

Bruno de Sousa Alves

**PROJETO E MODELAGEM DE TRANSFORMADORES  
UTILIZANDO A TÉCNICA DE SUBPROBLEMAS APLICADA  
AO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação submetida ao Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
da Universidade Federal de Santa  
Catarina para obtenção do Grau de  
Mestre em Engenharia Elétrica.  
Orientador: Prof. Dr. Patrick Kuo-Peng.  
Coorientador: Prof. Dr. Patrick Dular.

Florianópolis  
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Alves, Bruno

Projeto e modelagem de transformadores utilizando a técnica de subproblemas aplicada ao método de elementos finitos / Bruno Alves ; orientador, Patrick Kuo-Peng ; coorientador, Patrick Dular. - Florianópolis, SC, 2016.  
98 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.

Inclui referências

1. Engenharia Elétrica. 2. Projeto de Transformadores. 3. Subproblemas. 4. Método de Elementos Finitos. I. Kuo Peng, Patrick. II. Dular, Patrick. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV. Título.

Bruno de Sousa Alves

**PROJETO E MODELAGEM DE TRANSFORMADORES  
UTILIZANDO A TÉCNICA DE SUBPROBLEMAS APLICADA  
AO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração *Eletromagnetismo e dispositivos Eletromagnéticos*, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis, 14 de outubro de 2016

---

Prof. Dr. Marcelo Lobo Heldwein  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Patrick Kuo-Peng - UFSC  
Orientador

---

Prof. Dr. Patrick Dular - ULG  
Coorientador

---

Prof. Dr. Orlando Antunes - IFSC

---

Prof. Dr. Mauricio Valencia Ferreira da Luz - UFSC

---

Prof. Dr. Laurent Didier Bernard - UFSC



Este trabalho é dedicado aos meus pais, Sandra e Jucelito, e ao meu irmão, Pedro, pelo apoio e incentivo em todos os momentos.



## AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos às pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização desta dissertação.

Primeiramente aos meus pais, Sandra de Sousa Alves e Jucelito Alves, por toda dedicação, apoio e amizade que sempre tiveram, muito obrigado por me proporcionar a melhor coisa que um pai pode dar ao seu filho: educação.

Ao meu irmão, Pedro de Sousa Alves, pela cumplicidade, amizade e compreensão, muito obrigado. Agradeço à toda minha família, tios, tias, primos e avós, pelo suporte e exemplo de vida.

A Guilherme Martignago Zilli, obrigado pelo sua paciência, companheirismo e apoio durante este período.

Ao professor Patrick Kuo Peng, obrigado pela sua orientação, correções, discussões a respeito deste trabalho e principalmente por acreditar no meu potencial.

Ao professor Patrick Dular agradeço enormemente pelas incansáveis discussões, pela paciência e seriedade em suas explicações e pela disposição para conferências *on-line*.

Ao professor Mauricio Valencia Ferreira da Luz pelo auxílio no entendimento deste projeto, ensinamentos e amizade.

Aos meus colegas e amigos da universidade agradeço pela amizade e apoio ao longo deste período. Em especial à Thayla Tavares de Souza Zomer pela amizade incondicional.

Aos colegas e professores do Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos (GRUCAD) agradeço pelo auxílio e compreensão neste período.

Agradeço ainda aos demais professores, alunos e funcionários do programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica (PGEEL) por todo o auxílio e conhecimento compartilhado.

A banca examinadora, por sua disponibilidade e sugestões.

A UFSC, a CAPES, ao CNPq e a FAPESC pelo provimento de bolsas e recursos em programas de graduação e pós-graduação.

Por último, mas não menos importante, aos amigos.





## RESUMO

Os transformadores apresentam um grande espectro de aplicações, especialmente em sistemas de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica. Neste sentido, pesquisas relacionadas ao projeto e à modelagem de dispositivos eletromagnéticos tais como transformadores são recorrentes na literatura e de grande interesse acadêmico e industrial. A modelagem destes dispositivos faz-se necessária na etapa de pré-dimensionamento e, em geral, é realizada via Método de Elementos Finitos (MEF). Recentemente, a Técnica de Subproblemas aplicada ao MEF (SP-MEF) tem se demonstrado eficiente para casos onde análises repetitivas precisam ser realizadas e a precisão da solução melhorada. Assim, neste trabalho, a Técnica SP-MEF é aplicada na etapa de modelagem de transformadores com base em um modelo analítico dimensional pré-estabelecido. Um exemplo de transformador monofásico e um exemplo de transformador trifásico são considerados a fim de validar os resultados dimensionais encontrados e a aplicação da Técnica SP-MEF. Esta modelagem inicia por uma aproximação 1D e incrementa-se o problema de modelagem através de correções realizadas para o incremento de dimensão (1D-2D) e para variações nas características físicas dos materiais constituintes. Os resultados da modelagem final dos transformadores via SP-MEF são confrontados com os resultados da modelagem convencional via MEF e as grandezas globais são comparadas com dados de ensaio sobre um transformador trifásico real. Aplica-se ainda a técnica SP-MEF para a inclusão do tanque do transformador e de uma blindagem eletromagnética (*shunt*) no domínio de cálculo. Os resultados são apresentados e demonstram a eficiência da técnica SP-MEF em termos de tempo computacional e precisão de soluções.

**Palavras-chave:** Projeto de Transformadores, Subproblemas, Método de Elementos Finitos.



## ABSTRACT

Transformers have a wide range of applications, especially in the generation, transmission and distribution of electric power systems. In this sense, research related to design and modeling of electromagnetic devices such as transformers are recurrent in the literature and have a great academic and industrial interest. The modeling of such devices is necessary in the pre-design stage and is usually performed via Finite Element Method (FEM). Recently the Subproblems Technique applied to the FEM (SP-FEM) have demonstrated to be efficient for cases where repetitive analyzes need to be performed and the solution improved. Therefore, in this work, the SP-FEM Technique is used for the modeling stage of power transformers based on a predetermined dimensional analytical model. A single-phase transformer and a three-phase transformer models are considered in order to validate the dimensional results and the application of SP-FEM Technique. This modeling begins with a 1D approach and boost the modeling problem by corrections made to increase the dimension (1D-2D), and for variations in the physical characteristics of the materials. The results of the final modeling of transformers via SP-FEM are confronted with the results of conventional modeling via MEF and global quantities are compared with test data on a real three-phase transformer. The SP-FEM Technique is applied for inclusion of the transformer tank and an electromagnetic *shunt* in order to reduce Joule losses in the tank. All results are reported and the efficiency of the SP-FEM technique is demonstrated by comparing these results with simulations made by the conventional FEM in terms of computational time and precision of solutions.

**Keywords:** Transformers Design, Subproblems Technique, Finite Element Method.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Circuito monofásico equivalente do transformador.....	29
Figura 2: Circuito equivalente do transformador com grandezas do secundário referidas ao primário. ....	30
Figura 3: Conexões em sistemas trifásicos.....	31
Figura 4: Transformador monofásico de dois enrolamentos não concêntricos.....	34
Figura 5: Exemplo de lâminas padronizadas em formato EI para transformador monofásico.....	36
Figura 6: Exemplo de lâminas padronizadas em formato EE para transformador trifásico. ....	37
Figura 7: Seção transversal da perna do núcleo. ....	38
Figura 8: Configuração das bobinas na janela do transformador - Distâncias de isolamento. ....	39
Figura 9: Geometria da janela e parâmetros para cálculo da reatância de dispersão.....	41
Figura 10: Curva característica de perdas no material ferromagnético de grão orientado.....	45
Figura 11: Curva $B_p$ (H) para o material ferromagnético de grão orientado.....	45
Figura 12: Curva característica da permeabilidade relativa do material ferromagnético de grão orientado.....	46
Figura 13: Geometria do transformador monofásico obtida a partir do modelo analítico. ....	49
Figura 14: Geometria do transformador trifásico obtida a partir do modelo analítico. ....	49
Figura 15: Malha de elementos finitos sobre as regiões físicas no domínio de cálculo estabelecido para o transformador monofásico. ....	50
Figura 16: Malha de elementos finitos sobre as regiões físicas no domínio de cálculo estabelecido para o transformador trifásico. ....	51
Figura 17: Resultado da distribuição do fluxo magnético do transformador monofásico obtido pelo MEF. ....	51
Figura 18: Resultado da distribuição do fluxo magnético do transformador trifásico obtido pelo MEF. ....	52
Figura 19: Domínio de cálculo para formulação de problema magnetodinâmico. ....	56
Figura 20: Representação de um tubo de fluxo ideal. ....	68
Figura 21: Elementos finitos tetraédricos para 3D, triangulares para 2D e lineares para 1D.....	69

Figura 22: Distribuição do fluxo magnético para tubo de fluxo ideal em 1D.....	70
Figura 23: Projeção da distribuição do fluxo magnético do tubo de fluxo ideal em 1D para 2D. ....	71
Figura 24: Projeção da solução 1D e passagem 2D. ....	72
Figura 25: Projeção da distribuição do fluxo magnético 1D para uma camada de elementos na interface.....	72
Figura 26: Distribuição de fluxo magnético para a correção de passagem 1D para 2D em um tubo de fluxo ideal. ....	74
Figura 27: Distribuição de fluxo magnético para um tubo de fluxo ideal em 2D.....	74
Figura 28: Projeção da solução 2D em tubo de fluxo ideal e passagem 2D real. ....	75
Figura 29: Projeção da distribuição de fluxo magnético para o tubo de fluxo ideal em 2D.....	76
Figura 30: Correção da distribuição de fluxo magnético para efeito de dispersão a partir de tubo de fluxo ideal. ....	76
Figura 31: Distribuição de fluxo magnético para um tubo de fluxo real em 2D.....	77
Figura 32: Indução B em tesla (T) ao longo do eixo x para tubo de fluxo ideal, correção e tubo de fluxo real. ....	77
Figura 33: Representação da soma da distribuição de fluxo magnético de subproblemas. ....	78
Figura 34: Distribuição de fluxo magnético para bobinas sozinhas.....	79
Figura 35: Projeção da distribuição de fluxo magnético para bobinas sozinhas como fonte de volume para subproblema secundário. ....	80
Figura 36: Distribuição do fluxo magnético do problema secundário para variação da permeabilidade do núcleo. ....	81
Figura 37: Distribuição do fluxo magnético final para o problema de variação da permeabilidade na região do núcleo com fonte de volume.....	82
Figura 38: Projeção da distribuição de fluxo magnético para fonte de superfície e alteração da permeabilidade no núcleo.....	82
Figura 39: Distribuição do fluxo magnético para tubo de fluxo ideal em 2D do transformador trifásico .....	83
Figura 40: Projeção da distribuição do fluxo magnético em 2D para um IFT. ....	84
Figura 41: Correção da distribuição de fluxo magnético para efeitos de dispersão no transformador trifásico.....	84
Figura 42: Distribuição do fluxo magnético para o transformador trifásico considerando efeitos de dispersão.....	85

Figura 43: Distribuição do fluxo magnético para o modelo do transformador trifásico com tanque.....	87
Figura 44: Distribuição do fluxo magnético para o transformador trifásico em 2D RFT completo. ....	88
Figura 45: Rotina de aplicação da técnica SP-MEF em transformadores. ....	89





## LISTA DE TABELAS

Tabela I: Resistividade e coeficiente de temperatura em 20 °C .....	33
Tabela II: Especificações de projeto para transformador monofásico...	46
Tabela III: Especificações de projeto para transformador trifásico.....	47
Tabela IV: Resultado dimensional transformador monofásico .....	47
Tabela V: Resultado dimensional transformador trifásico .....	47
Tabela VI: Resultados de grandezas globais para transformador monofásico. ....	52
Tabela VII: Resultados de grandezas globais para transformador trifásico. ....	53
Tabela VIII : Resultados de simulações do transformador trifásico .....	85
Tabela IX: Resultados para a Reatância de dispersão do transformador trifásico.....	86
Tabela X: Tempo de simulações realizadas sobre o transformador trifásico.....	88



## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Diâmetro da coluna central do transformador
$a$	Relação de transformação
$\mathbf{a}$	Potencial vetor magnético
$B$	Módulo do vetor indução magnética
$\mathbf{b}$	Vetor indução magnética
$B_p$	Valor de pico da indução magnética
$\mathbf{b}_{su}$	Densidade superficial de fluxo magnético
$D_1$	Distância de isolamento entre bobina BT e o núcleo
$D_2$	Distância de isolamento entre bobina BT e AT
$D_3$	Distância de isolamento entre bobina AT e núcleo
$D_{4BT}$	Distância de isolamento bobina BT e núcleo superior
$D_{4AT}$	Distância de isolamento bobina AT e núcleo superior
$d\rho$	Variação da resistência do enrolamento
$dT$	Variação da temperatura do enrolamento
$\mathbf{e}$	Vetor campo elétrico
$E_1$	Módulo da tensão sobre o enrolamento primário
$e_1$	Tensão sobre o enrolamento primário
$E_2$	Módulo da tensão sobre o enrolamento secundário
$e_2$	Tensão sobre o enrolamento secundário
$E_{rup}$	Campo elétrico para ruptura do dielétrico
$f$	Frequência em Hertz
$f_{oc}$	Fator de ocupação
$f_{mm}$	Força magnetomotriz
$\mathbf{f}_{su}$	Força magnetomotriz superficial
$h$	Altura média dos enrolamentos de alta e baixa tensão
$\mathbf{h}$	Vetor campo magnético
$H$	Módulo do campo magnético
$h_{BT}$	Altura da bobina de baixa tensão
$h_{AT}$	Altura da bobina de alta tensão
$h_w$	Altura efetiva da janela do núcleo do transformador
$I$	Módulo da corrente no enrolamento
$I_l$	Módulo da corrente de linha para sistema trifásico
$I_f$	Módulo da corrente de fase para sistema trifásico
$\mathbf{J}$	Densidade de corrente
$\mathbf{j}$	Vetor densidade de corrente
$J_{máx}$	Densidade máxima de corrente
$\mathbf{J}_{su}$	Densidade superficial de corrente
$k_w$	Fator de preenchimento
$L_{12}$	Indutância de dispersão do primário referida ao secundário

$M_f$	Perda por unidade de massa
$\mathbf{n}$	Vetor normal a superfície
$N$	Número de espiras no enrolamento
$N_1$	Número de espiras no primário
$N_2$	Número de espiras no secundário
$p$	Subproblema primário
$P_f$	Perdas no ferro
$P_{W/kgF}$	Perda por unidade de massa para o material do núcleo
$q$	Subproblema secundário
$\mathbf{R}$	Resíduo no Método de Resíduos Ponderados
$R_1$	Resistência do enrolamento primário
$R_2$	Resistência do enrolamento secundário
$R_c$	Resistência relativa às perdas no núcleo
$R_c$	Raio da coluna central do núcleo
$R_{m1}$	Raio médio da bobina BT
$R_{m2}$	Raio médio da bobina AT
$R_{mg}$	Raio médio entre as bobinas BT e AT
$s$	Fator de correção para o cálculo da reatância de dispersão
$S_{3\phi}$	Potência aparente trifásica
$S_c$	Área da seção transversal da coluna central do núcleo
$S_{cu}$	Seção transversal do enrolamento de cobre
$S_f$	Seção transversal do fio
$S_p$	Produto de áreas
$S_w$	Área da janela do núcleo
$T$	Temperatura do material do enrolamento
$T_{BT}$	Largura da bobina de baixa tensão
$T_{AT}$	Largura da bobina de alta tensão
$v$	Potencial escalar elétrico
$V_1$	Módulo da tensão de fase do primário
$V_2$	Módulo da tensão de fase do secundário
$V_l$	Módulo da tensão de linha para sistema trifásico
$V_f$	Módulo da tensão de fase para o sistema trifásico
$\mathbf{w}$	Vetor função peso no Método de Resíduos Ponderados
$X_{d1}$	Reatância de dispersão do enrolamento primário
$X_{d2}$	Reatância de dispersão do enrolamento secundário
$X_{l12}$	Reatância de dispersão do primário referida ao secundário
$X_{l22}$	Reatância de dispersão do secundário
$X_{l2}$	Reatância de dispersão referida ao secundário
$X_m$	Reatância magnetizante
$\alpha$	Coefficiente de temperatura do enrolamento
$\Gamma_h$	Fronteira do domínio com condição de $\mathbf{h}$

$\Gamma_e$	Fronteira do domínio com condição de $e$
$\Gamma_b$	Fronteira do domínio com condição de $b$
$\gamma$	Interface no interior do domínio $\Omega$
$\mu$	Permeabilidade do material
$\mu_0$	Permeabilidade do vácuo
$\mu_r$	Permeabilidade relativa do material
$\rho_{enr}$	Resistência do enrolamento
$\rho_{enf}$	Resistência final do enrolamento
$\sigma$	Condutividade do material
$\upsilon$	Relutividade magnética
$\phi_m$	Fluxo magnetizante
$\phi_{mp}$	Valor de pico do fluxo magnético
$\omega$	Frequência angular
$\Omega$	Domínio de cálculo total
$\Omega_s$	Domínio de cálculo de bobina
$\Omega_c$	Domínio de cálculo com material condutor



## LISTA DE ABREVIATURAS

1D	Uma dimensão
2D	Duas dimensões
3D	Três dimensões
AT	Alta tensão
AWG	<i>American Wire Gauge</i>
BT	Baixa tensão
FDM	<i>Finite difference method</i>
IFT	<i>Ideal flux tube</i>
MEF	Método de Elementos Finitos
RFT	<i>Real flux tube</i>
RMS	<i>Root mean square</i>
SP-MEF	Técnica de Subproblemas aplicada ao MEF
SS	<i>Surface source</i>
SST	<i>Single sheet test</i>
VS	<i>Volume source</i>





## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>25</b>
1.1. PROPOSTA DO TRABALHO .....	26
1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO .....	27
1.3. ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	27
<b>2. TRANSFORMADORES .....</b>	<b>29</b>
2.1. O PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO.....	29
2.2. TIPOS DE CONEXÃO .....	31
2.3. PROJETO ANALÍTICO DE TRANSFORMADORES.....	31
2.3.1. Dimensionamento de condutores .....	32
2.3.2. Dimensionamento do núcleo.....	33
2.3.3. Distâncias de Isolação .....	39
2.3.4. Indutância de dispersão .....	40
2.3.5. Perdas no ferro .....	44
2.3.6. Caracterização das chapas do núcleo .....	44
2.4. COMPARAÇÃO DO MODELO ANALÍTICO COM RESULTADOS OBTIDOS DO MEF.....	46
2.4.1. Resultados dimensionais do modelo analítico.....	47
2.4.1. Modelagem via Método de Elementos Finitos .....	49
2.5. CONCLUSÃO.....	53
<b>3. TÉCNICA DE SUBPROBLEMAS APLICADA AO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.....</b>	<b>55</b>
3.1. MODELAGEM DE TRANSFORMADORES E A FORMULAÇÃO MAGNETODINÂMICA.....	55
3.2. A TÉCNICA DE SUBPROBLEMAS .....	58
3.2.1. Formulação magnetodinâmica de subproblemas ....	59
3.2.2. Forma fraca para o problema magnetodinâmico em subproblemas.....	62
3.3. CONCLUSÃO.....	66

<b>4. MODELAGEM DE TRANSFORMADORES COM APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE SUBPROBLEMAS.....</b>	<b>67</b>
4.1. APLICAÇÕES DA TÉCNICA DE SUBPROBLEMAS .....	68
4.1.1. Modelagem em Tubo de Fluxo Ideal .....	68
4.1.2. Modelagem em dimensão reduzida .....	69
4.1.3. Variação de Dimensões 1D-2D.....	70
4.1.3.1. Projecção de Soluções.....	70
4.1.3.2. Correções para variação de 1D-2D.....	71
4.1.3.3. Efeitos de dispersão.....	75
4.1.4. Modificações de características físicas de regiões ...	78
4.2. MODELAGEM DE UM TRANSFORMADOR TRIFÁSICO VIA SUBPROBLEMAS.....	83
4.2.1. Simulações com transformador trifásico .....	85
4.2.2. Indutância de dispersão.....	86
4.2.3. Inclusão do tanque e do shunt magnético .....	87
4.3. TEMPO COMPUTACIONAL E ROTINA DE SUBPROBLEMAS.....	88
4.4. CONCLUSÃO .....	90
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>91</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>93</b>

## INTRODUÇÃO

Os transformadores são máquinas elétricas estáticas, de alto rendimento e presentes em todo sistema elétrico onde seja necessária a conversão em diferentes níveis de tensão e corrente, tais como a conexão entre sistemas de geração, transmissão e distribuição de energia elétrica [1]. Devido a razões práticas de custo e eficiência, os geradores de grandes usinas produzem um nível de tensão de saída na ordem de 10 a 40 kV. Esta tensão é elevada para a ordem de 100 a 500 kV na transmissão a fim de reduzir perdas e custos, e deve ser reduzida para níveis seguros para operação na etapa de distribuição [2]. Dado o grande volume de aplicações e a busca acirrada por equipamentos mais eficientes, os transformadores apresentam um alto valor agregado e pesquisas relacionadas ao seu dimensionamento e otimização são recorrentes na literatura [3]. Salienta-se assim o enorme interesse acadêmico e industrial relacionado ao projeto de transformadores.

A necessidade atual em se manter competitivo em um mercado globalizado exige que os fabricantes e pesquisadores desenvolvam ferramentas rápidas e flexíveis para o projeto de transformadores a fim de (i) minimizar o tempo empregado em cada etapa de projeto, (ii) reduzir o tempo de resposta ao cliente, (iii) aumentar da flexibilidade de projeto e (iv) reduzir a utilização de materiais [4]. Estas exigências estão relacionadas principalmente ao equilíbrio entre o custo total do dispositivo para o fabricante e sua performance em operação junto ao cliente. De maneira geral, o projeto de um dispositivo tal como um transformador deve resultar no dimensionamento de todas as partes constituintes baseado nas especificações pré-estabelecidas para o projeto, utilizando os materiais de forma econômica e de maneira a alcançar um baixo custo, um baixo peso total do dispositivo, um tamanho reduzido e uma boa performance de operação [5].

O método tradicional para o projeto de transformadores é baseado na avaliação de perdas elétricas e magnéticas, na reatância de dispersão e na corrente de magnetização, calculados a partir de equações que regem os problemas eletromagnéticos e de aproximações obtidas empiricamente por projetistas com maior experiência em projeto de transformadores [4]. Com desenvolvimento tecnológico dos computadores e a aparição de

novos métodos numéricos, tal como o Método de Elementos Finitos (*Finite Element Method* - MEF), nas últimas décadas, a modelagem eletromagnética de dispositivos tornou-se conveniente para uma análise preliminar do desempenho de transformadores e a obtenção de soluções com maior precisão [6].

O MEF é atualmente a ferramenta numérica mais usada para a investigação detalhada da densidade de corrente e de distribuição de campos na modelagem de dispositivos eletromagnéticos [7]. Este método permite obter soluções aproximadas para problemas de valores de contorno de equações diferenciais parciais, especialmente para problemas com geometrias complexas e propriedades distintas de materiais dissimilares. Em geral, simplificações são consideradas sobre as características físicas dos materiais e a modelagem via MEF é realizada em regime harmônico devido ao alto custo computacional e a complexidade apresentada por certas geometrias [8]–[10]. Contudo, a aplicação do MEF para a modelagem de transformadores continua sendo um grande desafio para os fabricantes e pesquisadores devido ao alto custo computacional exigido, sobretudo para modelos de cálculos recursivos e análises repetitivas [4], [11].

## 1.1. PROPOSTA DO TRABALHO

Recentemente, a técnica de Subproblemas aplicada ao Método de Elementos Finitos (SP-MEF) tem sido utilizada com sucesso no projeto de diferentes sistemas eletromagnéticos onde análises repetitivas precisem ser realizadas [12] e a precisão de solução melhorada [13]. Esta técnica consiste em resolver primeiramente um problema simplificado analiticamente ou através do MEF. A solução do problema inicial é conhecida como solução de referência ou solução fonte para um problema secundário, cuja solução apresentará uma correção ao problema inicialmente proposto. A soma das soluções será a solução global do problema considerando as correções estabelecidas.

Neste trabalho, inicialmente, um modelo analítico para dimensionamento de transformadores é estabelecido com base na literatura pertinente. Em seguida, aplica-se a técnica SP-MEF para a modelagem de transformadores, levando-se em conta parâmetros e condições pré-estabelecidos. Para tanto, a formulação magnetodinâmica em potencial vetor magnético e potencial escalar elétrico (formulação  $\mathbf{a} - \nu$ ) é descrita considerando fontes de superfície (SS) e fontes de volume (VS) na transição de subproblemas. Um modelo de transformador monofásico e um modelo de transformador trifásico são considerados

para exemplificar e comparar as soluções encontradas através da técnica SP-MEF. Além disso, o resultado dimensional e os resultados da modelagem do transformador trifásico são confrontados com dados de um transformador trifásico real. A modelagem inicia-se com um modelo simplificado em tubo de fluxo ideal em 1D e resulta em um modelo 2D completo através do incremento de soluções via técnica SP-MEF. As etapas de definição da geometria, malha, pre- e pós- processamento serão desenvolvidas através da plataforma *open source* Gmsh [14] e a solução para o problema é calculada através da aplicação da formulação de subproblemas definida no *solver* GetDP [15].

## 1.2. OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma ferramenta de projeto e modelagem de transformadores utilizando a técnica SP-MEF. Este objetivo principal desdobra-se em quatro objetivos específicos:

- Apresentar um modelo dimensional analítico simplificado para o projeto de transformadores e aplicação da Técnica SP-MEF;
- Verificar a influência de variações de condições e geometrias sobre o processo de modelagem de transformadores;
- Confrontar as soluções encontradas através da modelagem de transformadores via MEF convencional e via aplicação da técnica SP-MEF a fim de avaliar a Técnica SP-MEF em termos de tempo computacional e eficiência e precisão de soluções;
- Apresentar a Técnica SP-MEF para a modelagem de dispositivos eletromagnéticos e desenvolver uma ferramenta simples para a aplicação na modelagem de transformadores.

## 1.3. ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma:

- O segundo capítulo apresenta uma fundamentação teórica relacionada ao projeto de transformadores, incluindo seu princípio de funcionamento e um modelo analítico para o dimensionamento de suas partes constituintes. O cálculo dimensional é exposto inicialmente para transformadores monofásicos e aplicam-se os mesmos conceitos para o

projeto de transformadores trifásico, tendo em vista a validação de resultados para ambos os casos. Algumas grandezas globais tais como perdas nos enrolamentos, perdas no ferro e reatância de dispersão são calculadas. Ao fim do capítulo os resultados dimensionais e uma modelagem via MEF são apresentados.

- O terceiro capítulo mostra a Técnica de Subproblemas aplicada ao MEF (SP-MEF). A formulação magnetodinâmica em potencial vetor magnético e potencial escalar elétrico ( $\mathbf{a} - \nu$ ) para subproblemas é descrita partindo-se das equações de Maxwell e considerando a passagem entre dois subproblemas: subproblema  $p$  para subproblema  $q$ . A forma fraca geral para um subproblema  $q$  é indicada considerando fontes de superfície e fontes de volume provenientes do subproblema antecessor  $p$ . A formulação indicada neste capítulo é utilizada no Capítulo 4 para a modelagem de transformadores através da Técnica SP-MEF.
- O quarto capítulo demonstra a aplicação efetiva da técnica SP-MEF na modelagem de transformadores. São apresentadas algumas considerações quando a aplicação do *software* Gmsh para a construção da geometria e apresentação dos resultados, e o *solver* GetDP na modelagem de problemas via MEF e aplicação da técnica SP-MEF. Esta técnica é partindo-se de um modelo inicial simplificado em 1D de um transformador monofásico até modelos com geometrias mais complexas como um modelo 2D completo de um transformador trifásico. Os resultados são descritos e comentados ao logo deste capítulo e comparados com o projeto dimensional apresentado no Capítulo 2.
- O quinto e último capítulo apresenta as considerações finais desta dissertação. Os resultados são comentados de maneira ampla e busca-se destacar os objetivos atingidos através do desenvolvimento deste trabalho. Sugestões de trabalhos futuros são indicadas e comentadas brevemente com perspectivas de incremento dos resultados alcançados.

### TRANSFORMADORES

Neste capítulo serão apresentadas considerações relativas ao princípio de funcionamento de transformadores, tipos de conexão para o transformador trifásico e o projeto dimensional destes dispositivos, incluindo cálculos de perdas sobre os enrolamentos, perdas no núcleo e cálculo da reatância de dispersão.

#### 2.1. O PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO

O princípio de funcionamento de transformadores baseia-se no fenômeno de mútua indução entre dois circuitos eletricamente isolados, porém, magneticamente acoplados [1]. Em um caso ideal, um enrolamento primário cria um fluxo magnético no interior de um núcleo ferromagnético que induz uma corrente no enrolamento secundário. Há assim, a transferência de energia entre estes enrolamentos e, neste caso, as não idealidades relativas as resistências dos enrolamentos, as perdas no ferro e as dispersões magnéticas são desprezadas.

Em geral, as não idealidades de transformadores correspondem às perdas por efeito Joule nos enrolamentos, perdas magnéticas no núcleo, perdas por efeitos dispersivos e perdas por correntes parasitas [16]. Tais efeitos são representados por resistências e indutâncias (ou reatâncias) em um circuito elétrico monofásico equivalente acoplado ao transformador ideal [1], [2], [16], [17], conforme representado na Figura 1, onde  $R_1$  e  $R_2$  representam as perdas Joule nos enrolamentos,  $X_{d1}$  e  $X_{d2}$  são as reatâncias de dispersão dos enrolamentos 1 e 2 respectivamente,  $X_m$  é a reatância magnetizante e  $R_c$  representa as perdas ativas no núcleo.

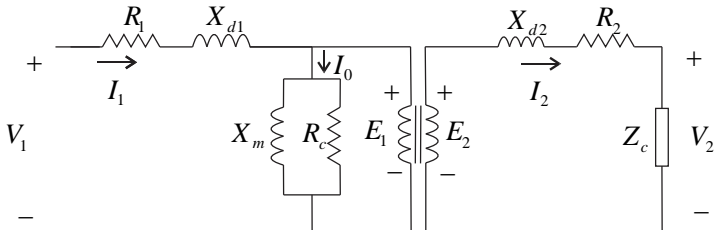


Figura 1: Circuito monofásico equivalente do transformador.

Conforme a teoria de transformadores apresentada em [1],[2], para um transformador ideal pode-se escrever a relação de transformação para as correntes e tensões na forma:

$$a = \frac{E_1}{E_2} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad (2.1)$$

Assim, as grandezas apresentadas na Figura 1 podem ser referidas apenas para um lado do transformador aplicando a relação de transformação conforme apresentado em (2.1). O circuito equivalente com as grandezas referidas ao primário é apresentado na Figura 2.

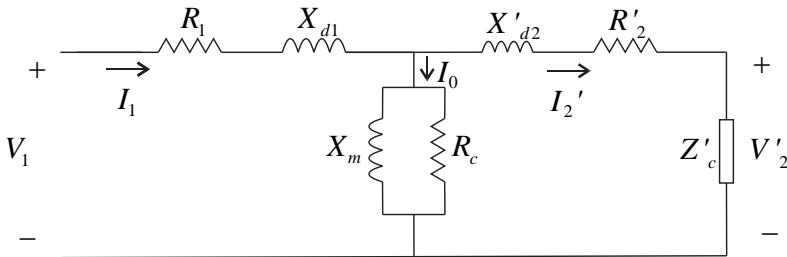


Figura 2: Circuito equivalente do transformador com grandezas do secundário referidas ao primário.

Os termos  $X'_{d2}$  e  $R'_2$  apresentados na Figura 2 são equivalentes aos termos  $X_{d2}$  e  $R_2$  referidos ao primário do transformador, assim como a carga  $Z'_c$  e a tensão de saída do transformador  $V'_2$ , conforme a relação entre o número de espiras do primário e do secundário ( $N_1$  e  $N_2$ ).

Contudo, dependendo da aplicação e da necessidade de conversão em sistemas de potência, os transformadores podem se diferenciar quanto à quantidade de fases: seja monofásico ou trifásico [2]. De maneira geral, o transformador trifásico pode ser entendido, em sua forma mais simples, como três transformadores monofásicos alimentados por uma linha trifásica através de uma conexão estrela ou delta e que compartilham de um mesmo núcleo [1]. Seja qual for o tipo de conexão, a relação de transformação é considerada entre a tensão de linha do primário e a tensão de linha do secundário. Além disso, considera-se o sistema equilibrado para o qual as três tensões no primário possuem as mesmas amplitude e defasagem de  $120^\circ$  entre si.



## 2.2. TIPOS DE CONEXÃO

A Figura 3 apresenta os tipos de conexão para o transformador trifásico e a relação entre tensões e correntes de linha e de fase. Para a conexão em delta as tensões de linha e de fase se igualam ( $V_l = V_f$ ) e as correntes de linha e de fase possuem uma relação dada por  $I_l = \sqrt{3}I_f$ . Já na conexão estrela, ou Y, as correntes de linha e de fase se igualam e as tensões de linha e de fase respeitam a relação  $V_l = \sqrt{3}V_f$ . A conexão em estrela e a conexão em delta são conexões duais em termos da relação entre as correntes e tensões e, desta maneira, para ambas as conexões, a potência trifásica  $S_{3\phi}$  é calculada pela relação:

$$S_{3\phi} = 3V_f I_f = \sqrt{3}V_l I_l. \quad (2.2)$$

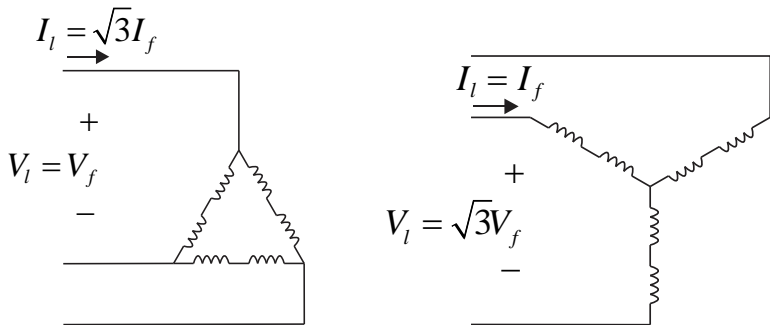


Figura 3: Conexões em sistemas trifásicos.

## 2.3. PROJETO ANALÍTICO DE TRANSFORMADORES

O projeto de um transformador, assim como o de outros dispositivos eletromagnéticos, passa por uma análise do seu circuito magnético. Os dados iniciais básicos a serem estabelecidos para o projeto de transformadores consistem em [18]:

- Potência de saída desejada;
- Tensão de entrada;
- Tensão de saída;
- Eficiência;
- Indução máxima no núcleo.

Além disso, conforme a aplicação do dispositivo deve-se estabelecer [2]: (i) o número de fases no transformador (monofásico ou trifásico, por exemplo), (ii) o tipo de ligação entre as fases (estrela ou delta para transformador trifásico), (iii) o tipo e o formato do núcleo

magnético (envolvido ou envolvente) e (iv) as características físicas dos materiais que serão utilizados no projeto (materiais ferromagnéticos, isolantes, condutores e outros).

As definições das características do transformador relativas ao tipo de núcleo, enrolamentos e materiais serão apresentadas conforme o desenvolvimento deste trabalho. O projeto de transformador é aqui apresentado inicialmente considerando o dimensionamento de condutores, dimensionamento do núcleo, distâncias de isolamento e dimensões das bobinas. Os resultados dimensionais para um modelo de transformador monofásico e para um modelo trifásico são apresentados no final do capítulo a fim de exemplificar o projeto aqui proposto e a aplicação da técnica SP-MEF com o incremento deste modelo no Capítulo 4.

### 2.3.1. Dimensionamento de condutores

Dependendo da aplicação, as bobinas para transformadores de baixa potência, em geral, são produzidas com fios de cobre ou alumínio [18]. Já para transformadores de potência elevada, os enrolamentos podem ser formados por cabos ou barras maciças de materiais condutores [18], [19]. Nesta seção, será apresentado o dimensionamento de condutores considerando fios de cobre padronizados cujas bitolas e informações são disponibilizadas na tabela AWG [18].

De maneira geral, o dimensionamento do condutor adequado deve verificar a capacidade de condução de corrente conforme a bitola do fio a ser estabelecido. Conhecendo a corrente que atravessa o enrolamento, pode-se facilmente determinar a seção transversal do condutor de acordo com os dados apresentados na tabela AWG padronizada, seja sua capacidade de condução de corrente, diâmetro da seção e resistência elétrica por comprimento [18]. Além disso, segundo [18] é comum considerar uma densidade máxima de corrente típica de  $2 \times 10^6$  A/m<sup>2</sup>. Outros autores, no entanto, utilizam densidades de corrente na ordem de  $4 \times 10^6$  A/m<sup>2</sup> [1], [2].

A densidade de corrente máxima para o condutor  $J_{m\acute{a}x}$  está relacionada à capacidade de condução de corrente  $I$  e a área da seção transversal deste  $S_f$  pela relação dada em (2.3).

$$J_{m\acute{a}x} = I / S_f \quad (2.3)$$

Com os condutores dimensionados pode-se facilmente determinar as perdas nos enrolamentos. Para tanto, as características quanto à resistividade ( $\rho_{enr}$ ) e coeficiente de temperatura ( $\alpha$ ) para condutores de

cobre e alumínio são apresentadas na Tabela I para a temperatura de referência de 20 °C.

Tabela I: Resistividade e coeficiente de temperatura em 20 °C

Material	$\rho_{enr}$ ( $\Omega\text{m}$ )	$\alpha$ ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$ )
Alumínio	$2,65 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-8}$
Cobre	$1,72 \cdot 10^{-8}$	$4,29 \cdot 10^{-8}$

Considerando o aumento da resistividade ( $d\rho$ ) elétrica do material proporcional ao aumento da temperatura ( $dT$ ) na forma da equação que segue:

$$d\rho = \alpha dT \rho_{enr}, \quad (2.4)$$

pode-se escrever a resistividade final do material em função da resistividade do material a 20 °C como:

$$\rho_{enf} = \rho_{enr} + \alpha(T - 20)\rho_{enr}. \quad (2.5)$$

Quanto maior a resistividade do fio, maior serão as perdas por efeito Joule nos enrolamentos do transformador. Assim, o projeto do transformador deve verificar a necessidade de condução de corrente e estabelecer o tipo de material e bitola que minimize tais perdas.

### 2.3.2. Dimensionamento do núcleo

O núcleo magnético de um transformador é responsável por manter o fluxo criado pelo enrolamento primário confinado e concatenar este fluxo com o enrolamento secundário, reduzindo as perdas por fluxo disperso e correntes de Foucault [1]. O dimensionamento do núcleo deve considerar a capacidade do material em suportar o fluxo magnético que o atravessa, ao mesmo tempo, quanto maior o núcleo, maior será a quantidade de material empregada e, conseqüentemente, maior será seu volume e seu peso [5].

A Figura 4 apresenta um exemplo de núcleo magnético que acopla dois circuitos elétricos através de enrolamentos não concêntricos. A fim de reduzir perdas por fluxos dispersos e garantir a máxima transferência de potência entre os enrolamentos, em geral, a construção dos enrolamentos é realizada de forma concêntrica, ou seja, o enrolamento primário e o enrolamento secundário envolvem a mesma coluna do núcleo, sendo o enrolamento de alta tensão localizado na parte externa a fim de reduzir os custos e volume com material isolante.

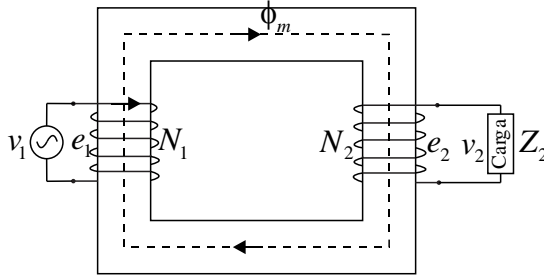


Figura 4: Transformador monofásico de dois enrolamentos não concêntricos.

Alguns autores, tais como [1], [17], indicam medidas relativas a geometria como parâmetros dimensionais para o núcleo. Em [17], sugere-se o uso de um coeficiente geométrico ou uma medida do produto de áreas (área da janela do transformador multiplicada pela área da seção transversal do núcleo) para este dimensionamento. Este produto de áreas será definido aqui considerando um transformador com enrolamentos concêntricos e com lâminas de tamanho padronizado [1], [2].

A densidade de corrente que atravessa um enrolamento pode ser estabelecida pela razão entre a corrente que o atravessa dividida pela seção total dos condutores na região conforme apresentado em (2.3). Em geral, devido a geometria cilíndrica dos condutores, considera-se ainda que há um fator de ocupação ( $f_{oc}$ ) [18] e, neste caso, a densidade de corrente pode ser escrita, para um enrolamento com  $N$  espiras, na forma apresentada pela equação (2.6):

$$J = \frac{NI}{(S_{cu}f_{oc})}, \quad (2.6)$$

onde  $N$  é a quantidade de espiras no enrolamento,  $I$  é a corrente que o atravessa,  $S_{cu}$  é a seção do enrolamento (em geral de cobre ou alumínio) e  $f_{oc}$  é o fator de ocupação.

Considerando o transformador sem carga e seu primário conectado em uma fonte de tensão senoidal com frequência  $f$  dada em Hz, em um caso ideal, o enrolamento primário fornece uma pequena corrente  $i_0$  que cria um fluxo  $\phi_m$  no interior do núcleo magnético. Considera-se que todo o fluxo criado pela bobina do primário encontra-se no interior do núcleo (sem dispersão), que as bobinas 1 e 2 possuem  $N_1$  e  $N_2$  espiras, respectivamente, e assim, pode-se escrever a força eletromotriz  $e_1$  induzida no enrolamento 1 devido ao fluxo mútuo  $\phi_m$  na forma:

$$e_1 = N_1 \partial_t \phi_m. \quad (2.7)$$

Considerando a tensão da fonte senoidal, o fluxo magnético deve ser igualmente senoidal e, assim, pode-se escrever

$$\phi_m = \phi_{mp} \text{sen}(\omega t), \quad (2.8)$$

onde  $\phi_{mp}$  é o valor de pico do fluxo  $\phi_m$  e  $\omega$  é a frequência angular.

A força eletromotriz induzida, com base na equação (2.7), é dada por:

$$e_1 = N_1 \omega \phi_{mp} \cos(\omega t), \quad (2.9)$$

e o seu valor RMS  $E_1$  é escrito como

$$E_1 = 4,44 \phi_{mp} f N_1. \quad (2.10)$$

Da mesma maneira, pode-se escrever a tensão induzida no enrolamento 2 na forma:

$$e_2 = N_2 \partial_t \phi_m, \quad (2.11)$$

e o seu valor RMS  $E_2$  é escrito como

$$E_2 = 4,44 \phi_{mp} f N_2. \quad (2.12)$$

A partir da equação apresentada em (2.7), considerando que a indução está uniformemente distribuída ao longo da seção do núcleo e em regime permanente, pode-se escrever

$$N = \frac{E}{(\omega B_p S_c)}, \quad (2.13)$$

onde  $E$  é a tensão induzida na bobina (valor de pico),  $\omega$  é a frequência angular,  $B_p$  é o valor de pico da indução magnética e  $S_c$  é a seção magnética transversal do núcleo pela qual o fluxo atravessa.

Para uma janela do núcleo que contenha 2 enrolamentos (enrolamento primário e enrolamento secundário concêntricos), sua área pode ser escrita como

$$S_w = k_w (S_{cu1} + S_{cu2}), \quad (2.14)$$

onde  $S_w$  é a área da janela,  $S_1$  e  $S_2$  são as áreas ocupadas pelos enrolamentos 1 e 2 respectivamente e  $k_w$  é um fator de preenchimento da janela, devendo-se considerar as distâncias de isolamento entre os enrolamentos. Para um preenchimento de 50% da área da janela pelas bobinas, o fator  $k_w$  será de 2.

Reescrevendo (2.13) e igualando à (2.6) obtém-se:

$$S_{cu} = \frac{EI}{(\omega B_p S_c f_{oc} J)}. \quad (2.15)$$

A equação apresentada em (2.15) representa a área ocupada por um enrolamento em função da frequência de operação do transformador ( $\omega = 2\pi f$ ), da tensão induzida  $E$ , da corrente que circula pelo enrolamento  $I$ , da seção do núcleo por onde circula o fluxo magnético  $S_c$ , do fator de ocupação  $f_{oc}$  e da densidade de corrente  $J$ .

Agora, escrevendo a relação (2.15) para os dois enrolamentos e considerando a área efetiva da janela dada por (2.14), pode-se escrever o produto de áreas  $S_p$  como o produto da área da janela com a área da seção transversal da coluna do núcleo  $S_c$  como

$$S_p = S_w S_c = k_w \sqrt{2} (E_1 I_1 + E_2 I_2) / (\omega B_p f_{oc} J) \cdot \quad (2.16)$$

Assim, a equação (2.16) corresponde ao produto das áreas e o seu resultado é utilizado para o dimensionamento do núcleo de um transformador com dois enrolamentos concêntricos.

Em geral, o núcleo de pequenos transformadores é composto por lâminas padronizadas com dimensões pré-fixadas garantindo a mesma relação para o produto de áreas. Sendo assim, o produto de áreas serve como um parâmetro para a escolha das dimensões destas lâminas padronizadas [1]. A Figura 5 apresenta as dimensões convencionais em lâminas padronizadas do tipo EI.

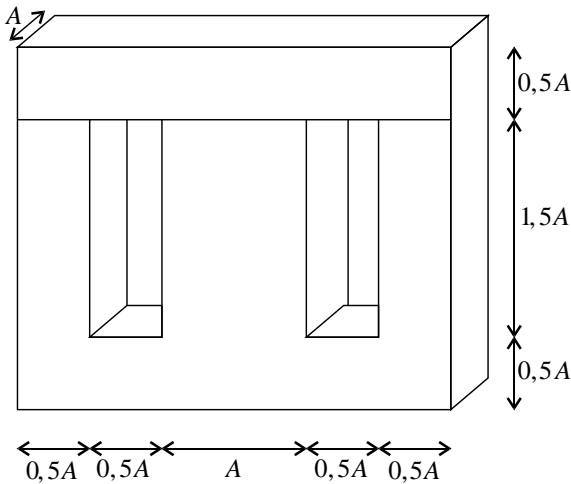


Figura 5: Exemplo de lâminas padronizadas em formato EI para transformador monofásico.

Conforme Figura 5, a área total da janela, para lâminas padronizadas é definida de acordo com a dimensão  $A$  conforme segue:

$$S_w = 1,5A \times 0,5A = 0,75A^2 \quad (2.17)$$

Considerando uma seção transversal quadrada para a perna central do núcleo apresentado ( $S_c = A^2$ ), pode-se escrever o produto de áreas como:

$$S_p = k_w \sqrt{2} (E_1 I_1 + E_2 I_2) / (\omega B_p f_{oc} J) = 0,75 A^4 \quad (2.18)$$

e a dimensão  $A$  das lâminas pode ser facilmente calculada por esta expressão.

No caso de transformadores trifásicos, considerando que cada perna do núcleo receberá um conjunto de enrolamentos concêntricos (primário e secundário), a área da janela calculada deverá ser o dobro da janela calculada anteriormente e, portanto, o seu produto de áreas será o dobro do valor calculado pela expressão (2.16). O núcleo será considerado então, para efeitos de projeto, com três colunas de dimensão  $A$ , duas janelas de largura  $A$  e altura de  $3A$  em formato EE conforme Figura 6.

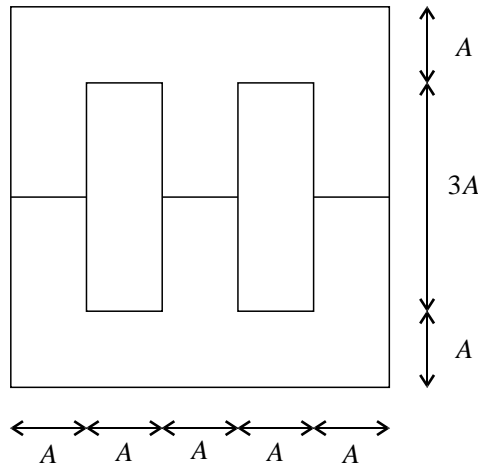


Figura 6: Exemplo de lâminas padronizadas em formato EE para transformador trifásico.

Neste caso, a área da janela é dada por:

$$S_w = 3A^2 \quad (2.19)$$

Os enrolamentos de alta tensão e baixa tensão são enrolados sobre as colunas do núcleo de forma concêntrica e o núcleo é formado por chapas de ferro silício de grão orientado. Em geral, o enrolamento de alta tensão encontra-se no exterior deste enrolamento enquanto que o

enrolamento de baixa tensão é localizado no interior da bobina de alta tensão (mais próximo ao núcleo) conforme Figura 7.

Para transformadores de alta potência as lâminas são empilhadas em forma de degraus conforme apresentado na Figura 7 obtendo assim uma forma circular quase perfeita. Desta maneira, pode-se definir a área da seção transversal do núcleo circular como

$$S_c = \frac{\pi A^2}{4}, \quad (2.20)$$

e assim, o produto de áreas pode ser escrito, para o transformador trifásico como

$$S_p = S_w S_c = 3A^2 \left( \frac{\pi A^2}{4} \right) = \frac{3\pi A^4}{4}. \quad (2.21)$$

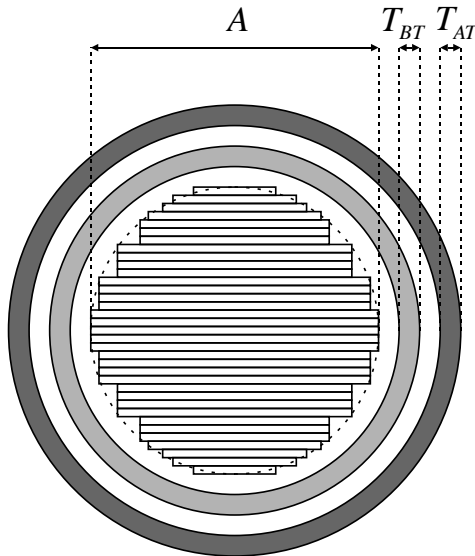


Figura 7: Seção transversal da perna do núcleo.

Conforme apresentado para o modelo de transformador monofásico com lâminas EI, pode-se escrever o produto de áreas para o transformador trifásico como sendo:

$$\frac{3\pi A^4}{4} = 2k_w \sqrt{2} (E_1 I_1 + E_2 I_2) / (\omega B_p f_{oc} J). \quad (2.22)$$



Assim, como cada janela receberá 2 enrolamentos de alta tensão e 2 enrolamentos de baixa tensão, um fator 2 aparece em (2.22) e a dimensão  $A$  pode ser igualmente calculada por esta expressão.

### 2.3.3. Distâncias de Isolação

Sejam as bobinas concêntricas e distribuídas na janela do núcleo do transformador conforme apresentado na Figura 8, as distâncias mínimas de isolação podem ser calculadas pela diferença de potencial entre as partes constituintes e o campo elétrico para ruptura do dielétrico do material isolante  $E_{rup}$ . Se o isolamento é feito apenas com ar entre as bobinas o campo elétrico necessário para ruptura do ar será de  $3 \times 10^6$  V/m.

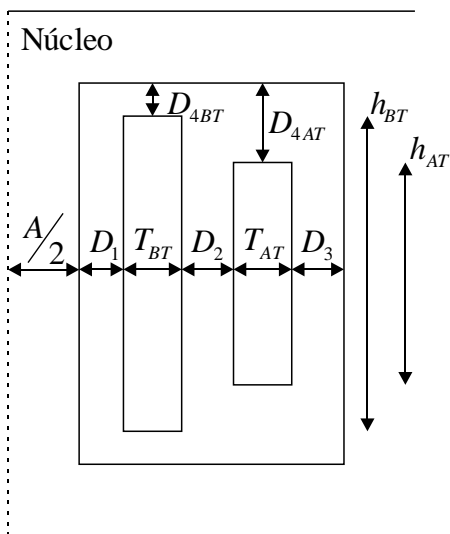


Figura 8: Configuração das bobinas na janela do transformador - Distâncias de isolação.

As distâncias de isolação, em metros, são calculadas (2.23)-(2.27) considerando um fator de segurança  $f_s$

$$D_1 = \frac{(V_{BT} f_s)}{E_{rup}}, \quad (2.23)$$

$$D_2 = \frac{((V_{BT} + V_{AT}) f_s)}{E_{rup}}, \quad (2.24)$$

$$D_3 = \frac{(V_{AT}.fs)}{E_{rup}}, \quad (2.25)$$

$$D_{4BT} = D_1, \quad (2.26)$$

$$D_{4AT} = D_3, \quad (2.27)$$

Vale a pena lembrar que, neste caso, as medidas para o dimensionamento das bobinas encontram-se entre o valor mínimo necessário para se ter o número de enrolamentos desejado, porém com as distâncias  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  e  $D_4$  servindo como limites devido ao isolamento mínimo necessário. Ou seja, a seção ocupada pelos enrolamentos deve ser menor do que a área da janela considerando as distâncias de isolamento.

As alturas das bobinas podem ser calculadas na forma

$$h_{BT} = h_w - 2D_{4BT}, \quad (2.28)$$

$$h_{AT} = h_w - 2D_{4AT}, \quad (2.29)$$

onde  $h_{BT}$  e  $h_{AT}$  representam as alturas das bobinas de baixa e de alta tensão respectivamente,  $D_{4BT}$  e  $D_{4AT}$  as distâncias de isolamento e  $h_w$  a altura efetiva da janela. Para o transformador monofásico a altura da janela será de  $1,5A$  enquanto que para o transformador trifásico será  $3A$ . Vale lembrar ainda que a soma das distâncias de isolamento com as larguras das bobinas ( $T_{BT}$  e  $T_{AT}$ ) deve ser menor ou igual a largura da janela ( $A/2$  para monofásico e  $A$  para trifásico).

### 2.3.4. Indutância de dispersão

A indutância de dispersão é um importante parâmetro a ser considerado em projeto de transformadores e vêm sendo alvo de pesquisadores ao longo das últimas décadas [20]–[22]. Esta grandeza global exprime a quantidade de fluxo disperso entre os enrolamentos de um transformador monofásico (primário e secundário) ou sobre uma das fases de um transformador trifásico [2].

O cálculo da indutância de dispersão para enrolamentos concêntricos pode ser realizado por meio de fórmulas analíticas simplificadas, conforme proposto por [2] e apresentado nesta seção, via método de elementos finitos [22], ou ainda, por meio de métodos analíticos mais complexos, como o método de Rabins apresentado em [23]. A indutância de dispersão é calculada, neste trabalho, através da geometria estabelecida para a distribuição dos enrolamentos no interior da janela do núcleo do transformador conforme apresentado na Figura 9.

Considerando a lei de Ampère e uma distribuição uniforme da força magnetomotriz com a variação radial da estrutura, pode-se escrever

$$H(r) = \frac{fmm(r)}{h}, \quad (2.30)$$

e a altura média das bobinas é calculada a partir de:

$$h = \frac{h_{BT} + h_{AT}}{2}. \quad (2.31)$$

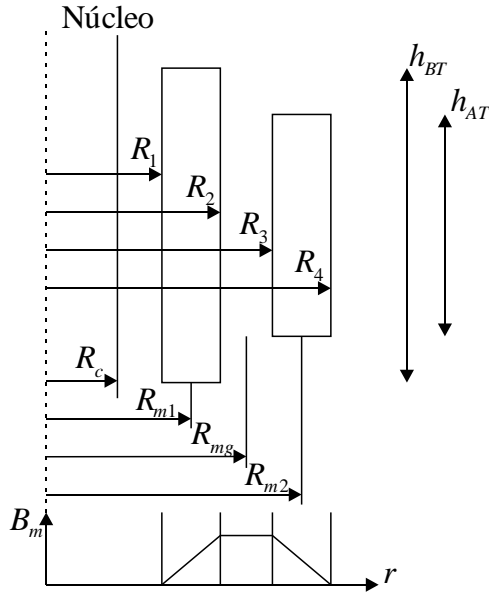


Figura 9: Geometria da janela e parâmetros para cálculo da reatância de dispersão.

Assim, considerando que a indução magnética varia linearmente de acordo com o raio  $r$  conforme

$$B(r) = \mu_0 H(r) = \mu_0 \frac{fmm(r)}{h}, \quad (2.32)$$

e considerando  $|N_1 I_1| = |N_2 I_2| = NI$  pode-se escrever a variação da forma magnetomotriz  $fmm$  linearmente nos intervalos de  $r$  na forma que segue:

$$fmm(r) = NI \begin{cases} \frac{(r - R_1)}{(R_2 - R_1)}, R_1 < r < R_2, \\ 1, R_1 < r < R_2, \\ \frac{(R_4 - r)}{(R_4 - R_3)}, R_3 < r < R_4. \end{cases} \quad (2.33)$$

A indutância de dispersão para o enrolamento do primário referida ao secundário  $L_{112}$  pode ser obtida pela integração da energia magnética na forma da expressão:

$$\frac{1}{2} L_{112} I_1^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\text{volume}} B^2 dV. \quad (2.34)$$

Assim, substituindo (2.33) na integral dada em (2.34):

$$\frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} B^2 d\Omega = \frac{(\mu_0 NI)^2}{2\mu_0 h^2} \times 2\pi h \left[ \int_{R_1}^{R_2} \left( \frac{r - R_1}{R_2 - R_1} \right)^2 r dr + \int_{R_2}^{R_3} r dr + \int_{R_3}^{R_4} \left( \frac{R_4 - r}{R_4 - R_3} \right)^2 r dr \right], \quad (2.35)$$

ou ainda:

$$\frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} B^2 d\Omega = \frac{\pi\mu_0 (NI)^2}{h} \times \left[ \frac{\left( R_2^2 - R_1^2 \right)}{6} + \frac{\left( R_2 - R_1 \right)^2}{12} + \frac{\left( R_3^2 - R_2^2 \right)}{2} + \frac{\left( R_4^2 - R_3^2 \right)}{6} - \frac{\left( R_4 - R_3 \right)^2}{12} \right]. \quad (2.36)$$

Em termos do raio médio da estrutura, conforme apresentado na Figura 9, (2.36) pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} B^2 d\Omega = \frac{\pi\mu_0 (NI)^2}{h} \left[ \frac{R_{m1} T_{BT}}{3} + \frac{T_{BT}^2}{12} + R_{mg} g + \frac{R_{m2} T_{AT}}{3} - \frac{T_{AT}^2}{12} \right]. \quad (2.37)$$

Desta maneira, a indutância de dispersão do primário referida ao secundário pode ser escrita na forma

$$L_{l12} = \frac{2\pi\mu_0 N_1^2}{h} \left[ \frac{R_{m1}T_{BT}}{3} + \frac{R_{m2}T_{AT}}{3} + R_{mg}D_2 + \frac{T_{BT}^2}{12} - \frac{T_{AT}^2}{12} \right], \quad (2.38)$$

E, então, a reatância de dispersão é escrita na forma

$$X_{l12} = \frac{(2\pi)^2 \mu_0 f N_1^2}{h} \left[ \frac{R_{m1}T_{BT}}{3} + \frac{R_{m2}T_{AT}}{3} + R_{mg}D_2 + \frac{T_{BT}^2}{12} - \frac{T_{AT}^2}{12} \right]. \quad (2.39)$$

Considerando agora o efeito da altura da bobina em relação à altura da janela, [2] sugere-se o uso de uma fator de correção  $s$  somado ao valor da altura média  $h$  dado por

$$s = 0,32(R_4 - R_c). \quad (2.40)$$

Assim, (2.39) pode ser reescrita na forma que segue

$$X_{l12} = \frac{(2\pi)^2 \mu_0 f N_1^2}{(h+s)} \left[ \frac{R_{m1}T_{BT}}{3} + \frac{R_{m2}T_{AT}}{3} + R_{mg}D_2 + \frac{T_{BT}^2}{12} - \frac{T_{AT}^2}{12} \right]. \quad (2.41)$$

A mesma análise pode ser realizada para o secundário e, neste caso, a reatância de dispersão será

$$X_{l22} = \frac{(2\pi)^2 \mu_0 f N_2^2}{(h+s)} \left[ \frac{R_{m1}T_{BT}}{3} + \frac{R_{m2}T_{AT}}{3} + R_{mg}D_2 + \frac{T_{BT}^2}{12} - \frac{T_{AT}^2}{12} \right]. \quad (2.42)$$

A reatância de dispersão será então calculada como a soma das reatâncias do primário e secundário, neste caso

$$X_{l2} = X_{l21} + X_{l22}, \quad (2.43)$$

ou ainda:

$$X_{l2} = \frac{(2\pi)^2 \mu_0 f (N_1^2 + N_2^2)}{(h+s)} \left[ \frac{R_{m1}T_{BT}}{3} + \frac{R_{m2}T_{AT}}{3} + R_{mg}D_2 + \frac{T_{BT}^2}{12} - \frac{T_{AT}^2}{12} \right]. \quad (2.44)$$

A equação (2.44) apresenta o cálculo analítico simplificado para a reatância de dispersão total referida ao secundário. Esta expressão será utilizada no desenvolvimento deste trabalho para efeitos de comparação

com os resultados alcançados via técnica de subproblemas aplicada ao MEF. Resultados teóricos serão comentados ao longo desta dissertação salientando a importância e buscando identificar os efeitos sobre a obtenção de grandezas globais do transformador.

### 2.3.5. Perdas no ferro

As perdas no ferro são caracterizadas no circuito equivalente monofásico do transformador apresentado na Figura 2 por uma resistência  $R_c$  [1]. Considerando a curva característica de perdas no material que forma as lâminas do núcleo do transformador, apresentada na Figura 10, é possível calcular a perda por unidade de massa dada uma indução máxima de projeto  $B_p$ .

Neste caso, a perda no ferro pode ser calculada pela expressão

$$P_f = M_f P_{W/kgF}, \quad (2.45)$$

onde  $M_f$  representa a massa do ferro e  $P_{W/kgF}$  é a perda por unidade de massa obtida a partir da curva característica do material.

A resistência equivalente às perdas no ferro pode ser calculada por

$$R_c = \frac{V_1^2}{P_f / 3}. \quad (2.46)$$

### 2.3.6. Caracterização das chapas do núcleo

A curva característica de perdas para lâminas de ferro-silício de grão orientado foi obtida experimentalmente variando-se a direção de estampagem das amostras entre  $0^\circ$  (longitudinal) e  $90^\circ$  (transversal), com passos de  $10^\circ$ . Os ensaios foram realizados no SST (*Single Sheet Test*) da Brockhaus. A indução magnética é dada em militesla e os ensaios foram realizados sob a frequência de operação desejada para o transformador (neste caso 60 Hz). A Figura 10 apresenta a curva característica de perdas no material ferromagnético de grão orientado em função da indução  $B_p$ .

A representação polinomial da curva de perdas é dada por

$$P_f = 0,93B_p^6 - 4,36B_p^5 + 8,01B_p^4 - 7,22B_p^3 + 3,73B_p^2 - 0,60B_p + 0,04. \quad (2.47)$$

A curva B-H para o material é apresentada na Figura 11. Observe, através da curva da indução em função do campo magnético, três

regiões distintas de operação do material: região linear, joelho da curva (maior valor de  $B_p$  antes da saturação) e a região de saturação.

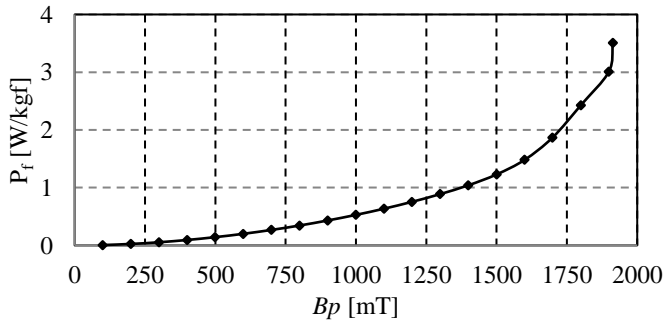


Figura 10: Curva característica de perdas no material ferromagnético de grão orientado.

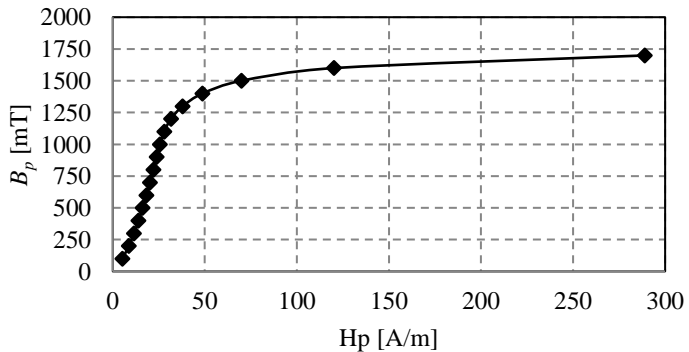


Figura 11: Curva  $B_p$  (H) para o material ferromagnético de grão orientado.

A Figura 12 apresenta a curva característica da permeabilidade relativa do material em função da indução  $B_p$ . A relação entre as curvas da Figura 11 e da Figura 12 é expressa pela relação apresentada por (2.48). Observa-se que o ponto de joelho da curva apresentada na Figura 11 é o ponto de máximo para a curva de permeabilidade relativa apresentada na Figura 12 e que a permeabilidade decai drasticamente, se aproximando à permeabilidade do ar, quando a indução chega ao ponto de saturação.

$$\mu_r = \frac{B_p(H)}{\mu_0 H} \quad (2.48)$$

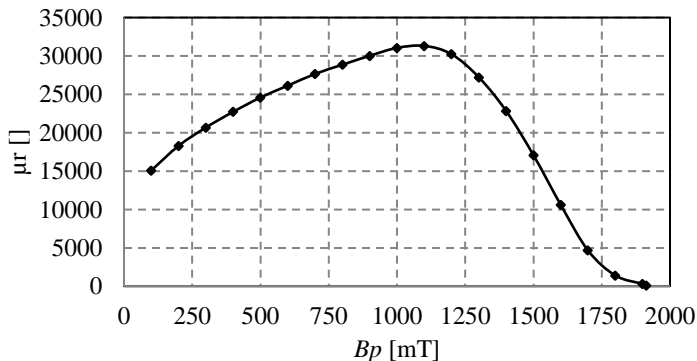


Figura 12: Curva característica da permeabilidade relativa do material ferromagnético de grão orientado.

A curva característica da permeabilidade relativa é dada por

$$\begin{aligned} \mu_r = & 12842B_p^6 - 27153B_p^5 + 48038B_p^4 \\ & - 151786B_p^3 + 133054B_p^2 - 65240B_p + 9616 \end{aligned} \quad (2.49)$$

#### 2.4. COMPARAÇÃO DO MODELO ANALÍTICO COM RESULTADOS OBTIDOS DO MEF

A Tabela II apresenta as especificações do transformador monofásico a ser projetado. Entre as especificações estão: a potência requerida à carga do transformador (potência de saída), a tensão da rede (tensão de entrada), a tensão sobre a carga (tensão de saída), a eficiência mínima desejada para o dispositivo sob condições nominais de operação, a indução máxima no interior do núcleo formado de material ferromagnético (conforme testes realizados com chapas apresentados na página 44) e o fator de preenchimento no interior das bobinas do dispositivo.

Tabela II: Especificações de projeto para transformador monofásico

Especificação	Valor
Potência de Saída (MVA)	1
Tensão de Entrada (kV)	13,8
Tensão de Saída (kV)	0,4
Eficiência (%)	95%
Indução máxima (T)	1,4
Fator de preenchimento (%)	80%



A Tabela III apresenta as especificações do transformador trifásico a ser projetado, analogamente aos apresentados na Tabela II para o transformador monofásico.

Tabela III: Especificações de projeto para transformador trifásico

<b>Especificação</b>	<b>Valor</b>
Potência de Saída (MVA)	67
Tensão de Entrada (kV)	138
Tensão de Saída (kV)	13,8
Eficiência (%)	95%
Indução máxima (T)	1,4
Fator de preenchimento (%)	80%

### 2.4.1. Resultados dimensionais do modelo analítico

A Tabela IV e a Tabela V apresentam os resultados dimensionais para o transformador monofásico e trifásico, respectivamente, conforme os cálculos dimensionais apresentados neste capítulo. Estes resultados dimensionais serão validados na sequência através da modelagem convencional via MEF e serão comparados posteriormente com a aplicação da técnica SP-MEF para variações neste modelo.

Tabela IV: Resultado dimensional transformador monofásico

<b>Parâmetros dimensionais em milímetros (mm)</b>	<b>Valor</b>
Diâmetro do núcleo ( $A$ )	240,1
Altura da janela do núcleo ( $h_w$ )	360,2
Largura da janela do núcleo ( $L_w$ )	120,1
Distância de isolamento BT ( $D_1$ )	3,3
Distância de isolamento entre bobinas ( $D_2$ )	23,7
Altura bobina BT ( $h_{BT}$ )	353,6
Altura bobina AT ( $h_{AT}$ )	324,2
Largura bobina BT ( $T_{BT}$ )	43,1
Largura bobina AT ( $T_{AT}$ )	36,5

Tabela V: Resultado dimensional transformador trifásico

<b>Parâmetros dimensionais em milímetros (mm)</b>	<b>Valor</b>
Diâmetro do núcleo ( $A$ )	427,5
Altura da janela do núcleo ( $h_w$ )	1282,5
Largura da janela do núcleo ( $L_w$ )	427,5
Distância de isolamento BT ( $D_1$ )	23,0

<b>Parâmetros dimensionais em milímetros (mm)</b>	<b>Valor</b>
Distância de isolamento entre bobinas ( $D_2$ )	31,2
Altura bobina BT ( $h_{BT}$ )	1236,5
Altura bobina AT ( $h_{AT}$ )	1016,9
Largura bobina BT ( $T_{BT}$ )	54,1
Largura bobina AT ( $T_{AT}$ )	69,1

O resultado geométrico dimensional é representado na Figura 13 para um transformador monofásico e na Figura 14 para um transformador trifásico, conforme parâmetros apresentados na Tabela IV e na

Tabela V, respectivamente, em 2D. As regiões definidas para a aplicação posterior da Técnica SP-MEF são apresentadas nestas figuras. A geometria para o transformador monofásico inclui o núcleo magnético, as bobinas de alta tensão (AT) e baixa tensão (BT), o interior do tanque ou carcaça do transformador, uma blindagem (*shunt*) magnética na lateral direita, o tanque do transformador e o domínio exterior.

Além disso, devido às simetrias da estrutura, a Figura 13 apresenta apenas 1/4 da geometria total do dispositivo. A geometria para o transformador trifásico é apresentada como 1/2 da estrutura total do dispositivo tendo em vista a simetria geométrica no eixo horizontal. A estrutura geométrica apresenta ainda uma simetria vertical, no entanto, a fim de considerar a composição da defasagem de tensões e correntes no sistema trifásico, a estrutura não pode ser representada como 1/4 da sua estrutura completa. A Figura 14 apresenta as principais entidades para o transformador trifásico, incluindo o núcleo ferromagnético, as bobinas de alta e baixa tensão em cada uma das fases, a blindagem magnética em ambos os lados da estrutura, o tanque do transformador e as regiões interna e externa ao tanque do transformador. Esta figuras apresentam ainda as condições de contorno definidas para o problema magnetodinâmico, seja condição de Dirichlet ( $\Gamma_b$ ) ou Neumann ( $\Gamma_h$ ). Estas condições são apresentadas no capítulo seguinte para a formulação definida.

Conforme a geometria definida, uma malha de elementos finitos é gerada através do *software* Gmsh. Além das regiões completas, definidas na imagem em 2D, são estabelecidos, neste mesmo modelo, regiões para um modelo simplificado em 1D, a fim de se obter soluções sobre uma mesma área de trabalho no Gmsh. Neste caso, para cada simulação realizada, seja em 1D ou em 2D, as malhas de elementos já definidas são selecionadas de acordo com o modelo proposto e com a dimensão desejada. A inclusão de elementos em 1D e 2D serão importantes para a

aplicação da técnica SP-MEF, especialmente para casos de alteração de dimensões e projeção de soluções.

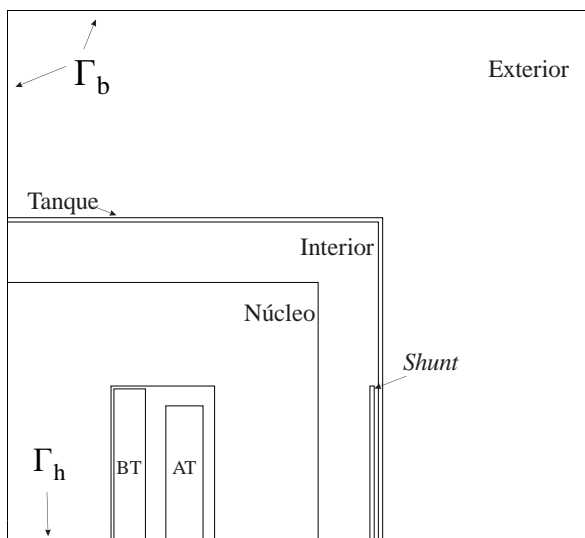


Figura 13: Geometria do transformador monofásico obtida a partir do modelo analítico.

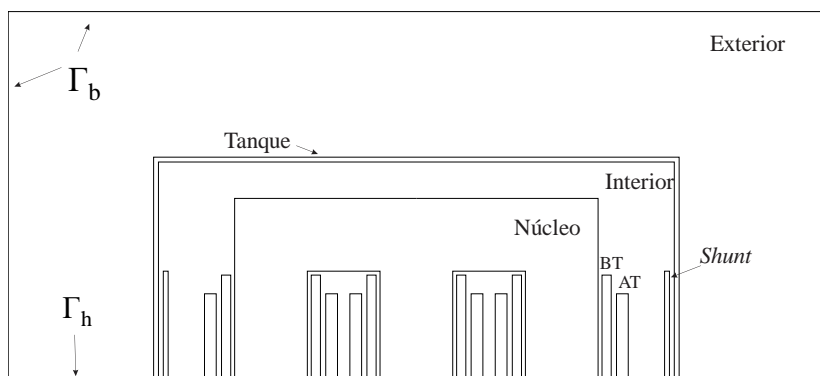


Figura 14: Geometria do transformador trifásico obtida a partir do modelo analítico.

### 2.4.1. Modelagem via Método de Elementos Finitos

A Figura 15 e a Figura 16 apresentam as malhas de elementos finitos definidas para os transformadores monofásico e trifásico

apresentados neste trabalho. Para o modelo 1D considera-se a malha de elementos finitos definida na base do modelo 2D com elementos finitos em linhas que ligam os nós (base inferior da Figura 15 e da Figura 16). Além disso, a região do núcleo é quebrada em partes menores, a fim de aplicar as correções na passagem de subproblemas, conforme apresentado nestas figuras.

Contudo, a modelagem via MEF foi realizada com o objetivo de verificar se as especificações de projeto pré-definidas foram alcançadas através do modelo dimensional do transformador estudado. A Figura 17 e a Figura 18 apresentam os resultados da modelagem magnetodinâmica para um transformador monofásico e para um transformador trifásico respectivamente. As simulações foram realizadas via *software* Gmsh com aplicação do *solver* GetDP em uma modelagem magnetodinâmica com aplicação do MEF e desconsiderando, inicialmente, a presença do tanque e do *shunt* magnético. Estas regiões serão incluídas posteriormente com a aplicação da Técnica SP-MEF. Contudo, todas as simulações são realizadas no domínio da frequência e, o núcleo, o shunt e o tanque são considerados como materiais lineares.

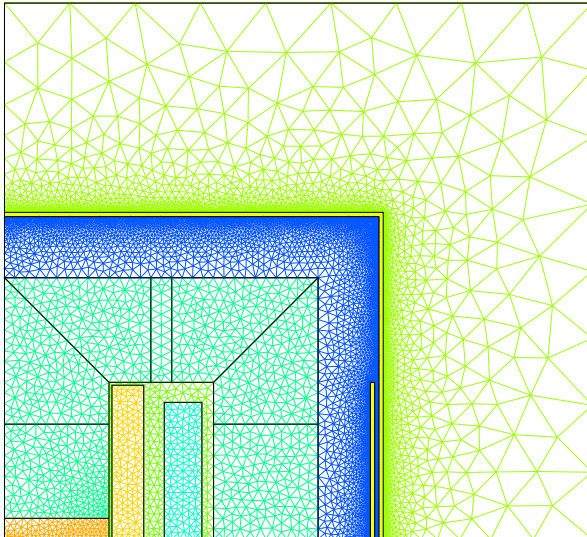


Figura 15: Malha de elementos finitos sobre as regiões físicas no domínio de cálculo estabelecido para o transformador monofásico.

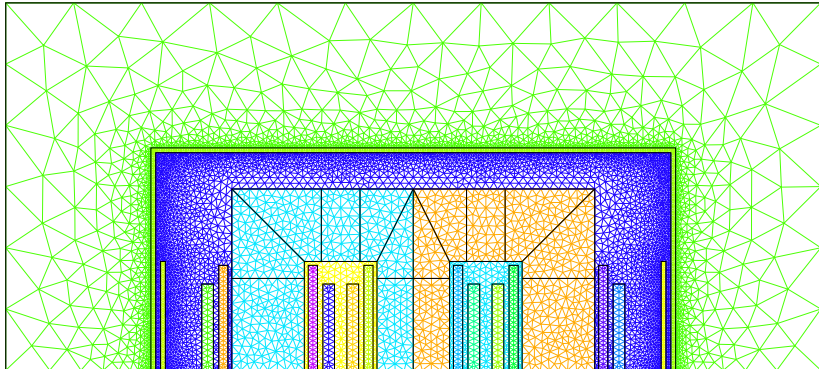


Figura 16: Malha de elementos finitos sobre as regiões físicas no domínio de cálculo estabelecido para o transformador trifásico.

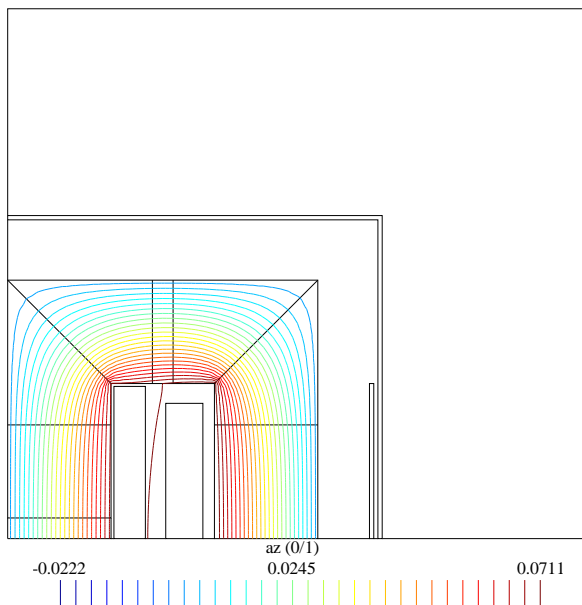


Figura 17: Resultado da distribuição do fluxo magnético do transformador monofásico obtido pelo MEF.

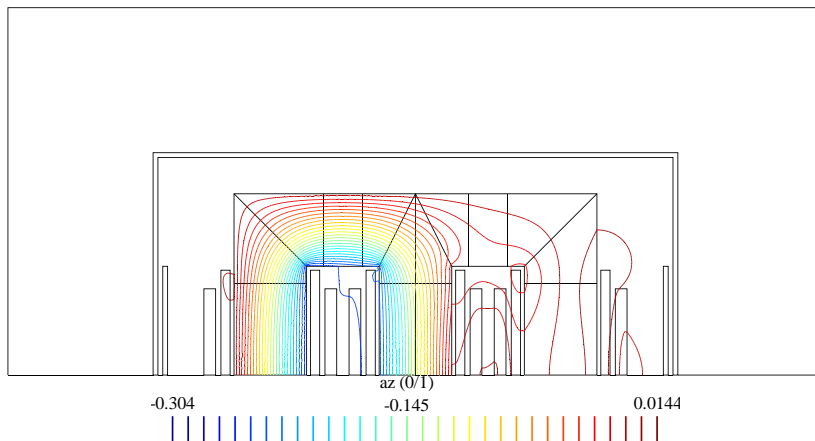


Figura 18: Resultado da distribuição do fluxo magnético do transformador trifásico obtido pelo MEF.

A Tabela VI e a Tabela VII apresentam os resultados de grandezas globais dos transformadores obtidas através da modelagem e calculadas conforme as equações apresentadas. Para o transformador monofásico as simulações foram realizadas com a imposição da corrente que circula sobre o enrolamento primário, enquanto que, para o transformador trifásico, as simulações foram realizadas com imposição da tensão de entrada do dispositivo considerando o circuito elétrico trifásico para acoplamento dos enrolamentos primários e secundários.

Tabela VI: Resultados de grandezas globais para transformador monofásico.

Grandeza	Simulada	Especificada (analítico)	Diferença (%)
Espiras no Primário	642	-	-
Espiras no Secundário	19	-	-
Tensão de Entrada	14,07 kV	13,800 kV	6,5
Tensão de Saída	0,391 kV	0,400 kV	2,3
Corrente de Entrada	72,46 A	72,46 A	0,0
Corrente de Saída	2315 A	2500 A	7,4
Reatância de dispersão	77,58 $\Omega$	73,92 $\Omega$	4,9

Tabela VII: Resultados de grandezas globais para transformador trifásico.

<b>Grandeza</b>	<b>Simulada</b>	<b>Especificada (analítico)</b>	<b>Diferença (%)</b>
Espiras no Primário	1488	-	-
Espiras no Secundário	258	-	-
Tensão de Entrada	79,674 kV	79,674 kV	0,0
Tensão de Saída	13,300 kV	13,800 kV	3,6
Corrente de Entrada	164,1 A	178 A	7,8
Corrente de Saída	895 A	934,36 A	4,4
Reatância de dispersão	77,12 $\Omega$	76,52 $\Omega$	0,8

## 2.5. CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou o projeto dimensional e a modelagem de transformadores com base na literatura pertinente. Buscou-se apresentar todos os passos relativos ao dimensionamento estrutural do núcleo e dos enrolamentos levando-se em conta especificações iniciais de projeto, assim como a determinação de grandezas globais, tais como, perdas nos enrolamentos, perdas no núcleo e reatância de dispersão. O modelo dimensional foi comparado com a modelagem via MEF para um transformador monofásico e para um transformador trifásico. Os resultados da modelagem foram apresentados e demonstraram-se compatíveis com as especificações definidas para o projeto destes transformadores (diferença relativa máxima de 7,8%).

Os resultados dimensionais do transformador monofásico e do transformador trifásico apresentados neste capítulo serão utilizados no Capítulo 4 para a comparação da aplicação da modelagem destes dispositivos com a aplicação da Técnica SP-MEF conforme formulação magnetodinâmica que será apresentada no Capítulo 3. Para tanto, no Capítulo 4, esta modelagem será comparada com a modelagem completa apresentada neste capítulo por MEF com relação a sua distribuição de fluxo magnético no domínio de cálculo e das grandezas globais referentes aos dispositivos analisados.





### TÉCNICA DE SUBPROBLEMAS APLICADA AO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

A resolução de problemas eletromagnéticos, em geral, é alcançada através de modelos analíticos que garantem uma solução exata para problemas que sejam relativamente simples, ou que aproximações possam ser realizadas, a fim de reduzir a complexidade destes problemas [24]. Em contrapartida, métodos numéricos são propostos em busca de uma solução aproximada para o problema apresentado, como exemplo o Método de Elementos Finitos (MEF), o Método de Diferenças Finitas (FDM), Método dos Momentos, entre outros.

Este trabalho está focado no projeto e na modelagem de transformadores utilizando a técnica de Subproblemas aplicada ao Método de Elementos Finitos (SP-MEF). Neste sentido, neste capítulo, a técnica de Subproblemas aplicada ao MEF é apresentada. Uma breve introdução é realizada e a formulação em potencial vetor magnético e potencial escalar elétrico (formulação  $\mathbf{a}-\nu$ ), incluindo as fontes em subproblemas, é apresentada.

#### 3.1. MODELAGEM DE TRANSFORMADORES E A FORMULAÇÃO MAGNETODINÂMICA

A modelagem de transformadores via MEF permite analisar o comportamento e a distribuição das linhas de fluxo magnético que circulam no interior deste dispositivo, bem como, analisar perdas relativas às correntes induzidas em partes constituintes e efeitos dispersivos [24], [25]. Para tanto, a modelagem magnetodinâmica é recomendada, tendo em vista a variação temporal e efeitos provenientes desta variação [26].

A formulação magnetodinâmica em potencial vetor magnético e potencial escalar elétrico (formulação  $\mathbf{a}-\nu$ ) é apresentada nesta seção a fim de comparação posterior com a formulação geral com a inclusão de fontes para a técnica de subproblemas. A forma canônica para um problema magnetodinâmico pode ser expressa pelas equações de Maxwell [24], [27]

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j}_t, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad (3.2)$$

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\partial_t \mathbf{b}, \quad (3.3)$$

onde  $\mathbf{h}$  é o vetor campo magnético,  $\mathbf{j}_t$  é o vetor densidade superficial de corrente,  $\mathbf{b}$  é o vetor indução magnética e  $\mathbf{e}$  é o vetor campo elétrico.

As relações constitutivas são dadas por:

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{j}_e = \sigma \mathbf{e}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{j}_t = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_e \quad (3.6)$$

onde  $\mu$  é a permeabilidade magnética do meio e  $\sigma$  é a condutividade elétrica do meio, o termo  $\mathbf{j}_s$  refere-se a densidade de corrente relativa ao domínio de cálculo  $\Omega_s$  com distribuição de corrente conhecida (bobinas, por exemplo) e  $\mathbf{j}_e$  refere-se a parcela de correntes induzidas em regiões condutoras incluídas no domínio  $\Omega_c$ , onde  $\Omega_s$  e  $\Omega_c$  pertencem ao domínio de cálculo  $\Omega$ . Assim, o domínio de cálculo  $\Omega$  para o problema magnetodinâmico é apresentado na Figura 19 e são estabelecidas condições de contorno (equações (3.7) e (3.8)) e condições de interface (equações (3.9), (3.10) e (3.11)).

As condições de contorno são

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h}|_{\Gamma_h} = 0 \text{ ou } \mathbf{n} \times \mathbf{e}|_{\Gamma_e} = 0, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}|_{\Gamma_b} = 0, \quad (3.8)$$

onde  $\Gamma_h$ ,  $\Gamma_e$  e  $\Gamma_b$  representam a fronteira do domínio de estudo  $\Omega$ .

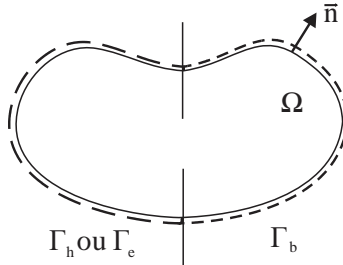


Figura 19: Domínio de cálculo para formulação de problema magnetodinâmico.

As condições de interface são

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{h}]_y = 0, \quad (3.9)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{e}]_y = 0, \quad (3.10)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}]_y = 0 \quad (3.11)$$

onde a noção apresentada nas equações (3.9)-(3.11) refere-se à conservação da componente tangencial de campo magnético e campo elétrico ou à componente normal de indução magnética sobre uma interface  $\gamma$ . A representação geral da notação de (3.9) é dada na forma

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{h}]_{\gamma} = \mathbf{n} \times \mathbf{h}^+ \Big|_{\gamma^+} - \mathbf{n} \times \mathbf{h}^- \Big|_{\gamma^-}, \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{n}$  representa a normal à superfície do lado positivo da interface,  $\mathbf{w}$  uma função de peso para a integração (Método de Resíduos Ponderados, vide página 62),  $\mathbf{h}^+$  e  $\mathbf{h}^-$  as componentes de campo magnético para o lado positivo e o lado negativo da interface. Esta representação pode ser estendida para as relações apresentadas em (3.10) e (3.11).

Definido o problema magnetodinâmico pode-se escrever a formulação em potencial vetor magnético  $\mathbf{a}$  e potencial escalar elétrico  $v$  (Formulação  $\mathbf{a}-v$ ) geral em sua forma forte. Para tanto, define-se o potencial vetor magnético  $\mathbf{a}$  como

$$\mathbf{b} = \text{rot } \mathbf{a}, \quad (3.13)$$

pois,

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{a}) = 0, \quad (3.14)$$

respeitando a equação de Maxwell definida em (3.2).

Substituindo (3.13) em (3.3) tem-se

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\partial_t \text{rot } \mathbf{a}. \quad (3.15)$$

Reescrevendo (3.15)

$$\text{rot } \mathbf{e} + \partial_t \text{rot } \mathbf{a} = 0, \quad (3.16)$$

ou ainda,

$$\text{rot}(\mathbf{e} + \partial_t \mathbf{a}) = 0 \quad (3.17)$$

Pode-se assim definir o potencial escalar elétrico como

$$\mathbf{e} + \partial_t \mathbf{a} = -\text{grad } v, \quad (3.18)$$

e então o vetor campo elétrico é escrito na forma

$$\mathbf{e} = -\text{grad } v - \partial_t \mathbf{a} \quad (3.19)$$

Assim, as equações (3.1)-(3.11) apresentam a descrição para um problema magnetodinâmico, ainda genérico, e conduzem a forma forte dada por

$$\text{rot}(\text{vrot } \mathbf{a}) + \sigma(\text{grad } v + \partial_t \mathbf{a}) = \mathbf{j}_s \quad (3.20)$$

Aplicando o Método dos Resíduos Ponderados [28], a equação geral para a formulação magnetodinâmica pode ser escrita na forma fraca como

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \text{vrot } \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \\
& + \int_{\Omega} \sigma \text{grad } v \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \partial_t \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{j}_s \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Essa equação será comparada com a equação para a formulação magnetodinâmica incluindo as fontes de superfície e fontes de volume ao longo deste capítulo. A passagem entre a forma forte e forma fraca para as equações é análoga para a aplicação da técnica de subproblema e é apresentada na sequência deste documento.

### 3.2. A TÉCNICA DE SUBPROBLEMAS

A técnica de subproblemas no MEF fornece vantagens claras em problemas para os quais análises repetitivas são necessárias e ajuda a melhorar a precisão de soluções [28], [29]. Ela permite utilizar cálculos já desenvolvidos como solução inicial (fonte) para um novo subproblema, ao invés de refazer cálculos já considerados anteriormente, seja para variações geométricas ou mudanças físicas dentro do domínio de cálculo. Além disso, essa técnica permite trabalhar com diferentes malhas (projeção de malhas) para cada subproblema e melhorar a eficiência computacional devido ao tamanho reduzido dos subproblemas estabelecidos quando comparado à resolução do problema completo.

De maneira geral, a técnica de subproblemas tem sido aplicada com sucesso no cálculo apurado de distribuição de campo em circuitos magnéticos partindo de soluções aproximadas [30]–[32]. As soluções de referência para a análise em subproblemas contemplam modelos de baixa dimensão (1D ou 2D) [32], tubos de fluxo ideais, geometrias simplificadas [30], modelos lineares, e outras variações de problemas menos complexos. A partir da solução do problema simplificado, um novo subproblema é proposto buscando desenvolver modelos de simulação mais próximos do real.

Assim, regiões com fluxo disperso [33], variações de geometria [34], variações de propriedades físicas, não linearidades e efeitos 2D e 3D passam a ser considerados [32], seja para o problema completo ou para pequenas regiões de maior interesse. A solução completa para o problema pode ser obtida pela soma ou sobreposição de soluções [31] para os diferentes subproblemas estabelecidos tendo em vista linearidades dos operadores nas equações e Maxwell.

### 3.2.1. Formulação magnetodinâmica de subproblemas

Seja um problema inicial  $p$  e um subproblema secundário  $q$ , pode-se escrever as equações de Maxwell para o problema total como a soma das equações definida em cada subproblema

$$\text{rot}(\mathbf{h}_p + \mathbf{h}_q) = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_q, \quad (3.22)$$

$$\text{div}(\mathbf{b}_p + \mathbf{b}_q) = 0, \quad (3.23)$$

$$\text{rot}(\mathbf{e}_p + \mathbf{e}_q) = -(\partial_t \mathbf{b}_p + \partial_t \mathbf{b}_q) \quad (3.24)$$

As condições de interface são escritas de acordo com (3.25) e (3.27) garantindo a continuidade perpendicular do vetor campo magnético  $\mathbf{h}$  e a continuidade da componente tangencial do vetor indução magnética  $\mathbf{b}$ .

$$\left[ \mathbf{n} \times (\mathbf{h}_p + \mathbf{h}_q) \right]_{\gamma_q} = 0, \quad (3.25)$$

$$\left[ \mathbf{n} \times (\mathbf{e}_p + \mathbf{e}_q) \right]_{\gamma_q} = 0, \quad (3.26)$$

$$\left[ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_p + \mathbf{b}_q) \right]_{\gamma_q} = 0 \quad (3.27)$$

As relações constitutivas são escritas na forma

$$\mathbf{b}_p + \mathbf{b}_q = \mu_q (\mathbf{h}_p + \mathbf{h}_q), \quad (3.28)$$

$$\mathbf{j}_{e,p} + \mathbf{j}_{e,q} = \sigma_q (\mathbf{e}_p + \mathbf{e}_q) \quad (3.29)$$

As equações (3.22)-(3.29) podem ser escritas na forma das equações que seguem, mantendo as igualdades apresentadas para a soma linear das equações:

Equações de Maxwell para soma de subproblemas  $p$  e  $q$

$$\left\{ \text{rot}(\mathbf{h}_p + \mathbf{h}_q) = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_q \right\} = \left\{ \text{rot} \mathbf{h}_p = \mathbf{j}_p \right\} + \left\{ \text{rot} \mathbf{h}_q = \mathbf{j}_q \right\}, \quad (3.30)$$

$$\left\{ \text{div}(\mathbf{b}_p + \mathbf{b}_q) = 0 \right\} = \left\{ \text{div} \mathbf{b}_p = 0 \right\} + \left\{ \text{div} \mathbf{b}_q = 0 \right\}, \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \text{rot} (\mathbf{e}_p + \mathbf{e}_q) = -(\partial_t \mathbf{b}_p + \partial_t \mathbf{b}_q) \right\} = \\ \left\{ \text{rot} \mathbf{e}_p = -\partial_t \mathbf{b}_p \right\} + \left\{ \mathbf{e}_q = -\partial_t \mathbf{b}_q \right\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Condições de interface para soma de subproblemas  $p$  e  $q$

$$\begin{aligned} \left\{ \left[ \mathbf{n} \times (\mathbf{h}_p + \mathbf{h}_q) \right]_{\gamma_p = \gamma_q} = 0 \right\} = \\ \left\{ \left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_p \right]_{\gamma_p = \gamma_q} = \mathbf{j}_{su,p} \right\} + \left\{ \left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_q \right]_{\gamma_q} = -\mathbf{j}_{su,p} \right\}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \left[ \mathbf{n} \times (\mathbf{e}_p + \mathbf{e}_q) \right]_{\gamma_p = \gamma_q} = 0 \right\} = \\ \left\{ \left[ \mathbf{n} \times \mathbf{e}_p \right]_{\gamma_p = \gamma_q} = \mathbf{f}_{su,p} \right\} + \left\{ \left[ \mathbf{n} \times \mathbf{e}_q \right]_{\gamma_q} = -\mathbf{f}_{su,p} \right\}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \left[ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{b}_p + \mathbf{b}_q) \right]_{\gamma_p = \gamma_q} = 0 \right\} = \\ \left\{ \left[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_p \right]_{\gamma_p = \gamma_q} = \mathbf{b}_{su,p} \right\} + \left\{ \left[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_q \right]_{\gamma_q} = -\mathbf{b}_{su,p} \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Relações constitutivas para soma de subproblemas  $p$  e  $q$ :

$$\left\{ \mathbf{b}_p + \mathbf{b}_q = \mu_q (\mathbf{h}_p + \mathbf{h}_q) \right\} = \quad (3.36)$$

$$\left\{ \mathbf{b}_p = \mu_p \mathbf{h}_p \right\} + \left\{ \mathbf{b}_q = \mu_q \mathbf{h}_q + (\mu_q - \mu_p) \mathbf{h}_p \right\},$$

$$\left\{ \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_q = \sigma_q (\mathbf{e}_p + \mathbf{e}_q) \right\} = \quad (3.37)$$

$$\left\{ \mathbf{j}_p = \sigma_p \mathbf{e}_p \right\} + \left\{ \mathbf{j}_q = \sigma_q \mathbf{e}_q + (\sigma_q - \sigma_p) \mathbf{e}_p \right\}.$$

Assim, nota-se que em (3.33) e (3.35) os termos  $-\mathbf{j}_{su,p}$  e  $-\mathbf{b}_{su,p}$  são considerados como fontes de superfície para o problema  $q$  proveniente do problema inicial  $p$ . Enquanto que os termos adicionados em (3.36) e (3.37) para que as somas apresentadas em (3.28) e (3.29) sejam verdadeiras, são chamadas de fontes de volume [35].

Seja um subproblema  $q$ , pode-se escrever as equações de Maxwell, relações constitutivas, condições de contorno e condições de interface na forma que segue:

Equações de Maxwell

$$\text{rot} \mathbf{h}_q = \mathbf{j}_q, \quad (3.38)$$

$$\text{div} \mathbf{b}_q = 0, \quad (3.39)$$

$$\text{rot } \mathbf{e}_q = -\partial_t \mathbf{b}_q. \quad (3.40)$$

Relações constitutivas

$$\mathbf{b}_q = \mu_q \mathbf{h}_q + \mathbf{b}_{s,q} \text{ ou } \mathbf{h}_q = \nu_q \mathbf{b}_q + \mathbf{h}_{s,q}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{j}_q = \sigma_q \mathbf{e}_q + \mathbf{j}_{s,q} \quad (3.42)$$

Condições de contorno

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q \Big|_{\Gamma_{h_q}} = 0 \text{ ou } \mathbf{n} \times \mathbf{e}_q \Big|_{\Gamma_{e_q}} = 0, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_q \Big|_{\Gamma_{b_q}} = 0 \quad (3.44)$$

Condições de interface

$$\left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_q \right]_{\gamma_q} = \mathbf{j}_{su,q}, \quad (3.45)$$

$$\left[ \mathbf{n} \times \mathbf{e}_q \right]_{\gamma_q} = \mathbf{f}_{su,q}, \quad (3.46)$$

$$\left[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{b}_q \right]_{\gamma_q} = \mathbf{b}_{su,q} \quad (3.47)$$

Pode-se ainda, definir as fontes de superfície dadas por  $\mathbf{j}_{su,q}$ ,  $\mathbf{f}_{su,q}$  e  $\mathbf{b}_{su,q}$  provenientes da solução encontrada para o problema  $p$  anterior por

$$\mathbf{j}_{su,q} = -\mathbf{j}_{su,p}, \quad (3.48)$$

$$\mathbf{f}_{su,q} = -\mathbf{f}_{su,p}, \quad (3.49)$$

$$\mathbf{b}_{su,q} = -\mathbf{b}_{su,p} \quad (3.50)$$

Vale salientar que para a resolução do subproblema  $q$ , as fontes de superfície apresentadas são necessárias apenas na região de interface  $\gamma_q$  (Fontes de Superfície).

A partir das relações constitutivas apresentadas em (3.41) e (3.42), pode-se escrever:

$$\mathbf{b}_{s,q} = (\mu_q - \mu_p) \mathbf{h}_p \text{ ou } \mathbf{h}_{s,q} = (\nu_q - \nu_p) \mathbf{b}_p, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{j}_{s,q} = (\sigma_q - \sigma_p) \mathbf{e}_p \quad (3.52)$$

Observa-se que, neste caso, o vetor campo magnético  $\mathbf{h}_p$  do problema inicial  $p$  e o vetor campo elétrico  $\mathbf{e}_p$  do problema inicial  $p$  são necessários apenas onde houver alteração da permeabilidade e na condutividade no domínio de cálculo para o problema  $q$  (Fontes de Volume).

Definido o problema magnetodinâmico para a aplicação da técnica de subproblemas ao MEF, pode-se escrever a formulação em potencial vetor magnético  $\mathbf{a}$  e potencial escalar elétrico  $v$  (Formulação  $\mathbf{a}-v$ ) em sua forma forte. Para tanto, define-se o potencial vetor magnético  $\mathbf{a}$  para o problema  $q$  como, assim como definido para a formulação geral sem a aplicação da técnica de subproblemas.

$$\mathbf{b}_q = \text{rot } \mathbf{a}_q, \quad (3.53)$$

$$\mathbf{e}_q = -\text{grad } v_q - \partial_t \mathbf{a}_q \quad (3.54)$$

Substituindo (3.42) em (3.38),

$$\text{rot } \mathbf{h}_q = \sigma_q \mathbf{e}_q + \mathbf{j}_{s,q}, \quad (3.55)$$

e substituindo (3.54) em (3.55)

$$\text{rot } \mathbf{h}_q = \sigma_q \left( -\text{grad } v_q - \partial_t \mathbf{a}_q \right) + \mathbf{j}_{s,q}, \quad (3.56)$$

ou

$$\text{rot } \mathbf{h}_q + \sigma_q \left( \text{grad } v_q + \partial_t \mathbf{a}_q \right) = \mathbf{j}_{s,q} \quad (3.57)$$

Onde (3.57) representa a forma forte para um problema magnetodinâmico em formulação  $\mathbf{a}-v$  considerando as fontes de volume  $\mathbf{j}_{s,q}$  e  $\mathbf{b}_{s,q}$  incluídas na formulação. Na sequência deste trabalho serão apresentados os procedimentos para a formulação  $\mathbf{a}-v$  em sua forma fraca e, para tanto, o Método dos Resíduos Ponderados será aplicado nesta formulação.

### 3.2.2. Forma fraca para o problema magnetodinâmico em subproblemas

Seja a equação (3.57) reescrita na forma

$$\text{rot } \mathbf{h}_q + \sigma_q \left( \text{grad } v_q + \partial_t \mathbf{a}_q \right) - \mathbf{j}_{s,q} = 0 \quad (3.58)$$

A forma fraca da equação (3.58) é obtida utilizando o Método de Resíduos ponderados. Este método consiste em igualar a equação apresentada a um resíduo  $\mathbf{R}$  e definir que, para todo o domínio  $\Omega$ , a soma dos resíduos multiplicados pela função peso  $\mathbf{w}$  será nula, ou seja,

$$\int_{\Omega} \mathbf{R} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0. \quad (3.59)$$

Logo, pode-se escrever

$$\int_{\Omega} \left( \text{rot } \mathbf{h}_q + \sigma_q \left( \text{grad } v_q + \partial_t \mathbf{a}_q \right) - \mathbf{j}_{s,q} \right) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0 \quad (3.60)$$



ou

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{h}_q \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\sigma_q \operatorname{grad} v_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\sigma_q \partial_t \mathbf{a}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{j}_{s,q} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

O estabelecimento das formas fracas de formulações associadas aos problemas que envolvem derivadas parciais, e sobre os quais se baseia o método de elementos finitos, conduz às duas fórmulas de Green dadas por

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} v \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, v \, d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \, v \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \\ & = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \end{aligned} \quad (3.63)$$

com  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $u$  e  $v$  definidos no domínio  $\Omega$  e na fronteira  $\Gamma$ , tais que essas integrais tenham sentido. Geralmente, estas integrais são definidas nos espaços de Sobolev de campos escalares e vetoriais, ou seja,

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \partial_x u, \partial_y u, \partial_z u \in L^2(\Omega) \right\}, \quad (3.64)$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \partial_x \mathbf{u}, \partial_y \mathbf{u}, \partial_z \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \right\}. \quad (3.65)$$

Assim, utilizando a fórmula de Green (3.63), pode-se escrever o primeiro termo da equação (3.61) como

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} (\mathbf{h}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{h}_q \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma. \quad (3.66)$$

Finalmente, a equação pode ser escrita em sua forma completa por

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{h}_q \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \sigma_q \operatorname{grad} v_q \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \sigma_q \partial_t \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{j}_{s,q} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Definindo,

$$\operatorname{grad} v_q = \mathbf{u}_q, \quad (3.68)$$

obtem-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \mathbf{h}_q \cdot \text{rot } \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \\
 & + \int_{\Omega} \sigma_q \mathbf{u}_q \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_q \partial_t \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \mathbf{j}_{s,q} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0.
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

O segundo termo de (3.69) pode ser apresentado como a soma das condições de fronteira e de interface no domínio magnético conforme apresentado por

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_h} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \\
 & + \int_{\gamma^+} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q^+) \cdot \mathbf{w} \, d\gamma^+ - \int_{\gamma^-} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q^-) \cdot \mathbf{w} \, d\gamma^-,
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_h} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \\
 & + \int_{\gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q]_{\gamma_q} \cdot \mathbf{w} \, d\gamma.
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

e assim, (3.69) pode ser escrita por

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \mathbf{h}_q \cdot \text{rot } \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma \\
 & + \int_{\gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q]_{\gamma_q} \cdot \mathbf{w} \, d\gamma + \int_{\Omega} \sigma_q \mathbf{u}_q \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \sigma_q \partial_t \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{w} \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{j}_{s,q} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0
 \end{aligned} \tag{3.72}$$

Aplicando a relação apresentada em (3.41) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nu_q \operatorname{rot} \mathbf{a}_q \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{h}_{s,q} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Omega \\
& + \int_{\Gamma_h} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma + \int_{\gamma} [\mathbf{n} \times \mathbf{h}_q]_{\gamma_q} \cdot \mathbf{w} \, d\gamma \\
& + \int_{\Omega} \sigma_q \mathbf{u}_q \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_q \partial_t \mathbf{a}_q \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{j}_{s,q} \cdot \mathbf{w} \, d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{3.73}$$

A equação (3.73) representa a forma fraca para a formulação magnetodinâmica de um problema  $q$  incluindo as fontes de volume e as fontes de superfície de um problema anterior  $p$ . Estas fontes são observadas comparando-se essa equação com a equação (3.21). A fonte de volume é representada pelo segundo termo na equação (3.73) definida sobre a região onde haja modificação de características físicas do material. O quarto termo dessa mesma equação apresenta a fonte de superfície para o subproblema, definida apenas na região de interface.

Além disso, considerando subproblemas para os quais uma fonte de tensão seja indicada ao invés de uma fonte de corrente, uma relação de circuito adicional precisa ser descrita [36]. Neste caso, considerando uma bobina  $\Omega_s$  para um subproblema  $q$  que possua uma resistência  $R_q$  pode-se escrever a tensão  $U_q$  com relação a variação do fluxo magnético concatenado nesta bobina  $\partial_t \Phi_q$  na forma

$$U_q = R_q I_q - \partial_t \Phi_q \tag{3.74}$$

O fluxo magnético é calculado através da integração do produto escalar da densidade de corrente normalizada e do potencial vetor magnético na região da bobina, ou seja,

$$\Phi_q = \int_{\Omega_s} \frac{\mathbf{j}_q}{I_q} \cdot \mathbf{a}_q \, d\Omega \tag{3.75}$$

Neste trabalho, as relações de circuito são estabelecidas para o transformador trifásico e as simulações deste dispositivo são realizadas via fonte de tensão considerando o tipo de ligação (Y-Delta) no sistema trifásico. Para o transformador monofásico, conforme já apresentado no capítulo anterior, as simulações foram realizadas via fonte de corrente e as tensões sobre as bobinas calculadas através das relações de circuito aqui apresentadas.

### 3.3. CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou a formulação magnetodinâmica para subproblemas com a inclusão de fontes de superfície e fontes de volume na aplicação de Técnica SP-MEF. O capítulo seguinte apresenta a aplicação dessa formulação aos modelos dimensionais dos transformadores apresentados no Capítulo 2.

### MODELAGEM DE TRANSFORMADORES COM APLICAÇÃO DA TÉCNICA DE SUBPROBLEMAS

Ao invés de resolver o problema completo para a modelagem de transformadores, incluindo bobinas, o núcleo ferromagnético, o tanque e o *shunt* magnético, este capítulo propõe cálculos sucessivos via MEF com aplicação da Técnica SP-MEF considerando modelos de diferente precisão e a delimitação de regiões pelo tipo de material. A aplicação da Técnica SP-MEF permite que um cálculo local seja realizado apenas na região modificada, ou seja, sem a necessidade de refazer cálculos já realizados anteriormente, seja para variações da geometria [32] ou das características físicas dos materiais [37]. Isto permite que a malha de elementos finitos seja adaptada e que a precisão da solução seja melhorada, considerando o tamanho reduzido de cada novo subproblema.

As correções entre os diferentes subproblemas são realizadas através de fontes de volume (VS) e de fontes de superfície (SS), conforme definidas de acordo com a formulação apresentada no Capítulo 3. Estas fontes são projetadas a partir de um problema inicial  $p$  para um subproblema secundário  $q$ , que resultará na correção, ou no campo de reação, para o problema completo sob análise. Se a projeção de soluções de um problema  $p$  é realizada sobre uma superfície (interface), em um problema 3D, por exemplo, essa fonte é chamada de fonte de superfície. Porém, se a projeção é realizada sobre um volume (domínio), esta fonte é dita fonte de volume. A necessidade de uma fonte de superfície ou uma fonte de volume é definida de acordo com cada novo subproblema proposto. Assim, partindo-se de um modelo inicial simplificado, é possível realizar o incremento de soluções, ou perturbações, através de cálculos sucessivos até a modelagem de geometrias mais complexas e a inclusão de efeitos anteriormente desconsiderados sobre as características físicas dos materiais analisados. As simplificações consideradas para o problema inicial podem ser corrigidas com o incremento das soluções e a inclusão destes efeitos na modelagem de dispositivos.

Neste capítulo, são apresentadas correções realizadas sobre as dimensões (1D-2D) e sobre as variações de geometria e características de materiais para um transformador monofásico, a fim de demonstrar possíveis aplicações da Técnica SP-MEF. Para cada novo subproblema,

a formulação incluindo a fonte de superfície ou a fonte de volume é apresentada. Além disso, a Técnica de SP-MEF é aplicada na modelagem de um transformador trifásico, a fim de comparar os resultados encontrados com dados reais de ensaio sobre um transformador equivalente e com os resultados desta simulação.

#### 4.1. APLICAÇÕES DA TÉCNICA DE SUBPROBLEMAS

A aplicação da Técnica SP-MEF é apresentada neste trabalho através da modelagem de um transformador monofásico e considerando a formulação magnetodinâmica com inclusão de fontes de superfície ou fontes de volume. Esta modelagem é realizada inicialmente via MEF convencional para um modelo simplificado de tubo de fluxo ideal em 1D e expandida para modelos mais complexos (2D com efeitos de dispersão, por exemplo). Contudo, a modelagem em tubo de fluxo ideal em 1D apresenta vantagens relativas à precisão das soluções e a simplificação de cálculos para os modelos definidos. Uma breve justificativa para a aplicação de modelos simplificados é apresentada na sequência deste documento. Todas as simulações são realizadas no domínio da frequência e o núcleo, o *shunt* magnético e o tanque são considerados como sendo materiais lineares.

##### 4.1.1. Modelagem em Tubo de Fluxo Ideal

Um tubo de fluxo ideal pode ser entendido como uma região cilíndrica do espaço, ou domínio, na qual as linhas de campo são paralelas às paredes deste tubo e o campo está uniformemente distribuído ao longo de sua seção transversal. Em um caso ideal, as paredes do tubo de fluxo seriam compostas por um material de alta condutividade (condutor perfeito) e, assim, o fluxo magnético estaria confinado no interior do tubo, não havendo dispersão de fluxo.

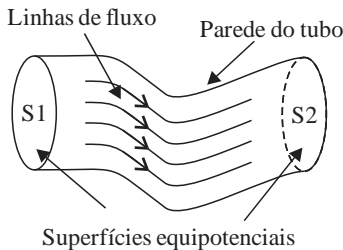


Figura 20: Representação de um tubo de fluxo ideal.

A Figura 20 apresenta um tubo de fluxo ideal, indicando as linhas de fluxo, as paredes do tubo e as superfícies equipotenciais. Devido a sua estrutura geométrica simples e ao apelo conceitual, muitas vezes, a representação de fenômenos magnéticos na forma de tubos de fluxo é facilitada. Na modelagem de um tubo de fluxo ideal, a força magnetomotriz (MMF), ou o fluxo no interior do tubo, é especificada e o domínio de cálculo restringe-se ao interior desta região com condições de contorno especiais aplicadas às paredes do tubo [38].

#### 4.1.2. Modelagem em dimensão reduzida

Devido a simetrias longitudinais e a simetrias axiais, muitos modelos reais são representados em dimensões reduzidas (2D, 1D), a fim de reduzir o custo computacional, simplificar os cálculos a serem realizados e possibilitar a aplicação de técnicas mais precisas para obtenção de soluções. Na aplicação do MEF, por exemplo, uma malha de elementos finitos mais refinada (elementos finitos menores) pode ser estabelecida para regiões em 2D, caso essa representação seja possível, garantindo uma solução com uma precisão muito maior do que uma representação completa em 3D, com um tempo e custo computacional muito menor. Além disso, caso haja simetrias, a solução obtida em um modelo 2D pode ser projetada para um modelo em 3D sem que a precisão da solução encontrada seja prejudicada.

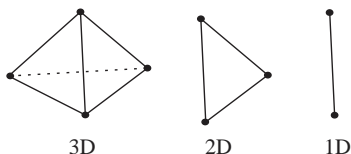


Figura 21: Elementos finitos tetraédricos para 3D, triangulares para 2D e lineares para 1D.

Na modelagem em 3D os elementos finitos em geral são representados por tetraedros, enquanto que na modelagem 2D são representados por triângulos e em 1D, apenas por linhas, conforme apresentado na Figura 21. A modelagem de elementos em linhas, ao invés de tetraedros, representa um custo computacional muito menor, no entanto, deve-se considerar um balanceamento entre os custos envolvidos e a precisão de soluções encontradas. De maneira geral, não existe uma geometria que possua simetria em duas dimensões possibilitando que sua modelagem seja realizada em apenas 1D. Assim como para a modelagem

em 2D, a modelagem de geometrias em apenas uma dimensão apresenta vantagens claras quanto ao custo computacional requerido para a obtenção desta solução. Apesar disso, nem sempre a geometria a ser modelada apresenta uma simetria e, neste caso, a diminuição da dimensão para 1D pode implicar em perdas significativas na precisão da solução. Assim, uma correção entre a ampliação de cada dimensão se faz necessária e, neste caso, a Técnica SP-MEF pode ser aplicada com sucesso.

### 4.1.3. Variação de Dimensões 1D-2D

Uma solução 1D pode ser definida como uma aproximação inicial da solução total de um sistema mais complexo via SP-MEF. Neste caso, um coeficiente geométrico é estabelecido para as demais dimensões e correções devem ser realizadas a fim de considerar a estrutura geométrica do problema completo.

#### 4.1.3.1. Projeção de Soluções

Uma solução 1D para um fluxo de tubo ideal pode ser calculada para o modelo dimensional analítico do transformador monofásico conforme Figura 22. Esta figura que apresenta as linhas equipotenciais de campo magnético em 1D considerando elementos finitos na linha média do transformador (base da Figura 22).

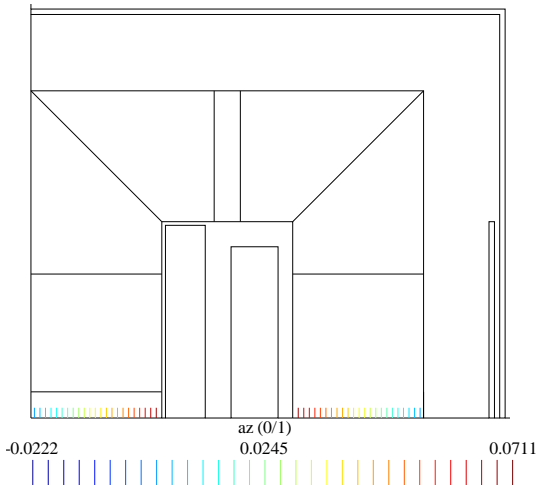


Figura 22: Distribuição do fluxo magnético para tubo de fluxo ideal em 1D.



A solução apresentada na Figura 22 representa uma distribuição do fluxo magnético no interior do núcleo do transformador considerando um coeficiente geométrico fixo de um metro. Esta solução pode ser projetada para as colunas do transformador (vertical e horizontal) conforme apresentado na Figura 23. A projeção da solução leva em conta o caminho magnético ou o comprimento da projeção ao longo do núcleo magnético.

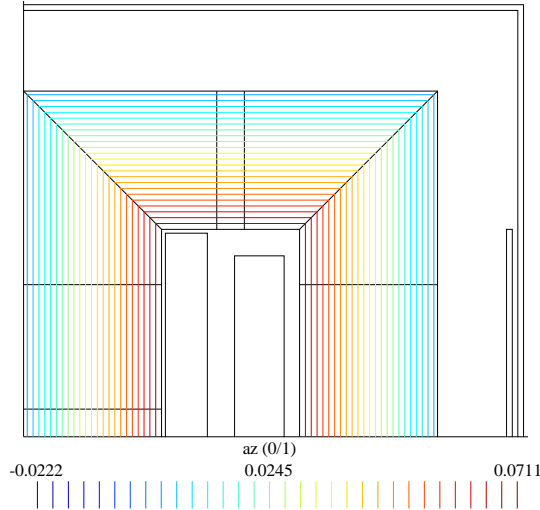


Figura 23: Projeção da distribuição do fluxo magnético do tubo de fluxo ideal em 1D para 2D.

#### 4.1.3.2. Correções para variação de 1D-2D

Seja a formulação magnetodinâmica apresentada no Capítulo 3, a projeção da solução 1D é a solução para o problema inicial  $p$  e serve como uma fonte de superfície para a correção necessária, ou subproblema  $q$ . Assim, conforme equação apresentada em (3.25), tem-se

$$\left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_p + \mathbf{n} \times \mathbf{h}_q \right]_{\gamma_q} = 0, \quad (4.1)$$

ou:

$$\left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_q \right]_{\gamma_q} = - \left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_p \right]_{\gamma_q}. \quad (4.2)$$

Considerando a fronteira entre a projeção das soluções, pode-se definir a superfície normal à cada lado da interface, conforme apresentado na Figura 24.

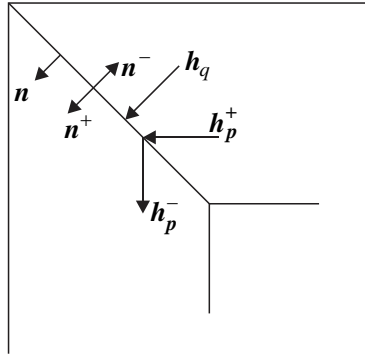


Figura 24: Projeção da solução 1D e passagem 2D.

Neste caso, a projeção das soluções é necessária apenas para uma camada de elementos, seja do lado positivo ou negativo da fronteira, a fim de estabelecer a fonte de superfície para a correção local do problema. A Figura 25 apresenta a projeção da solução 1D sobre uma camada de elementos na região de interface, onde a correção deve ser realizada, tendo em vista a descontinuidade da componente tangencial de campo magnético nesta região.

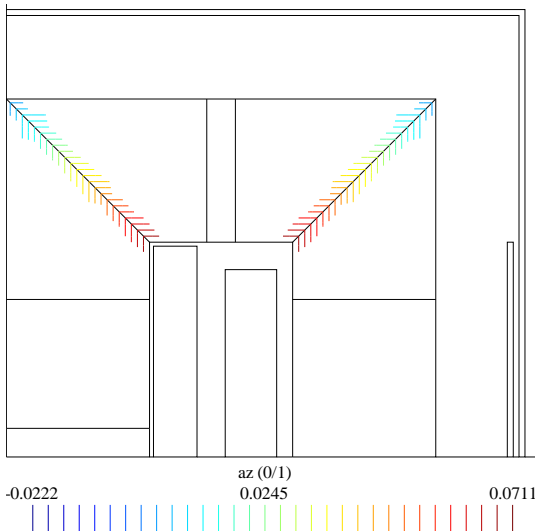


Figura 25: Projeção da distribuição do fluxo magnético 1D para uma camada de elementos na interface.

Neste caso, com base na Figura 24, pode-se escrever

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h}_p = \mathbf{n}^+ \times \mathbf{h}_p^+ + \mathbf{n}^- \times \mathbf{h}_p^-, \quad (4.3)$$

ou

$$\mathbf{n} \times \mathbf{h}_p = \mathbf{n} \times \mathbf{h}_p^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{h}_p^-. \quad (4.4)$$

Retomando (4.2), pode-se escrever

$$\left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_q \right]_{\gamma_q} = - \left( \mathbf{n} \times \mathbf{h}_p^+ - \mathbf{n} \times \mathbf{h}_p^- \right), \quad (4.5)$$

ou simplesmente

$$\mathbf{j}_{su,q} = -\mathbf{j}_{su,p}. \quad (4.6)$$

Neste caso, considerando que no subproblema  $q$  não há novas fontes de corrente, ou variações das características dos materiais no domínio de cálculo, ou desconsiderando os efeitos da variação temporal, a equação geral da formulação magnetodinâmica para este subproblema, com base em (3.72), se reduz a

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_q \text{rot } \mathbf{a}_q \cdot \text{rot } \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\gamma} \left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_q \right]_{\gamma_q} \cdot \mathbf{w} \, d\gamma = 0, \quad (4.7)$$

ou

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_q \text{rot } \mathbf{a}_q \cdot \text{rot } \mathbf{w} \, d\Omega = - \int_{\gamma} \left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_q \right]_{\gamma_q} \cdot \mathbf{w} \, d\gamma, \quad (4.8)$$

e finalmente,

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_q \text{rot } \mathbf{a}_q \cdot \text{rot } \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\gamma} \mathbf{j}_{su,p} \cdot \mathbf{w} \, d\gamma. \quad (4.9)$$

A equação (4.9) deve ser resolvida para o subproblema  $q$  e demonstra a fonte de superfície proveniente do subproblema  $p$  através de uma densidade superficial de corrente  $\mathbf{j}_{su,p}$ , definida a partir da relação entre os campos projetados para as colunas horizontal e vertical do transformador, conforme a equação (4.3). A Figura 26 apresenta a solução encontrada para o problema  $q$  conforme formulação apresentada e via MEF.

Contudo, a aplicação da Técnica SP-MEF permite, neste caso, realizar a correção local do fenômeno de canto do núcleo ferromagnético considerando a passagem de uma solução para o problema 1D em tubo de fluxo ideal para a solução de um problema em 2D também em tubo de fluxo ideal. Vale salientar que, a solução obtida para este modelo pode ser projetada para um modelo em 3D realizando as correções necessárias sobre as regiões onde as condições de interface não sejam respeitadas. Neste trabalho, no entanto, optou-se por restringir a aplicação da técnica

para modelos em 2D e avaliar outros efeitos tais como a dispersão e as variações das características dos materiais aplicados no projeto do transformador.

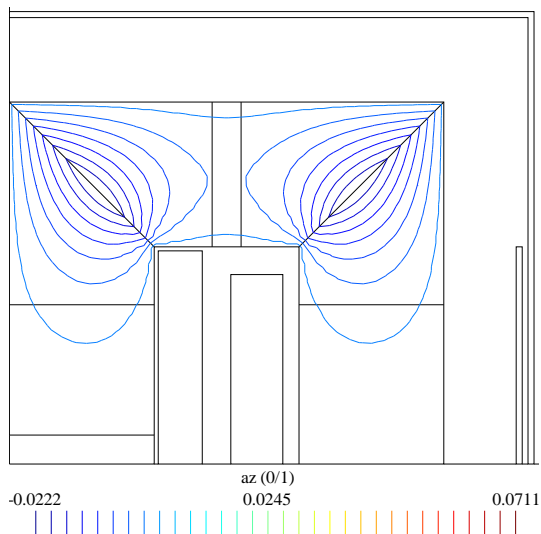


Figura 26: Distribuição de fluxo magnético para a correção de passagem 1D para 2D em um tubo de fluxo ideal.

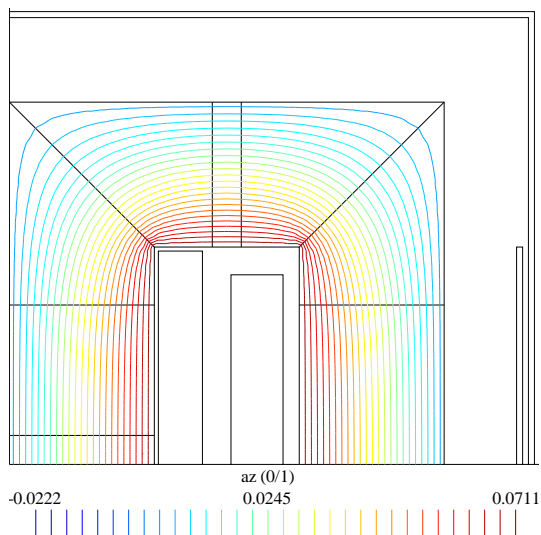


Figura 27: Distribuição de fluxo magnético para um tubo de fluxo ideal em 2D.

A soma das soluções encontradas para os subproblemas  $p$  e  $q$  representa a solução completa para um tubo de fluxo ideal em 2D. Esta solução é apresentada na Figura 27.

#### 4.1.3.3. Efeitos de dispersão

Assim como a correção apresentada para os efeitos de canto do núcleo do transformador, uma correção pode ser definida considerando a passagem entre um tubo de fluxo ideal para um caso real, ou seja, que considere os efeitos de dispersão. Neste caso, para o subproblema primário  $p$ , há a presença de campo magnético apenas no interior do núcleo, sendo que os campos na janela do transformador e na superfície externa são nulos. A Figura 28 apresenta a relação entre os campos e a normal das superfícies interna e externa ao núcleo. A fonte para o subproblema secundário  $q$  é considerada apenas nas superfícies da fronteira (fonte de superfície).

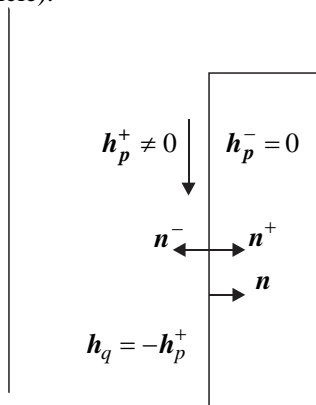


Figura 28: Projção da solução 2D em tubo de fluxo ideal e passagem 2D real.

Para a correção do efeito de dispersão, (4.5) pode ser reescrita por

$$\left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_q \right]_{\gamma, q} = - \left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_p^+ \right]_{\gamma_q}, \quad (4.10)$$

pois  $\mathbf{h}_p^- = 0$  e, neste caso, pode-se escrever

$$\mathbf{j}_{su, p} = \left[ \mathbf{n} \times \mathbf{h}_p^+ \right]_{\gamma_q} \quad (4.11)$$

e assim, (4.9) é satisfeita.

Neste caso, a fonte de superfície para a correção dos efeitos de dispersão é proveniente de um subproblema  $p$  de tubo de fluxo ideal em

2D representado pela solução anteriormente encontrada conforme Figura 27. A Figura 29 apresenta a projeção da solução para um tubo de fluxo ideal em 2D como fonte de superfície para a correção do efeito de dispersão na modelagem do transformador.

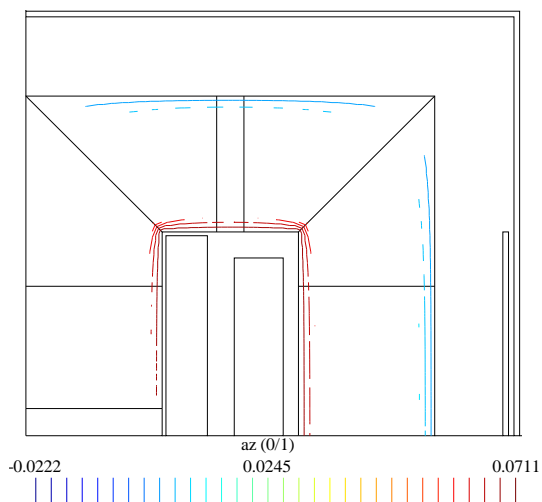


Figura 29: Projeção da distribuição de fluxo magnético para o tubo de fluxo ideal em 2D.

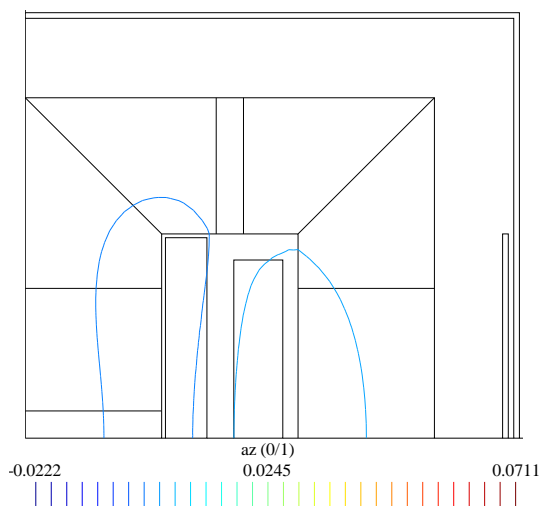


Figura 30: Correção da distribuição de fluxo magnético para efeito de dispersão a partir de tubo de fluxo ideal.

A Figura 30 apresenta o resultado do campo de reação para o efeito de dispersão sobre o núcleo o transformador considerando a fonte de superfície definida pela equação (4.11) e a resolução da equação (4.9). A soma das soluções encontradas na Figura 27 e na Figura 30 é apresentada da na Figura 31, onde o efeito de cantos e o efeito de dispersão foram incluídos com aplicação da Técnica SP-MEF.

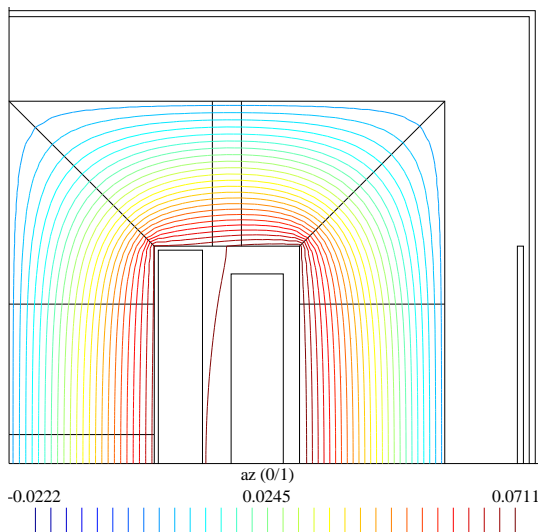


Figura 31: Distribuição de fluxo magnético para um tubo de fluxo real em 2D.

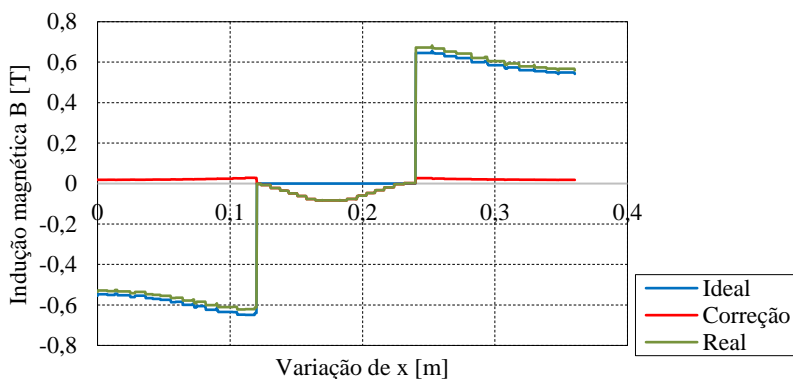


Figura 32: Indução B em tesla (T) ao longo do eixo x para tubo de fluxo ideal, correção e tubo de fluxo real.

A Figura 32 apresenta o gráfico da indução magnética  $B$  em tesla [T] para uma seção ao longo do eixo  $x$  na composição de diferentes subproblemas: tubo de fluxo ideal, correção para o efeito de dispersão na janela do transformador e o resultado real (com dispersão). Neste caso, a soma da solução “ideal” com a solução “correção”, apresentadas na Figura 32, resulta na solução “real”, apresentada no gráfico de indução.

A soma das soluções da Figura 23, da Figura 26 e da Figura 30 conduz ao resultado apresentado na Figura 31. Esta soma é apresentada na Figura 33 para os diferentes subproblemas propostos na modelagem do transformador monofásico.

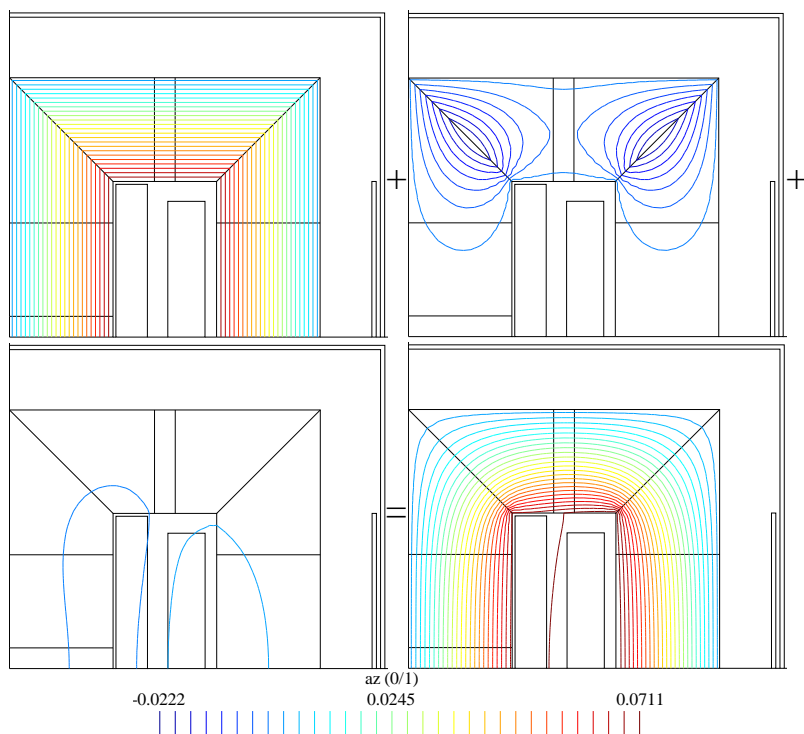


Figura 33: Representação da soma da distribuição de fluxo magnético de subproblemas.

#### 4.1.4. Modificações de características físicas de regiões

A modificação da característica física de uma determinada região para um subproblema secundário  $q$  pode ser entendida como uma fonte



de volume ou como uma fonte de superfície [36]. No caso de uma fonte de volume, a solução deve ser projetada sobre toda a região fonte (domínio fonte), enquanto que, para uma fonte de superfície, a solução deve ser projetada apenas para uma camada de elementos na interface entre as regiões de fronteira.

Seja um problema de modelagem do transformador monofásico considerando inicialmente apenas a presença das bobinas no ar, ou que a permeabilidade do material ferromagnético do núcleo se aproxime da permeabilidade do vácuo ( $\mu_{fe} \rightarrow \mu_0$ ), uma solução pode ser calculada pela formulação magnetodinâmica via MEF convencional conforme apresentado na Figura 34. A projeção desta solução serve de fonte para a correção de alteração da permeabilidade no interior do núcleo  $\mu_{fe} \neq \mu_0$ .

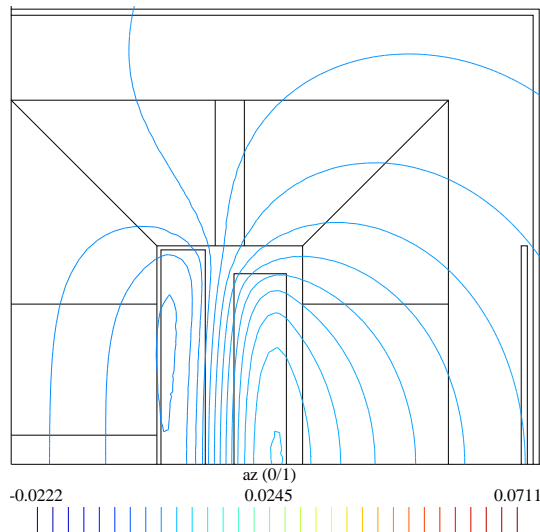


Figura 34: Distribuição de fluxo magnético para bobinas sozinhas.

Seja a passagem de subproblemas onde haja variação da permeabilidade em uma dada região, a equação a ser resolvida para o problema secundário  $q$ , proveniente da equação geral apresenta em (3.72), pode ser escrita na forma (4.12), tendo em vista que não há novas fontes de corrente ou correções nas condições de interface para o problema secundário  $q$ .

$$\int_{\Omega} \nu_q \operatorname{rot} \mathbf{a}_q \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{h}_{s,q} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

Dadas as equações apresentadas em (3.51), a equação a ser resolvida para o subproblema  $q$  apresentada em (4.12), pode ser reescrita na forma

$$\int_{\Omega} v_q \operatorname{rot} \mathbf{a}_q \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} (v_q - v_p) \mathbf{b}_p \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Omega = 0, \quad (4.13)$$

ou ainda

$$\int_{\Omega} v_q \operatorname{rot} \mathbf{a}_q \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Omega = - \int_{\Omega} (v_q - v_p) \mathbf{b}_p \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Omega. \quad (4.14)$$

Desta maneira, o termo do lado direito de (4.14) representa a fonte de volume proveniente do problema  $p$  é considerada apenas na região onde houve mudança da permeabilidade do material, ou seja, no interior do núcleo do transformador, conforme apresentado na Figura 35.

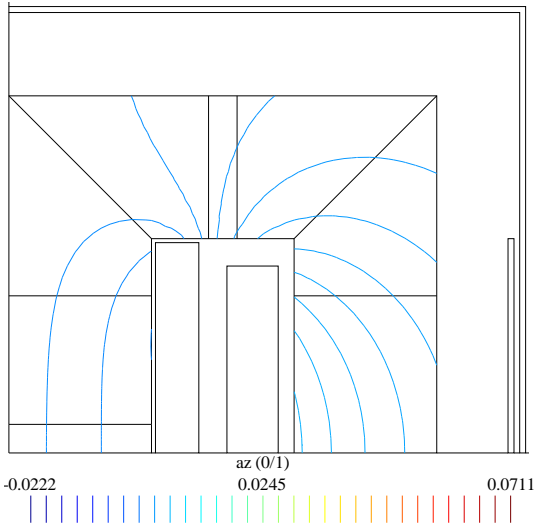


Figura 35: Projeção da distribuição de fluxo magnético para bobinas sozinhas como fonte de volume para subproblema secundário.

A resolução de (4.14) conduz a solução apresentada na Figura 36. A soma da solução encontrada na Figura 34 com a solução encontrada na Figura 36 é apresentada na Figura 37 e nota-se que, neste caso, esta solução é equivalente a solução apresentada na Figura 31, porém, obtida com a variação da permeabilidade do núcleo a partir de um problema inicial com bobinas sozinhas, enquanto que aquela foi obtida a partir de um tubo de fluxo ideal em 1D com correções via SP-MEF para variação da dimensão e consideração do efeito de dispersão.

Nota-se que a mesma análise pode ser realizada quando há uma variação da condutividade do material, conforme o termo definido para fonte de volume apresentado na equação (3.42). Neste caso, o termo  $j_{s,q}$  representaria uma fonte de volume em forma de uma densidade de corrente proveniente do problema primário  $p$  e referida ao problema secundário  $q$ .

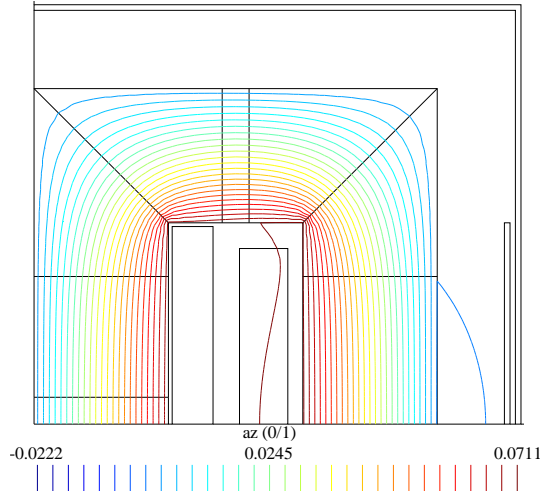


Figura 36: Distribuição do fluxo magnético do problema secundário para variação da permeabilidade do núcleo.

Partindo-se da solução inicial para bobinas sozinhas pode-se calcular a correção para a variação da permeabilidade do núcleo como uma fonte de superfície conforme a projeção apresenta na Figura 38. Neste caso, a equação que representa o subproblema secundário  $q$  é escrita analogamente às equações (4.3)-(4.9). A resolução destas equações conduz a um resultado similar ao apresentado na Figura 36 e a solução completa (soma de soluções) é igual a solução da Figura 37. Assim como realizado para a alteração da permeabilidade do núcleo sobre o problema inicial incluindo apenas as bobinas, alterações podem ser realizadas sobre outras partes constituintes do transformador tais como o tanque, o *shunt* magnético e a inclusão de um entreferro, caso necessário.

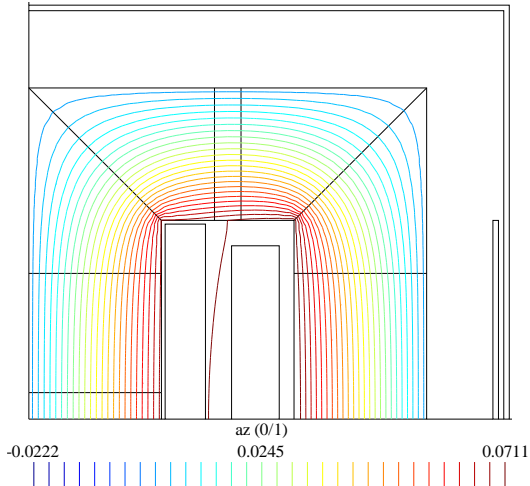


Figura 37: Distribuição do fluxo magnético final para o problema de variação da permeabilidade na região do núcleo com fonte de volume.

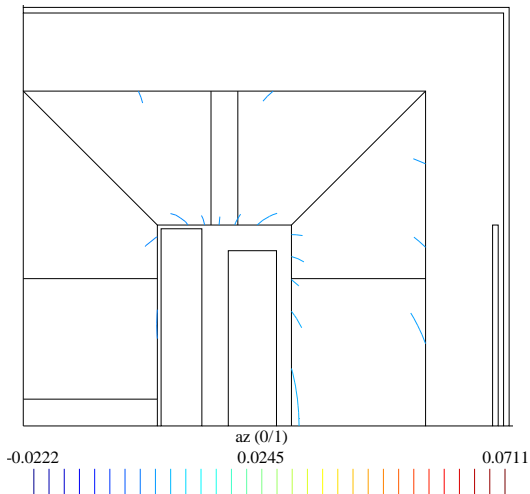


Figura 38: Projeção da distribuição de fluxo magnético para fonte de superfície e alteração da permeabilidade no núcleo.

Para todos estes casos, a fonte para o problema secundário poderá ser do tipo fonte de volume ou fonte de superfície e o seu resultado apresentará o campo de reação e a correção para o problema primário localmente. Neste sentido, demonstra-se que a Técnica SP-MEF é

extremamente versátil, podendo ser aplicada em diferentes regiões para o problema de modelagem de diversos dispositivos eletromagnéticos, incluindo transformadores. Contudo, neste capítulo, a fim de comparar os resultados de simulações com valores de ensaios sobre um dispositivo equivalente, apresenta-se ainda a modelagem de um transformador trifásico.

#### 4.2. MODELAGEM DE UM TRANSFORMADOR TRIFÁSICO VIA SUBPROBLEMAS

Sugere-se aqui a modelagem de um transformador trifásico partindo-se de uma solução em 1D e realizando correções sucessivas para alcançar uma modelagem completa em 2D com a inclusão de efeitos de dispersão, perdas no tanque e inclusão de um *shunt* magnético.

A Figura 39 apresenta a solução para um tubo de fluxo ideal em 2D calculado a partir da solução para um tubo de fluxo ideal em 1D. A projeção desta solução sobre uma camada de elementos finitos na fronteira (Figura 40) serve como fonte de superfície para um problema posterior que incluirá o efeito de dispersão nesta solução.

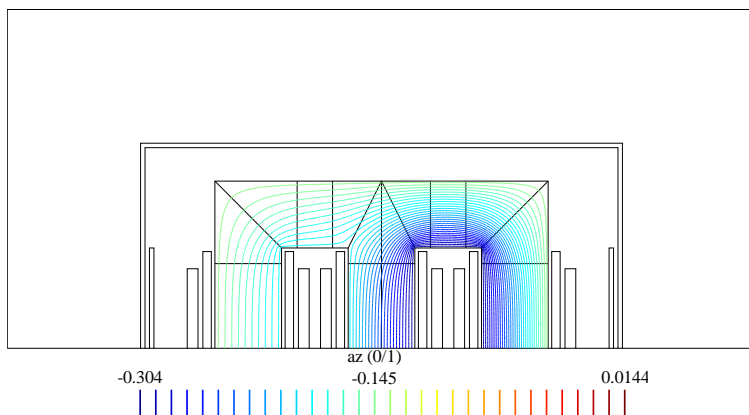


Figura 39: Distribuição do fluxo magnético para tubo de fluxo ideal em 2D do transformador trifásico

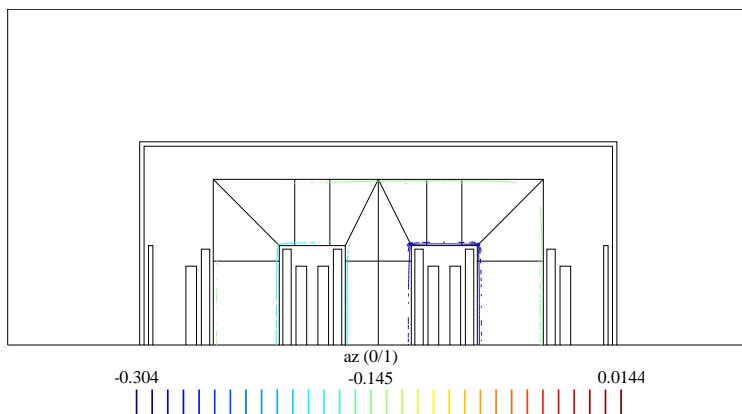


Figura 40: Projeção da distribuição do fluxo magnético em 2D para um IFT.

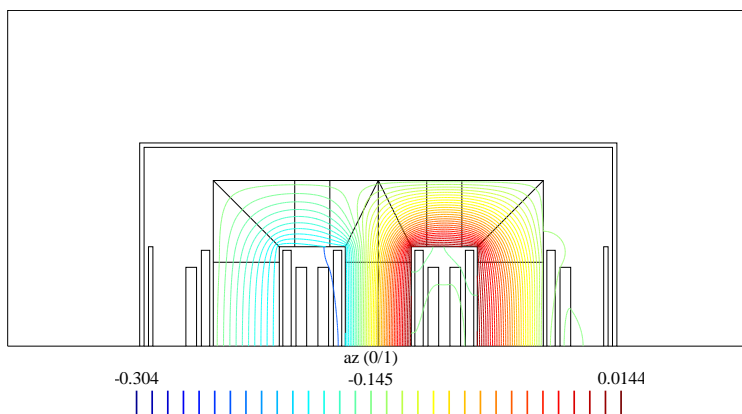


Figura 41: Correção da distribuição de fluxo magnético para efeitos de dispersão no transformador trifásico.

A Figura 41 apresenta o resultado do problema secundário, que somado à solução apresentada na Figura 39, resulta na Figura 42. Contudo, nota-se que a solução encontrada com a passagem dos diferentes subproblemas (Figura 42) é igual a solução encontrada para a modelagem via MEF apresentada no Capítulo 2 (Figura 18).

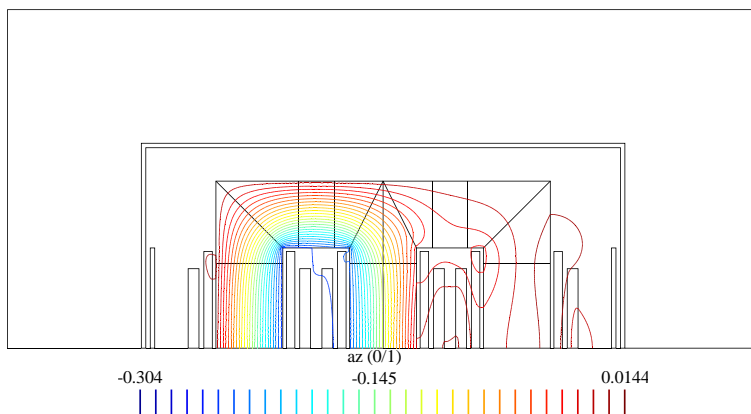


Figura 42: Distribuição do fluxo magnético para o transformador trifásico considerando efeitos de dispersão.

#### 4.2.1. Simulações com transformador trifásico

Simulações foram realizadas com o transformador trifásico para verificar a eficiência dos cálculos realizados com a aplicação da Técnica SP-MEF e com o modelo dimensional estabelecido. Os resultados para simulações em plena carga, curto-circuito e circuito aberto estão apresentados na Tabela VIII.

Observa-se, através da Tabela VIII, que, para a simulação em plena carga, a modelagem demonstrou-se eficiente em relação aos valores de correntes e tensões sobre as bobinas, considerando o transformador trifásico projetado segundo o modelo dimensional apresentado no Capítulo 2 e a aplicação da Técnica SP-MEF descrita no Capítulo 3. Os valores de corrente e tensão estão defasados em  $120^\circ$  para o sistema trifásico equilibrado e suas amplitudes são coerentes com o tipo de ligação trifásica definido (Y-Delta) e conforme as especificações da Tabela III no Capítulo 2.

Tabela VIII : Resultados de simulações do transformador trifásico

Frequência = 60Hz		Condições de simulação					
		Plena Carga		Curto Circuito		Circuito Aberto	
		Mod.	Fase	Mod.	Fase	Mod.	Fase
Tensão no primário (kV)	V1=	79,7	0,0	79,7	0,0	79,7	0,0
	V2=	79,7	-120,0	79,7	-120,0	79,7	-120,0
	V3=	79,7	120,0	79,7	120,0	79,7	120,0

Frequência = 60Hz		Condições de simulação					
		Plena Carga		Curto Circuito		Circuito Aberto	
		Mod.	Fase	Mod.	Fase	Mod.	Fase
Corrente no primário (A)	I1=	164,1	-24,0	408,2	-89,9	0,8	-100,4
	I2=	163,3	-144,1	402,5	150,6	0,6	150,3
	I3=	163,4	96,2	408,1	31,0	0,8	40,8
Tensão no secundário (kV)	V1=	13,3	-23,7	0,0	0,0	14,5	0,0
	V2=	13,2	-143,9	0,0	0,0	14,5	-120,0
	V3=	13,2	96,4	0,0	0,0	14,5	120,0
Corrente no secundário (A)	I1=	899,5	156,3	2235,7	90,1	0,0	0,0
	I2=	895,0	36,1	2206,1	-29,4	0,0	0,0
	I3=	894,5	-83,6	2235,4	-149,0	0,0	0,0

#### 4.2.2. Indutância de dispersão

Com a inclusão do efeito de dispersão sobre a modelagem do transformador trifásico e realizando a modelagem do transformador em curto-circuito, pode-se calcular a indutância de dispersão pela relação

$$L = 2 \frac{W}{I_{2cc}^2}, \quad (4.15)$$

onde  $W$  representa a energia na janela do transformador e  $I_{2cc}$  é a corrente no secundário obtida com a modelagem do ensaio de curto-circuito no transformador trifásico, conforme apresentado na Tabela VIII.

A integração da área da janela do transformador obtida por SP-MEF fornece a energia aplicada em (4.15) e resulta em uma reatância de dispersão de 77,12  $\Omega$ . Este valor é comparado com o valor analítico e com um valor experimental sobre um transformador equivalente, conforme apresentado na Tabela IX.

Tabela IX: Resultados para a Reatância de dispersão do transformador trifásico

	Resultado experimental	Resultado do cálculo analítico	Resultado da modelagem SP-MEF
Reatância de dispersão	81,57 $\Omega$	76,52 $\Omega$	77,12 $\Omega$
Erro relativo	0%	6,2%	5,45%



### 4.2.3. Inclusão do tanque e do *shunt* magnético

Simulações são realizadas com aplicação da Técnica SP-MEF para a variação das características físicas relativas à condutividade e permeabilidade dos materiais para a inclusão do *shunt* magnético e do tanque do transformador trifásico. Até o momento, as simulações realizadas consideraram que as características dos materiais nestas regiões se igualavam ao ar e, portanto, estas regiões estavam negligenciadas. A realização de simulações para a inclusão destas regiões em um modelo convencional MEF requer que todos os cálculos até então apresentados sejam refeitos, acarretando em um tempo computacional elevado para esta função. Contudo, com a aplicação da Técnica SP-MEF, estas regiões podem ser incluídas considerando os cálculos anteriormente realizados como fonte para o novo subproblema definido.

Para a inclusão do tanque do transformador considerou-se a variação da permeabilidade e da condutividade do material sobre a região delimitada e utilizou-se a solução apresentada na Figura 42 como fonte para esta solução. A distribuição de fluxo magnético para o problema completo com a inclusão do tanque do transformador é apresentado na Figura 43.

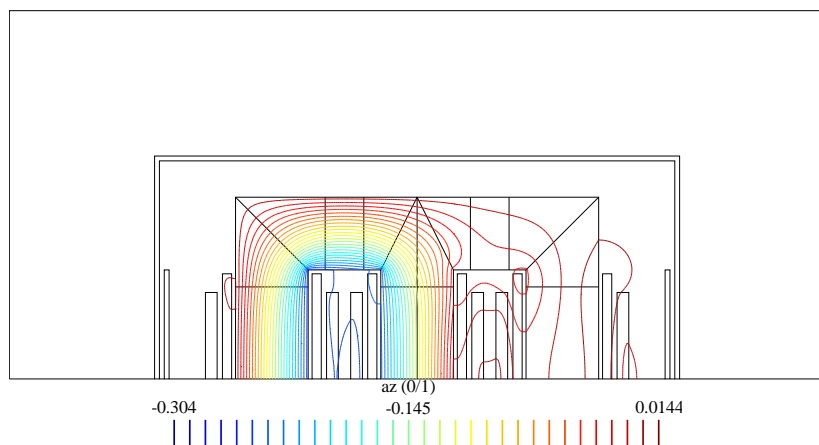


Figura 43: Distribuição do fluxo magnético para o modelo do transformador trifásico com tanque.

Um *shunt* magnético foi adicionado como uma região de alta permeabilidade a fim de verificar a influência sobre as linhas de campo. O resultado é apresentado na Figura 44.

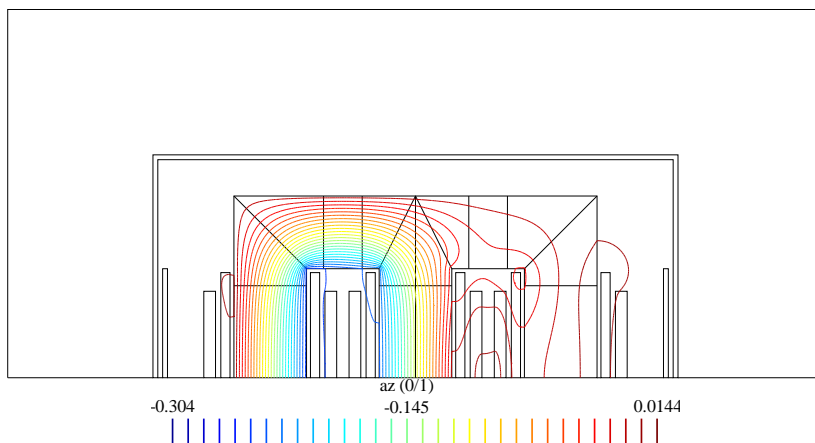


Figura 44: Distribuição do fluxo magnético para o transformador trifásico em 2D RFT completo.

### 4.3. TEMPO COMPUTACIONAL E ROTINA DE SUBPROBLEMAS

A Tabela X apresenta o tempo computacional das simulações realizadas sobre o transformador trifásico para os diferentes subproblemas apresentados neste capítulo da dissertação realizadas em um computador de uso pessoal Intel Core i5 2.20Ghz com 8,00 GB de RAM.

Tabela X: Tempo de simulações realizadas sobre o transformador trifásico

Nº	Problemas e subproblemas modelados	Tempo (s)
1	1D em IFT	1,453
2	2D em IFT	1,875
3	2D em RFT	3,453
4	1D em IFT até 2D em IFT	2,299
5	2D em IFT até 2D em RFT	4,172
6	2D em RFT até inclusão tanque	6,047

Observa-se nesta tabela que o tempo computacional para os modelos que incluem a passagem entre subproblemas (problemas 4-6) são maiores do que os tempos computacionais dos modelos que não incluem esta passagem (problemas 1-3). Porém, para modelos que incluam análises repetitivas, o tempo computacional com aplicação da técnica SP-

MEF representará uma redução significativa devido a possibilidade de trabalhar com regiões locais e o aumento da precisão de soluções com a variação de 1D até 3D. A Figura 45 apresenta a rotina de cálculo estabelecida para a modelagem de transformadores partindo-se do cálculo dimensional até a modelagem completa em 2D destes dispositivos via Técnica SP-MEF.

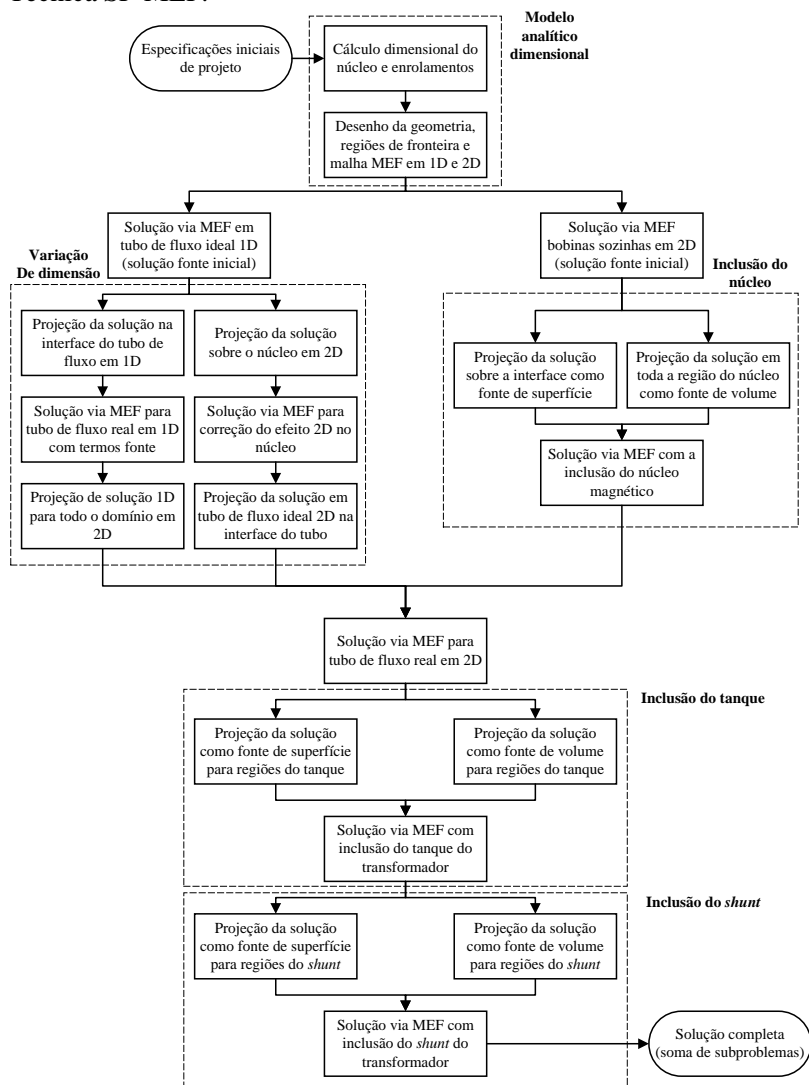


Figura 45: Rotina de aplicação da técnica SP-MEF em transformadores.

Como exemplo da redução de tempo computacional com aplicação da Técnica SP-MEF, pode-se citar a modelagem do transformador trifásico com a inclusão do tanque e do *shunt* magnético. Sem a aplicação da Técnica SP-MEF, para a inclusão de cada uma destas regiões na simulação um novo problema completo precisaria ser resolvido, enquanto que, com a aplicação de subproblemas, facilmente pode-se modificar as características físicas destas regiões, tornando o tempo e o custo computacional total muito menor. Em uma análise convencional via MEF, ao menos duas simulações similares ao modelo 2D em RFT seriam necessárias, tendo em vista que este modelo considera a presença de todas as regiões. Neste caso, o tempo total para as duas simulações seria próximo de duas vezes 3,453, ou seja, 3,906, representando 0,859 s a mais que as simulações com a aplicação da Técnica SP-MEF. Além disso, se houver inclusão do *shunt* magnético, a diferença entre os tempos de simulação aumenta pois, neste caso, ao menos três modelagens completas seriam necessárias.

Quanto à variação de 1D-3D com a aplicação da Técnica SP-MEF, pode-se observar que o tempo para a modelagem em subproblemas de 1D em IFT até 2D em IFT é menor do que a soma dos problemas 1D em IFT e 2D em IFT. Além disso, com o tempo computacional reduzido em uma modelagem 1D, é possível definir uma malha de elementos finitos muito mais fina e garantir que a precisão das soluções seja melhorada.

#### 4.4. CONCLUSÃO

Neste capítulo apresentou-se a aplicação da Técnica SP-MEF para a modelagem de transformadores considerando a passagem entre os diferentes níveis de subproblemas através do incremento das soluções. O modelo do transformador monofásico e o modelo do transformador trifásico apresentados no Capítulo 2 foram usados para a modelagem e demonstrou-se que os resultados da aplicação da Técnica SP-MEF são equivalentes aos resultados encontrados pela modelagem via MEF convencional, porém, com um tempo computacional reduzido para modelos onde haja variações das características físicas dos materiais ou de geometria.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou a Técnica SP-MEF como uma alternativa para a modelagem de sistemas eletromagnéticos onde análises repetitivas precisem ser realizadas e a precisão de soluções melhorada. Um modelo de projeto analítico de transformadores considerando o cálculo dimensional para o núcleo e para os enrolamentos foi utilizado como base para o desenvolvimento de uma ferramenta para a modelagem de tais dispositivos. As simulações foram realizadas sobre um transformador monofásico e sobre um transformador trifásico e validou-se os resultados obtidos via MEF e via SP-MEF. Os resultados encontrados com a aplicação da nova técnica e com o método convencional de elementos finitos foram similares e as correções sugeridas com a nova técnica demonstraram-se condizentes com os valores esperados. Além disso, apresentou-se a formulação magnetodinâmica com a inclusão de fontes de superfície e fontes de volume para a aplicação na modelagem de transformadores. Esta formulação permite que os efeitos variáveis no tempo sejam levados em conta na modelagem e poderá ser aplicada para a modelagem de outros dispositivos eletromagnéticos.

As simulações realizadas sobre os transformadores monofásico e trifásico foram apresentadas em diferentes níveis de subproblemas considerando a formulação magnetodinâmica e a eficiência na aplicação da Técnica SP-MEF foi destacada. O tempo computacional para os problemas com a aplicação da técnica demonstraram-se inferiores ao tempo computacional para análises repetitivas com aplicação do MEF convencional. Contudo, a aplicação da técnica demonstrou-se eficiente na realização de cálculos recursivos e especialmente interessante para casos de modelagem e otimização de dispositivos eletromagnéticos com geometrias e características de materiais altamente complexas.

Como sugestões para continuidade deste trabalho, sugere-se:

- Aplicar a Técnica SP-MEF para a inclusão de efeitos da não linearidade sobre as modelagens realizadas para o transformador monofásico e para o transformador trifásico;

- Modelar transformadores em 3D com aplicação da Técnica SP-MEF utilizando os resultados da modelagem 1D e 2D como termos fontes para a nova modelagem;
- Combinar a aplicação da Técnica SP-MEF com um modelo de otimização em projeto de transformadores;
- Realizar estudos relacionados a projeção de soluções para malhas de elementos finitos diferentes e avaliar o tempo computacional destes modelos;
- Aplicar a Técnica SP-MEF para a modelagem e otimização de outros dispositivos eletromagnéticos.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. Martignoni, *Transformadores*, 8th ed. Sao Paulo: Editora Globo, 1991.
- [2] R. M. Del Vecchio, B. Poulin, P. T. Feghali, D. M. Shah, and R. Ahuja, *Transformer Design Principles*. 2010.
- [3] P. S. Georgilakis, M. A. Tsili, and A. T. Souflaris, “A heuristic solution to the transformer manufacturing cost optimization problem,” vol. 181, pp. 260–266, 2007.
- [4] M. A. Arjona, C. Hernandez, and M. Cisneros-Gonzalez, “Hybrid optimum design of a distribution transformer based on 2-D FE and a manufacturer design methodology,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 2864–2867, 2010.
- [5] P. S. Georgilakis, *Spotlight on modern transformer design*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [6] J. P. A. Bastos and N. Sadowski, *Electromagnetic modeling by finite element methods*. CRC press, 2003.
- [7] P. Zhou, W. N. Fu, D. Lin, S. Stanton, and Z. J. Cendes, “Numerical modeling of magnetic devices,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 40, no. 4, pp. 1803–1809, 2004.
- [8] L. Krahenbuhl and D. Muller, “Thin layers in electrical engineering-example of shell models in analysing eddy-currents by boundary and finite element methods,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 2, pp. 1450–1455, 1993.
- [9] I. D. Mayergoyz and G. Bedrosian, “On calculation of 3-D eddy currents in conducting and magnetic shells,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 31, no. 3, pp. 1319–1324, 1995.
- [10] C. Geuzaine, P. Dular, and W. Legros, “Dual formulations for the modeling of thin electromagnetic shells using edge elements,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 799–803, 2000.
- [11] E. I. Amoiralis, P. S. Georgilakis, M. A. Tsili, and A. G. Kladas, “Global transformer optimization method using evolutionary design and numerical field computation,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 3, pp. 1720–1723, 2009.
- [12] Z. Badics, Y. Matsumoto, K. Aoki, F. Nakayasu, M. Uesaka, and K.

- Miya, "An Effective 3-D Finite Element Scheme for Computing Electromagnetic Field Distortions Due to Defects in Eddy-Current Nondestructive Evaluation," vol. 33, no. 2, pp. 1012–1020, 1997.
- [13] P. Dular, R. V. Sabariego, J. Gyselinck, and L. Krähenbühl, "Sub-Domain Finite Element Method for Efficiently Considering Strong Skin and Proximity Effects," 1993.
- [14] C. Geuzaine and J. Remacle, "Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 79, no. 11, pp. 1309–1331, 2009.
- [15] P. Dular, C. Geuzaine, F. Henrotte, and W. Legros, "A general environment for the treatment of discrete problems and its application to the finite element method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3395–3398, 1998.
- [16] R. G. JORDÃO, "Transformadores," *Edgard Blücher*, 2002.
- [17] A. C. Franklin and D. P. Franklin, *The J & P transformer book: a practical technology of the power transformer*. Elsevier, 2013.
- [18] C. W. T. McLyman, *Transformer and inductor design handbook*. CRC press, 2016.
- [19] S. V. Kulkarni and S. A. Khaparde, *Transformer Engineering Design and Practice*. Marcel Dekker, 2004.
- [20] I. A. Hernandez, J. M. Cañedo, J. C. Olivares-galvan, S. Member, and E. Betancourt, "Novel Technique to Compute the Leakage Reactance of Three-Phase Power Transformers," vol. 31, no. 2, pp. 437–444, 2016.
- [21] S. Jing, W. Hao, C. Ning, Z. Jibin, and L. Xueyuan, "The Calculation of Inductance Parameter for Wounded Rotating Transformer," in *2015 Fifth International Conference on Instrumentation and Measurement, Computer, Communication and Control (IMCCC)*, 2015, pp. 157–160.
- [22] H. Fukumoto, T. Furukawa, H. Itoh, and M. Ohchi, "Calculating leakage reactance of 9-winding transformer using time-dependent 3D FEM analysis," in *Industrial Electronics Society, IECON 2015-41st Annual Conference of the IEEE*, 2015, pp. 4459–4464.
- [23] L. Rabins, "TransFormer Reactance Calculations with Digital Computers," 1956.



- [24] G. Meunier, *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*. Wiley, 2008.
- [25] J. M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley, 2002.
- [26] J. P. A. Bastos, *Eletromagnetismo para engenharia: estática e quase-estática*. 2004.
- [27] P. Dular, W. Legros, and A. Nicolet, “Coupling of local and global quantities in various finite element formulations and its application to electrostatics, magnetostatics and magnetodynamics,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 34, no. 5, pp. 3078–3081, 1998.
- [28] P. Dular, J. Gyselinck, F. Henrotte, W. Legros, and J. Melkebeek, “Complementary finite element magnetodynamic formulations with enforced magnetic fluxes,” *COMPEL Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.*, vol. 18, no. 4, pp. 656–667, 1999.
- [29] P. Dular, R. V. Sabariego, C. Geuzaine, M. V. F. da Luz, P. Kuo-Peng, and L. Krahenbuhl, “Finite element magnetic models via a coupling of subproblems of lower dimensions,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 2827–2830, 2010.
- [30] P. Dular, P. Kuo-Peng, M. Ferreira da Luz, and L. Krähenbühl, “Wide range progressive inductor models in magnetic vector potential finite element formulations,” *Proc. NUMELEC 2015*, p. 2, 2015.
- [31] P. Dular, P. Kuo-Peng, M. Ferreira da Luz, and L. Krähenbühl, “Model refinements of transformers via a subproblem finite element method,” *Proc. ISEF 2015*, 2015.
- [32] O. Bíró David A. Lowther, P. Alotto, P. Dular, R. V. Sabariego, and L. Krähenbühl, “Magnetic model refinement via a perturbation finite element method-from 1D to 3D,” *COMPEL-The Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.*, vol. 28, no. 4, pp. 974–988, 2009.
- [33] P. Dular, R. V. Sabariego, M. V. F. da Luz, P. Kuo-Peng, and L. Krahenbuhl, “Perturbation finite element method for magnetic model refinement of air gaps and leakage fluxes,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 45, no. 3, pp. 1400–1403, 2009.
- [34] P. Dular, M. V. Ferreira da Luz, P. Kuo-Peng, and L. Krähenbühl, “Correction of homogenized lamination stacks via a subproblem finite element method,” *COMPEL Int. J. Comput. Math. Electr.*

*Electron. Eng.*, vol. 34, no. 5, pp. 1553–1563, 2015.

- [35] P. Dular, L. Krahenbuhl, R. V. Sabariego, M. V. F. Da Luz, P. Kuo-Peng, and C. Geuzaine, “A finite element subproblem method for position change conductor systems,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, no. 2, pp. 403–406, 2012.
- [36] P. Dular, V. Péron, L. Krähenbühl, and C. Geuzaine, “Subproblem Finite-Element Refinement of Inductors From Wire to Static and Dynamic Volume Models,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 3, p. 7093449, 2015.
- [37] P. Dular, R. V. Sabariego, C. Geuzaine, M. V. Ferreira Da Luz, P. Kuo-Peng, and L. Krahenbuhl, “Finite element magnetic models via a coupling of subproblems of lower dimensions,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 46, no. 8, pp. 2827–2830, 2010.
- [38] P. Dular, J. Gyselinck, T. Henneron, and F. Piriou, “Dual finite element formulations for lumped reluctances coupling,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, no. 5, pp. 1396–1399, 2005.