träger der Varifaltigkeiten V_t, welche mit der Menge $\operatorname{spt} \mu_t$ übereinstimmen, innerhalb der Menge $\mathcal{H}_j(R - 2\beta t)$ liegen, was der Behauptung entspricht. □

Bemerkung

i) Die Rechnung vereinfacht sich, falls wir fordern, dass die Familie $(V_t)_{t\in[0,T]}$ eines Brakke-Flusses für $\mathcal{L}$-f.a. Zeiten t ganzzahlige Vielfachheit besitzt. Nach dem Satz 4.8 liegt der mittlere Krümmungsvektor μ_{V_t}-f.ü. in dem Normalraum, sodass sich der Brakke-Kern für fast alle Zeiten in dem nichtsingulären Fall zu

$$\mathcal{B}(V_t, \phi_t) = -\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi_t |\mathbf{H}|^2\,\mathrm{d}\mu_{V_t} + \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle D\phi_t, \mathbf{H}\rangle\,\mathrm{d}\mu_{V_t}$$

vereinfacht. Daher können wir für eine beliebig fixierte Zeit bei der Abschätzung nach oben das nichtpositive erste Integral streichen und den zweiten Term direkt durch den gewünschten Ausdruck

$$\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle D\phi, \mathbf{H}\rangle\,\mathrm{d}\mu_{V_t} \leq -2\beta \int_{\mathbb{R}^{n+k}} f'(q_t(x))\,\mathrm{d}\mu_{V_t} = -\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \frac{d}{dt} f(q(t,x))\,\mathrm{d}\mu_{V_t}$$

abschätzen, indem wir den anderen nichtpositiven Term $-\int 4f''(q_t)\,|\hat{x}^\top|^2\,\mathrm{d}\mu_{V_t}$ ebenfalls ignorieren.

4.1.2 Singularitätenbildung und ein Nichtexistenzsatz

Sei $V \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ eine beliebige Varifaltigkeit. Ein Punkt $y \in \operatorname{spt} V$ heißt ein *regulärer Punkt*, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $\operatorname{spt} V \cap B_\varepsilon(y)$ eine glatte n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ ist. Die Menge aller regulären Punkte von V bezeichnen wir mit $\operatorname{reg} V$. Wir nennen einen Punkt $y \in \operatorname{spt} V \setminus \operatorname{reg} V$ eine *Singularität* von V.

Die Bildung von Singularitäten ist ein typisches Phänomen des mittleren Krümmungsflusses. Die klassische Theorie endet in so einem Zeitpunkt zunächst, da die Differentialoperatoren in diesen Punkten nicht erklärt sind. Der Brakke-Fluss behält seine Gültigkeit in und auch über diese Zeiten hinaus.
In diesem Kapitel beweisen wir die Existenz von Singularitäten in *endlicher* Zeit für spezielle Anfangsflächen und zeigen weiterhin, dass die Fläche anschließend in mindestens zwei Komponenten zerfällt.

Die bekannteste Konstruktion des glatten zweidimensionalen mittleren Krümmungsflusses für die Existenz einer Singularität geschieht mithilfe des Torus von S. B. Angenent [2] in dem $\mathbb{R}^3$ und verwendet das Vergleichsprinzip, K. Ecker [14, Prop. 24], welches besagt, dass zwei disjunkte, kompakte Flächen des Flusses in dem gesamten zeitlichen Verlauf disjunkt bleiben. Der Torus kann eine geschlossene Fläche an einem zylinderartigen Nacken umschließen, welche zusätzlich zwei Enden mit hinreichend kleiner mittlerer Krümmung aufweist. In dem Verlauf der Zeit schrumpft der Torus selbstähnlich auf einen Punkt und daher muss sich in diesem Punkt eine Singularität gebildet haben, falls die Fläche nicht aus dem Loch des Torus heraus geflossen ist.

K. Ecker [14, Rmk. 3.8] führt eine Überlegung für den n-dimensionalen klassischen mittleren Krümmungsfluss in einer Kodimension aus, welche die Existenz einer Singularität liefert. Dieses Resultat ist die Basis für die folgenden Ausführungen.
Unser Einschließungssatz 4.17 eignet sich für einen einfachen Beweis für die Existenz von Varifaltigkeiten, die unter dem Brakke-Fluss in endlicher Zeit eine Singularität in ihrem Träger bilden. Dabei untersuchen wir in dem Gegensatz zu K. Ecker Flächen mit beliebiger Kodimension und beschreiben zusätzlich das Verhalten des Flusses *nach* der Bildung einer Singularität.

Wir benötigen vorab die folgende Hilfsaussage von K. A. Brakke [5, Thm. 3.7].

Satz 4.18 (Kugelbarriere für außen liegende Flächen) *Sei* $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ *ein Brakke-Fluss und* $\operatorname{spt} V_0 \cap B_\rho(0) = \emptyset$. *Dann gilt*

$$\operatorname{spt} V_t \cap B_{\sqrt{\rho^2-2nt}}(0) = \emptyset \textit{ für } t \leq T^*, T^* := \min\{T, \rho^2/(2n)\}.$$

Aufgrund der Translationsinvarianz des Brakke-Flusses gilt dieser Satz auch für Kugelmittelpunkte, die von dem Ursprung verschieden sind.

Wir betrachten nun das spezielle Hyperboloid mit der Signatur $j = 1$, einem beliebigen reellen $0 < \beta < n-1$ sowie einer Zahl $R > 0$. Für die Konstruktion definieren wir die beiden Hyperboloidhälften $\mathcal{H}^{\pm}(R) := \mathcal{H}_1(R) \cap \{\pm x_{n+k} > 0\}$ und betrachten zwei Bälle, sodass $B^+_{\rho_0}(v^+) \subset \mathcal{H}^+(R)$ und $B^-_{\rho_0}(v^-) \subset \mathcal{H}^-(R)$ mit zwei Mittelpunkten $v^+, v^- \in \mathbb{R}^{n+k}$ erfüllt ist. Den Radius ρ_0 werden wir noch genauer festlegen.

Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ ein beliebiger Brakke-Fluss. Die Startvarifaltigkeit V_0 besitze einen zusammenhängenden und kompakten Träger und es gelte $\operatorname{spt} V_0 \subset \mathcal{H}_1(R)$ sowie $\operatorname{spt} V_0 \cap B^{\pm}_{\rho_0}(v^{\pm}) = \emptyset$. Dennoch „umlaufe" der Träger beide Kugeln, wodurch dieser eine hantelähnliche Form besitzt.

Nach dem Einschließungssatz 4.17 gilt $\operatorname{spt} V_t \subset \mathcal{H}_1(R - 2\beta t)$ und zu dem Zeitpunkt $\tau := R/(2\beta)$ wird das Hyperboloid zu einem Doppelkegel mit Punktsingularität. Wir verwenden den angegebenen Sphärenvergleich 4.18 und wollen, dass zu diesem Zeitpunkt τ die beiden Bälle $B^{\pm}_{\rho_0}(v^{\pm})$ noch nicht zu einem Punkt geschrumpft sind. Da für den Verlauf des Radius $\rho(t) = \sqrt{\rho_0^2 - 2nt}$ gilt, folgt $\rho(\tau) = \rho(R/(2\beta)) = \sqrt{\rho_0^2 - 2nR/(2\beta)}$ und somit ist $\rho_0 > \sqrt{nR/\beta}$ ein hinreichend großer Startradius.

Wir nehmen für den Endzeitpunkt $T > \tau$ an und aus der Konstruktion folgt, dass die Fläche $\operatorname{spt} V_\tau$ nicht in eine Hälfte des Kegels geflossen ist oder bereits verschwunden ist, falls kein plötzlicher Masseverlust aufgetreten ist. Gilt $0 \in \operatorname{spt} V_\tau$, dann liegt in diesem Punkt eine Singularität vor, das heißt $0 \notin \operatorname{reg} V_\tau$.

Da der Körper $\mathcal{H}_1(R-2\beta t)$ für Zeiten $t > \tau$ in ein zweischaliges Hyperboloid zerfällt und der Einschließungssatz seine Gültigkeit behält, kann $\operatorname{spt} V_t$ für $t > \tau$ *keine* zusammenhängende Menge sein, falls Teile des Trägers in den beiden Halbräumen $\{x\colon \pm x_{n+k} > 0\}$ liegen. Diese letzte Bedingung ist notwendig, da auch für dieses Resultat der plötzliche Masseverlust eines Brakke-Flusses beachtet werden muss. Wir formulieren dieses Ergebnis als Nichtexistenzsatz.

Satz 4.19 (Nichtexistenzsatz) *Gegeben sei eine Familie von Varifaltigkeiten* $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+k})$*, deren Anfangsfläche kompakten Träger* $\operatorname{spt} V_0$ *besitzt sowie*

$$\operatorname{spt} V_0 \subset \mathcal{H}_1(R) = \{x \in \mathbb{R}^{n+k}\colon x_1^2 + \ldots + x_{n+k-1}^2 - (n-1-\beta)\, x_{n+k}^2 \leq R\}$$

für ein $\beta \in (0, n-1)$ *und ein* $R > 0$ *erfüllt. Weiterhin gelte* $T > R/(2\beta)$ *und es existiert ein Zeitpunkt* $t_0 \in (R/(2\beta), T]$*, für den* $\operatorname{spt} V_{t_0} \cap \{x_{n+k} > 0\} \neq \emptyset$ *und* $\operatorname{spt} V_{t_0} \cap \{x_{n+k} < 0\} \neq \emptyset$ *gilt. Dann kann die Familie* $(V_t)_{t\in[0,T]}$ *kein Brakke-Fluss sein, dessen Träger* $\operatorname{spt} V_t$ *für alle Zeiten* $t \in [0,T]$ *eine zusammenhängende Menge darstellen.*

4.1.3 Der klassische mittlere Krümmungsfluss

Der allgemeine Einschließungssatz 4.17 und alle weiteren Ergebnisse gelten auch für den klassischen mittleren Krümmungsfluss mit glatten, eingebetteten Mannigfaltigkeiten nach der Definition 4.1. Um eine Verbindung mit dem Brakke-Fluss herzustellen, muss die Evolution des Area-Elements betrachtet werden. Diese wurde zuerst von G. Huisken [24, §3] berechnet. Dazu sei wieder $F(t,\cdot)\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}^{n+k}$ die glatte Einbettungsabbildung einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$. Dann gilt in dem klassischen Kontext $\mathrm{d}\mu_t(p) := \sqrt{\det g_{ij}(p,t)}\,\mathrm{d}\mu_{\mathfrak{M}}(p)$ wobei $g_{ij}(p,t) = \langle \frac{\partial F}{\partial p_i}(p,t), \frac{\partial F}{\partial p_j}(p,t)\rangle$ und $\mathrm{d}\mu_{\mathfrak{M}}$ das Volumenmaß der Parametermannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Elementare Rechnungen liefern

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = \Big\langle \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial p_i}, \frac{\partial F}{\partial p_j}\Big\rangle + \Big\langle \frac{\partial F}{\partial p_i}, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial p_j}\Big\rangle = 2\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial p_i}, \frac{\partial F}{\partial p_j}\Big\rangle = 2\Big\langle \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial p_j}\Big\rangle$$

und sei $g^{ij}(p,t)$ die inverse Metrik, dann folgt unter Berücksichtigung der Ableitung einer Determinante die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det g_{ij}} = \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\frac{\partial}{\partial t}\det g_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\det g_{ij}}}\det g_{ij}\, g^{ij}\,\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = \frac{1}{2}\sqrt{\det g_{ij}}\, g^{ij}\,\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}.$$

Zusammengenommen folgt der Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{\det g_{ij}}\, g^{ij}\,\Big\langle \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial p_j}\Big\rangle \overset{\substack{\text{K. Ecker}\\ \text{[14, App. A]}}}{=} \sqrt{\det g_{ij}}\,\operatorname{div}_{\mathcal{M}_t}\Big(\frac{\partial F}{\partial t}\Big),$$

also

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{d}\mu_t = \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det g_{ij}(p,t)}\,\mathrm{d}\mu_{\mathfrak{M}}(p) = \operatorname{div}_{\mathcal{M}_t}\Big(\frac{\partial F}{\partial t}\Big)\sqrt{\det g_{ij}(p,t)}\,\mathrm{d}\mu_{\mathfrak{M}}(p) = \operatorname{div}_{\mathcal{M}_t}\Big(\frac{\partial F}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}\mu_t.$$

Wir halten das Ergebnis in dem folgenden Lemma fest.

Lemma 4.20 (Evolution des Area-Elements) *Sei* $\mathrm{d}\mu_t$ *das Area-Element wie oben beschrieben, dann gilt für die zeitliche Ableitung*

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{d}\mu_t = \operatorname{div}_{\mathcal{M}_t}\Big(\frac{\partial F}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}\mu_t.$$

Spezieller folgt für das Area-Element einer Lösung $(\mathcal{M}_t)_{t\in[0,T]}$ *des mittleren Krümmungsflusses die Evolutionsgleichung* $\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{d}\mu_t = -|\vec{H}|^2\,\mathrm{d}\mu_t$ *für alle Zeiten* $t \in [0,T]$.

Beweis: Wir müssen nur noch die zweite Behauptung beweisen. Diese resultiert direkt aus der Definition 4.1 des mittleren Krümmungsflusses und mit Hilfe des klassischen Divergenzsatzes für glatte Flächen, L. Simon [33, 7.6],

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{d}\mu_t = \mathrm{div}_{\mathcal{M}_t}\Big(\frac{\partial F}{\partial t}\Big)\,\mathrm{d}\mu_t = \mathrm{div}_{\mathcal{M}_t}\vec{H}\,\mathrm{d}\mu_t = -|\vec{H}|^2\,\mathrm{d}\mu_t. \qquad \square$$

Wir erhalten schließlich einen Ausdruck für den klassischen mittleren Krümmungsfluss in Integralform, vergleiche auch K. Ecker [14, Prop. 4.4].

Satz 4.21 (Integraldarstellung) *Für einen glatten, eingebetteten mittleren Krümmungsfluss* $(\mathcal{M}_t)_{t\in[0,T]} \subset \mathbb{R}^{n+k}$ *gilt*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi\,\mathrm{d}\mu_t = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} -|\vec{H}|^2\phi + \langle \vec{H}, D\phi\rangle\,\mathrm{d}\mu_t \tag{4.5}$$

für jede Funktion $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^{n+k})$ *und alle Zeiten* $t \in [0,T]$.

Beweis: Mit der Produktregel folgt

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^{n+k}} \phi\,\mathrm{d}\mu_t = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \Big\langle D\phi, \frac{\partial x}{\partial t}\Big\rangle + \phi\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{d}\mu_t = \int_{\mathbb{R}^{n+k}} \langle D\phi, \vec{H}\rangle + \phi(-|\vec{H}|^2)\,\mathrm{d}\mu_t. \qquad \square$$

Für n-dimensionale, glatte, eingebettete Flächen $\mathcal{M}_t \subset \mathbb{R}^{n+k}, t \in [0,T]$, gilt $\mathcal{H}^n(\mathcal{M}_t \cap W) < \infty$ für alle offenen Mengen $W \subset\subset \mathbb{R}^{n+k}$. Somit sind für $t \in [0,T]$ durch $\mu_{\mathcal{M}_t} = \mu_t := \mathcal{H}^n \llcorner \mathcal{M}_t$ Radonmaße definiert, welche zu der Familie der Varifaltigkeiten $V_t = v(\mathcal{M}_t, 1) \in \mathcal{IV}_n(\mathbb{R}^{n+k})$ korrespondieren. Weiterhin stellt der klassische mittlere Krümmungsvektor $\vec{H}$ auch einen $L^1(\mu_{V_t})$-integrierbaren mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ für jede Varifaltigkeit V_t dar. Die bewiesene Integralgleichung (4.5) impliziert die verlangte Ungleichung in der Definition 4.10 des Brakke-Flusses mit Gleichheit und jede klassische Lösung des mittleren Krümmungsflusses definiert somit auch einen Brakke-Fluss.

Die Umkehrung gilt selbstverständlich nicht, da plötzlicher Masseverlust in dem klassischen Fall nicht auftreten kann und der glatte Fluss nur bis zu einer ersten auftretenden Singularität beschrieben werden kann.

Die Formulierung in dem Brakke Kontext ist somit deutlich allgemeiner und unser Einschließungssatz 4.17 sowie die Überlegungen zu der Singularitätenbildung gelten insbesondere für den klassischen mittleren Krümmungsfluss gemäß der Definition 4.1.

4.2 Der Brakke-Fluss in einem Schwerefeld

In diesem Abschnitt geben wir eine Definition des α-Krümmungsflusses an, welche sich auch auf rektifizierbare Varifaltigkeiten übertragen lässt. Ausgangspunkt ist die punktweise Formulierung von S. Winklmann [39] für innere Punkte, in der wir nun die explizite Einbettungsabbildung $F\colon [0,T)\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}^{n+1}_+$ unterdrücken. Mit $x=F(t,p)$ folgt dann die Differentialgleichung

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\vec{H}-\alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu. \tag{4.6}$$

Wir schreiben diese punktweise Gleichung zunächst in eine Integralform um und benötigen dazu die allgemeine Evolution des Area-Elements aus dem Lemma 4.20. Somit ergibt sich für eine Testfunktion $\phi\in C^1_c(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ mit dem Maß $\mathrm{d}\mu_t=\sqrt{\det g_{ij}}\,\mathrm{d}\mu_{\mathfrak{M}}$, wie in dem vorherigen Abschnitt, der Ausdruck, wobei wir stets über den Halbraum $\mathbb{R}^{n+1}_+$ integrieren,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int\phi\,x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t &= \int\Big\langle D\phi,\frac{\partial x}{\partial t}\Big\rangle x_{n+1}^{\alpha}+\phi\,\alpha x_{n+1}^{\alpha-1}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial t}\,\mathrm{d}\mu_t+\int\phi\,x_{n+1}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{d}\mu_t\\
&\overset{\text{Lem. 4.20}}{=}\int\Big(\Big\langle D\phi,\frac{\partial x}{\partial t}\Big\rangle+\phi\,\alpha x_{n+1}^{-1}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial t}\Big)x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t+\int\phi\,\mathrm{div}_{\mathcal{M}_t}\Big(\frac{\partial x}{\partial t}\Big)x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t\\
&= \int\Big(\Big\langle D\phi,\frac{\partial x}{\partial t}\Big\rangle+\phi\,\alpha x_{n+1}^{-1}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial t}\Big)x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t\\
&\quad+\int\mathrm{div}_{\mathcal{M}_t}\Big(\phi\,\frac{\partial x}{\partial t}x_{n+1}^{\alpha}\Big)-\underbrace{\Big\langle\frac{\partial x}{\partial t},\nabla^{\mathcal{M}_t}(\phi\,x_{n+1}^{\alpha})\Big\rangle}_{=0,\text{ da }\frac{\partial x}{\partial t}\in\mathcal{T}_x^{\perp}\mathcal{M}_t}\,\mathrm{d}\mu_t\\
&\overset{\text{Div.-Satz}}{=}\int\Big(\Big\langle D\phi,\frac{\partial x}{\partial t}\Big\rangle+\phi\,\alpha x_{n+1}^{-1}\frac{\partial x_{n+1}}{\partial t}\Big)x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t-\int\phi\Big\langle\vec{H},\frac{\partial x}{\partial t}\Big\rangle x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t\\
&\overset{(4.6)}{=}\int\Big(\langle D\phi,(\vec{H}-\alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)\rangle+\phi\,\alpha x_{n+1}^{-1}\langle(\vec{H}-\alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu),e_{n+1}\rangle\\
&\quad-\phi\,\langle\vec{H},(\vec{H}-\alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)\rangle\Big)x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t\\
&= \int\Big(\langle D\phi,(\vec{H}-\alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)\rangle+\phi\{\alpha x_{n+1}^{-1}\underbrace{\langle\vec{H},e_{n+1}\rangle}_{=-H\nu_{n+1}}-\alpha^2x_{n+1}^{-2}\nu_{n+1}^2\\
&\quad-\vec{H}^2+\alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\underbrace{\langle\nu,\vec{H}\rangle}_{=-H}\}\Big)x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t\\
&= \int\Big(-\phi|\vec{H}-\alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu|^2+\langle D\phi,(\vec{H}-\alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)\rangle\Big)x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t.
\end{aligned}$$

Wir haben somit das folgende klassische Resultat bewiesen, welches in dieser Form noch nicht in der Literatur auftaucht.

Satz 4.22 (α-Krümmungsfluss in Integralform) *Für eine n-dimensionale, orientierte, zusammenhängende und kompakte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ ohne Rand sei $F\colon[0,T)\times\mathfrak{M}\to\mathbb{R}^{n+1}_+$, $F_t:=F(t,\cdot)$, eine glatte Familie von eingebetteten Hyperflächen $\mathcal{M}_t=F_t(\mathfrak{M})$. Weiterhin sei F eine Lösung der Gleichung*

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\vec{H}-\alpha F_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu\qquad\text{in }[0,T)\times\mathfrak{M},$$

dann gilt für eine beliebige Funktion $\phi\in C^1_c(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ die Integralgleichung

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\phi\,x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t=\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\Big(-\phi\,|\vec{H}-\alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu|^2+\big\langle D\phi,(\vec{H}-\alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)\big\rangle\Big)x_{n+1}^{\alpha}\,\mathrm{d}\mu_t.$$

Diese Darstellung ist unser Ausgangspunkt für die Ausarbeitungen in dem Kontext der Maßtheorie. Die folgenden Fixierungen gelten für das *gesamte* restliche Kapitel 4.2.

Wir betrachten stets rektifizierbare Varifaltigkeiten $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ in dem offenen Halbraum $\mathbb{R}^{n+1}_+$, sodass für den abgeschlossenen Träger $\operatorname{spt} V \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ gilt.

In den Punkten $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, in denen der approximative Tangentialraum $\mathcal{T}_x M$ existiert, definieren wir die *approximative Gaußabbildung* $\nu\colon \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathcal{S}^n(1), x \mapsto \nu(x)$, als den Vektor der Länge Eins, welcher orthogonal auf der Menge $\mathcal{T}_x M$ steht. Diese Abbildung existiert somit in μ_V-f.a. Punkten $x \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ und kann auch durch $\nu = \star(\tau_1 \wedge \ldots \wedge \tau_n)$ für eine geeignete Orthonormalbasis $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ von $\mathcal{T}_x M$ mit dem Hodge-Stern $\star\colon \Lambda_n \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ charakterisiert werden. Besitzt V ganzzahlige Vielfachheit, so existiert eine skalare Funktion $H(x) \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{H}(x) = -H(x)\nu(x)\,\mu_V$-f.ü., da der mittlere Krümmungsvektor in diesem Fall nach dem Satz 4.8 in dem approximativen Normalraum $\mathcal{T}_x^\perp M$ liegt.

Häufig werden wir erneut die Kurzschreibungen $(\cdot)^\top := \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M}(\cdot)$ und $(\cdot)^\perp := \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M}(\cdot)$ für die orthogonalen Projektionen und $\{\phi > 0\}$ für die Menge $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon \phi(x) > 0\}$ verwenden.

Definition 4.23 (α-Brakke-Kern) *Für eine Varifaltigkeit $V = v(M,\theta) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ und eine Funktion $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^{n+1}_+, \mathbb{R}^+)$ definieren wir für ein $\alpha > 0$ den α-Brakke-Kern $\mathcal{B}^\alpha(V,\phi)$ wie folgt:*
Falls V einen mittleren Krümmungsvektor $\mathbf{H}$ gemäß der Definition 4.7 besitzt und dieser mit der approximativen Gaußabbildung ν die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi\,|\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu|^2\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V < \infty$$

erfüllt, dann definieren wir den nichtsingulären Fall vermöge

$$\mathcal{B}^\alpha(V,\phi) := \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \big\{ -\phi\,|\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu|^2 + \langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x^\perp M}(D\phi), (\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)\rangle \big\}\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V,$$

andernfalls setzen wir $\mathcal{B}^\alpha(V,\phi) := -\infty$ und sprechen von dem singulären Fall.

Bemerkungen

i) Für den Grenzfall $\alpha = 0$ erhalten wir den Brakke-Kern $\mathcal{B}(V,\phi)$ aus der Definition 4.9.

ii) Verwenden wir die elementare Zerlegung $(\cdot)^\perp = (\cdot) - (\cdot)^\top$, dann können wir in dem nichtsingulären Fall mit Hilfe der Definition 4.7 des mittleren Krümmungsvektors und den Eigenschaften der Projektion die einzelnen Summanden das α-Brakke-Kerns abschätzen

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \big\{\langle D\phi, (\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)\rangle\big\} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \langle D\phi, \mathbf{H}\rangle x_{n+1}^\alpha - \alpha x_{n+1}^{-1}\langle D\phi, \nu\rangle \nu_{n+1} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} -\operatorname{div}_M(D\phi\, x_{n+1}^\alpha) - \alpha x_{n+1}^{-1}\langle (D\phi)^\perp, e_{n+1}\rangle x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} -\operatorname{div}_M(D\phi)\, x_{n+1}^\alpha - \langle D\phi, \alpha x_{n+1}^{\alpha-1} e_{n+1}^\top\rangle - \alpha x_{n+1}^{-1}\langle (D\phi)^\perp, e_{n+1}\rangle x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \big\{ -\operatorname{div}_M(D\phi) - \alpha x_{n+1}^{-1}\langle D\phi, e_{n+1}\rangle \big\} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V
\end{aligned}$$

und, da mit $\phi(x_0) = 0$ auch für den Gradienten $D\phi(x_0) = 0$ folgt, weiterhin

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \big\{ -\phi\,|\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu|^2 - \big\langle \mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M}(D\phi), (\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)\big\rangle \big\}\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V \\
&= \int_{\{\phi>0\}} \Big\{ -\phi\, \Big|(\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu) + \frac{1}{2}(D\phi)^\top \phi^{-1}\Big|^2 + \frac{1}{4}\Big|(D\phi)^\top\Big|^2 \phi^{-1}\Big\} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V \\
&\le \int_{\{\phi>0\}} \frac{1}{4}\,\big|(D\phi)^\top\big|^2 \phi^{-1}\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V.
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir die folgende *fundamentale* Abschätzung des α-Brakke-Kerns

$$\mathcal{B}^\alpha(V,\phi) \le \int_{\{\phi>0\}} \Big\{ -\operatorname{div}_M(D\phi) - \alpha x_{n+1}^{-1}\langle D\phi, e_{n+1}\rangle + \frac{1}{4}\,\big|\mathcal{P}_{\mathcal{T}_x M}(D\phi)\big|^2 \phi^{-1}\Big\} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V.$$

Diese Ungleichung werden wir in den späteren Vergleichs- und Einschließungssätzen verwenden, sodass wir im Folgenden die Ausdrücke $\operatorname{div}_M(D\phi)$, $\langle D\phi, e_{n+1}\rangle$ und $(D\phi)^\top$ wiederholt für verschiedene Testfunktionen ϕ ausrechnen werden.

Anstelle von dem „*Brakke-Fluss in einem Schwerefeld*“ sprechen wir in Anlehnung an das Kapitel 3.4 auch hier kurz von einem α-*Brakke-Fluss*. Diesen definieren wir jetzt, dabei verwenden wir hier und im Folgenden wieder $\mu_t(\phi\, x_{n+1}^\alpha)$ für das Integral $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(x)\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_{V_t}$.

Definition 4.24 (α-Brakke-Fluss) *Eine Familie von n-dimensionalen rektifizierbaren Varifaltigkeiten $V_t = v(M_t, \theta_t) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $t \in [0,T]$ mit einem Endzeitpunkt $T \in (0,\infty)$, ist mit einem $\alpha > 0$ ein α-Brakke-Fluss in $\mathbb{R}^{n+1}_+$, falls*

1. *eine Zahl $h_* > 0$ existiert, sodass $\inf\limits_{x \in \operatorname{spt} V_t} x_{n+1} \ge h_* > 0$ für alle Zeiten $t \in [0,T]$ gilt und*

2. *$\overline{D}_t\mu_t\big(\phi(x)\, x_{n+1}^\alpha\big) \le \mathcal{B}^\alpha(V_t,\phi)$ für jede Testfunktion $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^{n+1}_+, \mathbb{R}^+)$ und alle Zeiten $t \in [0,T]$ erfüllt ist.*

Wir zeigen nun, dass sich die Sätze aus dem Kapitel 4.1 des Brakke-Flusses auch auf den α-Brakke-Fluss übertragen lassen. Die Beweise verlaufen in der Regel analog, daher verweisen wir vereinzelt auf den parallelen Satz.

Satz 4.25 (Beschränktheit des α-Brakke-Kerns) *Gegeben sei $V \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ und eine Funktion $\phi \in C^2_c(\mathbb{R}^{n+1}_+, \mathbb{R}^+)$. Dann existiert eine Konstante $C = C(\phi)$ und es gilt*

$$\mathcal{B}^\alpha(V,\phi) \le C \int_{\{\phi>0\}} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V < \infty.$$

Beweis: Ist $\mathcal{B}^\alpha(V,\phi) = -\infty$, dann ist nichts weiter zu zeigen. Andernfalls erhalten wir wieder durch Integration über $\{\phi > 0\}$ mit der typischen quadratischen Ergänzung

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^\alpha(V,\phi) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \big\{\langle (D\phi)^\perp, (\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)\rangle - \phi(\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)^2\big\} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V \\
&= \int_{\{\phi>0\}} \big\{\langle (D\phi)^\perp, (\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)\rangle - \phi(\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu)^2\big\} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V \\
&= \int_{\{\phi>0\}} \Big\{ -\phi\,\Big|(\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1}\nu_{n+1}\nu) - \frac{1}{2}\frac{(D\phi)^\perp}{\phi}\Big|^2 + \frac{1}{4}\frac{|(D\phi)^\perp|^2}{\phi}\Big\} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V \\
&\overset{(1.3)}{\le} \int_{\{\phi>0\}} \frac{1}{4}\frac{|D\phi|^2}{\phi}\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V \le \frac{1}{2}\sup_{\{\phi>0\}} |D^2\phi| \int_{\{\phi>0\}} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_V,
\end{aligned}$$

wobei wir in dem letzten Rechenschritt das Lemma 4.11 verwendet haben. Das letzte Integral ist schließlich endlich, da die Funktion ϕ kompakten Träger besitzt. $\square$

Satz 4.26 (Beschränktheit des α-Brakke-Flusses) *Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein α-Brakke-Fluss in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ und $K \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ eine kompakte Menge. Dann existiert eine Konstante $\Gamma \in (1,\infty)$, sodass $\int_K x^\alpha_{n+1}\,\mathrm{d}\mu_t \leq \Gamma$ für alle Zeiten $t \in [0,T]$ gilt. Dabei kann Γ von K sowie α und dem Fluss $(V_t)_{t\in[0,T]}$ abhängen.*

Beweis: Wir folgen dem Beweisaufbau des analogen Satzes 4.13.
Fixieren wir zuerst ein $\delta \in (0,1)$, dann können wir den Fluss auf das Intervall $[0, T+\delta]$ durch $V_t \equiv 0$ für $t \in (T, T+\delta]$ erweitern. Dann ist der erweiterte Fluss $(V_t)_{t\in[0,T+\delta]}$ ebenfalls ein α-Brakke-Fluss, da insbesondere die erste Bedingung der Definition wegen $\inf\emptyset = \infty$ trivialerweise erfüllt ist.
Wir testen mit der Funktion $\phi := \Psi_K \in C^2_c(\mathbb{R}^{n+1}_+, [0,1])$ und für eine beliebige Zeit $t \in [0,T]$ finden wir nach der Definition des Limes superior ein $h_t \in (0,\delta)$, sodass

$$h^{-1}\big(\mu_{t+h}(\phi\, x^\alpha_{n+1}) - \mu_t(\phi\, x^\alpha_{n+1})\big) \leq \overline{D}_t\mu_t(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + 1$$

für alle $h \in (0, h_t]$ gilt. Es folgt für diese h die Abschätzung

$$\begin{aligned}\mu_{t+h}(\phi\, x^\alpha_{n+1}) &\leq \mu_t(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + h\left(\overline{D}_t\mu_t(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + 1\right) \overset{\text{Def. 4.24}}{\leq} \mu_t(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + h\big(\mathcal{B}^\alpha(V_t,\phi) + 1\big)\\ &\overset{\text{Satz 4.25}}{\leq} \mu_t(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + h\left(\frac{1}{2}\sup_{\{\phi>0\}}|D^2\phi|\,(\mu_t \llcorner x^\alpha_{n+1})(\operatorname{spt}\phi) + 1\right) =: \mu_t(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + h\,\Gamma_t.\end{aligned}$$

Aufgrund der Kompaktheit des Intervalls $[h_0, T]$ existieren *endlich* viele Zeiten $t_i \in (0,T], i = 1,\dots,N$, wobei mit $t_0 := 0$ die Überdeckung $(0,T] \subset \bigcup_{i=0}^N (t_i, t_i + h_{t_i})$ erfüllt ist und jeder Zeitpunkt $t \in (0,T]$ daher in mindestens einem der Intervalle $(t_i, t_i + h_{t_i}), i = 0,\dots,N$ enthalten ist.

Für einen Zeitpunkt $t^* \in (0, h_0)$ folgt nach der obigen Abschätzung, welche für alle $h \in (0, h_0]$ gilt, und wegen $h \leq 1$ die Schranke

$$\mu_{t^*}(\phi\, x^\alpha_{n+1}) \leq \mu_0(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + h\,\Gamma_0 \leq \mu_0(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + \Gamma_0.$$

Ist die Zeit $t^* \in (t_1, t_1 + h_{t_1})$, dann ergibt sich die analoge Abschätzung $\mu_{t^*}(\phi\, x^\alpha_{n+1}) \leq \mu_{t_1}(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + \Gamma_{t_1}$ und weil $t_1 \in (0, h_0)$, folgt mit obiger Ungleichung

$$\mu_{t^*}(\phi\, x^\alpha_{n+1}) \leq \mu_0(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + \Gamma_0 + \Gamma_{t_1}.$$

Iterativ gilt für jedes $t \in (t_i, t_i + h_{t_i}), i = 0,\dots,N$, die Abschätzung $\mu_t(\phi\, x^\alpha_{n+1}) \leq \mu_0(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + \Gamma_{t_0} + \ldots + \Gamma_{t_i}$ und wegen der Überdeckung folgt für einen beliebigen Zeitpunkt $t \in (0,T]$ schließlich

$$\mu_t(\phi\, x^\alpha_{n+1}) \leq \mu_0(\phi\, x^\alpha_{n+1}) + \sum_{j=0}^N \Gamma_{t_j}.$$

Da ϕ kompakten Träger in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ besitzt, ist der erste Summand ebenfalls endlich

$$\mu_0(\phi\, x^\alpha_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(x)\, x^\alpha_{n+1}\,\mathrm{d}\mu_0 < \infty.$$

Die linke Seite können wir weiter nach unten abschätzen

$$\mu_t(\phi\, x_{n+1}^\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \phi(x)\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t \geq \int_K \phi(x)\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t = \int_K x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t$$

und insgesamt folgt somit für alle Zeiten $t \in [0,T]$ die Behauptung

$$\int_K x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t \leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \phi(x)\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_0 + \sum_{j=0}^{N} \Gamma_{t_j} =: \Gamma < \infty. \qquad \square$$

Satz 4.27 (Stetigkeitseigenschaften) *Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ein α-Brakke-Fluss in $\mathbb{R}_+^{n+1}$ und $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^+)$, dann gelten*

i) *$\overline{D}_t\mu_t(\phi(x)x_{n+1}^\alpha) = \limsup_{h\to 0} h^{-1}\big(\mu_{t+h}(\phi(x)x_{n+1}^\alpha) - \mu_t(\phi(x)x_{n+1}^\alpha)\big) \leq L < \infty$ für alle $t \in [0,T]$, wobei $L \in \mathbb{R}$ von ϕ und dem ganzen Fluss (V_t) abhängen kann,*

ii) *$\lim\limits_{\delta\searrow 0} \mu_{t+\delta}(\phi(x)x_{n+1}^\alpha) \leq \mu_t(\phi(x)x_{n+1}^\alpha) \leq \lim\limits_{\delta\searrow 0} \mu_{t-\delta}(\phi(x)x_{n+1}^\alpha)$ für alle $t \in (0,T)$,*

iii) *für $\mathcal{L}$-f.a. Zeiten $t \in [0,T]$ ist $\lim\limits_{h\to 0} \mu_{t+h}(\vartheta(x)x_{n+1}^\alpha) = \mu_t(\vartheta(x)x_{n+1}^\alpha)$ für jede Testfunktion $\vartheta \in C_c^0(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ohne Vorzeichenbeschränkung.*

Beweis: Aufgrund der Regularität der Testfunktion $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^+)$ existiert eine Konstante $L_1 \in (0,\infty)$, sodass $\sup_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |D^2\phi| \leq L_1$ gilt. Definieren wir die kompakte Menge $K := \operatorname{spt}\phi$, dann folgt nach Satz 4.26 die Existenz eines $L_2 \in (1,\infty)$ mit $\int_K x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t \leq L_2$ für alle $t \in [0,T]$. Zusammen mit den Abschätzungen des Satzes 4.25 erhalten wir

$$\begin{aligned}\overline{D}_t\mu_t(\phi\, x_{n+1}^\alpha) &\leq \mathcal{B}^\alpha(V_t,\phi) \leq \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |D^2\phi| x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t \\ &= \int_K |D^2\phi| x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t \leq \sup_K |D^2\phi| \int_K x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t \leq L_1L_2 =: L\end{aligned}$$

für alle Zeiten $t \in [0,T]$, was der ersten Behauptung entspricht.
Für die zweite Behauptung betrachten wir wieder eine Hilfsfunktion $g\colon [0,T] \to \mathbb{R}$, diesmal gegeben durch $g(t) := \mu_t(\phi\, x_{n+1}^\alpha) - Lt$. Dann gilt ebenfalls $\overline{D}_t g \leq 0$ und die Existenz der Grenzwerte folgt aus der schwachen Monotonie der Funktion g.
Die dritte Aussage folgt exakt wie in dem analogen Satz 4.14, wobei nun die Abbildung $t \mapsto \mu_t(\phi\, x_{n+1}^\alpha)$ für $\mathcal{L}$-f.a. $t \in [0,T]$ stetig ist. Die beiden nichtnegativen Anteile $\vartheta_\pm$ der Funktion $\vartheta = \vartheta_+ - \vartheta_-$ können dann durch glatte Funktionen approximiert werden. $\square$

Wir haben somit die natürlichen Eigenschaften für den α-Brakke-Fluss beweisen können, sodass unsere Definition ein sinnvolles Konzept darstellt. Zum Abschluss betrachten wir erneut Testfunktionen $\phi(t,x)$, die neben dem Ort zusätzlich von der Zeit t abhängen dürfen.

Satz 4.28 (Zeitabhängige Testfunktionen) *Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ein α-Brakke-Fluss in $\mathbb{R}_+^{n+1}$ und $\phi \in C^1([0,T]\times\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^+)$ mit $\phi_t := \phi(t,\cdot) \in C_c^1(\mathbb{R}_+^{n+1}, \mathbb{R}^+)$ für alle $t \in [0,T]$. Dann gilt*

$$\overline{D}_t\mu_t\big(\phi_t(x)\, x_{n+1}^\alpha\big)\big|_{t=s} \leq \mathcal{B}^\alpha(V_s, \phi_s(x)) + \mu_s\Big(\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x)\big|_{t=s} x_{n+1}^\alpha\Big)$$

für $\mathcal{L}$-f.a. Zeiten $s \in (0,T)$.

Beweis: Wir schätzen erneut die obere Ableitung ab und teilen den Term in drei Summanden auf

$$
\begin{aligned}
\overline{D}_t\mu_t\big(\phi_t\, x_{n+1}^\alpha\big)\big|_{t=s} &= \limsup_{h\to 0} h^{-1}\big(\mu_{s+h}(\phi_{s+h}\, x_{n+1}^\alpha) - \mu_s(\phi_s\, x_{n+1}^\alpha)\big) \\
&= \limsup_{h\to 0}\Big[h^{-1}\big(\mu_{s+h}(\phi_{s+h}\, x_{n+1}^\alpha) - \mu_{s+h}(\phi_s\, x_{n+1}^\alpha) + \mu_{s+h}(\phi_s\, x_{n+1}^\alpha) \\
&\qquad - \mu_s(\phi_s\, x_{n+1}^\alpha)\big) + \mu_{s+h}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,\cdot)x_{n+1}^\alpha\Big) - \mu_{s+h}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,\cdot)x_{n+1}^\alpha\Big)\Big] \\
&\le \limsup_{h\to 0} h^{-1}\big(\mu_{s+h}(\phi_s\, x_{n+1}^\alpha) - \mu_s(\phi_s\, x_{n+1}^\alpha)\big) \\
&\qquad + \limsup_{h\to 0} h^{-1}\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\Big[\phi_{s+h} - \phi_s - h\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,x)\Big]x_{n+1}^\alpha\,\mathrm{d}\mu_{s+h}(x) \\
&\qquad + \limsup_{h\to 0}\mu_{s+h}\Big(\frac{\partial\phi}{\partial t}(s,\cdot)x_{n+1}^\alpha\Big) \\
&=: (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}).
\end{aligned}
$$

Und die Behauptung folgt wie in dem analogen Satz 4.15 über zeitabhängige Testfunktionen für den Brakke-Fluss, indem die Terme entsprechend mit x_{n+1}^α erweitert werden. □

Abschließend erhalten wir mit dem Resultat über die zeitabhängigen Testfunktionen und mit der fundamentalen Abschätzung in der Bemerkung ii) nach der Definition 4.23 des α-Brakke-Kerns die nachfolgende Charakterisierung, indem erneut das Lemma 4.6 ii) angewandt wird.

Lemma 4.29 *Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ein α-Brakke-Fluss in $\mathbb{R}_+^{n+1}$ und $\phi \in C^2([0,T]\times \mathbb{R}_+^{n+1},\mathbb{R}^+)$ mit $\phi_t := \phi(t,\cdot) \in C_c^2(\mathbb{R}_+^{n+1},\mathbb{R}^+)$ für alle $t\in[0,T]$, dann gilt für alle Zeiten $0\le t_1 < t_2 \le T$ die Abschätzung*

$$
\mu_{t_2}(\phi_{t_2}\, x_{n+1}^\alpha) - \mu_{t_1}(\phi_{t_1}\, x_{n+1}^\alpha) \le \int_{t_1}^{t_2}\Big(\mathcal{B}^\alpha(V_t,\phi_t(x)) + \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)\, x_{n+1}^\alpha\,\mathrm{d}\mu_t\Big)\,\mathrm{d}t
$$

$$
\le \int_{t_1}^{t_2}\int_{\{\phi_t>0\}}\Big\{-\operatorname{div}_{M_t}(D\phi_t) - \alpha x_{n+1}^{-1}\langle D\phi_t, e_{n+1}\rangle + \frac{1}{4}|(D\phi_t)^\top|^2\,\phi_t^{-1} + \frac{\partial\phi}{\partial t}(t,x)\Big\}\, x_{n+1}^\alpha\,\mathrm{d}\mu_t\,\mathrm{d}t.
$$

Wir werden in den folgenden Sätzen wiederholt für verschiedene Testfunktionen $\phi(t,x)$ zeigen, dass der innere Integrand nicht positiv ist. Gilt mit der Anfangsvarifaltigkeit V_0 zusätzlich $\mu_0(\phi_0(x)\, x_{n+1}^\alpha) = 0$, dann folgt aus dem Lemma $\mu_t(\phi_t(x)\, x_{n+1}^\alpha) = 0$ für alle Zeiten $t\in[0,T]$.
Zusätzlich erhalten wir das folgende Regularitätsresultat für den α-Brakke-Fluss.

Proposition 4.30 (Regularität des α-Brakke-Flusses) *Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ein α-Brakke-Fluss in $\mathbb{R}_+^{n+1}$ und $\phi(t,x)$ eine Testfunktion wie in dem Lemma 4.29, dann sind die Zeitpunkte $t\in[0,T]$, in denen der α-Brakke-Kern $\mathcal{B}^\alpha(V_t,\phi_t(x))$ singulär ist, eine $\mathcal{L}$-Nullmenge.*

4.2.1 Eine allgemeine konvexe Einschließungsmenge

In unserem allgemeinen Einschließungssatz 4.17 für den Brakke-Fluss ist eine essentielle Bedingung, dass die Träger $\operatorname{spt} V_t$ für alle Zeiten $t \in [0, T]$ in einer kompakten Menge K enthalten sind. Dadurch kann die Testfunktion $\phi_t(x)$ mithilfe der Abschneidefunktion $\Psi_K(x)$ so modifiziert werden, dass diese kompakten Träger in dem $\mathbb{R}^{n+k}$ besitzt. Es ist natürlich und auch ausreichend den Träger der Anfangsfläche $\operatorname{spt} V_0$ als kompakt vorauszusetzen, weil somit durch das Lemma 4.16 folgt, dass die Mengen $\operatorname{spt} V_t$ für *jeden* Zeitpunkt t in einer konvexen und kompakten Menge liegen.

Da wir auch bei den folgenden Vergleichs- und Einschließungssätzen für den α-Brakke-Fluss nur eine Kompaktheitsbedingung an die Ausgangsfläche $\operatorname{spt} V_0$ stellen wollen, besteht unser erstes Ziel in dem Beweis eines vergleichbaren Resultats zu dem Lemma 4.16. Anstelle einer beliebigen konvexen Menge ist - aufgrund der ausgezeichneten x_{n+1}-Richtung - das bestmögliche Ergebnis die Einschließung in einen konvexen Zylinder.

Satz 4.31 (Konvexer Einschließungssatz) *Es sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein α-Brakke-Fluss und mit der Schranke $h_* > 0$ aus der Definition 4.24 des α-Brakke-Flusses gelte* $\operatorname{spt} V_0 \subset K \times [h_*, h^*]$ *mit einer abgeschlossenen, konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ und einer Zahl $h^* \in (h_*, \infty)$. Dann gilt* $\operatorname{spt} V_t \subset K \times [h_*, h^*]$ *für alle Zeiten $t \in [0, T]$.*

Für den Beweis benötigen wir drei Hilfssätze. Mit einem Radius $R > 0$ werden wir mehrfach die Funktion $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ gegeben durch $z \mapsto g(z) := \{1 - R^{-2}z\}^3_+$ betrachten. Aufgrund der dritten Potenz ist diese zweimal stetig differenzierbar mit den Ableitungen

$$g'(z) = -3R^{-2}\{1 - R^{-2}z\}^2_+ \leq 0, \quad g''(z) = 6R^{-4}\{1 - R^{-2}z\}_+ \geq 0.$$

Analog zu der Relation (4.4) der Funktion f aus dem Einschließungssatz des Brakke-Flusses erfüllt diese Funktion in den Punkten $g(z) \neq 0$ dieselbe Relation

$$\frac{|g'(z)|^2}{g(z)} \leq 4g''(z). \tag{4.7}$$

Lemma 4.32 (Kugelbarriere für außen liegende Flächen) *Definiere den Punkt $\tilde{v} := (0, \ldots, 0, v) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ mit einer beliebigen Höhe $v > 0$ und die Kugel $B_R(\tilde{v}) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 + (x_{n+1} - v)^2 < R^2\}$ mit Mittelpunkt $\tilde{v}$ und Radius R, wobei v und R so gewählt sind, dass $\bar{B}_R(\tilde{v}) \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ erfüllt ist. Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein α-Brakke-Fluss mit* $\operatorname{spt} V_0 \cap B_R(\tilde{v}) = \emptyset$. *Dann gilt*

$$\operatorname{spt} V_t \cap B_{\sqrt{R^2 - 2(n+\alpha)t}}(\tilde{v}) = \emptyset \textit{ für alle } t \leq T^*,\, T^* := \min\Big\{T, \frac{R^2}{2(n+\alpha)}\Big\}.$$

Bemerkungen

i) Wegen der horizontalen Translationsinvarianz ist die Aussage auch für andere Mittelpunkte $\tilde{v} = (v_1, \ldots, v_n, v)$ mit beliebigen $v_1, \ldots v_n \in \mathbb{R}$ gültig.

Beweis: Wir definieren die in x quadratische und in t lineare Funktion $q(t, x) := x_1^2 + \ldots x_n^2 + (x_{n+1} - v)^2 + 2(n + \alpha)t$ und mit der oben eingeführten Funktion g betrachten wir die Testfunktion $\phi(t, x) := g(q(t, x))$. Diese ist hinreichend regulär und aufgefasst als Funktion von x besitzt $\phi(t, \cdot) = \phi_t(\cdot)$ kompakten Träger in $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

Wir verwenden die Abschätzung aus dem Lemma 4.29 und bestimmen die benötigten Ableitungen der Testfunktion. Wir betrachten nur Punkte, in denen $\phi_t(x) > 0$ ist, somit gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= 2g'(q)(n+\alpha),\\
D\phi &= 2g'(q)(x_1,\dots,x_n,x_{n+1}-v) =: 2g'(q)\hat{x},\\
&\quad \text{wobei wir } \hat{x}(x) := (x_1,\dots,x_n,x_{n+1}-v) \text{ definiert haben,}\\
\frac{1}{4}|(D\phi)^\top|^2\phi^{-1} &= \frac{1}{4}4|g'(q)|^2|\hat{x}^\top|^2 g(q)^{-1} \overset{(4.7)}{\leq} 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2,\\
\operatorname{div}_{M_t} D\phi &= 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2g'(q)(p_{11}+\ldots+p_{nn}+p_{n+1n+1}) \overset{(1.4)}{=} 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2g'(q)n,\\
\langle D\phi, e_{n+1}\rangle &= 2g'(q)(x_{n+1}-v).
\end{aligned}$$

Wir erhalten für den inneren Integranden auf der Menge $\{\phi_t > 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{div}_{M_t}(D\phi) - \alpha x_{n+1}^{-1}\langle D\phi, e_{n+1}\rangle + \frac{1}{4}|(D\phi)^\top|^2\phi^{-1} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\\
&\leq -4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 - 2g'(q)n - 2\alpha x_{n+1}^{-1} g'(q)(x_{n+1}-v) + 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 + g'(q)(n+\alpha)\\
&= -2g'(q)(n+\alpha-\alpha x_{n+1}^{-1}v - (n+\alpha)) = 2g'(q)\alpha x_{n+1}^{-1} v \leq 0.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\operatorname{spt} V_0 \cap B_R(\tilde{v}) = \emptyset$ und da der Träger von $\phi(0,\cdot)$ innerhalb dieser Kugel liegt, folgt somit $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(0,x)\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_0 = 0$. Die Anwendung des Lemmas 4.29 liefert

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(t,x)\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t = 0 \text{ für } \textit{alle} \text{ Zeiten } t \in [0,T]$$

und damit die Behauptung. □

Lemma 4.33 (Konstante obere Ebenenbarriere) *Es sei* $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *ein* α*-Brakke-Fluss und* $\operatorname{spt} V_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon x_{n+1} \leq h^*\}$ *für eine Zahl* $h^* > 0$*. Dann gilt* $\operatorname{spt} V_t \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon x_{n+1} \leq h^*\}$ *für alle Zeiten* $t \in [0,T]$.

Beweis: Nehmen wir an, es existiert ein Zeitpunkt $t_0 \in (0,T]$, sodass $\operatorname{spt} V_{t_0} \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon x_{n+1} > h^*\} \neq \emptyset$. Dann findet sich eine Kugel $\bar{B}_R(\tilde{v}) \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$, mit der einerseits

$$\operatorname{spt} V_{t_0} \cap B_R(\tilde{v}) \neq \emptyset \tag{4.8}$$

und andererseits, wenn nur der Radius R hinreichend groß gewählt wird, auch die Inklusion $B_{\sqrt{R^2+2(n+\alpha)t_0}}(\tilde{v}) \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon x_{n+1} > h^*\}$ gilt.

Wir begründen detaillierter, dass diese Konstruktion möglich ist. Nehmen wir dazu ohne Einschränkung an, die Fläche $\operatorname{spt} V_t$ rage an der Stelle $x_1 = \ldots = x_n = 0$ um die Distanz $2\varepsilon, \varepsilon > 0$, über die Ebene $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n+1} = h^*\}$ hinaus. Dann existiert ein $R > 0$, sodass $\sqrt{R^2 + 2(n+\alpha)t_0} < R + \varepsilon$ gilt, indem $R > \frac{1}{\varepsilon}(n+\alpha)t_0 - \frac{\varepsilon}{2}$ gewählt wird, und bestimme außerdem den Kugelmittelpunkt $\tilde{v} = (0,\dots,0,v)$ so, dass $\operatorname{dist}(v,h^*) = v - h^* = R + \varepsilon$ gilt. Mit dieser Konstruktion sind die beiden Forderungen erfüllt.

Nach der Voraussetzung gilt $\operatorname{spt} V_0 \cap B_{\sqrt{R^2+2(n+\alpha)t_0}}(\tilde{v}) = \emptyset$ und mithilfe des Lemmas 4.32 folgt $\operatorname{spt} V_{t_0} \cap B_R(\tilde{v}) = \emptyset$ in dem Widerspruch zu der Relation (4.8). □

Lemma 4.34 (Zylinderbarriere für außen liegende Flächen) *Wir definieren den offenen sphärischen Zylinder* $Z_R(0) := B^n_R(0) \times \mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \ldots + x_n^2 < R^2\}$ *und es sei* $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *ein* α*-Brakke-Fluss. Für die Startvarifaltigkeit gelte sowohl* $\operatorname{spt} V_0 \cap Z_R(0) = \emptyset$ *als auch* $\operatorname{spt} V_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \le h^*\}$ *mit einem* $h^* > 0$*. Dann folgt* $\operatorname{spt} V_t \cap Z_{\sqrt{R^2-2nt}}(0) = \emptyset$ *für* $t \le T^*, T^* := \min\{T, R^2/(2n)\}$.

Bemerkung

i) Aufgrund der horizontalen Translationsinvarianz gilt das Lemma auch für Zylinder $Z_R(a)$ mit Mittellinien verschieden von Null, also für $Z_R(a) := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 < R^2\}$ mit einem beliebigen Vektor $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: Wir betrachten erneut die Funktion $g(z) := \{1 - R^{-2}z\}^3_+$ und definieren das Polynom $q(t,x) := x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2nt$. Es sei $h_* > 0$ aus der Definition des Flusses und wir testen mit der C^2-Funktion $\phi(t,x) := g(q(t,x))\Psi_{\{h_* \le x_{n+1} \le h^*\}}(x)$, sodass $\phi_t(\cdot)$ kompakten Träger in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ besitzt.

Nach der Definition des α-Brakke-Flusses und aufgrund der Voraussetzung der Höhenbeschränkung folgt zusammen mit dem Lemma 4.33, dass $\operatorname{spt} V_t \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : h_* \le x_{n+1} \le h^*\}$ für alle Zeiten $t \in [0,T]$ gilt. Somit muss die Abschneidefunktion $\Psi_{\{h_* \le x_{n+1} \le h^*\}}(x)$ nicht weiter berücksichtigt werden, da diese Eins auf allen Trägern $\operatorname{spt} V_t$ ist.
Wir berechnen die benötigten Ableitungen auf der Menge $\{\phi_t(x) > 0\}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= 2g'(q)n,\\
D\phi &= 2g'(z)(x_1, \ldots, x_n, 0) =: 2g'(q)\hat{x},\\
\frac{1}{4}|(D\phi)^\top|^2\phi^{-1} &= \frac{1}{4}4|g'(q)|^2|\hat{x}^\top|^2 g(q)^{-1} \overset{(4.7)}{\le} 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2,\\
\operatorname{div}_{M_t} D\phi &= 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2g'(q)(p_{11} + \ldots + p_{nn}) \overset{(1.4)}{=} 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2g'(q)(n - p_{n+1n+1}),\\
\langle D\phi, e_{n+1}\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Unter der Berücksichtigung der Relationen $g'(z) \le 0$ sowie $p_{n+1n+1} \ge 0$ nach (1.5) folgt für den inneren Integranden aus dem Lemma 4.29 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{div}_{M_t}(D\phi) - \alpha x_{n+1}^{-1}\langle D\phi, e_{n+1}\rangle + \frac{1}{4}|(D\phi)^\top|^2\phi^{-1} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\\
&\le -4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 - 2g'(q)(n - p_{n+1n+1}) + 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2g'(q)n\\
&= -2g'(q)n + 2g'(q)p_{n+1n+1} + 2g'(q)n = 2g'(q)p_{n+1n+1} \le 0.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Voraussetzung $\operatorname{spt} V_0 \cap Z_R(0) = \emptyset$ folgt $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(0,x)\, x_{n+1}^\alpha \, d\mu_0 = 0$. Nach dem Lemma 4.29 ist $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(t,x)\, x_{n+1}^\alpha \, d\mu_t = 0$ für jede Zeit $t \in [0,T]$ und damit ist die Behauptung gezeigt. □

Beweis zu Satz 4.31:
Die untere Schranke $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : x_{n+1} = h_*\}$ folgt direkt aus der Definition 4.24 des α-Brakke-Flusses und die Schranke $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : x_{n+1} = h^*\}$ nach oben folgt aus dem Lemma 4.33. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^n}(\operatorname{spt} V_t)$ innerhalb der konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ für jede Zeit t liegt.

Nehmen wir dazu im Widerspruch an, es existiert ein Zeitpunkt $t_0 \in (0,T]$, sodass $\operatorname{spt} V_{t_0} \cap \mathbb{R}^{n+1} \setminus (K \times \mathbb{R}) \neq \emptyset$. Dann existiert ein Zylinder $Z_R(a) \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus (K \times \mathbb{R})$ mit

$$\operatorname{spt} V_{t_0} \cap Z_R(a) \neq \emptyset \tag{4.9}$$

und $Z_{\sqrt{R^2+2nt_0}}(a) \cap (K \times \mathbb{R}) = \emptyset$. Dazu kann der Radius R hinreichend groß gewählt werden, nach demselben Prinzip wie in dem Beweis des Lemmas 4.33, da die Menge K konvex ist. Aufgrund der Voraussetzung gilt $\operatorname{spt} V_0 \cap Z_{\sqrt{R^2+2nt_0}}(a) = \emptyset$ und mithilfe des Lemmas 4.34 folgt $\operatorname{spt} V_{t_0} \cap Z_R(a) = \emptyset$ in dem Widerspruch zu der Annahme (4.9). □

Wir haben somit ein Analogon zu Brakkes konvexem Einschließungslemma 4.16 für den α-Brakke-Fluss bewiesen. Wir definieren den kompakten und konvexen Zylinder $\mathcal{Z}(\rho, h_*, h^*) := \bar{B}^n_\rho(0) \times [h_*, h^*] = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq \rho^2, h_* \leq x_{n+1} \leq h^*\}$. Ist nun $\operatorname{spt} V_0$ als kompakt vorausgesetzt, dann existieren ein Radius $0 < \rho < \infty$ und Höhen $0 < h_* \leq h^* < \infty$, sodass $\operatorname{spt} V_0 \subset \mathcal{Z}(\rho, h_*, h^*)$ ist. Nach dem Satz 4.31 ist dann $\operatorname{spt} V_t \subset \mathcal{Z}(\rho, h_*, h^*)$ für *alle* Zeiten $t \in [0,T]$ erfüllt. Diese Erkenntnis benötigen wir in den nächsten Sätzen.

Als eine erste Anwendung untersuchen wir, wie sich für einen beliebigen α-Brakke-Fluss $(V_t)_{t\in[0,T]} = v(M_t, \theta_t) \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ mit $\operatorname{spt} V_0$ kompakt die α-Masse $\mathbf{M}^\alpha(V_t) = \mathcal{H}^n \llcorner (\theta_t x_{n+1}^\alpha) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t$ in dem zeitlichen Verlauf ändert.
Betrachten wir den klassischen mittleren Krümmungsfluss $(\mathcal{M}_t)_{t\in[0,T]}$, dann gilt nach K. Ecker [14, Cor. 4.3] für *kompakte* Lösungen $\mathcal{M}_t$ die bekannte *Flächenabnahmeformel*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}^n(\mathcal{M}_t) = -\int_{\mathcal{M}_t} |\vec{H}|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^n \leq 0.$$

Für einen α-Brakke-Fluss erhalten wir die folgende Verallgemeinerung, wenn wir in der Definition mit der Funktion $\phi(t,x) := \Psi_{\mathcal{Z}(\rho,h_*,h^*)}(x)$ testen, welche konstant Eins auf den Trägern aller V_t ist und dort offensichtlich $D\phi = 0$ erfüllt. Da wir plötzliche Masseverluste zulassen, können wir nur die obere Ableitung verwenden und erhalten lediglich eine Ungleichung.

Satz 4.35 (Abnahme der α-Masse) *Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein α-Brakke-Fluss und $\operatorname{spt} V_0$ kompakt. Dann gilt für die α-Masse die Zerfallformel*

$$\overline{D}_t \mathbf{M}^\alpha(V_t) = \overline{D}_t \int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t \leq -\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \left(\mathbf{H} - \alpha x_{n+1}^{-1} \nu_{n+1} \nu\right)^2 x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_t \leq 0.$$

4.2.2 Vergleichs- und Einschließungssätze

In den folgenden Sätzen werden wir insbesondere von der konvexen Einschließung aus dem vorherigen Kapitel wiederholt Gebrauch machen.
Zunächst wollen wir wie bei den α-stationären Strömen in Kapitel 3.4.3 wieder physikalisch intuitive Resultate beweisen. Der α-Brakke-Fluss modelliert - in einem maßtheoretischen Kontext - den mittleren Krümmungsfluss für geschlossene Flächen unter Einfluss einer gewissen Schwerkraft in x_{n+1}-Richtung. In dem zeitlichen Verlauf wird die Fläche nach unten in Richtung der $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n+1} = 0\}$-Ebene sinken. Wir wollen diesen Effekt nun erstmalig genauer charakterisieren und betrachten dazu sinkende horizontale Ebenen unter- und oberhalb der Flächen.

Satz 4.36 (Untere Ebenenbarriere) *Sei* $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *ein* α*-Brakke-Fluss und* $\operatorname{spt} V_0$ *kompakt. Es gelte* $\operatorname{spt} V_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon x_{n+1} \geq h\}$ *für ein* $h > 0$, *dann folgt*

$$\operatorname{spt} V_t \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon x_{n+1} \geq \sqrt{h^2 - 2(\alpha+1)t}\} \text{ für } t < T^*, T^* := \min\Big\{T, \frac{h^2 - h_*^2}{2(\alpha+1)}\Big\}.$$

Bemerkung

i) Per Definition gilt $\operatorname{spt} V_t \geq \{x \colon x_{n+1} = h_*\}$ für alle Zeiten t, sodass wir aus diesem Satz keine neuen Informationen bekommen, wenn $\sqrt{h^2 - 2(\alpha+1)t} \leq h_*$ gilt. Das begründet unsere Wahl der Endzeit T^*.

Beweis: Nach Voraussetzung ist der Träger $\operatorname{spt} V_0$ kompakt und daher existieren Zahlen $\rho \in (0,\infty)$ und $h^* \in (h_*, \infty)$, sodass $\operatorname{spt} V_0 \subset \mathcal{Z}(\rho, h_*, h^*) = \bar{B}^n_\rho(0) \times [h_*, h^*]$ gilt und mithilfe des Satzes 4.31 folgt $\operatorname{spt} V_t \subset \mathcal{Z}(\rho, h_*, h^*)$ für alle Zeiten $t \in [0,T]$.
Wir definieren einerseits das Polynom $q(t,x) := x^2_{n+1} + 2(\alpha+1)t$ und andererseits die Funktion $g(z) := \{1 - h^{-2}z\}^3_+$, in der wir gegenüber dem letzten Kapitel das R durch ein h ersetzt haben. Wir testen mit der Funktion $\phi(t,x) := g(q(t,x))\Psi_{\mathcal{Z}(\rho,h_*,h^*)}(x)$, welche die Anforderungen an eine zulässige Testfunktion erfüllt, und wir müssen - wie immer - die Abschneidefunktion Ψ bei den weiteren Rechnungen nicht berücksichtigen. Für die Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= 2g'(q)(\alpha+1),\\
D\phi &= 2g'(q)(0,\dots,0,x_{n+1}) =: 2g'(q)\hat{x},\\
\frac{1}{4}|(D\phi)^\top|^2\phi^{-1} &= \frac{1}{4}4|g'(q)|^2|\hat{x}^\top|^2 g(q)^{-1} \overset{(4.7)}{\leq} 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2,\\
\operatorname{div}_{M_t} D\phi &= 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2g'(q)p_{n+1n+1} \overset{g'\leq 0\,\&\,(1.5)}{\geq} 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2g'(q),\\
\langle D\phi, e_{n+1}\rangle &= 2g'(q)x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Somit folgt erneut die Nichtpositivität für den bekannten Ausdruck

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{div}_{M_t}(D\phi) - \alpha x^{-1}_{n+1}\langle D\phi, e_{n+1}\rangle + \frac{1}{4}|(D\phi)^\top|^2\phi^{-1} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\\
&\leq -4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 - 2g'(q) - 2g'(q)\alpha + 4g''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2g'(q)(\alpha+1)\\
&= -2g'(q)(1+\alpha-(1+\alpha)) = 0.
\end{aligned}$$

Aufgrund der geforderten Mindesthöhe an die Startfläche $\operatorname{spt} V_0$ gilt $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(0,x)\, x^\alpha_{n+1}\, \mathrm{d}\mu_0 = 0$ und mithilfe des Lemmas 4.29 ist $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(t,x)\, x^\alpha_{n+1}\, \mathrm{d}\mu_t = 0$ für jede Zeit $t \in [0,T]$ und dies liefert uns wegen der speziellen Funktion $\phi(t,x)$ die gewünschte Kontrolle der Höhe. □

Dieser Vergleichssatz ermöglicht den Einblick, dass die Familie der Flächen $(\operatorname{spt} V_t)_{t\in[0,T]}$ eines α-Brakke-Flusses *nicht schneller sinken kann* als die entsprechende Ebene. Der folgende Satz liefert ein gegenteiliges Resultat, sodass die Flächenfamilie mindestens *so schnell sinken muss* wie eine horizontale Ebene.

Satz 4.37 (Obere Ebenenbarriere) *Sei* $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *ein* α*-Brakke-Fluss und* $\operatorname{spt} V_0$ *kompakt. Es gelte* $\operatorname{spt} V_0 \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon x_{n+1} \leq h\}$ *für ein* $h > 0$, *dann folgt*

$$\operatorname{spt} V_t \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon x_{n+1} \leq \sqrt{h^2 - 2\alpha t}\} \text{ für } t < T^*, T^* := \min\Big\{T, \frac{h^2 - h_*^2}{2\alpha}\Big\}.$$

Aus diesem Satz folgt sofort, falls ein α-Brakke-Fluss mit $h_* > 0$ gegeben ist, dann gilt *notwendigerweise* für die Endzeit $T \leq (h^2 - h_*^2)/(2\alpha)$, wobei $h = \sup_{x \in \operatorname{spt} V_0} x_{n+1}$ minimal gewählt werden kann und wir $V_t \not\equiv 0$ ab einer Zeit $0 < t_0 < T$ annehmen. Außerdem erhalten wir direkt das folgende Korollar.

Korollar 4.38 (Maximumprinzip) *Sei $(V_t)_{t \in [0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}_+^{n+1})$ ein α-Brakke-Fluss mit $\operatorname{spt} V_0$ kompakt. Dann gilt für jedes $t \in [0,T]$*

$$\max_{x \in \operatorname{spt} V_t} x_{n+1} \leq \max_{x \in \operatorname{spt} V_0} x_{n+1}.$$

Es folgt sogar für alle Zeiten $t_1, t_2 \in [0,T]$ mit $t_2 > t_1$ die Verschärfung

$$\max_{x \in \operatorname{spt} V_{t_2}} x_{n+1} < \max_{x \in \operatorname{spt} V_{t_1}} x_{n+1},$$

indem die Höhe h zu der Zeit t_1 optimal bestimmt wird.

Beweis zu Satz 4.37: Wir definieren $q(t,x) := x_{n+1}^2 + 2\alpha t$ und setzen $f(z) := \{h^{-2}z - 1\}_+^3$, in Anlehnung an die Funktion f aus dem Einschließungssatz 4.17 des Brakke-Flusses, dann gilt für die Ableitungen

$$f'(z) = 3h^{-2}\{h^{-2}z - 1\}_+^2 \geq 0, \quad f''(z) = 6h^{-4}\{h^{-2}z - 1\}_+ \geq 0 \tag{4.10}$$

$$\text{sowie } \frac{|f'(z)|^2}{f(z)} \leq 4f''(z), \text{ falls } f(z) \neq 0. \tag{4.11}$$

Durch das Ausnutzen der Kompaktheit $\operatorname{spt} V_0$ können wir mit der Funktion $\phi(t,x) := f(q(t,x))\Psi_{\mathcal{Z}(\rho,h_*,h^*)}(x)$ testen. Für die Ableitungen berechnen wir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= 2f'(q)\alpha, \\
D\phi &= 2f'(q)(0,\dots,0,x_{n+1}) =: 2f'(q)\hat{x}, \\
\frac{1}{4}|(D\phi)^\top|^2\phi^{-1} &= \frac{1}{4}4|f'(q)|^2|\hat{x}^\top|^2 f(q)^{-1} \overset{(4.11)}{\leq} 4f''(q)|\hat{x}^\top|^2, \\
\operatorname{div}_{M_t} D\phi &= 4f''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2f'(q)p_{n+1n+1} \overset{(*)}{\geq} 4f''(q)|\hat{x}^\top|^2, \\
\langle D\phi, e_{n+1}\rangle &= 2f'(q)x_{n+1},
\end{aligned}$$

wobei wir in $(*)$ die Nichtnegativität des zweiten Summanden ausgenutzt haben, da nach (1.5) einerseits $p_{n+1n+1} \geq 0$ und andererseits auch $f'(q) \geq 0$ nach der Berechnung (4.10) gilt.
Die Behauptung folgt schließlich durch analoges Vorgehen wie in dem ersten Vergleichssatz 4.36 mit einer horizontalen Ebene. □

Wir betrachten nun eine weitere Einschließung in eine konvexe Menge, welche aber eine deutlich stärkere Aussage als der von der Zeit unabhängige konvexe Zylinder in dem Satz 4.31 liefert. Für eine Höhe $v \geq 0$ und einen Parameter $c > 0$ definieren wir mit $\tilde{v} := (0,\dots,0,v)$ den Ellipsoiden

$$\mathcal{E}_R(\tilde{v}) := \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{n-1}{c^2}(x_{n+1} - v)^2 \leq R^2\right\}$$

mit einer Zahl $R > 0$. Dieser besitzt n Halbachsen der Länge R und eine Halbachse der Länge $\frac{c}{\sqrt{n-1}}R$ in x_{n+1}-Richtung. Der Satz gilt aber auch für jeden beliebigen horizontal verschobenen Punkt $\tilde{v} = (v_1,\dots,v_n,v) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $v \geq 0$.

Satz 4.39 (Ellipsoideinschließungssatz) *Sei* $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *ein* α*-Brakke-Fluss. Für ein* $v \geq 0, c > 0$ *gelte* $\operatorname{spt} V_0 \subset \mathcal{E}_R(\tilde{v})$ *für ein* $R > 0$ *und ist mit einem* $C > 0$ *die Bedingung*

$$\alpha\frac{v}{h_*} \leq \min\Big\{c^2 + 1 + \alpha - \frac{c^2}{n-1}C, \frac{n}{n-1}c^2 + \alpha - \frac{c^2}{n-1}C\Big\}, \tag{4.12}$$

erfüllt, dann folgt die Inklusion

$$\operatorname{spt} V_t \subset \mathcal{E}_{\sqrt{R^2-2Ct}}(\tilde{v}) \text{ für alle } t \in [0,T^*], T^* := \min\Big\{T, \frac{R^2}{2C}\Big\}.$$

Beweis: Da der Träger $\operatorname{spt} V_0$ innerhalb der kompakten Menge $\mathcal{E}_R(\tilde{v}) \cap \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n+1} \geq h_*\}$ liegt, ist $\operatorname{spt} V_0$ ebenfalls eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^{n+1}_+$, wodurch diese Eigenschaft nicht zusätzlich vorausgesetzt werden muss. Es existieren somit Zahlen $\rho > 0, h^* \in (h_*, \infty)$, sodass $\operatorname{spt} V_t \subset \mathcal{Z}(\rho, h_*, h^*)$ für alle Zeiten $t \in [0,T]$ gilt.
Wir definieren $q(t,x) := x_1^2 + \ldots + x_n^2 + \frac{n-1}{c^2}(x_{n+1}-v)^2 + 2Ct$ sowie mit der Funktion $f(z) := \{R^{-2}z - 1\}^3_+$ die Komposition $\phi(t,x) := f(q(t,x))\Psi_{\mathcal{Z}(\rho,h_*,h^*)}(x) \in C^2([0,t] \times \mathbb{R}^{n+1}_+, \mathbb{R}^+)$. Es gelten die Relationen (4.10) und (4.11), da schlicht h in R umbenannt wurde. Auf der Menge $\{\phi_t(x) > 0\}$ berechnen wir die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial t} &= 2f'(q)C,\\
D\phi &= 2f'(q)\Big(x_1, \ldots, x_n, \frac{n-1}{c^2}(x_{n+1}-v)\Big) =: 2f'(q)\hat{x},\\
\frac{1}{4}|(D\phi)^\top|^2\phi^{-1} &= \frac{1}{4}4|f'(q)|^2|\hat{x}^\top|^2 f(q)^{-1} \overset{(4.11)}{\leq} 4f''(q)|\hat{x}^\top|^2,\\
\operatorname{div}_{M_t} D\phi &= 4f''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2f'(q)\Big(p_{11} + \ldots + p_{nn} + \frac{n-1}{c^2}p_{n+1n+1}\Big),\\
&\overset{(1.4)}{=} 4f''(q)|\hat{x}^\top|^2 + 2f'(q)\Big(n + \Big(\frac{n-1}{c^2} - 1\Big)p_{n+1n+1}\Big),\\
\langle D\phi, e_{n+1}\rangle &= 2f'(q)\frac{n-1}{c^2}(x_{n+1}-v)
\end{aligned}$$

und wenden das Lemma 4.29 an. Für den inneren Integranden erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{div}_{M_t}(D\phi) - \alpha x_{n+1}^{-1}\langle D\phi, e_{n+1}\rangle + \frac{1}{4}|(D\phi)^\top|^2\phi^{-1} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\\
&\leq -2f'(q)\Big(n + \Big(\frac{n-1}{c^2} - 1\Big)p_{n+1n+1}\Big) - 2f'(q)\alpha x_{n+1}^{-1}\frac{n-1}{c^2}(x_{n+1}-v) + 2f'(q)C\\
&= 2f'(q)\frac{n-1}{c^2}\Big\{-\frac{n}{n-1}c^2 - \Big(1 - \frac{c^2}{n-1}\Big)p_{n+1n+1} - \alpha + \alpha\frac{v}{x_{n+1}} + \frac{c^2}{n-1}C\Big\}\\
&\leq 2f'(q)\frac{n-1}{c^2}\Big\{-\frac{n}{n-1}c^2 - \Big(1 - \frac{c^2}{n-1}\Big)p_{n+1n+1} - \alpha + \alpha\frac{v}{h_*} + \frac{c^2}{n-1}C\Big\}.
\end{aligned}$$

In der letzten Ungleichung haben wir die Definition des α-Brakke-Flusses ausgenutzt. Für alle Zeiten $t \in [0,T]$ gilt die Schranke $\operatorname{spt} V_t \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon x_{n+1} \geq h_*\}$ nach unten und außerdem verwendeten wir explizit die Nichtnegativitäten $f'(q) \geq 0$ sowie $v \geq 0$. Wir erkennen, dass jede Zahl $h = h((V_t)_t) > h_*$ mit $\operatorname{spt} V_t \subset \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_+ \colon x_{n+1} \geq h\}$ für alle Zeiten $t \in [0,T]$ hinreichend ist und somit die geforderte Bedingung (4.12) unter Umständen leicht schwächer wäre, falls in der Definition 4.24 nicht das größtmögliche h_* gewählt worden ist.

Für die weitere Abschätzung des Ausdrucks $\{\ldots\}$ unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall 1: $c^2 < n-1$, dann ist $\left(\frac{n-1}{c^2}-1\right) > 0$ und wegen $p_{n+1n+1} \overset{(1.5)}{\geq} 0$ kann der entsprechende Term ignoriert werden, ohne dass der Wert kleiner wird

$$\{\ldots\} \leq \Big\{ -\frac{n}{n-1}c^2 - \alpha + \alpha\frac{v}{h_*} + \frac{c^2}{n-1}C\Big\} \leq 0.$$

Fall 2: $c^2 \geq n-1$, dann ist $\left(\frac{n-1}{c^2}-1\right) \leq 0$ und ebenfalls nach (1.5) gilt $p_{n+1n+1} \leq 1$, sodass

$$\begin{aligned}\{\ldots\} &\leq \Big\{ -\frac{n}{n-1}c^2 - \Big(1-\frac{c^2}{n-1}\Big) - \alpha + \alpha\frac{v}{h_*} + \frac{c^2}{n-1}C\Big\} \\ &= \Big\{ -c^2 - 1 - \alpha + \alpha\frac{v}{h_*} + \frac{c^2}{n-1}C\Big\} \leq 0.\end{aligned}$$

Beide Ausdrücke sind aufgrund der Voraussetzung nicht positiv und zusammengenommen mit der Nichtnegativität des Vorfaktors $2f'(q)\frac{n-1}{c^2}$ folgt die Nichtpositivität des gesamten inneren Integranden. Aus der Bedingung $\operatorname{spt} V_0 \subset \mathcal{E}_R(\tilde{v})$ erhalten wir $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(0,x)\, x_{n+1}^\alpha \,\mathrm{d}\mu_0 = 0$ und durch das Lemma 4.29 die gewünschte Einschließung. □

Wir kommen nun zu unserem letzten Einschließungsresultat für den α-Brakke-Fluss. Dieses beinhaltet eine nichtkonvexe Menge und bildet gleichzeitig die Grundlage für die Untersuchung von Singularitäten in dem letzten Kapitel.

Satz 4.40 (Hyperboloideinschließungssatz) *Für eine Signatur $j = 1,\ldots,n-1$, eine Höhe $v \geq 0$ sowie einen Parameter $b > 0$ definieren wir das Hyperboloid*

$$\mathcal{H}_j(R) := \Big\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sum_{i=1}^{n+1-j} x_i^2 - \frac{n-j}{j}\, b \sum_{i=n+1-j+1}^{n} x_i^2 - \frac{n-j}{j}\, b\, (x_{n+1}-v)^2 \leq R \Big\}$$

für ein $R > 0$, wobei die zweite Summe in dem Fall $j = 1$ als leer zu interpretieren ist. Es sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein α-Brakke-Fluss mit $\operatorname{spt} V_0$ kompakt. Für die Startzeit $t = 0$ definieren wir die Höhe $h_0 := \sup_{x\in \operatorname{spt} V_0} x_{n+1}$ und gilt $\operatorname{spt} V_0 \subset \mathcal{H}_j(R)$ sowie die Bedingung

$$\frac{1}{b} - \Big(1+\frac{\alpha}{j}\Big) + \frac{\alpha}{j}\frac{v}{h_0} - \frac{1}{b}\frac{C}{n-j} \geq 0, \tag{4.13}$$

dann folgt $\operatorname{spt} V_t \subset \mathcal{H}_j(R-2Ct)$ für alle Zeiten $t \in [0,T]$.

Beweis: An das Hyperboloid $\mathcal{H}_j(R)$ angepasst betrachten wir mit denselben Parametern das Polynom

$$q(t,x) := \sum_{i=1}^{n+1-j} x_i^2 - \frac{n-j}{j}\, b \sum_{i=n+1-j+1}^{n} x_i^2 - \frac{n-j}{j}\, b\, (x_{n+1}-v)^2 + 2Ct$$

und erneut die Funktion $f(z) := \{R^{-1}z - 1\}_+^3$ wie bei dem Einschließungssatz 4.17 des Brakke-Flusses. Da der Träger der Anfangsvarifaltigkeit eine kompakte Menge ist, besitzt die Funktion $\phi(t,x) := f(q(t,x))\Psi_{\mathcal{Z}(\rho,h_*,h^*)}(x)$ durch eine geeignete Wahl von $\rho > 0$ sowie

$h^* \in (h_*, \infty)$ als Funktion aufgefasst von x kompakten Träger in $\mathbb{R}^{n+1}_+$ und ist insgesamt eine zulässige Testfunktion. Wir definieren die vektorwertige Funktion

$$\hat{x}(x) = \Big(x_1, \dots, x_{n+1-j}, \frac{n-j}{j}\, b\, x_{n+1-j+1}, \dots, \frac{n-j}{j}\, b\, x_n, \frac{n-j}{j}\, b\, (x_{n+1} - v)\Big)$$

mit der üblichen Interpretation in dem Fall $j = 1$ und berechnen die benötigten Ableitungen und schätzen diese mithilfe der Eigenschaften der orthogonalen Projektion ab

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= 2 f'(q) C, \\
D\phi &= 2 f'(q) \hat{x}, \\
\frac{1}{4} |(D\phi)^\top|^2 \phi^{-1} &= \frac{1}{4} 4 |f'(q)|^2 |\hat{x}^\top|^2 f(q)^{-1} \overset{(4.4)}{\leq} 4 f''(q) |\hat{x}^\top|^2, \\
\operatorname{div}_{M_t} D\phi &= 4 f''(q) |\hat{x}^\top|^2 + 2 f'(q) \Big(\sum_{i=1}^{n+1-j} p_{ii} - \frac{n-j}{j}\, b \sum_{i=n+1-j+1}^{n+1} p_{ii} \Big) \\
&= 4 f''(q) |\hat{x}^\top|^2 + 2 f'(q) \Big(\sum_{i=1}^{n+1} p_{ii} - \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii} - \frac{n-j}{j}\, b \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii} \Big) \\
&= 4 f''(q) |\hat{x}^\top|^2 + 2 f'(q) \Big(n - \Big(1 + \frac{n-j}{j}\, b\Big) \sum_{i=n+2-j}^{n+1} p_{ii} \Big) \\
&\geq 4 f''(q) |\hat{x}^\top|^2 + 2 f'(q) \big(n - (j + (n-j) b) \big), \\
\langle D\phi, e_{n+1} \rangle &= 2 f'(q) \Big(- \frac{n-j}{j}\, b\, (x_{n+1} - v) \Big).
\end{aligned}$$

Die Terme mit der zweiten Ableitung $f''(z)$ kürzen sich weg und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&- \operatorname{div}_{M_t}(D\phi) - \alpha x_{n+1}^{-1} \langle D\phi, e_{n+1} \rangle + \frac{1}{4} |(D\phi)^\top|^2 \phi^{-1} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \\
&\leq -2 f'(q) \big(n - (j + (n-j)\, b) \big) - 2 f'(q) \alpha x_{n+1}^{-1} \Big(- \frac{n-j}{j}\, b\, \big(x_{n+1} - v\big) \Big) + 2 f'(q) C \\
&= 2 f'(q) \Big\{ -n + j + (n-j)\, b + \frac{n-j}{j}\, b\, \alpha - \frac{n-j}{j}\, b\, \alpha \frac{v}{x_{n+1}} + C \Big\} \\
&= 2 f'(q) (n-j)\, b \Big\{ -\frac{1}{b} + 1 + \frac{\alpha}{j} - \frac{\alpha}{j} \frac{v}{x_{n+1}} + \frac{1}{b} \frac{C}{n-j} \Big\} \\
&\leq 2 f'(q) (n-j)\, b \Big\{ -\frac{1}{b} + 1 + \frac{\alpha}{j} - \frac{\alpha}{j} \frac{v}{h_0} + \frac{1}{b} \frac{C}{n-j} \Big\}.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt nach Korollar 4.38, sodass wir hier explizit die Nichtnegativität von $f'(z)$, welche aus der Bedingung $R > 0$ resultiert, und $j \leq n-1$ ausgenutzt haben. Aufgrund der Bedingung (4.13) ist der gesamte Ausdruck nichtpositiv.

Da nach Voraussetzung $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(0,x)\, x_{n+1}^{\alpha}\, \mathrm{d}\mu_0 = 0$ gilt, folgt mit dem Lemma 4.29, dass $\int_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \phi(t,x)\, x_{n+1}^{\alpha}\, \mathrm{d}\mu_t$ für alle Zeiten $t \in (0,T]$ ebenfalls Null ist und somit $\operatorname{spt} V_t \subset \mathcal{H}_j(R - 2Ct)$ erfüllt sein muss. Diese Einschließung bleibt auch für Zeiten $t > R/(2C)$ gültig, falls die Endzeit T hinreichend groß ist. $\square$

Wir weisen darauf hin, dass aufgrund der Konstruktion des α-Brakke-Flusses alle Sätze in diesem Kapitel auch für den *glatten* α-Krümmungsfluss gemäß der Definition in dem Satz 4.22 gelten.

4.2.3 Ein Beispiel zu der Singularitätenbildung

Der zuletzt bewiesene Einschließungssatz liefert erneut einen einfachen Beweis für die Existenz von Singularitäten in endlicher Zeit bei dem α-Brakke-Fluss.
Analog zu dem Kapitel 4.1.2 betrachten wir zwei Kugeln in den beiden Hälften des Hyperboloids mit der Signatur $j = 1$ und, falls deren Radius hinreichend groß in dem Vergleich zu dem Nackenradius $\sqrt{R}$ des Hyperboloids ist, dann kann eine Singularität in der Spitze des Doppelkegels entstehen, falls dieser Punkt trotz der Möglichkeit eines plötzlichen Masseverlustes in dem Träger der Fläche enthalten ist.

Anders als bei dem Brakke-Fluss müssen wir bei der Konstruktion in diesem Kapitel die Bedingung (4.13) aus dem Hyperboloideinschließungssatz 4.40 berücksichtigen. Wir bleiben daher nicht so allgemein wie in dem Kapitel 4.1.2, sondern zeigen anhand eines konkreteren Beispiels, dass ein solcher α-Brakke-Fluss in der Tat existieren kann.

Wir untersuchen den physikalisch relevanten Fall $\alpha = 1$, sodass wir eine Fläche mit konstanter Dichte und ohne Rand in einem Schwerefeld untersuchen.
Nach dem Lemma 4.32 über die Kugelbarriere für außen liegende Flächen wissen wir, dass die Träger eines α-Brakke-Flusses V_t disjunkt von der schrumpfenden Kugel $B_{\sqrt{\rho_0^2-2(n+1)t}}(\tilde{v})$ bleiben, falls für die Startfläche $\operatorname{spt} V_0 \cap B_{\rho_0}(\tilde{v}) = \emptyset$ gilt, wobei $\tilde{v}$ von der Form $(0, \ldots, 0, v) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ ist. Wir wählen zwei Kugeln mit den Mittelpunkthöhen $v = 15$ respektive $v = 5$ und dem Radius $\rho_0 = \sqrt{5/2}$. In dem zeitlichen Verlauf kann also mit den folgenden Barrieren verglichen werden

$$B^+(t) := \Big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sum_{i=1}^n x_i^2 + (x_{n+1} - 15)^2 \leq \frac{5}{2} - 2(n+1)t\Big\},$$
$$B^-(t) := \Big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sum_{i=1}^n x_i^2 + (x_{n+1} - 5)^2 \leq \frac{5}{2} - 2(n+1)t\Big\}.$$

Beide Kugeln sind zu dem Zeitpunkt $\tau := \frac{1}{n+1}$ noch *nicht* auf einen Punkt zusammen geschrumpft.

Weiterhin betrachten wir für die Konstruktion das Hyperboloid mit der Höhe $v = 10$ und der Skalierung $b = \frac{1}{2}$. Wir definieren $C = \frac{1}{4}$, sodass wir in dem Verlauf der Zeit gemäß des Einschließungsresultats 4.40 für $R = \frac{1}{2(n+1)}$ die folgende Menge ansehen

$$\mathcal{H}(t) := \Big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{n-1}{2}(x_{n+1} - 10)^2 \leq \frac{1}{2(n+1)} - 2\,\frac{1}{4}t\Big\}.$$

Zu der Zeit $\tau = \frac{1}{n+1}$ wird aus diesem Hyperboloid ein Doppelkegel mit einer Punktsingularität in $(0, \ldots, 0, 10)$.

Wir zeigen nun, dass die schrumpfenden Kugeln $B^\pm(t)$ für $t \leq \tau$ innerhalb des sich zeitlich veränderlichen Hyperboloids $\mathcal{H}(t)$ liegen. Dazu reicht es aus, dass die Kugeln zu dem Zeitpunkt, in dem ihr Radius am größten ist, das heißt für $t = 0$, in dem Doppelkegel $\mathcal{H}(\frac{1}{n+1})$ liegen, da sich das Hyperboloid von außen an den Kegel annähert. Somit ist für die obere Kugel $B^+(0)$ die folgende Inklusion zu zeigen

$$\Big\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (x_{n+1}-15)^2 \leq \frac{5}{2}\Big\} \subset \Big\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{n-1}{2}(x_{n+1}-10)^2 \leq 0, x_{n+1} \geq 10\Big\}.$$

Mit anderen Worten lässt sich diese Bedingung wie folgt ausdrücken

$$15 - \sqrt{5/2} \geq 10 \text{ und}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \frac{5}{2} - (x_{n+1}-15)^2 \text{ impliziert } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \frac{n-1}{2}(x_{n+1}-10)^2.$$

Somit verbleibt die Ungleichung

$$\frac{5}{2} - (x_{n+1}-15)^2 \leq \frac{n-1}{2}(x_{n+1}-10)^2$$

zu verifizieren. Die rechte Seite wird mit zunehmendem n größer, aber die Ungleichung ist bereits in dem kleinst möglichen Fall mit Vorfaktor $\frac{1}{2}$ erfüllt, da $\frac{5}{2} - (x_{n+1}-15)^2 \leq \frac{1}{2}(x_{n+1}-10)^2$ äquivalent zu der offensichtlich wahren Aussage

$$-\frac{1}{6}(3x_{n+1}-40)^2 - \frac{35}{6} \leq 0$$

ist. Das analoge Resultat gilt für die untere Kugel $B^-(0)$.

Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein beliebiger 1-Brakke-Fluss, dessen Anfangsvarifaltigkeit die Höhenbeschränkung $h_0 = \sup_{x\in \operatorname{spt} V_0} x_{n+1} \leq 20$ besitzt. Dann ist die Bedingung (4.13) aus der Hyperboloideinschließung für jedes $n \geq 2$ erfüllt

$$\begin{aligned}\frac{1}{b} - \Big(1+\frac{\alpha}{j}\Big) + \frac{\alpha}{j}\frac{v}{h_0} - \frac{1}{b}\frac{C}{n-1} &= \frac{1}{b} - \Big(1+\frac{1}{1}\Big) + \frac{1}{1}\frac{v}{h_0} - \frac{1}{b}\frac{C}{n-1}\\ &= 2 - 2 + \frac{10}{h_0} - 2\frac{1}{n-1}\frac{1}{4} \geq \frac{10}{20} - \frac{2}{4} = 0.\end{aligned}$$

Wir nehmen weiterhin an, dass dieser 1-Brakke-Fluss die Definition mit einer Zahl $h_* \leq 1$ erfüllt, dann können die Flächen $(\operatorname{spt} V_t)_{t\in[0,\tau]}$ unterhalb der unteren Kugel verlaufen, das heißt eine geringere Höhe als $5 - \sqrt{5/2}$ besitzen. Liegt $\operatorname{spt} V_0$ oberhalb der Ebene $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n+1} = \sqrt{1+4/(n+1)}\}$, dann folgt aus dem Satz 4.36 über die untere Ebenenbarriere, dass die Fläche zu dem Zeitpunkt τ noch oberhalb der Ebene $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n+1} = 1\}$ liegen muss.

Beispiel

i) Sei $(V_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{V}_n(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ ein 1-Brakke Fluss mit $T > \tau := \frac{1}{n+1}$, sodass $\sup_{x\in \operatorname{spt} V_0} x_{n+1} \leq 20$ gilt. Weiterhin sei $\operatorname{spt} V_0$ zusammenhängend, kompakt und liege innerhalb des oben konstruierten Hyperboloids $\mathcal{H}(0)$ und umlaufe die Kugeln $B^+(0)$ und $B^-(0)$ in einer hantelähnlichen Form ohne diese zu schneiden. Ist $\tilde{v} := (0,\ldots,0,10) \in \operatorname{spt} V_\tau$, dann gehört dieser Punkt nicht zu der regulären Menge $\tilde{v} \notin \operatorname{reg} V_\tau$. Durch den plötzlichen Masseverlust besteht aber die Möglichkeit die Konstruktion zu „umgehen“ und somit nur innerhalb einer Hälfte des Kegels $\mathcal{H}(\tau)$ zu liegen.

Da der Einschließungssatz auch für Zeiten $t > \tau$ gültig bleibt, lässt sich auch für den α-Brakke-Fluss ein entsprechendes allgemeines *Nichtexistenzresultat* analog zu dem Satz 4.19 formulieren. Wir vertiefen diese Überlegungen in der vorliegenden Arbeit aber nicht weiter.

Literaturverzeichnis

[1] Almgren, F. J.: Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. In: *Ann. Math.* 84 (1966), S. 277–292

[2] Angenent, S.: Shrinking doughnuts. In: *Proc. of the Conf. on Elliptic and Parabolic Equations held at Gregynog, Wales* (1989)

[3] Böhme, R. ; Hildebrandt, S. ; Tausch, E.: The two-dimensional analogue of the catenary. In: *Pac. J. Math.* 88 (1980), S. 247–278

[4] Bombieri, E. ; Giorgi, E. de ; Giusti, E.: Minimal cones and the Bernstein problem. In: *Invent. Math.* 7 (1969), S. 243–268

[5] Brakke, K. A.: *The motion of a surface by its mean curvature.* Princeton University Press, 1978

[6] Dierkes, U.: Maximum principles and nonexistence results for minimal submanifolds. In: *Manuscr. Math.* 69 (1990), S. 203–218

[7] Dierkes, U. ; Hildebrandt, S. ; Sauvigny, F.: *Minimal surfaces.* Springer, 2010

[8] Dierkes, U. ; Hildebrandt, S. ; Tromba, A. J.: *Regularity of minimal surfaces.* Springer, 2010

[9] Dierkes, U. ; Huisken, G.: The n-dimensional analogue of the catenary: existence and non-existence. In: *Pac. J. Math.* 141 (1990), S. 47–54

[10] Dierkes, U. ; Schwab, D.: Maximum principles for submanifolds of arbitrary codimension and bounded mean curvature. In: *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* 22 (2005), S. 173 – 184

[11] Douglas, J.: Solution of the problem of Plateau. In: *Trans. Am. Math. Soc.* 33 (1931), S. 263–321

[12] Duzaar, F. ; Steffen, K.: λ minimizing currents. In: *Manuscr. Math.* 80 (1993), S. 403–447

[13] Ecker, K.: Local techniques for mean curvature flow. In: *Proc. Centre for Mathematics and its Applications, Australian National University* 26 (1991), S. 107–119

[14] Ecker, K.: *Regularity theory for mean curvature flow.* Birkhäuser, 2004

[15] Evans, L. C. ; Gariepy, R. F.: *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press, 1992

[16] Federer, H.: *Geometric measure theory.* Springer, 1969

[17] Federer, H. ; Fleming, W. H.: Normal and integral currents. In: *Ann. of Math.* 72 (1960), S. 458–520

[18] Fleming, W. H.: On the oriented Plateau problem. In: *Rend. Circ. Mat. Palermo* 11 (1961), S. 69–90

[19] Gilbarg, D. ; Trudinger, N.S.: *Elliptic partial differential equations of second order.* 2. Edition. Springer, 1998

[20] Hildebrandt, S.: Einige Bemerkungen über Flächen beschränkter mittlerer Krümmung. In: *Math. Z.* 115 (1970), S. 169–178

[21] Hildebrandt, S.: Maximum principles for minimal surfaces and for surfaces of continuous mean curvature. In: *Math. Z.* 128 (1972), S. 253–269

[22] Hildebrandt, S.: *Analysis 2.* Springer, 2003

[23] Hildebrandt, S.: *Analysis 1.* 2. Edition. Springer, 2006

[24] Huisken, G.: Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. In: *J. Differ. Geom.* 20 (1984), S. 237–266

[25] Ilmanen, T.: Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature. In: *Mem. Amer. Math. Soc.* 108 (1994)

[26] Jorge, L. P. ; Tomi, F.: The barrier principle for minimal submanifolds of arbitrary codimension. In: *Ann. Glob. Anal. Geom.* 24 (2003), S. 261–267

[27] Lahiri, A.: *Regularity of the Brakke flow*, Freie Universtität Berlin, Diss., 2014

[28] Mateljević, M. ; Svetlik, M. ; Albijanić, M. ; Savić, N.: Generalizations of the Lagrange mean value theorem and applications. In: *Filomat* 27 (2013), Nr. 4, S. 515–528

[29] Morgan, F.: *Geometric measure theory.* Academic Press, Inc., 1987

[30] Osserman, R. ; Schiffer, M.: Doubly connected minimal surfaces. In: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 58 (1975), S. 285–307

[31] Radó, T.: *On the problem of Plateau.* Bd. 2. Springer, 1933

[32] Simoes, P.: On a class of minimal cones in $\mathbb{R}^n$. In: *Bull. Am. Math. Soc.* 80 (1974), S. 488–489

[33] Simon, L.: *Lectures on geometric measure theory.* Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, 1984 (Proc. Centre Math. Anal.)

[34] Simon, L.: A strict maximum principle for area minimizing hypersurfaces. In: *J. Differ. Geom.* 26 (1987), S. 327–335

[35] Simons, J.: Minimal varieties in Riemannian manifolds. In: *Ann. of Math.* 88 (1968), S. 62–105

[36] Solomon, B. ; White, B.: A strong maximum principle for varifolds that are stationary with respect to even parametric elliptic functionals. In: *Indiana Univ. Math. J.* 38 (1989), S. 683–691

[37] Stone, A.: Evolutionary existence proofs for the pendant drop and n-dimensional catenary problems. In: *Pac. J. Math.* 164 (1994), S. 147–178

[38] White, B.: The maximum principle for minimal varieties of arbitrary codimension. In: *Commun. Anal. Geom.* 18 (2010), Nr. 3, S. 421–432

[39] Winklmann, S.: Maximum principles for energy stationary hypersurfaces. In: *Analysis* 26 (2006), S. 251–258