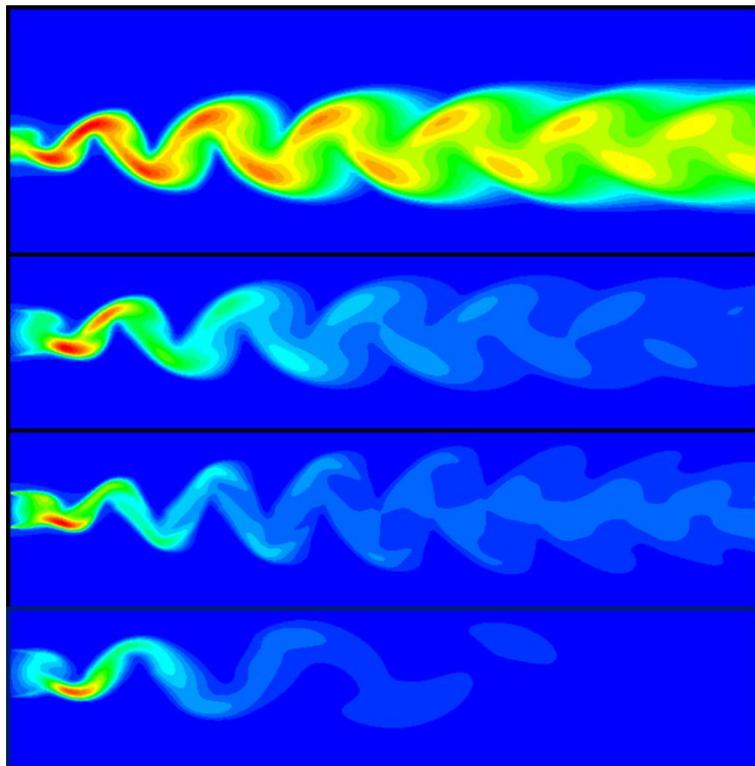


Simulación Numérica de la Estela tras un Cuerpo de Base Roma a Números de Reynolds Altos: La Influencia de los Modelos de Turbulencia

Departamento de Ingeniería Térmica y de Fluidos
Grado en Ingeniería en Tecnologías Industriales



22 de junio de 2015

Alumno: Claudia Rodríguez Pestaña

Tutor: Carlos Enrique Manglano Villamarín

A mis padres por su apoyo incondicional.

*“Big whirls have little whirls that feed on their velocity,
and little whirls have lesser whirls and so on to viscosity”.*

-Lewis Frey Richardson (1881-1953)-

RESUMEN

El presente trabajo de fin de grado aborda la simulación numérica de un flujo tras un cuerpo bidimensional de base roma mediante el modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras, el modelo original $k-\omega$ de Wilcox, el modelo $k-\omega$ SST de Menter y el modelo original $k-\varepsilon$ de Launder-Spalding, además de dos modificaciones de éste.

Como parte previa a la simulación numérica, se hace un breve recorrido por los conceptos más relevantes de la turbulencia y los procesos que siguen este tipo de flujos. Seguidamente, se introducen las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido, las ecuaciones de Navier-Stokes. Ante la imposibilidad de resolver estas ecuaciones en flujos complejos, se introduce la técnica de CFD (*Computational Fluid Dynamics*) y los distintos métodos disponibles en este campo. Por su bajo coste en términos computacionales se establece el método RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations*) como base para la simulación numérica, utilizando los modelos de turbulencia como cierre de las ecuaciones. Para la comprensión de los distintos modelos de turbulencia empleados, se describe detalladamente la formulación de cada uno de ellos.

Llegados a este punto, se explica cada paso tomado para conseguir los resultados de las simulaciones utilizando el software ANSYS. Con ello, se llega a la parte central del trabajo, la comparación de los distintos modelos de turbulencia para identificar la influencia que aporta cada uno de ellos al flujo de estudio. Se simulan flujos a distintos números de Reynolds y se analizan las discrepancias en su comportamiento. Finalmente, se validan los resultados obtenidos con los estudios de Vlademir Parezanovic y Olivier Cadot, Menter y O'Meara-Mueller.

Agradecimientos

Quiero agradecer este trabajo a todos los que han influido en él, ya sea directa o indirectamente. A mi tutor por su constante implicación a lo largo de estos meses y, principalmente, por su interés en enseñarme nuevos conceptos. A mis profesores y compañeros por todo lo aprendido y las experiencias vividas en estos cuatro años. A mis padres y mi hermana por su comprensión y la confianza que siempre han depositado en mí. Con un especial cariño, a mis abuelos por ser un claro ejemplo de esfuerzo y superación. Y en general, a todos aquellos que me han apoyado para que esto se hiciera posible.

CONTENIDO

Capítulo 1.: INTRODUCCIÓN	1
1.1. OBJETIVO Y MOTIVACIÓN	1
1.2. PROBLEMA PROPUESTO	2
1.3. LA MECÁNICA DE FLUIDOS	3
1.3.1. HISTORIA DE LA TURBULENCIA	4
1.3.2. LA MECÁNICA DE FLUIDOS: TURBULENCIA COMO PROBLEMA ABIERTO.....	6
Capítulo 2.: LA TURBULENCIA	8
2.1. CAPA LÍMITE TURBULENTO	8
2.2. TRANSICIÓN.....	11
2.2.1. TEORÍA DE LA ESTABILIDAD.....	11
2.3. MODELO CONCEPTUAL DE UN FLUJO TURBULENTO	12
2.4. TURBULENCIA EN LAS CAPAS DE CIZALLADURA.....	14
2.5. SEPARACIÓN DE FLUJO Y BURBUJAS DE RECIRCULACIÓN	15
2.6. DISTRIBUCIÓN UNIVERSAL DE LA VELOCIDAD.....	16
Capítulo 3.: ECUACIONES DE NAVIER-STOKES.....	20
3.1. FLUJO INCOMPRESIBLE.....	23
3.1.1. ECUACIONES EN COORDENADAS CARTESIANAS (x,y,z)	24
3.2. APROXIMACIONES EN LA CAPA LÍMITE.....	24

Capítulo 4.: CFD (Computational Fluid Dynamics)	26
4.1. COMPONENTES DE UN MÉTODO DE SIMULACIÓN NUMÉRICA .	26
4.2. PROPIEDADES DE UN MÉTODO DE SIMULACIÓN NUMÉRICO....	27
4.3 TIPOS DE DISCRETIZACIÓN	28
Capítulo 5.: TÉCNICAS NUMÉRICAS PARA FLUJOS TURBULENTOS	30
5.1 DNS (Direct Numerical Simulation)	30
5.2. SIMULACIÓN DE LOS TORBELLINOS DE GRAN ESCALA (LES, Large Eddy Scale)	31
5.3. MÉTODO RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations).....	32
5.3.1. REYNOLDS AVERAGED NAVIER-STOKES EQUATIONS.....	33
5.3.2. EL TENSOR DE ESFUERZOS DE REYNOLDS	35
5.3.3. DIFERENCIAS ENTRE MÉTODOS RANS Y LES.....	37
Capítulo 6.: MODELOS DE TURBULENCIA	39
6.1. MODELO DE TURBULENCIA DE CERO ECUACIONES.....	39
6.2 MODELOS DE TURBULENCIA DE UNA ECUACIÓN.....	42
6.2.1. MODELO DE TURBULENCIA DE SPALART-ALLMARAS.....	43
6.3. MODELOS DE TURBULENCIA DE DOS ECUACIONES	44
6.3.1. MODELO DE TURBULENCIA DE DOS ECUACIONES $k-\varepsilon$	45
6.3.2. MODELO RNG $k-\varepsilon$	49
6.3.3. MODELO $k-\varepsilon$ REALIZABLE (The <i>Realizable</i> $k-\varepsilon$ model).....	49
6.3.4. MODELO DE TURBULENCIA DE DOS ECUACIONES $k-\omega$	50
6.3.5. COMBINACIÓN DE LOS MODELOS $k-\varepsilon$ Y $k-\omega$: BSL Y SST	54

Capítulo 7.: SIMULACIÓN NUMÉRICA EN ANSYS	58
7.1. GEOMETRÍA.....	58
7.2. DISEÑO MALLA	59
7.3. SIMULACIÓN EN ANSYS Fluent®	61
7.3.1 VALORES DE LAS VARIABLES DE TURBULENCIA	64
7.3.2 FUERZAS INTEGRADAS.....	65
7.3.3 VERIFICACIÓN DE LA INDEPENDENCIA DEL MALLADO	67
 Capítulo 8.: RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN.....	69
8.1 RESULTADOS Y COMPARACIÓN DE DISTINTOS MODELOS DE TURBULENCIA	69
8.1.1. RESULTADOS Y COMPARACIÓN DE LOS MODELOS DE TURBULENCIA $k-\varepsilon$ estándar, realizable $k-\varepsilon$ y RNG $k-\varepsilon$	69
8.1.2. RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA $k-\omega$ estándar, Y COMPARACIÓN CON LOS MODELO $k-\varepsilon$	80
8.1.3. RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA DE SPALART-ALLMARAS Y COMPARACIÓN CON LOS MODELO $k-\varepsilon$ y $k-\omega$	85
8.1.4. RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA DE SST $k-\omega$ Y COMPARACIÓN CON LOS MODELO $k-\varepsilon$ y $k-\omega$ estándar.....	87
8.2 RESULTADOS Y COMPARACIÓN DEL MODELO DE TURBULENCIA $k-\omega$ SST A DISTINTOS NÚMEROS DE REYNOLDS	92
8.2.1 RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA $k-\omega$ SST A UN NÚMERO DE REYNOLDS MENOR.....	92
8.2.2 RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA $k-\omega$ SST A UN NÚMERO DE REYNOLDS MAYOR	96
8.3 RESULTADOS DE SIMULACIÓN EN ESTADO NO ESTACIONARIO	100

Capítulo 9.: VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS	103
9.1. EXPERIMENTO DE PAREZANOVIC Y CADOT PARA LA VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS.....	104
9.2. COMPARACIONES DE MENTER ENTRE LOS MODELOS DE TURBULENCIA $k-\omega$ y $k-\varepsilon$ estándar y $k-\omega$ SST	106
9.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES DE BURBUJAS DE RECIRCULACIÓN A DISTINTOS NÚMEROS DE REYNOLDS.....	107
Capítulo 10. CONCLUSIONES.....	109
Apéndice.....	111
AVANCES RECIENTES EN TURBULENCIA: TEORÍA ESTADÍSTICA DE LA TURBULENCIA	111
REFERENCIAS.....	114

Tabla de Figuras

Figura 1.3.1.1. (16) Esquema simple del paso de un flujo laminar a uno turbulento.	6
Figura 1.3.1.2. (17) Calle de torbellinos en una estela turbulenta. En concreto se trata de la calle de vórtices de von-Kármán, concepto al cual se hará alusión en capítulos posteriores.	7
Figura 2.1.1. (18) Esquema de un perfil de velocidades en una capa límite laminar frente al de una capa límite turbulenta. El gradiente de velocidad es mayor en una C.L turbulenta que en una C.L laminar.	9
Figura 2.3.1. (19) Transición ideal de un flujo laminar a uno turbulento en una placa plana.	13
Figura 2.4.1. (24) Vórtice de <i>Kelvin-Helmholtz</i> ya desarrollado.	14
Figura 2.5.1. (32) Desprendimiento de la capa límite laminar y formación de burbuja de recirculación en el álabe de una turbina.	16
Figura 2.6.1. (21) Muestra el perfil de la velocidad de la capa límite turbulenta en función de la distancia normal a la pared mediante las ecuaciones de la distribución universal de la velocidad.	18
Figura 5.2.1. (22) Comparación entre el porcentaje de simulación directa del método DNS frente al LES.	32
Figura 5.3.3.1. (23) Imagen con simulación con método RANS (izquierda) y con método LES (derecha) de un flujo no estacionario en la estela de un cilindro.	37
Figura 7.1.1. Se representa una captura del programa ANSYS DesignModeler®. La parte gris representa el dominio del fluido que será mallado y en su interior se encuentra el objeto sólido.	58
Figura 7.2. Malla realizada en ANSYS Meshing®.	59
Figura 7.3.1. Se trata de una figura de ANSYS Help Viewer que muestra la diferencia entre elegir la opción de <i>Wall Function Approach</i> y <i>Near-Wall Model Approach</i>	62
Figura 8.1.1.1. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>k-ε estándar</i>	69
Figura 8.1.1.4. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>Realizable k-ε</i>	70
Figura 8.1.1.2. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>k-ε estándar</i> en la capa límite.	70
Figura 8.1.1.5. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>Realizable k-ε</i> en la capa límite.	70
Figura 8.1.1.3. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>k-ε estándar</i> en la estela.	70
Figura 8.1.1.9. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>RNG k-ε</i> en la estela.	71
Figura 8.1.1.8. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>RNG k-ε</i> en la capa límite.	71
ii Figura 8.1.1.7. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>RNG k-ε</i>	71
Figura 8.1.1.6. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>Realizable k-ε</i> en la estela.	71
Figura 8.1.1.10. Contorno del ratio de disipación de turbulencia en el borde de ataque con el modelo <i>k-ε estándar</i>	73
Figura 8.1.1.11. Contorno del ratio de disipación de turbulencia en el borde de ataque con el modelo <i>Realizable k-ε</i>	73
Figura 8.1.1.12. Contorno del ratio de disipación de turbulencia en el borde de ataque con el modelo <i>RNG k-ε</i>	73
Figura 8.1.1.14. Contorno de la energía cinética turbulenta en el modelo <i>Realizable k-ε</i>	74
Figura 8.1.1.13. Contorno de la energía cinética turbulenta en el modelo <i>k-ε estándar</i>	74
Figura 8.1.1.15. Contorno de la energía cinética turbulenta en el modelo <i>RNG k-ε</i>	75
Figura 8.1.1.16. Contorno de la viscosidad turbulenta en el modelo <i>k-ε estándar</i>	75
Figura 8.1.1.18. Contorno de la viscosidad turbulenta en el modelo <i>RNG k-ε</i>	76
Figura 8.1.1.17. Contorno de la viscosidad turbulenta en el modelo <i>Realizable k-ε</i>	76
Figura 8.1.1.19. Variación del coeficiente de sustentación con las iteraciones en el modelo <i>k-ε estándar</i>	77

Figura 8.1.1.1.2. Contorno de la velocidad en el modelo <i>RNG k-ε, differential viscosity model</i> en la capa límite.....	78
Figura 8.1.1.1.3. Contorno de la velocidad en el modelo <i>RNG k-ε, differential viscosity model</i> en la estela del cuerpo.....	78
Figura 8.1.1.1.1. Contorno de la velocidad en el modelo <i>RNG k-ε, differential viscosity model</i>	78
Figura 8.1.1.1.6. Contorno de la viscosidad turbulenta, μ_t , en el modelo <i>RNG k-ε, differential viscosity model</i>	79
Figura 8.1.1.1.5. Contorno de la energía cinética turbulenta, k , en el modelo <i>RNG k-ε, differential viscosity model</i>	79
Figura 8.1.1.1.4. Contorno del ratio de la disipación de la turbulencia, ϵ , en el modelo <i>RNG k-ε, differential viscosity model</i>	79
Figura 8.1.2.1. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>k-ω estándar</i>	80
Figura 8.1.2.2. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>k-ω estándar</i> al comienzo de la capa límite.....	80
Figura 8.1.2.3. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia <i>k-ω estándar</i> en la estela del cuerpo.....	80
Figura 8.1.2.4. Esfuerzos de pared en dirección x en el modelo de turbulencia <i>k-ω estándar</i>	81
Figura 8.1.2.5. Contorno del ratio de la disipación de la energía cinética turbulenta del modelo de turbulencia <i>k-ω estándar</i>	82
Figura 8.1.2.6. Contorno de la energía cinética turbulenta del modelo de turbulencia <i>k-ω estándar</i>	82
Figura 8.1.2.7. Contorno de la viscosidad turbulenta del modelo de turbulencia <i>k-ω estándar</i>	83
Figura 8.1.2.8. Contorno de la viscosidad turbulenta del modelo de turbulencia <i>k-ω estándar</i>	83
Figura 8.1.2.8. Contorno de la magnitud de vorticidad del modelo de turbulencia <i>k-ω estándar</i>	84
Figura 8.1.3.1. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras.....	85
Figura 8.1.3.3. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras en la estela del cuerpo.....	85
Figura 8.1.3.2. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras en la capa límite.....	85
Figura 8.1.3.4. Contorno de la viscosidad turbulenta del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras.....	86
Figura 8.1.3.5. Contorno de la magnitud de vorticidad del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras.....	86
Figura 8.1.4.1. Contorno de velocidades con el modelo de turbulencia Shear-Stress Transport (SST) <i>k-ω</i>	87
Figura 8.1.4.3. Contorno de velocidades con el modelo de turbulencia Shear-Stress Transport (SST) <i>k-ω</i> en la estela del cuerpo.....	88
Figura 8.1.4.2. Contorno de velocidades con el modelo de turbulencia Shear-Stress Transport (SST) <i>k-ω</i> en la capa límite.....	88
Figura 8.1.4.4. Contorno de presión total relativa del modelo de turbulencia Shear-Stress Transport (SST) <i>k-ω</i> en la capa límite.....	89
Figura 8.1.4.5. Gráfica de los esfuerzos de pared en x del modelo de turbulencia Shear-Stress Transport (SST) <i>k-ω</i>	89
Figura 8.1.4.7. Contorno del ratio de la energía cinética turbulenta del modelo Shear-Stress Transport (SST) <i>k-ω</i>	90
Figura 8.1.4.6. Contorno del ratio de disipación de energía cinética turbulenta del modelo Shear-Stress Transport (SST) <i>k-ω</i> en la capa límite.....	90
Figura 8.1.4.8. Contorno del ratio de la energía cinética turbulenta del modelo Shear-Stress Transport (SST) <i>k-ω</i>	91
Figura 8.2.1.1. Contorno de la velocidad del modelo <i>k-ω SST</i> con número de Reynolds de 10^4	92

Figura 8.2.1.2. Contorno de la velocidad del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4 en la capa límite.....	92
Figura 8.2.1.4. Gráfica de los esfuerzos de pared en x con el modelo $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^4	93
Figura 8.2.1.3. Contorno de la velocidad del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4 en la estela.....	93
Figura 8.2.1.5. Contorno del ratio de disipación de la energía cinética turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4 en la capa límite.....	93
Figura 8.2.1.6. Contorno de la energía cinética turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4	94
Figura 8.2.1.7. Contorno de la viscosidad turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4	94
Figura 8.2.1.8. Contorno de la magnitud de la vorticidad del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4	95
Figura 8.2.2.1. Contorno de la velocidad del modelo de turbulencia $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5 en el punto A.	96
Figura 8.2.2.2. Contorno de la velocidad del modelo de turbulencia $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 105 en el punto B.	96
Figura 8.2.2.3. Gráfica de la variación del coeficiente de sustentación con el número de iteraciones del modelo $k-\omega$ SST con un Reynolds de 10^5	97
Figura 8.2.2.4. Contorno de la velocidad del modelo de turbulencia $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5 en la capa límite.....	98
Figura 8.2.2.6. Contorno del ratio de disipación de energía turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5 en la capa límite del cuerpo.....	98
Figura 8.2.2.5. Contorno de la velocidad del modelo de turbulencia $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 105 en la estela del cuerpo.	98
Figura 8.2.2.8. Contorno de la viscosidad turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5	99
Figura 8.2.2.7. Contorno de la ratio energía cinética turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5	99
Figura 8.3.1. Contorno de velocidades de la simulación en estado estacionario con el modelo de turbulencia $k-\omega$ SST.	101
Figura 8.3.2. Contorno de velocidades de la simulación en estado estacionario con el modelo de turbulencia $k-\omega$ SST en la estela del cuerpo.	101
Figura 8.3.3. Contorno del ratio de disipación de la simulación en estado estacionario con el modelo de turbulencia $k-\omega$ SST.	101
Figura 8.3.4. Contorno de la energía cinética turbulenta de la simulación en estado estacionario con el modelo de turbulencia $k-\omega$ SST.	102
Figura 8.3.5. Contorno de viscosidad turbulenta de la simulación en estado estacionario con el modelo de turbulencia $k-\omega$ SST.	102
Figura 9.1.1. Flujo alrededor de una superficie de base roma en el estudio de <i>Parezanovic y Cadot</i> ..	104
Figura 9.1.2. Burbuja de recirculación visualizada por las líneas de corriente de la velocidad media mediante PIV (<i>Particle Image Velocimetre</i>).	105

Capítulo 1.: INTRODUCCIÓN

1.1. OBJETIVO Y MOTIVACIÓN

La elección de este proyecto ha sido producto tanto de la inquietud suscitada durante el grado por los fenómenos de la turbulencia, como por la importancia que tiene su estudio en la actualidad. La mayoría de los flujos de interés práctico son turbulentos y juegan un papel importante en el día a día del ser humano. Algunas de las aplicaciones que tiene el estudio del flujo turbulento dentro del ámbito de la ingeniería, son comprender los efectos de la turbulencia en cámaras de combustión, turbomaquinaria, intercambiadores, vehículos, flujos en tuberías etc. También es posible conocer los fenómenos de transferencia de calor, de acústica o las vibraciones que soportan estructuras, como puentes o edificios rodeados de un fluido. Sus aplicaciones se extienden a otros ámbitos como el natural, permitiendo la comprensión del comportamiento de flujos en ríos o volcanes o el análisis de circulaciones atmosféricas que determinan el clima.

Dentro de la gran variedad de flujos que aparecen en el ámbito ingenieril, son en gran cantidad de ellos donde ocurre la separación del fluido con recirculación. Muchos han sido los autores que se han dedicado al estudio bidimensional de los efectos que tienen los cuerpos romos rodeados de un flujo, en concreto cilindros, [(1), (2)] y otros muchos han comparado los resultados obtenidos de forma experimental con los computacionales (3). En sus estudios se preocupan principalmente de propiedades como la variación de la velocidad, la presión o el coeficiente de arrastre en la estela del cuerpo. Basándose en investigaciones anteriores, como las que se han referenciado, el presente estudio es una simulación numérica del flujo tras un cuerpo con geometría plana a altos números de Reynolds.

A lo largo del grado se han impartido asignaturas donde aparecían los conceptos de capa límite o turbulencia y el estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, siempre de forma teórica y no con programas de CFD. Por ello, el trasfondo que lleva este proyecto es conocer la técnica de CFD, además de incrementar los conocimientos en fluido mecánica.

La relevancia de CFD en la industria es un hecho evidente. CFD permite realizar cálculos de forma mecánica, diseñar en 3D y simular la mejora de las prestaciones como fase previa a la fabricación de un producto. Esto permite la innovación continua y garantiza al cliente que el producto es el óptimo para su finalidad, ya que consigue desde simular el comportamiento de un flujo en cualquier régimen hasta el estudio térmico de los sistemas, pasando por la interacción que existe entre el fluido y la estructura. El ahorro de recursos que implica implementar las técnicas computacionales, ha llevado a muchas empresas a incorporarlas para la resolución de problemas de mecánica de fluidos. Esta situación convierte a ingenieros con competencias en el manejo de CFD en un perfil muy demandado. Un buen manejo de CFD implica saber discretizar problemas, entender las leyes que gobiernan un flujo, tener conocimientos de cálculo numérico para entender los problemas que se resuelven numéricamente y de técnicas experimentales que permitan validar los resultados obtenidos, además de ser capaz de estimar el grado de error cometido en estas aproximaciones.

El grado de transversalidad que implica el uso de las técnicas computacionales ha llevado a hacer un breve recorrido por todos estos campos a lo largo del trabajo. De esta manera, se intentará tratar el software empleado (ANSYS Fluent®) como algo mucho más allá que una caja negra.

1.2 PROBLEMA PROPUESTO

El problema planteado es el estudio estacionario de un flujo bidimensional con una velocidad constante que es atravesada por un cuerpo de base roma con forma rectangular, parte frontal semicilíndrica y de envergadura (transversal a la corriente) infinita, que ayudará a simplificar el problema a bi-dimensional. El fluido de trabajo empleado en este caso es agua y se considera newtoniano, es decir, viscoso perfecto e incompresible. Este tipo de fluidos están gobernados por las ecuaciones de Navier-Stokes para flujos incompresibles, que se especificarán a lo largo del trabajo.

El cuerpo sólido genera a su paso turbulencia, tanto en la capa límite como en la estela que deja a su paso, transicionando desde el régimen laminar a diferentes números de Reynolds en cada caso. Los efectos de la turbulencia analizan mediante la simulación numérica en ANSYS Fluent®. El objetivo final es la comparación de los resultados obtenidos a través de diferentes modelos de turbulencia: Spalart-Allmaras, $k-\epsilon$ estándar, RNG $k-\epsilon$, Realizable $k-\epsilon$, $k-\omega$ estándar y SST $k-\epsilon$.

Se ha elegido un cuerpo de base roma con el objetivo de forzar el desprendimiento de la capa límite al final de la superficie del mismo. El estudio del punto de desprendimiento de la capa límite es un problema complejo en el que no se quería incidir. Además, para simplificar el análisis de la turbulencia y permitir una mejor comparación entre los distintos modelos, se optó por la geometría en 2D. El software de CFD empleado, ANSYS Fluent®, utiliza el método de discretización de volúmenes finitos. Como la geometría es en 2D, Fluent introduce por defecto un grosor a las celdas para obtener volúmenes en lugar de elementos.

El cuerpo sólido presenta una geometría muy simple, mostrada más adelante en la **Figura 7.1.1**. Es una geometría plana con quince centímetros de longitud a la que se suma medio centímetro de radio de la media circunferencia que corresponde a la cabeza del objeto. El software utilizado para el diseño de la geometría es ANSYS DesignModeler®, el de las mallas ANSYS Meshing® y posteriormente, para la simulación numérica del problema de turbulencia, se utiliza ANSYS Fluent®. Todos ellos pertenecientes al paquete de ANSYS® versión 15.0.

El número de Reynolds empleado es del orden de 10^4 . El fluido escogido es agua ($\rho \sim 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\mu \sim 10^{-3} \text{ kg/m s}$), la velocidad de la corriente libre es de 2.5 m/s y la longitud característica es el grosor del objeto, es decir, 1 cm.

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{1000 \cdot 2.5 \cdot 0.01}{10^{-3}} = 2.5 \cdot 10^4$$

Con estos datos se consigue un número de Reynolds alto, que asegure la presencia de turbulencia sin poner en compromiso la hipótesis de incompresibilidad del fluido. El número de Mach¹ se queda muy por debajo de 0.3, por lo que se puede tomar como un fluido incompresible. Teniendo en cuenta que la velocidad del sonido en el medio de propagación, en este caso agua, es de $V_s = 1500 \text{ m/s}$:

$$M = \frac{V}{V_s} = \frac{2.5 \frac{m}{s}}{1500 \frac{m}{s}} \ll 0.3$$

Tras esta primera fase de comparación entre los distintos modelos de turbulencia, se cambiará la velocidad del fluido y con ello el número de Reynolds, para analizar la influencia de éste en su comportamiento. Por último, se realizará una simulación en estado no estacionario, comprobando la similitud con los resultados estacionarios.

1.3. LA MECÁNICA DE FLUIDOS

La mecánica de fluidos es la ciencia que estudia la cinemática y dinámica de un fluido ante una fuerza. Ambas se sintetizan en ecuaciones matemáticas que recogen los principios fundamentales en la naturaleza. Las ecuaciones de movimiento de un fluido vienen dadas por las tres leyes de conservación: conservación de la masa, del momento y de la energía. Estas ecuaciones se conocen como *Ecuaciones de Navier-Stokes* (NS). En los problemas que surgen en mecánica de fluidos dominan las ecuaciones en diferencias parciales (EDP) y en muchos casos de segundo orden. Aparecen, generalmente, como ecuaciones no lineales y acopladas, en un entorno irregular y con varias condiciones iniciales y de contorno.

En la mayoría de los casos no se puede obtener soluciones analíticas de estos problemas. Concretamente, solo se puede obtener solución analítica en casos donde la capa límite está

¹ El número de Mach fue introducido por el físico y filósofo austriaco Ernst Mach (1838-1916) como una manera sencilla de expresar la velocidad de un objeto con respecto a la velocidad del sonido. Este número es típicamente utilizado para describir la velocidad de los aviones.

totalmente desarrollada y la geometría es simple. Por otro lado, el conseguir soluciones de forma experimental es complicado, reproducir el prototipo del flujo de estudio de forma adecuada es difícil a la vez que poco práctico. Sin embargo, la información obtenida de forma experimental o aquella de los casos donde sí se pueda aplicar las ecuaciones de Navier-Stokes directamente, se utiliza para validar los modelos matemáticos empleados en casos más complejos.

Al encontrarse con este problema, la mecánica de fluidos computacional (CFD) ha ido cobrando importancia. A través de este método, la geometría y las condiciones del flujo se pueden ir variando constantemente. Debido a la capacidad limitada de los ordenadores, aun resolviendo con métodos numéricos, es necesario recurrir a simplificaciones de las ecuaciones de Navier-Stokes. Los resultados de las simulaciones computacionales deben estar contrastados con los datos experimentales, pero una vez que se han contrastado, el programa se puede utilizar para varios diseños dentro de las hipótesis asumidas originalmente. Es importante considerar que los resultados obtenidos por simulación numérica son aproximaciones de la realidad.

La mecánica de fluidos computacional permite hacer distinción entre dos tipos de flujos. Por un lado el modelo Aureliano, que a su vez queda dividido en modelo homogéneo y flujo cercano a una pared, y por otro lado, el modelo de transporte de partículas de LaGrange. Los resultados obtenidos en laboratorios sirven para validar y calibrar los programas de CFD tanto de tipo Aureliano como de tipo Lagrangiano². El problema de estudio propuesto es de naturaleza euleriana. A su vez, existen dos formas de analizar un flujo, como flujo estacionario o como flujo no estacionario, ambos tipos de estudios se llevan a cabo en la actualidad. Sin embargo, los estudios de flujos no estacionarios permiten a los investigadores una mejor comprensión de los mecanismos que ocurren en flujos complejos y se bifurca en dos principales ramas: los flujos periódicos y no periódicos.

1.3.1. HISTORIA DE LA TURBULENCIA

Como paso previo a la introducción de los conceptos básicos de este fenómeno y las ecuaciones de Navier-Stokes, se hace un breve recorrido a través de la historia de la turbulencia.

Los primeros estudios de la turbulencia se realizaron por *Osborne Reynolds* entre los años 1883 y 1894. Identificó que el paso de régimen laminar al régimen turbulento dependía únicamente de un número adimensional al que le dio su nombre, el número de Reynolds. Con ello, introdujo las ecuaciones de Navier-Stokes con la descomposición de Reynolds, pero no consiguió el cierre de estas ecuaciones.

² El modelo lagrangiano a menudo se denomina modelo no continuo, frente al modelo euleriano que se conoce como modelo continuo. Esto se debe a que la fase de las partículas se tratan de forma discreta mientras que la fase fluida de los modelos eulerianos se trata como una fase fluida (28).

En 1924 *Prandtl*, *Séller* y *Freedman* intentaron resolver el problema del cierre de las ecuaciones mediante funciones estadísticas. Un año más tarde *Prandtl* y *Taylor* establecieron correlaciones para el término $\overline{u'v'}$ presente en las ecuaciones de Reynolds y la relación de éste con la difusión. *Prandtl* en 1925 y *von Kármán* en 1930 buscan el cierre de las ecuaciones relacionando las correlaciones con las ecuaciones de Reynolds.

En 1941 *Nikoláyeovich Kolmogórov*³, al frente de un grupo de investigadores, por un lado, y *A. M. Obukhov*, por otro, promueven la teoría de la cascada de energía turbulenta que reafirmaba el fenómeno de la multiescala de *Lewis Frey Richardson*, 1922. *Richardson* postula la idea de que las estructuras de gran escala son inestables y se rompen en estructuras de menor escala, que a su vez rompen en otras menores hasta llegar a un tamaño tan pequeño que las fuerzas viscosas sean dominantes y estas estructuras se disipen en forma de energía térmica. La importancia de esta teoría radica en que era válida para todo tipo de flujo isótropo y homogéneo. Para que se cumplan ambas hipótesis el flujo debe estar lo suficientemente alejado de una pared. Poco después, se demostró que no siempre la turbulencia se comporta de esta manera, apareciendo así el concepto de *intermitencia*. Un flujo laminarizado mantiene una salida del fluido estable, pero se ve bruscamente interrumpida por una serie de impulsos a los que se le denomina *burst*⁴, que tienen una amplitud caótica. Tras esta secuencia, el fluido vuelve a su estado estable. Es a esta interrupción brusca a lo que se denomina *intermitencia* y el tiempo que transcurre entre ellas es aleatorio (4).

Ya en la segunda mitad del siglo XX, existen dos tendencias en el ámbito de la turbulencia: el enfoque determinista y el enfoque estadístico. En 1949, *Bachtelor* y *Towsend* observan el fenómeno de la intermitencia en las estructuras de menor tamaño. Este proceso era mejor explicado mediante hipótesis estadísticas. Por otro lado, en 1974 *Brown* y *Roshko*, estudiando la difusión del salto de velocidades entre dos corrientes paralelas, obtuvieron por primera vez una serie de estructuras coherentes en un flujo turbulento de forma experimental. Este hecho apoya la corriente determinista de la turbulencia, ya que el tratar la turbulencia como un problema estadístico era fruto de la convicción de la inexistencia de estructuras coherentes.

En 1962 se da un gran paso en la modelización numérica con la aparición de los modelos de turbulencia como cierre a las ecuaciones de Reynolds. *Fraichmann*, por otro lado, comienza una rama de simulación directa (DNS).

Posteriormente, algunos de los nombres a resaltar en este ámbito son *Hopf* (1948), *Spieger* (1968) y *Saffman* (1992) en el formalismo matemático; *Panchev* (1971), *Monin* y *Yaglom* (1971) en la teoría estadística y *Thorper* (1973), *Turner* (1973) y *Chandrasekar* (1961) en turbulencia de fluidos estratificados (5).

³ Andréi Nikoláyeovich Kolmogórov fue un distinguido matemático soviético fundador de la teoría moderna de la probabilidad.

⁴ Este proceso, al que se denomina *burst* (explosión), se explicará detenidamente en la sección 2.3.

1.3.2. LA MECÁNICA DE FLUIDOS: TURBULENCIA COMO PROBLEMA ABIERTO

La turbulencia es por tanto un problema complejo que ha suscitado el interés de varios ingenieros, matemáticos y físicos a lo largo de la historia. Gracias al interés de éstos por este fenómeno se han desarrollado múltiples métodos matemáticos y experimentales, que han resultado ser muy útiles en otras disciplinas. Todas las teorías y experimentos que se han ido desarrollando están en la actualidad en continuo cambio y a medida que se progresa en este campo, aparecen nuevos horizontes por explorar.

Existen dos tipos de flujos bien diferenciados: el *laminar* y el *turbulento*. El flujo *laminar* es aquel donde los esfuerzos viscosos son dominantes y por ello al introducirle una perturbación ésta es amortiguada rápidamente. Se caracteriza por ser un flujo cuyas partículas siguen trayectorias definidas. Gracias a este tipo de flujo, ha sido posible el estudio de los principios básicos que siguen los fluidos en movimiento. Un flujo *turbulento* se caracteriza por ser irregular y complejo. El paso de un flujo laminar a uno turbulento, denominado *transición*, queda determinado por el número de Reynolds, pero salvo en casos simples, el número de Reynolds crítico en él que el flujo pasa de ser laminar a turbulento es difícil de calcular.

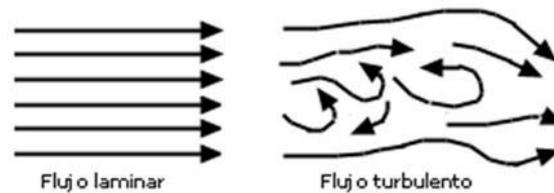


Figura 1.3.1.1. (16) Esquema simple del paso de un flujo laminar a uno turbulento.

Una estructura característica en régimen turbulento son los vórtices. A grandes rasgos, el proceso que siguen es pasar de torbellinos de un tamaño de escala mayor a otro menor hasta finalmente desaparecer, a esto se le denomina *cascada de energía*. Con ello, queda patente la existencia de diferentes escalas de vórtices. El entender el proceso de los vórtices, desde que se generan hasta que finalmente se disipan, es un estudio clave en turbulencia. En capítulos posteriores se detallará tanto el proceso de transición como la cascada de energía que sufren. Aunque existen estructuras repetitivas en turbulencia, los componentes aleatorios presentes hacen que cada flujo tenga unas características diferentes, complicando así el estudio de las mismas. El hecho de que aparezcan escalas muy diversas, imposibilita la aplicación directa de las ecuaciones de Navier-Stokes.



Figura 1.3.1.2. (17) Calle de torbellinos en una estela turbulenta. En concreto se trata de la calle de vórtices de von-Kármán, concepto al cual se hará alusión en capítulos posteriores.

La turbulencia es un fenómeno tridimensional y en el caso de estudio de las ecuaciones de Navier-Stokes para régimen incompresible sigue siendo un problema abierto. Mediante unas condiciones iniciales y de contorno adecuadas existe una solución dependiente de los datos, sin embargo no se ha conseguido demostrar la existencia de una única solución global.

Este apartado ofrece una panorámica gris del estudio de la turbulencia debido a la ausencia de una teoría completa de este fenómeno. La complejidad del problema y en concreto la transición del paso de flujo laminar a turbulento hace que siga siendo uno de los grandes problemas de la física clásica sin resolver. Por lo que existe aún un largo camino de investigación por recorrer.

Capítulo 2.: LA TURBULENCIA

Como ya se ha mencionado anteriormente, desde el punto de vista físico, el factor fundamental que indica el paso de flujo laminar a turbulento es el número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{v D}{\nu}$$

Por ejemplo, se considera turbulento a un flujo con número de Reynolds superior a 2300 que recorre el interior de un tubo y entre $3 \cdot 10^5$ y $5 \cdot 10^5$ a un flujo sobre una placa plana.

Un flujo turbulento queda definido como un flujo no estacionario, con gran cantidad de vorticidad. Es un fenómeno tridimensional, aunque su media a lo largo del tiempo pueda definirse en 2D. Debido a la entremezcla del fluido, se incrementa la turbulencia y flujos con distintos momentos entran en contacto.

De acuerdo con los objetivos del proyecto, lo que concierne es la turbulencia en la capa límite y en la corriente libre de la estela de un sólido en movimiento. Los flujos turbulentos que se generan en la capa límite se caracterizan por tener la mayoría de su energía cinética turbulenta cerca de la pared y torbellinos más pequeños, organizados y de estructuras similares entre sí.

2.1. CAPA LÍMITE TURBULENTA

En muchos flujos con un número de Reynolds alto, la zona muy cercana a la superficie del cuerpo está dominada por los esfuerzos viscosos, esta zona se denomina capa límite. Por lo general, en su inicio, las líneas de corriente se comportan de forma ordenada, el fluido apenas se entremezcla. Con esto se quiere decir que el mecanismo de transporte en dirección normal a la corriente, es decir, la disipación, existe solo a nivel molecular. Una capa límite con estas características se conoce como *capa límite laminar*. Debido a varios factores como el gradiente

de presión o temperatura o las asperezas de la superficie, la capa límite pasa de ser laminar a turbulenta. Esta zona se caracteriza por una entremezcla del fluido a nivel macroscópico, donde las líneas de corriente dejan de comportarse de forma ordenada para comenzar a formar torbellinos. El gradiente de velocidad en una capa límite turbulenta es mayor que en una capa límite laminar. La zona que existe entre la capa límite laminar y la turbulenta, se conoce como zona de transición. El espesor de la capa límite se denota como δ y es la distancia que existe desde la pared hasta el punto dónde la velocidad del flujo sea 0.99 la velocidad de la corriente libre, U_∞

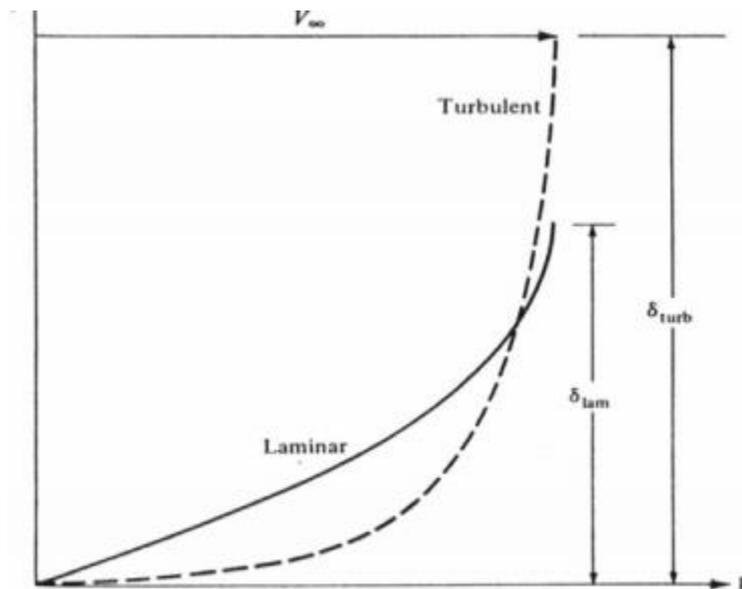


Figura 2.1.1. (18) Esquema de un perfil de velocidades en una capa límite laminar frente al de una capa límite turbulenta. El gradiente de velocidad es mayor en una C.L turbulenta que en una C.L laminar.

Existe otra clasificación de capa límite, la de velocidad y la térmica. El proyecto se centrará únicamente en la capa límite de la velocidad. Obtener un perfil de temperaturas no es objeto de estudio y por ello en las ecuaciones de Navier-Stokes, la ecuación de la energía no se tendrá en consideración.

Dentro de una capa límite turbulenta existen varias regiones:

- Capa viscosa (*viscous sublayer*): Una capa fina muy próxima a la superficie.
- Región completamente turbulenta (*fully turbulent region*): Hace referencia a la zona que colinda con el exterior de la capa límite, donde el fluido es turbulento.
- Zona de amortiguamiento (*buffer layer*): es la zona comprendida entre ambas.

Por otro lado, la capa límite queda a su vez dividida en:

- Región interior: Formada por la capa viscosa, la zona de amortiguamiento y parte de la región completamente turbulenta
- Región exterior: Formada por la región completamente turbulenta restante.

A lo largo del estudio se utilizarán a menudo las variables no dimensionales de la velocidad u^+ y de la coordenada espacial y^+ definidas como:

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad y^+ = y \frac{u_\tau}{\nu} \quad (\text{Ec. 2.1.1 y Ec. 2.1.2})$$

donde:

y : distancia a la pared.

u : velocidad en dirección paralela a la pared.

ν : viscosidad cinemática del fluido.

u_τ : velocidad de fricción. Obtenida de la expresión:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (\text{Ec. 2.1.3})$$

donde τ_w son los esfuerzos de pared.

Las distintas regiones se encuentran en torno a los siguientes valores:

Zona viscosa: $y^+ < 2 \sim 8$

Zona de amortiguamiento: $2 \sim 8 < y^+ < 2 \sim 50$

Zona completamente turbulenta: $y^+ > \sim 50$

Región interior: $y^+ < 100 \sim 400$

Región exterior: $y^+ > 100 \sim 400$

Las variables adimensionales definidas serán utilizadas más adelante para definir la *ley logarítmica de la pared*. En esta misma sección se representan las distintas regiones de la capa límite (**Figura 2.6.1**).

2.2. TRANSICIÓN

La mayoría de los flujos comienzan como flujos laminares. A medida que el número de Reynolds aumenta, se generan inestabilidades en la capa límite que producen la transición de flujo laminar a un flujo caótico, conocido como turbulento. En este proceso de transición las pequeñas perturbaciones incrementan rápidamente creando estructuras muy complejas, tanto de escalas grandes como de escalas pequeñas que interaccionan entre sí. El proceso de transición es difícil de analizar y, por lo general, la única manera de aproximarse a los resultados es mediante modelos semi-empíricos⁵.

2.2.1. TEORÍA DE LA ESTABILIDAD

En este apartado se explica brevemente en qué se basa la teoría de la estabilidad, incluyendo los conceptos a través de los que se llega a las ecuaciones matemáticas y las conclusiones finales. Seguidamente se establecerá un ejemplo sencillo para su comprensión, sacado del texto de *White* (6).

La ecuación que gobierna la estabilidad en un fluido en movimiento deriva de un flujo incompresible con propiedades constantes. En las ecuaciones de Navier-Stokes, cada propiedad queda dividida en un vector Q , que representa las variables del flujo y uno Q' que recoge las perturbaciones, dónde estas últimas son las incógnitas. Las ecuaciones resultantes no serán lineales, pero generalmente se linealizan despreciando los términos Q' de mayor orden. Esta simplificación es coherente por ser los términos de las perturbaciones suficientemente pequeños. Una vez hecha esta modificación, se considera un problema estable si las perturbaciones Q' van disminuyendo e inestable si aumentan.

Como ejemplo se considera un viga recta de longitud L , momento de inercia I y módulo de elasticidad E que comienza en $x=0$ y termina en $x=L$, fijada de tal manera que no soporte un momento de flexión. Para buscar la estabilidad de la viga se sigue la formulación de la teoría de vigas, que correspondería al término Q de la explicación:

$$\sum M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$y(0) = y(L) = 0$$

Ahora se añade la perturbación, se somete a la viga a una fuerza de compresión P , quedando un momento de flexión de $-Px$ en toda la sección. Este término correspondería a lo que denomina Q' en la explicación. La ecuación $Q+Q'$ quedaría de la forma:

$$\frac{P}{EI}y + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$
$$y(0) = y(L) = 0$$

⁵ Los conceptos fundamentales de la teoría de la transición de régimen laminar a turbulento están recogidos por *Hoffman* (7).

Eliminando la solución trivial de $y=0$ se obtiene la ecuación de la perturbación, que en este caso no necesita ser linealizada:

$$y = A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

$$\lambda = \left(\frac{P}{EI}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Los autovalores de la ecuación son:

$$y(0) = 0 \quad B = 0$$

$$y(L) = 0 \quad \lambda = \frac{n\pi}{L}$$

Con lo que se obtiene que:

$$P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$$

Sustituyendo los autovalores para analizar la estabilidad, se observa que la inestabilidad ni aumenta ni disminuye, esto es una estabilidad neutra a la que se le denomina *pandeo*.

En turbulencia, a través de esta teoría se puede predecir el número de Reynolds más pequeño a partir del cual el fluido empezará a ser inestable. Esto será solo la primera indicación del inicio del proceso de transición. Es importante resaltar que existen muchos otros factores que pueden afectar al proceso de transición como la rugosidad de la superficie, los gradientes de presión, la transferencia de calor, la turbulencia que exista en la corriente libre o la curvatura de la superficie del cuerpo.

2.3 MODELO CONCEPTUAL DE UN FLUJO TURBULENTO

Debido a la complejidad de este fenómeno, a lo largo de la historia se han propuesto innumerables modelos conceptuales de flujo turbulento. En este apartado, con el objetivo de explicar la turbulencia y a partir de las explicaciones de *Hoffman (7)*, se introducen varios términos utilizados en este ámbito.

Partiendo de la teoría de la estabilidad, cuando se alcanza un número de Reynolds relativamente alto aparecen las primeras inestabilidades⁶. Estas se dan en forma de ondas bidimensionales conocidas como ondas de *Tollmein-Schlichting*. Estas ondas aumentan su envergadura hasta convertirse en ondas tridimensionales, con ello aparecen efectos no lineales en el flujo y la vorticidad. Además, se crean capas de cizalladura⁷, que son altamente inestables. A medida que los vórtices aumentan, se dividen en vórtices más pequeños con frecuencias y amplitudes aleatorias. De esta manera, se produce un movimiento aleatorio y

⁶ Se define inestabilidad como la propiedad del fluido que incrementa una perturbación introducida en el seno de él

⁷ Cizalladura es la variación en intensidad y/o en dirección de la velocidad con la distancia. La presencia de cizalladura en el fluido suele traer consigo rotación a la que se denomina vorticidad.

desordenado al que se denomina turbulencia. Este proceso ocurre en zonas localizadas y rodeadas de flujo laminar que reciben el nombre de *puntos de turbulencia*. Según aumenta el número de puntos de turbulencia en la dirección de la corriente, el flujo se convierte en turbulento. Es importante tener en cuenta que este proceso es característico en una placa lisa y plana, por lo que los efectos de curvatura o rugosidad en la superficie o los gradientes de presión o temperatura afectarían a este proceso de transición.

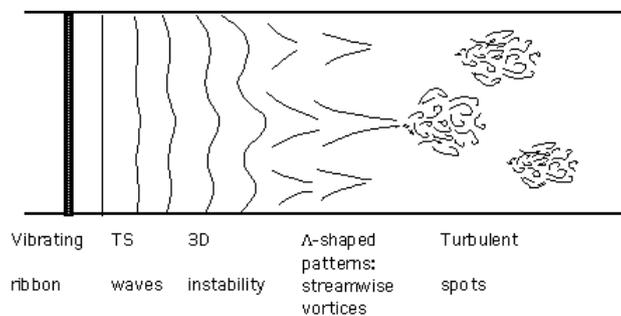


Figura 2.3.1. (19) Transición ideal de un flujo laminar a uno turbulento en una placa plana.

Por un lado, en las zonas muy próximas a la superficie, capa viscosa y zona de amortiguamiento (región interior de la capa límite), existen rachas de altas y bajas velocidades que producen las condiciones críticas necesarias para la formación de vórtices. Mientras que el fluido que sale tiene velocidades bajas, el fluido que entra tiene altas velocidades. El proceso en el que el fluido de baja velocidad es expulsado hacia fuera, acompañado de oscilaciones y rupturas se denomina *burst*. Por otro lado, al ser la superficie de la capa límite turbulenta irregular, arrastra a la corriente libre creándose en la región exterior torbellinos rotacionales de gran escala. Entre la región interior y exterior de la capa límite existe interacción, que se traduce en una transferencia de masa, momento y energía.

En los modelos conceptuales de turbulencia también se han estudiado estructuras características de los vórtices en cada región. Por ejemplo, una de las estructuras más comunes que aparece en zonas donde el número de Reynolds es alto, son los vórtices de *hairpin*. En zonas de número de Reynolds bajo, donde aparezca un cuerpo como en la parte frontal y unido a una pared, es común que se generen los vórtices de *horseshoe*

De esta manera, aparecen los términos de *producción*, *difusión* y *disipación* de turbulencia. Los torbellinos creados en la región interior son generalmente de pequeña escala y los del exterior de gran escala. El término de producción de turbulencia en la región interior, hace referencia al momento en el que ocurre el proceso de *explosión* (o *burst*). Por el contrario, el término de producción de turbulencia de la región exterior hace referencia a la formación de vórtices de gran escala. La producción de turbulencia se conoce por el término de *producción*. Otro concepto importante en un régimen turbulento es la *difusión*, que es el continuo movimiento de las propiedades del fluido que incrementan el proceso de mezcla y generan torbellinos de muy diversas escalas. Por último, en los torbellinos existe tanto un límite superior (la dimensión de la capa límite, δ), como un límite inferior de la escala (definida como la escala de

Kolmogórov⁸). Los torbellinos de gran escala pasan a ser cada vez más pequeños y por debajo de la escala inferior, son auto-destructivos debido a que las fuerzas viscosas cobran importancia por la existencia de un alto gradiente de velocidad. La desaparición de los torbellinos queda traducida en una conversión irreversible a energía térmica. Este proceso domina la disipación de energía en el fluido. El proceso de destrucción de los torbellinos y la disipación de la energía se denomina *disipación*. Al proceso completo que sigue un torbellino desde su escala superior hasta la inferior se denomina *cascada de energía*.

2.4. TURBULENCIA EN LAS CAPAS DE CIZALLADURA

Mediante el modelo conceptual de turbulencia en una placa plana se ha conseguido explicar el proceso de transición desde una capa límite laminar a un capa límite turbulenta. Sin embargo, la turbulencia no se genera siempre debido a la presencia de una pared. A continuación, se explican otros procesos habituales de generación de flujos turbulentos, para así introducir otro tipo de estructuras características de este fenómeno.

La generación de turbulencia puede ocurrir cuando dos fluidos a distintas velocidades entran en contacto. Al existir cizalladura entre ellos, se generan ondas en la superficie que une los dos fluidos. Estas ondas serán estables si el nivel de cizalladura no es muy elevado, por el contrario, si éste es elevado, se generan ondas inestables, denominadas *inestabilidades de Kelvin-Helmholtz*. En las inestabilidades creadas en las proximidades de una pared, los esfuerzos viscosos son dominantes, pudiendo amortiguar las pequeñas perturbaciones. Sin embargo, en la turbulencia que tiene lugar en las capas de cizalladura la viscosidad no interviene, las inestabilidades se crean al enrollarse el fluido sobre sí mismo formando vórtices como los que muestra la figura.

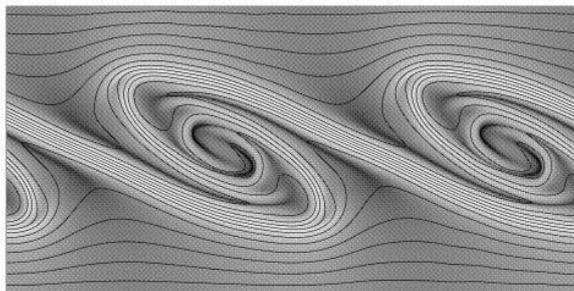


Figura 2.4.1. (24) Vórtice de *Kelvin-Helmholtz* ya desarrollado.

⁸ (25) La principal aportación del modelo de Andréi Nikoláyevich Kolmogórov (1903-1987) es distribución de la energía entre las distintas escalas de torbellinos. En estado estacionario, la energía inyectada por los torbellinos de mayor escala debe ser igual a la transmitida por todos los torbellinos independientemente de su escala. Con esta hipótesis, se consigue las dos escalas que delimitan la cascada de torbellinos.

2.5 SEPARACIÓN DE FLUJO Y BURBUJAS DE RECIRCULACIÓN

Otro tipo de inestabilidades son las que se generan cuando la capa límite se desprende, creando así una *burbuja de recirculación*. Uno de los pioneros en la investigación de este fenómeno fuera del ámbito académico fue *F. Schmitz* (con su trabajo "*Aerodynamik des Flugzeugs*", 1960) y a partir de él, muchos investigadores se dedicaron a ello, principalmente en la universidad de Stuttgart, Alemania (*D. Althaus*, 1985 y *R. Eppler*, 1990). Más recientemente destaca el nombre de *M. Selig*, que mediante un grupo de investigación desarrolló métodos avanzados de diseño de alas (con trabajos como "*Summary of low speed airfoil data*", 1995).

En la actualidad estos fenómenos, característicos de flujos a Reynolds bajos, son mucho más estudiados debido al avance de la tecnología y la aparición de aplicaciones donde este fenómeno requiere ser estudiado. Entre las aplicaciones aerodinámicas con números de Reynolds bajos (10^4 - 10^6) están los aviones de reconocimiento o los micro-vehículos aéreos.

Como señala *Sampaio* (8), en zonas donde se desprende la capa límite y se genera una burbuja de recirculación, aparecen flujos muy complejos con transición, aparición de capas de cizalladura, de estructuras con turbulencia anisotrópica y separación y adherencia del flujo a la superficie. Si el ángulo de incidencia del cuerpo es pequeño, el fluido se volverá a adherir en el punto de adherencia (*reattachment point*). Si el ángulo de incidencia es demasiado grande, este punto no existe, haciendo que la burbuja de recirculación se alargue dirección aguas abajo hacia la estela y produciendo la creación de vórtices que van desapareciendo, siguiendo el proceso de disipación ya explicado. Un caso típico de este comportamiento del fluido es la *calle de vórtices de von-Kármán*⁹ (**Figura 1.3.1.2**).

La separación de flujo ocurre cuando existe un cambio abrupto de geometría o un gradiente de presión adverso lo suficientemente grande para que la capa límite se desprenda. Con la separación, aparecen capas de cizalladura que se alejan de la pared y los esfuerzos viscosos dejan de ser dominantes. Esto hace que, por lo general, tras la separación de la capa límite aparezca la transición y las capas de cizalladura de turbulencia se ensanchen. Existe un punto donde éstas se bifurcan, parte del flujo comienza a ir aguas arriba (recirculación del fluido), produciendo así una reducción de presión y ayudando a que el flujo se vuelva a adherir a la superficie del cuerpo. El resto de flujo continúa aguas abajo formando una capa límite turbulenta ya adherida a la superficie. La turbulencia genera un transporte de momento en dirección normal a las capas de cizalladura, haciendo que el flujo se vuelva a adherir a la superficie y eliminando la recirculación de flujo.

⁹ Theodore von Kármán (1881-1963) fue un ingeniero y físico húngaro-estadounidense que realizó importantes contribuciones en el ámbito de la aeronáutica y la astronáutica. Realizó numerosos trabajos científicos en teorías relativas a fenómenos de la turbulencia y obtuvo soluciones de problemas de aerodinámica, termodinámica e hidrodinámica, entre otros logros. Es especialmente conocido por sus trabajos de caracterización de flujos subsónicos e hipersónicos y dio nombre a la calle de vórtices de von-Kármán (20).

La presencia de burbujas de recirculación, ya sea en el objeto de estudio o en un perfil aerodinámico cualquiera, generan un aumento de la fuerza de arrastre no deseado. Sin embargo, debido a que contienen una zona localizada de alta velocidad y baja presión estática, puede generar un aumento de succión en este tramo.

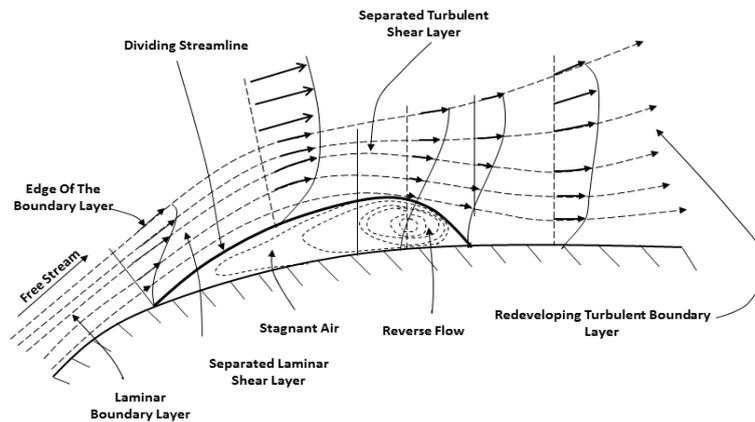


Figura 2.5.1. (32) Desprendimiento de la capa límite laminar y formación de burbuja de recirculación en el álabe de una turbina.

La localización del punto de transición afecta a la curvatura de las capas de cizalladura y por tanto al punto donde el flujo se vuelve a adherir, actuando así sobre los perfiles de velocidad y de presión que se generan. Los principales factores que afectan a la formación de la burbuja son el ángulo de ataque y el número de Reynolds. Números de Reynolds elevados disminuyen la burbuja de recirculación por aumentar la cantidad de turbulencia y ángulos de ataque mayores aceleran la separación de fluido.

La burbuja de recirculación será de mayor tamaño si la transición de flujo laminar a turbulento es lenta o si el gradiente de presión adverso es elevado. Esto puede derivar en que el momento de turbulencia no sea lo suficientemente elevado para cerrar la burbuja de recirculación. Si esto ocurriese por ejemplo en el ala de un avión, la distribución de presiones cambiaría completamente y con ello las fuerzas, aumentando la fuerza arrastre y disminuyendo la sustentación¹⁰.

2.6. DISTRIBUCIÓN UNIVERSAL DE LA VELOCIDAD

El principal problema de la turbulencia y la razón por la que sigue siendo un problema abierto, es que incluso el flujo turbulento más sencillo es complejo y no se puede obtener una solución analítica. Por esta razón, para su resolución se emplean relaciones semi-empíricas. Una de las relaciones empleadas en el estudio de la turbulencia en la capa límite es la distribución

¹⁰ Información obtenida de *Laminar Separation Bubble: Its Structure, Dynamics and Control* (34).

universal de velocidades. Su base está fundamentalmente en el análisis dimensional añadiendo constantes que se calculan experimentalmente.

Siguiendo el razonamiento de *Hoffman* (7), en las zonas próximas a las paredes, los parámetros que afectan al perfil de velocidades son: la densidad (ρ), la viscosidad dinámica o cinemática (μ ó ν , respectivamente), la distancia a la pared (y), la rugosidad (k) y el gradiente de velocidad (du/dy) o esfuerzos de pared (τ).

Haciendo uso de las variables adimensionales u^+ , y^+ (ecuaciones **2.1.1** y **2.1.2**) y k^+ , donde:

$$k^+ = \frac{u_\tau k}{\nu}$$

Siendo u_τ la velocidad de fricción (**Ec. 2.1.3**), se puede decir que u^+ depende de y^+ y de k^+ en la zona próxima a la pared:

$$u^+ = f(y^+, k^+)$$

Si la pared es lisa, u^+ solo depende de y^+ , es decir, no existe rugosidad:

$$u^+ = f(y^+)$$

Esta relación se conoce como la ley de la pared (*Law of the Wall*), que es válida para la capa límite en la zona viscosa, la zona de amortiguamiento y parte de la zona completamente turbulenta.

El perfil de velocidades de la región exterior es función de la densidad (ρ), de la distancia a la pared (y), del espesor de la capa límite (δ), de la velocidad turbulenta u_τ y del gradiente de presión ($\frac{dp}{dx}$):

$$u - u_\infty = g\left(\rho, y, \delta, u_\tau, \frac{dp}{dx}\right)$$

Y se puede expresar de forma adimensional como:

$$\frac{u - u_\infty}{u_\tau} = g\left(\frac{y}{\delta}, \frac{\delta}{\rho u_\tau^2} \frac{dp}{dx}\right)$$

Esta relación se llama la ley defecto (*The defect Law*).

Donde la presencia de la viscosidad es dominante debido a los grandes gradientes de velocidad, esta disipa los torbellinos de escala pequeña. Este efecto se hace visible en las zonas próximas a la pared, donde el número de Reynolds es relativamente pequeño. Sin embargo, el efecto de la viscosidad en la región exterior de la capa límite es despreciable y por tanto, podemos decir que el perfil de velocidades es independiente de la viscosidad. Por ello, en la región exterior, la velocidad no depende de esta variable.

La relación que existe entre la zona exterior (*The defect Law*) y la zona interior (*Law of the Wall*) tiene que converger en una zona intermedia que se denomina zona logarítmica (*Log layer*). El espesor de esta capa depende fuertemente del número de Reynolds.

Si se considera el objeto de análisis una placa plana, lisa y sin un gradiente de presión impuesto, las expresiones para el parámetro de velocidad adimensional de cada una de las zonas mencionadas es:

- La ley de la pared:

$$\frac{u}{u_\tau} = f(y^+) = f\left(\frac{yu_\tau}{\nu}\right) = f\left(\frac{y \delta u_\tau}{\nu}\right)$$

- La ley defecto:

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{u_e}{u_\tau} + g\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

- La zona logarítmica:

$$f\left(\frac{y \delta u_\tau}{\nu}\right) = \frac{u_e}{u_\tau} + g\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Que aplicando logaritmos queda de la forma:

$$\frac{u_e}{u_\tau} = \frac{1}{k} \ln y^+ + B \quad (\text{Ecuación 2.6.1})$$

$$u^+ = 2.5 \ln y^+ + 5.45 \quad (\text{Ecuación 2.6.2})$$

Donde k y B son constantes halladas de forma experimental.

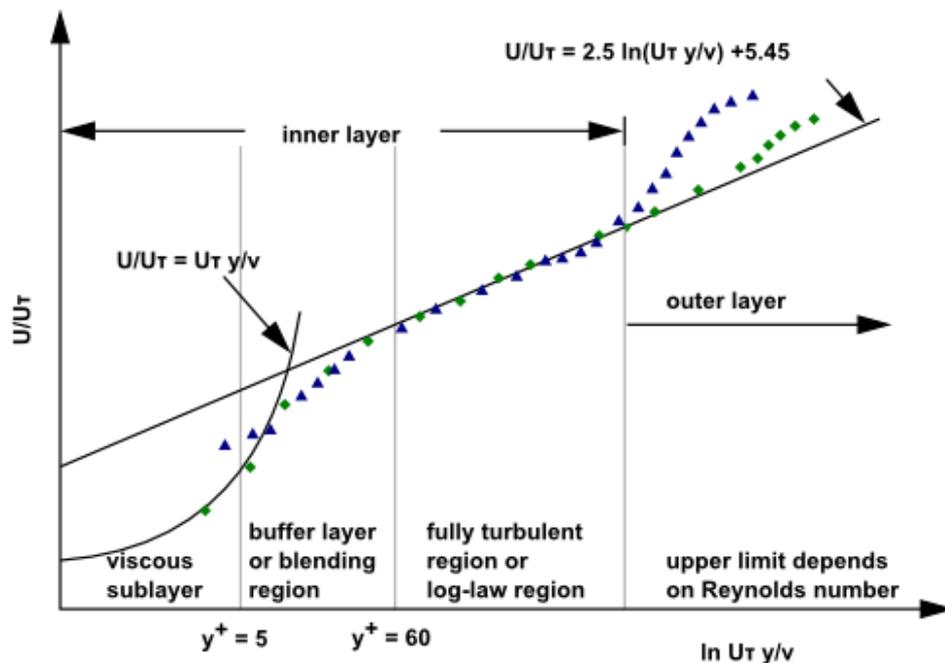


Figura 2.6.1. (21) Muestra el perfil de la velocidad de la capa límite turbulenta en función de la distancia normal a la pared mediante las ecuaciones de la distribución universal de la velocidad.

Explicar que el perfil de velocidades en régimen turbulento se comporta de forma logarítmica requiere hacer mediciones en experimentos reales. Sin embargo, es muy difícil medir en un flujo turbulento por cuestiones como la imposibilidad de medir en la capa viscosa de la capa límite, donde existen gradientes de velocidad muy grandes en espesores del orden de micras o menos. Aunque las ecuaciones no puedan por tanto ser validadas, el comportamiento logarítmico del perfil de velocidad es el más aceptado. Sin embargo, existen valores muy dispersos de las constantes obtenidas experimentalmente (9).

Capítulo 3.: ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

Las ecuaciones de Navier-Stokes¹¹ son ecuaciones no lineales y de segundo orden con cuatro variables independientes, que describen el comportamiento del fluido.

El movimiento de un fluido se debe a la aplicación de fuerzas externas. Existen dos tipos de fuerzas: fuerzas de superficie (presión y esfuerzos viscosos) y fuerzas másicas (gravedad y las fuerzas debido a la rotación). En las siguientes ecuaciones ρ representa la densidad del fluido, p la presión dinámica, \mathbf{u} el vector velocidad y μ el coeficiente de viscosidad dinámica.

Las ecuaciones en forma diferencial que gobiernan un fluido son (10):

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD:

Con esta ecuación se expresa el hecho de que tomando un volumen de control, la masa que entra debe ser igual a la que sale.

Siendo J el jacobiano¹² de deformación entre $t=0$ y el instante t , la expansión del volumen a lo largo del fluido se define como:

$$\frac{DJ}{Dt} = J(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

¹¹ Las ecuaciones de Navier-Stokes reciben su nombre de Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes. Claude-Louis Navier (1785-1836) fue un ingeniero y físico francés discípulo de Fourier que se dedicó al campo de las matemáticas aplicadas a la ingeniería, la elasticidad y la mecánica de fluidos. El Irlandés George Gabriel Stokes (1819-1903), también físico y matemático, hizo importantes contribuciones en la dinámica de fluidos, la óptica y física matemática.

¹² El jacobiano en cálculo vectorial hace referencia al determinante de la matriz jacobiana, que es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función escalar o vectorial.

Fue Euler¹³ quien tradujo la ley de conservación de la masa como la derivada en t de J. Si la masa ni se crea ni se destruye entonces la densidad ($\rho(\mathbf{x},t)$) por el volumen es una constante:

$$\frac{D(\rho J)}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt} J + J\rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

Como $J \neq 0$:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$$

Pasando la derivada sustancial¹⁴ a derivadas parciales queda la expresión:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{Ec. 3.1.})$$

Donde \mathbf{x} es función de x,y,z ($f(x,y,z)$), \mathbf{u} es función de u,v,w ($f(u,v,w)$) y $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})$ es la divergencia de un campo vectorial y por tanto representa la diferencia entre el flujo saliente y el entrante del campo. Esta es la forma euleriana de la conservación de la masa.

La ecuación expresada en notación indicial¹⁵ queda:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0$$

ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO:

Deriva de la segunda ley de Newton, donde se relaciona la masa, la aceleración y la fuerza. La variación de cantidad de movimiento se debe a la acción de fuerzas, que son dos: fuerzas de superficie ($f_s(\mathbf{x}, t)$) y fuerzas másicas ($f_m(\mathbf{x}, t)$).

$$\rho \frac{D(\mathbf{u})}{Dt} = f_s(\mathbf{x}, t) + f_m(\mathbf{x}, t)$$

¹³ Leonhard Paul Euler (1707-1783) fue un matemático y físico suizo y se puede considerar el principal matemático del siglo XVIII. Tiene importantes trabajos en los campos de la óptica, la astronomía y la mecánica. Entre una de sus aportaciones estuvo la ecuación que gobierna los fluidos no viscosos, la ecuación de Euler.

¹⁴ La derivada sustancial se escribe en letras mayúsculas para indicar que representa el cambio de una variable con el tiempo desde el punto de vista *lagrangiano*, la rapidez de cambio siguiendo una partícula. Desde el punto de vista *euleriano*, esto se representa mediante derivadas parciales (33).

¹⁵ Notación utilizada para conseguir compactar una ecuación sin el uso de sumatorios siempre que los subíndices sean repetidos.

Pasando la derivada sustancial a derivadas parciales aparece el término $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ (en notación vectorial). Este término se denomina *convectivo* y representa el cambio debido al movimiento, mientras que el primer término de la derecha es la *derivada local* y significa la rapidez de cambio en un punto.

$$\rho \left(\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = f_s(\mathbf{x}, t) + f_m(\mathbf{x}, t)$$

Las fuerzas de superficie se pueden dividir en fuerzas de presión y esfuerzos viscosos. El componente de la presión se puede escribir como:

$$f_p = -\nabla p$$

Y los esfuerzos viscosos en fluidos newtonianos toman la forma de:

$$f_v(\mathbf{x}, t) = \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u}$$

Siendo p función de \mathbf{x} y de t y λ y μ constantes cuantificables propias del fluido.

Con ello queda la ecuación:

$$\rho \frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + f_m(\mathbf{x}, t) \quad (\text{Ec. 3.2})$$

Con las ecuaciones **3.1** y **3.2** se obtiene un sistema de ecuaciones de cuatro ecuaciones y cinco incógnitas (la densidad, las tres componentes de la velocidad y la presión). Al ser un sistema indeterminado es necesario añadir una nueva ecuación que involucre el balance de la energía. Como se menciona anteriormente, en el presente estudio, no se utilizan las ecuaciones de la energía. Es posible desacoplar las ecuaciones de conservación de masa y momento de la ecuación de la conservación de la energía por tratarse de un flujo incompresible, así se explica en el siguiente apartado.

La ecuación de cantidad de movimiento expresada en forma indicial queda:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (\text{Ec. 3.3})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Término no} \\ \text{estacionario} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Término} \\ \text{convectivo} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Término} \\ \text{de disipación}^{16} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Término de} \\ \text{presión} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Fuerzas} \\ \text{másicas} \end{array} \right\}$$

¹⁶ El término de disipación se debe a la presencia de la viscosidad y es proporcional al gradiente de velocidad. Representa como los vórtices más pequeños pasar a energía térmica debido a la viscosidad.

En la ecuación τ_{ij} es el tensor de esfuerzos viscosos definido como:

$$\tau_{ij} = -\left(\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \delta_{ij} + 2\mu D_{ij}$$

Siendo δ_{ij} la *Delta de Dirac*, que toma valores de 1 cuando $i=j$ y de cero en el resto de los casos. Y D es el tensor de deformación expresado como:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$$

3.1 FLUJO INCOMPRESIBLE

En el caso de estudio, el fluido se considera incompresible, es decir, el ratio entre la velocidad del fluido y la del sonido (*número de Mach*) es menor que 0.3.

Si el flujo es incompresible entonces el factor de expansión definido como J es una constante igual a la unidad (el determinante tiene valor uno), de lo que se deduce que:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

De esta manera se obtienen dos ecuaciones de la ley de conservación de la masa y se consigue que la densidad pase a ser una constante en el espacio y en el tiempo, dejando de ser una incógnita. Esto hace que el sistema que queda tenga cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, es decir, un sistema determinado formado por:

$$\rho \left(\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + f_m(\mathbf{x}, t)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Llegado a este sistema de EDPs se necesitan datos iniciales y de contorno que dependerán del dominio del problema de estudio. Si el problema de estudio es estacionario, el término no estacionario que aparece en las ecuaciones de NS se elimina.

Como conclusión, al considerar un flujo incompresible, las ecuaciones de conservación de la masa y el momento quedan desacopladas de la ecuación de la energía. De esta manera, se pueden resolver los campos de velocidad y presión, resolviendo posteriormente la ecuación de la energía en caso de querer obtener el perfil de temperaturas. En el estudio del caso propuesto no se hará uso de la ecuación de la energía.

3.1.1 ECUACIONES EN COORDENADAS CARTESIANAS (x,y,z)

Para el proceso del promediado de Reynolds, que se explicará en capítulos posteriores, se parte de las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cartesianas.

Considerando un flujo bidimensional, las ecuaciones de continuidad y las de cantidad de movimiento en x e y , siendo la velocidad en dirección x , u , y en dirección y , v son:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{Ec. 3.1.1.1})$$

$$\rho \left(\frac{\partial(u)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \rho f_{m_x} \quad (\text{Ec. 3.1.1.2})$$

$$\rho \left(\frac{\partial(v)}{\partial t} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \rho f_{m_y} \quad (\text{Ec. 3.1.1.3})$$

Recolocando la ecuación y desarrollando las expresiones de τ'_{ij} :

$$\tau'_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \tau'_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad \tau'_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

La expresión en x queda de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{Ec. 3.1.1.2})$$

Operando de la misma manera se obtiene la expresión en y .

3.2 APROXIMACIONES EN LA CAPA LÍMITE

En los casos en los que el fluido tiene una dirección predominante y la variación de la geometría es suave, las ecuaciones de Navier-Stokes se pueden simplificar de acuerdo con los siguientes criterios. Así indica *Ferziger* en los conceptos básicos de un fluido (11):

- El término de difusión del momento es mucho menor que el de convección en la dirección principal del fluido, por lo que se puede despreciar $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \right)$
- La componente de la velocidad en la dirección principal del fluido es mucho mayor que la componente en otras direcciones $(u \gg v)$

- El gradiente de presión en la dirección principal es mucho mayor que en el resto de direcciones ($\frac{\partial p}{\partial y} = 0$).

Por lo que la expresión de las ecuaciones de la capa límite queda:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{Ec. 3.2.2})$$

$$\rho \left(\frac{\partial(u)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (\text{Ec. 3.2.1})$$

Las ecuaciones de la capa límite no dan una descripción completa del fluido. La expresión de la presión (función de x) viene dada por el fluido fuera de la capa límite. Aun así, esta simplificación será útil en capítulos posteriores al explicar el término que representa el tensor de esfuerzos de Reynolds que aparece tras aplicar el promediado de Reynolds.

Para concluir, las ecuaciones de NS son un sistema de ecuaciones en las que aparecen ecuaciones parabólicas e hiperbólicas que se resuelven de forma simultánea, donde las incógnitas son los campos de la velocidad y la presión. Salvo en casos muy particulares las ecuaciones de Navier-Stokes no tienen solución analítica conocida, por tanto, se utilizan métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas.

Capítulo 4.: CFD (Computational Fluid Dynamics)

En este capítulo se explica de qué trata el método CFD recogiendo los conceptos tratados por *Ferziger* (11). CFD es una rama de la mecánica de fluidos que estudia los problemas de flujo mediante métodos numéricos, que nacen de la imposibilidad de obtener soluciones analíticas. Para la utilización de los métodos numéricos es necesario aplicar previamente lo que se llama un método de discretización, cuya función es aproximar las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) a sistemas de ecuaciones algebraicas a resolver por un ordenador mediante iteraciones. Estas aproximaciones se hacen en pequeños subdominios, por lo que la solución numérica proporciona resultados específicos para un lugar y un instante de tiempo. La precisión de los métodos numéricos depende del método de discretización utilizado, teniendo en cuenta que las soluciones obtenidas son siempre aproximaciones.

4.1. COMPONENTES DE UN MÉTODO DE SIMULACIÓN NUMÉRICA

Los ingredientes para obtener una simulación numérica del problema son:

- *Un modelo matemático* basado en un conjunto de ecuaciones en diferencias parciales o en forma integral o débil y unas condiciones iniciales y de contorno.
- *Un método de discretización.* La base fundamental de CFD es aproximar las EDP en ecuaciones algebraicas que el ordenador resuelve numéricamente. Para hacer esta conversión, se emplean tres métodos: *método de diferencias finitas*, de *volúmenes finitos* y de *elementos finitos*. Para el primer método se suele utilizar mallas de celdas estructuradas, mientras que para los otros dos se usan no estructuradas.

- *Un sistema de coordenadas concreto.* En este caso, el sistema de coordenadas escogido es en cartesianas, siendo x la dirección del flujo e y la dirección perpendicular a la pared. El origen del sistema de referencia se sitúa en el punto medio de la base de la figura. El eje x tiene valores positivos aguas debajo de este punto y negativos aguas arriba. El eje y tiene valores positivos en la parte superior a este punto y negativos en la inferior.
- Un conjunto de *celdas*. El dominio de estudio queda dividido en un número finito de subdominios, denominados celdas. Cuanta mayor información se necesite en una zona, mayor densidad de puntos deberá haber, a esto se le denomina refinamiento de malla. Las celdas *estructuradas* son aquellas en las que las líneas de una misma familia no se entrecruzan entre sí, cruzando a líneas de otras familias una sola vez. Se trata de un tipo de malla ordenada donde se sabe el número de celdas que existe en cada dirección. Para las zonas con geometrías más complejas se utilizan celdas *no estructuradas*, que son más flexibles. En este tipo de celdas, se tiene la información del número de nodos que existen, cada nodo tiene sus propias coordenadas, y conoce los nodos vecinos. A su vez, cada cara tiene información de los nodos que la forman y de las caras vecinas. Este tipo de mallado genera celdas menos regulares que necesitan más tiempo de computación para resolver las ecuaciones correspondientes. Por contrapartida, las celdas no estructuradas permiten el refinamiento de malla en zonas localizadas, sin tener que aumentar el número de celdas en zonas no deseadas.
- Criterio de convergencia. Una vez que se ha diseñado la malla, es necesario establecer un criterio de convergencia que indique donde parar la sucesión de iteraciones.

4.2. PROPIEDADES DE UN MÉTODO DE SIMULACIÓN NUMÉRICO

Para obtener una simulación numérica aceptable es indispensable que el método tenga las siguientes propiedades:

- *Consistencia.* A medida que se reduce el tamaño de celda, la diferencia entre el valor exacto de las ecuaciones del modelo matemático y el obtenido de la ecuación discretizada debe tender a cero. La diferencia entre estos valores se denomina *error de truncamiento*.
- *Estabilidad.* Una solución numérica es estable si durante el proceso de resolución del sistema de ecuaciones algebraicas el error no incrementa, es decir, si el problema resuelto por un método iterativo no diverge.
- *Convergencia.* Se dice que un problema converge cuando el valor residual del conjunto de ecuaciones algebraicas resueltas por el ordenador tiende a cero conforme avanza la iteración.

- *Conservación.* Las ecuaciones que se a resuelven son ecuaciones donde se cumplen las leyes de conservación. Por tanto, la cantidad que entra debe ser igual a la que sale tanto en cada subdominio como en el dominio como conjunto.
- *Realizable.* El problema diseñado debe tener soluciones físicas realistas.
- *Precisión.* El método de solución numérica es por definición una aproximación. Existe *errores al modelar*, que es la diferencia entre el flujo real y la solución obtenida del modelo matemático. En turbulencia los errores al modelar son generalmente grandes. Como se apunta anteriormente, también existen errores al discretizar, que es la diferencia entre las soluciones de las ecuaciones de conservación y las ecuaciones algebraicas (*error de truncamiento*). Estos disminuyen a medida que lo hace el tamaño de celda. Por último, existen *errores de convergencia*, que es la diferencia entre la solución obtenida iterando y la solución exacta de las ecuaciones algebraicas. Para conseguir mayor precisión, se deben de disminuir los errores existentes. La finalidad última puede ser o bien la reducción al máximo del tiempo de computación para conseguir la precisión requerida o alcanzar la mayor precisión con los recursos disponibles.

4.3 TIPOS DE DISCRETIZACIÓN

El objetivo es partir de las ecuaciones de NS y obtener un modelo que pueda ser utilizado por un ordenador. Para ello se utilizan las técnicas de discretización, que parten de las ecuaciones de Navier-Stokes, ya sea en derivadas parciales o en su forma integral. Al discretizar las ecuaciones de Navier-Stokes, se efectúan errores, a los que, como ya se ha mencionado, se les denomina *errores de truncamiento*.

- *Método de diferencias finitas (FD).* Es el método más sencillo para geometrías simples. Se parten de las ecuaciones de conservación en forma diferencial como la ecuación 3.3 que expresa la conservación del momento:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i$$

Se divide en celdas el dominio de estudio y se aproximan las ecuaciones en diferencias parciales a ecuaciones algebraicas mediante series de Taylor, polinomios de interpolación o esquemas compactos en cada nodo de la malla. Este método se aplica en celdas estructuradas y hay que tener especial cuidado en el cumplimiento de las leyes de conservación. Cada nodo es el origen de un sistema de referencia local. El error de truncamiento que se produce es del orden del coeficiente de la derivada de mayor orden que se desprece.

- *Método de volúmenes finitos (FV)*. Su punto de partida son las ecuaciones de conservación en forma débil o integral. La forma integral de la ecuación 3.3 es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho u_i d\Omega + \int_S \rho u_i v \cdot n dS = \int_S t_i \cdot n dS + \int_{\Omega} \rho g_i d\Omega$$

donde:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

y

$$t_i = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) i_j - p i_i$$

El dominio se divide en pequeños volúmenes de control y se obtiene una ecuación algebraica, mediante la aproximación de las integrales de superficie o de volumen, por cada uno de ellos. Es un método útil para cualquier tipo de malla, por lo que es aplicable para geometrías complejas. En este caso, el centro de cada volumen de control es el nodo computacional.

- *Método de elementos finitos (FE)*. Como en el método de FV, el dominio se divide en pequeños volúmenes. Pero, en este caso, las ecuaciones se multiplican por una ecuación de peso antes de aplicarlas en todo su dominio, para así asegurar la continuidad entre los distintos elementos. Estos dos últimos métodos suelen utilizar celdas no estructuradas. Esto supone una desventaja frente al método de FD, que utiliza celdas estructuradas, porque al linealizar las ecuaciones, quedan matrices menos regulares que complica el encontrar un método de solución eficiente.

El resultado obtenido por cualquiera de los métodos son ecuaciones algebraicas, lineales o no lineales, que se resuelven alcanzando la convergencia de un proceso iterativo.

El método utilizado por el software de simulación ANSYS Fluent® es el de volúmenes finitos. Las mallas serán creadas mediante ANSYS Meshing®. Como tanto la geometría, como la malla se diseñan en 2D, para las celdas se pueden utilizar triángulo o en su defecto cuadriláteros, como se hace en este proyecto.

Capítulo 5.: TÉCNICAS NUMÉRICAS PARA FLUJOS TURBULENTOS

Existen fundamentalmente tres tipos de simulaciones numéricas. La aproximación más simple, práctica y utilizada en la actualidad es la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes con el promediado de Reynolds (RANS) con un modelo de turbulencia para el cierre de las ecuaciones. En segundo nivel de sofisticación, se encuentra una simulación directa de los movimientos de los torbellinos de gran escala (LES), mientras que los torbellinos de menor escala se incluyen con modelos de turbulencia. Por último, existe la simulación directa de todas las escalas significativas de turbulencia (DNS). Estos dos últimos métodos se quedan en la actualidad muy limitados debido a la capacidad de los ordenadores. Con el previsible avance de la tecnología en los próximos años, estas técnicas se podrán aplicar a problemas prácticos. Además, recientemente, han aparecido estrategias intermedias de abordar los problemas de turbulencia: VLES, URANS y DES.

Los modelos de turbulencia de una o dos EDPs, empleados en el método RANS y en la parte modelizada en el método LES, se basan en ecuaciones parabólicas. Aparecen tanto en formulación implícita como explícita y para su resolución se pueden utilizar varios métodos numéricos ya mencionados.

5.1 DNS (Direct Numerical Simulation)

Resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes podríamos predecir la evolución y la transición de la turbulencia. Este método se denomina Simulación Numérica Directa (DNS). Sin embargo, esto solo será posible en un futuro, cuando la capacidad de almacenaje de los ordenadores aumente y el tiempo de computación disminuya.

Es necesario tener en cuenta todas las escalas de turbulencia, desde la más pequeña (escala de Kolmogórov, η), donde se produce la disipación de energía cinética, hasta la más grande, que puede considerarse el espesor de la capa límite (δ). Si se toma como hipótesis que para la resolución de los torbellinos de menor escala, es necesario 6 celdas en cada orientación, para computación en 3D se necesitarían N celdas:

$$N = \left(6 \frac{\delta}{\eta}\right)^3$$

Con este cálculo rápido del número de celdas se puede comprobar que para la simulación numérica directa es necesario un número de celdas muy elevado, incluso para geometrías muy simples. Esto hace imposible el uso de este método para casos prácticos de turbulencia. Sólo son útiles para geometrías muy sencillas con números de Reynolds relativamente pequeños (~ 100).

DNS consigue extraer toda la información del flujo. Sin embargo, en aplicaciones de ingeniería, a veces, esta información es demasiada para el grado de detalle que se requiere. Además esta técnica es muy cara para ser utilizada con constancia. Su verdadera función en la actualidad es aportar conocimiento físico sobre el comportamiento del fluido para crear modelos de turbulencia más precisos. También se emplea como herramienta para la investigación.

5.2. SIMULACIÓN DE LOS TORBELLINOS DE GRAN ESCALA (LES, Large Eddy Scale)

Este segundo método consiste en obtener la simulación directa de los torbellinos de mayor escala, descartando aquellos de menor escala para ser analizados mediante el método RANS, cerrando el sistema de ecuaciones con los modelos de turbulencia. Los torbellinos de menor escala tienen características comunes entre sí, son más uniformes y transportan menos propiedades del fluido. Por esta razón, es coherente que se estudie de forma más detallada los torbellinos de mayor escala que los de menor escala. Con este método, el número de celdas requerido para la simulación directa será mucho menor, ahora hay que tener en consideración escalas de torbellinos mucho mayores a las de *Kolmogórov*. Por ello, la técnica de LES se puede aplicar para flujos con mayor número de Reynolds y con geometrías más complejas que en DNS. El método LES suele utilizarse en corrientes libres porque las escalas de longitud en zonas cercanas a la pared de un sólido suelen ser pequeñas, por lo que requieren celdas de tamaño demasiado pequeño para este método. Es muy común utilizar un método híbrido para la simulación de los problemas, utilizando el método RANS en la zona de capa límite, donde el método LES no da buenos resultados y el método LES en zonas de corriente libre, es decir, en la estela del cuerpo.

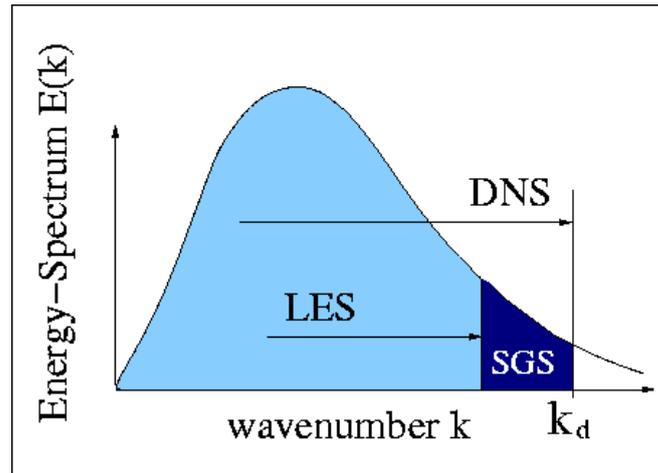


Figura 5.2.1. (22) Comparación entre el porcentaje de simulación directa del método DNS frente al LES

5.3. MÉTODO RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations)

Asumiendo la imposibilidad de analizar la turbulencia mediante la simulación directa del flujo, se recurre al método del promediado de Reynolds. Este método es el único que resuelve tanto problemas estacionarios como no estacionarios, LES y DNS solo resuelven la simulación de flujo estacionario. El método se basa en hallar las propiedades medias del fluido y despreciar los términos variantes de mayor orden. Estos términos corresponden a los torbellinos de menor escala y su influencia se introduce para cerrar el problema mediante los modelos de turbulencia, basados en datos experimentales. Mediante este método se consigue una aproximación de la solución del flujo turbulento, por lo que en la actualidad es muy utilizado en ingeniería. La complejidad de la turbulencia impide que este método pueda representar a los flujos turbulentos en su totalidad, lo que lo hace poco útil como única herramienta para la investigación.

Por tanto, esta técnica es útil para estudiar el comportamiento promedio en un sentido concreto del flujo, permitiendo la desaparición de las estructuras de menor escala y la disminución de las inestabilidades que aparecen en las ecuaciones que satisfacen este flujo medio. Su eficiencia y fidelidad hace que el uso de RANS con varios modelos de turbulencia tenga un papel importante en la investigación. Permite obtener una visión conjunta del tipo de flujo de forma sencilla para guiar el experimento.

5.3.1. REYNOLDS AVERAGED NAVIER-STOKES EQUATIONS

Teniendo en cuenta que el uso de los métodos LES (*Large Eddies Scale*) y DNS (*Direct Numerical Simulation*) queda limitado por la capacidad de almacenaje y rapidez computacional de los ordenadores de hoy en día y debido a la imposibilidad de tener a disposición la tecnología que requerirían, para el estudio presente se emplea el método RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*).

Para tener en consideración los efectos de la turbulencia en un flujo, las ecuaciones de movimiento del fluido se modifican posteriormente con modelos de turbulencia. A la hora de reformular las ecuaciones de Navier-Stokes existe otro método además del RANS, las ecuaciones de Navier-Stokes con el promediado de Favre¹⁷ (FANS). Sin embargo, solo se explica el método RANS, cuyos pasos para la aproximación de las ecuaciones de NS quedan reflejados a continuación, siguiendo los razonamientos de Hoffman (7):

FORMULACIÓN DEL MÉTODO RANS

Este método se basa en representar cada variable como una suma de un valor medio, que representa el fluido de gran escala (representado con una barra sobre la variable) y otro dependiente del tiempo, que representa el fluido de menor escala (representado con el símbolo prima):

$$f = \bar{f} + f' \quad (\text{Ec. 5.3.1.1})$$

Una de las propiedades a tener en cuenta es que el valor medio de una variable dependiente del tiempo en un intervalo de tiempo Δt es cero. Propiedad que viene dada por la siguiente expresión:

$$\bar{f}' = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f' dt = 0$$

Para llevar a cabo el proceso matemático se tienen en cuenta las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}} &= \bar{f} \\ \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{\bar{f}g} &= \bar{f}\bar{g} \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \end{aligned}$$

¹⁷ El método RANS aplica la hipótesis de *Markov*, que permite eliminar los términos variables de la densidad ρ' . Esta hipótesis considera que las estructuras de turbulencia no están afectadas por la compresibilidad hasta un Mach de aproximadamente 5. Para eliminar esta hipótesis y poder aplicar este método a flujos con alta compresibilidad se retienen los términos donde aparezca ρ' dando lugar a las ecuaciones de Navier-Stokes con el promediado de Favre (FANS). Este método queda recogido en el libro de Hoffman (7), sección 21.8.

$$\overline{f'^2} \neq 0$$

$$\overline{f'g'} \neq 0$$

$$\overline{(\bar{f} + f')^2} = \bar{f}^2 + \overline{f'^2}$$

Una vez expuestas las identidades matemáticas, se puede iniciar la reformulación de las ecuaciones de Navier-Stokes. Se comienza por la ecuación de la conservación de la masa pasando posteriormente a las ecuaciones de conservación del momento.

La ecuación de continuidad para un fluido bidimensional, incompresible viene dada por la ecuación **3.1.1.1**:

$$\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y} = 0$$

Aplicando la relación de la ecuación **5.3.1.1** se obtiene la ecuación:

$$\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} = 0$$

Y siguiendo las reglas anteriormente descritas, la ecuación queda simplificada de esta manera:

$$\frac{\partial(\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (\text{Ec. 5.3.1.2})$$

Siguiendo los mismos pasos se desarrolla la ecuación del momento en x con las hipótesis del fluido ya mencionadas que quedan recogidas en ecuación **3.1.1.2**:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho(\bar{u} + u'))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(\bar{u} + u')^2 + (\bar{p} + p'))}{\partial x} + \frac{\partial(\rho(\bar{u} + u)(\bar{v} + v'))}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial y} - \frac{\partial(\bar{v} + v')}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

Simplificando la ecuación con las reglas mencionadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{u}^2 + \bar{p} + \rho\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{u}\bar{v} + \rho\overline{u'v'})}{\partial y} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial(\bar{u})}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial(\bar{v})}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial(\bar{u})}{\partial y} - \frac{\partial(\bar{v})}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

Dejando la ecuación en función de los esfuerzos viscosos la ecuación resultante es:

$$\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{u}^2 + \bar{p})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{u}\bar{v})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\tau}_{xx} - \rho\overline{u'^2}] + \frac{\partial}{\partial y} [\bar{\tau}_{xy} - \rho\overline{u'v'}] \quad (\text{Ec. 5.3.1.3})$$

Se asume el mismo proceso para el momento en y partiendo de la ecuación **3.1.1.3** se llega a la expresión:

$$\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{u}\bar{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{v}^2 + \bar{p})}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\bar{\tau}_{xy} - \rho\overline{u'v'}] + \frac{\partial}{\partial y} [\bar{\tau}_{yy} - \rho\overline{v'^2}]$$

Las ecuaciones de Navier-Stokes con el promediado de Reynolds de un fluido bajo las mismas hipótesis en notación indicial son:

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{Ec. 5.3.1.4})$$

$$\frac{\partial(\rho\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho\bar{u}_i\bar{u}_j + \rho\overline{u'_i u'_j}) = \frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial\bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{Ec. 5.3.1.5})$$

Para poder cerrar el sistema se necesita añadir relaciones conocidas, como modelos de turbulencia. Por lo general, son constantes empíricas que relacionan los términos que varían con el tiempo con las propiedades medias del fluido. Existen modelos de turbulencia menos sofisticados, que se basan en ecuaciones algebraicas, y otros más complejos, formados por un sistema de ecuaciones en derivada parciales.

5.3.2. EL TENSOR DE ESFUERZOS DE REYNOLDS

Al aplicar el método RANS a las ecuaciones de Navier-Stokes, aparece un nuevo componente adicional que viene dado por $\tau_t = -\rho\overline{u'v'}$ y se denomina esfuerzo turbulento o tensor de esfuerzos de Reynolds. La aparición de nuevos términos implica la necesidad de más ecuaciones para la resolución del sistema, por lo que con lo visto hasta el momento el problema no esté cerrado.

La forma de resolver este problema es utilizar aproximaciones que se basan en hipótesis físicas, como la hipótesis de *Boussinesq*¹⁸. Para llegar a dicha expresión de la forma más sencilla posible se parte de las ecuaciones de Navier-Stokes simplificadas para un flujo incompresible estacionario y con la aproximación de capa límite (ecuaciones **3.2.1** y **3.2.2**) una vez aplicado el método de RANS:

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} = 0$$

¹⁸ Joseph Valentin Boussinesq (1842-1929) fue un físico y matemático francés que hizo grandes contribuciones en la teoría de la hidrodinámica, la luz, la vibración y el calor. En turbulencia, la utilización de la aproximación de Boussinesq al modelar los esfuerzos de Reynolds, resultó en la aparición del concepto de la viscosidad turbulenta (29).

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'})$$

El momento que se intercambia en la turbulencia a nivel macroscópico viene dado por término del tensor esfuerzos de Reynolds: $\tau_t = -\rho \overline{u'v'}$. Para relacionar este término, sigue el siguiente razonamiento:

Existe un esfuerzo viscoso laminar τ_l que se puede escribir como:

$$\tau_l = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

De la misma manera, estableciendo una analogía en cómo se intercambia el momento en un flujo laminar con cómo se transfiere en uno turbulento, se utiliza este concepto para expresar el esfuerzo turbulento (τ_t):

$$\tau_t = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Este concepto fue introducido por *Boussinesq* y μ_t representa la *viscosidad turbulenta (Eddy viscosity)*. En un flujo laminar el mecanismo de disipación ocurre solo a nivel molecular, debido a las vibraciones en las moléculas del fluido y es la viscosidad el parámetro que cuantifica este fenómeno. Cuando el flujo pasa a ser turbulento, la disipación sigue existiendo a nivel molecular, pero aparece la difusión. La viscosidad turbulenta aparece como un parámetro que cuantifica la cantidad de momento y energía que se intercambia en un flujo turbulento. Por tanto, mientras los esfuerzos viscosos dependen del fluido, los esfuerzos de Reynolds dependen del tipo de flujo, siendo una variable dependiente del espacio y el tiempo.

Con este paso, no queda cerrado el problema de turbulencia, solo se ha conseguido reescribir las ecuaciones utilizando la hipótesis de *Boussinesq*. Esta hipótesis, si se analiza en detalle, no es del todo correcta. Sin embargo, es una relación sencilla que si se aplica con cuidado puede predecir resultados razonablemente buenos.

Para continuar con el desarrollo, se debe saber que en los flujos turbulentos los torbellinos viajan una determinada distancia antes de su colisión y su consecuente pérdida de identidad. Esta distancia finita se define como la distancia de mezcla l_m (*mixing length*), concepto que fue introducido por *Prandtl*¹⁹. La base del *modelo de longitud de mezcla de Prandtl* es una expresión algebraica que establece una relación entre este parámetro, μ_t y el gradiente de velocidad (**Ec. 5.3.2.1**). La hipótesis de Prandtl se expresa como:

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2$$

¹⁹ Ludwig Prandtl (1875-1953) fue un físico alemán que desarrollo la base matemática de la aerodinámica subsónica. El número de Prandtl, que desempeña un papel importante en el campo de los fluidos, fue nombrado en su honor. En sus estudios identificó la capa límite y con ello varios conceptos como la condición de no deslizamiento o la presencia de los esfuerzos de fricción únicamente en la capa límite.

Por lo que se deduce que,

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \quad (\text{Ec. 5.3.2.1})$$

El concepto de viscosidad turbulenta se puede extender a cualquier tipo de flujo gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes. Por ejemplo, al extender este concepto a un flujo bidimensional queda la siguiente expresión:

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}$$

La longitud de mezcla (l_m) y la escala longitudinal de turbulencia (l) no son la misma, pero sí proporcionales: $l = l_m \cdot \text{constante}$. La escala longitudinal de turbulencia es la escala características de los torbellinos que se forman, cuyo límite inferior es la escala de *Kolmogórov* y el superior el espesor de la capa límite δ . El concepto de longitud de mezcla se utiliza en los modelos algebraicos y la escala longitudinal de turbulencia en los modelos de una o dos ecuaciones que se utilizan para cerrar el problema utilizando diferentes hipótesis. Será en el próximo capítulo donde se expliquen los tres tipos de modelos de turbulencia (modelos algebraicos y de una y dos ecuaciones), incluyendo varias modificaciones de los mismos. Existen modelos de turbulencia de más de dos ecuaciones pero no se abordan en este proyecto.

5.3.3. DIFERENCIAS ENTRE MÉTODOS RANS Y LES

Una vez mencionadas las principales diferencias entre ambos métodos, se explican por medio de la **Figura 5.3.3.1** los resultados de la simulación que se obtendrían en ambos métodos de simulación, para así ofrecer una percepción visual de lo que implica utilizar un método u otro.

Mientras que en la imagen donde se emplea el método RANS aparece un único vórtice, en la

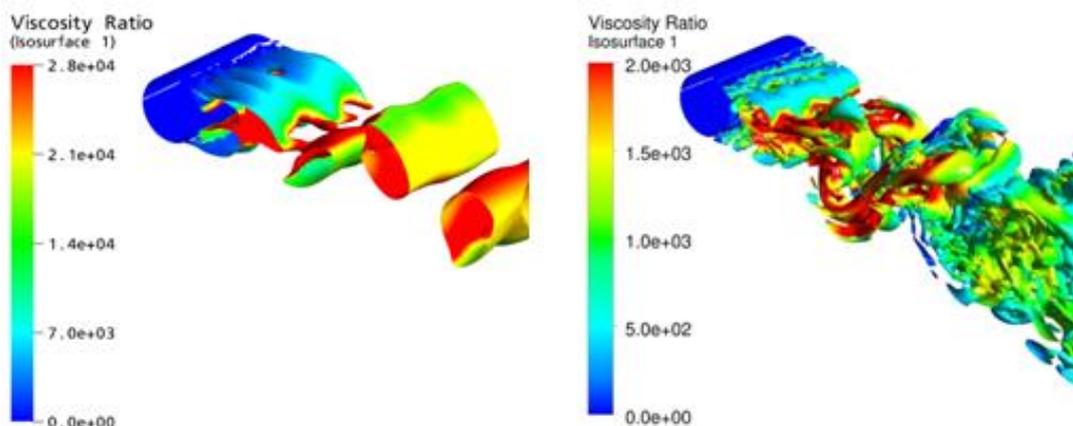


Figura 5.3.3.1. (23) Imagen con simulación con método RANS (izquierda) y con método LES (derecha) de un flujo no estacionario en la estela de un cilindro.

que se emplea el método LES se observa cómo un vórtice de gran escala se rompe en vórtices de menor escala. Este método de simulación numérica permite conocer con mayor precisión cómo se entremezcla el fluido en la estela porque utiliza esquemas numéricos menos difusivos. El método RANS, por el contrario, obtiene una solución representativa del flujo medio.

Pese a las claras ventajas que tiene el método LES frente al método RANS, el método RANS es más barato desde el punto de vista de la computación, es un sistema más robusto y más fácil de utilizar. Por estas razones RANS es más utilizado en el ámbito de la industria y está disponible en prácticamente todos los sistemas de CFD.

Capítulo 6.: MODELOS DE TURBULENCIA

Un modelo de turbulencia es una ecuación semi-empírica que relaciona las variables del flujo que fluctúan a lo largo del tiempo, con constantes obtenidas experimentalmente. Si la ecuación está expresada de forma algebraica se denominan modelos de turbulencia de *cero ecuaciones*. Si incluyen EDPs, se denominan modelos de *una o dos ecuaciones* en diferencias parciales, dependiendo del número de EDPs que contenga el modelo. También hay modelos de tres y cuatro ecuaciones que no se aplicaran en el estudio.

La continua aparición de todo tipo de nuevos modelos de turbulencia es una evidencia de que no existe un tipo de modelo de turbulencia que sea claramente superior a otro.

6.1. MODELO DE TURBULENCIA DE CERO ECUACIONES

Son modelos que relacionan los términos que varían con el tiempo (de tipo f') con las propiedades medias (de tipo f) mediante ecuaciones algebraicas. Para estos modelos se asume que la producción local y la disipación de turbulencia son aproximadamente iguales. Además no incluye la convección de la turbulencia, no teniendo en cuenta lo que ocurre en el flujo en instantes anteriores. En las versiones más simples de los modelos de turbulencia, la turbulencia queda definida con una escala de la longitud y la energía cinética (k) o la velocidad (q) (que se relacionan mediante la ecuación $q = \sqrt{2k}$).

Para determinar k se utiliza la velocidad media del fluido y la aproximación:

$$q = L \frac{\partial u}{\partial y}$$

Como ya se ha comentado al introducir el concepto de longitud de mezcla, el modelo de turbulencia más sencillo para hallar el término de la viscosidad turbulenta sin utilizar ecuaciones adicionales es el *modelo de longitud de mezcla de Prandtl*, que establece una relación entre μ_t y el gradiente de velocidad mediante la expresión algebraica **5.3.2.1**.

Para la escala de longitud, la mayoría de los modelos matemáticos de este tipo utilizan una región interior y otra exterior para representar la longitud de mezcla (l_m). En la región interior se emplea una función exponencial de tipo:

$$l_i = \mathbf{k} \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right) y \quad (\text{Ec. 6.1.1}) \quad \text{Función de amortiguamiento de } \textit{van Driest}^{20}.$$

Donde \mathbf{k} en este caso es la constante de von Kármán (~ 0.41), A^+ es un parámetro que depende del gradiente de presión en el sentido de la corriente, tomando el valor de 25 para un gradiente de presión nulo.

La longitud de mezcla en la región exterior es proporcional a la anchura de la capa límite (δ):

$$l_o = C_o \delta$$

dónde C_o es una constante entre los valores 0.08 y 0.09.

A partir del *modelo de longitud de mezcla de Prandtl* aparecen otros modelos más complejos de cero ecuaciones. Existen modelos de cero ecuaciones que necesitan para su resolución el espesor de la capa límite y las propiedades en la superficie de ésta, como en el modelo de *Cebeci-Smith*. Durante la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes, es difícil conocer estos valores, por ello, *Baldwin* y *Lomax* introdujeron un modelo de turbulencia donde no intervenían los valores de la capa límite. En él la viscosidad turbulenta en la región interior se aproxima a:

$$\mu_{ti} = \rho l^2 |\mathbf{w}|$$

donde l viene dada por la ecuación **6.1.1** y \mathbf{w} es la vorticidad (magnitud que cuantifica el movimiento rotacional del fluido). La vorticidad se define como el rotacional del campo de velocidades:

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$$

y en un flujo 2D se puede expresar como:

$$\mathbf{w} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

²⁰ El modelo de van Driest tiene en cuenta la disipación de la turbulencia a lo largo de toda la capa límite, incluyendo la zona viscosa. La ecuación recoge la disminución de la disipación de la turbulencia a medida que se aproxima a la pared, siendo únicamente nula en $y^+=0$. $A^+=25$ da buenos resultados siempre que no existan gradientes de presión, en cuyo caso A^+ viene dado por una correlación (27).

La coordenada y en forma adimensional que aparece en la ecuación de *van Driest* (Ec. 6.1.1) se expresa como (Ec. 2.1.2):

$$y^+ = y \frac{u_\tau}{\nu_w}$$

donde el subíndice w indica las propiedades en la pared.

La viscosidad turbulenta en la región exterior se aproxima como:

$$\mu_{to} = \alpha \bar{\rho} C_{CP} F_{wake} F_{Kleb}$$

Donde α toma el valor 0.0168 y

$$F_{wake} = \min \left[y_{max} G_{max}, C_{wake} y_{max} \frac{(\Delta \mathbf{u})^2}{G_{max}} \right]$$

Siendo un valor típico de C_{wake} 1.0 y

$$G_{max} = \max \left(\frac{l}{k} |\mathbf{w}| \right)$$

l es la longitud de mezcla dada por la ecuación de *van Driest*, k la constante de *von Kármán* y $\Delta \mathbf{u}$ es la diferencia entre los valores absolutos de la velocidad máxima y mínima. En flujo cercano a la pared la velocidad mínima es cero, por lo que queda:

$$\Delta \mathbf{u} = (u^2 + v^2)_{max}^{\frac{1}{2}}$$

En flujo libre $\Delta \mathbf{u}$ se define como la diferencia entre la velocidad máxima y la velocidad en $y_{máxima}$:

$$\Delta \mathbf{u} = (u^2 + v^2)_{max}^{\frac{1}{2}} - (u^2 + v^2)_{y_{max}}^{\frac{1}{2}}$$

F_{Kleb} se define como

$$F_{Kleb} = \left[1 + 5.5 \left(\frac{C_{Kleb} y}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1}$$

Siendo y_{max} la altura donde G_{max} ocurre.

Los valores de C_{Kleb} y C_{CP} (constantes de *Klebanoff*) cuando el gradiente de presión es cero o próximo a cero son 0.3 y 1.6, respectivamente. Si se quiere incluir el efecto de los gradientes de presión, se utilizan las siguientes expresiones:

$$C_{Kleb} = \frac{2}{3} - \frac{0.01312}{0.1724 - \beta^*}$$

donde

$$\beta^* = \frac{y_{max}}{u_\tau} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad (\beta^* \text{ se calcula fuera de la región viscosa})$$

y u_τ la velocidad de fricción.

$$C_{CP} = \frac{3 - 4C_{Kleb}}{2C_{Kleb}(2 - 3C_{Kleb} + C_{Kleb}^3)}$$

Finalmente la viscosidad turbulenta a lo largo de la capa límite se determina como:

$$\mu_t = \min(\mu_{t_i}, \mu_{t_o}) \quad (\text{Ec. 6.1.2})$$

Lo que significa que el valor de μ_t que se tomará desde la pared hasta un punto donde $\mu_{t_i} > \mu_{t_o}$ será μ_{t_i} y a partir de dicho punto se tomará μ_{t_o} .

Definido el proceso, se impone un lugar de transición x_{tr} y un valor inicial de la viscosidad turbulenta de cero a lo largo del dominio. La viscosidad turbulenta se obtiene utilizando la ecuación correspondiente en cada caso (μ_{t_i}, μ_{t_o}) teniendo en cuenta la **Ec.6.1.2.**, recalculando así su valor en cada iteración. Se recuerda que la viscosidad turbulenta se relaciona con las ecuaciones de Navier-Stokes con el promediado de Reynolds por medio de la hipótesis de *Boussinesq*. Este modelo no se utilizará en el proyecto porque los modelos de turbulencia algebraicos como el de *Baldwin-Lomax* u otros como el de *Cebeci-Smith* o el de *Johnson-King*, permiten definir una escala de longitud adecuada únicamente en flujos muy simples. Los modelos de cero ecuaciones fallan incluso con estructuras en 2D de cuerpos romos que provoquen la separación del flujo en algún punto.

6.2 MODELOS DE TURBULENCIA DE UNA ECUACIÓN

En lugar de emplear relaciones algebraicas para determinar la viscosidad turbulenta y calcular la escala de la velocidad y de la longitud en función de términos medios de la corriente, en los modelos de turbulencia de una ecuación se utilizan ecuaciones en diferencias parciales para la escala de la velocidad y relaciones algebraicas para determinar la escala de la longitud. La escala de la velocidad se escribe en términos de la energía cinética turbulenta:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} [\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}]$$

La viscosidad turbulenta se expresa ahora como:

$$\mu_t = \rho l \sqrt{k}$$

Mientras que los modelos algebraicos son eficientes desde el punto de vista numérico, pero no incluyen los efectos del transporte ni de la difusión; este modelo sí incluye los efectos del transporte.

6.2.1. MODELO DE TURBULENCIA DE SPALART-ALLMARAS

Este modelo resuelve una ecuación de transporte para la viscosidad cinemática que se representa como ν , con la que se obtiene ν_t y se relacionada con la viscosidad dinámica turbulenta por medio de la densidad: $\mu_t = \nu_t \rho$.

La ecuación del transporte que utiliza ANSYS Fluent® se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{D(\overline{\rho\nu})}{Dt} = \frac{1}{\sigma_{\overline{\nu}}} [\nabla \cdot ((\mu + \overline{\rho\nu})\nabla\overline{\nu}) + c_{b2}\rho(\nabla\overline{\nu})^2] + c_{b1}\overline{S}\overline{\nu}\rho - c_{w1}f_w\rho \left[\frac{\overline{\nu}}{d}\right]^2 + S_{\overline{\nu}}$$

En la ecuación, el término que representa producción de turbulencia es $c_{b1}\rho\overline{S}\overline{\nu}$, el que representa la destrucción $c_{w1}f_w\rho \left[\frac{\overline{\nu}}{d}\right]^2$ y $S_{\overline{\nu}}$ es el término fuente (*source term*), que en ANSYS Fluent® es introducido por el cliente.

La viscosidad turbulenta viene dada por la expresión:

$$\nu_t = \overline{\nu}f_{v1}$$

siendo:

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}$$

$$\chi = \frac{\overline{\nu}}{\nu}$$

Las funciones y constantes que aparecen en la ecuación se definen como:

$$\overline{S} = \mathbf{w} + \frac{\overline{\nu}}{\mathbf{k}^2 d^2} f_{v2}$$

Donde d es la distancia a la pared, \mathbf{k} la constante de von-Kármán y \mathbf{w} la vorticidad:

$$\mathbf{w} = \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right|$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}$$

$$f_w = g \left(\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}$$

donde

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r)$$

y

$$r = \frac{\overline{\nu}}{\overline{S}\mathbf{k}^2 d^2}$$

Las constantes utilizadas en las ecuaciones son:

$$\sigma_{\bar{v}} = \frac{2}{3} \quad c_{b1} = 0.1355 \quad c_{b2} = 0.622$$

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{k^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma} \quad c_{w2} = 0.3$$

$$c_{w3} = 2 \quad \mathbf{k} = 0.4187 \quad c_{v1} = 7.1$$

Para completar un modelo de turbulencia es necesario fijar las condiciones iniciales y de contorno. Éstas se especificaran más adelante ya que son características del estudio presente.

Originalmente, el modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras requiere un y^+ de la primera celda pegada a la superficie de la pared en torno a la unidad. Al seleccionar este modelo de turbulencia en ANSYS Fluent®, éste aplica automáticamente un tratamiento de mejora en la pared (*Enhanced Wall Treatment* (EWT)) que permite utilizar este método para mallas cuya primera celda tenga un y^+ superior a la unidad, siempre que exista un número mínimo de celdas de 10 a 15 en la capa límite.

Existe otro modelo de turbulencia conocido de una ecuación, el modelo de *Baldwin-Barth*, que se obtuvo del modelo de turbulencia de dos ecuaciones $k-\varepsilon$ estándar. En los estudios realizados sólo se emplea el modelo de Spalart-Allmaras porque, por lo general, predice mejores resultados de las capas de cizalladura y da unos perfiles de velocidad más realistas. En cambio, el modelo de Spalart-Allmaras es menos sensitivo cuando aparecen gradientes de presión adversos y prediciendo valores de la velocidad demasiado altos en estas zonas. Estos inconvenientes fueron detectados en los experimentos de *Menter* (12).

Pese a las conclusiones de *Menter*, se considera que el modelo de Spalart-Allmaras da buenos resultados para capas límites con gradientes de presión adversos. Sin embargo, no da información precisa sobre el decaimiento de la turbulencia y no se recomienda el uso de este modelo en flujo libre con esfuerzos de cizalladura.

6.3. MODELOS DE TURBULENCIA DE DOS ECUACIONES

Como ya se ha mencionado anteriormente, la convección de la turbulencia no se incluye en los modelos de cero ecuaciones. Por tanto, los efectos físicos que le ocurren al fluido en los instantes anteriores, no se tienen en consideración. Para tenerlos en cuenta, se debe derivar ecuaciones de transporte basadas en las ecuaciones de Navier-Stokes. Además, la complejidad que incluye un flujo turbulento hace evidente que para la computación de estos flujos se parta de ecuaciones en derivadas parciales. En los modelos de turbulencia de una ecuación se utiliza una ecuación de este tipo, mientras que en los modelos de dos ecuaciones se utilizan dos.

Estos modelos de turbulencia se utilizan cuando el flujo es complejo, transitorio y aparecen varias longitudes características, para así poder representar mejor la turbulencia. A continuación, se desarrollan los modelos de turbulencia de dos ecuaciones $k-\varepsilon$ y $k-\omega$ con

algunas de sus respectivas modificaciones desarrolladas a lo largo de la historia de la mecánica de fluidos.

Como en los modelos de turbulencia ya tratados, se parte de la hipótesis de *Boussinesq*, para relacionar la viscosidad turbulenta con las ecuaciones con el promediado de Reynolds.

6.3.1. MODELO DE TURBULENCIA DE DOS ECUACIONES k - ε

Este modelo fue propuesto por *Lauder* y *Spalding* (1974) y se desarrolló en primer momento para casos de flujos incompresibles y se extendió posteriormente para casos compresibles. En ANSYS Fluent® aparece, entre otras, una corrección de compresibilidad para este modelo, que en este caso no será necesario utilizar.

El modelo de turbulencia emplea dos ecuaciones en derivadas parciales, una que deriva de la ecuación de la energía cinética turbulenta (k) y otra del ratio de la disipación de turbulencia (ε):

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} [\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}]$$

y

$$\varepsilon = \nu_t \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)}$$

La ecuación de la energía cinética turbulenta empleada en este modelo viene dada por:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} \underset{A}{=} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i k}{\partial x_i} \underset{B}{=} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \underset{C}{=} - \rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \underset{D}{=} - \rho \varepsilon_E + S_{kF} \quad (\text{Ec. 6.3.1.1})$$

A continuación se explica el sentido físico de los términos que aparecen en la ecuación:

- A y B: Representa la suma de la variación local de energía cinética y el término convectivo:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i k}{\partial x_i}$$

- C: Representa por un lado el trabajo realizado por los esfuerzos viscosos turbulentos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$

y por otro el término de difusión:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$

- D: Representa el ratio de producción de energía cinética turbulenta debido al gradiente de velocidad. Se puede aplicar la aproximación de *Boussinesq* tratada en el apartado **5.3.2.** para dejar los esfuerzos de Reynolds en función de la viscosidad turbulenta:

$$P_k = -\overline{\rho u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \approx \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}$$

- E: Representa la disipación, es decir, cómo la energía turbulenta se transforma de forma irreversible en energía térmica:

$$\rho \varepsilon$$

- F: S_k hace referencia al término fuente que se introduce en ANSYS Fluent® por el usuario.

La ecuación utilizada para el ratio de disipación no deriva de la ecuación exacta, si no que para su formulación se utilizaron relaciones físicas. Viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} P_k \frac{\varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon \quad (\text{Ec. 6.3.1.2})$$

El significado físico de los términos de la ecuación de transporte del ratio de disipación ε es análogo al de la energía cinética turbulenta k , además, el término P_k viene dado por la misma expresión.

Las constantes que se emplean por defecto en ANSYS Fluent® son:

$$\sigma_k = 1.0 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad c_{\varepsilon 1} = 1.44 \quad c_{\varepsilon 2} = 1.92$$

Y la viscosidad turbulenta (μ_t) se relaciona con la disipación de la turbulencia (ε) y la energía cinética (k) mediante la siguiente expresión siendo $c_\mu = 0.09$:

$$\mu_t = \rho c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

En resumen, este modelo de turbulencia consiste en la resolución de cinco ecuaciones: la conservación de la masa, conservación del momento en x e y y las ecuaciones de transporte de las variables k y ε . Se debe tener en cuenta que en la práctica las ecuaciones de Navier-Stokes se emplean en su forma adimensional.

Este modelo de turbulencia es solo válido para $y^+ > 30$, si no se cumple esta condición es posible que aparezcan serios errores a la hora de modelar el problema. Con ello se puede intuir que

uno de los principales problemas con el modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ es que se hace numéricamente inestable en zonas próximas a la pared, es decir, en la capa límite. Para evitar este problema se puede hacer un estudio separado en cada una de las dos regiones (exterior e interior), usando un modelo alternativo en la región donde se hace numérica inestable:

Para las zonas donde se cumple la condición de $y^+ > 30$ se emplean las ecuaciones **6.3.1.1** y **6.3.1.3**, utilizando para las zonas donde esto no se cumple:

$$k_{y=y_i} = \frac{\tau_i}{\rho C_D^2}$$

y_i es la zona que separa la región exterior de la capa viscosa, un valor típico de C_D es 0.164 y τ_i es el esfuerzo de cizalladura en y_i .

Teniendo en cuenta que l , k y ε se relacionan como:

$$\varepsilon \approx \frac{k^{3/2}}{l} \quad (\text{Ec. 6.3.1.3})$$

De la misma manera ε queda definido como:

$$\varepsilon_{y=y_i} = \frac{C_D k_{y=y_i}^2}{l}$$

Donde l es la escala de longitud de la capa viscosa evaluada con una simple ecuación lineal:

$$l = ky$$

Sin embargo, una mejor solución ante la incapacidad de resolver la zona con $y^+ < 30$ es integrar las ecuaciones de $k-\varepsilon$ a través de toda la capa viscosa hasta llegar a la pared. Para conseguir esto se incluyen algunas modificaciones y la formulación resultante se denomina *ecuaciones de $k-\varepsilon$ para número de Reynolds bajo*.

6.3.1.1. MODELO DE TURBULENCIA $k-\varepsilon$ PARA ZONAS CON REYNOLDS BAJO

Jones and Laudner fueron los que introdujeron las primeras modificaciones y desde entonces varios investigadores también lo han hecho. Las primeras modificaciones fueron:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \rho \varepsilon_E + S_{k_F} + L_k$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i \varepsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{\varepsilon 1} f_1 P_k \frac{\varepsilon}{k} - c_{\varepsilon 2} f_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + S_\varepsilon + L_\varepsilon$$

Donde la turbulencia viscosa queda ahora expresada como:

$$\mu_t = \rho f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Las diferencias con respecto al modelo $k-\varepsilon$ original son:

- Se añaden las funciones f_1 , f_2 y f_μ que son dependientes del número de Reynolds

$$f_1 = 1.0$$

$$f_2 = 1 - 0.3 \exp(-Re_T^2)$$

$$f_\mu = \exp\left[\frac{-2.5}{1 + 0.02Re_T}\right]$$

- El considerar que existe isotropía local, implica que las propiedades del fluido no varían con la dirección (x , y , z). Esta hipótesis es muy utilizada en turbulencia, sin embargo, en este caso, se considera que el proceso de disipación puede no ser isentrópico. Por ello se incorporan a la ecuación los siguientes términos:

$$L_k = -2\mu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)$$

$$L_\varepsilon = \frac{2\mu\mu_t}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \right)^2$$

El problema de esta versión del modelo $k-\varepsilon$ es que para un gran rango de flujos turbulentos no se ha demostrado que se pueda emplear para obtener resultados precisos. Además, las funciones de amortiguamiento que se deben emplear son difíciles de linealizar, por lo que se complica la convergencia del problema.

Las condiciones iniciales y de contorno necesarias para el cierre del modelo se especifican en el capítulo 7.

El modelo de $k-\varepsilon$ ha dado a lo largo de la historia muy buenos resultados en un amplio rango de flujos en distintas situaciones, pero solo es aplicable para flujos completamente turbulentos donde los efectos de la viscosidad sean despreciables. Una de las principales deficiencias del modelo es que es poco sensible a los gradientes de presión, haciendo que se retrase el punto de desprendimiento.

Existen modificaciones de este modelo de turbulencia, en ANSYS Fluent® se pueden encontrar concretamente dos: El modelo *RNG $k-\varepsilon$* (Yakhot et al. 1986), y el modelo *$k-\varepsilon$ Realizable* (Shih et al. 1995). A la hora de hacer la simulación numérica del problema propuesto se probarán tanto el modelo original como las dos modificaciones para comprobar cuál se adapta mejor al caso de estudio y comparar las diferencias que existen entre ellos. A continuación, se explican brevemente las modificaciones que se han hecho en cada uno con respecto al original:

6.3.2. MODELO RNG $k-\varepsilon$

Su nombre se debe a que utiliza una técnica estadística llamada grupo de Renormalización (*Renormalization Group*) partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes. Esto implica un cambio en los valores de las constantes con respecto a las del método original, además de la introducción de nuevos parámetros:

- Aparece un término en la ecuación de ε para flujos con una velocidad de deformación elevada que evita una disminución del ratio de disipación de turbulencia.
- Utiliza una fórmula analítica para el número turbulento de Prandtl en lugar de una constante.
- Tiene en cuenta el efecto de la rotación en la turbulencia.
- Adapta el modelo para zonas con número de Reynolds bajo utilizando una ecuación diferencial para modelar la viscosidad turbulenta, permitiendo calcular como varía el transporte de la turbulencia en función del número de Reynolds o la escala de longitud del torbellino. Esta ecuación se activa en ANSYS Fluent® al marcar la opción de *Differential viscosity model*.

Además de dar mejores resultados para zonas de Reynolds bajos, es un modelo más potente para flujos con líneas de corriente muy curvadas y que tienen un ratio de deformación elevado. En comparación con el modelo $k-\varepsilon$, al impedir la disminución del ratio de disipación en flujos con altas velocidades de deformación, se reduce la energía cinética y con ello la viscosidad turbulenta. A medida que disminuye el ratio de deformación en un flujo, los resultados del modelo RNG se asemejan más a los del modelo estándar.

6.3.3. MODELO $k-\varepsilon$ REALIZABLE (The *Realizable k- ε* model)

La principal deficiencia que existe en el modelo estándar de $k-\varepsilon$ es la ecuación del ratio de disipación ε en cierto tipo de flujos. Una de sus limitaciones se debe a que incluye los efectos de la rotación del fluido en el término que define la viscosidad turbulenta, dando valores de turbulencia que no son físicamente ciertos en dominios donde existen zonas estacionarias y zonas con rotación del fluido. El *Realizable model* se propuso con el objetivo de intentar corregir las deficiencias del modelo *estándar*.

Lo que se quiere dar a entender con el término *Realizable* es que este modelo es más consistente que los otros modelos, es decir, cumple ciertas normas matemáticas que en los otros dos casos no se cumplen:

Recombinando la hipótesis de *Boussinesq* y la viscosidad turbulenta para un flujo incompresible, se obtiene una expresión para el flujo medio contradictoria cuando el ratio de deformación es elevado:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Esfuerzos normales} \\ \text{de Reynolds} \end{array} \right\} = \overline{\mathbf{u}^2} = \frac{2}{3}k - 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x}$$

La única manera de evitar esto es cambiar el término C_{μ} presente en la expresión que modela la viscosidad turbulenta: $\mu_t = \rho f_{\mu} c_{\mu} \frac{k^2}{\varepsilon}$. Mientras que en el modelo original se toma como una constante de valor 0.09, en éste es una variable dependiente del flujo medio. Además, se utiliza una ecuación modificada para el ratio de disipación ε que deriva de una ecuación exacta del transporte.

Estas dos modificaciones del modelo $k-\varepsilon$ son recientes y por tanto no se sabe con certeza hasta qué punto son modelos consistentes. Pero hasta el momento se ha demostrado que dan resultados más precisos en flujos que entre sus características están la presencia de líneas de corrientes curvadas, vórtices y rotación.

6.3.4. MODELO DE TURBULENCIA DE DOS ECUACIONES $k-\omega$

Este modelo de turbulencia incluye una ecuación para la energía cinética turbulenta como en el modelo anterior, así como una segunda ecuación para el ratio específico de disipación de turbulencia ω , que es la inversa de una escala de tiempo. Este modelo fue introducido por *Wilcox* (1988). A continuación se expone la formulación del modelo $k-\omega$ estándar que utiliza ANSYS Fluent®.

La ecuación de la energía cinética turbulenta se modifica un poco con respecto a la utilizada en el modelo anterior (**Ec. 6.3.1.1**), quedando de la siguiente manera:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} \Big|_A + \frac{\partial \rho \bar{u}_i k}{\partial x_i} \Big|_B = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k^*} \right) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right] \Big|_C + P_{kD} - f_{\beta} \rho \beta^* k \omega_E + S_{kF}$$

El sentido físico de los términos que aparecen en la ecuación es:

- A y B: Representa la suma de la variación local de energía cinética y el término convectivo:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i k}{\partial x_i}$$

- C: Representa por una parte el trabajo realizado por los esfuerzos viscosos turbulentos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$

y por otra el término de difusión:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k^*} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right)$$

- D: Representa el ratio de producción de energía cinética turbulenta debido al gradiente de velocidad. (También se podría aplicar la hipótesis de *Boussinesq* como se ha hecho en el modelo $k-\varepsilon$):

$$P_k = -\rho \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}$$

- E: Representa la disipación, es decir, cómo la energía turbulenta se transforma de forma irreversible en energía térmica:

$$-\rho \varepsilon f_{\beta^*} \rho \beta^* k \omega$$

donde:

$$f_{\beta^*} = \begin{cases} 1 & \chi_k \leq 0 \\ \frac{1 + 680 \chi_k^2}{1 + 400 \chi_k^2} & \chi_k > 0 \end{cases}$$

siendo:

$$\chi_k \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}$$

$$\beta_i^* = \beta_\infty^* \frac{\frac{4}{15} + (Re_t/R_\beta)^4}{1 + (Re_t/R_\beta)^4}$$

$$\zeta^* = 1.5$$

$$R_\beta = 8$$

$$\beta_\infty^* = 0.09$$

Para flujos incompresibles $\beta_i^* = \beta_\infty^*$ y para números de Reynolds altos $\beta^* = \beta_i^*$.

- F: S_k hace referencia al término fuente que se introduce en ANSYS Fluent® por el usuario.

El concepto del parámetro ω fue establecido por *Kolmogórov* y representa la razón de disipación de la energía cinética turbulenta por unidad de tiempo y de volumen. Se recuerda que este proceso tiene lugar en los torbellinos más pequeños y que el ratio de disipación es la cantidad de energía turbulenta que se transfiere a los torbellinos de menor tamaño. De esta manera el ratio queda determinado a través de las propiedades de los torbellinos de mayor tamaño.

Para desarrollar la ecuación de transporte ω se incluyen el término no estacionario, el de convección, de difusión, disipación y producción. Combinando todos estos procesos se construye la siguiente expresión:

$$\frac{\partial(\rho\omega)}{\partial t} + \frac{\partial\rho\bar{u}_i\omega}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega^*} \right) \frac{\partial\omega}{\partial x_j} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} P_k - f_\beta \beta \rho \omega^2 + S_\omega$$

donde el sentido físico de los términos es análogo a la ecuación de transporte de k , siendo las constantes:

$$f_\beta = \frac{1 + 70\chi_\omega}{1 + 80\chi_\omega}$$

$$\chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta_\infty^*\omega)^3} \right|$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_\infty \alpha_0 + Re_t/R_\omega}{\alpha^* 1 + Re_t/R_\omega}$$

$$R_\omega = 2.95$$

Para altos números de Reynolds $\alpha = \alpha_\infty = 1$.

La viscosidad turbulenta relaciona las variables k y ω mediante la siguiente expresión:

$$\mu_t = \alpha^* \rho \frac{k}{\omega}$$

donde:

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left(\frac{\alpha_0^* + Re_t/R_\omega}{1 + Re_t/R_\omega} \right)$$

$$Re_t = \frac{\rho k}{\mu\omega}$$

$$R_k = 6$$

$$\alpha_0^* = \frac{\beta_i}{3}$$

$$\beta_i = 0.072$$

Para número de Reynolds altos $\alpha = \alpha_\infty^* = 1$.

Las constantes restantes que aparecen toman el valor de:

$$\alpha_\infty = 0.52 \quad \alpha_0 = \frac{1}{9} \quad \sigma_k = 2.0 \quad \sigma_\omega = 2.0$$

El modelo de turbulencia $k-\omega$ es mucho más sensible a los gradientes de presión que el modelo $k-\varepsilon$. Este modelo no incluye funciones de amortiguamiento sino que emplea las condiciones de contorno de *Dirichlet*²¹. Esto supone una gran ventaja para la estabilidad numérica.

El fallo principal de este modelo es que es muy sensible a los valores de k y ω de la corriente libre. La formulación que incorpora ANSYS Fluent® tiene unas pequeñas correcciones respecto al modelo original que disminuyen este efecto, pero aun así se considera un modelo dependiente de los valores de la corriente libre.

La formulación que se ha expuesto anteriormente no corresponde a la formulación original de *Wilcox*, si no a un modelo modificando, donde se ha añadido el término de producción en la ecuación del transporte de ω que en el modelo original no existía. Esto ha permitido al modelo ganar precisión a la hora de predecir las capas de cizalladura que se desarrollan en el fluido.

Un error que existe en los modelos de turbulencia, especialmente en aquellos que son sensibles a los valores de la corriente libre como el $k-\omega$, es que no se sabe qué condiciones se deben aplicar en las zonas próximas a la pared, al no saber cómo se comporta cada fenómeno en el fluido. La variación de la energía cinética turbulenta y la disipación son procesos que ocurren muy rápido en las proximidades de la pared. Por otro lado, el modelo $k-\varepsilon$ es poco sensible y se comporta bien en zonas con número de Reynolds alto. Sin embargo, para zonas con valores de Reynolds bajo ha conseguido poco progreso por utilizar funciones de amortiguamiento para la capa límite no lineales. Estas funciones no se pueden controlar con las técnicas convencionales de linealización, pudiendo interferir con la convergencia de las ecuaciones. Ante esta situación aparecen nuevos modelos propuestos por *Menter*.

²¹ Existen varios tipos de condiciones de contorno que se pueden consultar en (30), sección 10.1. El tipo de condiciones de contorno de *Dirichlet* se caracteriza por fijar el valor de la variable dependiente en la frontera.

6.3.5. COMBINACIÓN DE LOS MODELOS $k-\varepsilon$ Y $k-\omega$: BSL Y SST

Como conclusión de los resultados de las simulaciones numéricas que generalmente dan los modelos de turbulencia de $k-\omega$ y $k-\varepsilon$, se puede decir que el modelo $k-\omega$ se comporta mejor en la capa viscosa y la zona logarítmica de la capa límite, pero se ve muy influido por el valor ω de la corriente libre impuesto. Por ello, no es un buen modelo para el análisis en las regiones fuera de la capa límite o en la estela. El modelo $k-\varepsilon$, por el contrario, da mejores resultados en la región exterior y la estela y peores en la región interior.

Para incluir las mejores características de ambos modelos *Menter* combina $k-\varepsilon$ y $k-\omega$ para formar un nuevo modelo de turbulencia de dos ecuaciones. Incorpora el modelo $k-\omega$ en la región interior de la capa límite (hasta aproximadamente $\delta/2$), cambiando al modelo $k-\varepsilon$ en la región exterior de la capa límite y la zona de la estela, sin la necesidad de que el usuario intervenga. Las dos versiones de este modelo son: El modelo base (*Baseline model*, BSL) y una versión modificada de éste, el modelo del transporte de los esfuerzos de Reynolds (*The shear-stress transport model*, SST), desarrollado en 1994. Este último modelo incluye el transporte de los esfuerzos de Reynolds en capas límites con gradientes de presión adversos. En su inicio era un modelo muy utilizado en el ámbito de la aeronáutica, pero actualmente se utiliza en la mayoría de los códigos del ámbito industrial e incluso en la investigación.

Según los estudios realizados por *Menter* (12), ambos modelos proporcionan resultados sin la dependencia que tenía con los valores especificados en la corriente libre²². Además, el modelo SST predice de forma adecuada las capas límites con gradientes de presión adversos.

A continuación, se ofrece un estudio detallado de la mejora que introduce *Menter*²³ en el modelo de BSL para posteriormente explicar el modelo SST presente el ANSYS Fluent®.

6.3.5.1. MODELO DE TURBULENCIA BSL (BASELINE)

Este modelo proporciona resultados muy similares a los de $k-\omega$ estándar en la capa límite, evitando la dependencia de los valores de la corriente libre. Para las zonas de la estela y la región exterior de la capa límite, el modelo BSL predice resultados prácticamente idénticos a los de $k-\varepsilon$ estándar. Aunque proporciona mejores resultados ante gradientes de presión elevados que el modelo $k-\varepsilon$ estándar, sigue prediciendo menor separación de flujo.

El modelo recoge la formulación para $k-\omega$ de *Wilcox*:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{k1} \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \beta^* k \omega \quad \text{Ec. 6.3.5.1.1.}$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 1} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \gamma_1 P_\omega - \beta_1 \rho \omega^2 \quad \text{Ec. 6.3.5.1.2.}$$

²² *Menter* realizó un estudio de cómo influían los valores de la corriente libre en el modelo $k-\omega$ (14).

²³ Tanto el desarrollo del modelo BSL como el de SST provienen de un paper de *Menter* (12).

y transforma el modelo de $k-\varepsilon$ con la formulación del modelo $k-\omega$. Esto implica la aparición, en la formulación de la ecuación de ω , de un término de difusión con derivadas cruzadas:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{k2} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \beta^* k \omega \quad (\text{Ec. 6.3.5.1.3.})$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 2} \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2\rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \gamma_2 P_\omega - \beta_2 \rho \omega^2 \quad (\text{Ec. 6.3.5.1.4.})$$

con:

$$P_k = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$P_\omega = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \rho \omega \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Teniendo en cuenta que F_1 tomará el valor 1 en las proximidades de la pared y cero en las zonas alejadas de la superficie, se multiplica las ecuaciones **6.3.5.1.1.** y **6.3.5.1.2.** por F_1 y **6.3.5.1.3.** y **6.3.5.1.4.** por $(1 - F_1)$. Así, la formulación del nuevo modelo es:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \beta^* k \omega$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2\rho(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \gamma P_\omega - \beta \rho \omega^2$$

Si se toma la expresión Φ_1 para representar las constantes en el modelo de *Wilcox* original (σ_{k1} ...), Φ_2 en el modelo modificado de $k-\varepsilon$ (σ_{k2} ...) y Φ para las constantes correspondientes al nuevo modelo, la relación entre ellas es:

$$\Phi = F_1 \Phi_1 + (1 - F_1) \Phi_2$$

Las constantes toman el valor:

Set 1: (*Wilcox*):

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0.5 & \sigma_{\omega 1} &= 0.5 & \beta_1 &= \frac{3}{40} \\ \beta^* &= \frac{9}{100} & k &= 0.41 & \gamma_1 &= \frac{\beta_1}{\beta^*} - \sigma_{\omega 1} k^2 / \sqrt{\beta^*} \end{aligned}$$

Set 2 (*Jones-Launder*):

$$\begin{aligned} \sigma_{k2} &= 1.0 & \sigma_{\omega 2} &= 0.856 & \beta_2 &= 0.0828 \\ \beta^* &= \frac{9}{100} & k &= 0.41 & \gamma_2 &= \frac{\beta_2}{\beta^*} - \sigma_{\omega 2} k^2 / \sqrt{\beta^*} \end{aligned}$$

La viscosidad turbulenta (ν_t) queda definida como:

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad (\text{Ec. 6.3.5.1.5})$$

Por último, falta definir la función F_1 :

$$arg1 = \max\left(\min\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}; 0.45 \frac{\omega}{\mathbf{w}}\right); \frac{400\nu}{y^2\omega}\right)$$

$$F_1 = \tanh(arg_1^4)$$

\mathbf{w} es el valor absoluto de la vorticidad. El primer argumento es la escala de la longitud turbulenta (Ec. 6.3.1.3.):

$$L_t \approx \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{k}}{0.09\omega}$$

dividida entre la distancia a la superficie, y . El ratio L_t/y toma valor 2.5 en la región logarítmica y se hace cero a medida que se acerca al final de la capa límite. El segundo elemento se utiliza para evitar la dependencia con la corriente libre. Y el tercer argumento impide que la función tienda a cero en la subcapa viscosa.

El modelo BSL cambia del modelo $k-\omega$ al $k-\varepsilon$, cada uno con su set de constantes, a través de funciones capaces de distinguir en qué zona se encuentran. Partiendo de este modelo, el modelo SST incluye una modificación de la definición de la viscosidad turbulenta en presencia de gradientes de presión adversos. Así se evita que el modelo prediga menos cantidad de separación de flujo ante estas características.

6.3.5.2. MODELO DEL TRANSPORTE DE LOS ESFUERZOS DE REYNOLDS (SST)

La principal diferencia con respecto al modelo BSL es en la forma de tratar los esfuerzos de Reynolds. En los modelos convencionales de dos ecuaciones un cambio en el parámetro $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$ implica directamente un cambio en los esfuerzos de Reynolds:

$$\tau_t = -\overline{\rho u'v'} = \mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \rho l_m^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2$$

Sin embargo, en zonas con un gradiente de presión adverso el término τ_t aumenta más de lo debido. Para evitar esto la viscosidad turbulenta (*Eddy viscosity*) debería expresarse como:

$$v_\tau = \frac{a_1 k}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}} \quad (\text{Ec. 6.3.5.2.1})$$

siendo a_1 una constante de valor 0.3 y k la energía cinética.

Esta expresión indica que los esfuerzos de Reynolds son proporcionales a la energía cinética. Para que sólo se aplique en zonas donde los gradientes de presión son adversos, es decir, donde la producción de k es mayor que la disipación, se modifica la expresión de la siguiente manera:

$$v_\tau = \frac{a_1 k}{\max\left(a_1 \omega; \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)}$$

De esta manera, se emplea la **Ec. 6.3.5.2.1** en zonas con mayor gradiente de presión adverso (parte exterior de la capa límite) y la **Ec. 6.3.5.1.5** en el resto de la capa límite.

Estas modificaciones requieren variar las constantes del set 1 especificadas en el modelo BSL, manteniendo las del set 1 invariables:

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0.85 & \sigma_{\omega1} &= 0.65 & \beta_1 &= 0.0750 \\ \beta^* &= 0.09 & k &= 0.41 & \gamma_1 &= \frac{\beta_1}{\beta^*} - \sigma_{\omega1} k^2 / \sqrt{\beta^*} \end{aligned}$$

La función F_2 en el modelo SST se define de forma similar a la función F_1 del modelo BSL:

$$\begin{aligned} arg2 &= \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y}; \frac{400\nu}{y^2\omega}\right) \\ F_2 &= \tanh(arg_2^4) \end{aligned}$$

Las características de este modelo hacen que sea un modelo válido para más tipos de flujos que los modelos *estándar de k- ω* . Las condiciones iniciales y de contorno que cierran el modelo se especifican en el capítulo 7.

Los modelos de turbulencia de dos ecuaciones son la base de las simulaciones en CFD en el sector industrial. Estos modelos ofrecen un buen compromiso entre robustez, complejidad y precisión. Sin embargo, no se recomienda el uso de estos modelos para fluidos rotativos. ANSYS Fluent® tiene modelos que corrigen la curvatura pero no están validados para flujos demasiado complejos.

Para concluir el capítulo, es preciso resaltar que se considera un buen modelo de turbulencia aquel que posee la suficiente precisión para la aplicación en la que se quiera emplear, que no emplee muchas hipótesis ni un número muy elevado de constantes, que sea numéricamente consistente, no consuma un tiempo de computación excesivo y sea independiente de los valores especificados en la corriente libre.

Capítulo 7.: SIMULACIÓN NUMÉRICA EN ANSYS

Una vez detallados los distintos modelos de turbulencia que se utilizan, se puede proceder a hacer la simulación numérica del problema de turbulencia. Para ello es necesario llevar a cabo una serie de pasos y tener en cuenta ciertas consideraciones.

7.1. GEOMETRÍA

La geometría en 2D del sólido se ha diseñado en el software ANSYS DesignModeler®:

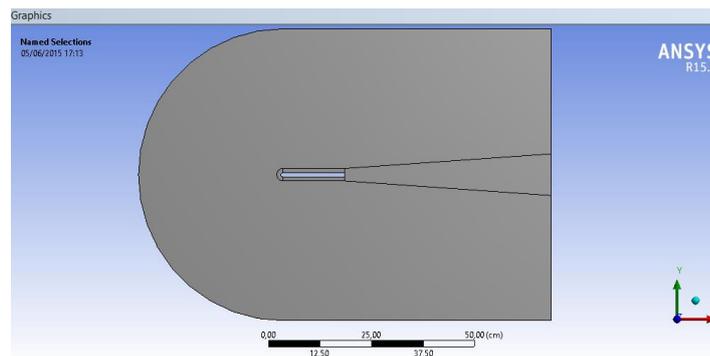


Figura 7.1.1. Se representa una captura del programa ANSYS DesignModeler®. La parte gris representa el dominio del fluido que será mallado y en su interior se encuentra el objeto sólido.

Como se observa en la **Figura 7.1.1.** en esta fase del estudio se concreta tanto la geometría del sólido, como la parte del dominio del fluido que se estudia. Las divisiones que se pueden distinguir en el dominio del fluido (zona gris) son simplemente para guiar la forma en la que se estructuran las celdas en la siguiente fase.

7.2. DISEÑO MALLA

Para CFD es esencial partir de una malla convergida y suficientemente refinada para poder conseguir resultados que se aproximen a la realidad. En este estudio las mallas se realizan mediante el software ANSYS Meshing®.

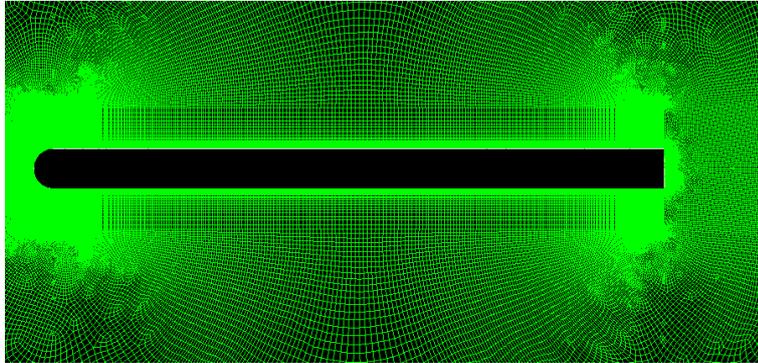


Figura 7.2. Malla realizada en ANSYS Meshing®.

Al explicar los modelos de turbulencia que se emplean: Spalart-Allmaras, $k-\varepsilon$ y $k-\omega$, con sus respectivas modificaciones, se ha dejado entrever que no todos los modelos requieren el mismo tamaño de la primera celda de la malla. Para el modelo de $k-\varepsilon$, el valor adimensional de y^+ debe ser superior a 30. Por el contrario, para los modelos de $k-\omega$ y Spalart-Allmaras, y^+ debe ser igual o inferior a la unidad. Según la ecuación adimensional 2.1.2., y^+ se expresa como:

$$y^+ = y \frac{u_\tau}{\nu}$$

El primer paso es introducir el valor de la viscosidad cinemática ν y el valor de la velocidad de fricción, u_τ :

Para ello se introducen las propiedades del fluido de trabajo: $\rho \sim 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\mu \sim 10^{-3} \text{ kg/m s}$,

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

El valor de la velocidad de fricción u_τ viene dado por la expresión:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

donde

$$\tau_w = \frac{1}{2} C_f \rho u^2$$

Recombinando estas dos expresiones queda:

$$u_{\tau} = u \sqrt{\frac{1}{2} C_f}$$

Donde, para flujo externo:

$$C_f = 0.058 Re^{-0.2}$$

Fijando el parámetro y^+ que cada modelo requiere, se obtiene el valor de y necesario para el modelo de turbulencia. Es decir, se deduce la dimensión que deberá tener la primera celda en la capa límite.

- Valor de y para el modelo $k-\varepsilon$

Siguiendo el procedimiento se obtiene que la longitud en dirección y de la primera celda de la malla es de $\sim 2 \cdot 10^{-4} m$. Que la primera celda tenga este tamaño implica tener una malla poco refinada. Para impedir esto ANSYS Fluent® tiene una serie de opciones que permite aplicar este modelo de turbulencia con una malla refinada: *Enhanced-Wall Treatment*, que será explicado en la próxima sección del capítulo.

- Valor de y para los modelos de $k-\omega$ y Spalart-Allmaras

De la misma manera, se obtiene que para estos modelos, las celdas que colindan con la pared deben tener una longitud en y de $\sim 7 \cdot 10^{-6} m$. Esto implica un tamaño de celda muy pequeño en la pared, por tanto no interfiere con el hecho de tener una malla refinada. El problema que podría existir al requerirse un tamaño de celda tan pequeño es un tiempo de computación demasiado grande debido a la alta densidad de celdas.

Para indicar el tamaño de las celdas en cada parte del dominio se utilizan las líneas que se representan en la **Figura 7.1.1**. En las zonas donde exista mayor variación de las variables que definen el comportamiento del flujo y donde aparezcan las estructuras de menor tamaño, se utilizará un tamaño de celda menor y por tanto mayor densidad de las mismas. Teniendo en cuenta esto, parece evidente que la zona de la capa límite tendrá mayor concentración de celdas, ya que es una zona con alta cantidad de torbellinos de pequeña escala y por tanto donde ocurre gran parte de la disipación. Aunque en menor medida, la zona de la estela también debe tener un tamaño de malla lo suficientemente pequeño para poder captar la información de los torbellinos de mayor escala, que se dividen en torbellinos de menor escala siguiendo el proceso de cascada de energía. Desde las zonas de mayor refinamiento de malla hasta los límites del dominio, las celdas deben ir creciendo de forma progresiva.

A la hora del diseño de malla, es importante decidir el tipo de malla que se quiere utilizar. Como ya se ha mencionado, existen dos tipos de malla, de tipo estructurado y de tipo no estructurado. En este caso se utiliza una malla híbrida, es decir, el tipo de celdas que se emplee en la malla dependerá de la zona de la misma. En la capa límite tiene una malla estructurada porque existe una dirección de la velocidad predominante y mediante el uso de este tipo de celdas se puede calcular el tamaño de celda en la dirección normal a la superficie del cuerpo. En el resto del dominio se emplean celdas de tipo no estructurado para evitar relaciones de aspecto grandes. ANSYS Fluent®, al tratar con modelos de turbulencia, pone problemas cuando este ratio es mayor a 1000. Aunque es una relación de aspecto razonablemente grande, es recomendable intentar reducir la relación de aspecto a valores muy por debajo de esta cantidad. Además, este tipo de celdas permite el refinamiento localizado sin transmitir la densidad de celdas en zonas donde no es necesario la existencia de tal número de puntos.

Generar la malla es una fase necesaria para realizar la simulación numérica de un flujo y es una de las partes que más tiempo consume. Esto se debe a la necesidad de comprobar que los resultados de la simulación no dependan de la malla para así poder obtener precisión en los mismos.

7.3. SIMULACIÓN EN ANSYS Fluent®

Una vez que se ha conseguido un buen mallado, para la simulación de los resultados se utiliza ANSYS Fluent®. Aquí se deben especificar varios parámetros:

- Si el caso es *estacionario* o *no estacionario*. En este caso se hace, fundamentalmente, un estudio de tipo estacionario, aunque también se realizará una simulación en estado no estacionario.
- El *modelo de turbulencia* que se utilice en cada ocasión. Al elegir el modelo de turbulencia también se puede elegir entre una serie de opciones. En el caso de estudio, al querer analizar flujo próximo a la superficie de la pared, es necesario prestar especial atención a la opción de *Enhanced Wall Treatment*.

Como es evidente, la presencia de la pared afecta a la velocidad del fluido debido a la propiedad de no deslizamiento en la superficie de la misma. Al existir un alto gradiente de velocidad en la región interior de la capa límite, la producción de energía cinética aumenta y con ello la turbulencia. Es necesario una buena representación del flujo en estas zonas ya que es donde existen los mayores gradientes de las variables del flujo y donde ocurre el principal transporte de momento.

Para ello existen dos opciones, o bien aumentar la densidad de celdas en las proximidades de la pared, o utilizar las ecuaciones de pared para analizar esta zona:

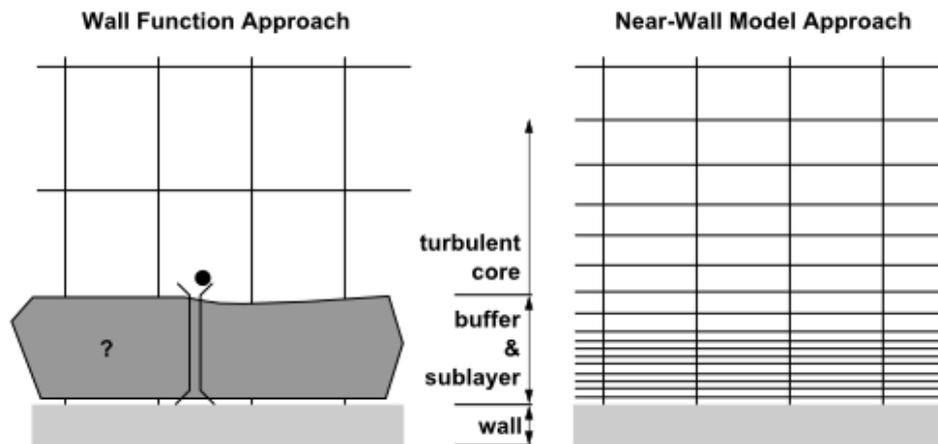


Figura 7.3.1. Se trata de una figura de ANSYS Help Viewer que muestra la diferencia entre elegir la opción de *Wall Function Approach* y *Near-Wall Model Approach*.

En la primera opción, lo que hace ANSYS Fluent® es no resolver la zona viscosa de la capa límite resolviéndola mediante ecuaciones semi-empíricas, las ecuaciones de pared (*Wall functions*). Su ventaja es que se puede utilizar modelos de turbulencia para números de Reynolds alto, pese a la existencia de pared. Sin embargo, este método comienza a dar resultados deteriorados a medida que se refina la malla, concretamente a partir de valores de $y^+ \sim 15$.

En cambio, refinando la malla en las proximidades de la pared, como se muestra en la segunda opción, se pueden resolver las ecuaciones de turbulencia en la zona viscosa. Su desventaja es que el modelo de turbulencia utilizado debe ser válido en toda la zona cercana a la pared.

Esta era la situación de ANSYS Fluent® hace unos años, pero ahora se han conseguido una formulación para las zonas cercanas a la pared que permite el refinamiento de malla sin poner en compromiso la validez de los resultados. A esta nueva actualización se le llama *The Enhanced-Wall Treatment*.

Siguiendo las recomendaciones de ANSYS Fluent®, las opciones elegidas para la simulación numérica con cada modelo de turbulencia son:

- En el modelo de Spalart-Allmaras usa por defecto la opción de *Enhanced-Wall Treatment*. Esto permite que en lugar de ser solo efectivo para valores de $y^+ \sim 1$, se pueda aplicar a una mayor variedad de casos, independientemente del valor de y^+ .

- En el modelo $k-\varepsilon$ se marca la opción *Enhanced-Wall Treatment-EWT- ε* . Si la malla es lo suficientemente fina, es decir, la primera celda de la malla tiene un y^+ en torno a la unidad, entonces ANSYS Fluent® tratará la capa límite como dos regiones diferenciadas. Si por el contrario la malla es más gruesa utilizará las funciones de pared en la zona cercana a la misma.
- En el modelo $k-\omega$ utiliza por defecto la opción de *Enhanced-Wall Treatment-EWT- ω* .
- Las *propiedades del fluido de trabajo (agua)*. Con ellas fijamos un número de Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$: $\rho \sim 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\mu \sim 10^{-3} \text{ kg/m s}$.
- Las *condiciones de contorno*:
 - A la entrada se impone el módulo, dirección y sentido de la velocidad. También todos los parámetros que se expondrán en el apartado **7.3.1**, dependiendo del modelo de turbulencia empleado.
 - A la salida se impone la presión. Esta condición de contorno es válida siempre y cuando solo exista flujo saliente, es decir, no exista recirculación en la zona de la salida. Otra condición que se debe cumplir, es que el cuerpo este lo suficientemente lejos de la salida del dominio elegido. Si esto no se cumple es posible que la información de las celdas a la salida influya sobre las celdas aguas arriba.
 - En la base superior y en la inferior del dominio mallado se utiliza una condición de contorno de simetría. Esta condición se puede utilizar siempre que las líneas que marcan el subdominio mallado estén lo suficientemente alejadas del cuerpo para que la zona donde se impone la condición de simetría no este afectada por lo que ocurra en las proximidades del cuerpo.
 - En la base del cuerpo se impone la condición de contorno de pared.
- El *método de acoplamiento de la velocidad y la presión* se hace mediante el algoritmo SIMPLE (*Semi Implicit Method for Pressure Linked Equation*), que utiliza las relaciones entre las correcciones de velocidad y presión para cumplir la ecuación de conservación de la masa. Acoplar las ecuaciones de conservación de la masa y del momento es necesario en el caso de flujo incompresible dado que no existe relación directa entre ambas ecuaciones.
- Para *discretizar* se escoge el método de *Green-Gauss Cell Based*. Este método discretiza a partir de un valor medio, con los valores de los centros de las celdas más próximas.

- Otro aspecto a tener en cuenta es el *orden de las ecuaciones* que se emplean en la simulación. Para las primeras iteraciones, las ecuaciones de turbulencia y la de conservación del momento se discretizan mediante ecuaciones de primer orden. Alrededor de las 100 iteraciones, se cambia a segundo orden.

7.3.1 VALORES DE LAS VARIABLES DE TURBULENCIA

Los valores de las variables de turbulencia²⁴ se pueden imponer a la entrada o como valores mínimos en la zona exterior de la capa límite. Para conseguir producir turbulencia es necesario prestar especial atención a estos valores. El tratar cualquiera de los software disponibles para CFD como cajas negras, puede llevar a caer en errores como imponer una viscosidad turbulenta muy elevada en zonas donde no debería existir turbulencia ni rotación del fluido.

Para una buena elección de estos valores, se ha de tener en cuenta, que *altos porcentajes de intensidad de turbulencia* (que se relaciona con la energía cinética turbulenta por medio de la expresión $Tu = 100\sqrt{2k(3u^2)}$) y *viscosidades de turbulencia muy bajas*, hacen que exista una disminución demasiado rápida de los valores de k y ϵ . Un rápido decaimiento de estos valores, no permite que el método de simulación numérica obtenga resultados precisos en las celdas de mayor tamaño, que aparecen en zonas alejadas de la superficie del cuerpo. Por ello, se deben elegir *una intensidad de turbulencia baja* o *una viscosidad turbulenta elevada*.

En el caso de ω , imponer parámetros elevados produce una rápida disminución de los valores de las propiedades de la corriente libre, haciendo el problema dependiente de la malla. Sin embargo, valores bajos de ω proporcionan mejores predicciones.

Con ello, los parámetros recomendados para los modelos de turbulencia de dos ecuaciones son:

- Intensidad de turbulencia:

$$I_{turbulencia} \sim 1 - 10\%$$

Para la simulación de este problema se utiliza una intensidad de turbulencia del 5%.

- La energía cinética turbulenta:

$$k = \frac{3}{2}(u_{media}I_{turbulencia})^2$$

Como es un caso estacionario $u_{media} = u_{\infty} = 2.5 \text{ m/s}$ con lo que se obtiene un valor de $k = 2.34 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2$. Este valor se emplea en el modelo $k-\epsilon$ y $k-\omega$.

²⁴Información y conclusiones aportadas por *Spalart y Rumsey* (26).

- El término del ratio específico de disipación:

$$\omega = \rho C_{\mu} \frac{k^2}{\mu} \left(\frac{\mu_t}{\mu} \right)^{-1} \quad (\text{Ec. 7.3.1.1.})$$

El valor que se obtiene es de $\omega = 2.34 \cdot 10^3 \text{ 1/s}$ y se emplea en el modelo de turbulencia de $k-\omega$. Se recuerda que $C_{\mu} = 0.09$.

- El término del ratio disipación:

$$\varepsilon = \rho \frac{k}{\mu} \left(\frac{\mu_t}{\mu} \right)^{-1}$$

El valor que se obtiene con los datos del caso de estudio es de $\varepsilon = 4.9 \text{ m}^2/\text{s}^3$ y se emplea en el modelo de turbulencia de $k-\varepsilon$.

Es posible que imponiendo estos valores únicamente a la entrada y dejándolos decaer de forma natural obedeciendo a las ecuaciones de turbulencia, no se obtengan estos valores en el ambiente. Esto se debe a la imposibilidad de CFD en captar la rápida decadencia de los valores. Una forma de solucionar esto es imponiendo estos valores también como los mínimos en la zona exterior de la capa límite turbulenta. De esta forma, quedan definidos como valores del ambiente.

Para el modelo de Spalart-Allmaras, se utiliza una relación entre la viscosidad turbulenta y la molecular de:

$$\frac{\mu_t}{\mu} = 10$$

Son pocos, entre ellos *Menter (1992)* y *Spalart and Allmaras (1994)*, los que se han preocupado de la dependencia de los valores de la corriente libre que existe en algunos modelos de turbulencia. Esto ha llevado a que muchos modelos, sin demostrar que son poco sensibles a los valores impuestos en la corriente libre, no añadan alguna recomendación sobre estos valores. Por ello los modelos de Spalart-Allmaras, $k-\varepsilon$ y SST, al ser modelos poco sensibles, se pueden calificar como los modelos más populares.

7.3.2. FUERZAS INTEGRADAS

Cualquier cuerpo inmerso en un fluido en movimiento experimenta fuerzas y momentos. Existen dos tipos de fuerzas integradas en los problemas bidimensionales de mecánica de fluidos, una en dirección normal a la superficie del cuerpo, denominada *fuerza de sustentación* (F_L) y otra en dirección paralela a la superficie, denominada *fuerza de arrastre* (F_D). Con ello aparecen dos coeficientes adimensionales:

Coefficiente aerodinámico de sustentación (C_l):

$$C_l = \frac{f_y}{\frac{1}{2}\rho u^2}$$

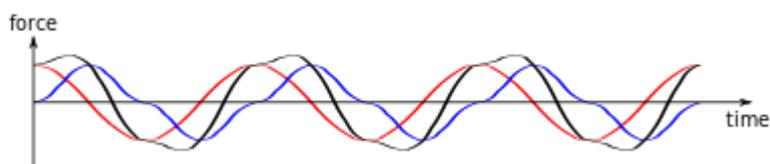
Coefficiente aerodinámico de arrastre (C_D):

$$C_D = \frac{f_x}{\frac{1}{2}\rho u^2}$$

Donde f_x y f_y son las componentes x e y de las fuerzas de tensión y presión integradas a lo largo de la superficie del cuerpo.

Las fuerzas que experimenta el cuerpo en dirección x son la integral de la fuerza de superficie del cuerpo y la resistencia a la presión. Ésta última está provocada por una alta presión en el punto de remanso, aguas arriba del sólido, frente a una baja presión en la base del objeto, debido a la burbuja de recirculación que se forma tras el desprendimiento de la capa límite. Por lo general, cuanto más ancha sea la capa límite, mayor es la presión en la zona de desprendimiento, dando coeficientes de arrastre menores²⁵.

En el caso de estudio, la fuerza de sustentación está en torno a cero porque al ser un cuerpo simétrico con respecto al eje x se anula la componente y en la superficie de arriba con la de abajo. El coeficiente de sustentación debe mantener un valor constante en el casos donde la estela no tenga oscilación. Cuando sí exista oscilación en la estela, se prevé un valor medio constante de cero (\bar{C}_l). Por lo que el resultado esperado en los casos con una estela estable es que C_l converja en cero, mientras que para un caso con oscilación, se espera un comportamiento de la fuerza de sustentación o del coeficiente C_l , periódico:



Que los coeficientes de arrastre y sustentación converjan de la forma indicada es una señal de que la malla ha convergido. A medida que se refina la malla se debería conseguir este comportamiento.

²⁵ Información obtenida de (31).

7.3.3. VERIFICACIÓN DE LA INDEPENDENCIA DEL MALLADO

Además de que los coeficientes de arrastre y sustentación tengan el comportamiento anteriormente descrito, existen otros criterios de convergencia. Uno de los principales factores que influye en la precisión de los resultados de CFD es la calidad de la malla. Dependiendo del tipo de flujo del problema de estudio y el modelo de turbulencia que se quiera emplear, se deberá usar una determinada cantidad de puntos. Es preciso una alta densidad de celdas en las zonas donde los gradientes de las variables sean mayores y donde el transporte del momento y las propiedades del flujo predominen. Además, la progresión de tamaños de celda debe ser suave para que la información entre celdas se traspase de forma adecuada.

En el caso presente, se considera que la malla está convergida cuando los resultados de las simulaciones no varían significativamente al aplicarle mayor refinamiento a la misma. Por otro lado, para conseguir una solución convergida, se deben analizar los residuos de las cinco ecuaciones que forman el sistema: las tres ecuaciones que provienen del promediado de Reynolds de las ecuaciones de Navier-Stokes (continuidad y cantidad de movimiento) y las dos ecuaciones que se obtienen de los modelo de turbulencia. En el caso de Spalart-Allmaras, una de esas ecuaciones será una expresión algebraica. Una vez iterado el problema un número de veces lo suficientemente alto (~3000 – 5000 iteraciones), se considera que la solución está convergida cuando los residuos de todas las ecuaciones tienden a un valor constante muy bajo (por debajo de 10^{-6}). Esto quiere decir que se cumplen todas las ecuaciones del problema. En este caso, se consigue una malla convergida, pudiendo decir que la solución es independiente del mallado, pero con valores residuales demasiado altos para considerar que la solución está convergida. Los valores residuales están en torno a 10^{-5} , excepto para ecuación de la continuidad, ésta se quedará en valores en torno a 10^{-3} , por ser la ecuación más difícil de converger.

Para entender cómo opera ANSYS Fluent®, hay que tener en cuenta que en los modelos de turbulencia, la discretización es más complicada que en las ecuaciones para flujo laminar. Las ecuaciones son más rígidas y por tanto el coste computacional es más elevado. Una manera de evitar variaciones muy bruscas de las variables de las ecuaciones es añadir un coeficiente de relajación que facilite la convergencia. El valor del factor de relajación suele estar entre 0.6 y 0.8. Cuanto mayor sea este parámetro, más cantidad de información se pasa de una celda a otra y por ello converge más fácilmente, pero aumenta el tiempo de computación.

Al realizar un estudio no estacionario, es necesario tanto una discretización espacial, idéntica a la del caso estacionario, como una discretización temporal. Para la discretización temporal se debe integrar cada término de las ecuaciones diferenciales en un paso de tiempo Δt . Activar la dependencia temporal en problemas que tienden a ser inestables, es en ocasiones muy útil, pudiendo llegar a una solución estacionaria.

Con ello, en casos no estacionarios, aparece otro parámetro importante en la convergencia de la malla, el *número de Courant*. Éste expresa el cociente entre la distancia recorrida por una perturbación en un paso de tiempo Δt y la distancia de un paso de tiempo computacional. Para un caso general, queda expresado como:

$$C = \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{u_{xi}}{\Delta x_i} \leq C_{max}$$

El *número de Courant* influye tanto a la precisión como a la estabilidad de la solución. Para obtener una solución estable es necesario limitar el paso del tiempo Δt con la *condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)*²⁶: todas las celdas del dominio deben utilizar el mismo paso del tiempo y éste debe ser el mínimo de todos los pasos de tiempos locales en el dominio.

Para buscar soluciones estables se debe imponer un *número de Courant* máximo de la unidad y calcular el mínimo paso de tiempo que se requiere para cumplir esta imposición. Éste valor mínimo se calcula introduciendo en la expresión del *número del Courant*, la velocidad y la dimensión, tanto en x como en y , de la primera celda. Esto nos dará el menor paso de tiempo en el dominio, y se impondrá para el resto de las celdas en ANSYS Fluent®. Se probarán pasos de tiempos mayores para conseguir el máximo paso de tiempo que no ponga en compromiso la estabilidad de la solución de la simulación numérica.

La convergencia de malla permite al usuario asegurarse de que los resultados obtenidos en las simulaciones son independientes de la misma. Una vez que se logra una independencia de malla, se utiliza un tamaño de malla que cumpla un compromiso entre la precisión que se requiere y el tiempo computacional que se dispone.

²⁶ Esta condición recibe el nombre de Richard Courant, Kurt Friedrichs y Hans Lewy, que lo describen en su paper (37).

Capítulo 8.: RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

8.1 RESULTADOS Y COMPARACIÓN DE DISTINTOS MODELOS DE TURBULENCIA

8.1.1. RESULTADOS Y COMPARACIÓN DE LOS MODELOS DE TURBULENCIA $k-\varepsilon$ estándar, realizable $k-\varepsilon$ y RNG $k-\varepsilon$

El primer nivel en la comparación de estos modelos de turbulencia se hace mediante el contorno de velocidades, que permite apreciar las capas de cizalladura que existen en el flujo mediante el cambio de tonalidad que indica la presencia de un gradiente de velocidad. Hay que tener en cuenta que se trata de una simulación numérica en estado estacionario y con el método RANS y por ello el resultado es una la simulación promediada²⁷.

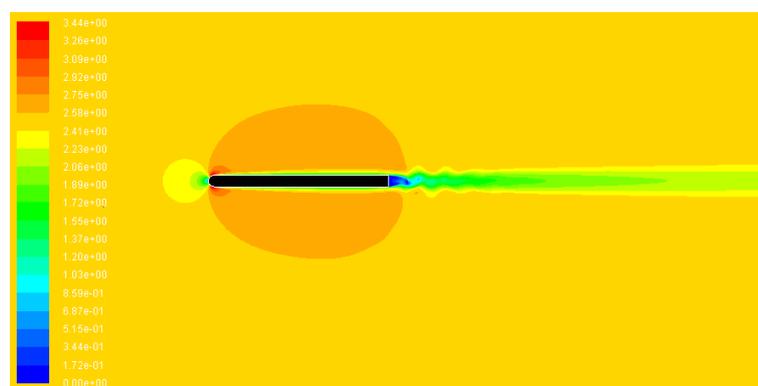


Figura 8.1.1.1. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia $k-\varepsilon$ estándar.

²⁷ Se intentarán mostrar los contornos con el mismo zoom para una mejor comparación, aunque, al ser esta herramienta manual en ANSYS Fluent®, es una tarea complicada. El objetivo principal es que se puedan observar todas las características que se mencionan en las comparaciones.

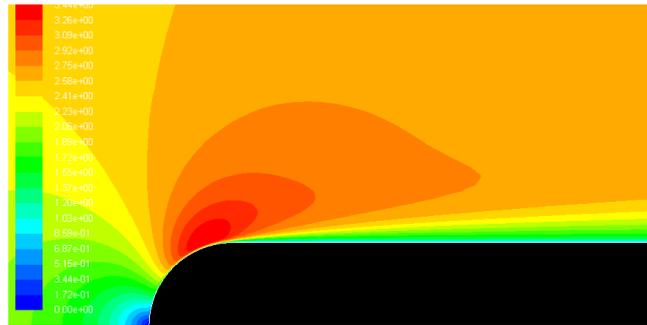


Figura 8.1.1.2. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia $k-\epsilon$ estándar en la capa límite.

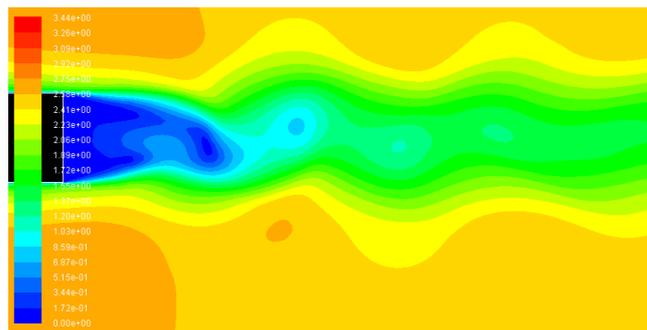


Figura 8.1.1.3. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia $k-\epsilon$ estándar en la estela.

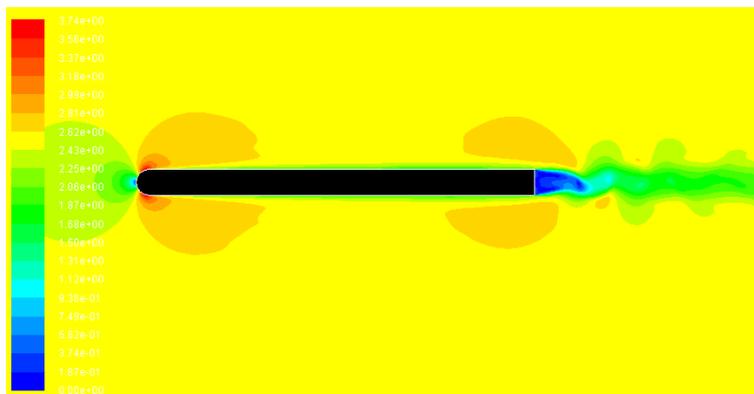


Figura 8.1.1.4. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia *Realizable* $k-\epsilon$

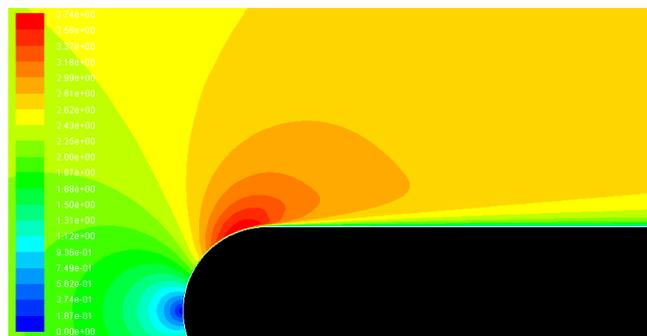


Figura 8.1.1.5. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia *Realizable* $k-\epsilon$ en la capa límite.

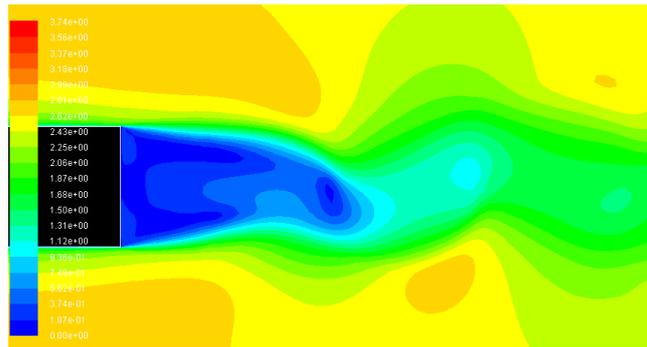


Figura 8.1.1.6. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia *Realizable k-ε* en la estela.

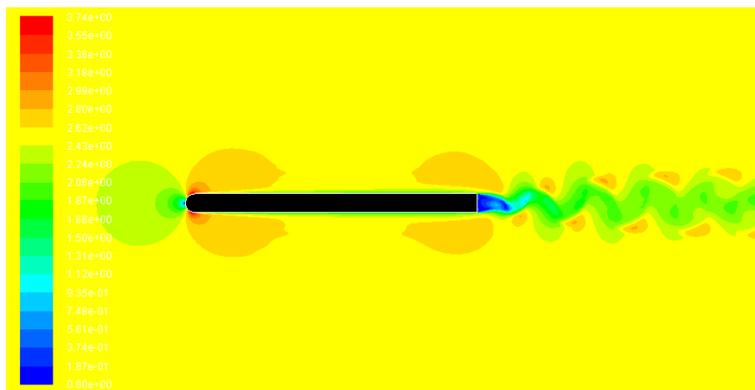


Figura 8.1.1.7. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia *RNG k-ε*.

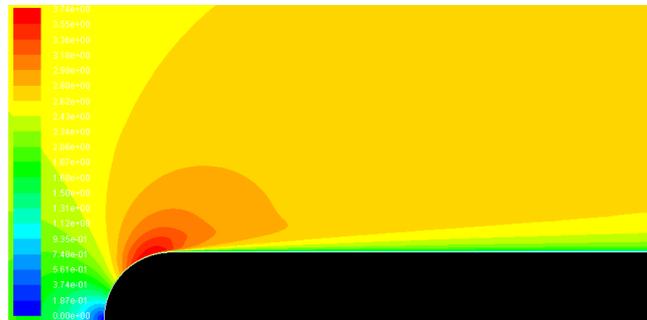


Figura 8.1.1.8. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia *RNG k-ε* en la capa límite.

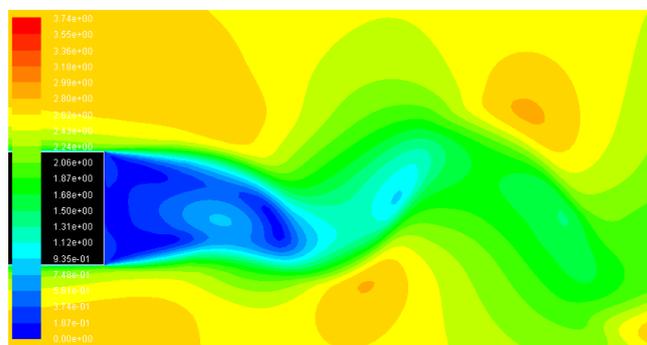


Figura 8.1.1.9. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia *RNG k-ε* en la estela.

En el contorno de velocidades se representa la formación de la capa límite a lo largo de la superficie del cuerpo y un desprendimiento de la misma al llegar a la base, debido al cambio abrupto de geometría. Describiendo este proceso de forma más detallada, una vez que se supera el punto de remanso, aparece una corriente laminarizada durante un cierto tramo de pared. En cuanto alcanza el número de Reynolds crítico, comienza la transición de capa límite laminar a turbulenta. Esta capa límite turbulenta, que se desarrolla a lo largo de la superficie del cuerpo, se desprende al llegar a la base roma, creándose así capas de cizalladura. Debido a una elevada cantidad de transporte del momento en dirección normal a estas capas, éstas convergen cerca de la base del sólido formando una burbuja de recirculación. El resto de flujo sigue en dirección paralela con una velocidad elevada y acelera progresivamente a la zona de recirculación debido a los esfuerzos de cizalladura que existen. El *centro de recirculación* es una zona con alta velocidad y baja presión, que será determinante para el cálculo de la fuerza de arrastre.

Al dibujar el contorno de velocidades en ANSYS Fluent® con las tres variaciones del modelo $k-\varepsilon$, se puede apreciar como la capa límite se desarrolla en los tres modelos de forma prácticamente idéntica. Esto se puede deber a que en los tres modelos se ha aplicado el *Enhanced Wall Treatment*, teniendo así un comportamiento muy similar en las proximidades de la pared. La escala de velocidades en los tres casos está entre 0 y aproximadamente 3.5 m/s.

Mientras, en la estela, sí que se pueden observar algunas discrepancias. En el modelo estándar existe menos oscilación que en los otros modelos, siendo en el modelo RNG donde más se acentúa este efecto. Las principales diferencias en cómo se comportan estos modelos, explicadas con detenimiento anteriormente, es que los modelos *RNG $k-\varepsilon$* y *Realizable $k-\varepsilon$* ofrecían resultados más precisos en líneas de corrientes curvadas o en presencia de vorticidad. Esto puede indicar que estos dos modelos presentan una estructura de la estela más fiel a la realidad.

En cuanto a la burbuja de recirculación, se observa que en los tres modelos siguen el mismo patrón, los centros de recirculación tienen posiciones muy similares, las capas de cizalladura forman estructuras con curvaturas semejantes y las dimensiones son prácticamente idénticas.

Para continuar con la comparación de los modelos se representan los contornos del ratio de disipación de turbulencia, que se puede apreciar únicamente en el borde de ataque del cuerpo.

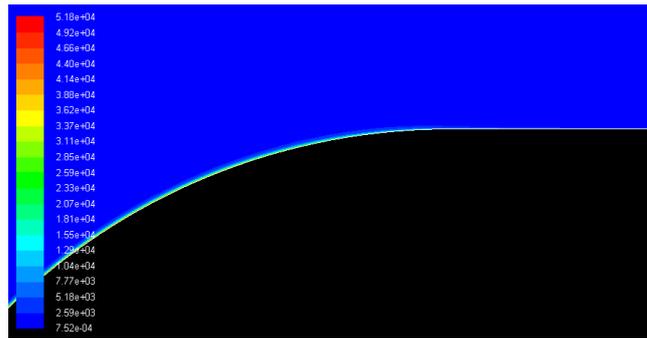


Figura 8.1.1.10. Contorno del ratio de disipación de turbulencia en el borde de ataque con el modelo $k-\epsilon$ estándar.

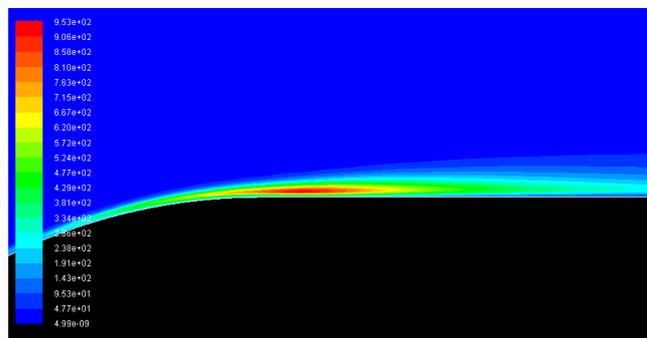


Figura 8.1.1.11. Contorno del ratio de disipación de turbulencia en el borde de ataque con el modelo *Realizable* $k-\epsilon$.

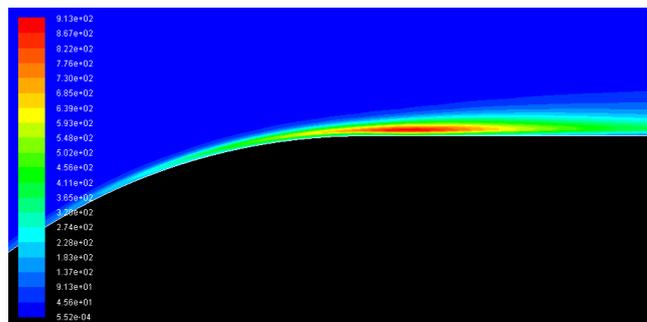


Figura 8.1.1.12. Contorno del ratio de disipación de turbulencia en el borde de ataque con el modelo *RNG* $k-\epsilon$.

Volviendo de nuevo a las diferencias entre la formulación de los tres modelos, se observa que tanto el modelo *RNG* como el *Realizable* modifican la ecuación de transporte de ϵ con respecto a la del modelo *estándar*, ya que ésta no daba buenos resultados en cierto tipo de flujos. Lo que se observa en los contornos de la simulación numérica con estos modelos, es que el modelo $k-\epsilon$ estándar intercepta una alta disipación de energía turbulenta ($\sim 5 \cdot 10^4 m^2/s^3$) en una zona muy próxima a la pared del borde de ataque. Sin embargo, los otros dos modelos predicen una disipación máxima más baja ($\sim 10^3 m^2/s^3$), que se sitúa una vez superado el

borde de ataque. Esto se debe a que el modelo $k-\varepsilon$ estándar predice el punto de transición de régimen laminar a turbulento antes que el modelo *Realizable* y el *RNG*. En el modelo original el punto de máxima energía cinética turbulenta en la pared está antes del cambio de geometría curva a plana (antes de $x=-0.15$), mientras que en los otros dos modelos el punto máximo está tras pasar el cambio de geometría.

Por otro lado, que el ratio de disipación sea especialmente notable en esta zona parece coherente. Justo en el punto donde empieza el sólido, existe lo que se conoce como *punto de remanso*, que posee una presión elevada. Tras este punto comienza una capa límite laminar, que va aumentando su velocidad, debido a la aceleración que está sufriendo el flujo. Cuando el flujo llega al número de Reynolds crítico comienza el proceso de transición. Se crean pequeños remolinos, que si alcanzan la escala límite inferior (escala de *kolmogórov*) desaparecen por el proceso de disipación. En consecuencia, aparece un ratio de la disipación de la energía elevado. El contorno de la estela no se muestra porque es prácticamente imperceptible, esto se debe a que la máxima disipación de la energía cinética turbulenta, cerca del borde de ataque del objeto, limita el rango de colores al azul oscuro en la estela. Con ello se quiere decir, que aunque en la simulación numérica la disipación en la estela sea difícil de interceptar por la escala empleada, sí existe disipación en la misma.

Ahora se muestran los resultados de los contornos de la energía cinética turbulenta:

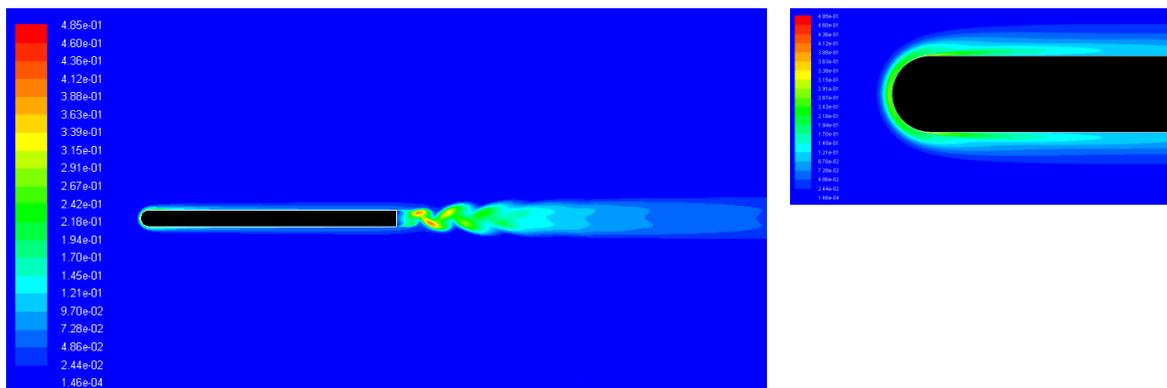


Figura 8.1.1.13. Contorno de la energía cinética turbulenta en el modelo $k-\varepsilon$ estándar.

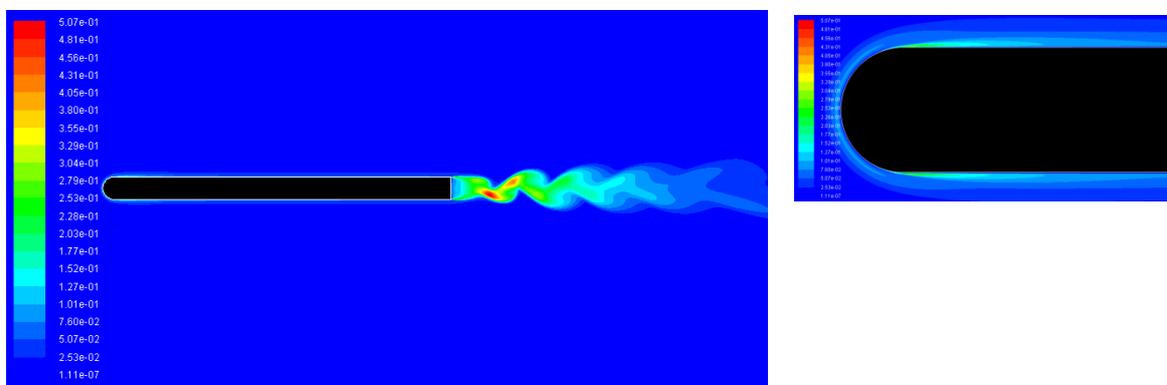


Figura 8.1.1.14. Contorno de la energía cinética turbulenta en el modelo *Realizable* $k-\varepsilon$.

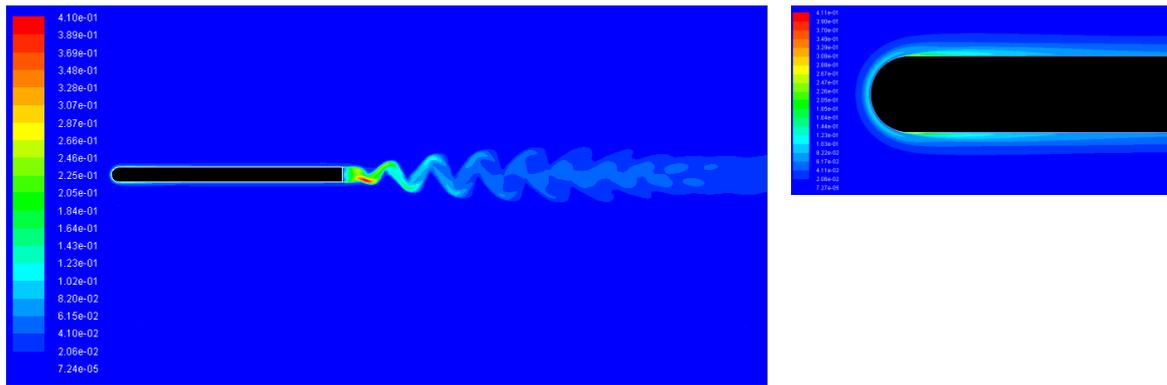


Figura 8.1.1.15. Contorno de la energía cinética turbulenta en el modelo *RNG k-ε*.

La predicción de la energía cinética turbulenta es muy distinta en los tres modelos, esto se debe que el punto de transición es distinto en cada simulación. Comenzando por la comparación de la energía cinética turbulenta en el borde de ataque, el modelo *k-ε estándar* predice una cantidad constante a lo largo del mismo porque el punto de transición está muy próximo al punto de remanso. Esta energía se va disipando a lo largo de la superficie del cuerpo a medida que disminuye el tamaño de los vórtices. En los otros dos modelos, la energía cinética turbulenta alcanza un alto nivel una vez superado el contorno del borde de ataque, por esta zona se encontrará el punto de transición.

En cuanto a la estela, el modelo *k-ε estándar* predice mayor cantidad de energía cinética turbulenta y el modelo *Realizable k-ε* muestra un contorno de *k* intermedio entre el modelo *estándar* y el *RNG*. Con el modelo *RNG k-ε* se obtiene un contorno más oscilatorio y una menor cantidad de energía cinética turbulenta. Esto confirma que este modelo, al evitar la disminución de ϵ en zonas donde existe un ratio de deformación elevado, predice una menor cantidad de *k*. Pese a las diferencias entre los tres modelos, se puede comprobar la existencia de una *cascada de energía*. En la zona próxima a la base, la energía cinética es alta y a medida que los torbellinos de gran escala se dividen en otros de menor escala, ésta disminuye por el efecto de la disipación. Otro contorno interesante de ser analizado es el de la viscosidad turbulenta:

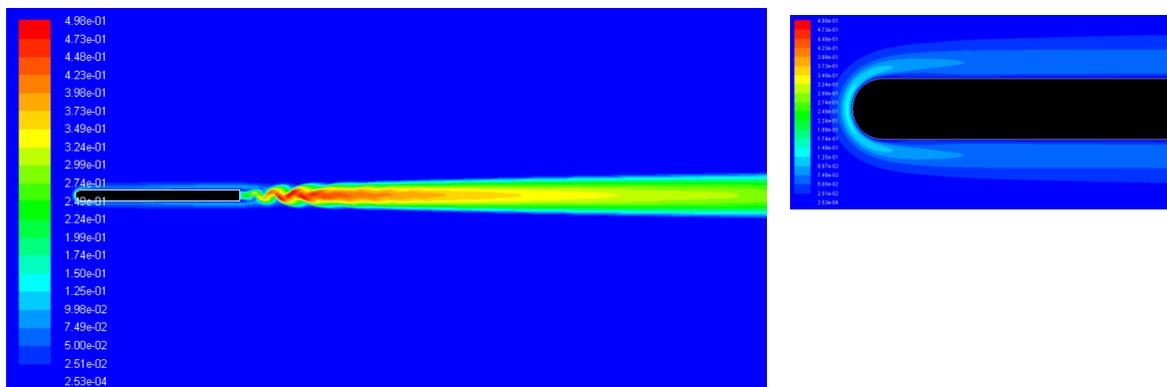


Figura 8.1.1.16. Contorno de la viscosidad turbulenta en el modelo *k-ε estándar*.

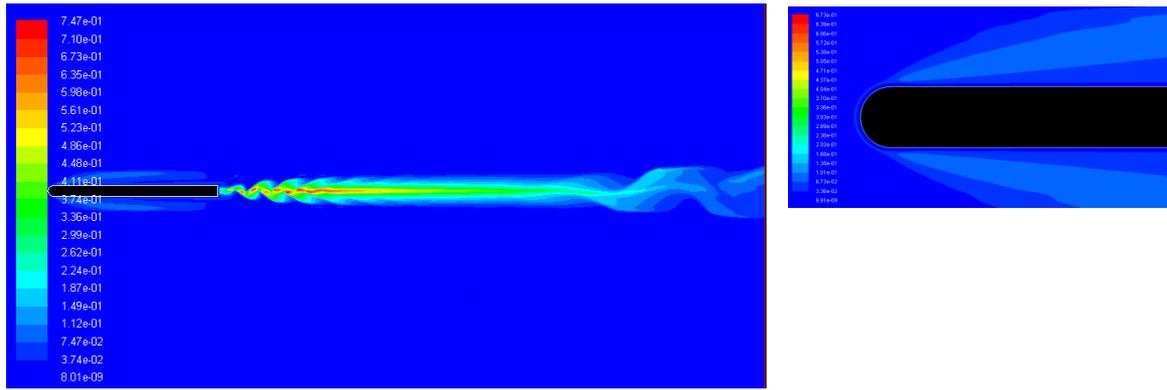


Figura 8.1.1.17. Contorno de la viscosidad turbulenta en el modelo *Realizable k-ε*

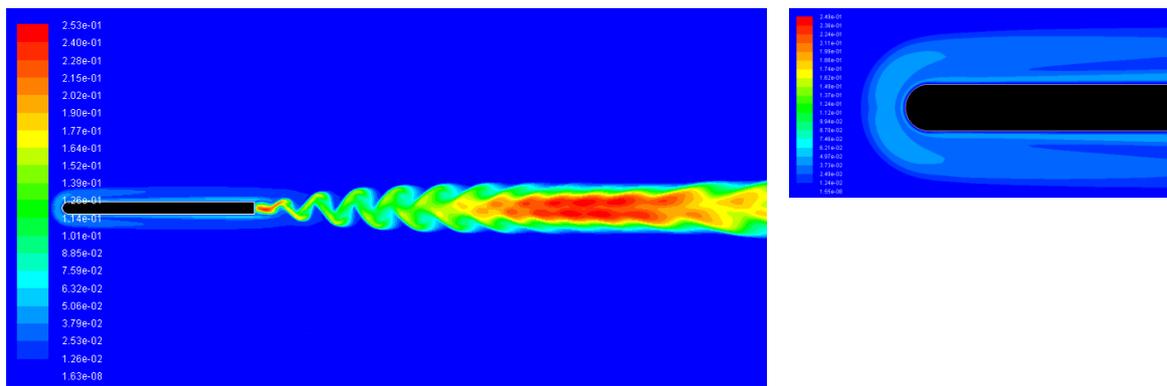


Figura 8.1.1.18. Contorno de la viscosidad turbulenta en el modelo *RNG k-ε*.

Para la comparación del contorno de la viscosidad turbulenta es necesario prestar atención a la escala, el modelo *estándar* representa una escala de viscosidad de 10^{-4} a $5 \cdot 10^{-1} \frac{kg}{ms}$, el *Realizable* de 10^{-8} a $7 \cdot 10^{-1} \frac{kg}{ms}$ y el *RNG* de 10^{-8} a $2.5 \cdot 10^{-1} \frac{kg}{ms}$. De este modo y continuando con el razonamiento del modelo *RNG*, al predecir una menor cantidad de energía cinética, los resultados de la simulación predicen menores esfuerzos de Reynolds y con ello una disminución de la viscosidad turbulenta respecto al modelo *estándar*. A su vez, el contorno de viscosidad turbulenta del modelo *Realizable k-ε* en la estela se corresponde con las diferencias que aportaba este modelo respecto al *estándar*. El modelo *estándar* predice valores no reales de la viscosidad turbulenta en zonas donde existe vorticidad, mientras que el modelo *Realizable* evita este fenómeno, proporcionando valores altos de viscosidad en zonas más localizadas.

En todos los modelos de turbulencia *k-ε*, al existir inestabilidades en la estela del cuerpo, el coeficiente de sustentación va a tener un comportamiento periódico con un valor medio de cero por ser un cuerpo con simetría respecto al eje x.

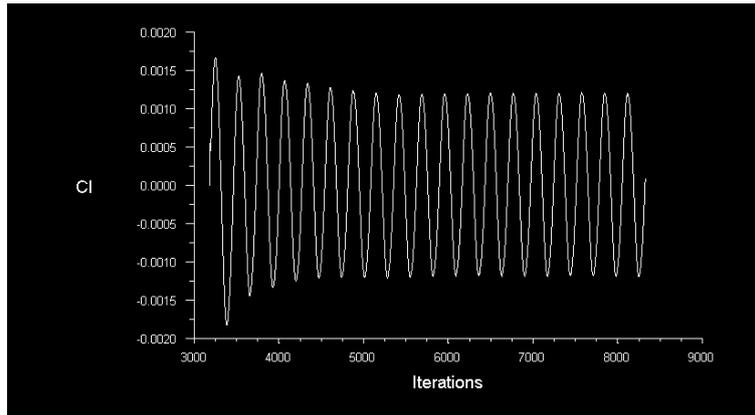


Figura 8.1.1.19. Variación del coeficiente de sustentación con las iteraciones en el modelo $k-\epsilon$ estándar.

El comportamiento en el modelo *RNG* y *Realizable de $k-\epsilon$* es análogo pero variando entre los valores ± 0.0018 y ± 0.0015 , respectivamente. Es decir, cuanto mayor oscilación sufra la estela, mayor amplitud tendrá la curva que representa el coeficiente de sustentación. Por otro lado, el coeficiente de arrastre converge en los tres casos en un valor constante, de valor 0.0064 en el modelo *estándar*, 0.0050 en el *Realizable* y 0.0052 en el *RNG*. Los valores con cada modelo varían porque la fuerza de arrastre que se genera depende de la precisión con la que se haya simulado el flujo en la zona de recirculación. Además, se recuerda, que valores de coeficiente de arrastre altos indican mayor diferencia de presión entre el punto de remanso y la zona de recirculación. En este caso los coeficientes de arrastre son del mismo orden y por tanto es difícil de detectar una variación entre el espesor de las capas límite. Pero por lo general, capas límites de mayor espesor generan burbujas de recirculación de mayor presión y con ello coeficientes de arrastre menores. De los tres modelos, el que genera una burbuja de recirculación con menor presión es el modelo *estándar*, y por tanto predice una fuerza de arrastre mayor.

Tras la comparación de los resultados de la simulación numérica con estos tres modelos de turbulencia, se comprueba que la estructura general del flujo sigue el mismo patrón. Sin embargo, es cierto, que existen algunas discrepancias. Hay que tener en cuenta que los perfiles de velocidad y la distribución de la energía cinética son muy dependientes de la historia del flujo, principalmente del punto de transición.

8.1.1.1 RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA *RNG k-ε*, *differential viscosity model*

Una de las opciones que permite este modelo en ANSYS Fluent® es la de *differential viscosity model*, que como se explicó en la teoría, activa una modificación basada en una mejora a la hora de modelar la viscosidad turbulenta en zonas de Reynolds bajo. Al aplicar este modelo, como era de esperar, el único contorno que presenta un cambio significativo respecto al modelo *RNG k-ε* es el de la viscosidad turbulenta. Aun así se muestran, en el mismo orden que se siguió en el apartado anterior, todos los contornos para que se pueda comprobar su similitud.

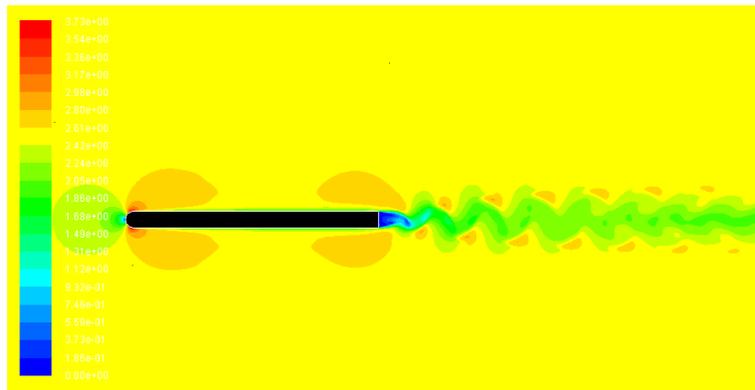


Figura 8.1.1.1.1. Contorno de la velocidad en el modelo *RNG k-ε*, *differential viscosity model*.

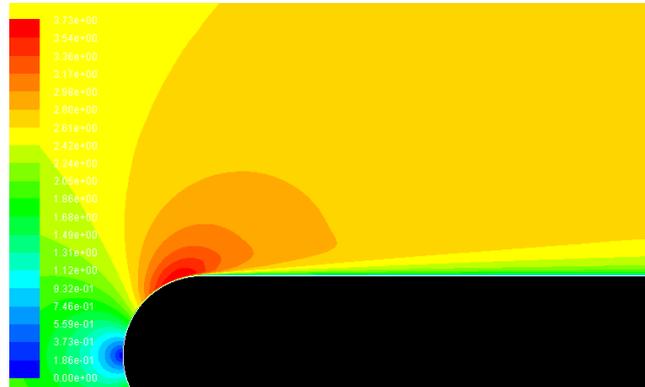


Figura 8.1.1.1.2. Contorno de la velocidad en el modelo *RNG k-ε*, *differential viscosity model* en la capa límite.

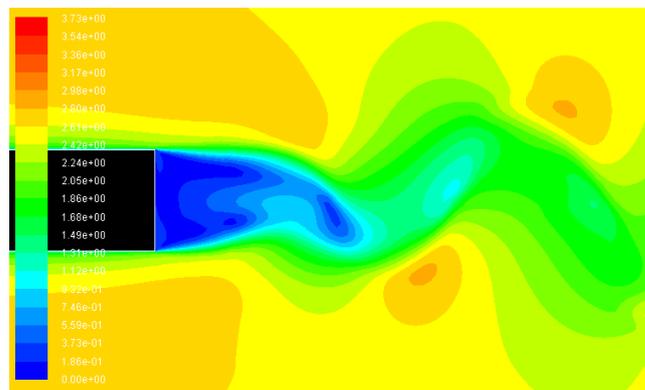


Figura 8.1.1.1.3. Contorno de la velocidad en el modelo *RNG k-ε*, *differential viscosity model* en la estela del cuerpo.

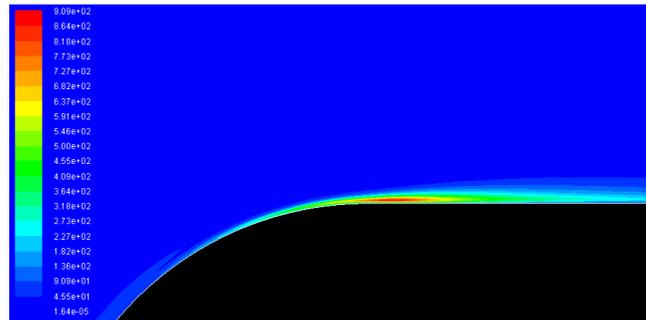


Figura 8.1.1.1.4. Contorno del ratio de la disipación de la turbulencia, ϵ , en el modelo *RNG k- ϵ , differential viscosity model*.

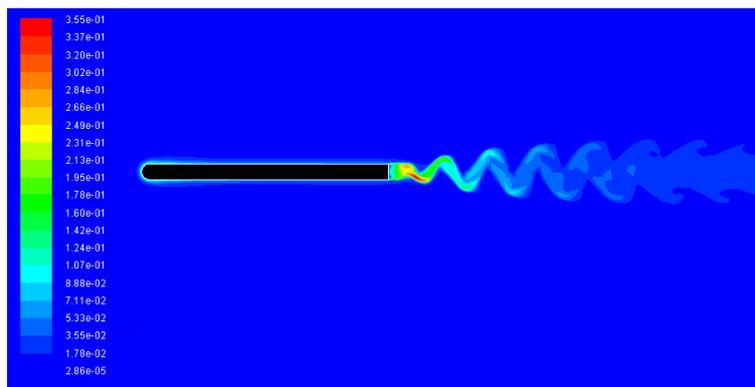


Figura 8.1.1.1.5. Contorno de la energía cinética turbulenta, k , en el modelo *RNG k- ϵ , differential viscosity model*.

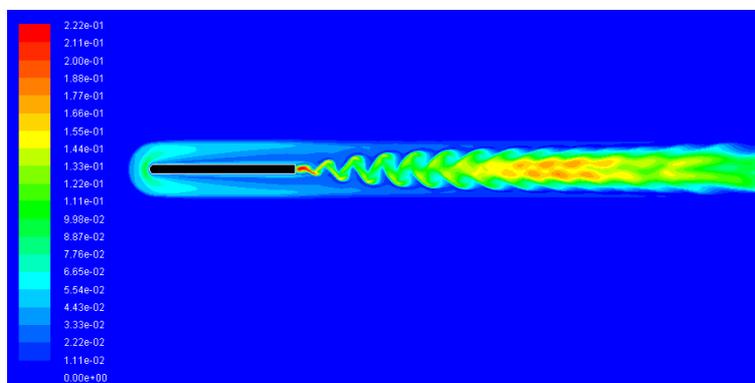


Figura 8.1.1.1.6. Contorno de la viscosidad turbulenta, μ_t , en el modelo *RNG k- ϵ , differential viscosity model*.

Este último contorno muestra como en la zona de pared existe mayor cantidad de viscosidad turbulenta de la que se identifica con el mismo modelo sin la opción de *differential viscosity model*. Además, predice mejor cómo se transporta la turbulencia en las zonas de pequeños vórtices de la estela. Mientras que sin la opción de *differential viscosity model* aparece una distribución más homogénea de la viscosidad turbulenta, con ella se predice de una forma más precisa y localizada. Con este análisis se puede concluir que al emplear el modelo de turbulencia de *RNG k- ϵ* para flujos donde existan zonas con número de Reynolds bajos, ya sea

por la presencia de una pared o por querer obtener información más precisa en los vórtices de pequeña escala, es recomendable activar esta opción.

8.1.2. RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA $k-\omega$ estándar, Y COMPARACIÓN CON LOS MODELO $k-\epsilon$

Ahora se comparan los resultados de la simulación computacional del modelo $k-\omega$ estándar frente a los resultados de los tres modelos de $k-\epsilon$. Para ello se sigue el mismo orden de comparación de los distintos contornos de interés, comenzando por el de velocidades:

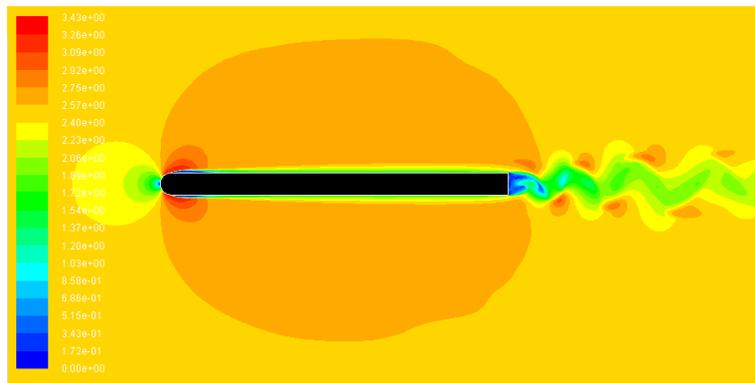


Figura 8.1.2.1. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia $k-\omega$ estándar.

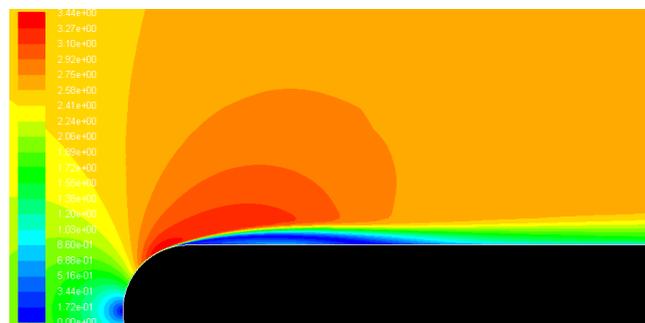


Figura 8.1.2.2. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia $k-\omega$ estándar al comienzo de la capa límite.

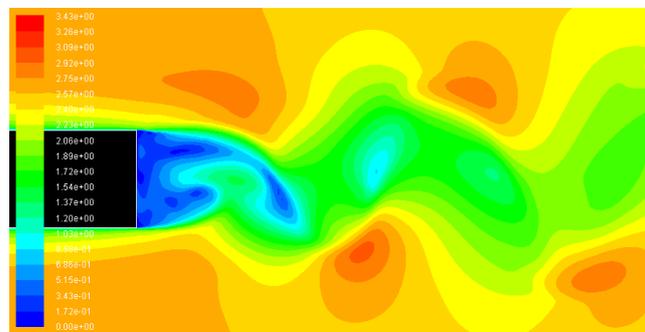


Figura 8.1.2.3. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia $k-\omega$ estándar en la estela del cuerpo.

Mientras que el perfil de velocidades en la capa límite de los modelos $k-\varepsilon$ (Figura 8.1.1.1, Figura 8.1.1.4 y Figura 8.1.1.7) eran prácticamente idénticos entre sí, estos sí se diferencian frente al perfil obtenido con el modelo de turbulencia $k-\omega$ estándar. En este modelo aparece una *burbuja de recirculación* que se genera cuando la capa límite en el borde de ataque se desprende del cuerpo. En este caso la capa límite se vuelve a adherir aguas abajo a la pared del sólido, en el que se denomina *punto de adherencia*. Que en este modelo aparezca esta burbuja de recirculación se puede deber a que el modelo $k-\omega$ es superior al $k-\varepsilon$ en la subcapa viscosa y la zona logarítmica de la capa límite, como apunta Hoffman (7) en la sección [21.2.3.3]. El modelo $k-\varepsilon$ no es lo suficientemente sensible en la zona de la pared y no predice el cambio de signo de los esfuerzos de pared que provocan el desprendimiento de la capa límite:

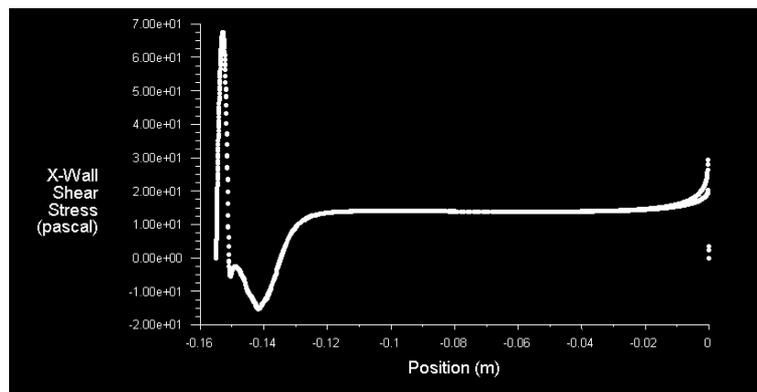


Figura 8.1.2.4. Esfuerzos de pared en dirección x en el modelo de turbulencia $k-\omega$ estándar.

Mediante la gráfica se puede observar que el punto de desprendimiento se encuentra justo antes de llegar al cambio de geometría (punto $x=-0.15$ cm) y el de adherencia 2 cm aguas debajo de este, en $x=-0.13$ cm.

Por otro lado, la burbuja de recirculación que aparece en la base del cuerpo se acorta en comparación con los modelos de $k-\varepsilon$. Esto puede ser consecuencia de que este modelo tiene mayor dificultad a la hora de predecir las capas de cizalladura o porque la capa límite turbulenta se desarrolla de forma distinta debido a la burbuja de recirculación que se genera aguas arriba, en la superficie del cuerpo. La estructura de la capa límite está directamente relacionada con la burbuja de recirculación, por lo que capas límites con puntos de transición y con puntos de desprendimiento y adherencia distintos, predicen burbujas de recirculación en la base de diferentes tamaños y presiones. Además, es necesario tener en cuenta, que este modelo es especialmente sensible a los valores de la corriente. Aunque se ha tenido especial cuidado a la hora de determinar los valores de k y ω en la corriente libre que se introducen en modelo, pequeñas variaciones en éstos podrían producir resultados en la simulación numérica distintos a los obtenidos.

Para seguir con la comparación se procede al análisis del contorno del ratio de disipación de la energía turbulenta:

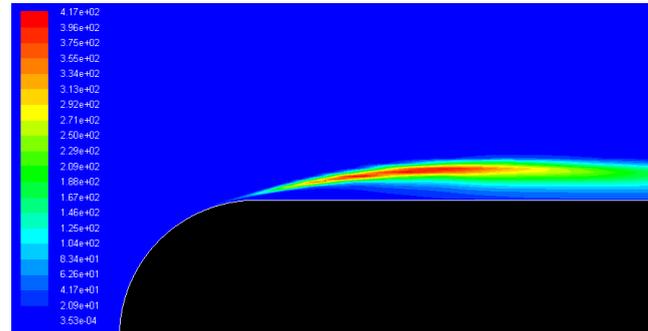


Figura 8.1.2.5. Contorno del ratio de la disipación de la energía cinética turbulenta del modelo de turbulencia $k-\omega$ estándar.

De nuevo, al comparar el contorno del modelo $k-\omega$ estándar con los de $k-\epsilon$, se obtienen perfiles muy distintos. Volviendo a las figuras 8.1.1.10, 8.1.1.11 y 8.1.1.12, se observaban ratios de disipación máxima más elevados y localizados en distintas zonas. Por lo general, la disipación es mayor donde exista producción de turbulencia y el tamaño de los torbellinos esté por debajo de la escala de Kolmogórov y por tanto sean autodestructivos al ser los esfuerzos viscosos dominantes en esta zona. Debido al desprendimiento de la capa límite cerca del borde de ataque que sucede en este modelo, la región que cumple estas características se sitúa en una zona distinta a la de los modelos $k-\epsilon$. En este modelo, existe una pequeña disipación antes del punto de separación, que no se aprecia debido a la escala utilizada. En la zona donde la capa límite se desprende, la cantidad de energía disipada aumenta rápidamente hasta alcanzar su valor máximo. Tras este punto disminuye hasta adoptar un valor constante, una vez la capa se vuelve a adherir. A continuación se muestra el contorno de la energía cinética turbulenta:

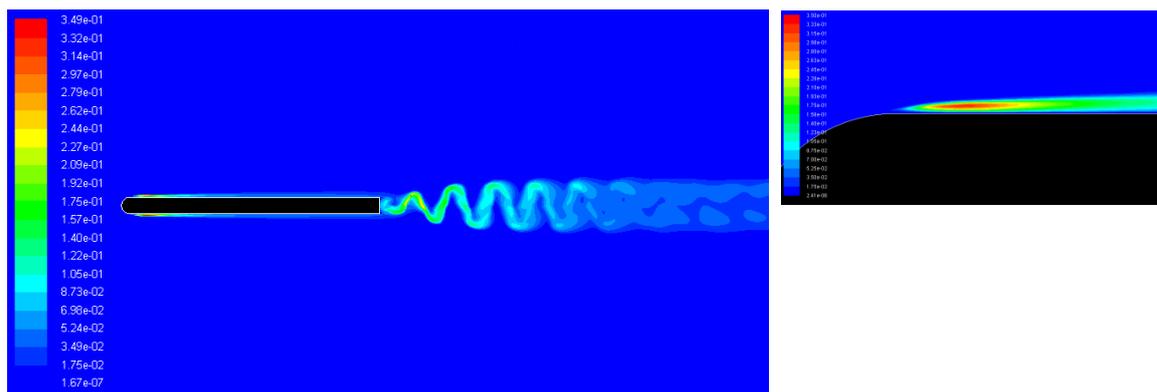


Figura 8.1.2.6. Contorno de la energía cinética turbulenta del modelo de turbulencia $k-\omega$ estándar.

Su comportamiento es exactamente igual al de la disipación de turbulencia, se hace máximo tras el desprendimiento de la capa límite y vuelve a disminuir alcanzando un valor constante cuando el flujo se adhiere a la superficie. Mediante el contorno de la energía cinética turbulenta, queda evidente que este modelo es superior que los modelos $k-\epsilon$ en la subcapa viscosa y la zona logarítmica de la capa límite, pero inferior en zonas de flujo libre con esfuerzos de cizalladura. Se observa que los puntos de máxima energía cinética son del mismo orden, sin embargo, estos puntos se sitúan en zonas muy distintas. En este modelo de turbulencia estas zonas están en la capa límite. El hecho opuesto ocurre en las figuras 8.1.1.13, 8.1.1.14 y 8.1.1.15, donde aunque se observan perfiles distintos entre sí, todos coinciden en que la energía cinética se localiza fundamentalmente en puntos de la estela del cuerpo. Para finalizar la comparación se representa el contorno de la viscosidad turbulenta:

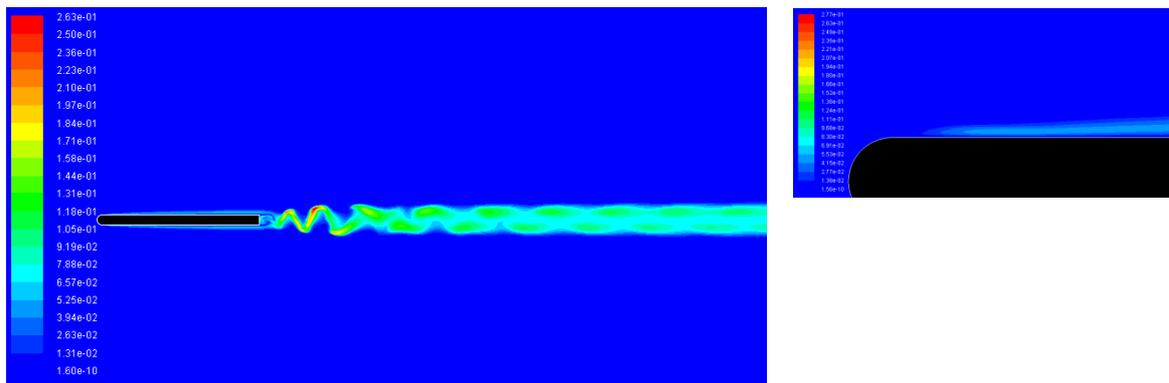


Figura 8.1.2.7. Contorno de la viscosidad turbulenta del modelo de turbulencia $k-w$ estándar.

Sus valores son bajos comparados con el modelo $k-\epsilon$ estándar, estando muy próximos a los valores del modelo $RNG\ k-\epsilon$. La viscosidad turbulenta se observa mayoritariamente en la estela, pero el comportamiento en la capa límite es análoga al comentado en el ratio de disipación y la energía cinética turbulenta. Como ya se ha mencionado, es un modelo que obtiene buenos resultados en las zonas próximas a la pared, pero las simulaciones en las zonas de corriente libre son poco precisas, siendo los modelos de $k-\epsilon$ más fiables en estas zonas.

Aunque este modelo no sea el óptimo para simulaciones en zonas de corriente libre, gracias a su precisión en zonas de Reynolds bajos, se observa un aumento de viscosidad turbulenta en la zona central del torbellino, que permite apreciar la *calle de vórtices de von Kármán* que predice el modelo en la estela. Cambiando la escala para una mejor visualización de este fenómeno se consigue la siguiente imagen:

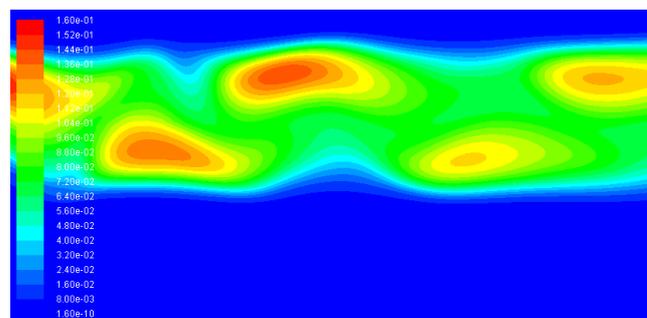


Figura 8.1.2.8. Contorno de la viscosidad turbulenta del modelo de turbulencia $k-w$ estándar.

Los comportamientos del coeficiente de arrastre y de sustentación son análogos a los obtenidos en los modelos $k-\varepsilon$, convergiendo el coeficiente de arrastre en un valor de C_D de 0.0056 y el coeficiente de sustentación C_L con un valor medio de cero y que oscila entre ± 0.004 . El valor de coeficiente de arrastre es similar, lo que indica que los dos modelos predicen una diferencia de presiones entre el borde de ataque (zona de alta presión) y la base del objeto, del mismo orden. Por el contrario, el modelo $k-\omega$ estándar tiene un coeficiente de sustentación con una amplitud del orden de cuatro veces mayor. Esto quiere decir que existe mayor inestabilidad en la estela.

Por último, aprovechando el buen comportamiento que tiene este modelo de turbulencia en la capa límite, se muestra mediante el contorno de la magnitud de vorticidad, el proceso de transición de la capa laminar a la turbulenta.

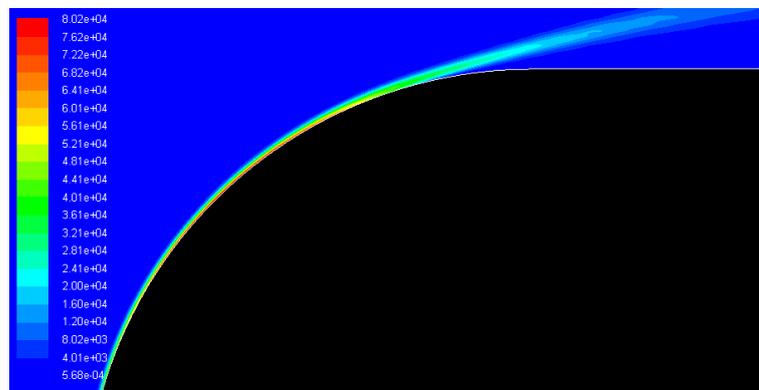


Figura 8.1.2.8. Contorno de la magnitud de vorticidad del modelo de turbulencia $k-\omega$ estándar.

El proceso de transición de una capa límite laminar a una turbulenta es uno de los problemas fundamentales que impide entender en profundidad la turbulencia. Pero hasta el momento, se sabe (como se explica en el modelo conceptual de turbulencia del apartado 2.3) que una vez que el número de Reynolds es lo suficientemente grande, aparecen inestabilidades en el fluido que no son amortiguadas por el efecto de la viscosidad. A medida que aumentan, se crean vórtices que incrementan su tamaño y se dividen en otros de menor escala, produciendo así el llamado flujo turbulento. Por debajo de la escala de *Kolmogórov*, los vórtices se hacen autodestructivos, dando lugar al proceso denominado disipación (**Figura 8.1.2.5.**). En esta figura se puede apreciar la zona de transición de forma aproximada, deduciendo así que ésta comienza antes del desprendimiento de la capa límite. Pero, el flujo será completamente turbulento una vez se desprende la capa límite y comienzan a generarse las inestabilidades de *Kelvin-Helmholtz*.

8.1.3. RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA DE SPALART-ALLMARAS Y COMPARACIÓN CON LOS MODELO $k-\varepsilon$ Y $k-\omega$.

En esta sección se comparan los resultados de las simulaciones es ANSYS Fluent® con el modelo de una ecuación de Spalart-Allmaras, frente a los modelos de turbulencia de dos ecuaciones.

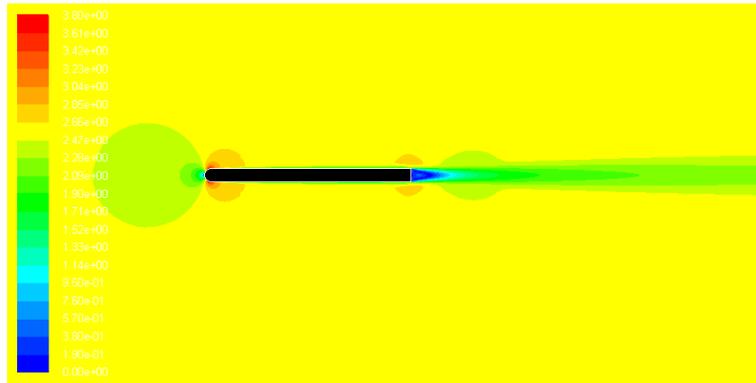


Figura 8.1.3.1. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras.

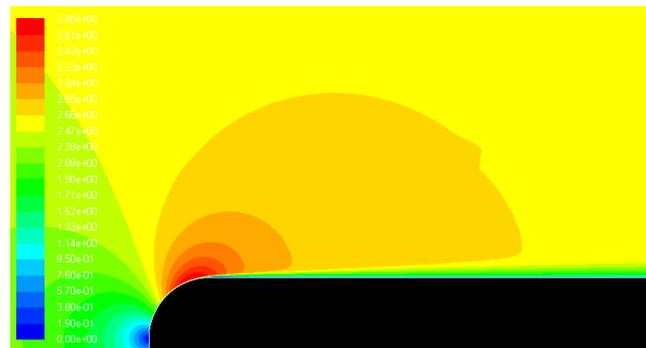


Figura 8.1.3.2. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras en la capa límite.

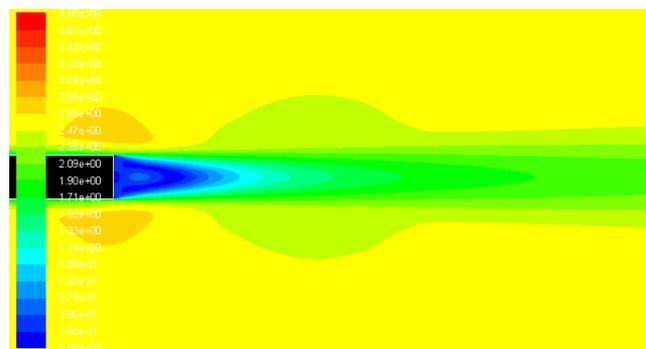


Figura 8.1.3.3. Contorno de velocidades del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras en la estela del cuerpo.

El modelo de Spalart-Allmaras es un modelo de turbulencia de una sola ecuación que fue diseñado especialmente para el ámbito de la aerodinámica, donde existen flujos alrededor de

cuerpos sin cambios bruscos de geometría. Además, en su origen es un modelo para números de Reynolds bajos, por tanto suele dar errores en flujos libres con capas de cizalladura y predice de forma errónea la disipación de la turbulencia.

Esto justifica que mientras que los perfiles de velocidad en la capa límite sí se asemejan a los de los modelos de turbulencia de $k-\varepsilon$, los contornos de velocidad en la estela no tienen nada que ver con los resultados de las simulaciones estudiadas hasta el momento. Aquí se observa una estela estable y totalmente simétrica. Esto es un indicio de que este modelo de turbulencia de una sola ecuación no se puede aplicar a un tipo de flujo con estas características, un número de Reynolds alto y que experimenta una separación de flujo.

A continuación, se muestran los contornos de la viscosidad turbulenta y de la magnitud de vorticidad. Los demás tipos de contornos son característicos de los modelos que incluyen las ecuaciones de transporte de la energía cinética turbulenta k y del ratio de disipación de ε o ratio de disipación específico ω , por lo que aquí carecen de sentido.

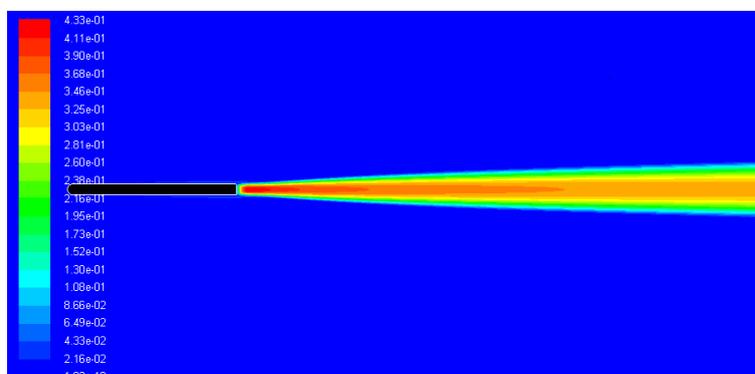


Figura 8.1.3.4. Contorno de la viscosidad turbulenta del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras.

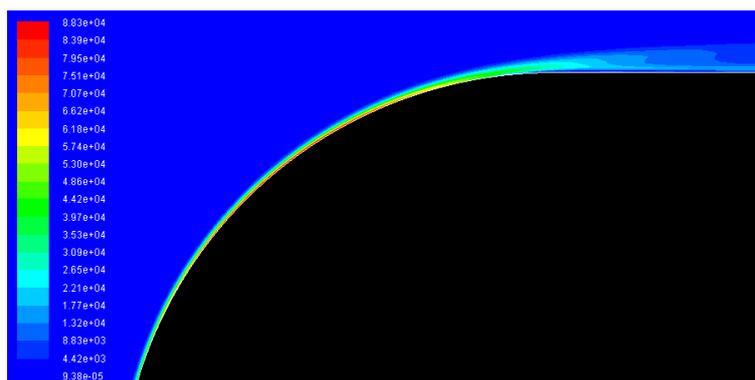


Figura 8.1.3.5. Contorno de la magnitud de vorticidad del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras.

El contorno de la viscosidad turbulenta es el característico de una estela donde no existe oscilación, con un valor máximo de 0.43 kg/ms, que es del orden de lo que se obtiene en los modelos de turbulencia de dos ecuaciones.

Mediante el contorno de vorticidad se observa que la transición de flujo laminar a turbulento ocurre en el borde de ataque. A lo largo de la estela, la vorticidad se mantiene imperceptible

para la escala que utiliza ANSYS Fluent®, pero sí existe y además con una magnitud del orden de las simulaciones con los modelos de dos ecuaciones.

Tanto las gráficas de la variación del coeficiente de arrastre con el número de iteraciones, como la del coeficiente de sustentación, son curvas asintóticas que tienden a un valor constante de 0.0047 y cero, respectivamente.

El modelo de Spalart-Allmaras es un modelo que ha dado muy buenos resultados en muchos tipo de flujos, pero con perfiles aerodinámicos. Sin embargo, hay en casos donde predice resultados no deseados. Entre estos casos están las geometrías que alteran el final de la capa límite y sus respectivas estelas. Por tanto, el resultado obtenido mediante este modelo de turbulencia no tiene validez²⁸.

8.1.4. RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA DE SST $k-\omega$ Y COMPARACIÓN CON LOS MODELO $k-\varepsilon$ y $k-\omega$ estándar.

Como se menciona en la teoría de los modelos de turbulencia, este modelo fue desarrollado por Menter para incluir a la vez la robustez y precisión que ofrece el modelo $k-\omega$ estándar en las proximidades de una pared, con la independencia de los valores de la corriente libre que demuestra tener el modelo $k-\varepsilon$ estándar. Por ello, se analizan los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas de estos dos modelos de turbulencia frente al modelo *Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$* , mediante el mismo tipo de contornos que se han empleado hasta el momento:

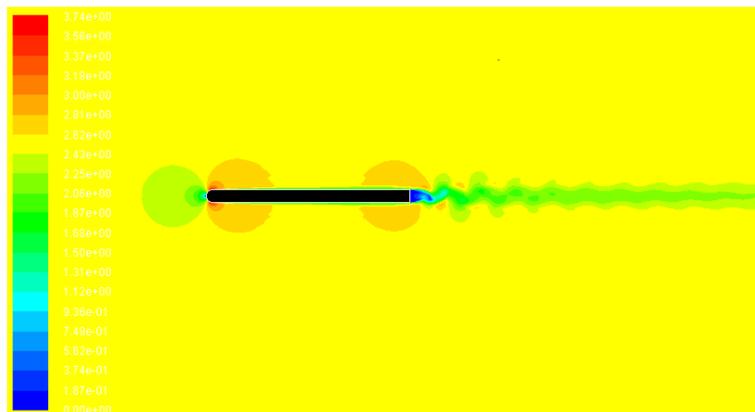


Figura 8.1.4.1. Contorno de velocidades con el modelo de turbulencia Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$.

²⁸ Estas conclusiones provienen del trabajo de Steven R. Allmaras (35).

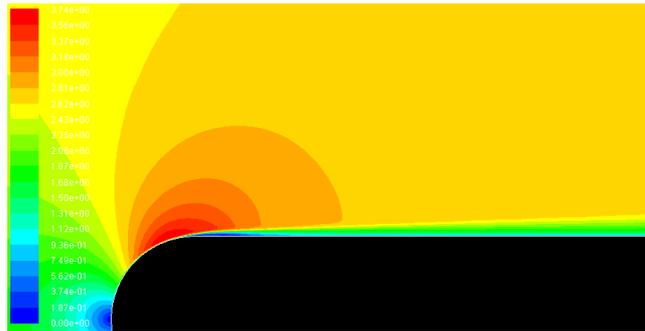


Figura 8.1.4.2. Contorno de velocidades con el modelo de turbulencia Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$ en la capa límite.

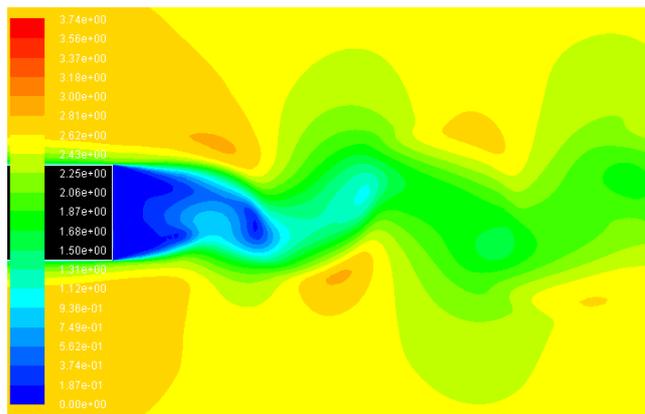


Figura 8.1.4.3. Contorno de velocidades con el modelo de turbulencia Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$ en la estela del cuerpo.

Los resultados obtenidos tras la simulación numérica en la capa límite siguen el mismo patrón que los obtenidos con el modelo $k-\omega$ estándar (**Figura 8.1.2.3**), pero con una burbuja de recirculación de menor longitud. Esto se debe, la capa límite se desprende, creando una burbuja de recirculación con el *punto de adherencia* más cercano al borde de ataque que en el modelo $k-\omega$ estándar. Según la **Figura 8.1.4.5**, en punto de separación se mantiene en la zona de cambio de geometría ($x=-0.15$ cm) y el de adherencia se produce un centímetro antes que en el modelo $k-\omega$ estándar, en $x=-0.14$ cm.

Llegados a este punto, se explica qué factores implican la separación del flujo en la capa límite. Este hecho puede estar ligado a la presencia de un gradiente de presión adverso o a cambios abruptos en la geometría. El morro de la figura de estudio no genera un gradiente de presión adverso, sino que la curvatura acelera de forma constante al flujo. Por tanto, la razón principal por la que se produce la separación del flujo es el cambio de la geometría curva del morro a la plana del resto de la superficie.

Este fenómeno se observa en los modelos de turbulencia para números de Reynolds bajos, capaces de predecir lo que ocurre en las zonas de la capa límite próximas a la pared. Como se explica en el apartado **2.5**, la separación del flujo genera una burbuja de recirculación que provoca una disminución de presión y con ello un gradiente de presión adverso. Así se muestra en el contorno de presiones:

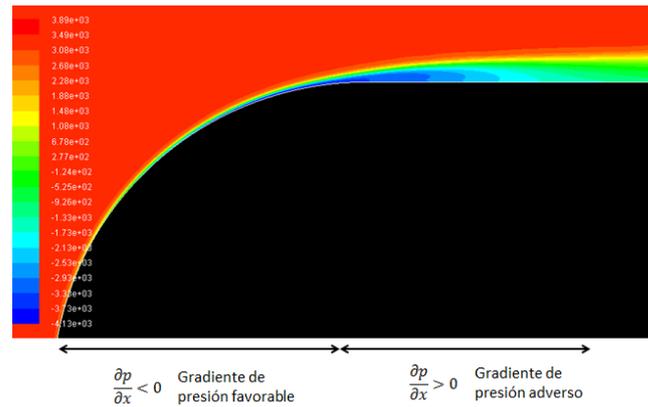


Figura 8.1.4.4. Contorno de presión total relativa del modelo de turbulencia Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$ en la capa límite.

Tanto el modelo $k-\omega$ estándar como el SST predicen una separación de flujo cerca del borde de ataque del cuerpo. Este hecho está generalmente ligado a un inmediato aumento de la velocidad en dirección normal a la superficie y la generación de una burbuja de recirculación. Una vez ocurre este fenómeno, el tamaño de ésta y la posición del punto de adherencia quedan determinados por la precisión del modelo al predecir los efectos de la turbulencia. Por tanto, mediante la validación de los resultados con datos experimentales, se comprobará qué modelo predice mejor este fenómeno. Por el momento parece evidente, que el modelo original de $k-\omega$ y el SST no se comportan de la misma manera a medida que se alejan de la superficie. Por ejemplo, la velocidad en la zona del borde de ataque es de 3.3 m/s en el modelo original y de 3.8 m/s en el presente. Al predecir una velocidad mayor, la transición de flujo laminar a turbulento ocurre antes, aumentando el transporte del momento turbulento que facilita la adherencia del flujo a la superficie y generando burbujas de recirculación más pequeñas. Mediante la siguiente gráfica se observa dónde se produce el punto de separación y el punto de adherencia:

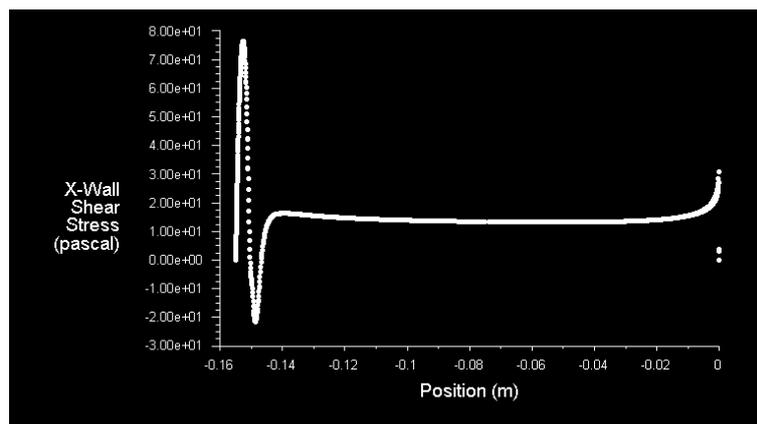


Figura 8.1.4.5. Gráfica de los esfuerzos de pared en x del modelo de turbulencia Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$.

Por otro lado, en la zona de la estela del cuerpo, su contorno se asemeja en gran medida a los modelos de turbulencia $k-\epsilon$, siendo la burbuja de recirculación de la base prácticamente idéntica (**Figura 8.1.1.9**). Esto demuestra que el término que aparece en este modelo por

utilizar las mismas ecuaciones que el $k-\epsilon$, pero adaptándolas a la formulación a la de $k-\omega$, es despreciable.

A continuación, se muestra el contorno del ratio de la disipación de la energía cinética, ϵ :

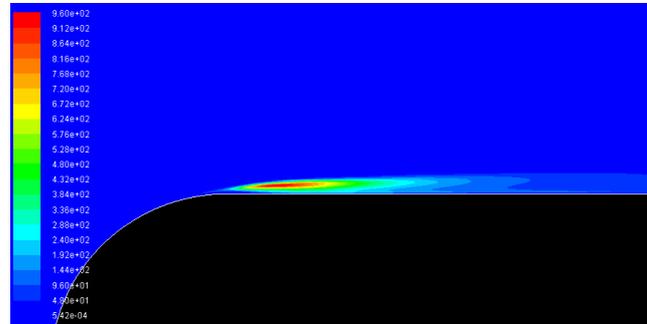


Figura 8.1.4.6. Contorno del ratio de disipación de energía cinética turbulenta del modelo Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$ en la capa límite.

Teniendo en cuenta que el límite superior de la escala del contorno del ratio de disipación en modelo $k-\omega$ estándar es de $4 \cdot 10^2$ y el del modelo SST de $9.5 \cdot 10^2$, la disipación de la energía cinética es mayor en este último modelo. Esto podría significar que el modelo SST al mantener las capas de cizalladura más cercanas a la pared, zona donde el efecto de los esfuerzos viscosos es mayor, exista una disipación de los torbellinos de menor escala más acentuada. Para continuar con la comparación se representa el contorno de la energía cinética turbulenta:

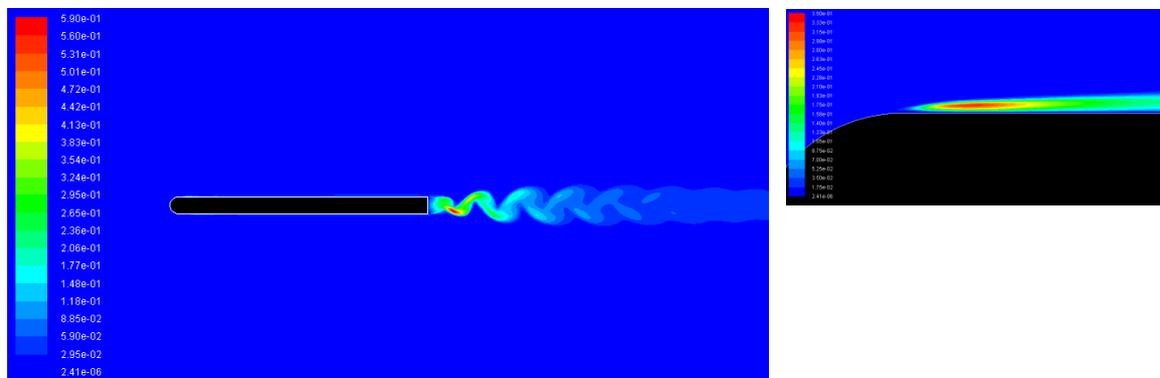


Figura 8.1.4.7. Contorno del ratio de la energía cinética turbulenta del modelo Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$.

Empezando por la comparación entre el modelo $k-\omega$ estándar (Figura 8.1.2.6.) y el SST en la capa límite, ambos contornos tienen como límite superior de la escala $3.5 \cdot 10^{-1} m^2/s^2$. Observando ambas figuras, se puede decir que la cantidad de energía cinética es la misma en esta zona. Aunque, en el modelo $k-\omega$ estándar la zona de capa límite de máxima energía cinética es más alargada. Esto es consecuencia de que al simular con el modelo $k-\omega$ estándar, el punto de adherencia queda más alejado del borde de ataque, disminuyendo la disipación de la turbulencia que se crea en la capa límite desprendida por tener sus capas de cizalladura más alejadas de la pared del cuerpo. Al disiparse menos energía por la dimensión de la burbuja de recirculación, la zona de máxima energía cinética es más alargada que en el modelo SST.

Siguiendo con la comparación entre los modelos $k-\varepsilon$ y el SST en la estela, se puede decir que el patrón que sigue el contorno de la energía cinética turbulenta es similar a cualquiera de los modelos $k-\varepsilon$, pero es especialmente comparable al modelo *RNG* $k-\varepsilon$. El límite superior de la escala ($4 \cdot 10^{-1} m^2/s^2$) es algo inferior que en el SST ($5.9 \cdot 10^{-1} m^2/s^2$), por lo que se predice mayor cantidad de energía cinética en el modelo SST con patrones muy similares. Estas pequeñas discrepancias son justificables debido a la dependencia de este contorno con el punto de transición de régimen laminar a turbulento y el punto de adherencia.

Por último, se analiza el contorno de viscosidad turbulenta.

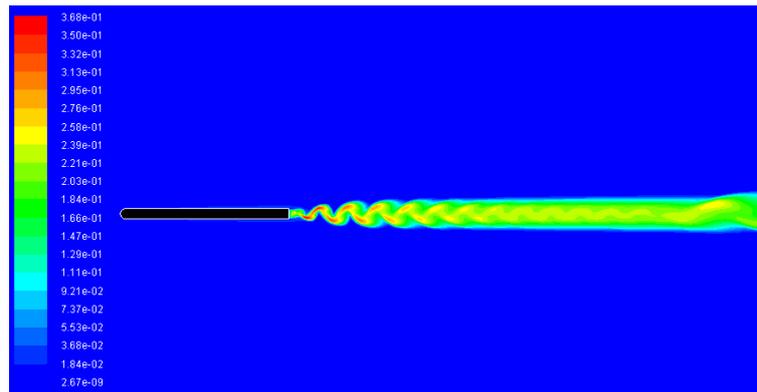


Figura 8.1.4.8. Contorno del ratio de la energía cinética turbulenta del modelo Shear-Stress Transport (SST) $k-\omega$.

En la capa límite, debido a la escala de viscosidad turbulenta, no se puede apreciar la existencia de la misma. Algo más se puede apreciar en el caso de $k-\omega$ estándar (Figura 8.1.2.7.). De nuevo, esta discrepancia se puede deber a la adherencia más tardía del flujo en el modelo original. La zona donde la capa límite permanece desprendida es una zona de flujo complejo con muchas inestabilidades. Como se ha comprobado mediante los contornos de las propiedades turbulentas, un retraso del punto de adherencia implica una cantidad de energía cinética turbulenta y de vorticidad alta, aumentando así la difusión de las propiedades del fluido. Este proceso se cuantifica con el término de viscosidad turbulenta, que como consecuencia también es más elevado.

Por último, en cuanto a las fuerzas que experimenta el objeto, el coeficiente de arrastre tiende de forma asintótica a un valor de 0.0052, que es del orden de los valores que se han calculado en el resto de simulaciones, por lo que la burbuja de recirculación en la base tiene una presión similar a la del resto de modelos. El coeficiente de sustentación oscila entre los valores ± 0.0022 , valor algo superior a los modelos $k-\varepsilon$ y menor que los modelos $k-\omega$.

Tras las comparaciones se puede decir que el modelo SST se comporta de forma casi idéntica al modelo $k-\varepsilon$ en las zonas de corriente libre. En las zonas cercanas a la pared, se consiguen resultados similares al modelo $k-\omega$ estándar, pero con un valor de la longitud de adherencia más pequeña. Por las propiedades que le caracterizan, es un modelo que puede ser utilizado para una variedad de tipos de flujos más amplia.

8.2 RESULTADOS Y COMPARACIÓN DEL MODELO DE TURBULENCIA $k-\omega$ SST A DISTINTOS NÚMEROS DE REYNOLDS

Tras la comparación de los modelos de turbulencia, se procede a estudiar flujos a distintos números de Reynolds, para ver la influencia de éste en su comportamiento. Esta comparación se hará mediante el modelo $k-\omega$ SST, por ser el modelo que mejor se adapta a una gran variedad de flujos y, adelantando las conclusiones de la validación, predice unos resultados más próximos a los datos experimentales. Se realizarán simulaciones numéricas para un número de Reynolds de 10^5 , que se consigue aumentando la velocidad del fluido a 10 m/s y para un número de Reynolds de 10^4 , con una velocidad de 1m/s.

8.2.1 RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA $k-\omega$ SST A UN NÚMERO DE REYNOLDS MENOR

Ahora se impone como velocidad de entrada 1m/s, disminuyendo el número de Reynolds a 10^4 y obteniendo unos valores para la energía cinética turbulenta y el ratio de disipación específico en la corriente libre de:

$$k = 3.75 \cdot 10^3 \frac{m^2}{s^2} \quad \omega = 375 \frac{1}{s}$$

Para la comparación de los resultados se utilizan el mismo tipo de contornos que hasta el momento, comenzando por el contorno de la velocidad:

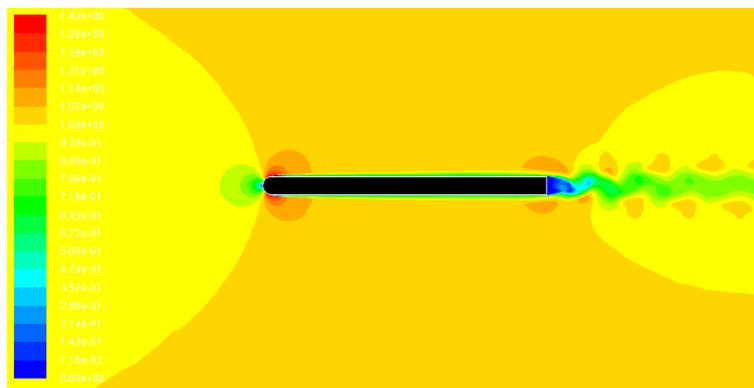


Figura 8.2.1.1. Contorno de la velocidad del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4 .

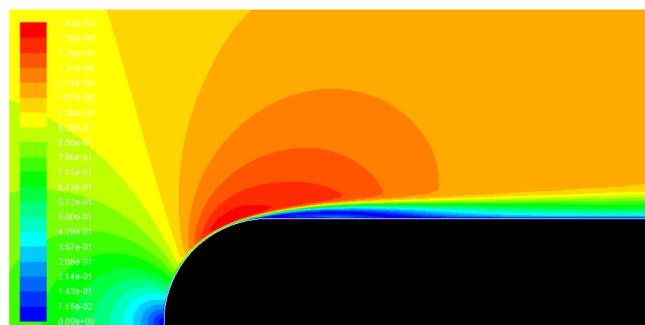


Figura 8.2.1.2. Contorno de la velocidad del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4 en la capa límite.

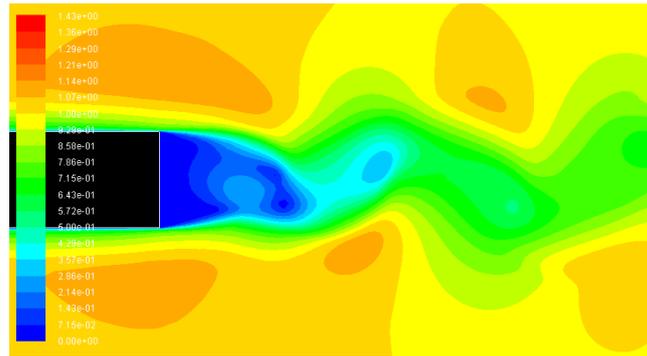


Figura 8.2.1.3. Contorno de la velocidad del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4 en la estela.

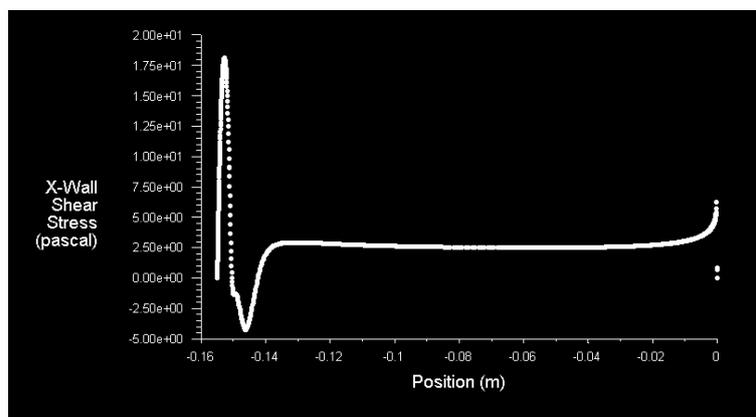


Figura 8.2.1.4. Gráfica de los esfuerzos de pared en x con el modelo $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^4 .

Haciendo una comparación de los resultados de la simulación numérica a un número de Reynolds menor en la capa límite, se observa que la separación del flujo sucede justo al terminar la zona curvada de la superficie del borde de ataque, que coincide con el punto de desprendimiento con un número de Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$ (**Figura 8.1.4.5.**). Sin embargo, la burbuja de recirculación tiene un espesor mayor y su punto de adherencia está más alejado, lo que hace que la zona de desprendimiento sea más alargada. Esto se justifica a medida que se analizan el resto de contornos, siguiendo con el del ratio de disipación de la energía cinética turbulenta:

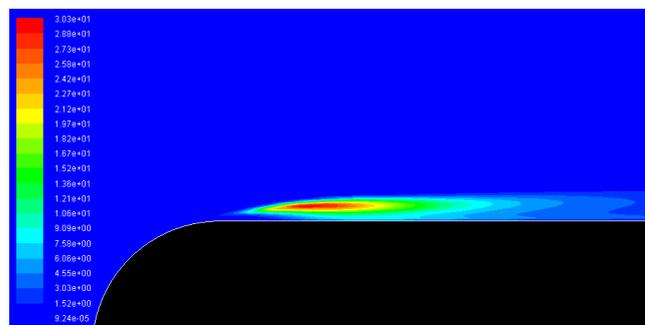


Figura 8.2.1.5. Contorno del ratio de disipación de la energía cinética turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4 en la capa límite.

El ratio de disipación es mucho menor que en la simulación con un número de Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$, del orden de 30 veces menor (**Figura 8.1.4.6.**). El patrón es muy similar, pero el límite superior de escala con un número de Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$ y 10^4 son de aproximadamente 1000 y 30, respectivamente. Esto es un indicio de que al disminuir la velocidad, disminuye la turbulencia que se genera en el flujo.

Para corroborar este hecho, se procede con la comparación del contorno de la energía cinética turbulenta:

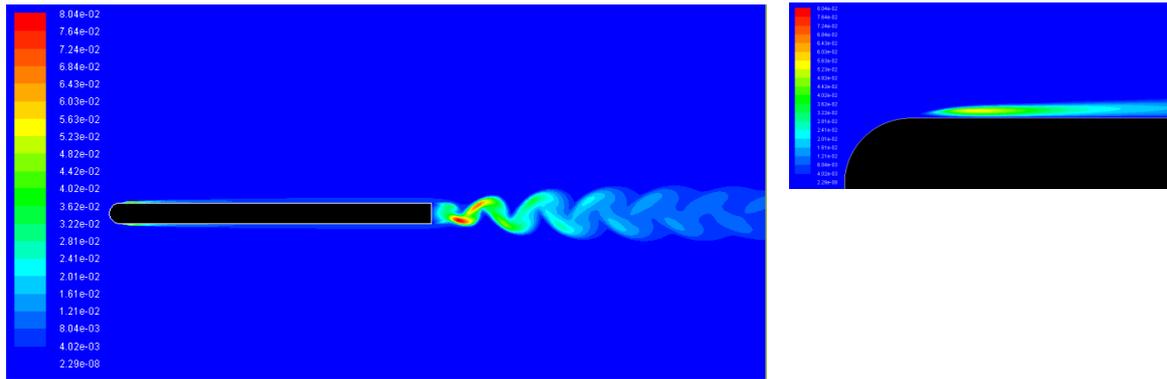


Figura 8.2.1.6. Contorno de la energía cinética turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4 .

Comparando este contorno con el de la **Figura 8.1.4.7.** se vuelven a observar patrones similares, pero con un descenso de los parámetros de turbulencia. En este caso el límite de escala en la simulación con número de Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$ es de $0.54 \text{ m}^2/\text{s}^2$ y en el caso presente de $0.08 \text{ m}^2/\text{s}^2$, es decir, existe una energía cinética turbulenta 7 veces menor.

Por último, se muestra el contorno de la viscosidad turbulenta:

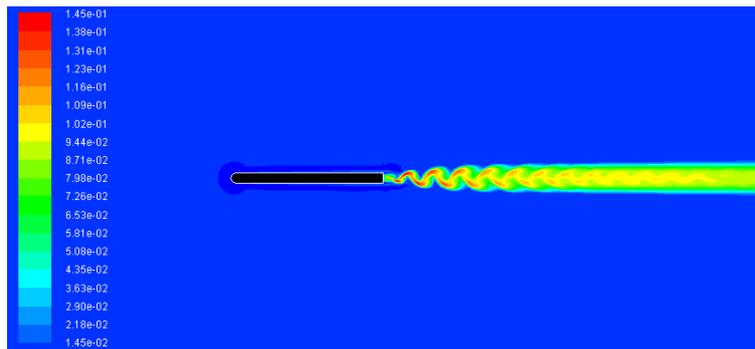


Figura 8.2.1.7. Contorno de la viscosidad turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4 .

Haciendo la comparación con la **Figura 8.1.4.8.** se predice una viscosidad turbulenta 4 veces menor. Como conclusión de los resultados de la simulación con menor número de Reynolds, se puede decir, que al disminuir la velocidad, se reducen también los parámetros de turbulencia y, por lo general, se retrasa el punto de transición. Al existir menos cantidad de turbulencia en el fluido y, por tanto menos transporte de momento turbulento, la burbuja de recirculación que se genera en la superficie del cuerpo tarda más tiempo en volverse a adherir. En la

simulación con Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$ los esfuerzos turbulentos son mayores, aumentando la cantidad de momento que se transporta y facilitando la adherencia del flujo a la superficie. En cuanto a la burbuja de recirculación que se genera en la base del cuerpo (**Figura 8.2.1.3**), tiene una estructura completamente análoga a la obtenida con en la **Figura 8.1.4.3.**, con el flujo a un Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$. Las posiciones de los centros de recirculación de las burbujas se corresponden en ambos casos. La estela sigue el mismo patrón en estas figuras, claro que con escalas distintas, debido a la reducción de velocidad que se impone a la entrada del dominio.

Otro punto a tener en cuenta, es si la transición de flujo laminar a turbulento sucede antes o después del punto de separación. Por los contornos anteriormente analizados, en el caso de Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$ este proceso comenzaba antes, pero al bajar la velocidad, es posible que el Reynolds crítico no se alcance hasta el desprendimiento de la capa límite que ocurre en la superficie. Para ello se utiliza el contorno de la magnitud de vorticidad:

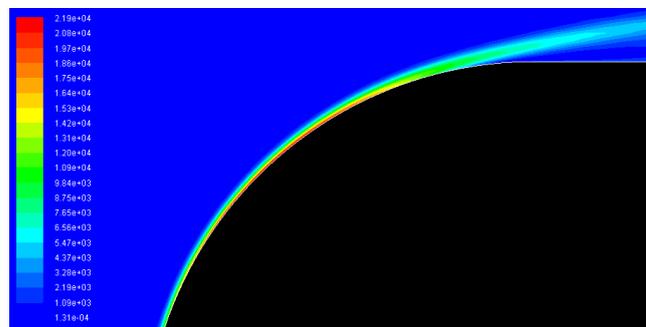


Figura 8.2.1.8. Contorno de la magnitud de la vorticidad del modelo $k-\omega$ SST con número de Reynolds de 10^4 .

Atendiendo al contorno, se puede decir que la transición de flujo laminar a turbulento comienza antes del desprendimiento. A partir de un cierto punto en el borde de ataque del cuerpo existe vorticidad, por lo que las inestabilidades características de la transición han comenzado a formarse en la capa límite laminar. Aun así, como ocurre en el caso del Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$, no existe la suficiente cantidad de turbulencia en la capa límite para evitar la separación de flujo.

En cuanto al coeficiente de arrastre y de sustentación, se mantienen prácticamente invariables. El coeficiente de sustentación tiene un comportamiento periódico que oscila entre ± 0.002 , frente a ± 0.0022 del caso con Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$, lo que significa que existe algo menos inestabilidad en la estela. El coeficiente de arrastre se mantiene con un valor de 0.005, por lo que la diferencia de presiones entre el punto de remanso y el borde de ataque se mantienen prácticamente constante al disminuir la velocidad.

8.2.2 RESULTADOS DEL MODELO DE TURBULENCIA $k-\omega$ SST A UN NÚMERO DE REYNOLDS MAYOR

Mediante un cambio de velocidad a 10m/s, se obtienen distintos valores para la energía cinética turbulenta y el ratio de disipación específico en la corriente libre. Los nuevos datos son:

$$k = 0.375 \frac{m^2}{s^2} \quad \omega = 3.75 \cdot 10^4 \frac{1}{s}$$

Además de la comparación con las simulaciones con mayor Reynolds, con los resultados del contorno de velocidad de la simulación se analiza como varía el coeficiente de sustentación a medida que la estela oscila:

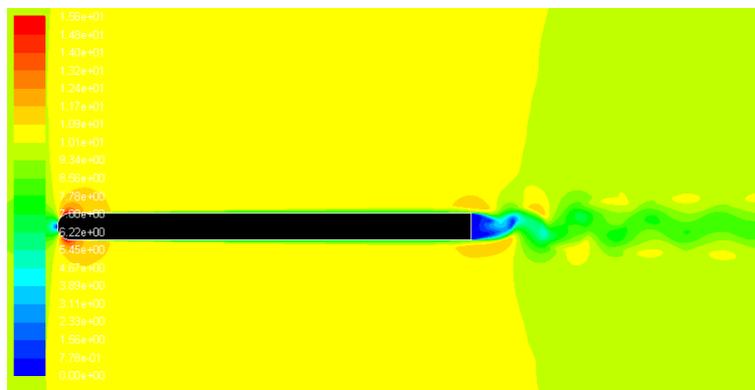


Figura 8.2.2.1. Contorno de la velocidad del modelo de turbulencia $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5 en el punto A.

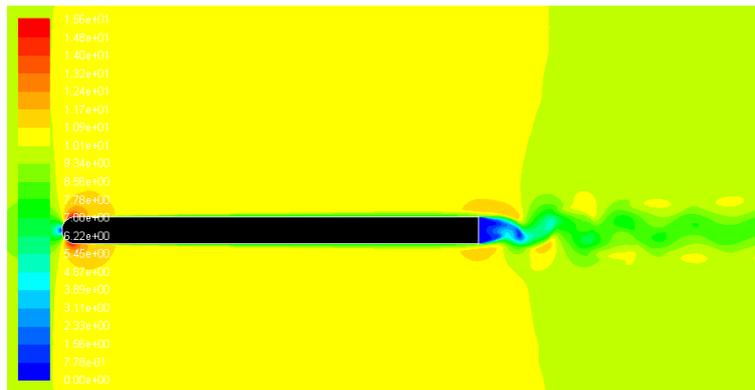


Figura 8.2.2.2. Contorno de la velocidad del modelo de turbulencia $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 105 en el punto B.

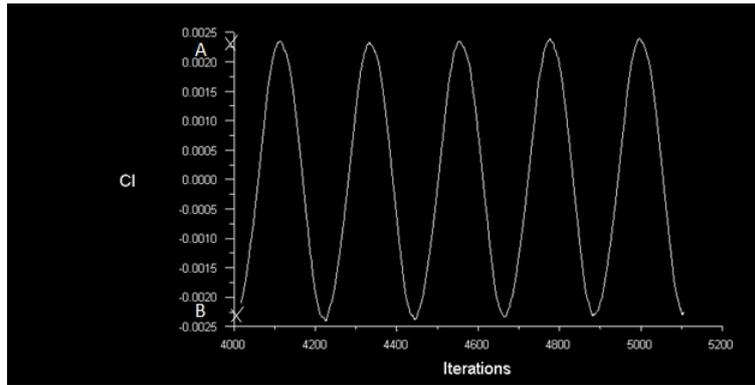


Figura 8.2.2.3. Gráfica de la variación del coeficiente de sustentación con el número de iteraciones del modelo $k-\omega$ SST con un Reynolds de 10^5 .

Se observa cómo los contornos de velocidad de los puntos A y B son simétricos con respecto al eje x. Mientras que la capa límite en la parte superior e inferior del cuerpo se desarrollan de forma análoga, en la estela, al existir oscilación, tiene un comportamiento periódico con el tiempo. Al hacer un análisis estacionario, por lo general, lo que se espera en una estela estable sin oscilación, como en el caso de Spalart-Allmaras. Sin embargo, cuando existe mucha turbulencia, puede ocurrir que la oscilación se observe tanto en el caso estacionario como en el no estacionario.

Que el flujo genere recirculación, indica una zona de alta velocidad y baja presión en su interior. Cuando la burbuja de recirculación está orientada como en la **Figura 8.2.2.2.**, el punto de recirculación está en la parte inferior y por tanto existe menor presión en la parte inferior que en la superior, creando así un coeficiente de sustentación negativo (punto B). El mismo razonamiento se sigue cuando la burbuja está orientada como en la **Figura 8.2.2.1.**, generando un coeficiente de sustentación positivo (punto A). Para la comparación de los modelos de turbulencia que experimentan oscilación en la estela, se han cogido contornos en torno al punto B, para así facilitar la comparación de las estelas.

Como se representa en la gráfica, el coeficiente de sustentación varía entre los valores ± 0.0023 , por lo que la oscilación es algo mayor que en los casos con un Reynolds menor. El coeficiente de arrastre converge en un valor de 0.0048, que es algo menor que los valores obtenidos con los flujos a menor velocidad. Por tanto, la diferencia de presiones entre el punto de remanso y la base del cuerpo ha disminuido.

Como se explica en el apartado **2.5**, la formación de burbujas de recirculación suele incrementar la fuerza de arrastre que experimenta el objeto. En el estudio presente, la mayor fuerza de arrastre está generada por la burbuja de recirculación de la base, por ello en las simulaciones que aparece la burbuja de recirculación en la superficie no se experimenta un aumento considerable del coeficiente de arrastre. Sin embargo, comparando el coeficiente de arrastre obtenido en el caso con Reynolds alto, se puede comprobar que al no desarrollarse la burbuja de recirculación tras el borde de ataque, este coeficiente se ve levemente reducido.

A continuación se representan los contornos de velocidad del punto B tanto en la capa límite como en la estela:

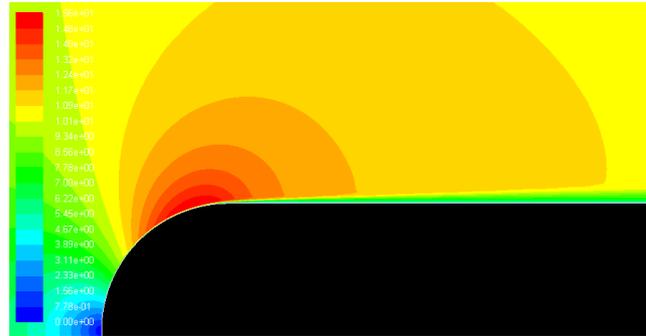


Figura 8.2.2.4. Contorno de la velocidad del modelo de turbulencia $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5 en la capa límite.

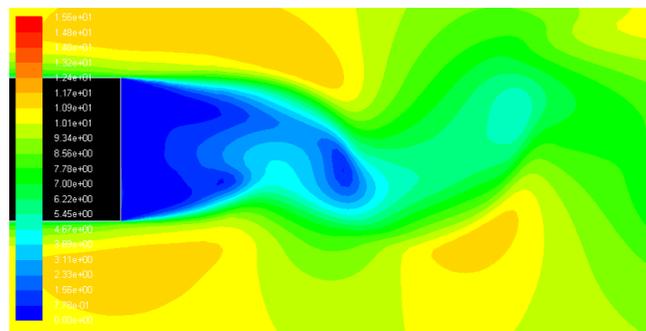


Figura 8.2.2.5. Contorno de la velocidad del modelo de turbulencia $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5 en la estela del cuerpo.

Con el contorno de velocidades se observa como el punto de desprendimiento que existía con las simulaciones con número de Reynolds menor (figuras 8.1.4.2. y 8.2.1.2.), ha desaparecido, y con ello la burbuja de recirculación que aparecía en la superficie del cuerpo. En el flujo de Reynolds 10^4 , los parámetros de turbulencia disminuían produciendo así menor cantidad de esfuerzo turbulento, permitiendo que las capas de cizalladura que se forman tras el desprendimiento se alejaran de la superficie del cuerpo y retrasando su adherencia. Aquí se observa el efecto contrario, un aumento de la velocidad incrementa los parámetros de turbulencia:

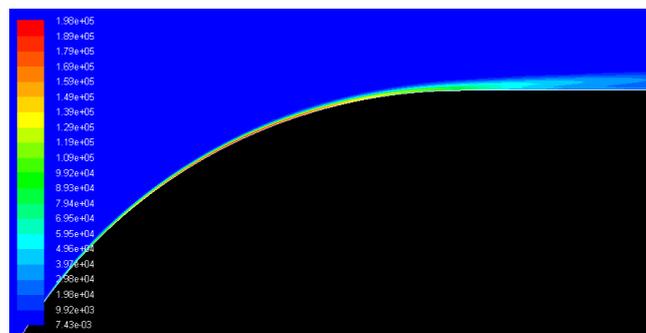


Figura 8.2.2.6. Contorno del ratio de disipación de energía turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5 en la capa límite del cuerpo.

El contorno del ratio de disipación revela su máximo en el borde de ataque del cuerpo en una zona donde existe turbulencia y a su vez los esfuerzos viscosos son dominantes. Su máximo es 200 veces mayor al flujo con Reynolds de $2.5 \cdot 10^4$ y el perfil de disipación permanece completamente adherido a la superficie del cuerpo. Como se ha comentado anteriormente, un aumento de la velocidad conlleva un aumento de los parámetros de turbulencia.

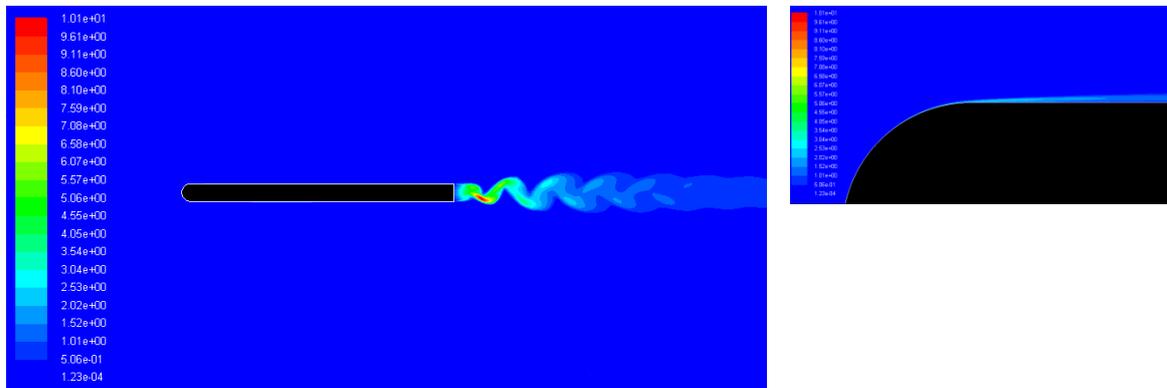


Figura 8.2.2.7. Contorno de la ratio energía cinética turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5 .

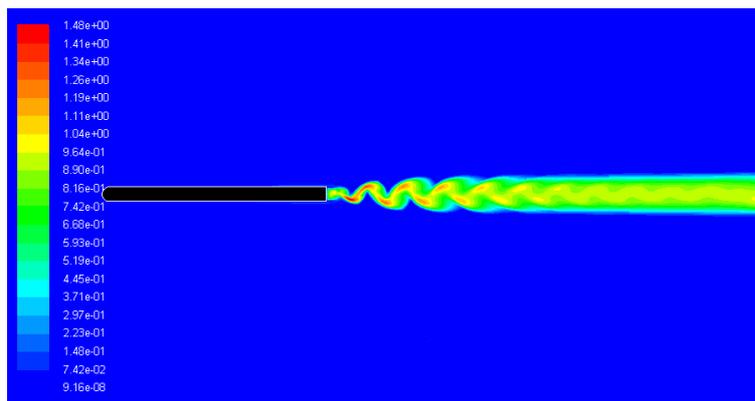


Figura 8.2.2.8. Contorno de la viscosidad turbulenta del modelo $k-\omega$ SST con un número de Reynolds de 10^5 .

De nuevo se observan patrones muy similares, pero con un aumento aproximado de 200 veces la energía turbulenta (**Figura 8.1.4.7.**) y la viscosidad turbulenta (**Figura 8.1.4.8.**) en el flujo de Reynolds $2.5 \cdot 10^4$.

El cambio que experimenta la capa límite se debe a que un aumento de velocidad implica una transición de flujo laminar a turbulento más temprana, además de mayor cantidad de turbulencia. A su vez, una capa límite turbulenta tiene mayor momento que una capa límite laminar, retrasando así la separación del flujo. La razón fundamental por la que un flujo pasa de ser laminar a turbulento es el cambio de la geometría curva del morro a la plana de la superficie. Si la capa límite no se desprende en esta zona debido al retraso del punto de separación, tampoco lo hará en la superficie plana del cuerpo. Por tanto, no existe desprendimiento de la capa límite antes de llegar a la base del cuerpo.

Al ser un cuerpo de base roma, el punto de desprendimiento en la base está determinado, formando patrones de estela y de burbujas de circulación similares, aun variando el número de Reynolds. Lo único que varía es la escala en la que se representa los contornos en los distintos casos, ya que la velocidad del flujo sí varía siendo mayor en este caso, con un límite superior de velocidad en torno a 15.6 m/s.

Lo que se deduce en estas comparaciones es que la longitud de la burbuja de recirculación decrece a medida que se aumenta el número de Reynolds debido al adelanto del punto de adherencia. El espesor de la burbuja también se ve reducido con el aumento de la velocidad del flujo. Además, si el número de Reynolds es lo suficientemente alto, la turbulencia de la capa límite impide la separación del flujo que resulta en perfiles totalmente adheridos a la superficie del cuerpo, con la consecuente desaparición de la burbuja de recirculación.

8.3 RESULTADOS DE SIMULACIÓN EN ESTADO NO ESTACIONARIO

Hasta el momento, el tipo de análisis que se ha empleado ha sido en estado estacionario. Antes de examinar un caso complejo, era necesario centrarse en un caso sencillo promediado, estudiando la turbulencia espacialmente sin entrar en el espacio temporal. Hay en casos donde el flujo no es estadísticamente estacionario y por tanto un análisis no estacionario del problema permite la obtención de resultados que coinciden en mayor medida a los datos experimentales. Este tipo de análisis supone un aumento considerable del tiempo de computación y los resultados, aunque sean dependientes del tiempo, siguen siendo una simulación estadística de la turbulencia que está ocurriendo. El propósito de este tipo de simulaciones es predecir la estadística que se esconde tras un flujo altamente irregular.

Lo que realiza una simulación no estacionaria de RANS es modelar la turbulencia y resolver las estructuras del flujo que no son estacionarias. En este caso, los resultados obtenidos mediante un análisis no estacionario son muy similares a los estacionarios, teniendo la desventaja de que el tiempo de computación es mucho mayor. Por esta razón se ha valorado como mejor opción la simulación en estado estacionario para las comparaciones de los modelos de turbulencia y el comportamiento del flujo a distintos Reynolds.

Aplicando un estudio no estacionario al modelo $k-\omega$ SST con Reynolds $2.5 \cdot 10^4$, se obtienen los siguientes contornos:

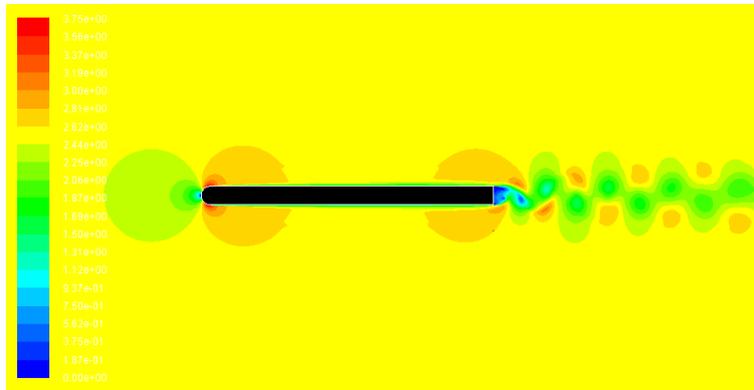


Figura 8.3.1. Contorno de velocidades de la simulación en estado estacionario con el modelo de turbulencia $k-\omega$ SST.

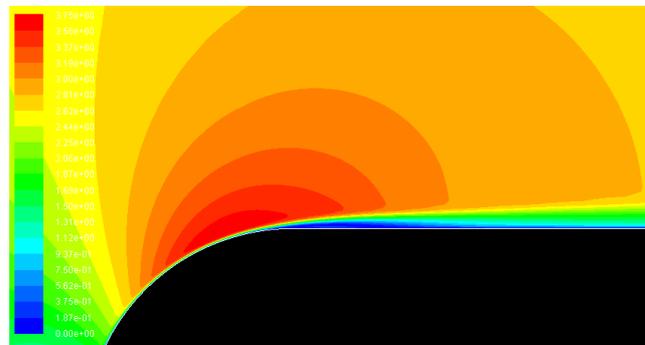


Figura 8.3.2. Contorno de velocidades de la simulación en estado estacionario con el modelo de turbulencia $k-\omega$ SST en la estela del cuerpo.

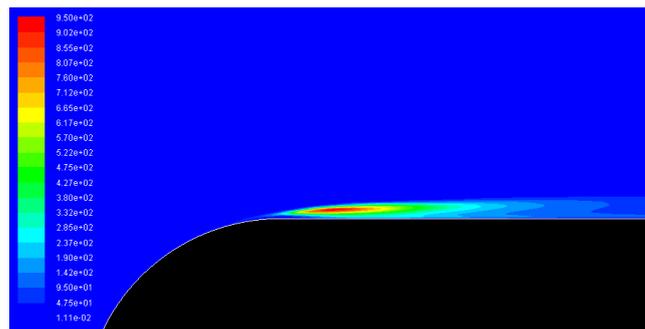


Figura 8.3.3. Contorno del ratio de disipación de la simulación en estado estacionario con el modelo de turbulencia $k-\omega$ SST.

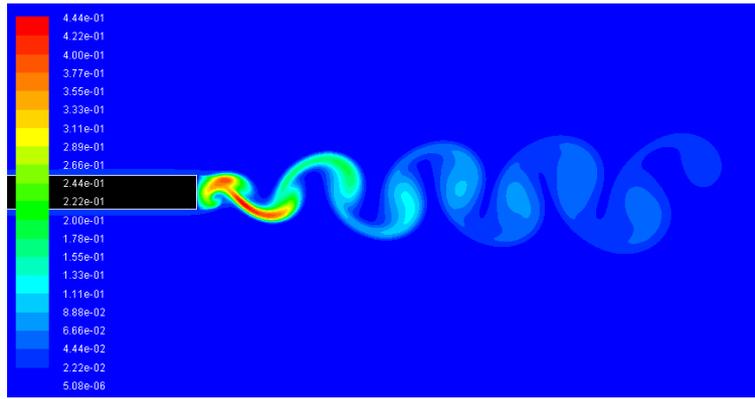


Figura 8.3.4. Contorno de la energía cinética turbulenta de la simulación en estado estacionario con el modelo de turbulencia $k-\omega$ SST.

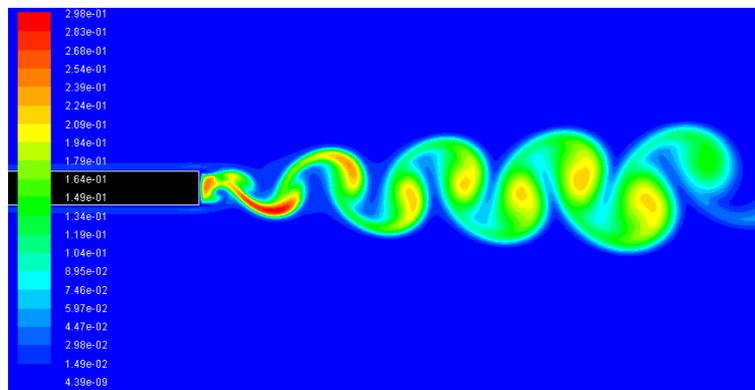


Figura 8.3.5. Contorno de viscosidad turbulenta de la simulación en estado estacionario con el modelo de turbulencia $k-\omega$ SST.

Para mostrar la similitud de los resultados se realiza una breve comparación entre el mismo modelo de turbulencia en estado estacionario. De la misma manera, se crea una calle de vórtices con una estructura coherente en una estela que oscila de forma periódica. En estado estacionario, la visualización de los mismos, a través del contorno de viscosidad turbulenta, es algo más clara que en el estado estacionario (**Figura 8.1.4.8.**) En la capa límite, se produce separación de flujo cuando la geometría pasa de ser curva a plana y se vuelve a adherir en el mismo punto que en estado estacionario. La burbuja de recirculación que se crea en la base del cuerpo es algo más pequeña, pero el coeficiente tiene el mismo valor, por lo que la distribución de presiones que genera la misma es análoga a la de las simulaciones estacionarias.

Capítulo 9.: VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS

CFD no cuenta con las habilidades, el juicio ingenieril, o con la experiencia para generar modelos robustos y confiables por sí mismo. El resultado de las simulaciones está muy influido por el factor humano. Por ello, es necesario que, una vez que se consigue una malla convergida, los resultados se compararen con datos experimentales o con otras simulaciones ya contrastadas. De esta manera, se pueden estimar los errores que se han cometido al modelar, que es una de las tareas más complicadas en CFD. Es en esta fase del proyecto donde se comprueba si el problema es o no consistente y es la única manera de asegurar que el modelo de turbulencia empleado es el correcto, sin olvidar que los resultados obtenidos mediante CFD son sólo aproximaciones.

Por tanto, para validar los resultados de la simulación numérica de cada modelo de turbulencia, haría falta contrastarlos con datos experimentales obtenidos al reproducir el flujo simulado. La reproducción real de un flujo requiere gran cantidad de material especializado, tiempo y conocimiento avanzado sobre la mecánica de fluidos. Por este motivo, la validación de los resultados se hace mediante experimentos de otros autores.

9.1. EXPERIMENTO DE PAREZANOVIC Y CADOT PARA LA VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS

La validación de los resultados se hace mediante un estudio experimental de *Vladimir Parezanovic* y *Olivier Cadot* (13), dónde utilizan un cilindro con forma de 'D' y un Reynolds de $1.3 \cdot 10^4$. La distancia principal del cilindro es $D=2.5$ cm, siendo la longitud dos veces ésta. La base fundamental del estudio es el análisis de las estructuras bidimensionales que se crean en la estela del cuerpo, con una examinación detallada de las dimensiones de la burbuja de recirculación. Además, continúan su estudio con la adición de un cilindro de menor tamaño, colocado aguas abajo del cilindro principal, para simular una perturbación local y controlar la estela. Ésta parte del estudio no será abordada por no ser de interés para el trabajo presente. A continuación, haciendo un recorrido por los resultados que obtienen al analizar el cilindro básico sin la presencia de ningún cilindro de control, se validarán los resultados de las simulaciones del estudio actual.

En el presente estudio, la distancia característica es menor ($D=1$ cm) y la longitud mayor, $15 D$. El número de Reynolds utilizado en las comparaciones de los distintos modelos de turbulencia es la mitad del utilizado experimentalmente, $2.5 \cdot 10^4$. Aunque el número de Reynolds sea menor, se puede realizar la validación de los resultados mediante este experimento porque al incrementar este parámetro no se generan otros efectos físicos, como la compresibilidad.

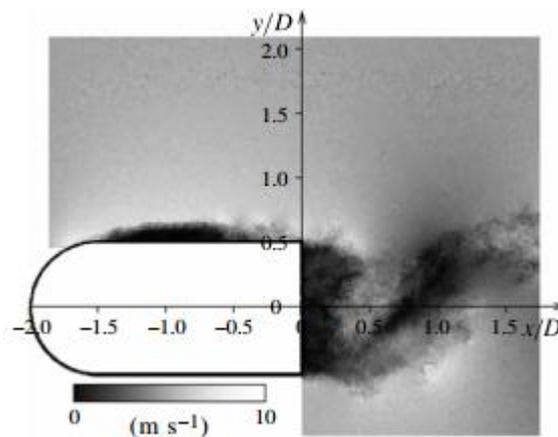


Figura 9.1.1. Flujo alrededor de una superficie de base roma en el estudio de *Parezanovic* y *Cadot*.

Como se muestra en la figura, la capa límite comienza en el punto de remanso y se separa al inicio de la pared plana $x=-1.5 D$. Tras la separación, el flujo se convierte en turbulento. Esto queda patente por la presencia de zonas periódicas de alta velocidad, que revelan una zona de transición debido a las inestabilidades de *Kelvin-Helmholtz*. La capa límite desprendida se vuelve a adherir en $x=-0.4 D$ y se separa definitivamente al llegar a la base del objeto en $x=0$. El punto de desprendimiento en las simulaciones está más cerca del borde de ataque. Mientras que experimentalmente la capa límite permanece desprendida durante una distancia de cuatro centímetros, en las simulaciones esta distancia es de un centímetro en el modelo SST k -

ω y de dos centímetros en el modelo *k- ω estándar*. En el resto de modelos no se produce desprendimiento de la capa límite por las características ya mencionadas de la formulación que emplean. Tras esta comparación se puede decir que el modelo *k- ω estándar* predice resultados más fieles a la realidad en esta zona, pero aun así simula esfuerzos de Reynolds demasiado altos que permiten la adherencia de la capa límite antes de tiempo.

Como parámetro adimensional que cuantifica la presión en la base, se toma:

$$C_{p(s)} = \frac{p(s) - p_{ref}}{p(0) - p_{ref}}$$

Donde p_{ref} es la presión de referencia que se toma en la entrada y $p(0)$ la presión en el punto de remanso. Tras sus experimentos, se calcula que este parámetro está en torno a -0.6, mientras que en el estudio presente está en torno a -0.4. Esto quiere decir que la presión en la base del objeto obtenida mediante las simulaciones es mayor que experimentalmente.

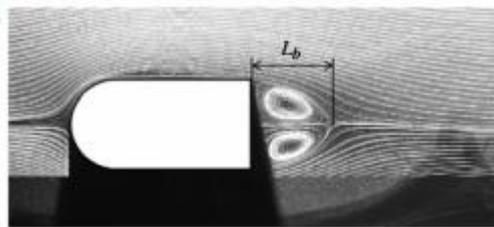


Figura 9.1.2. Burbuja de recirculación visualizada por las líneas de corriente de la velocidad media mediante PIV (*Particle Image Velocimetry*).

Una vez que el flujo se separa de forma definitiva, aparece una burbuja de recirculación, comprendida entre dos capas de cizalladura desprendidas de la superficie del objeto y una zona de formación de vórtices. La dinámica de la estela está dominada por un comportamiento global formando la *calle de vórtices de von-Kármán*. Las capas de cizalladura se enrollan entre sí, creando vórtices a una longitud característica del punto de desprendimiento, que posteriormente se disipan a una determinada frecuencia. Las dimensiones de la burbuja de recirculación se dan mediante el parámetro adimensional del cociente entre la longitud de la misma y D : $L_b/D = 0.82 \pm 0.04$. En las simulaciones realizadas en estado estacionario este parámetro está entorno a la unidad. Es decir, los modelos de turbulencia en este tipo de simulación predicen burbujas de recirculación de mayor tamaño que en el caso experimental. El modelo *k- ω estándar*, por el contrario, predice una burbuja de recirculación de menor tamaño, en torno a la mitad, dando unos valores de: $L_b/D = 0.5$. En la simulación que se realiza en estado no estacionario, este parámetro adimensional tiene un valor de 0.6. Por tanto, con los resultados experimentales se puede decir que, el modelo de turbulencia *k- ω estándar* y la simulación en estado no estacionario minimizan el tamaño de la burbuja de recirculación, mientras que el resto de modelos en simulaciones en estado estacionario la sobredimensionan.

También se proporcionan valores del espesor de la capa límite. Sin embargo, al ser el cuerpo tan corto, este espesor se ve afectado por la estela, la dinámica de los torbellinos en ella y el

campo de presión. Como la longitud del cuerpo del estudio presente no es la misma, las comparaciones entre el espesor de la capa límite tienen poca validez.

A pesar de las discrepancias en los parámetros mencionados, la estructura general del flujo en las simulaciones coincide con los resultados experimentales. El modelo $k-\omega$ estándar proporciona buenos resultados en la zona de la capa límite, aunque los errores al predecir los esfuerzos turbulentos en zonas de gradientes de presión elevados siguen siendo altos. Por otro lado, los modelos $k-\varepsilon$ estándar y sus modificaciones y el modelo SST dan buenos resultados en la estela, aunque magnifican las dimensiones de la burbuja de recirculación cuando se hace un análisis estacionario del flujo. En cambio, cuando se cambia a un estado no estacionario, el tamaño de ésta se minimiza. El único modelo que proporciona buenos resultados en la estela y predice separación de flujo, aunque con una adherencia temprana de la misma, es el modelo SST. Por ello, ha sido el modelo utilizado para las comparaciones con flujos a distintos números de Reynolds y para la simulación en estado no estacionario.

9.2. COMPARACIONES DE MENTER ENTRE LOS MODELOS DE TURBULENCIA $k-\omega$ y $k-\varepsilon$ estándar y $k-\omega$ SST

Menter, en su estudio (12), compara los modelos de turbulencia $k-\omega$ y $k-\varepsilon$ con el modelo SST en una serie de dominios: por un lado, en la capa límite, capas de cizalladura y zona con un gradiente de presión adverso en una placa plana y por otro, en un ala con un ángulo de ataque que proporciona casi la máxima sustentación. En sus investigaciones, aplica tanto el método BSL, como el SST, en flujos ya investigados, documentados y de gran importancia en el ámbito de la aeronáutica. Los resultados de sus simulaciones se compararon con aquellas de los modelos $k-\omega$ y $k-\varepsilon$, además de con datos experimentales. Aunque la geometría de su problema no coincide con la presente, existe una clara analogía entre los resultados.

Mediante la simulación de la capa límite en una placa plana, demuestra la dependencia que tiene el modelo $k-\omega$ con los valores de la corriente libre. El valor correcto de ω , según este mismo autor (14), viene dado por la ecuación 7.3.1.1. *Menter* comprueba, que al variar este valor de ω , se generan cambios de un 100% en la viscosidad turbulenta. En concreto, valores bajos de ω derivan en una viscosidad turbulenta elevada. Estos resultados son claramente inaceptables y pueden llevar a un completo deterioro de los resultados. A su vez, comprueba que el modelo SST es independiente de los valores de ω . Esto justifica que en el estudio actual existan discrepancias en las simulaciones de ambas burbujas de recirculación (en la superficie del cuerpo y en la base) con el modelo $k-\omega$ estándar, frente a las simulaciones con otros modelos de turbulencia.

En las simulaciones de las capas de cizalladura, se demuestra que el modelo SST da resultados prácticamente idénticos a los obtenidos con el modelo $k-\varepsilon$ y que coinciden en gran medida con los datos experimentales. Aunque en el modelo SST se modifica la formulación del modelo $k-\varepsilon$ para adaptarla a la de $k-\omega$, apareciendo así un término de difusión con derivadas cruzadas, se

comprueba que éste es despreciable. En el estudio presente, queda patente la analogía entre los comportamientos de estos dos modelos en zonas de flujo libre.

En cuanto al comportamiento del modelo $k-\omega$ en las simulaciones de capas de cizalladura, ocurre algo similar a lo comentado en la simulación de la capa límite pero en mayor medida, debido a la ausencia de una pared. Los resultados de *Menter* indican una viscosidad turbulenta cinco veces mayor a la obtenida con los otros dos modelos. En el caso de estudio actual, ocurre lo contrario, la viscosidad turbulenta que predice el modelo $k-\omega$ es menor. Las predicciones no son análogas debido a la poca veracidad de los resultados de este modelo por su sensibilidad a los valores de la corriente libre.

En los estudios que realiza *Menter* en presencia de gradientes de presión adversos, el modelo $k-\varepsilon$ predice demasiados esfuerzos de cizalladura haciendo que el perfil de la velocidades se mantenga firmemente adherido a la superficie del cuerpo. Este efecto se observa en las tres simulaciones con los diferentes modelos de $k-\varepsilon$ que se han mostrado a lo largo del estudio. *Menter* observa que el modelo SST predice con mayor precisión el punto de desprendimiento que el $k-\omega$, mientras que en las simulaciones de este estudio ambos predicen localizaciones del punto de desprendimiento muy similares por el cambio de geometría curva a plana que tiene el objeto.

Por último, en la simulación de los tres modelos de turbulencia $k-\varepsilon$, $k-\omega$ y SST en un ala con un cierto borde de ataque, se vuelve a demostrar la poca eficiencia del modelo $k-\omega$ y el peligro que tiene su uso para aplicaciones aerodinámicas. Por otro lado, los modelos $k-\varepsilon$ y SST proporcionan viscosidades turbulentas altas, impidiendo la separación del flujo. Esta discrepancia frente a los datos experimentales se justifica mediante el fallo que producen los modelos de viscosidad turbulenta en presencia de ratios de deformación elevados (problema mencionado en los apartados 6.3.2. y 6.3.3.).

9.3. RESULTADOS EXPERIMENTALES DE BURBUJAS DE RECIRCULACIÓN A DISTINTOS NÚMEROS DE REYNOLDS

O' Meara y Mueller (1987)²⁹ estudiaron experimentalmente cómo afectan las variaciones de la turbulencia en la corriente libre en las características de la burbuja de recirculación en una superficie aerodinámica que experimenta sustentación (*airfoil NACA 66-018*). Sus conclusiones fueron que a medida que se aumentaban las perturbaciones del flujo, la longitud y el espesor de la burbuja disminuían. Una manera de aumentar las perturbaciones puede ser mediante el incremento del número de Reynolds. Por tanto, estas conclusiones son consistentes con las obtenidas en el estudio presente.

Por otro lado, justifican la ausencia de separación flujo y, consecuentemente, la de la recirculación del mismo al aumentar la cantidad de turbulencia en la corriente libre, a un cambio de estructura del flujo. En el estudio actual, parece que el motivo es el mismo. Al

²⁹ La información para la validación se ha obtenido del libro *Aerodynamics of Low Reynolds Number Flyers* (36).

aumentar el Reynolds a 10^5 , la capa límite sufre una transición temprana de flujo laminar a turbulento. Cuando el flujo llega al punto, donde en los casos con Reynolds menores se experimenta la separación, éste posee la estructura característica de un flujo totalmente turbulento y por ello resiste el cambio de geometría sin desprenderse de la superficie.

Una vez comparados las simulaciones del estudio presente con los resultados experimentales y con otras simulaciones y comprobando la analogía que existe entre ellos, los resultados obtenidos quedan validados.

Capítulo 10. CONCLUSIONES

Este trabajo de fin de grado está destinado a la comparación de los modelos de turbulencia de Spalart-Allmaras, $k-\omega$ estándar y SST y $k-\epsilon$ estándar, *Realizable* y RNG. El flujo escogido para este estudio es agua a Reynolds altos, ante la presencia de un sólido de base roma. La turbulencia que genera esta situación se analiza mediante la simulación numérica bi-dimensional en estado estacionario.

La primera parte de los resultados, es la comparación de los distintos modelos de turbulencia. Mediante una detallada descripción de las características, se consiguen resultados muy similares a los deducidos por simulaciones y experimentos realizados por otros autores. Por medio del método RANS en estado estacionario, se obtienen resultados promediados que no dependen del tiempo. Al modelar la mayor parte de los vórtices que se generan, se pierde gran parte de la información, principalmente de los vórtices de menor tamaño. Esto hace imposible una comparación meticulosa en la capa límite y en la cascada de energía que se genera en la estela. Aun así, estos resultados demuestran tener coherencia si se analiza el tipo de formulación que emplea cada modelo de turbulencia. En base a lo que muestran las simulaciones, queda demostrado que para un flujo de las siguientes características, el modelo SST es el que mejores resultados proporciona, revelando un comportamiento realista, tanto en zonas de Reynolds alto, como en bajo.

La segunda parte, se dedica a contrastar las simulaciones a distintos números de Reynolds. Las variaciones no son significativas, ya que el Reynolds se mantiene en un rango donde no se generan otros efectos físicos, asegurando así que la malla es válida para todos los casos de estudio. El efecto más significativo que produce cambiar el Reynolds, es el retraso, adelanto, o incluso desaparición, de los puntos de separación y adherencia. El resumen de las simulaciones, es que números de Reynolds menores producen un retraso en el punto de adherencia, creando burbujas de recirculación de mayor tamaño. Al aumentar el Reynolds,

ésta disminuye e incluso desaparece, dando perfiles en la capa límite perfectamente adheridos a la superficie.

Como fase final de los resultados, se proporciona una simulación en estado no estacionario. Tras su análisis, se concluye que los resultados que aporta este tipo de simulación son muy similares, con la desventaja de que se aumenta en gran medida el coste desde el punto de vista computacional.

Finalmente, aludiendo a lo que se comenta en los objetivos del trabajo, se ha conseguido el aprendizaje de un software de CFD, como es ANSYS®. Asimismo, se han adquirido una gran cantidad de conceptos del ámbito de la mecánica de fluidos. Por ello, se puede concluir que el propósito del trabajo está satisfecho.

Llegados a este punto, una vez que se ha realizado un análisis del modelaje de un flujo turbulento, se considera que la simulación directa de los torbellinos de mayor tamaño (método LES) permitiría conseguir un conocimiento más profundo del fenómeno de la turbulencia. Una simulación con el método LES, posibilitaría extraer mucha más información de cada modelo de turbulencia, pudiendo visualizar de forma más clara sus virtudes y defectos para proponer mejoras en ellos.

Apéndice

AVANCES RECIENTES EN TURBULENCIA: TEORÍA ESTADÍSTICA DE LA TURBULENCIA

Como se menciona en la introducción, desde mediados del siglo XX existen dos ramas en el estudio de la turbulencia: desde el punto de vista determinista y estadístico. Tomando esta sección como un apéndice aparte del proyecto, se ha querido incluir los últimos avances en el ámbito de turbulencia (15), que sigue siendo el punto de mira de muchos investigadores por ser uno de los grandes problemas a los que se enfrenta la tecnología hoy en día. Estos avances pertenecen a la manera estocástica de analizar la turbulencia.

Esta forma de analizar la turbulencia fue intuida ya en los años 40 con *Kolmogórov*, quien anunció que era más coherente considerar la velocidad en un flujo turbulento como un proceso estocástico que como uno determinista. Es decir, según él, la turbulencia se asemejaba a un proceso con sucesivas variables aleatorias que evolucionan en función del tiempo.

Recientemente, se ha progresado en el ámbito matemático que envuelve a la turbulencia, que posiblemente conlleve un impacto en la tecnología, permitiendo una mejora en aplicaciones como el diseño de aviones o coches. Estos avances apuntan a que se debe tener en consideración la influencia del ruido del ambiente en el análisis de un flujo turbulento, cosa que no se había hecho hasta el momento. Estos avances han sido realizados por el profesor de matemáticas y director del *Centro para la ciencia no lineal (Center for Non-Linear Science)*, Björn Birnir (2011).

Lo que indica esta nueva teoría, es que el ruido que existe en el ambiente se magnifica con el incremento de las inestabilidades. Mientras que en un flujo laminar este ruido se podrá despreciar, en un flujo turbulento sí que se deberá tener en cuenta. Por tanto, se incluye un nuevo término en las ecuaciones de Navier-Stokes de escalas pequeñas del fluido, para así introducir la presencia del ruido y cerrar el problema de flujo turbulento con el método RANS. De esta manera, aparece la teoría estadística de la turbulencia que propone que la solución turbulenta obedece a una ecuación estocástica en derivadas parciales (SPDE).

El ruido no tiene ninguna característica que lo relacione con las inestabilidades, en otras palabras, no tiene memoria. Sin embargo, se puede considerar que es genético y que tiene unas condiciones de contorno periódicas. Por esta razón, el ruido se puede expresar mediante una serie de Fourier. Björn Birnir propone descomponer este término en dos, el término aditivo y el multiplicativo. El término aditivo, a su vez, queda dividido en dos partes.

Para conseguir llegar al término aditivo del ruido, hay que considerar que la disipación es un proceso estocástico. Partiendo de esto, la disipación se divide en varias cajas y aplicando el teorema del límite central se puede decir que cuando el número de cajas tiende a infinito, la disipación se asemeja a una distribución normal. De esta manera, se llega al primer término aditivo. Para tener en cuenta la desviación de la media de la disipación, se aplica **the large deviation process** con la simplificación de *Crámer*. Así, se obtiene una función que contabiliza las fluctuaciones con respecto a la media, que es el segundo término. Estos dos términos forman el término aditivo del ruido, que interpreta los sucesos continuos.

El término multiplicativo, modela los grandes gradientes de velocidad que existen en zonas con mucha turbulencia (intermitencias). Este término se desarrolla a través del proceso de Poisson y describe los procesos discretos.

Una vez descrita la estructura del ruido, las ecuaciones estocásticas de Navier-Stokes se resuelven utilizando la fórmula de *Feynmann-Kac* y el teorema de *Girsanov*.

Uno de los principales logros de esta teoría es el haber conseguido por primera vez unas funciones de la estructura de la turbulencia cuyos resultados coincidan con los obtenidos mediante DNS y con experimentos reales. Estas funciones de la estructura vienen dadas por el dimensionamiento de *Kolmogórov-Obukhov* (1941) y las correcciones de She-Leveque. También, permite calcular la viscosidad turbulenta. Por último, aplicando la ecuación de *Kolmogórov-Hopf* en la ecuación estocástica de Navier-Stokes, se obtiene por primera vez una fórmula explícita de las funciones de densidad de probabilidad (PDF). La función de densidad de probabilidad de la turbulencia es el producto de una distribución de probabilidad discreta (debido a las intermitencias) y otra continua.

Esta teoría se ha desarrollado para turbulencia homogénea y se puede expandir para turbulencia en las proximidades de la una pared, en ello se está trabajando en este momento. Para el tipo de turbulencia lagrangiana, al llevar consigo partículas con sus propias velocidades, habría que estudiar de forma cuidadosa de qué manera viajan las partículas. Por esta razón sigue siendo un problema abierto. Este mismo procedimiento puede ser utilizado para el método de LES.

El reciente desarrollo matemático hace que se vea la meta de conseguir la solución del problema del milenio de la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes cada vez más cerca. Si mediante estas técnicas se puede resolver el problema del milenio, también se podrá encontrar la solución única de las ecuaciones estocásticas de Navier-Stokes y con ello recopilar más información sobre la solución del problema de turbulencia.

REFERENCIAS

1. **Shadaram, Adollah, Azimi Fard, Mahdi y Rostamy, Noorallah.** *Experimental Study of NearWake Flow Behind a Rectangular Cylinder.* [En línea] 2008. [Citado el: 01 de 06 de 2015.] <http://docsdrive.com/pdfs/sciencepublications/ajassp/2008/917-926.pdf>.
2. **SAha, AK, Muralidhar, k. y Biswas, G.** *Experimental study of flow past a square cylinder at high Reynolds number.* [En línea] 2000. [Citado el: 29 de 05 de 2015.] <http://link.springer.com/article/10.1007/s003480000123#page-1>.
3. *Numerical investigation of the flow around a rectangular cylinder near a solid wall.* **Malavasi, Stefano y Trabucchi, Nicola.** Milán, Italia: BBAA VI International Coloquium, 2008.
4. **M. Alonso, y otros, y otros.** *Intermitencia Temporal Laminar-Turbulenta en Sistema Híbridos Electroópticos Realimentados.* La Plata, 1990.
5. **Porta, Paulo.** *Ingeniería Civil.* [En línea] 31 de 05 de 2010. [Citado el: 20 de 05 de 2015.] <http://www.civil.frba.utn.edu.ar/Materias/modeloshidraulicos/turbulencia.pdf>.
6. **White, F.M.** *Viscous Fluid Flow.* McGraw-Hill, 1974.
7. **A.Hoffman, Klaus y T. Chiang, Steve.** *Computational Fluid Dynamics Volumen III.4ª ed.* Texas: Jeanie Duvall dba SciTech Computer Typesetting of Austin, 2000. ISBN: 0-9623731-6-8.
8. *The Challenging case of the turbulent flow around a thin plate wind deflecto, and its numerical prediction by LES and RANS models.* **Sampaio, Luis Eduardo B., Rezende, André Luis T. y Nieckele, Angela O.** Brasil: J. Wing Eng. Ind. Aerodyn. 133, 09 de 08 de 2014.

9. **Zanoun, E. S. y Durst, F.** Evaluating the law of the wall in two-dimensional fully developed turbulent channel flows. [En línea] 10 de 2003. [Citado el: 03 de 06 de 2015.] http://www.researchgate.net/profile/E_S_Zanoun/publication/228819002_Evaluating_the_la_w_of_the_wall_in_two-dimensional_fully_developed_turbulent_channel_flows/links/0046351657c0101333000000.pdf.
10. **Vázquez, Juan Luis.** Las Ecuaciones de Navier-Stokes. Un reto físico-matemático para el siglo XXI. [En línea] Departamento de matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid., 2004. [Citado el: 25 de 04 de 2015.] http://www.researchgate.net/profile/Juan_Luis_Vazquez/publication/28202179_La_ecuacin_d_e_Navier-Stokes._Un_reto_fisico-matemtico_para_el_siglo_XXI/links/00b4951a4ff2ca74ee000000.pdf.
11. **H.Ferziger, Peric y Milovan, Joel.** Computational Method for fluid dynamic. 3ª rev.ed. Berlín; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milán; París; Tokyo: Springer, 2002. ISBN 3-540-42074-6.
12. Improved Two Equation $k-\omega$ Turbulence Models for Aerodynamic Flows. **Menter, Florian R.** CA 94035-1000, Moffett Field, California: Armes Research Center, 1992.
13. Experimental sensitivity analysis of the global properties of a two-dimensional turbulent wake. **Parezanovic, Vladimir y Cadot, Olivier.** Pailaseau, Francia : Cabridge University Press, 2012, Vol. 693.
14. Influence of Freestream Values of k - ω Turbulence Model Predictions. **Menter, F.R.** No.6, 1992, Vol. Vol.30.
15. **Birnir, Björn.** Björn Birnir. [En línea] 11 de 2011. [Citado el: 01 de 06 de 2015.] http://birnir.math.ucsb.edu/files/bjorn/research-documents/Courant_11_2011.pdf.
16. **Muñoz, Miguel Ángel.** [En línea] [Citado el: 15 de 05 de 2015.] <http://www.manualvuelo.com/PBV/PBV18.html>.
17. **Peralta-Fabi, Ramón.** [En línea] [Citado el: 20 de 05 de 2015.] http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/115/html/sec_8.htm.
18. **John D. Anderson, Jr.** [En línea] [Citado el: 13 de 05 de 2015.] <http://go.galegroup.com/ps/i.do?id=GALE%7CCX3407300013&v=2.1&u=jeff53810&it=r&p=GPS&sw=w&asid=4348212c2624bd6eff423cefd58627d>.
19. **Tag, Randall.** [En línea] [Citado el: 16 de 05 de 2015.] http://clasfaculty.ucdenver.edu/rtagg/CLARlstyle/CLARlstyle_02.html.
20. Biografías y Vida. Biografías y Vida. [En línea] [Citado el: 30 de 05 de 2015.] <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/k/karman.htm>.
21. Advanced Research Computing. [En línea] VirginiaTech. [Citado el: 05 de 05 de 2015.] http://www.arc.vt.edu/ansys_help/fl_u_th/fl_u_th_sec_turb_near_wall_overview.html.

22. Institut of Fluid Mechanics and Heat Transfer. [En línea] [Citado el: 21 de 04 de 2013.] http://portal.tugraz.at/portal/page/portal/TU_Graz/Einrichtungen/Institute/Homepages/i3210/Forschung/Forschungsschwerpunkte%20Arbeitsgruppen/Turbulent%20Combustion.
23. Advanced Research Computing. [En línea] VirginiaTech. [Citado el: 17 de 05 de 2015.] http://www.arc.vt.edu/ansys_help/flu_ug/flu_ug_sec_turb_srs.html.
24. The Astrophysical Journal. [En línea] [Citado el: 10 de 05 de 2015.] <http://iopscience.iop.org/0004-637X/482/1/230/fulltext/>.
25. Trabajos y proyectos de fin de estudio de la E.T.S.I. [En línea] e-REdING. <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/11246/fichero/PFC%252FCap2.pdf>.
26. Effective Inflow Conditions for Tubulence Models in Aerodynamic Calculations. **R. Spalart, Philippe y L. Rumsey, Christopher**. Seattle, USA: Boeing Commercial Airplains & Hampton, USA: NASA Langley Research.
27. Thermal-Fluids Central. [En línea] Global Digital Central, 23 de 07 de 2010. [Citado el: 02 de 06 de 2015.] https://www.thermalfluidscentral.org/encyclopedia/index.php/Van_Driest_Model.
28. **Beatove, Sabtiago Laín y Grillo Lopez, Cristian A.** Dispersión de partículas sólidas en flujos bifásicos turbulentos de interés industrial. [En línea] 2005. [Citado el: 01 de 06 de 2015.] http://ciruelo.uninorte.edu.co/pdf/ingenieria_desarrollo/17/5_Dispersion%20de%20particulas.pdf.
29. Wikipedia. The Free Encyclopedia. [En línea] 06 de 05 de 2015. [Citado el: 01 de 06 de 2015.] http://en.wikipedia.org/wiki/Joseph_Valentin_Boussinesq.
30. [aut. libro] Klaus A. Hoffman y Steve T. Chiang. Computational Fluid Dynamics Volume I. Texas: Jeanie Duvall dba SciTech Computer Typesetting of Austin, 2000.
31. **Beatove, Santiago Laín.** Lectura-Boundary Layer. Procesos térmicos y de fluidos. [En línea] [Citado el: 05 de 06 de 2015.] http://augusta.uao.edu.co/moodle/file.php/3265/Turbulence_4_SL.pdf
32. Nature of laminar separation bubble on a turbine blade. Wikipedia. [En línea] [Citado el: 09 de 06 de 2015.] http://en.wikipedia.org/wiki/File:Nature_of_laminar_separation_bubble_on_a_turbine_blade.gif.
33. **Sámara Tirado, Diego Alfonso y Sen, Mihir** . Mecánica de Fluidos. [En línea] 15 de 07 de 2009. [Citado el: 11 de 06 de 2015.] <http://www3.nd.edu/~msen/MecFl.pdf>.
34. **Jahanmir, Mohsen.** Laminar Separation Bubble: Its Structure, Dynamics and Control. [En línea] 06 de 2011. <http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/138928.pdf>.
35. Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Tubulence Model. **Allmaras, Steven R., Johnson, Forrester T. y Spalart, Philippe R.** Big Island, Hawaii: Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics, 9 de 07 de 2012.

36. **Shyy, Wei, y otros, y otros.** *Aerodynamics of Low Reynolds Number Flyers.* New York, USA: Cambridge University Press, 2008. 978-0-521-88278-1.

37. *On the Partial Difference Equations of the Mathematical Physics.* **Courant, Richard, Friedrichs, Kurt y Lewy, Hans.** 32-74, Nueva York : *Mathematische Annalen*, 1928, Vol. 100.