



TARTU ÜLIKOOL



**Maido Rahula**

**SISSEJUHATUS**

**DIFERENTSIAAL-  
GEOMEETRIASSE**

TARTU 1991

**TARTU ÜLIKOOL**

**Maido Rahula**

**SISSEJUHATUS**

**DIFERENTSIAAL-  
GEOMEETRIASSE**

**TARTU 1991**

Kinnitatud matemaatikateaduskonna nõukogus 21. juunil 1991.

SISUKORD

Eessõna . . . . .	3
1. peatükk Mida on vaja diferentsiaalgeomeetriale	
§ 1. Hulkadest ja kujutustest . . . . .	4
§ 2. Vektorruumidest ja lineaarkujutustest . . . . .	9
§ 3. Matemaatilisest analüüsist . . . . .	14
2. peatükk Vektorväljad ja diferentsiaalvormid	
§ 4. Vektorväljad . . . . .	27
§ 5. Diferentsiaalvormid . . . . .	39
§ 6. Jaotus ruumis . . . . .	44
3. peatükk Mähkijad	
§ 7. Mähisjooned ja -pinnad . . . . .	54
§ 8. Diferentsiaalinvარიანდიდ . . . . .	84
4. peatükk Diferentsiaalvõrrandid	
§ 9. Harilikud diferentsiaalvõrrandid . . . . .	101
§ 10. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid . . . . .	112
§ 11. Pindade valgustamine . . . . .	118
§ 12. Lahendamata ülesandeid . . . . .	132
Register . . . . .	133

See brošuur on mõeldud õppevahendina, kuid mitte õpikuna. Ta on sissejuhatus või proloog enne sisenemist tollesse imeparasesse hoonesse, mille nimeks on diferentsiaalgeomeetria. On ju vaja ette valmistada teed ja rajad, et oleks võimalik läheneda sellele ehitisele, tutvuda tema arhitektuuri ja koostisosadega. Brošuur hõlbustab loengute jälgimist ja konspekterimist, aga ei asenda neid.

Lisaks sellele puuab brošuur ehitada silda seni omaette eksisteerinud suveraansete matemaatika valdkondade vahel, nagu geomeetria, algebra, matemaatiline analüüs ja diferentsiaalvõrrandid. Tänapäeval on sona otseses mõttes maailma vallutanud katastroofid ehk täpsemalt - kujutuste singulaarsused. Katastroofide teooria lätted on kusagil funktsionaalanalüüsi sügavustes, kuid nad on kujundanud uue aluse erinevate matemaatiliste kontseptsioonide mõistmisel. Tuginedes olemasolevatele klassikalistele teooriatele, pakub uus mõttealaad üllatavalt häid mudeleid nii täppisteadustes kui ka neist kaugemates teadusharudes. Sageli esinevad katastroofid ka geomeetrias, ja vastupidi, katastroofide kirjeldamine ja rakendamine eeldab alati head geomeetrilist ettevalmistust.

Seda on arvestatud materjali valikul. Kahes esimeses peatükis tegeleme struktuuridega, mis otseselt ei kuulu geomeetria valdkonda, kuid on edaspidi vajalikud. Kolmandas peatükis tutvume nn. mähkijatega ning kujutuste invariantidega, mida tavakohaselt peetakse diferentsiaalgeomeetria komponenttsi kuuluvaiks. Viimases, neljandas peatükis aga süveneme diferentsiaalvõrrandite probleemidesse, et sellega näidata diferentsiaalgeomeetria osatähtsust kaasaegses matemaatikas.

Soovitame lugejal erilist tähelepanu pöörata joonistele ja toodud näidetele.

# 1. peatükk. MIDA ON VAJA DIFERENTSIAALGEOMETRIALES

## § 1. Hulkadest ja kujutustest

1.1. Muidugi me eeldame üldtuntuks järgmised sümbolid:  $A, B, C, \dots$  on hulgad;  $a, b \in A$  -  $a$  ja  $b$  on hulga  $A$  elemendid;  $\forall a \in A$  -  $a$  on hulga  $A$  suvaline element;  $U \subset A$  -  $U$  on hulga  $A$  alamhulk;  $\emptyset$  - tühi hulk;  $A \cap B$  - kahe hulga ühisosa;  $A \cup B$  - nende ühend;  $A \times B$  - otsekorrutis;  $A^2 = A \times A$  - otseruut ja  $1_A$  ehk  $\text{id}_A$  - tema diagonaal;  $\mathbb{R}^n$  -  $n$ -ruum,  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  - ruumi  $\mathbb{R}^n$  punkt.

1.2. Alamhulka  $f \subset A \times B$  nimetatakse hulkade  $A$  ja  $B$  vaheliseks seoseks. Seejuures  $(a, b) \in f$  korral  $\tilde{a}$  koneldakse, et elemendid  $a$  ja  $b$  on seoses  $f$ .

Olgu  $f(a)$  hulga  $B$  alamhulk, mille elemendid on seoses  $f$  elemendiga  $a \in A$ , ja  $f^{-1}(b)$  hulga  $A$  alamhulk, mille elemendid on seoses  $f$  elemendiga  $b \in B$ ; siis on kolm samaväärset võimalust kirja panna, et  $a$  ja  $b$  on seoses  $f$ :

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow b \in f(a) \Leftrightarrow a \in f^{-1}(b).$$

Iga seosega  $f \subset A \times B$  kaasneb pöördseks  $f^{-1} \subset B \times A$ ,

$$(a, b) \in f \Leftrightarrow (b, a) \in f^{-1}.$$

Ilmselt  $(f^{-1})^{-1} = f$ . Juhul  $f = f^{-1}$  nimetatakse seost  $f \subset A^2$  summeeriliseks.

1.3. Kahe seose  $f \subset A \times B$  ja  $g \subset B \times C$  korral on võimalik moodustada nende seoste kompositsioon  $gf \subset A \times C$ :

$$(a, c) \in gf \Leftrightarrow f(a) \cap g^{-1}(c) \neq \emptyset.$$

Margime, et kompositsiooni asemel kasutatakse ka teisi termineid - korrutis ja superpositsioon. Sümboli  $gf$  asemel kirjutatakse ka  $g \circ f$ .

Kehtib nn. kolmanda projektsiooni reegel

$$gf = \text{Pr}_{A \times C} \{ (A \times g) \cap (f \times C) \}.$$

Otsekorrutis  $f \times g$  koosneb kolmikutest  $(a, b, c) \in A \times B \times C$ , kus  $a$  ja  $b$  on seoses  $f$ , otsekorrutis  $A \times g$  aga kolmikutest  $(a, b, c)$ , kus  $b$  ja  $c$  on seoses  $g$ . Ühisosassa  $(A \times g) \cap (f \times C)$  kuuluvad kolmikud moodustavad projekteerimisel  $A \times B \times C \rightarrow A \times C : (a, b, c) \mapsto (a, c)$  seose  $gf$ .

Mõtlemiseks kaks küsimust. Mis on  $xz$ -tasandil liitfunktsiooni  $z = g(f(x))$  graafik, kui funktsioonide  $y = f(x)$  ja  $z = g(y)$  graafikud on antud vastavalt  $xy$ - ja  $yz$ -tasandil? Kuidas tõlgendada puutujate

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ ja } z - z_0 = g'(y_0)(y - y_0)$$

kompositsiooni?

1.4. Kompositsiooni pööramiseks kehtib vordus

$$(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}.$$

Iga seose  $f \subset A \times B$  puhul on seosed  $f^{-1}f \subset A^2$  ja  $ff^{-1} \subset B^2$  sümmeetrilised.

1.5. Seos  $f \subset A \times B$  võib rahuldada vähemalt üht tingimust

$$\begin{array}{ll} 1. ff^{-1} \subset 1_B, & 2. f^{-1}f = 1_A, \\ 3. f^{-1}f \subset 1_A, & 4. ff^{-1} = 1_B. \end{array}$$

Tingimusel 1 (v. tingimusel 2) iga  $a \in A$  korral koosneb hulk  $f(a)$  ülimalt (v. vähemalt) ühest hulgast  $B$  elementidest. Tingimused 3 ja 4 pole aga midagi muud kui tingimused 1 ja 2 pöördseose  $f^{-1}$  jaoks.

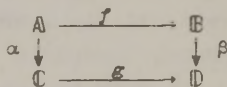
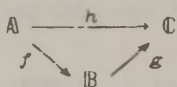
Tingimusel 1 nimetame seost  $f$  funktsiooniks hulgast  $A$  hulka  $B$ , tingimustel 1 ja 2 hulga  $A$  kujutuseks hulka  $B$ , tingimustel 1, 2, 3 injektiooniks, tingimustel 1, 2, 4 surjektiooniks ja tingimustel 1 - 4 bijektiooniks.

Injektioon (v. surjektioon, bijektioon) on injektiivne (v. surjektiivne, bijektiivne) kujutus.

Mõtlemiseks: kui  $\varphi f_1 = \psi f_2$ , kus  $\varphi$  on injektioon, või  $f_1 \psi = f_2 \phi$ , kus  $\psi$  on surjektioon, siis  $f_1 = f_2$ , st. seoste vordust on võimalik taandada injektiooniga vasakult ja surjektiooniga paremalt.

1.6. Nool  $f: A \rightarrow B$  tähendab, et  $f$  on hulga  $A$  kujutus hulka  $B$ . Kirjutis  $f: a \mapsto b$  tähendab, et kujutus  $f$  kujutab elemendi  $a$  elemendiks  $b$ , st.  $b = f(a)$ ; seejuures  $b$  on  $a$  kujutis ja  $a$  on  $b$  originaal. Kirjutist  $f: A \rightarrow B: a \mapsto b$  me mõistame nii, et  $f$  on hulga  $A$  kujutus hulka  $B$ , mis kujutab elemendi  $a$  elemendiks  $b$ . Nool  $\dashrightarrow$  ja  $\dashrightarrow$  tähendavad vastavalt injeksiooni ja surjektsiooni.

Koneldakse, et järgmised diagrammid



on kommutatiivsed, kui vastavalt  $h = gf$  või  $ga = \beta f$ . Siin ja ka edaspidi räägime kommutatiivsetest diagrammidest.

Juhul, kui kolmnurkses diagrammis  $ABC$  nool  $f$  kujutab surjektsiooni ja nool  $g$  injeksiooni, on tegemist kujutuse  $h$  kanoonilise eestusega.

1.7. Kolmnurkses diagrammis  $ABC$  antud  $f$  ja  $g$  puhul on nool  $h$  alati üheselt määratud:  $h = gf$ . Küsimus: millal on määratud nool  $g$ , kui on antud  $f$  ja  $h$ , ning nool  $f$ , kui on antud  $g$  ja  $h$ ? Võib kõnelda võrrandist  $h = gf$  noole  $g$  või  $f$  suhtes. Vastuseks on järgmine

LAUSE. Kujutus  $g$  eksisteerib antud  $f$  ja  $h$  puhul parajasti siis, kui

$$h^{-1}h = f^{-1}f,$$

seejuures on ta määratud üheselt, kui  $f$  on surjektsioon. Kujutus  $f$  aga eksisteerib antud  $g$  ja  $h$  puhul parajasti siis, kui

$$hh^{-1} = gg^{-1},$$

seejuures on ta määratud üheselt, kui  $g$  on injeksioon.

Tõestuse jätame lugejale.

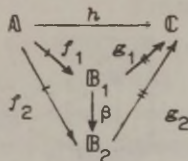
JARELDUS. Kujutus  $f: A \rightarrow B$  on injektiivne parajasti siis, kui eksisteerib kujutus  $g: B \rightarrow A$ , selline, et  $gf = 1_A$ ; kujutus  $g: B \rightarrow A$  on surjektiivne parajasti siis, kui eksisteerib kujutus  $f: A \rightarrow B$ , selline, et  $gf = 1_A$ . Väljendame seda lühemalt lausega: injeksioon on pööratav vasakult, surjektsioon pa-

remalt.

Mõlemal juhul on tegemist võrrandiga  $h = g f$ , kus  $h = 1_A$ ; esimesel juhul  $g$  suhtes, teisel  $f$  suhtes.

Bijektsiooni  $f$  korral rahuldab mõlemaid tingimusi pöördseos  $f^{-1}$ :  $f^{-1}f = 1_A$ ,  $ff^{-1} = 1_B$ .

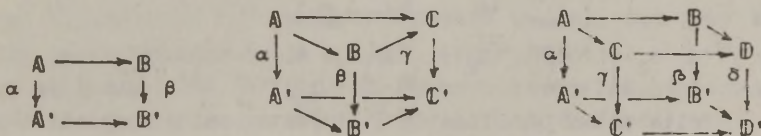
1.8. TEOREEM. Iga kujutuse kanooniline esitus on võimalik bijektsiooni täpsusega, st. kui meil on kaks kanoonilist esitust  $h = g_1 f_1$  ja  $h = g_2 f_2$ , nagu näidatud diagrammil



siis eksisteerib üks ja ainult üks bijektsioon  $\beta$ , mille korral kogu diagramm on kommutatiivne.

Toestus. Vaadeldavas diagrammis on  $h = g_1 f_1 = g_2 f_2$ . Seega, arvestades, et  $f_1 f_1^{-1} = 1_{B_1}$ ,  $f_2 f_2^{-1} = 1_{B_2}$ , kuna  $f_1$  ja  $f_2$  on surjektsioonid, ja  $g_1^{-1} g_1 = 1_{B_1}$ ,  $g_2^{-1} g_2 = 1_{B_2}$ , kuna  $g_1$  ja  $g_2$  on injektsioonid, saame  $h^{-1} h = (g_1 f_1)^{-1} g_1 f_1 = f_1^{-1} (g_1^{-1} g_1) f_1 = f_1^{-1} f_1$ , samuti  $h^{-1} h = f_2^{-1} f_2$  ja  $h h^{-1} = g_1 g_1^{-1} = g_2 g_2^{-1}$ . Rakendades lauset 1.7 kolmnurkadele  $A B_1 B_2$  ja  $B_1 B_2 C$ , järeldame, et eksisteerivad ja on üheselt määratud kujutused  $\beta_1$  ja  $\beta_2$ , sellised, et  $f_2 = \beta_1 f_1$  ja  $g_1 = g_2 \beta_2$ . Kuna aga  $\beta_1 = f_2 f_1^{-1}$  ja  $\beta_2 = g_2^{-1} g_1$ , siis  $\beta_2^{-1} \beta_1 = g_1^{-1} g_2 f_2 f_1^{-1} = g_1^{-1} h f_1^{-1} = 1_{B_1}$ , st.  $\beta_1 = \beta_2$ . Nool  $\beta$  on üheselt määratud ja ilmselt vastab bijektsioonile, mott.

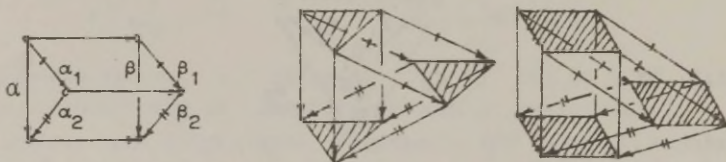
1.9. Tähtis on mõista kanoonilist esitust üldisemas kontekstis. Öeldakse, et kommutatiivsed diagrammid





kujutavad diagrammide  $A \times B$  ja  $A' \times B'$  (vastavalt  $A \times B \times C$  ja  $A' \times B' \times C'$ ,  $A \times B \times C \times D$  ja  $A' \times B' \times C' \times D'$ ) morfismide. Morfismid on moodustatud kujutuste  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  poolt. Kui kõik kujutused  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  on injektiivsed, surjektiivsed või bijektiivsed, siis räägitakse vastavalt mono-, epi- või isomorfismidest.

Nüüd on võimalik esitada kõik need kujutused  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  kanooniliselt surjektsioonide ja injektsioonide kompositsioonidena:  $\alpha = \alpha_2 \alpha_1, \beta = \beta_2 \beta_1, \gamma = \gamma_2 \gamma_1, \delta = \delta_2 \delta_1$  ( $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$  on surjektsioonid,  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$  - injektsioonid). Tekivad vahepealsed sama tüüpi diagrammid



ja iga morfirm esitub epimorfismi ja monomorfismi kompositsioonina. Jätame lugejale tõestamiseks, et vahepealsed diagrammid teepoolt eksisteerivad ja et nad on määratud isomorfismi täpsusega.

Seega kõlab teoreem 1.8 üldistatult hoopis järgmiselt: diagrammide morfismi kanooniline esitus on alati võimalik, sealjuures isomorfismi täpsusega.

1.10. Tänu sellele üldistusele võime küllalt lakooniliselt kõnelda mitmesuguste struktuuride morfismidest.

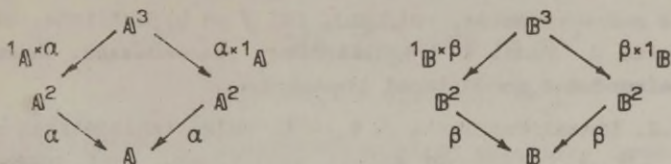
NÄIDE. Olgu kujutuse  $\alpha: A^2 \rightarrow A$  poolt defineeritud hulga  $A$  elementide korrutamine. Paari  $(A, \alpha)$  nimetatakse rühmoidiks. Kujutust  $f: A \rightarrow B$  nimetatakse rühmoidide  $(A, \alpha)$  ja  $(B, \beta)$  vaheliseks morfismiks, kui diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^2 A^2 & \xrightarrow{\alpha} & A \\ f^2 \downarrow & & \downarrow f \\ B^2 & \xrightarrow{\beta} & B \end{array} .$$

kus  $f^2(a_1, a_2) = (f(a_1), f(a_2))$ ,  $\forall a_1, a_2 \in A$ , on kommutatiivne, st.  $f$  nagu austaks korrutamise reegleid  $\alpha$  ja  $\beta$ . Kui nüüd  $f$  ja ka  $f^2$  on esitatud surjektsioonide ja injektsioonide kompositsioonidena, siis ilmselt on ka tegemist morfismi kanoonilise esi-

tusega ja isomorfismi täpsusega määratud rühmoidiga  $(H, \chi)$ .

Olgu korrutamised  $\alpha$  ja  $\beta$  assotsiatiivsed. See väljendub diagrammide



kommutatiivsuses, mis tähendab, et tegemist on *poolrühmadega*. Siis jõuame samasuguse diagrammini ka  $\chi$  jaoks. Järelikult, poolrühmade morfismi on alati võimalik esitada isomorfismi täpsusega epi- ja monomorfismi kompositsioonina.

Analoogilised väited kehtivad samuti rühmade morfismi (vt. teoreem homomorfismidest) ja lineaarkujutuste korral.

## § 2. Vektorruumidest ja lineaarkujutustest

2.1. *Vektorruum* (üle korpuse  $\mathbb{R}$ ) on hulk  $\mathbb{L}$ , mille elemente nimetatakse *vektoriteks* ja kus on defineeritud lineaartehted: liitmine  $(a, b) \in \mathbb{L}^2 \mapsto a+b \in \mathbb{L}$  ja korrutamine arvudega  $(\lambda, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{L} \mapsto \lambda a \in \mathbb{L}$ . Vastavad aksiomid arvame tuntuks.

Kujutust  $f: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  ühest vektorruumist  $\mathbb{L}_1$  teise  $\mathbb{L}_2$  nimetatakse *lineaarkujutuseks*, kui ta on nii aditiivne kui homogeenne:

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \quad f(\lambda a) = \lambda f(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{L}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nullvektori  $0 \in \mathbb{L}_2$  täielikku originaali ruumis  $\mathbb{L}_1$  nimetatakse lineaarkujutuse  $f$  *tuumaks* ja tähistatakse  $\text{Ker} f$ , ruumi  $\mathbb{L}_1$  kujutist ruumis  $\mathbb{L}_2$  nimetatakse lineaarkujutuse  $f$  *kujutiseks* ja tähistatakse  $\text{Im} f$  (sõnadest *Kernel*, *Image*). Nii  $\text{Ker} f$  kui  $\text{Im} f$  on vastavalt ruumide  $\mathbb{L}_1$  ja  $\mathbb{L}_2$  alamruumid.

Lineaarkujutus  $f: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  on *mono-*, *ept-* või *isomorfism*, vastavalt sellele, kas ta on injektiivne ( $\text{Ker} f = 0$ ), surjektiivne ( $\text{Im} f = \mathbb{L}_2$ ) või bijektiivne. Nagu öeldud, iga lineaarkujutuse võib isomorfismi täpsusega avaldada epimorfismi ja

monomorfismi kompositsioonina (kanooniline esitus).

Iga lineaarkujutuse  $f: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  korral on vektorruumid  $\mathbb{L}_1/\text{Ker}f$  ja  $\text{Im}f$  isomorfised.

Vektorruumi  $\mathbb{L}$  lineaarkujutust iseendasse  $f: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$  nimeatakse *endomorfismiks*, erijuhul, kui  $f$  on bijektiivne, *automorfismiks* e. ruumi  $\mathbb{L}$  (regulaarseks) teisenduseks. Ruumi  $\mathbb{L}$  kõik teisendused moodustavad *lineaarühma*.

2.2. Lineaarkujutuste  $f: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  hulka tähistatakse sümboliga  $\mathcal{L}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2)$ . See on samuti vektorruum, sest temas on defineeritud lineaartehted:

$$(f_1 + f_2)(a) = f_1(a) + f_2(a), \quad (\lambda f)(a) = \lambda(f(a)), \quad \forall a \in \mathbb{L}_1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

mis rahuldavad vektorruumi aksioome.

Hulk  $\mathbb{L}^* = \mathcal{L}(\mathbb{L}, \mathbb{R})$  on ruumi  $\mathbb{L}$  *kaasruum* ja tema elemente nimetatakse *kovektoriteks*.

Iga lineaarkujutusega  $f: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  assotsieerub tema *kaaskujutus*  $f^*: \mathbb{L}_2^* \rightarrow \mathbb{L}_1^*: \Psi \mapsto \Psi \circ f$ . Kehtib valem

$$(f^*\Psi)(X) = \Psi(fX), \quad \forall X \in \mathbb{L}_1, \quad \forall \Psi \in \mathbb{L}_2^*,$$

kus  $f(X)$  ja  $f^*(\Psi)$  on lihtsalt asendatud tähistustega  $fX$  ja  $f^*\Psi$ .

Vektorruume  $\text{Ker}f^*$  ja  $\text{Im}f^*$ , mis on vastavalt isomorfised faktorruumidega  $\mathbb{L}_2/\text{Im}f$  ja  $\mathbb{L}_1/\text{Ker}f$ , nimetatakse kujutuse  $f$  *kotuumaks* ja *kokujutiseks* ning tähistatakse  $\text{Coker}f$  ja  $\text{Coim}f$ .

2.3. Lineaarkujutuste jada

$$\mathbb{L}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{L}_2 \xrightarrow{g} \mathbb{L}_3$$

on *täpne*, kui  $\text{Im}f = \text{Ker}g$ . Sel juhul on kaaskujutuste jada

$$\mathbb{L}_1^* \xleftarrow{f^*} \mathbb{L}_2^* \xleftarrow{g^*} \mathbb{L}_3^*$$

samuti *täpne*.

Lineaarkujutus  $f: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  on monomorfne parajasti siis, kui jadad

$$0 \rightarrow \mathbb{L}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{L}_2, \quad 0 \leftarrow \mathbb{L}_1^* \xleftarrow{f^*} \mathbb{L}_2^*$$

on *täpsed*, ja epimorfne parajasti siis, kui on *täpsed* jadad

$$\mathbb{L}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{L}_2 \rightarrow 0, \quad \mathbb{L}_1^* \xleftarrow{f^*} \mathbb{L}_2^* \leftarrow 0.$$

2.4. Vektorruumis  $\mathbb{L}$  on fikseeritud vektorite  $e_1, e_2, \dots, e_n$  korral võimalik moodustada lineaarkujutus

$$\Lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{L} : x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto e_1 x^1,$$

kus

$$e_1 x^1 = \sum_{i=1}^n e_i x^i = e_1 x^1 + e_2 x^2 + \dots + e_n x^n$$

on antud vektorite lineaarkombinatsioon suvaliste kordajatega  $x^i$  (vastavalt A.Einsteini kokkuleppele jätame sümboli  $\sum_{i=1}^n$  kirjutamata!). Alamruumi  $\text{Im} \Lambda \subset \mathbb{L}$  nimetatakse vektorite  $e_1$  lineaarkatteks.

Kui kujutus  $\Lambda$  on monomorfe, siis vektorid  $e_1$  on vektorruumis  $\mathbb{L}$  lineaarselt sõltumatud. Sel juhul on  $\text{Im} \Lambda$  isomorfe  $\mathbb{R}^n$ -ga. Kui  $\Lambda$  on epimorfe, siis  $\text{Im} \Lambda = \mathbb{L}$ .

Kui  $\Lambda$  on isomorfism, siis vektorid  $e_1$  moodustavad vektorruumi  $\mathbb{L}$  baasi ja  $n$  on selle ruumi dimensioon e. m.  $n = \dim \mathbb{L}$ . Sel juhul võib iga vektori  $X \in \mathbb{L}$  üheselt avaldada baasivektorite lineaarkombinatsioonina  $X = e_1 x^1$ . Kordajaid  $x^i$  nimetatakse vektori  $X$  komponentideks (e. koordinaatideks) antud baasis. Kohe kujunevad koordinaatfunksioonid  $e^1: X \mapsto x^1$ ,  $n$  lineaarselt sõltumatut kovektorit, mis moodustavad kaasruumi  $\mathbb{L}^*$  baasi, e. kobaasi. Baasi  $e_1$  ja kobaasi  $e^1$  nimetatakse teineteise suhtes duaalseteks. Duaalsete baaside korral ruumides  $\mathbb{L}$  ja  $\mathbb{L}^*$  moodustavad väärtused  $e^i(e_j) = \delta_j^i$  ühikmaatriksi ( $\delta_j^i$  on tuntud Kroneckeri delta, mis võrdub ühega, kui  $i=j$ , ja nulliga, kui  $i \neq j$ ).

Paneme tähele, et vektori  $X = e_1 x^1$  komponendid avalduvad kobaasi kaudu:  $x^1 = e^1(X)$ , ja samuti kovektori  $\Phi = \varphi_1 e^1$  komponendid avalduvad baasi kaudu:  $\varphi_1 = \Phi(e_1)$ .

2.5. Ühe ja sama dimensiooniga vektorruumid on isomorfsed. Teisepoolt, kui vektorruumides  $\mathbb{L}_1$  ja  $\mathbb{L}_2$  baase määravad isomorfismid on  $\Lambda_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{L}_1$  ja  $\Lambda_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{L}_2$ , siis on ka  $\Lambda_2 \Lambda_1^{-1}: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  isomorfism.

Sageli on kasulik muuta vektorruumis  $\mathbb{L}$  baasi, e. teisen-

Leopold Kronecker, saksa matemaatik, 1823 - 1891.

dada baas  $e_1$  baasiks  $\tilde{e}_1 = e_j a_1^j$ . Sel juhul teiseneb kobaas  $e^1$  kobaasiks  $\tilde{e}^1 = \bar{a}_j^1 e^j$ . Maatriksid  $(a_j^1)$  ja  $(\bar{a}_j^1)$  on teineteise poordmaatriksid. Selle teisendusega kaasneb koordinaatide teisendus: kui  $X = e_1 x^1 = \tilde{e}_1 \tilde{x}^1$  ja  $\Psi = \varphi_1 e^1 = \tilde{\varphi}_1 \tilde{e}^1$ , siis

$$\tilde{x}^1 = \bar{a}_j^1 x^j, \quad \tilde{\varphi}_1 = \varphi_j a_j^1.$$

Vastaku baasidele  $e_1$  ja  $\tilde{e}_1$  isomorfismid  $\Lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ja  $\tilde{\Lambda}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Siis automorfismile  $\Lambda^{-1}\tilde{\Lambda}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vastab koordinaatteisendus  $\tilde{x}^1 \mapsto x^1$ . Automorfism  $\tilde{\Lambda}\Lambda^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tähendab vektorruumi  $\mathbb{R}$  teisendust

$$X = e_1 x^1 \mapsto \tilde{X} = \tilde{e}_1 \tilde{x}^1.$$

2.6. Kui vektorruumides  $\mathbb{L}_1$  ja  $\mathbb{L}_2$  on antud baasid  $e_1$  ja  $\varepsilon_\alpha$  ning kaaruumides  $\mathbb{L}_1^*$  ja  $\mathbb{L}_2^*$  duaalsed kobaasid  $e^1$  ja  $\varepsilon^\alpha$  ( $i=1, \dots, n; \alpha=1, \dots, m$ ), siis on lineaarkujutus  $h: \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{L}_2$  ja kaaskujutus  $h^*: \mathbb{L}_1^* \rightarrow \mathbb{L}_2^*$  määratud ühe ja sama  $m \cdot n$ -maatriksi abil:

$$h(e_1) = \varepsilon_\alpha H_1^\alpha, \quad h^*(\varepsilon^\alpha) = H_1^\alpha e^1,$$

$$X = e_1 x^1 \mapsto h(X) = \varepsilon_\alpha H_1^\alpha x^1, \quad \Psi = \varphi_\alpha \varepsilon^\alpha \mapsto h^*(\Psi) = \varphi_\alpha H_1^\alpha e^1.$$

Loomulikult, baaside teisenemisel

$$\tilde{e}_1 = e_j a_1^j, \quad \tilde{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_\beta b_\alpha^\beta$$

teiseneb ka maatriks:

$$H_1^\alpha \mapsto \tilde{H}_1^\alpha = \bar{b}_\beta^\alpha H_j^\beta a_1^j,$$

lühidalt  $\tilde{H} = B^{-1}HA$ . Endomorfismi korral  $A = B$  ja  $\tilde{H} = A^{-1}HA$ .

Sobiv on esitada kujutusi  $h$  ja  $h^*$  üheaegselt operaatori  $\mathcal{H} = \varepsilon_\alpha H_1^\alpha e^1$  abil, mida tuleb mõista nii kovektorina kui ka vektorina (vektorvaartustega kovektor):

$$X = e_1 x^1 \mapsto \mathcal{H}(X) = \varepsilon_\alpha H_1^\alpha x^1, \quad \Psi = \varphi_\alpha \varepsilon^\alpha \mapsto \Psi(\mathcal{H}) = \varphi_\alpha H_1^\alpha e^1.$$

Operaatorit  $\mathcal{H}$  võib tõlgendada ka nagu bilineaarset funktsiooni  $\mathcal{H}(X, \Psi) = \varphi_\alpha H_1^\alpha x^1$  argumentide  $X$  ja  $\Psi$  suhtes. See osutub kasulikuks järgmises arutluses.

2.7. Oletame, et  $m \times n$ -maatriks  $H_1^{\alpha}$  ( $m$  rida,  $n$  veergu) on jaotatud plokkidesse

$$H = \left( \begin{array}{c|c} U & Y \\ \hline X & V \end{array} \right),$$

kus plokk  $U$  on  $p \times p$ -maatriks ja vastab astakumiinorile. Vastavalt teoreemile maatriksi astakust on siis  $V = XU^{-1}Y$ . Maatriks  $H$  laguneb kahe maatriksi korrutiseks

$$H = GF,$$

kus  $G = \left( \begin{array}{c} U \\ X \end{array} \right)$  on lineaarselt sõltumatute veergudega  $m \times p$ -maatriks ja  $F = (E \mid U^{-1}Y)$  on lineaarselt sõltumatute ridadega  $p \times n$ -maatriks ( $E$  on ühikmaatriks). Seejärel avaldub  $\mathcal{H}$  kujul

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \mathcal{F},$$

kus  $\mathcal{G}$  on reamaatriks, mis koosneb  $p$  vektorist  $\varepsilon_{\alpha} G_{\lambda}^{\alpha}$ , ja  $\mathcal{F}$  on veerumaatriks, mis koosneb  $p$  kovektorist  $F_{\lambda}^{\alpha} e^{\lambda}$ ,  $\lambda = 1, \dots, p$  ( $H_1^{\alpha} = G_{\lambda}^{\alpha} F_{\lambda}^{\lambda}$ ). Selline esitus vastab kujutuse  $h$  kanoonilisele esitusele, vt. 1.6. Vektorid  $\mathcal{G}$  moodustavad  $\text{Im} \mathcal{f}$  baasi (ruumis  $\mathbb{R}_2$ ), kovektorid  $\mathcal{F}$  aga  $\text{Im} \mathcal{f}^*$  baasi (ruumis  $\mathbb{R}_1^*$ ).  $\text{Ker} \mathcal{f}$  osutub kovektorite  $\mathcal{F}$  annulaatoriks.

Nimetagem lineaarselt sõltumatute veergudega maatriksit edaspidi injektiivseks maatriksiks (sest talle vastab monomorfism) ja lineaarselt sõltumatute ridadega maatriksit surjektiivseks maatriksiks (talle vastab epimorfism). Regulaarne maatriks vastab isomorfismile.

NAIDE. Endomorfism ruumis  $\mathbb{R}^3$  e.  $xyz$ -ruumis on defineeritud  $3 \times 3$ -maatriksiga  $H$ , mille astak on 2:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & 6 \\ 1/3 & -2/3 & -1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1/3 \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{array} \right).$$

Maatriks  $H$  on lahutatud korrutiseks  $GF$ , kus maatriks  $F$  on surjektiivne ja maatriks  $G$  injektiivne (üks võimalikest kanoonilistest esitustest). Vektorid  $\hat{i}, \hat{j}$ ,  $2\hat{j} - 1/3\hat{k}$  moodustavad  $\text{Im} h$  baasi, milleks on tasand  $2y + 6z = 0$ . Kovektorid  $x-y$ ,  $-x+2y+3z$  moodustavad  $\text{Im} h^*$  baasi ja nende annulaatoriks on  $\text{Ker} h$ , ehk sirge  $x=y=-\frac{1}{3}z$ . Antud juhul  $\text{Ker} h \subset \text{Im} h$ .

2.3. Summeerilise maatriksi  $H$  puhul saadakse plokk  $Y$  plokist  $X$  transponeerimise teel, st.  $Y = X'$ , ja kanooniline esitus võib olla järgmine:

$$H = \begin{bmatrix} U \\ -X \end{bmatrix} \times (U^{-1}) \times (U|X').$$

Selline olukord esineb, kui on tegemist 2. järku kõverate ja pindade kidumisega.

NÄIDE. Ruutfunktsioonile

$$f = x^2 - xy - 2y^2 + xz + yz - 5x - 8y + z$$

vastab maatriks

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -2 & 1/2 & -4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ -5/2 & -4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ja selle kanooniline esitus näitab, et funktsioon  $f$  võib taanduda kujule

$$F = UV - V^2 - 2U + 10,$$

kus

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ilmselt  $f = F \circ \pi$ , kus  $\pi: (x, y, z) \mapsto (U, V)$  on  $xyz$ -ruumi projekteerimine  $UV$ -tasandile. Funktsiooni  $f$  nivoopindadeks  $xyz$ -ruumis on hüperboolsed silindrid, mille sirgjoonelised moodustajad on paralleelsed sirged  $x:y:z = -1:1:3$ .

### § 3. Matemaatilisest analüüsist

3.1. Mis on diferentseeruv kujutus? See on (meie brošüüri raames)  $n$ -ruumi kujutus  $m$ -ruumi

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto y = (y^1, y^2, \dots, y^m),$$

mis rahuldab täiendavat tingimust. Nagu iga funktsioon  $\psi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  on toodav ruumist  $\mathbb{R}^m$  ruumi  $\mathbb{R}$  kompositsiooni  $\varphi = \psi \circ f$  abil, nii ka koordinaatfunktsioonid  $\tilde{y}^\alpha: y \mapsto y^\alpha$  võime

tuua ruumist  $\mathbb{R}^m$  ruumi  $\mathbb{R}^n$ . Saame  $m$  funktsiooni  $f^\alpha = \bar{y}^\alpha \circ \tilde{f}$ , mis sõltuvad koordinaatidest  $x^i$ ;  $i=1, \dots, n$ ;  $\alpha=1, \dots, m$ . Kui kõikjal ruumis  $\mathbb{R}^n$  eksisteerivad funktsioonide  $f^\alpha$  osatuletised  $f_1^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^1}$ , siis kujutust  $f$  nimetatakse *diferentseeruvaks*.

Osatuletised moodustavad  $m \times n$ -maatriksi  $(f_1^\alpha)$ , mida nimetatakse *Jacobi maatriksiks*. Jacobi maatriks punktis  $x \in \mathbb{R}^n$  moodustab  $m \times n$ -maatriksi, mis koosneb arvudest ja vastavalt määrab lineaarkujutuse

$$T_x f: T_x \mathbb{R}^n \rightarrow T_y \mathbb{R}^m,$$

mida nimetatakse kujutuse  $f$  *diferentstaaliks* punktis  $x$ . Sellest aga teeme juttu veel allpool, vt. 4.4, lk. 34. Mainigem niipalju, et kujutus  $T_x f$  viib vektorid punktist  $x \in \mathbb{R}^n$  punkti  $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$  ja kovektorid, vastupidi, punktist  $y$  punkti  $x$ .

Kui eksisteerivad funktsioonide  $f^\alpha$  kõik  $p$  järku osatuletised

$$f_{1_1 \dots 1_p}^\alpha = \frac{\partial^p f^\alpha}{\partial x^1 \dots \partial x^p},$$

kus  $p \leq u$ , siis kõneldakse, et  $f$  on  $C^u$ -diferentseeruv kujutus, või klassi  $C^u$  kuuluv. Kui  $u = \omega$ , siis kujutus  $f$  on *sile*.

**MÄRKUS.** Tavaliselt kõneldakse, et kujutus  $f$  on määratud süsteemiga  $y^\alpha = f^\alpha(x^i)$ . Vastavalt traditsioonile, kasutame ka meie allpool seda väljendit, kuigi ta on veidi meelevaldne.

3.2. Olgu  $f, g, h$  diferentseeruvad kujutused ja  $h$  kujutuste  $f$  ja  $g$  kompositsioon  $h = g \circ f$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}^r \\ f \searrow & & \nearrow g \\ & \mathbb{R}^m & \end{array}$$

Vastavalt liitfunktsiooni diferentseerimise seadusele, on sel juhul vastavad Jacobi maatriksid omavahel seotud:

Karl Jacobi, saksa matemaatik, 1804 - 1851.



$$h_1^\lambda = (g_\alpha^\lambda \circ f) f_1^\alpha, \quad (1)$$

$l=1, \dots, n; \alpha=1, \dots, m; \lambda=1, \dots, r$ . Seda seost väljendab kommutatiivne diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_x \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_x h} & T_z \mathbb{R}^r \\ & \searrow T_x f & \nearrow T_y g \\ & T_y \mathbb{R}^m & \end{array} \quad y=f(x), \quad z=g(y),$$

mis tähendab: kompositsiooni diferentsiaal  $T_x h$  on diferentsiaalide  $T_x f$  ja  $T_y g$  kompositsioon:

$$T_x h = T_y g \circ T_x f.$$

Kui kujutused  $f, g, h$  kuuluvad klassi  $C^2$ , siis võime seose (1) molemaid pooli diferentseerida veel muutuja  $x^j$  järgi:

$$h_{1j}^\lambda = (g_{\alpha\beta}^\lambda \circ f) f_{1j}^\alpha f_1^\beta + (g_\alpha^\lambda \circ f) f_{1j}^\alpha, \quad (2)$$

seega osatuletised  $h_{1j}^\lambda, h_{1j}^\lambda$  avalduvad täielikult osatuletiste  $f_1^\alpha, f_{1j}^\alpha$  ja  $g_{\alpha\beta}^\lambda, g_{\alpha\beta}^\lambda$  kaudu.

Kui kujutused  $f, g, h$  kuuluvad klassi  $C^u$ , siis, jätkates mitmekordselt sellist protseduuri, võime kõik osatuletised  $h_{1j}^\lambda, \dots, h_{1p}^\lambda$  avaldada vastavate osatuletiste  $f_{1j}^\alpha, \dots, f_{1q}^\alpha$  ja  $g_{\alpha_1}^\lambda, \dots, g_{\alpha_q}^\lambda$  kaudu,  $q \leq p \leq u$ .

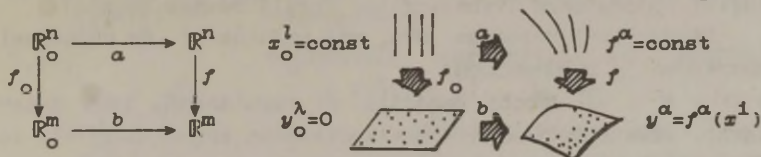
Siledate kujutuste korral võib seda protseduuri korrata lõpmatuseni.

3.3. Kui kujutuse  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  astak (st. Jacobi maatriksi astak) on konstantne suurus ja võrdub arvuga  $p$ , siis seda kujutust võib kirjeldata järgmisel viisil.

Ruumis  $\mathbb{R}^n$  on funktsioonid  $f^\alpha$  konstantsed  $(n-p)$ -mõõtmelistel pindadel, mis moodustavad  $p$ -parameetriselise parve. Näiteks, sellise parve moodustavad ruumis  $\mathbb{R}^n$  tasandid  $x^i = \text{const}, i=1, \dots, p$  ( $\mathbb{R}^n$  on samasugune  $\mathbb{R}^n$ , kuid märgime teda  $O_0$ -ga, rõhutades, et ta üldiselt erineb ruumist  $\mathbb{R}^n$ , kust lähtub nool  $f$ ).

Ruumis  $\mathbb{R}^m$  määravad võrrandid  $y^\alpha = f^\alpha(x^1)$   $p$ -mõõtmelise pinnaga, e. kujutise  $f(\mathbb{R}^n)$ . Selliseks pinnaks võib ruumis  $\mathbb{R}_0^m$  olla koordinaattasand  $y_\alpha^\lambda = 0, \lambda=p+1, \dots, m$ .

Kujutagem ette, et ruum  $\mathbb{R}_0^n$  on teisendatud ruumiks  $\mathbb{R}^n$  nii, et tasandid  $x_0^1 = \text{const}$  on kõverdunud pindadeks  $f^\alpha = \text{const}$ , ja ruum  $\mathbb{R}_0^m$  on teisendatud ruumiks  $\mathbb{R}^m$  nii, et koordinaattasand  $y^\lambda = 0$  on kooldunud pinnaks  $y^\alpha = f^\alpha(x^1)$ . Tähistame neid teisendusi vastavalt nooltega  $a$  ja  $b$ . Tekib kommutatiivne diagramm



kus  $f_0 = b^{-1}fa: \mathbb{R}_0^n \rightarrow \mathbb{R}_0^m: (x_0^1) \mapsto (y_0^\alpha)$ ,  $y_0^\lambda = x_0^\lambda$ ,  $y_0^\alpha = 0$ , on lineaarkujutus. Me naeme kujutust  $f$  deformeeritud lineaarkujutusena, nagu kõveras peeglis. Lokaalselt (st. küllalt väikeses ümbruses) on kujutus  $f$  samaväärne lineaarkujutusega  $f_0$ . Toimub kujutuse  $f$  lokaalne lineariseerimine. Üleminekul  $f \mapsto f_0$  Jacobi maatriks, kui ta on lahutatud plokkidesse, kus  $p \times p$ -plokk  $U$  vastab astakumiinorile, teiseneb nii

$$\left( \begin{array}{c|c} U & Y \\ \hline X & V \end{array} \right) \mapsto \left( \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right).$$

et plokkid  $X, Y, V$  muutuvad 0-plokkideks ja plokk  $U$  ühikmaatriksiks  $E$ .

Teisendused  $a$  ja  $b$  on võimalikud ja üleminek  $f \mapsto f_0$  realiseeritav. Selles seisneb üks küllalt keskne analüüsi teoreem astakust.

#### 3.4. Nimetagem siin kaks tähtsat erijuhtu:

- 1)  $p=n \leq m$ ; Jacobi maatriks on injektiivne, tema  $n$  veergu on lineaarselt sõltumatud; sel juhul nimetatakse kujutust  $f$  *immersiooniks*;
- 2)  $p=m \leq n$ ; Jacobi maatriks on surjektiivne, tema  $m$  rida on lineaarselt sõltumatud; sel juhul nimetatakse kujutust  $f$  *submersiooniks*.

Immersiooni korral ruumis  $\mathbb{R}^n$  mingeid kihte ei teki, lihtsalt see ruum on nagu viidud ruumi  $\mathbb{R}^m$  ja koolutatud seal  $n$ -mootmeliseks pinnaks. Võrrandeid  $y^\alpha = f^\alpha(x^1)$  nimetame pinna  $f(\mathbb{R}^n)$  parameetristeks võrrandeks.

Submersiooni korral tekivad ruumis  $\mathbb{R}^n$   $(n-m)$ -mootmelised kihid, mis projekteeruvad ruumi  $\mathbb{R}^m$  punktideks, kusjuures

$f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$ . Kihid on määratud üldvõrranditega  $f^\alpha(x^1) = y_\alpha - \text{const.}$  Ruumist  $\mathbb{R}^n$  koneldakse nagu kihtruumist, ruumist  $\mathbb{R}^m$  nagu selle kihtruumi baasist ja kujutusest  $f$  nagu vastavast projektsioonist. Teistes keeltes vastavad kihtruumile terminid *bundle* (ingl.), *пачаюкне* (vene), *fibré* (pr.), *Bundel* (saksa).

Lisame veel kolmanda juhu, mil kujutus  $f$  on üheaegselt immersioon ja submersioon:

3)  $p = m = n$ ; Jacobi maatriks on regulaarne, tema determinant, mida nimetatakse *Jakobtaantks*, on erinev nullist; sel juhul nimetatakse kujutust  $f$  *difeomorfismiks*. Ruumi  $\mathbb{R}^n$  difeomorfismid e. teisendused moodustavad selle ruumi teisenduste rühma.

Võrdluseks toome tabeli:

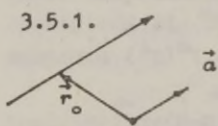
HULGAD	VEKTORRU D	MUUTKONNAD
kujutused	lineaarkujutused	diferentseeruvad k.
injektsioon	monomorfism	immersioon
sürjektsioon	epimorfism	submersioon
bijektsioon	isomorfism	difeomorfism

Siit näeme, et monomorfism (v. epi- ja isomorfism) on injektiivne (v. sürjektiivne, bijektiivne) lineaarkujutus, immersioon (v. submersioon ja difeomorfism) on aga diferentseeruv kujutus, mille diferentsiaal on monomorfne (v. epi- või isomorfne) lineaarkujutus.

Vastavalt diferentseeruvate kujutuste klassifikatsioonile jaguneb diferentsiaalgeomeetria kolmeks valdkonnaks:

- 1) immersioonidest saab alguse *pinnateooria*;
- 2) submersioonidest *kihtruumide teooria*;
- 3) difeomorfismid on *rühmateooria* uurimisobjektiks.

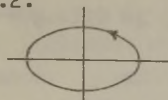
### 3.5. NÄITED.



Sirgjoone vektorvõrrand  $\vec{r} = \vec{a}t + \vec{r}_0$ , kus  $\vec{a} \neq 0$ , e. parameetrilised võrrandid  $x = lt + x_0$ ,  $y = mt + y_0$ ,  $z = nt + z_0$  ( $l^2 + m^2 + n^2 \neq 0$ ) määravad immersiooni

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3: t \mapsto (x, y, z)$ , mis on ühtlasi injektiivne kujutus.

3.5.2.



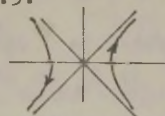
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Ellipsi parameetriselised võrrandid

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

määravad immersiooni  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , mis pole injektiivne kujutus, kuna  $\mathbb{R}$  katab ellipsi mitmekordselt.

3.5.3.



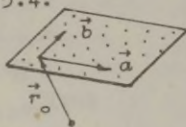
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Hüperbooli parameetriselised võrrandid

$$x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

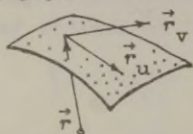
määravad kõikjal immersiooni  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , välja arvatud punkt  $t = 0$ , mille kujutis puudub; kaks pooltelge  $(-\infty, 0)$  ja  $(0, +\infty)$  katavad hüperbooli erinevaid harusid.

3.5.4.



Tasandi vektorvõrrand  $\vec{r} = \vec{a}u + \vec{b}v + \vec{r}_0$  määrab tingimusel  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  immersiooni  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

3.5.5.



Pinna vektorvõrrand  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

määrab immersiooni  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tingimusel

$$\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v, \quad \text{kus } \vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}.$$

3.5.6.



Funktsioon  $f(x, y, z)$  määrab submersiooni  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tingimusel  $\text{grad} f \neq 0$ . Ruum  $\mathbb{R}^3$  laguneb funktsiooni  $f$  nivoopindadeks  $f = \text{const}$  e. kihtideks. Juhul  $f = Ax + By + Cz$

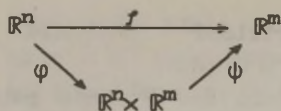
( $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ ) on kihtideks paralleelsed tasandid.

Submersioon ei tarvitse olla surjektiivne kujutus.

Näit.  $f = x^2 + y^2 + z^2$  on submersioon kõikjal  $\mathbb{R}^3$ -s, välja arvatud punkt  $(0, 0, 0)$ , kuid surjektiivne vaid poolteljele  $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ .

3.6. Üldjuhul ei pruugi kujutuse  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  astak olla konstantne suurus. Seal, kus astak langeb, tekivad tsenaarsused, e. singulaarsused või katastroofid.

Lahutame kujutuse  $f$  immersiooni  $\varphi$  ja submersiooni  $\psi$  kompositsiooniks  $f = \psi \circ \varphi$

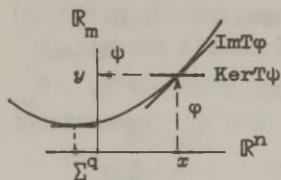


kus  $\varphi: x \mapsto (x, f(x))$  ja  $\psi: (x, y) \mapsto y$ .

Vastavad Jacobi maatriksid on seotud järgnevalt

$$(J) = (0 \mid E_m) \times \left[ \begin{array}{c} E_n \\ J \end{array} \right],$$

st. kujutuse  $f$  Jacobi maatriks ( $J$ ) on kujutuste  $\psi$  ja  $\varphi$  Jacobi  $m \times (m+n)$ - ja  $(m+n) \times n$ -maatriksite korrutis,  $E_n$  ja  $E_m$  on ühikplokid.



$n$ -mõõtmeline pind  $\varphi(\mathbb{R}^n)$  ruumis  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  pole midagi muud, kui seos  $f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ , vt. 1.2. Seda pinda nimetatakse kujutuse  $f$  graafikuks. Punktis  $\varphi(x)$  me näeme kaht  $n$ -mõõtmelist tasandit  $\text{Im} T_x \varphi$  ja  $\text{Ker} T_{\varphi(x)} \psi$ .

Esimene neist on pinna  $\varphi(\mathbb{R}^n)$  puutujatasand punktis  $\varphi(x)$ . Kui need tasandid omavahel loikudes moodustavad  $q$ -mõõtmelise tasandi, st.

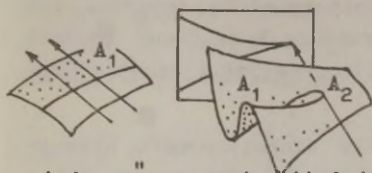
$$\dim(\text{Im} T_x \varphi \cap \text{Ker} T_{\varphi(x)} \psi) = q,$$

siis öelgem, et punkt  $x$  on kujutuse  $f$   $\Sigma^q$ -tüüpi iseärane punkt. Ilmselt projekteerib  $\psi$  tasandi  $\text{Im} T_x \varphi$  ruumi  $T_y \mathbb{R}^m$  ( $n-q$ )-mõõtmeliseks tasandiks ja kujutuse  $f$  astak punktis  $x$  on  $n-q$ . Koikide selliste punktide hulka ruumis  $\mathbb{R}^n$  nimetame  $\Sigma^q$ -singulaarsuseks.

Kujutus  $f$  indutseerib kujutuse  $\Sigma^q \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mille graafikuks on pind  $\varphi(\Sigma^q)$ . Kui punkt  $x \in \Sigma^q$  on selle kujutuse  $\Sigma^x$ -tüüpi iseärane punkt, siis nimetame teda kujutuse  $f$   $\Sigma^{q^x}$ -tüüpi iseäraseks punktiks. Selliste punktide hulka ruumis  $\mathbb{R}^n$  nimetame  $\Sigma^{q^x}$ -singulaarsuseks.

Jätkates arutlust, jõuame samm-sammult edasi kõrgemat tüüpi singulaarsusteni  $\Sigma^{q_1 q_2 \dots q_s}$ . Nähtavasti tekib ruumi  $\mathbb{R}^n$  stratifitseerimine  $\Sigma^{q_1} \supset \Sigma^{q_1 q_2} \supset \Sigma^{q_1 q_2 q_3} \supset \dots$ , mis kandub  $\varphi$  vahendusel ka pinnale  $\varphi(\mathbb{R}^n)$ .

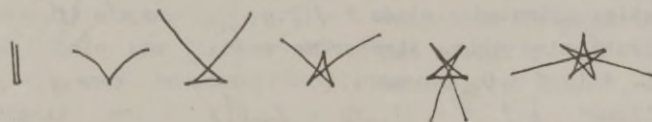
Juhul  $q_1 = q_2 = q_3 = \dots q_s = 1$  kasutatakse sümbooli  $\sum^{q_1 q_2 \dots q_s}$  asemel lihtsamat sümboolit  $A_s$ . Stratifikatsiooni  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \dots$  tolgendame järgmisel viisil. Kujutame ette mingi pinna



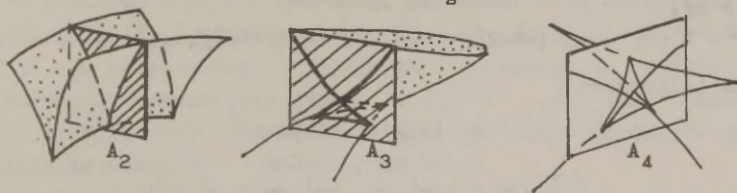
valgustamist ja ühtlasi selle pinna projekteerimist piki valguskiiri ekraanile, (vt. joonis). Seal, kus valguskiired puudutavad pinda, näeme varju piirdejoont e. singulaarsust  $A_1$ . Joonel  $A_1$  võivad esineda punktid, kus valguskiired puudutavad joont  $A_1$ . Need punktid moodustavad singulaarsuse  $A_2$ .

Järgmisi singulaarsusi  $A_s$ ,  $s > 2$ , võime näha mitmemootmeliste pindade valgustamisel.

Esimestel singulaarsustel on ka omad nimetused:  $A_1$  - volt,  $A_2$  - korts,  $A_3$  - pääsusaba,  $A_4$  - liblikas,  $A_5$  - vigvam,  $A_6$  - täht (ing. *fold, cups, swallowtail, butterfly, wigwam, star*), vastavalt konfiguratsioonidele joonisel



Üldiselt nimetatakse singulaarsusi  $A_s$  kaspoldideks.



Joonisel on kujutatud kolm konfiguratsiooni  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ . Kortsu teravikku näeme tasanduva pinna loikumisel tagasipöördeserva normaaltasandiga. Pääsusaba võib näha loikes tasanduva pinna tagasipöördeserva teraviku läheduses. Kui aga tagasipöördeserval on kaks lähedast teravikku, siis, kui oskame vaadata, võime näha liblika sündi.

Ka üldisemaid singulaarsusi  $\sum^{q_1 \dots q_s}$  võib näha pindade valgustamisel, kuid siis juba mitmemootmeliste kiirte abil,

~  
 või projekteerimisel mitmemootmelises sihis.

Singulaarsuste uurimisega tegeleb omaette teadusharu, mis on küllalt lähedane diferentsiaalgeomeetriale ja kahtlemata kasutab d.g. vahendeid, - katastroofide teooria. See teooria sai alguse prantsuse matemaatiku René Thomi tööst 1950.aastatel ja on akad. V.Arnoldi sõnade järgi "ekstreemum-ülesannete grandioosne üldistus".

3.7. Üheks peamiseks eesmärgiks singulaarsuste klassifitseerimisel on vaadeldavate funktsioonide maksimaalne lihtsustamine.

Olgu näiteks  $xy$ -tasandil antud funktsioon  $f(x,y)$  arendatuna Maolaurini ritta

$$f(x,y) = f + f_1x + f_2y + \frac{1}{2}(f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2) + \\ + \frac{1}{6}(f_{111}x^3 + 3f_{112}x^2y + 3f_{122}xy^2 + f_{222}y^3) + \dots$$

ja olgu 0-punktis  $\text{grad}f = 0$ . Tegemist on singulaarsusega 0-punktis. Liigutades pinda  $z=f(x,y)$   $xyz$ -ruumis (funktsiooni graafikut) üles-alla, fikseerime asendi, mil pind läbib 0-punkti. Siis  $f = 0$ . Lineaarliikmed puuduvad, kuna  $f_1 = f_2 = 0$ . Ruutliikmed  $\frac{1}{2}(f_{11}x^2 + 2f_{12}xy + f_{22}y^2)$  võime tingimusel

$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{vmatrix} \neq 0$  tuua  $xy$ -teljestiku pöördega kanoonilisse kujju  $\lambda_1x^2 + \lambda_2y^2$ , nagu tehakse tavalise ruutvormiga. Seejärel võime teha teisenduse

$$a: (x,y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}),$$

kus

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \frac{1}{2}(a_{11}^1x^2 + 2a_{12}^1xy + a_{22}^1y^2) \\ \tilde{y} = y + \frac{1}{2}(a_{11}^2x^2 + 2a_{12}^2xy + a_{22}^2y^2). \end{cases}$$

mille tagajärjel kaoksid ära kuupliikmed. Et tulemuses  $f \circ a^{-1} = \lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \dots$  puuduksid kuupliikmed, on vaja, et

---

Colin Maclaurin, 1701 matemaatik, 1698 - 1746

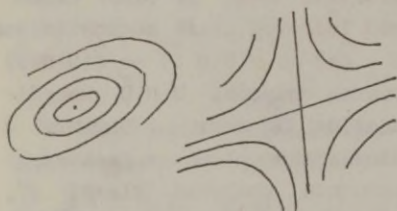
$$\lambda_1 a_{11}^1 = \frac{1}{6} f_{111}, \quad 2\lambda_1 a_{12}^1 + \lambda_2 a_{11}^2 = \frac{1}{2} f_{112},$$

$$\lambda_1 a_{22}^1 + 2\lambda_2 a_{12}^2 = \frac{1}{2} f_{122}, \quad \lambda_2 a_{22}^2 = \frac{1}{6} f_{222}.$$

Siit selgub, et kordajad  $a_{jk}^1$  on võimalik vastavalt fikseerida. Näiteks, kui me tahaksime funktsioonis  $f = x^2 - y^2 + 2xy^2$  vabaneda kuupliikmest  $2xy^2$ , siis teisenduseks sobiks

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \alpha xy + \beta y^2 \\ \tilde{y} = y + \alpha x^2 + (\beta - 1)xy, \end{cases}$$

kus  $\alpha$  ja  $\beta$  on suvalised parameetrid. Muidugi, vabanedes kuupliikmetest me ei saa loota, et kaovad ära kõrgemad astmed. Kuid manipuleerides analoogilisel viisil neljanda, viienda ja järgmiste astmetega, võime siiski samm-sammult vabaneda nendest astmetest nõnda, et lõpptulemuseks on  $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2$  ilma sabata. Järelikult, pärast kõiki vajalikke teisendusi on funktsiooni  $f(x, y)$  niivoojooned 0-punkti ümbruses kas ellipsid või hüperboolid, vt. joonis.



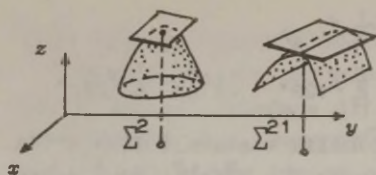
Toodud arutus leiab aset ka suvalise funktsiooni  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  korral 0-punkti ümbruses, kus  $\text{grad} f = 0$  ja  $\det(f_{ij}) \neq 0$ . Matriksit  $(f_{ij})$  nimetatakse Hesse matriksiks, tema determinantiga hessiaaniks. Difeomorfismi täpsusega on funktsioon  $f$  võrreldav kanoonilise kujuga  $\lambda_1 (u^1)^2 + \dots + \lambda_n (u^n)^2$ . Kordajaid  $\lambda_i$  võib veel võrdsustada  $\pm 1$ -ga. Vastavalt kordajate märkidele teostatakse klassifitseerimine.

Näit.  $n = 2$  ja  $n = 3$  korral on kaks võimalust: ++, +- ja +++, +-;  $n = 4$  korral on võimalusi kolm: +++, +++-, ++--. Selles seisneb tuntud Morse'i lemma.

Ludvig Otto Hesse, saksa matemaatik, 1811 - 1874.

Harold Kalvin Morston Morse, USA matemaatik, 1892 -

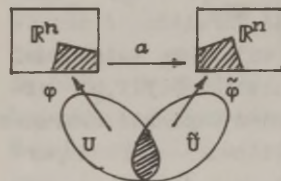




Joonisel on kujutatud kaks võimalikku singulaarsust  $\Sigma^2$  ja  $\Sigma^{21}$  kujutuse  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  puhul. Molematel juhtudel  $\text{grad} f = 0$ , kuid esimesel juhul on Hesse maatriksi  $(f_{ij})$  astak 2, teisel juhul aga 1. Esimesel juhul kehtib Morse'i lemma, teisel juhul aga mitte.

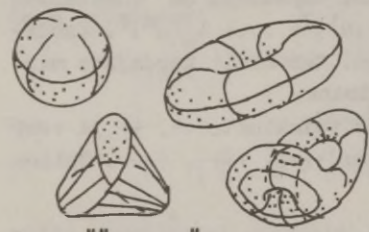
3.8. Juhime tähelepanu terminile muutkonnad tabelis 3.4, lk. 18.

Olgu antud mingi topoloogiline ruum  $M$ , kaetud loenduva arvu lahtiste ümbrustega, mis on homöomorfised  $n$ -ruumiga  $\mathbb{R}^n$ . Paare  $(U, \varphi)$ , kus  $U$  on üks ümbrustest ja  $\varphi$  vastav homöomorfism  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , nimetatame kaartideks. Homöomorfism  $\varphi$  määrab ümbrusel  $U$  koordinaadid. Kõik kaardid moodustavad ruumi  $M$  atlase. Kui



kaartide  $(U, \varphi)$  ja  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$  ümbrused lõikuvad, siis kompositsioon  $\alpha = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap \tilde{U}) \rightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U})$  määrab ühisosal  $U \cap \tilde{U}$  koordinaatide teisenduse. Kujutusi  $\alpha$  nimetatakse üleminekufunktsioonideks.

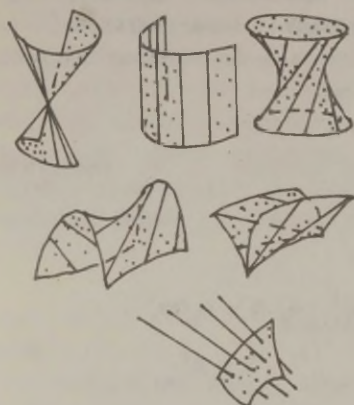
Kui kõik üleminekufunktsioonid kuuluvad klassi  $C^k$ , siis antud atlast nimetatakse  $C^k$ -atlaseks ja ruumi  $M$   $C^k$ -diferentseeruvaks muutkonnaks e. lihtsalt  $C^k$ -muutkonnaks. Tavaline  $n$ -ruum  $\mathbb{R}^n$  on muutkond ühe standardse kaardiga. Muidugi me lubame  $\mathbb{R}^n$ -s ka koordinaatide teisendusi.



Muutkondadest on vaja rääkida selleks, et oleks võimalik uurida keerulisemaid pindu jt. moodustisi, kus pole võimalik defineerida koordinaate nagu  $n$ -ruumis  $\mathbb{R}^n$ . Lihtsamad muutkonnad  $n = 2$  korral on sfäär, toor, ääreta Möbiuse leht, Kleini pudel (vt. joonis).

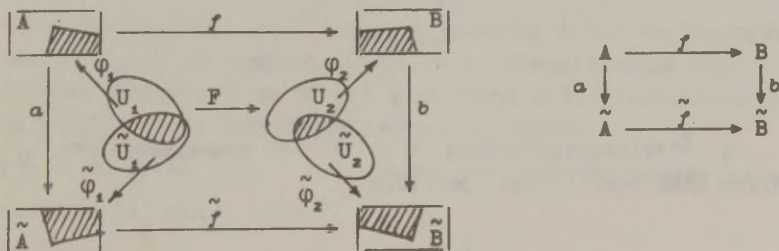
August Ferdinand Möbius, saksa matemaatik, 1790 - 1868;  
 Felix Klein, saksa matemaatik, 1849 - 1925.

**NÄIDE.** Neljamootmelise muutkonna moodustavad sirged kolmemootmelises ruumis, sest sirge määramisel on vaja fikseerida 4 parameetrit, nt. sirge loikepunktide koordinaadid tasanditega  $x = 0$  ja  $y = 0$ . Kolme-, kahe- ja üheparameetrilised sirgete parved on selle muutkonna alammuutkonnad: kompleksid, kongruentsid, joonpinnad.



Joonpindadest me tunneme koonust, silindrit, ühekattelist hüperboloidi, hüperboolset paraboloidi, tasanduvaid pindu, mille moodustajaiks on mingi ruumilise joone (e. tagasipöördeserva) puutujad. Kongruentsi moodustavad nt. pinna normaallid. Kui ruumi igas punktis on antud mingi siht, siis võib rääkida sirgete kompleksist.

3.9. Kaarte kasutatakse kujutuste lokaalsel uurimisel. Olgu  $F: M_1 \rightarrow M_2$  muutkonna  $M_1$  kujutus muutkonda  $M_2$ ;  $(U_1, \varphi_1)$ ,  $(\tilde{U}_1, \tilde{\varphi}_1)$  - kaks kaarti muutkonnal  $M_1$  ja  $(U_2, \varphi_2)$ ,  $(\tilde{U}_2, \tilde{\varphi}_2)$  - kaks kaarti muutkonnal  $M_2$ , kusjuures  $F(U_1) \subset U_2$ ,  $F(\tilde{U}_1) \subset \tilde{U}_2$ . Kui  $U_1 \cap \tilde{U}_1 \neq \emptyset$ , siis ka  $U_2 \cap \tilde{U}_2 \neq \emptyset$ , sest  $F(U_1 \cap \tilde{U}_1) \subset U_2 \cap \tilde{U}_2$ . Tekib kommutatiivne diagramm



kus  $A = \varphi_1(U_1 \cap \tilde{U}_1)$ ,  $\tilde{A} = \tilde{\varphi}_1(U_1 \cap \tilde{U}_1)$ ,  $B = \varphi_2(U_2 \cap \tilde{U}_2)$ ,

$\tilde{B} = \tilde{\varphi}_2(U_2 \cap \tilde{U}_2)$ ,  $a$  ja  $b$  on üleminekufunktsioonid "ümbrustel"  $U_1 \cap \tilde{U}_1$  ja  $U_2 \cap \tilde{U}_2$ , st.  $a = \tilde{\varphi}_1 \varphi_1^{-1}$ ,  $b = \tilde{\varphi}_2 \varphi_2^{-1}$ , ning  $f = \varphi_2 F \varphi_1^{-1}$  ja  $\tilde{f} = \tilde{\varphi}_2 \tilde{F} \tilde{\varphi}_1^{-1}$ . Kujutused  $f$  ja  $\tilde{f}$  esitavad kujutuse  $F$  vastavatel kaartidel. Kujutuse  $F$  omadusi, mis kõikvõimalikel üleminekutel  $a \times b: f \mapsto \tilde{f}$  ühelt lokaalselt esituselt teisele ei muutu, nimetatakse invariantseteks omadusteks. Suurusi, millel on invariantseid omadusi, nimetatakse *invariantideks*.

Kujutuste diferentsiaalvariantidega me kohtume allpool kolmandas peatükis.

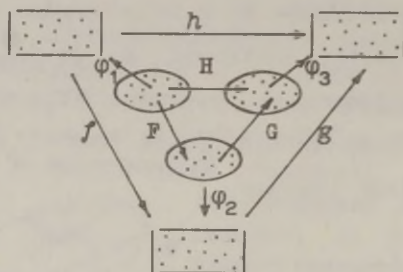
Kaks lauset mõtlemiseks.

1. Kujutuste kompositsiooni esitus on vastavate esituste kompositsioon.

$$H = GF,$$

$$g = \varphi_3 G \varphi_2^{-1}, \quad f = \varphi_2 F \varphi_1^{-1} \Rightarrow h = \varphi_3 H \varphi_1^{-1},$$

$$h = g \circ f.$$



2. Üleminekufunktsioon  $a = \tilde{\varphi} \varphi^{-1}$  on samasuskujutuse  $1_M$  esitus kaartidel  $(U, \varphi)$  ja  $(U, \tilde{\varphi})$ .

"Märkus. Allpool, rääkides kõikvõimalikest tuletistest, eeldame vastavate funktsioonide diferentseeruvust.

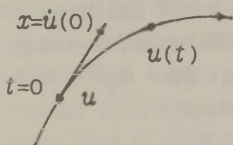
## 2. peatükk. VEKTORVÄLJAD JA DIFERENTSIAALVORMID

Sammume julgelt edasi, et veelgi läheneda diferentsiaal-geomeetria probleemidele. Eelmises peatükis me nägime, et kõikjal kehtib teatud duaalsuse printsiip: injeksioon - surjektioon, monomorfism - epimorfism, immersioon - submersioon, vektorruum ja tema kaasruum, vektorid - kovektorid, lineaarkujutuse korral kaaskujutus, tuum - kotuum, kujutis - kokujutis. Seda ideed väljendab ka käesolev peatükk, kus juttu tuleb duaalsetest ja üksteist täiendavatest mõistetest - vektorväljadest ja diferentsiaalvormidest.

### § 4. Vektorväljad

4.1. Oleme jälle ruumis  $\mathbb{R}^n$ . Kasutame veerumaatrikseid  $u$  ja  $x$  punktide ja vektorite tähistamisel. Vektoreid punktis  $u \in \mathbb{R}^n$  võib defineerida kahel viisil.

1. Liikugu punkt ruumis  $\mathbb{R}^n$  piki trajektoori  $u(t)$  ja olgu tema asendiks hetkel  $t = 0$  vaadeldav punkt  $u$ , st.  $u(0) = u$ ;



selle punkti kiirusvektor ja ühtlasi trajektoori puutujavektor punktis  $u$  on määratud tuletistega  $\dot{u}(t)$  väärtusel  $t = 0$ .

Tähistame  $x = \dot{u}(0)$  ja ütleme, et punktis  $u$  on defineeritud vektor  $X_u$ , mille komponentideks on  $x$ . Ilmselt võime suvalist siledat funktsiooni  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  piki joont  $u(t)$  diferentseerida ja rääkida selle tuletisest vektori  $X_u$  suhtes:

$$X_u \varphi = \left. \frac{d\varphi(u(t))}{dt} \right|_{t=0}$$
 Arvestades, et diferentseerime liit-funktsiooni, saame valemi

$$X_u \varphi = \varphi_1(u)x^1,$$

kus kordajateks on  $\varphi$  osatuletised punktis  $u$ , vt. 3.1, lk. 14.

2. Defineerime punktis  $u$  diferentsiaaloperaatori  $X_u: \varphi \mapsto X_u\varphi$ , mis igale siledale funktsioonile  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seab vastavusse mingi arvu  $X_u\varphi \in \mathbb{R}$ , ja nõuame, et iga funktsiooni-paari  $\varphi, \psi$  korral

$$X_u(\varphi + \psi) = X_u\varphi + X_u\psi,$$

$$X_u(k\varphi) = kX_u\varphi, \quad \forall k \in \mathbb{R},$$

$$X_u(\varphi \cdot \psi) = X_u\varphi \cdot \psi(u) + \varphi(u) \cdot X_u\psi.$$

Muide, siit järeldub kohe, et  $X_u k = 0$ . Kui rakendada operaatorit  $X_u$  funktsioonile  $\varphi$ , arendatuna punkti  $u$  ümbruses Taylori ritta

$$\varphi(\bar{u}) = \varphi(u) + \varphi_1(u)(\bar{u} - u)^1 + \frac{1}{2} \varphi_{1j}(u)(\bar{u} - u)^1(\bar{u} - u)^j + \dots,$$

arvestades seejuures koiki reegleid, saame samasuguse valemi  $X_u\varphi = \varphi_1(u)x^1$ , kus  $x^1 = X_u\bar{u}^1$ ,  $\bar{u}^1$  on koordinaatfunktsioonid.

Järelikult võib joone puutujavektorit tõlgendada nagu diferentsiaaloperaatorit (koik tingimused kehtivad!) ja ka vastupidi, iga diferentsiaaloperaator  $X_u$  on määratud suurus-  
tega  $x$  ja teda võib mõista nt. kasvoi sirgjoone  $u(t) = xt + u$  puutujavektorina. Konelgem lihtsalt, et punktis  $u$  on antud vektor  $X_u$  ja tema komponentideks on  $n$  arvu  $x$ .

Kui igas punktis  $u \in \mathbb{R}^n$  on fikseeritud mingi vektor  $X_u$ , siis on ruumis  $\mathbb{R}^n$  antud vektorväli  $X$ . Sel juhul sõltuvad komponendid  $x$  koordinaatidest  $u$ , st.  $x = x(u)$ . Vektorvälja  $X$  puhul võib rääkida funktsiooni  $\varphi$  tuletisest  $X\varphi = \varphi_1 x^1$ , mis on funktsioon - mitte arv, nagu  $X_u\varphi$ . Küll aga

$$X\varphi(u) = X_u\varphi, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

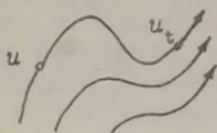
4.2. Vektorväljaga on seotud järgmised mõisted: trajektoorid, voog, invariandid. Olgu ruumis  $\mathbb{R}^n$  antud vektorväli  $X$  komponentidega  $x(u)$ . Koostame diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\dot{u} = x(u).$$

Teooria kinnitab, et lahendid  $u_t = a_t(u)$  eksisteerivad, iga  $t$  korral 0-punkti ümbrusest kujutus  $a_t: u \mapsto u_t$  on difeomorfism

Brook Taylor, inglise matemaatik, 1685 - 1731.

ning iga  $s$  ja  $t$  korral 0-punkti ümbrusest kehtib võrdus  $a_s \circ a_t = a_{s+t}$ . Siit järeldub, et  $t = 0$  korral  $a_t$  on samasusteisendus  $1_{\mathbb{R}^n}$  ja  $a_{-t} = a_t^{-1}$ . Teisiti öeldes, kujutus  $t \mapsto a_t$  määrab üheparameetrilise teisenduste rühma. Sel juhul on tavaks kirjutada  $a_t = \exp tX$ .



Joont  $a_t(u)$  nimetatakse punkti  $u$  trajektooriks. Kuna  $t$  muutudes iga punkt liigub piki oma trajektoori, tekib ruumis  $\mathbb{R}^n$  voo  $a_t$ .

Vaatleme funktsiooni  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  korral kompositsiooni  $\varphi \circ a_t$ . Ilmselt on funktsiooni  $\varphi \circ a_t$  väärtuseks punktis  $u$  funktsiooni  $\varphi$  väärtus punktis  $u_t = a_t(u)$ , st.  $\varphi \circ a_t(u) = \varphi(u_t)$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^n$ . Naeme, et funktsioon  $\varphi \circ a_t$  kandub  $t$  muutudes vastu voogu. Seejuures

$$(\varphi \circ a_t)'_{t=0} = \varphi_1 X^1 = X\varphi.$$

Kui funktsioon  $\varphi$  on vektorvälja  $X$  trajektooridel konstantne, siis  $\varphi \circ a_t \equiv \varphi$  ja  $X\varphi \equiv 0$ . Sel juhul nimetame funktsiooni  $\varphi$  vektorvälja  $X$  invariandiks.

Üldiselt on vektorväljal  $X$   $n-1$  sõltumatut invarianti  $I^2, \dots, I^n$  ( $p$  funktsiooni nimetatakse sõltumatuks, kui nende Jacobi maatriksi astak on  $p$ ). Need invariantid määravad submersiooni  $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , s.o. projekteerivad ruumi  $\mathbb{R}^n$  piki trajektoore ruumi  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Peatume veel juhul, kui vektorvälja  $X$  komponendid  $X(u)$  sõltuvad koordinaatidest  $u$  lineaarselt ja homogeenelt, st.  $X = Cu$ , kus  $u$  ja  $X$  on veerumaatriksid ja  $C$  on mingi konstantne  $n \times n$ -maatriks. Sel juhul avalduvad süsteemi  $\dot{u} = Cu$  lahendid kujul  $u_t = e^{Ct} u$  maatriksi  $Ct$  eksponentsiaali

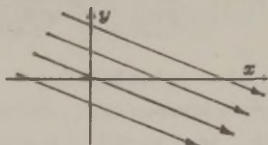
$$e^{Ct} = E + Ct + C^2 \frac{t^2}{2} + \dots + C^k \frac{t^k}{k!} + \dots$$

abil. Alati, kui võimalik, peame silmas skeemi

$$\dot{u} = Cu \Rightarrow u_t = e^{Ct} u.$$

Toome nüüd näiteid.

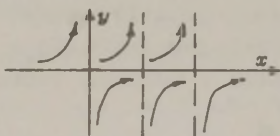
4.2.1. Olgu  $xy$ -tasandil antud süsteem  $\dot{u} = X(u)$  ja ta lahendid  $u_t = a_t(u)$  kujul



$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_t = 2t + x \\ y_t = -t + y. \end{cases}$$

Tegemist on vektorväljaga  $X(2, -1)$ , mille trajektoorideks on sirgjooned ja invariantiks funktsioon  $\varphi = x + 2y$ . Kontroll:  $\dot{\varphi} = \dot{x} + 2\dot{y} = 0$ .

4.2.2. Jälle  $xy$ -tasandil:



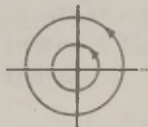
$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = y^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_t = t + x \\ y_t = \frac{y}{1 - yt}. \end{cases}$$

Vektorvälja  $X(1, y^2)$  trajektoorideks on võrdhaarsete hüperboolide harud, invariantiks  $\varphi = x + \frac{1}{y}$ . Kerge on kontrollida seost  $a_s \circ a_t = a_{s+t}$ :

$$(x, y) \xrightarrow{a_{s+t}} \left( t + (s+x) = (s+t) + x, \frac{y / (1 - ys)}{1 - [y / (1 - ys)]t} = \frac{y}{1 - (s+t)y} \right).$$

$a_s \searrow (s+x, \frac{y}{1-ys}) \nearrow a_t$

4.2.3. Ikka veel  $xy$ -tasandil:



$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Lahendite leidmisel kasutame skeemi

$$\dot{u} = Cu \Rightarrow u_t = e^{Ct}u.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} e^{Ct} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{t^3}{3!} + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(1 - \frac{t^2}{2} + \dots\right) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(t - \frac{t^3}{3!} + \dots\right) = \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sin t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Vektorvälja  $X(-y, x)$  trajektoorideks on kontsentrilised ringjooned, invariantdiks  $\varphi = x^2 + y^2$ . Voog  $a_t$  kujutab endast tasandi pöoret vastupäeva.

4.2.4. Olgu  $xy$ -tasandil süsteem  $\dot{u} = Cu$  määratud maatriksiga  $C = aE + bI$ , kus  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Siis  $e^{Ct} = e^{at}(E \cos bt + I \sin bt)$ .

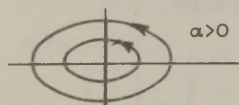
	$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$
$b > 0$			
$b < 0$			

Kõrval on toodud faasiportreede klassifikatsiooni tabel: mittestatsionaarsed fookused ( $a > 0$ ), statsionaarsed fookused ( $a < 0$ ) ja pöörded ( $a = 0$ ).

Invariandi selgitamiseks kasutame polaarkoordinaate  $(\rho, \varphi)$ ,  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ . Voog  $a_t: (x, y) \mapsto (x_t, y_t)$  on polaarkoordinaatides  $(\rho, \varphi) \mapsto (\rho_t, \varphi_t)$ , kus  $\rho_t = \rho e^{at}$ ,  $\varphi_t = \varphi + bt$ . Järelikult, invariantdiks on  $\rho \exp(-\frac{a}{b} \varphi)$ . Trajektoorideks on logaritmilised spiraalid  $\rho = \rho_0 \exp(\frac{a}{b} \varphi)$ .

4.2.5. Juhul

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \text{ kus } \alpha\beta = -1, \quad e^{Ct} = \begin{pmatrix} \cos t & \beta \sin t \\ \alpha \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$



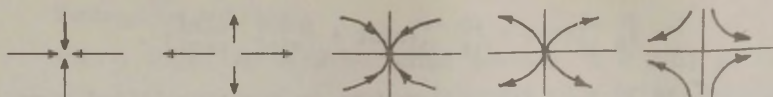
on voog  $a_t$  elliptiline pöore, trajektoorideks on ellipsid, invariantdiks  $\alpha x^2 - \beta y^2$ .

4.2.6. Juhul

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \text{ kus } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad e^{Ct} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix},$$

on invariantdiks  $x^\mu y^{-\lambda}$ . Lihtsamad faasiportreed :





$\lambda = \mu < 0$  - kokkusurumine,  $\lambda = \mu > 0$  - venitamine,  
 $(\lambda, \mu) = (-2, -1)$  - stabiilne sõlm parabolidest,  
 $(\lambda, \mu) = (2, 1)$  - mittestabiilne sõlm parabolidest,  
 $(\lambda, \mu) = (1, -1)$  - sadul hüperboolidest.

#### 4.2.7. Kui $xyz$ -ruumis

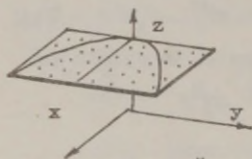
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ siis } \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

sest

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e^{Ct} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorväljal  $X(y, z, 0)$  on kaks sõltumatut invarianti:  $z$  ja  $y^2 - 2xz$ . Muuseas, teine invariant on ruutfunktsiooni  $x + yt + z \frac{t^2}{2}$  diskriminant.

Trajektoorideks on parabolid tasanditel  $z = z_0$ .



4.2.8. Üldistame eelneva olukorra neljamootmelisse ruumi. Võtame ruumi  $\mathbb{R}^4$  koordinaatideks  $(u, u', u'', u''')$ . Vektorvälja  $X(u', u'', u''', 0)$  korral  $Xu = u'$ ,  $X^2u = u''$ ,  $X^3u = u'''$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_t \\ u'_t \\ u''_t \\ u'''_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ u''' \end{pmatrix},$$

invariante on kolm:  $D_1 = u - \frac{u' u''}{u'''} + \frac{(u''')^3}{3(u''')^2}$ ,  $D_2 = u' - \frac{(u'')^2}{2u''}$ ,

$D_3 = u'''$ . Kontrollige, et  $XD_1 = XD_2 = XD_3 = 0$ . Trajektoorideks on kuupparabolid. Tasandil  $u''' = 1$  on  $D_1 = u - u' u'' + \frac{1}{3}(u'')^3$ ,

$D_2 = u' - \frac{(u'')^2}{2}$  ning  $D = (3D_1)^2 + (2D_2)^3$  on kuupfunktsiooni  $u_t = u + u't + u'' \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$  diskriminant.



Võrrand  $D = 0$  määrab  $u, u', u''$ -ruumis tasanduva pinna, mille tagasipöördeservaks on kuupparabool  $M_t = (t^3/6, t^2/2, t)$ . Tõepoolest, puutujal

$M_t + \lambda M'_t = (t^3/6 + \lambda t^2/2, t^2/2 + \lambda t, t + \lambda)$  on  $D_1(M_t + \lambda M'_t) = \lambda^3/3$ ,  $D_2(M_t + \lambda M'_t) = -\lambda^2/2$ ,  $D(M_t + \lambda M'_t) = 0$ . See leiab aset tasandil  $u'' = 1$ , kus punkt  $(t^3/6, t^2/2, t, 1)$  liigub piki punkti  $(0, 0, 0, 1)$  trajektoori. Osutub, et kuupfunktsioonil  $u_t$  on üks või kolm reaalset juurt vastavalt sellele, kus asub punkt  $(u, u', u'', 1)$  tasanduva pinna  $D = 0$  suhtes: kas väljaspool holmu või nende vahel. Kui see punkt asub tasanduval pinnal  $D = 0$  või selle tagasipöördeserval, on kuupfunktsioonil vastavalt kahe- või kolmekordne juur.

Nende arutluste juurde tuleme hiljem veel tagasi, vt. 11.2, lk. \*134.

4.3. Kõik vektorid punktis  $u \in \mathbb{R}^n$  moodustavad vektorruumi, mille tähiseks on  $T_u \mathbb{R}^n$ . Ka kõik vektorväljad moodustavad vektorruumi (üle korpuse  $\mathbb{R}$ ) ja selle vektorruumi baasi moodustavad osatuletiste operaatorid  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$ . Tõepoolest, kui  $X$  on mingi vektorväli komponentidega  $x^i$ , siis iga diferentseeruva funktsiooni  $\varphi$  korral on  $X\varphi = \varphi_i x^i$ , kus  $\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}$ ; järelikult,

$$X = \partial_i x^i.$$

Seda valemit tuleb õigesti mõista. Siin võib tekkida väike segadus: kas avaldis  $\partial_i x^i$  on operaatorite  $\partial_i$  lineaarkombinatsioon kordajatega  $x^i$  või on tegemist koguni osatuletistega  $\frac{\partial x^i}{\partial u^i}$ . Arusaamatuste vältimiseks lepime kokku, et summeerimisel diferentseerimist ei toimu, st. summeerimisindeks  $i$  viitab lineaarkombinatsioonile, küll aga kirjutist  $\partial_i x^i$ , kus

summeerimist pole, tuleb mõista osatuletisena  $\frac{\partial x^j}{\partial u^i}$ . Sümbooli  $\partial_i x^j$  asemel võiks kirjutada ka  $x^j \partial_i$ , kuid sel juhul tekib üleminekul maatriksvalemitele veel suurem segadus; nt. baasi teisendamisel  $\tilde{\partial} = \partial A$  on selge, et  $\partial_j A_1^j$  on lineaarkombinatsioon, kirjutisel  $A\partial$  aga pole motet, kuna  $\partial$  on reamaatriks.

Märgime, et vektorid  $\partial_i$  on igas punktis  $u \in \mathbb{R}^n$  lineaarselt sõltumatud, sest võrdus  $\partial_i \xi^i = 0$  tähendaks, et suvalise funktsiooni  $\varphi$  korral oleks  $\varphi_i \xi^i = 0$ , mis pole võimalik.

Fikseeritud  $i$  korral on vektorvalja  $\partial_i$  trajektoorideks koordinaatjooned, mis on paralleelsed  $u^i$ -teljega, invariantideks aga koordinaatfunktsioonid  $\bar{u}^j$ , kus  $j \neq i$ .

Operaatorite  $\partial_i$  poolt moodustatud baasi nimetatakse *naturaalseks baasiks*.

4.4. Diferentseeruva kujutuse  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferentsiaali  $T_u f$  võib defineerida ka kasutamata Jacobi maatriksit, vt. 3.1, lk. 15.

Võtame ruumides  $T_u \mathbb{R}^n$  ja  $T_v \mathbb{R}^m$ , kus  $v = f(u)$ , kaks vektorit  $X_u$  ja  $Y_v$  ning nimetame vektori  $Y_v$  vektori  $X_u$  kujutiseks, kui suvalise diferentseeruva funktsiooni  $\varphi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  korral kehtib võrdus

$$Y_v \varphi = X_u (\varphi \circ f).$$

Minnes üle komponentidele, võib öelda, et  $\varphi_\alpha y^\alpha = \varphi_\alpha f_1^\alpha x^1$  ja

$$y^\alpha = f_1^\alpha x^1,$$

kus  $(f_1^\alpha)$  on Jacobi maatriks. Mõlemad definitsioonid on samaäärsed. Eelistatum on uus definitsioon, mis võimaldab kujutust  $T_u f: X_u \rightarrow Y_v$  defineerida koordinaatide abita.

Lisagem, et Jacobi maatriksi  $(f_1^\alpha)$  veerud punktis  $u \in \mathbb{R}^n$  vastavad operaatorite  $(\partial_1)_u$  kujutistele, kui neid vaadelda naturaalses baasis  $(\partial_\alpha)_v$ :

$$T_u f (\partial_1)_u = (\partial_\alpha)_v f_1^\alpha(u).$$

Immersiooni korral moodustavad vektorid  $T_u f (\partial_1)_u$  pinna  $f(\mathbb{R}^n)$  puutujatasandi baasi punktis  $v = f(u)$ .

**NÄIDE.** Pinna defineerimisel vektorvõrrandiga  $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$

on operaatorite  $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$  kujutisteks vektorid  $\vec{r}_u, \vec{r}_v$  ja nende lineaarkatteks pinnal puutujatasand, vt. 3.5.5, lk. 19.

4.5. Nagu öeldud, kutsub voog  $a_t = \exp tX$  esile funktsiooni  $\varphi$  liikumise:  $\varphi_t = \varphi \circ a_t$ . Kõne alla võiks tulla funktsiooni  $\varphi_t$  esitamine Maclaurini reana

$$\varphi_t = \varphi + \varphi' t + \varphi'' t^2/2 + \dots,$$

kus  $\varphi' = X\varphi$ ,  $\varphi'' = X^2\varphi, \dots$ . Jättes kõrvale standardsed kinnitused rea koondumise kohta, näeme me siin võimalust kirjeldada funktsiooni  $\varphi_t$ , ilma et oleks vaja lahendada süsteemi  $\dot{u} = X(u)$ . Vastupidi, rea koostamisel on vaja leida tuletised  $\varphi', \varphi'', \dots$  või vastav diferentsiaalvõrrand, mis neid tuletisi omavahel seob.

4.5.1. Olgu näiteks,  $xyz$ -ruumis antud vektorväli  $X(1, 0, k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , ja me tahame kirjeldada funktsiooni

$$\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^2 - 1)$$

liikumist. Kuna  $\varphi' = x - kz$ ,  $\varphi'' = 1 - k^2$ ,  $\varphi''' = 0$ , siis rida lõpeb pärast kolmandat liiget:

$$\varphi_t = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^2 - 1) + (x - kz)t + (1 - k^2) t^2/2.$$

Antud juhul lahendub süsteem  $\dot{x} = 1$ ,  $\dot{y} = 0$ ,  $\dot{z} = k$  lihtsalt:  $x_t = t + x$ ,  $y_t = y$ ,  $z_t = kt + z$ , ja me saame sama tulemuse ka otseselt:

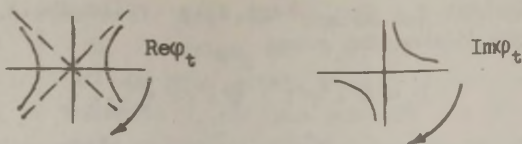
$$\varphi_t = \frac{1}{2}[(t + x)^2 + y^2 - (kt + z)^2 - 1].$$

4.5.2. Teine olukord kujuneb  $xy$ -tasandil funktsiooni  $\varphi = z^n$  liikumisel vektorvälja  $X(-y, x)$  mõjul. Sealjuures oleme komplekstasandil, kus  $z = x + yi$ . Sel juhul  $Xz = iz$ ,  $\varphi' = in\varphi$ ,  $\varphi'' + n^2\varphi = 0$ . Viimane seos on diferentsiaalvõrrand, mille lahendiks on  $\varphi_t = \varphi \cos nt + \frac{1}{n} \varphi' \sin nt$ .

Minnes üle polaarkoordinaatidele:  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , saame  $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$  ja

$$\varphi_t = \rho^n[\cos n(\theta + t) + i \sin n(\theta + t)].$$

Kuna voog  $Q_t$  pöörab tasandi punkte vastupäeva ühtlaselt, pöörab funktsioon  $\varphi_t$  ennast sama kiirelt vastupidises suunas, st. päripäeva.



Joonisel on kujutatud funktsiooni

$\varphi_t = (x^2 - y^2)\cos 2t - 2xy \sin 2t + [2xy \cos 2t + (x^2 - y^2)\sin 2t]$  li reaal- ja imaginaarosade nivoojooned pöördel päripäeva ( $n=2$ ).

4.6. Peale lineaartehete, st. vektorväljade liitmise  $X+Y$  ja nende korrutamise funktsioonidega  $\varphi X$ , on olemas veel *saluoperatsioon*

$$[XY] = XY - YX.$$

Seda operatsiooni võib tõlgendada järgmiselt. Olgu  $X$  ja  $Y$  vektorväljad ning  $x^i$  ja  $y^j$  neile vastavad komponendid. Kuna diferentseeruva funktsiooni  $\varphi$  korral  $X\varphi = \varphi_{1i}x^i$ ,  $Y\varphi = \varphi_{j1}y^j$ , siis

$$XY\varphi = (X\varphi_j)y^j + \varphi_1(Xy^1) = \varphi_{1j}x^i y^j + \varphi_1(Xy^1),$$

$$YX\varphi = (Y\varphi_1)x^1 + \varphi_1(Yx^1) = \varphi_{j1}x^1 y^j + \varphi_1(Yx^1),$$

kus  $\varphi_{1j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^1 \partial u^j}$  on teist järku osatuletised ja, vastavalt Schwarzzi teoreemile,  $\varphi_{1j} = \varphi_{j1}$ . Järelikult,

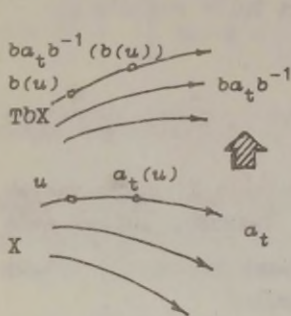
$$[XY]\varphi = \varphi_1(Xy^1 - Yx^1).$$

Operaatorit  $[XY]$  mõistame vektorväljana, mille komponentideks on  $Xy^1 - Yx^1$ . Täpsemalt, vektorvälja  $[XY]$   $i$ -ndaks komponendiks on vektorväljade  $Y$  ja  $X$   $i$ -ndate komponentide tuletiste vahe vastavalt  $X$  ja  $Y$  suhtes.

Erijuhul, kui  $X$  ja  $Y$  komponendid sõltuvad koordinaatidest  $u$  lineaarselt ja homogeenselt, st.  $x = Au$  ja  $y = Bu$ , kus  $A$  ja  $B$  on konstantsed  $n \times n$ -matriksid, avalduvad vektorvälja  $[XY]$  komponendid kujul  $-[AB]u$ , kus  $[AB] = AB - BA$ . Matriksit  $[AB]$  nimetatakse matriksite  $A$  ja  $B$  kommutaatoriks.

Hermann Amandus Schwarz, saksa matemaatik, 1843 - 1921.

Vektorvälja [XY] teket võib tõlgendada järgmisel viisil. Näitame esiteks, kuidas vektorvälja X mõjutab teisendus  $b$ .



Vastaku vektorväljale X voog  $a_t = \exp tX$ . Punkti  $u$  trajektoori kirjeldab liikuv punkt  $a_t(u)$ . Teisendusel  $b$  teisenevad punktid  $u$  ja  $a_t(u)$  punktideks  $b(u)$  ja  $b(a_t(u)) = ba_t b^{-1}(b(u))$ . Voog  $a_t$  teiseneb vooks  $ba_t b^{-1}$ , mis vastab vektorväljale  $TbX$ . Tõepoolest, vastavalt kujutuse diferentsiaali definitsioonile

4.4 lk. 34, näeme, et iga diferentseeruva funktsiooni  $\varphi$  korral

$$(TbX)_u \varphi = X_{b^{-1}(u)}(\varphi \circ b) = (\varphi \circ ba_t)'_{t=0}(b^{-1}(u)), \quad (*)$$

$$\text{st. } (TbX)\varphi = (\varphi \circ ba_t b^{-1})'_{t=0} \text{ ja } ba_t b^{-1} = \exp TbX.$$

Aasendades valemis (\*) funktsiooni  $\varphi$  koordinaatfunktsiooniga  $\bar{u}^1$ , selgub ka, millised on vektorvälja  $TbX$  komponendid, nimelt  $(b_j^1 X^j) \circ b^{-1}$ , kus  $(b_j^1)$  on teisenduse  $b$  Jacobi maatriks.

Nii võib arutleda ka teisenduse  $b_\tau = \exp \tau Y$  korral, kui  $\tau$  on fikseeritud: vektorväli X teiseneb vektorväljaks  $Tb_\tau X$ . Oeldakse, et voog  $b_\tau$  kutsub esile vektorvälja X deformeermise ja seda kirjeldab parameetri  $\tau$  muutudes vektorväli  $Tb_\tau X$ . Vektori  $(Tb_\tau X)_u$  muutumise kiirust igas punktis  $u \in \mathbb{R}^n$  on võimalik hinnata tuletise abil

$$(Tb_\tau X)'_{\tau=0} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (Tb_\tau X - X),$$

mis annabki tulemuseks vektorvälja [XY] vektori. Tõepoolest, diferentseerides komponente  $(b_j^1 X^j) \circ b^{-1}$ , kus  $b$  asemel mõistame  $b_\tau$ , parameetri  $\tau$  järgi kohal  $\tau = 0$ , arvestades seejuures, et  $(b_\tau^1)'_{\tau=0} = y^1$ ,  $(\varphi \circ b_\tau^{-1})'_{\tau=0} = -Y\varphi$  ja  $(b_j^1)$  muutub ühikmaatriksiks, saame lõpptulemuseks  $XY^1 - YX^1$ , s.o. vektorvälja [XY] komponendid.

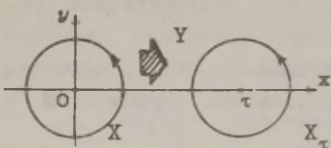
Ka siin on võimalik rakendada tuletisi Maclaureni rea

moodustamiseks. Tähistame  $X_\tau = T b_\tau X$  ja märgime tuletise  $(T b_\tau X)'_{\tau=0}$  lihtsalt primiga  $X'$ ; järgmised tuletised tähistame  $X'' = (T b_\tau X')'_{\tau=0}$  jne. Seega võib kone alla tulla avaldis

$$X_\tau = X + X'\tau + X'' \frac{\tau^2}{2} + \dots,$$

mis kirjeldab vektorvälja  $X$  muutumist voo  $b_\tau$  mõjul. Kinnitame öeldut järgmiste näidetega.

4.6.1. Olgu  $xy$ -tasandil antud vektorväli  $X(-y, x)$ ; vastav voog on tasandi pöore ümber  $O$ -punkti. Vaatame, kuidas seda



voogu mõjutab vektorväli  $Y(1, 0)$ .

Arvutame sulud

$$[XY](0, -1), [[XY]Y] = 0, \dots$$

ja koostame rea:

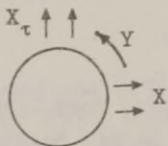
$$X_\tau = X + X'\tau.$$

Komponendid  $(-y, x - \tau)$  näitavad, et vektorväljale  $X_\tau$  vastab samuti tasandi pöore, kuid ümber punkti  $(0, \tau)$ . Parameetri  $\tau$  muutudes kandub voog (keeris, vesipüks, tromb) muutumatult vasakult paremale, vt. joonis.

4.6.2. Mõjutagu nüüd vektorväli  $Y(-y, x)$  vektorvälja  $X(1, 0)$ . Seekord  $X'(0, 1)$ ,  $X''(-1, 0)$  ja  $X'' + X = 0$ . Saame diferentsiaalvõrrandi, mille lahendiks on

$$X_\tau = X \cos \tau + X' \sin \tau.$$

Komponendid  $(\cos \tau, \sin \tau)$  näitavad, et paralleelnihete suund  $X_\tau$  pöörab ennast vastupäeva.



Võrreldes voogu  $a_\tau$  tuulega, näeme, et hetkel  $\tau=0$  puhub tuul läänest, hetkel  $\tau = \frac{\pi}{2}$  lõunast.

4.6.3. Vektorväljade  $X(x-a, y)$  ja  $Y(x, y)$  korral  $[XY](-a, 0)$ ,  $[[XY]Y](-a, 0), \dots$ , st.  $X' = X'' = \dots = X^{(k)}$ ,  $\forall k$ . Parameetri  $\tau$  muutudes  $-\infty$ -st  $+\infty$ -sse eemaldub vektorväli  $X_\tau(x - ae^\tau, y)$  eksponentsiaalselt väljast  $X$  lõpmatusse.

#### 4.6.4. Maatriksite

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ kommutaator on } [AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Seega vektorväljade } X = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \text{ ja } Y = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \text{ korral } [XY] = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kaks pöret  $xyz$ -ruumis, üks ümber  $x$ -telje, teine ümber  $y$ -telje, tekitavad kolmanda pöörde ümber  $z$ -telje. Näeme analoogiat güroskoobi efektiga ja Coriolisi kiirendusega.

### § 5. Diferentsiaalvormid

5.1. Diferentsiaalvorm on kovektorväli ruumis  $\mathbb{R}^n$ , st. kui vektorvälja mõista vastavusena

$$X: u \in \mathbb{R}^n \mapsto X_u \in T_u \mathbb{R}^n,$$

siis diferentsiaalvormi tuleb mõista vastavusena

$$\phi: u \in \mathbb{R}^n \mapsto \phi_u \in T_u^* \mathbb{R}^n,$$

kus  $T_u^* \mathbb{R}^n$  on vektorruumi  $T_u \mathbb{R}^n$  kaasruum. Seejuures vormi  $\phi$  väärtuseks väljal  $X$  nimetame funktsiooni  $\phi(X)$ , mille väärtus punktis  $u$  on  $\phi_u(X_u)$ ,

$$(\phi(X))(u) = \phi_u(X_u).$$

Diferentsiaalvormi lihtsaim näide on diferentseeruva funktsiooni  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferentsiaal  $d\varphi$ , mis defineeritakse valemiga

$$d\varphi(X) = X\varphi,$$

kus  $X$  on suvaline vektorväli.

Juhime kohe tähelepanu sellele, et üldjuhul ei ole Gaspard Gustav Coriolis, prantsuse füüsik ja matemaatik, 1792 - 1843.



diferentsiaalvorm funktsiooni diferentsiaal, st. üldiselt ei eksisteeri funktsiooni, mille diferentsiaaliks oleks antud vorm. Kui aga selline funktsioon eksisteerib, siis nimetatakse vormi *täpseks*.

Diferentsiaalvorm  $\phi$  määrab igas ruumis  $T_u \mathbb{R}^n$  annulaatori, mis on selle ruumi  $(n-1)$ -mõõtmeline alamruum. Täpse vormi puhul  $\phi = d\psi$  on need annulaatorid nivoopindade  $\psi = \text{const}$  puutujatasandid.

Me teame juba, et osatuletiste operaatorid  $\partial_i$  moodustavad igas ruumis  $T_u \mathbb{R}^n$  baasi ning suvaline vektorväli on avaldatav kujul  $X = \partial_i x^i$ . Nüüd aga moodustavad koordinaatfunktsioonide diferentsiaalid  $dx^i$  (täpsem oleks kirjutada  $dx^i_u$ ) igas ruumis  $T_u \mathbb{R}^n$  duaalse kobaasi ja suvaline diferentsiaalvorm on avaldatav kujul  $\phi = \varphi_i dx^i$ . Ilmselt  $dx^i(\partial_j) = \delta_j^i = \delta_j^i$  ja  $\phi(X) = \varphi_i x^i$ .

5.1.1.  $xyz$ -ruumis on diferentsiaalvorm  $yz dx + xz dy + dz$  plussmärgi korral täpne, sest ta on funktsiooni  $xy + z$  diferentsiaal, miinusmärgi korral aga ei ole täpne.

5.1.2. Järeldus Greeni valemist: diferentsiaalvorm  $Pdx + Qdy$  on  $xy$ -tasandil lokaalselt täpne parajasti siis, kui  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .

5.2. Eelpool nägime, et kujutuse  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferentsiaal  $Tf$  viib vektorid ruumist  $\mathbb{R}^n$  ruumi  $\mathbb{R}^m$ . Ettevaatust:  $Tf$  viib vektorid vektoreiks, mitte vektorväljad vektorväljadeks. Nüüd lisame, et kaaskujutus  $T^*f$  toob diferentsiaalvormid ruumist  $\mathbb{R}^m$  vastupidises suunas ruumi  $\mathbb{R}^n$

$$\Psi \mapsto \phi = \Psi \circ Tf.$$

Seejuures jääb täpne vorm täpseks

$$d\phi \circ Tf = d(\phi \circ f),$$

mis järeldub valemist  $Y_v \phi = X_u(\phi \circ f)$ , vt. 4.4, lk. 34. Nii diferentsiaal  $Tf$  kui tema kaaskujutus  $T^*f$  on määratud Jacobi maatriksiga. Valemid

George Green, inglise matemaatik, 1793 - 1841.

$$y^\alpha = f_1^\alpha x^1 \quad \text{ja} \quad \psi_1 = \psi_\alpha f_1^\alpha$$

on duaaises vastavuses, esimene neist seob vektorite  $X_u$  ja  $Y_v$  komponendid, vt. 4.4, teine aga kovektorite  $\Psi_v$  ja  $\phi_u = \Psi_v \cdot T f$  komponendid.

Juhime tähelepanu märkusele 3.1, lk. 15, mis oli tehtud ebakorrektselt väljendi  $y^\alpha = f^\alpha(x^1)$  kohta, praegustes tähistustes  $y^\alpha = f^\alpha(u^1)$ . Veelgi ebakorreksemalt kirjutatakse  $dv^\alpha = f_{1v}^\alpha du^1$ . Ainuõige on siin kirjutada mitte  $dv^\alpha$ , vaid  $dv^\alpha \cdot T f$  või  $d(v^\alpha \circ f)$ . Kui meie edaspidi traditsiooni järgides ikkagi kirjutame valesti, siis me ei tohi unustada öeldut.

5.3. Diferentsiaalvorme on võimalik omavahel liita  $\phi + \psi$  ja korrutada funktsioonidega  $\omega\phi$ . On olemas diferentsiaalvormide väliskorrutis  $\phi \wedge \psi$ , s.o. bilineaarne kujutus, mille argumentideks on vektorväljad  $X, Y$ :

$$\phi \wedge \psi(X, Y) = \begin{vmatrix} \phi(X) & \psi(X) \\ \phi(Y) & \psi(Y) \end{vmatrix}.$$

Näeme kohe, et  $\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$  ja  $\phi \wedge \phi = 0$ . Väliskorrutisi võib samuti omavahel liita ja korrutada funktsioonidega. Väliskorrutiste lineaarkombinatsiooni nimetame 2-vormiks.

On mõeldav defineerida  $p$  diferentsiaalvormi väliskorrutis  $p$ -lineaarse kujutusena

$$\phi^1 \wedge \dots \wedge \phi^p(X_1, \dots, X_p) = \begin{vmatrix} \phi^1(X_1) & \dots & \phi^1(X_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi^p(X_1) & \dots & \phi^p(X_p) \end{vmatrix}$$

ja moodustada vastavalt ka  $p$ -vormid. Siit saab alguse välsvormide teooria.

Peatume lähemalt 2-vormidel. Kui vormid on antud valemita  $\phi = \phi_1 du^1$  ja  $\psi = \psi_1 du^1$ , siis nende väliskorrutis on esitatav järgmiselt:

$$\phi \wedge \psi = \phi_{[1} \psi_{j]} du^1 \wedge du^j,$$

kus  $\phi_{[1} \psi_{j]} = \frac{1}{2}(\phi_1 \psi_j - \psi_j \phi_1)$ . Tõepoolest, võtame argumentideks  $X = \partial_1 x^1$ ,  $Y = \partial_1 y^1$  ja arvestame, et  $du^1 \wedge du^j(X, Y) = x^1 y^j - x^j y^1$ .

Õestuse võib lõpuni viia lugeja.

Üldine 2-vorm on esitatav kujul

$$\theta = \theta_{1j} \dot{u}^1 \wedge \dot{u}^j,$$

kus kordajad  $\theta_{1j}$  on koordinaatide  $u^1$  suvalised funktsioonid ja kaldsummeerilised indeksite  $i$  ja  $j$  suhtes, st.  $\theta_{1j} = -\theta_{j1}$ .

Mõtlemiseks: näidata, et  $xy$ -tasandil on  $d\varphi \wedge d\psi$  vaartus operaatoritel  $\frac{\partial}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial}{\partial y}$  jakobiaan

$$|d\varphi| = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix}.$$

5.4. Duaalses vastavuses vektorväljade suluoperatsiooniga  $(X, Y) \mapsto [XY]$  on diferentsiaalvormide välisdiferentseerimine  $D: \phi \mapsto D\phi$ . Operaator  $D$  seab igale 1-vormile  $\phi$  vastavusse 2-vormi  $D\phi$  ja rahuldab järgmist kolme tingimust:

1.  $D(\phi + \psi) = D\phi + D\psi$ ,
2.  $D(\varphi\psi) = d\varphi \wedge \psi + \varphi D\psi$ ,
3.  $D(d\varphi) = 0$ ,

kus  $\phi, \psi$  on suvalised 1-vormid ja  $\varphi$  - suvaline diferentseeruv funktsioon.

Järelikult, kui vorm on antud kujul  $\phi = \varphi_1 \dot{u}^1$ , siis

$$D\phi = \partial_{[1}\varphi_{j]} \dot{u}^1 \wedge \dot{u}^j.$$

Tõepoolest, kuna  $d\varphi_1 = \partial_j \varphi_j \dot{u}^j$ , saame  $D\phi = d\varphi_1 \wedge \dot{u}^1 = \partial_j \varphi_1 \dot{u}^j \wedge \dot{u}^1 = \frac{1}{2}(\partial_1 \varphi_j \dot{u}^1 \wedge \dot{u}^j + \partial_j \varphi_1 \dot{u}^j \wedge \dot{u}^1) = \frac{1}{2}(\partial_1 \varphi_j - \partial_j \varphi_1) \dot{u}^1 \wedge \dot{u}^j = \partial_{[1}\varphi_{j]} \dot{u}^1 \wedge \dot{u}^j$ .

2-vorm  $D\phi$  on vormi  $\phi$  välisdiferentsiaal.

Kolmas tingimus ütleb, et täpse vormi välisdiferentsiaal võrdub nulliga. Väikese täpsustusega on õige ka vastupidine lause: kui  $D\phi = 0$ , siis on vorm  $\phi$  lokaalselt täpne.

NÄIDE.  $xyz$ -ruumis on 1-vorm antud kujul

$$\phi = Pdx + Qdy + Rdz,$$

kus  $P, Q$  ja  $R$  sõltuvad koordinaatidest  $x, y$  ja  $z$ . Tema välisdiferentsiaal on

$$D\phi = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz =$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx.$$

Tuntud Stokesi valem (ja ka Greeni valem tasandil) on avaldatav kujul

$$\int_{\partial U} \phi = \int_U D\phi,$$

kus  $U$  on kompaktne piirkond ja  $\partial U$  on pind e. raja, mis piirkonda  $U$  ümbritseb. Teatavasti järeldub sellest valemist, et  $D\phi = 0$  korral on vorm  $\phi$  täpne, vt. ka 5.1.2, lk. 40.

**MÄRKUS.** Välisdiferentsiaal on defineeritav ka valemiga

$$D\phi(X, Y) = X(\phi(Y)) - Y(\phi(X)) - \phi([XY]),$$

kus  $X$  ja  $Y$  on suvalised vektorväljad.

Töepoolt, olgu  $X = \partial_1 x^1$ ,  $Y = \partial_1 y^1$ ,  $\phi = \varphi_1 dx^1$ , siis  $X(\phi(Y)) - Y(\phi(X)) - \phi([XY]) = X(\varphi_1 y^1) - Y(\varphi_1 x^1) - \varphi_1 (xy^1 - yx^1) = X\varphi_1 y^1 - Y\varphi_1 x^1 = \alpha\varphi_1 \wedge dx^1(X, Y)$ .

5.5. Tuletame meelde, kuidas vektorväli  $Y$  mõjutab vektorvälja  $X$ , vt. 4.6, lk. 37. Voog  $b_\tau = \exp \tau Y$  tekitab vektorvälja  $X_\tau = T b_\tau X$ , mis parameetri  $\tau$  muutudes kirjeldab vektorvälja  $X$  deformeerimist.

Voog  $b_\tau$  kutsub esile ka diferentsiaalvormi  $\phi$  deformeerimise ja seda kirjeldab diferentsiaalvorm

$$\phi_\tau = \phi \circ T b_\tau.$$

Siin on samuti loomulik kõnelda tuletisest  $\phi' = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (\phi_\tau - \phi)$ , aga ka kõrgematest tuletistest ja vastavast reast

$$\phi_\tau = \phi + \phi' \tau + \phi'' \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

Lahtudes ilmest võrdusest

$$(\phi \circ T b_\tau)(T b_{-\tau} X) = (\phi(X)) \circ b_\tau$$

ja diferentseerides selle võrduse mõlemaid pooli  $\tau$  järgi

George Gabriel Stokes, inglise matemaatik, 1819 - 1903.

kohal  $\tau = 0$ , saame

$$\phi'(X) - \phi(X') = Y(\phi(X)) \quad \text{ja} \quad \phi'(X) = Y(\phi(X)) + \phi(X').$$

Kui minna üle esitusele  $X = \partial_1 x^1$ ,  $Y = \partial_1 y^1$ ,  $\phi = \varphi_1 dx^1$ , siis leiame  $\phi'(X) = Y(\varphi_1 x^1) + \varphi_1 (Xy^1 - Yx^1) = (Y\varphi_1 dx^1 + \varphi_1 dy^1)(X)$ .

Tulemuseks on valem, mille järgi võime arvutada  $\phi'$ :

$$\phi' = Y\varphi_1 dx^1 + \varphi_1 dy^1.$$

NÄIDE.  $xy$ -tasandil on diferentsiaalvorm  $\phi = ydx - xydy$  vektorvälja  $Y(-y, x)$  suhtes invariantne:  $\phi' = 0$ ,  $\phi_\tau = \phi$ ; vektorvälja  $\tilde{Y}(x, y)$  suhtes aga  $\phi'_\tau = \phi e^{2\tau}$ , sest  $\phi' = 2\phi$ .

Meil oli room tutvuda vektorvälja ja diferentsiaalvormi Lie tuletistega.

## § 6. Jaotus ruumis $\mathbb{R}^n$

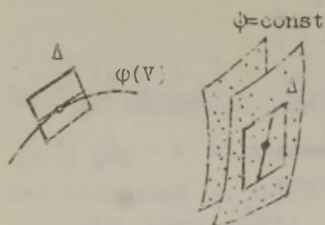
6.1. Vaatagemme ruumi  $\mathbb{R}^n$ . Olgu igas vektorruumis  $T_u \mathbb{R}^n$  fikseeritud mingi  $p$ -mootmeline alamruum  $\Delta_u$  (tasand). Utleme, et  $\mathbb{R}^n$ -s on antud jaotus  $\Delta$ .

Jaotuse  $\Delta$  võivad määrata  $p$  lineaarselt sõltumatut vektorvälja  $X_1, \dots, X_p$ , mis igas punktis  $u \in \mathbb{R}^n$  moodustavad tasandi  $\Delta_u$  baasi, või ka  $n-p$  lineaarselt sõltumatut diferentsiaalvormi  $\omega^1, \dots, \omega^{n-p}$ , mille annulaatoreiks igas punktis  $u \in \mathbb{R}^n$  on tasandid  $\Delta_u$ .

Nimetame immersiooni  $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  jaotuse  $\Delta$  lahendiks, kui  $\text{Im} T\phi \subset \Delta$ , st. kui kõik pinna  $\phi(V)$  puutujatasandid kuuluvad jaotuse  $\Delta$  tasanditele. Submersiooni  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow W$  nimetame jaotuse  $\Delta$  eelneseks integraaliks, kui  $\text{Ker} T\phi \supset \Delta$ , st. kui kujutus  $T\phi$  annuleerib kõik  $\Delta$  tasandid e. kõik  $\Delta$  tasandid kuuluvad vastavate kihtide puutujatasanditele.

---

Sophus Marius Lie, norra matemaatik, 1842 - 1899.



Joonisel on vasakul kujutatud 2-mõõtmeline jaotus ja tema 1-mõõtmeline lahend (integraaljoon), paremal on kujutatud 1-mõõtmeline jaotus, mis on ruutujaks funktsiooni  $\phi$  niivõõrpindadele, kusjuures  $\phi$  on esimene integraal.

Kui eksisteerib submersioon  $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow W$ , mille korral  $\text{Ker} T\phi = \Lambda$ , siis nimetatakse jaotust  $\Delta$  integreeruvaks. Sel juhul on  $\phi$  määratud  $n-p$  sõltumatu funktsiooniga  $\phi^\alpha$ , mille diferentsiaalid  $d\phi^\alpha$  moodustavad vormidega  $\omega^\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n-p$ , samaväärse kobaasi. See aga tähendab, et eksisteerib regulaarne  $(n-p) \times (n-p)$ -maatriks  $A = (A_{\beta}^{\alpha})$ , mis seob mõlemad kobaasid omavahel valemiga

$$d\phi^\alpha = A_{\beta}^{\alpha} \omega^{\beta}.$$

Maatriksit  $A$  võib nimetada integreeruvusmaatriksiks ilmse analoogia tõttu integreeruvusteguriga ühe diferentsiaalivormi puhul. Kui seost  $d\phi = A\omega$  väliselt diferentseerida  $D(d\phi) = D(A\omega)$ , siis näeme, et  $DA \wedge \omega + AD\omega = 0$  ja

$$D\omega = -A^{-1}DA \wedge \omega.$$

Siit järeldub

LAUSE. Iga kahe integreeruva jaotusele  $\Delta$  kuuluva vektorvälja  $X$  ja  $Y$  sulud  $[XY]$  kuuluvad samuti jaotusele  $\Delta$ . st.

$$\omega(X) = \omega(Y) = 0 \Rightarrow \omega([XY]) = 0.$$

Tõepoolest, antud eeldusel  $D\omega(X, Y) = -\omega([XY])$ , kuid  $D\omega(X, Y) = -A^{-1}DA \wedge \omega(X, Y) = 0$ , vt. 5.3, 5.4.

Lausega on sõnastatud jaotuse  $\Delta$  integreeruvuse tarvilik ja piisav tingimus (piisavust meie ei tõesta).

NÄIDE.  $xyz$ -ruumis on 1-mõõtmeline jaotus  $\Delta$  antud vormidega

$$\begin{cases} \omega^2 = (x-y)dx - (2x-1)dz \\ \omega^3 = (x-y)dy + (2y-1)dz \end{cases}$$

ja ka vektorväljaga  $X = (2x-1) \frac{\partial}{\partial x} - (2y-1) \frac{\partial}{\partial y} + (x-y) \frac{\partial}{\partial z}$ .  
1-mootmeline jaotus on alati integreeruv. Lahendeiks on vektorvälja  $X$  trajektoorid. Integreeruvusmaatriks  $A = \frac{1}{x-y} \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  teisendab vormid  $\omega$  täisdiferentsiaalideks

$$\Delta\omega = \frac{1}{x-y} \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\psi^2 \\ d\psi^3 \end{pmatrix},$$

kus  $\psi^2 = xy - z$ ,  $\psi^3 = x + y - 2z$ . Submersiooni  $\psi$  kihtideks on hüperboolide harud.

Me tungisime valdkonda, mis parit veel ammustest Pfaffi aegadest.

6.2. Pfaffi probleem seisneb üldjoontes järgmises. Ruumis  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  esimesed muutujad  $u^i$ ,  $i=1, \dots, n$ , on sõltumatud, järgmised muutujad  $u^\alpha$ ,  $\alpha=n+1, \dots, n+m$ , sõltuvad. Viimaste osatuletised esimeste järgi on antud võrranditega

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial u^i} = \Gamma_1^\alpha(u^j, u^\beta), \quad (1)$$

kus parempoolsed funktsioonid  $\Gamma_1^\alpha$ , nagu näidatud, sõltuvad kõikidest muutujatest. Uurimisteemaks on muutujate  $u^i$  ja  $u^\alpha$  vahelise sõltuvuse omapära ja süsteemi (1) integreeruvustingimuste kõrval ka süsteemiga (1) seotud üpris sisuka struktuuri geomeetriline tõlgendus.

Esmalt märkame, et süsteem (1) on ekvivalentne Pfaffi süsteemiga  $\omega^\alpha = 0$ , kus

$$\omega^\alpha = du^\alpha - \Gamma_1^\alpha du^i. \quad (2)$$

Vaatleme lisaks ka vektorvälju

$$X_i = \partial_i + \Gamma_1^\alpha \partial_\alpha. \quad (3)$$

Nii vektorväljad  $X_i$  kui vormid  $\omega^\alpha$  määravad ruumis  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$   $n$ -mootmelise jaotuse  $\Delta$ , väljad moodustavad baasi, vormid kobaasi.

Johann Friedrich Pfaff, saksa matemaatik, 1765 - 1825.

Kahe vektorvälja  $X_i$  ja  $X_j$  sulud

$$[X_i X_j] = (X_i \Gamma_j^\alpha - X_j \Gamma_i^\alpha) \partial_\alpha \quad (4)$$

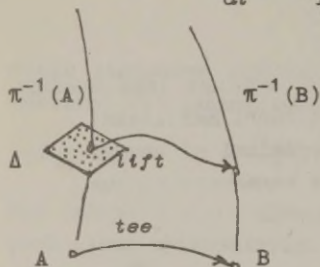
kuuluvad jaotusele  $\Delta$  parajasti siis, kui

$$X_{[i} \Gamma_{j]}^\alpha = 0. \quad (5)$$

Sel tingimusel on jaotus  $\Delta$  integreeruv.

Piki joont  $u^1(t)$  on süsteem (1) alati integreeruv, ka siis, kui tingimus (5) ei kehti, sest probleem taandub hari-like diferentsiaalvõrrandite süsteemiks

$$\frac{du^\alpha}{dt} = \Gamma_1^\alpha(u^j(t), u^\alpha) \frac{du^1}{dt}. \quad (6)$$



Selle lahendid  $u^\alpha(t, u_0^\beta)$  määravad ruumis  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  jaotuse  $\Delta$  integraaljoone

$$(u^1(t), u^\alpha(t, u_0^\beta)),$$

kus  $u_0$  on suvaline punkt  $\mathbb{R}^m$ -s. Seda joont nimetatakse joone  $u^1(t)$  lifitiks.

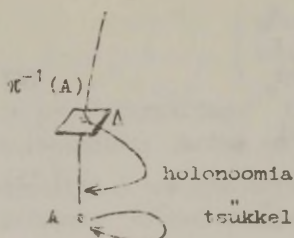
6.3. Kasutame juhust heita pilk kaasaegsesse seostuste teooriasse. Ruumi  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  nimetatakse kihtruumiks, ruumi  $\mathbb{R}^n$  selle baasiks. Projektsiooni

$$\pi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

pöördeos  $\pi^{-1}$  seob iga baasi punktiga  $u \in \mathbb{R}^n$  vastava kihi  $\pi^{-1}(u) = \mathbb{R}^m$ . Jaotus  $\Delta$  määrab kihtruumis seostuse, mis seisneb kihtide ülekandmises e. translatsiooniks piki teid (inglisekeelsed vasted: *connection in the bundle, translation of fibres*). Nimelt, kui baasil on antud mingi joon e. tee, mis viib punktist A punkti B, siis piki selle tee lifite võib kihi  $\pi^{-1}(A)$  kujutada kihti  $\pi^{-1}(B)$ .

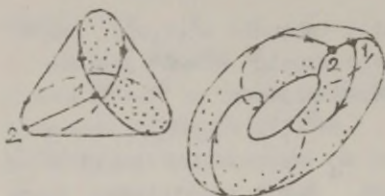
Oluline on seejuures märkida, et translatsioon  $\pi^{-1}(A) \rightarrow \pi^{-1}(B)$  sõltub teest, mis ühendab punkte A ja B (klassikaline joonintegraali teest sõltuvuse probleem).





Kui tee algus- ja lõpp-punkt ühtivad,  $A = B$ , siis räägime kihi translatsioonist üle tsükli ja tema kujutamiseest iseendasse  $\pi^{-1}(A) \rightarrow \pi^{-1}(A)$ , e. holonoomlast.

Kui nn. seostuse kõverusobjekt  $2X_{[1, j]}^{\alpha}$  ranuldab tingimust (5), siis kihtide translatsioon teest ei sõltu, st. holonoomia on triviaalne (lokaalne teoreem). Küll aga võib esineda globaalseid olukordi, kus tingimusel (5) holonoomia pole triviaalne.



Nii, nt., Möbiuse lehe moodustaja või toori meridiaani translatsioonil ei pruugi tulemus olla samasusteisendus, vaata joonis.

NÄIDE.  $xyz$ -ruumis (baasiks  $xy$ -tasand, kihtideks  $z$ -telje-ga paralleelsed sirged) määravad vorm

$$\omega = dz - Pdx - Qdy$$

ja kaks vektorvälja

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + P \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + Q \frac{\partial}{\partial z}$$

2-mõõtmelise jaotuse  $\Delta$ . Kõverusobjektil on airus komponent  $X_1 Q - X_2 P$ . Kui suurused  $P$  ja  $Q$  ei sõltu  $z$ -st, siis  $X_1 Q - X_2 P = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ . Süsteem (1) taandub ühele võrrandile

$$dz = Pdx + Qdy.$$

Tee  $(x(t), y(t))$  lihtid leiame võrrandist

$$\dot{z} = P(x(t), y(t), z) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z) \dot{y}(t).$$

Kui  $P$  ja  $Q$  ei sõltu  $z$ -st, siis arvutame joonintegraali

$$z = \int_{\alpha}^{\beta} P dx + Q dy .$$

Näiteks, juhul  $P = -\frac{y}{2}$ ,  $Q = \frac{x}{2}$  annab integraal üle tsükli tema poolt piiratud pindala

$$\frac{1}{2} \oint x dy - y dx .$$

Selles väljendub holonoomia. Nihe, mis tekib ringjoone ( $x = r \cos t$ ,  $y = r \sin t$ ),  $0 \leq t \leq 2\pi$ , läbimisel, võrdub ringi pindalaga  $\frac{r^2}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi r^2$ .

6.4. Kui me tahame, et kihtide translatsioon

$$\pi^{-1}(A) \rightarrow \pi^{-1}(B)$$

oleks lineaarne kujutus, siis iga tee korral peaksid olema süsteemi (6) lahenditeks

$$u^{\alpha} = A_{\beta}^{\alpha} (u^1(t)) u_0^{\beta} . \quad (7)$$

Kui hetkel  $t = 0$  oleme tee alguspunktis  $u_0^1$ , siis  $A_{\beta}^{\alpha} (u_0)$  peab olema ühikmaatriks. Asendame funktsioonid (7) süsteemi (6) ja võtame  $t = 0$ , saame  $\partial_1 A_{\beta}^{\alpha} (u_0^j) u_0^{\beta} \dot{u}_0^1 = \Gamma_1^{\alpha} (u_0^j, u_0^{\beta}) \dot{u}_0^1$  ja  $\Gamma_1^{\alpha} (u_0^j, u_0^{\beta}) = \partial_1 A_{\beta}^{\alpha} (u_0^j) u_0^{\beta}$ . Kuna koordinaatide ( $u_0^j, u_0^{\beta}$ ) valik on suvaline, siis järeldame, et suurused  $\Gamma_1^{\alpha}$  peaksid lineaarselt ja homogeenselt sõltuma koordinaatidest  $u^{\alpha}$ , st.

$$\Gamma_1^{\alpha} = \Gamma_{1\beta}^{\alpha} u^{\beta} , \quad (8)$$

kus kordajad  $\Gamma_{1\beta}^{\alpha}$  sõltuvad ainult koordinaatidest  $u^1$ . Ilmselt ka vastupidi, tingimusel (8) on süsteem (6) lineaarne:

$$\frac{du^{\alpha}}{dt} = \Gamma_{1\beta}^{\alpha} (u^j(t)) \dot{u}^1(t) u^{\beta} ,$$

tema üldlahend avaldub kujul  $u^{\alpha} = A_{\beta}^{\alpha} (t) u_0^{\beta}$ , kus maatriksi ( $A_{\beta}^{\alpha}$ ) veerud moodustavad lahendite fundamentaalsüsteemi ja  $A_{\beta}^{\alpha}(0) = \delta_{\beta}^{\alpha}$ .

Tingimusel (8) kõneldakse lineaarsest seostusest antud kihtruumis.

LAUSE. Lineaarse seostuse puhul

1) määrab pind  $u^\alpha = x^\alpha(u^1)$  jaotuse  $\Delta$  lahendi parajasti siis, kui

$$\partial_1 x^\alpha - \Gamma_{1\beta}^\alpha x^\beta = 0; \quad (9)$$

2) on funktsioon  $\varphi = \varphi_\alpha(u^1)u^\alpha$  jaotuse  $\Delta$  esimene integraal parajasti siis, kui

$$\partial_1 \varphi_\alpha + \varphi_\beta \Gamma_{1\alpha}^\beta = 0. \quad (10)$$

Tõestus. Toepoolest, lähtudes valemist (2), (3) ja (8), 1) määravad funktsioonid  $x^\alpha(u^1)$  süsteemi  $\omega^\alpha = 0$  lahendi parajasti siis, kui  $dx^\alpha - \Gamma_{1\beta}^\alpha x^\beta du^1 = 0$  ja  $(\partial_1 x^\alpha - \Gamma_{1\beta}^\alpha x^\beta) du^1 = 0$ , siit saame tingimuse (9);

2) on funktsioon  $\varphi = \varphi_\alpha u^\alpha$  jaotuse  $\Delta$  esimene integraal parajasti siis, kui  $X_1 \varphi = 0$ , st.  $(\partial_1 \varphi_\alpha + \varphi_\beta \Gamma_{1\alpha}^\beta) u^\alpha = 0$ , siit saame tingimuse (10).

Huvitav on kirjeldada ülaltoodud aspektist muutkonna (antud juhul ruumi  $\mathbb{R}^n$ ) puutujakihtruumi. Olgu  $\mathbb{R}^n$  baasiks ja vektorruumid  $T_u \mathbb{R}^n$  kihtideks. Lineaarse seostus selles kihtruumis on nn. *afiline seostus*. Koordinaatideks  $\mathbb{R}^n$ -s on  $u^i$ , koordinaatide  $u^\alpha$  osa etendavad diferentsiaalid  $du^1$ , valemiks (8) on  $\Gamma_{1j}^{ik} = \Gamma_{1j}^{ik} du^j$ . Funktsioone  $x^\alpha(u^1)$  tuleb mõista vektorvälja komponentidena ja funktsiooni  $\varphi_\alpha u^\alpha$  diferentsiaalvormina. Tõestatud lause sõnastub järgmiselt:

1) vektorväli  $X(x^1)$  on jaotuse  $\Delta$  lahendiks parajasti siis, kui

$$\partial_j x^1 - \Gamma_{jk}^1 x^k = 0; \quad (11)$$

2) diferentsiaalvorm  $\varphi = \varphi_1 du^1$  on jaotuse  $\Delta$  esimene integraal parajasti siis, kui

$$\partial_j \varphi_1 + \varphi_k \Gamma_{1j}^{k1} = 0. \quad (12)$$

Tingimustel (11) ja (12) nimetatakse vektorvälja  $X$  ja vormi  $\varphi$  absoluutselt paralleelseteks antud seostuses. Avaldistes  $\partial_j x^1 - \Gamma_{jk}^1 x^k$  ja  $\partial_j \varphi_1 + \varphi_k \Gamma_{1j}^{k1}$  esinevad nn. kovariantsed tuletised.

6.5. Kui ruumis  $\mathbb{R}^n$  on antud  $n$  vektorvälja  $R_i$  ja  $n$  diferentsiaalvormi  $\theta^j$ , mis igas punktis  $u \in \mathbb{R}^n$  moodustavad duaalse paari baas + kobaas,  $\theta^i(R_j) = \delta_j^i$ , vt. 2.4, lk. 11, siis eksisteerib objekt  $c_{ij}^k$ , mis on seotud sulgudega ja välisdiferentsiaalidega:

$$[R_i R_j] = R_k c_{ij}^k, \quad D\theta^i = -\frac{1}{2} c_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k. \quad (13)$$

Tõepoolest,  $[R_i R_j]$  kui vektorväli on esitatav baasis  $R_k$  nii, nagu näitab esimene valem, st. objekt  $c_{ij}^k$  eksisteerib. Paneme tähele, et  $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$ . Kuna

$$\begin{aligned} D\theta^k(R_i, R_j) &= -\theta^k([R_i, R_j]) = -c_{ij}^k, \text{ ja} \\ &-\frac{1}{2} c_{pq}^k \theta^p \wedge \theta^q(R_i, R_j) = \\ &-\frac{1}{2} c_{pq}^k (\theta^p(R_i)\theta^q(R_j) - \theta^p(R_j)\theta^q(R_i)) = -c_{ij}^k, \end{aligned}$$

siis siit järeldub ka teine valem.

Seega on sisse toodud *mitteholonoomsuse objekt*. Kui  $c_{ij}^k = 0$ , siis nimetatakse baasi  $(R, \theta)$  *holonoomseks*. Nt. naturaalne baas  $(\partial, \alpha u)$ , vt. 5.1, lk. 40, on holonoomne. Üldiselt on baas  $(R, \theta)$  *mitteholonoomne*.

Märkimist väärib ka juhtum, kus suurused  $c_{ij}^k$  on konstantsed. Selline olukord esineb *Lie rühmal*, kus neid suurusi nimetatakse struktuurikonstantideks, valemeid (13) aga struktuurivõrrandideks.

Peatume veel Lie diferentseerimisel vektorvälja  $X = R_i x^i$  suhtes. Olgu  $Y = R_i y^i$  ja  $\phi = \varphi_i \theta^i$  vastavalt vektorväli ja diferentsiaalvorm. Lie tuletised defineerime siin voo  $a_t = \exp tX$  suhtes järgmiselt:

$$Y' = -(T a_t Y)'_{t=0}, \quad \phi'(\phi \circ T a_t)'_{t=0}, \quad y' = Xy, \quad \phi' = X\phi$$

(märkus:  $\phi'$  langeb kokku sellega, mis oli 5.5-s, lk. 43;  $Y'$  erineb sellest, mis oli 4.6-s, lk. 37, margi poolest,  $y'$  ja  $\phi'$  mõistame nagu harilikke tuletisi vektorvälja  $X$  suhtes, vt. 4.2, lk. 29, 4.5, lk. 35). Siis

$$Y' = R(y' - Cy), \quad \phi' = (\phi' + \phi C)\theta, \quad (14)$$

kus maatriks  $C$  on määratud valemiga

$$C_j^i = \partial_j x^i + C_{jk}^i x^k, \quad (15)$$

Erijuhul

$$R' = -RC, \quad \theta' = C\theta. \quad (16)$$

Töestame need valemid teises järjekorras. Kuna  $[XY] = [R_1 x^i, R_j y^j] = R_j(Xy^j) - R_1(Yx^i) + [R_1 R_j]x^i y^j$ , siis saame arvutusvalemi

$$[XY] = R_1(Xy^i - Yx^i + C_{jk}^i x^j y^k) \quad (17)$$

ja

$$[XY] = R_1(Xy^i - C_{jk}^i y^j),$$

millest järeldub esimene valem (14), kus maatriks  $C$  on antud kujul (15). Esimesest valemist (14) saame esimese valemi (16), kui  $Y$  asendada  $R_1$ -ga, sellest saame teise valemi (16), sest  $\theta(R) = E \Rightarrow \theta'(R) + \theta(R') = \theta'(R) - C = 0$ ; lopuks saame teise valemi (14):  $\theta' = \varphi'\theta + \varphi\theta' = (\varphi' + \varphi C)\theta$ . Paneme tähele, et kasutasime diferentseerimisreeglit  $(\varphi\theta)' = \varphi'\theta + \varphi\theta'$ , mis tuleneb definitsioonist

$$(\varphi\theta)' = ((\varphi \circ \alpha_t)(\theta \circ T\alpha_t))'_{t=0},$$

vt. 5.5, lk. 43.

Holonoomes baasis lihtsustub maatriks (15):  $C_j^i = \partial_j x^i$ , ja valemid (14) ühtivad eespool tuletatud arvutusvalemitega, vt. 4.5, 5.5.

Mõtlemiseks. Pöördume tagasi ruumi  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , kus oli antud naturaalne baas, vt. 6.2, lk. 46,

$$(\partial_1, \partial_\alpha; du^1, du^\alpha).$$

Kui asendada operaatorid  $\partial_1$  vektorväljadega  $X_1$  ja diferentsiaalid  $du^\alpha$  vormidega  $\omega^\alpha$ , vt. valemid (2) ja (3), siis saame uue duaalse baasi

$$(X_1, \partial_\alpha; du^1, \omega^\alpha),$$

mida nimetame adapteerituke. Tuletada adapteeritud baasi

mitteholonoomsuse objekt ja kirjutada välja valemid (16) juhul, kui  $X$  on operaator  $X_1$ , kasutades plokk-matriksit

$$\left( \begin{array}{c|c} c_{1j}^k & c_{1\beta}^k \\ \hline c_{1j}^\alpha & c_{1\beta}^\alpha \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 2X_{[1} \Gamma_{j]}^\alpha & -\partial_\beta \Gamma_1^\alpha \end{array} \right).$$

Kuidas näevad välja plokid  $2X_{[1} \Gamma_{j]}^\alpha$  ja  $\partial_\beta \Gamma_1^\alpha$  lineaarseostuse  $\Gamma_1^\alpha = \Gamma_{1\beta}^\alpha u^\beta$  puhul?

Valemitest (14) võib näha seost Lie tuletiste ja kovariantsete tuletiste vahel, vt. (9), (10). Lie diferentseerimine on ilmselt üldisem mõiste, kuna kovariantne diferentseerimine taandub temale erisituatsioonis. Püüdke seda täpsustada! Mis on kovariantne tuletis, kui lähtuda Lie diferentseerimisest?

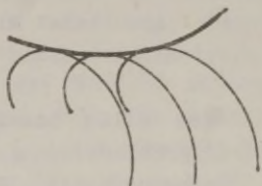
Niisiis oleme tutvunud mitme mõistega, mille baasil võime edasi süveneda diferentsiaalgeomeetria probleemidesse.

Muidugi ei ole me kõnelenud kategooriatest ja funktoritest, mis hulgateooria üldistusena on viimasel ajal hõlvanud enamuse matemaatikaharusid. Seetõttu pole võimalik näidata ei tensorite ega Lie tuletiste funktoriaalseid lähteid. On mainitud Lie rühmi, kuid pole räägitud rühmade esitustest ja nende arvukatest rakendustest, mis ulatuvad nii kristallograafiasse kui kvantmehaanikasse. Palju põnevad ja haaravad jaab paratamatult kaadrist välja. Siiski loodame, et põgus tutvus järgneva materjaliga on teadmishimulisele lugejale tõukeks iseseisvateks sammudeks.

### 3. peatukk. MAHKIJAD

Oleme jõudnud maha lävele, mida nimetatakse diferentsiaal-geomeetriaks, ja nüüd võime heita pilgu ka selle maha sisse. Esimeseks teemaks valime "Mähkijad" ja peatselt saame näha, et meie lähenemisviis osutub küllaltki põhjendatuks ja teatud mõttes ka elegantseks.

#### § 7. Mähkijad ja -pinnad



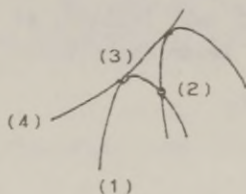
7.1. Olgu  $xy$ -tasandil antud üldvõrrand

$$F(x, y, t) = 0,$$

mis sõltub parameetrist  $t$ . Iga fikseeritud  $t$  korral määrab see

võrrand konkreetse joone;  $t$  muutmisel aga saame joonte parve. Viime läbi järgmise arutluse:

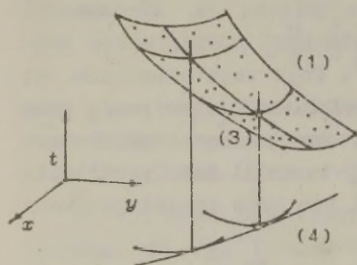
$$(1) F(x, y, t) = 0 \Rightarrow (2) \begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ F(x, y, t + \Delta t) = 0 \end{cases} \Rightarrow (3) \begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ F'_t(x, y, t) = 0 \end{cases} \Rightarrow (4) \Phi(x, y) = 0.$$



Fikseerime parameetri kaks väärtust  $t$  ja  $t + \Delta t$  ning vaatleme vastavaid jooni. Nende joonte lõikepunkt (e. lõikepunktid) on määratud süsteemiga (2). Kui funktsioon  $F$  on  $t$  suhtes pidev, siis väikese kasvu  $\Delta t$  korral on need jooned üksteisele küllalt lähedased ja piirprotsessis, kui  $\Delta t \rightarrow 0$ , teine joon ilmselt läheneb esimesele, samal ajal lõikepunktid võtavad teatud piirasendid esimesel joonel. Neid piirasendeid nimetatakse joone (1) karakteristlikeks punktideks. Ilmselt võib süsteemi (2) teise võrrandi asendada võrrandiga

$\frac{1}{\Delta t} [F(x, y, t + \Delta t) - F(x, y, t)] = 0$ , st. lahutada teisest võrran-

dist esimene ja jagada saadud vahe  $\Delta t$ -ga. Kui funktsioon  $F$  on  $t$  suhtes diferentseeruv, siis uus süsteem jääb süsteemiga (2) ekvivalentseks ka piirprotsessis  $\Delta t \rightarrow 0$ . Tulemuseks on süsteem (3), mis määrab joone (1) karakteristiklikud punktid. Kui õnnestub siit avaldada  $x$  ja  $y$  parameetri  $t$  suhtes:  $x=X(t)$ ,  $y=Y(t)$ , siis saame karakteristiklike punktide hulga e. sellise joone parameetrilised võrrandid, mida nimetatakse parve mähisjooneks. Kui aga õnnestub elimineerida kas parameetrilistest võrrandest või vahetult süsteemist (3) parameeter  $t$ , siis saame mähisjoone üldvõrrandi kujul (4).

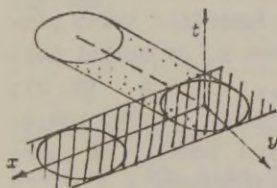


Üleminekut (3)  $\rightarrow$  (4) on kasulik mõista ka  $xyt$ -ruumis. Lisame  $xy$ -tasandile  $t$ -telje. Siis määrab võrrand (1)  $xyt$ -ruumis pinna. Kuna tuletis  $F'_t$  on saadud funktsiooni  $F$  diferentseerimisel operaatori  $\frac{\partial}{\partial t}$  abil, siis määrab süsteem (3) sellel pinnal punktid, kus vektorvälja  $\frac{\partial}{\partial t}$  trajektoorid, milleks on

$t$ -teljega paralleelsed sirged, puudutavad pinda (1). Need sirged moodustavad silindri, mille võrrandiks on (4). Kui konelda pinna (1) projekteerimisest piki  $\frac{\partial}{\partial t}$  trajektoore, siis parve joonteks on selle pinna lõikejoonte projektsioonid tasanditega  $t=t_0 (=const)$ , ja mähisjooneks (4) ruumilise joone (3) projektsioon  $xy$ -tasandile. Võib konelda ka pinna (1) valgustamisest  $t$ -teljega paralleelsete kiirtega; siis heidab pind  $xy$ -tasandile varju, mille piiriks on mähisjoon (4).

#### NÄITED.

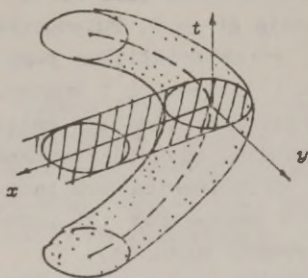
7.1.1. Võrrand  $(x - t)^2 + y^2 = 1$  määrab  $xy$ -tasandil ühikringjoone, mille keskpunkt  $(t, 0)$





liigub piki  $x$ -telge. Tekib ringjoonte parv. Diferentseerimine parameetri  $t$  järgi annab teise võrrandi. Mähisjoone võrrand (4) näeb välja järgmiselt:  $y^2 = 1$ , st. ta koosneb kahest sirgest  $y = \pm 1$ .



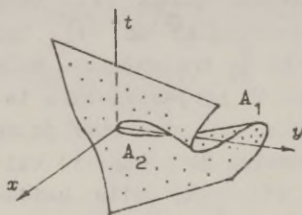
7.1.2. Võrrand  $(x - t^2)^2 + y^2 = 1$  määrab  $xy$ -tasandil samuti ühikringjoone, mille keskpunkt  $(t^2, 0)$  liigub piki  $x$ -telge, kuid olukord on siin teistsugune. Diferentseerimine  $t$  järgi annab võrrandi  $t(x - t^2) = 0$ . Mähisjoon koosneb kahest poolsirgest  $x = t^2 \geq 0$ ,  $y = \pm 1$  ja ringjoonest  $x^2 + y^2 = 1$ .



Erinevus seisneb selles, et kui eelmises näites nägime

$xyz$ -ruumis torutaolist pinda, mille teljeks on  $xt$ -tasandil sirge  $x = t$ , siis nüüd näeme torutaolist pinda, mille teljeks on  $xt$ -tasandil parabool  $x = t^2$ . Pole vaja selgitada, et mõlemal juhul pinna horisontaallooded tasanditega  $t = t_0$  projekteeruvad  $xy$ -tasandile parve joonteks; esimesel juhul määravad pinna vertikaalsed puutujad  $xy$ -tasandil kaks paralleelset sirget , teisel juhul aga kaks poolsirget koos ringjoonega .

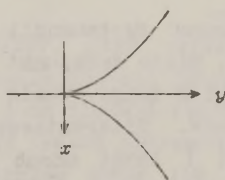
7.1.3. Võrrand  $2x - 3ty + t^3 = 0$  määrab  $xy$ -tasandil sirgete parve. Mähisjooneks on poolkuuparabool. Tema parameetriselised võrrandid on



$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$$

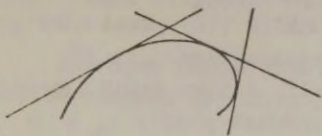
ja üldvõrrand on  $x^2 - y^3 = 0$ .

$xyt$ -ruumis näeme joonpinda, mis koosneb  $xy$ -tasandiga paralleelsetest sirgetest. Projekteerimisel  $xy$ -tasandile tekib pinnal voldijoon  $A_1$  ja sellel kortsupunkt  $A_2$ , vt. 3.6, lk. 24;  $A_1$  projekteerub poolkuuparabooli



harudeks,  $A_2$  teravikupunktiks. Paneme tähele, et punktis  $A_2$  puudutab  $t$ -telg nii pinda kui ka voldijoont  $A_1$ .

7.1.4. Üldistame eelmist näidet. Olgu sirgete parv  $xy$ -tasandil määratud võrrandiga



$$Ax + By + C = 0,$$

kus  $A, B, C$  sõltuvad parameetrist  $t$ . Eeldame ka diferentseeruvust

$t$  suhtes. Süsteem (3) näeb välja järgmiselt:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$

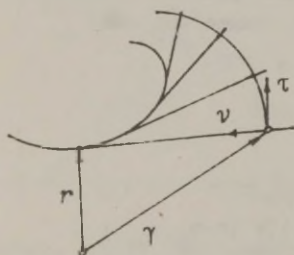
ning tema lahendi võib esitada kujul

$$x:y:1 = \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}.$$

Siit saame mähisjoone parameetrilised võrrandid.

Kontrollige: mähisjoone puutujaks iga  $t$  korral on sirge  $Ax + By + C = 0$ .

7.1.5. Olgu joon tasandil antud vektorfunktsiooniga  $\gamma(t)$ . Eeldame, et iga  $t$  väärtuse puhul eksisteerivad tuletised



$\dot{\gamma}(t)$  ja  $\ddot{\gamma}(t)$ . Tähistame sümboolitega  $\tau$  ja  $\nu$  joone puutuja ja normaali ühikvektorid. Olgu  $r$  tasandi suvalise punkti kohavektor. Siis  $(r - \gamma, \dot{\gamma}) = 0$  on normaali vektorvõrrand, kusjuures ümarsulud tähistavad sklaarkorrutist ja tuletist  $t$  järgi on tähistatud täpiga. Sel juhul

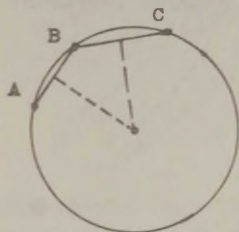
leidub kordaja  $R$  nii, et  $r - \gamma = R\nu$ . Normaalide mähisjoont nimetatakse joone evolüüdiks. Evolüüdi leidmiseks moodustame süsteemi

$$\begin{cases} (r - \gamma, \dot{\gamma}) = 0 \\ (r - \gamma, \ddot{\gamma}) = \dot{\gamma}^2, \end{cases}$$

kus teine võrrand on saadud esimesest diferentseerimise teel.

Kui  $r - \gamma = R\nu$ , siis  $R(\nu, \ddot{\gamma}) = \dot{\gamma}^2$  ja  $R = \frac{\dot{\gamma}^2}{(\nu, \ddot{\gamma})}$ . Seega normaali

fikseerub karakteristiklik punkt, mida nimetatakse kõveruskeskpunktiks. Suurust  $R$  nimetatakse kõverusraadiuseks, tema poordvaartust  $K = \frac{1}{R}$  aga kõveruseke punktis  $\gamma(t)$ . Need nimetused on õigustatud seoses nn. kõverusringjoonega.



Nimelt, võtame antud joonel kolm lähedast punkti A, B ja C vastavalt parameetri vaartustega  $t_A, t_B$  ja  $t_C$ . Ringjoone keskpunktiks, mis läbib punkte A, B ja C, on ilmselt koolude AB ja BC keskristsirgete lõikepunkt, mis on määratud süsteemiga

$$\begin{cases} (r - \frac{\gamma_A + \gamma_B}{2}, \gamma_B - \gamma_A) = 0 \\ (r - \frac{\gamma_B + \gamma_C}{2}, \gamma_C - \gamma_B) = 0 \end{cases}$$

kus  $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$  on punktide A, B, C kohavektorid. Kui siin esimene võrrand jagada vahega  $t_B - t_A$  ja minna piirile protsessis  $B \rightarrow A$ , kus punkt B läheneb punktile A, ning teine võrrand jagada vahega  $t_C - t_B$  ja minna piirile protsessis  $C \rightarrow B$ , kus punkt C läheneb punktile B, saame süsteemi

$$\begin{cases} (r - \gamma_A, \dot{\gamma}_A) = 0 \\ (r - \gamma_B, \dot{\gamma}_B) = 0 \end{cases}$$

Ilmselt kehtib võrdus

$$(r - \gamma_B, \dot{\gamma}_B) - (r - \gamma_B, \dot{\gamma}_A) - (r - \gamma_A, \dot{\gamma}_A) + (r - \gamma_B, \dot{\gamma}_A) = 0$$

ja ka võrdus

$$(r - \gamma_B, \frac{\dot{\gamma}_B - \dot{\gamma}_A}{t_B - t_A}) - (\frac{\gamma_B - \gamma_A}{t_B - t_A}, \dot{\gamma}_A) = 0,$$

mis on saadud eelmisest jagamisest vahega  $t_B - t_A$ . Kui nüüd siin minna piirile protsessis  $B \rightarrow A$ , saame

$$(r - \gamma_A, \ddot{\gamma}_A) - \dot{\gamma}_A^2 = 0,$$

st. vaadeldava ringjoone piirasendiks punktide B ja C ühtimi-

sel punktiga A on ringjoon, mille raadiuseks on kõveruskesk-  
punkt. Seda ringjoont nimetatakse kõverusringjooneks punktis  
A.

Pöördume tagasi suuruste R ja K juurde ja tuletame nende  
arvutusvalemid koordinaatide kaudu:

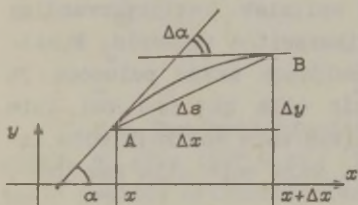
$$\gamma = (x, y), \quad \dot{\gamma} = (\dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{\gamma} = (\ddot{x}, \ddot{y}),$$

$$\tau = \frac{(\dot{x}, \dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}}, \quad v = \frac{(-\dot{y}, \dot{x})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}}, \quad (v, \ddot{\gamma}) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

$$R = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}, \quad K = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Kui joon on antud võrrandiga  $y = y(x)$ , mis on samaväärne  
süsteemiga  $\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$ , saame

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}, \quad K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$



Viimasel juhul on kõverus K  
tolgandatav ka funktsiooni  $f(x)$   
graafikul. Vastaku argumendi  
vaartustele  $x$  ja  $x + \Delta x$  graafiku  
punktid A ja B. Olgu koolu AB  
pikkuseks  $\Delta s$  ja moodustagu graa-  
fiku puutujad punktides A ja B  
nurga, mille suuruseks on  $\Delta\alpha$ . Siis on graafiku kõveruseks  
punktis A

$$K = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

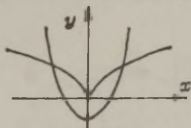
Toepoolest, kuna puutuja tõus on  $\tan\alpha = y'$ , kus  $\alpha$  on nurk,  
mille moodustab puutuja  $x$ -teljega, ja  $\Delta s = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{1/2}$ ,  
siis

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} \frac{1}{[1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2]^{1/2}}.$$

Siit saamegi piirvaartuseks  $K$ , sest  $\alpha = \arctan y'$  ja

$$\alpha' = \frac{y''}{1+y'^2}.$$

7.1.6. Poolkuupparabool  $x^2 - y^3 = 0$  näitest 7.1.3 on para-



booli  $y = \sqrt[3]{\frac{27}{16}x^2 - \frac{8}{27}}$  evoluu.

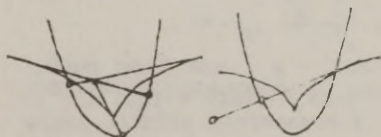
Töestuse jäatame lugejale.

7.1.7. Normaali võrrand  $(r - \gamma, \dot{\gamma}) = 0$  näites 7.1.5 on samavaarne võrrandiga  $\dot{\varphi} = 0$ , kus  $\varphi = \frac{1}{2}(r - \gamma)^2$ . Tähendab, teatud mõttes on tegemist funktsiooni  $\varphi$  ekstreemumülesandega. Ilmselt on  $(2\varphi)^{1/2}$  punktide A ja B vaheline kaugus, mille kohavektoreiks on  $r$  ja  $\gamma$ , ja ekstreemumiks on kaugus, mida tuleb mööda piki normaali.

On võimalik ka selline tõlgendus: helilaine, mis on tekkinud punktis A, põrkab vastu joont punktis B ja tuleb punkti A kajana tagasi sel tingimusel, kui sirge AB on joone normaal punktis B, või teisiti öeldes, kui AB on joone evoluu di puutuja.

Püüame vastata küsimusele: mitmekordne kaja võib kosta parabolilt? Parabool on üldjuhul esitatav vektorvõrrandiga  $\gamma = at^2 + bt + c$ , kus  $a, b, c$  on fikseeritud vektorid. Funktsioon  $\varphi = \frac{1}{2}(r - \gamma)^2$  on  $t$  suhtes neljanda astme polünoom ja  $\dot{\varphi} = 0$  on kuupvõrrand, millel võib olla kas üks või kolm reaalselt lahendit (teisel juhul võivad kaks või kõik kolm lahendit kokku langeda!). Järelikult, kaja võib olla kas ühe-, kahe- või kolmekordne.

Näitame seda parabooli 7.1.6 korral. Olgu punktide A ja



B koordinaatideks vastavalt  $(X, Y)$  ja  $(x, y)$ . Siis  $r = (X, Y)$ ,  $\gamma = (x, y)$ ,  $\dot{\gamma} = (1, y')$  ja võrrand  $\dot{\varphi} = 0$  avaldub kujul  $(X - x) + y'(Y - y) = 0$ , st. normaali võrrandina. Peale vastavat asendamist ja teisendamist saame kuupvõrrandi  $r$  suhtes:

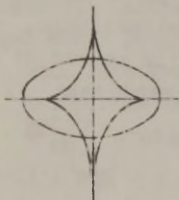
$$\frac{x^3}{6} - \frac{1}{3} \frac{8}{27} Yx - \frac{1}{3} \left(\frac{8}{27}\right)^2 X = 0.$$

Kui arvutada invariandid  $D_1, D_2$ , lähtudes sellest võrrandist, ja varem kirjeldatud diskriminandi  $D$ , vt. 4.2.7, lk. 32, siis naeme, et

$$D_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{8}{27}\right)^2 X, \quad D_2 = -\frac{1}{3} \frac{8}{27} Y, \quad D = \left(\frac{8}{27}\right)^4 (X^2 - Y^3).$$

Poolkuupparabool  $x^2 - y^3 = 0$  lahutab  $xy$ -tasandi kaheks piirkonnaks, ühel neist  $D < 0$ , teisel  $D > 0$ . Kui punkt  $A$  asub esimeses piirkonnas, siis temast saab evoluudivale tõmmata kolm puutujat, mis on ühtlasi parabooli normaalideks (st. kostab kolmekordne kaja), kui aga punkt  $A$  asub teises piirkonnas, siis on evoluudivale puutuja ja parabooli normaal ainult (ja kaja on ühekordne). Juhud, mil punkt  $A$  asub poolkuupparaboolil või selle tipus, jätame mõtlemiseks lugejale.

Soovitame analüüsida ka keerulisemaid juhte, nt. kui parabool asendada ellipsiga. Mitmekordse kaja võib tekitada ellips? Kuidas on see seotud evoluudivale? Püüdke näidata, milline on ellipsi evoluudivale, vt. joonis.



7.1.8. Kui vektorfunktsiooni  $\gamma(s)$  parameetrik on kaare pikkus  $s$ , siis  $|\Delta\gamma| \approx \Delta s$ ,  $\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = 1$  ja  $\frac{d\gamma}{ds} = \tau$ . Nagu iga vektor  $r$  avaldub ortonormeeritud baasis  $\tau, \nu$  kujul  $r = \tau\alpha + \nu\beta$ , kus  $x = (r, \tau)$ ,  $y = (r, \nu)$ , avalduvad selles baasis ka tulevised  $\frac{dx}{ds}$  ja  $\frac{dy}{ds}$  (esitame matriksvalemi):

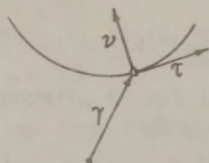
$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = (\tau \ \nu) \times \begin{pmatrix} 0 & -K \\ K & 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Tõepoolest, esiteks, kuna  $\tau^2 + \nu^2 = 1$  ja  $(\tau, \nu) = 0$ , siis  $\left(\frac{dx}{ds}, \tau\right) = \left(\frac{dy}{ds}, \nu\right) = 0$  ja  $\left(\frac{dx}{ds}, \nu\right) + \left(\tau, \frac{dy}{ds}\right) = 0$ , teiseks, valemist  $(r, \ddot{\gamma}) = \dot{\gamma}^2$  järeldub  $R\left(\nu, \frac{dx}{ds}\right) = 1$ ,

$$\left(\frac{d\tau}{ds}, \nu\right) = K \quad \text{ja} \quad \frac{d\tau}{ds} = K\nu,$$

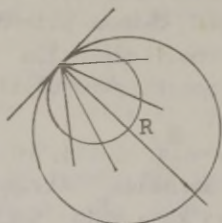
ning kolmandaks,  $\left(\frac{d\nu}{ds}, \tau\right) = -\left(\frac{d\tau}{ds}, \nu\right) = -K$ , st.  $\frac{d\nu}{ds} = -K\tau$ .

Suurus  $K$  on meile juba tuntud kõverus. Valem (\*) koos



valemiga  $\frac{d\gamma}{ds} = \tau$  moodustab nn. liikuva teljestiku derivatsioonivalemid, sest nad kirjeldavad vektorite  $\tau$  ja  $\nu$  poolt määratud teljestiku nõ. infinitesimaal-

set nihet liikumisel piki antud joont.



Derivatsioonivalemeid võib kasutada mitmesuguste ülesannete lahendamisel.

Näiteks, võtame kiire, mis lähtub joone punktist kohavektoriga  $\gamma$  ja on jäigalt seotud liikuva teljestikuga, ning

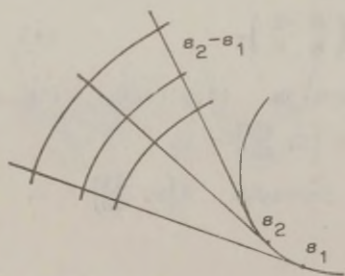
küsime: kus asub selle kiire karakteristiklik punkt? Et küsimusele vastata, võtame konstantsete komponentidega  $x$  ja  $y$

vektori  $r = x\tau + y\nu$  ning nõuame, et vektor  $\frac{d(\gamma+r)}{ds}$  oleks

kollineaarne vektoriga  $r$ . Kuna  $\frac{d(\gamma+r)}{ds} = \tau - Ky\tau + Kx\nu$ , saame

tingimuse  $\frac{1-Ky}{x} = \frac{Kx}{y}$  e. võrrandi  $x^2 + (y - \frac{R}{2})^2 = (\frac{R}{2})^2$ . Järelikult, kõikide kiirte karakteristiklikud punktid asuvad ringjoonel, mille diameetriks on kõverusraadius.

7.1.9. Antud joone  $\gamma$  puutujate ortogonaalseid trajektore nimetatakse selle joone evolventideks. Kohe märkame, et joon  $\gamma$  on iga oma evolvendi evoluu.



Joon  $\gamma(s)$  korral on kõik evolvendid antud ühe vektorvõrrandiga

$$r(s) = \gamma(s) + (d - s)\tau(s),$$

kus igale  $d$  väärtusele vastab

üks evolvent. Tõepoolest,

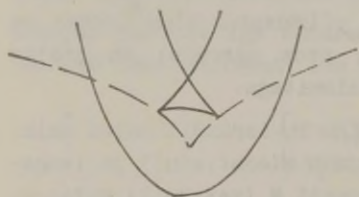
$$\frac{dr}{ds} = \frac{d\gamma}{ds} - \tau + (d - s) \frac{d\tau}{ds} = (d - s)Kv, \text{ st. joon } r(s) \text{ kulgeb}$$

joone  $\gamma(s)$  puutujatega risti ja on nende ortogonaalne trajektor. Veel näeme, et parameetri  $s$  iga kahe väärtuse  $s_1$  ja  $s_2$  korral

$$|r(s_2) - \gamma(s_2)| - |r(s_1) - \gamma(s_1)| = s_2 - s_1,$$

st. kui võrrelda kahe puutuja pikkusi nende puutepunktidest ühe ja sama evolvendini, siis üks neist on teisest pikem täpselt nii palju, kui suur on puutepunkte ühendava kaare pikkus. Puutuja nagu kerib ennast niidina lahti joonest  $\gamma$  (või vastupidi, kerib ennast selle joone peale) ja seejuures iga tema punkt jätab jäljena vastava evolvendi.

Olgu üks evolventidest kiirgusallikas, mis tekitab tasandil laine, kusjuures laine iga osake levib piki normaali sama kiirusega, mis naaberosakesed. Selle laine fronte või faase vastavalt ajahetkeil kirjeldavad teised evolvendid. Kõik kulgeb hästi seni, kuni kaks lähedast normaali ei lõiku, st. seni, kui lainefront ei jõua evoluudini. Põrgates vastu evoluuti, lainefront murdub ja tasandil tekib nn. kaustik.



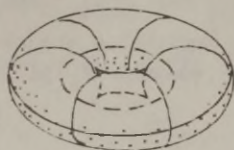
Et olukorda paremini mõista, püüdke joonistada mitmesuguste joonte evolvente. Poolkuuparabooli  $x^2 - y^3 = 0$  puhul saate näha, milliseid faase läbib lainefront, kui kiirgusallikaks on parabool.

Püüdke kirjeldada lainefrondi faase, kui esialgne laine on ellipsikujuline ja hakkab levima sissepoole.

Kaustikute teke pole vast võimatu ka maailmaruumis, nt. mingi kauge galaktika kiirguse tagajärjel. Selle probleemiga on tegelenud J. Zeldovits (NL TA liige, 1914 -1987).



7.1.10. Kas me oskame joonistada toori? Toor on võrdsete

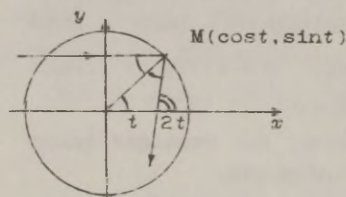


raadiustega sfääride mähispind, mille keskpunktid asuvad fikseeritud ringjoonel. Ringjoone projektsioon tasandile on teatavasti ellips ja sfääride projektsioonid on ringid. Järelikult, toori kontuuriks tasandil on ringjoonte parve mähisjoon, mille keskpunktid asuvad ellipsil, st. ellipsi evolventi kaks evolventi. Ellips ise on nende evolventide vahelise riba keskjooneks. Toori kontuuri määramisel tekib täpselt sama probleem, mis on ellipsist eraldunud laine frondi kirjeldamisel.

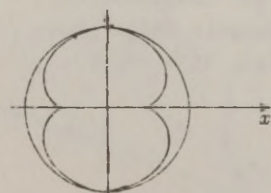
Muidugi, seda võib väita mitte ainult toori, vaid ka iga mn. kanalpinna kujutamisel tasandil (kanalipind on ühesuguste raadiustega sfääride mähispind sõltumata sellest, millise joone moodustavad nende keskpunktid).

7.1.11. Ilusat kaustikut, kuid mitte normaalide mähisjoonena, võib näha igas kohvitassis. Kui päikesekiired langevad mingi anuma (nt. kohvitassi) siseküljele, võime anuma põhjas näha heledat  $\sphericalangle$ -taolist piirkonda. Mida erksam on valgustus ja ideaalsem peegeldus, seda paremini on nähtav kaustik. Kirjeldame seda nähtust valemitega.

Olgu  $xy$ -tasandil antud ühik-ringjoon  $M(\cos t, \sin t)$  ja langegu punkti  $M$  (vasakult)  $x$ -teljega paralleelne kiir. Punktis  $M$  toimub peegeldus. Peegeldunud kiir kulgeb piki sirget



$y - \sin t = \tan 2t(x - \cos t)$ .



Leiame nende sirgete mähisjoone. Selleks diferentseerime viimast vörrandit parameetri  $t$  järgi:

$$-\cos t = \frac{2}{\cos^2 2t} \cdot (x - \cos t) + \sin t \cdot \tan 2t$$

ja moodustame süsteemi

$$\begin{cases} x - \cos t = -\frac{1}{2} \cos t \cos 2t \\ y - \sin t = -\frac{1}{2} \cos t \sin 2t, \end{cases}$$

saame kaustiku parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = (\frac{1}{2} + \sin^2 t) \cos t \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

Üldvõrrandiks on

$$[4(x^2 + y^2) - 1]^3 = 27y^2.$$

See on nii  $x$ - kui  $y$ -telje suhtes sümmeetriline 6. järku joon. Kuna  $t$  muutub vahemikus  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , siis tuleb lisada, et  $x > 0$ , st. kohvitassis me näeme vaid selle joone ühte poolt. Joon kulgemist  $t$  muutumisel võib jälgida määrates tema punkti asukohti, nt. hetkeil  $t = 0, \pm \frac{\pi}{4}, \pm \frac{\pi}{2}$ , ja uurides puutuja tõusu  $\tan 2t$  muutumist.

7.2. Olgu nüüd  $xyz$ -ruumis antud pinnaparv. Võrrand

$$F(x, y, z, t) = 0 \quad (1)$$

eraldab parvest iga konkreetse  $t$  korral vastava pinna. Moodustame kaks süsteemi. Üks nendest

$$\begin{cases} F(x, y, z, t) = 0 \\ F'_t(x, y, z, t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

määrab pinnal (1) karakteristikku, milleks on reeglina mingi joon. Elimineerides süsteemist (2) parameetri  $t$ , saame parve mähispinna võrrandi. Teine süsteem koosnegu kolmest võrrandist

$$\begin{cases} F(x, y, z, t) = 0 \\ F'_t(x, y, z, t) = 0 \\ F''_t(x, y, z, t) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

kus kolmas võrrand on saadud teisest, samuti nagu teine esimesest, diferentseerimise teel  $t$  järgi. Süsteem (3) määrab

karakteristikul (2) karakteristikliku punkti (e. punktid). Parameetri  $t$  muutudes moodustab see punkt ruumilise joone, mida nimetame "mähisplina tagasipöördeservaks.

### NÄITED.

7.2.1. Eriti hästi on kujutatav tasandi liikumine  $xyz$ -ruumis

$$A(t)x + B(t)y + C(t)z + D(t) = 0, \quad (1)'$$

kus  $A, B, C, D$  olgu vähemalt kaks korda diferentseeruvad funktsioonid. Sel juhul avaldub süsteem (2) kujul (jätame argumendi  $t$  kirjutamata)

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \end{cases} \quad (2)'$$

süsteem (3) aga kujul

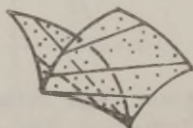
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0. \end{cases} \quad (3)'$$

Tasandite parve "mähisplinda nimetatakse tasanduvaks pinnaks. Temal on samuti tagasipöördeserv, mille parameetriselised vörandid tuletame süsteemist (3)':

$$x : y : z =$$

$$= \begin{vmatrix} B & C & D \\ B' & C' & D' \\ B'' & C'' & D'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A' & C' & D' \\ A & C & D \\ A'' & C'' & D'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B & D \\ A' & B' & D' \\ A'' & B'' & D'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Vaatleme tagasipöördeserval punkti  $r = (x(t), y(t), z(t))$ . Vektor  $r' = (x'(t), y'(t), z'(t))$  määrab tagasipöördeserva puutuja  $r + ur'$  ja koos vektoriga  $r'' = (x''(t), y''(t), z''(t))$  ka nn. kooldumistasandi  $r + ur' + ur''$ . On kerge näha, et puutuja on "maaratud süsteemiga (2)'. Toe-



poolest, asendame süsteemi (2)'  $r$  koordinaadid ja diferentseerime  $t$  järgi mõlemaid samasusi, arvestades seejuures, et  $r$  koordinaadid  $r$  rahuldavad süsteemi (3)'. Saame

$$\begin{cases} Ax' + By' + Cz' = 0 \\ A'x'' + B'y'' + C'z'' = 0, \end{cases} \quad (4)'$$

mis tähendab, et puutuja  $r + ur'$  ühtib sirgega (2)'. Kooldumistasandiks on aga tasand (1)', sest diferentseerides süsteemi (4)' esimest võrrandit ja arvestades teist, näeme, et  $Ax'' + By'' + Cz'' = 0$ . Olukord on täielikult kirjeldatud.

Üldjuhul (1)-(2)-(3) võib kujutada (vähemalt lokaalselt) analoogilist pilti. Moistagi selle vahega, et tagasipöördeserva (3) puutujad (2) pole sirged ja kooldumistasand (1) ei tarvitse olla tasand. Vastavalt parve mähispinnale võib siis tasanduvast pinnast kõnelda vaid tinglikult.

7.2.2. Näites 7.1.3 oli meil tegemist singulaarsustega  $A_1$  ja  $A_2$ . Ka siin võib täheldada kaspoidide  $A_1$  ja  $A_2$  seoses süsteemidega (2) ja (3). Kui aga juhtub, et tagasipöördeserval on isearaseid punkte (nt. teravikke), siis nähtavasti on tegemist järgmise kaspoidiga  $A_3$ , mis kannab nimetust pääs-saba, vt. lk. 21.

Näiteks tasandite parve

$$x - ty + \frac{t^2}{2} z - \frac{t^4}{27} = 0$$

mähispinnaks on tasanduv pind, mille tagasipöördeservaks on joon

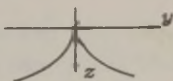
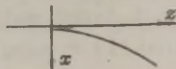
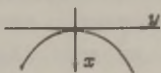
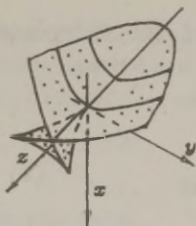
$$r = \left( \frac{t^4}{8}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2} \right);$$

tasanduv pind ise on esitatav nii parameetriliselt

$$r + sr' = \left[ \frac{t^4}{8} + s \frac{t^3}{2}, \frac{t^3}{3} + st^2, \frac{t^2}{2} + st \right],$$

kui üldvõrrandiga

$$(9y^2 - 2z^3 - 12xz)^2 + 4(2x - z^2)^3 = 0.$$



Joonisel on vasakul kujutatud tasanduv pind, paremal aga tema tagasipöördeserva kolm projektsiooni koordinaattasanditel.

Kui vaadelda parve võrrandit  $xyz$ -ruumis, siis me näeme seal 3-mootmelist pinda 2-mootmeliste tasandiliste moodustajatega. Projekteerimisel piki vektorvälja  $\frac{\partial}{\partial t}$  trajektoore tekib sel pinnal stratifikatsioon  $A_1 \supset A_2 \supset A_3$ : 2-mootmeline voldipind  $A_1$ , sellel 1-mootmeline kortsujoon  $A_2$  ja sellel üks 0-mootmeline pääsusabapunkt  $A_3$ . Tasandilised moodustajad projekteeruvad  $xyz$ -tasandile (e.  $xyz$ -ruumi) parve tasanditeks, pind  $A_1$  selle parve mahispinnaks, mis on tasanduv pind, joon  $A_2$  tasanduva pinna tagasipöördeservaks ja punkt  $A_3$  tagasipöördeserva teravikupunktiks.

7.2.3. Jaiga keha liikumise kirjeldamisel kasutatakse nn. liikuvat teljestikku e. taustsüsteemi. Moodustagu vektorid  $e_1, e_2, e_3$  ortonormeeritud baasi:  $(e_1, e_2, e_3) = \delta_{ij}$  (Grami maatriks on ühikmaatriks). Baasi liikumisel sõltuvad vektorid  $e_i$  ajast  $t$  ja nende tuletised avalduvad samas baasis kaldsummeetrilise maatriksi abil:

$$(\dot{e}_1 \ \dot{e}_2 \ \dot{e}_3) = (e_1 \ e_2 \ e_3) \times \begin{pmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tõepoolest, eksisteerib maatriks  $(a_1^j)$ , mille abil vektorid  $\dot{e}_1$  avalduvad vektorite  $e_1$  kaudu:  $\dot{e}_1 = e_j a_1^j$ . Kuna aga

Jorgen Pedersen Gram, taani matemaatik, 1850 - 1916.

$(e_1, e_j) = \delta_{1j}$ , siis diferentseerides  $t$  järgi ja asendades tuletised vastavate avaldistega, saame

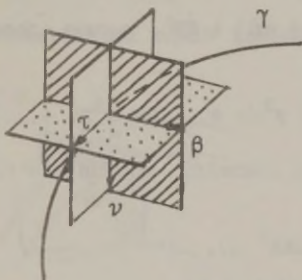
$$(e_k a_{1j}^k, e_j) + (e_1, e_k a_{j1}^k) = \delta_{kj} a_{11}^k + \delta_{1k} a_{j1}^k = a_{11}^1 + a_{j1}^1 = 0,$$

st. maatriks  $(a_j^1)$  on kaldsümmeetriline. Vektorit

$$\omega = e_1 \omega^1 + e_2 \omega^2 + e_3 \omega^3,$$

mille komponendid esinevad valemis, nimetatakse hetkeliseks nurkkiiruseks. Ta asub hetkelisel pöörlemisteljel, sest tema siht jääb hetkeks muutumatuks:  $\dot{\omega} = \dot{e}_1 \omega^1 + \dot{e}_2 \omega^2 + \dot{e}_3 \omega^3 = 0$ .

Sellist liikuvat teljestikku kasutatakse joone uurimisel ruumis. Olgu joon antud vektorfunktsiooniga  $\gamma(t)$ . Tuletis  $\dot{\gamma}(t)$  määrab joone puutuja sihi, tuletised  $\dot{\gamma}(t)$ ,  $\ddot{\gamma}(t)$  aga kooldumistasandi. Fikseerime ortonormeeritud baasi  $\tau, \nu, \beta$ : olgu  $\tau = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$  puutuja ühikvektor, suunane vektori  $\nu$  kooldumistasandil risti vektoriga  $\tau$  ja valime  $\beta$  nii, et ta oleks



risti vektoritega  $\tau, \nu$  ja moodustaks nende vektoritega parempoolse kolmiku, st.  $\beta = \tau \times \nu$ . Vektorid  $\tau, \nu, \beta$  määravad kolm telge: puutuja, peanormaal ja binormaal, ja kolm tasandit, mis on vastavalt nendega risti: normaaltasand, sirgestustasand ja kooldumistasand.

Kui parameetrikus on valitud kaare pikkus  $s$ , siis  $|\dot{\gamma}(s)| = 1$  ja  $\dot{\gamma}(s) = \tau(s)$ . Sel juhul avalduvad baasivektorite tuletised valemiga

$$(\dot{\tau} \dot{\nu} \dot{\beta}) = (\tau \nu \beta) \times \begin{bmatrix} 0 & -K & 0 \\ K & 0 & -\varkappa \\ 0 & \varkappa & 0 \end{bmatrix},$$

kus  $K$  ja  $\varkappa$  on suurused, mida nimetatakse vastavalt joone

kiiruseks ja väändeks. Teljestiku hetkeline nurkkiirus on  
 määratud Darboux' vektoriga  $\alpha\tau + K\beta$ , st. teljestik pöördu-  
 ümber binormaali kiirusega  $K$  ja ümber puutuja kiirusega  $\alpha$ .

Seda teljestikku ja viimast maatriksvalemit seotakse  
 tavaliselt Frenet' nimega, kes avaldas vastavad valemid 1847.  
 aastal, kuid samasugused valemid esinesid juba 1831. aastal  
 (Tartu üliõpilase Karl Eduard Senffi (1810–1850) auhinnatoos,  
 mille ta kirjutas prof. Martin Bartelsi (1769–1836) juhenda-  
 misel.

Uurime joont lokaalselt Frenet' teljestikus. Arendame  
 vektorfunktsiooni  $\gamma(s)$  Maclaurini ritta punkti  $s = 0$  ümbru-  
 ses:

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \dot{\gamma}(0)s + \ddot{\gamma}(0) s^2/2 + \ddot{\ddot{\gamma}}(0) s^3/6 + \dots$$

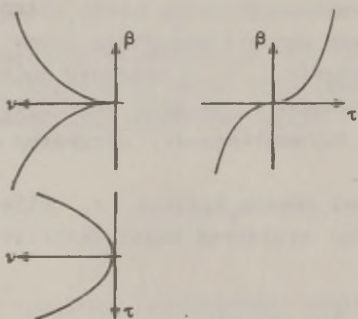
Kuna  $\dot{\gamma} = \tau$ ,  $\ddot{\gamma} = K\nu$ ,  $\ddot{\ddot{\gamma}} = K(-K\tau + \alpha\beta) + \dot{K}\nu$ , saame joone  
 parameetrilise esituse

$$\gamma(s) = (s - K^2 s^3/6 + \dots, K s^2/2 + \dot{K} s^3/6 + \dots, K\alpha s^3/6 + \dots).$$

Arvestades vaid koordinaatide pealikmeid, moodustame nn.  
 lähendava joone

$$\tilde{\gamma}(s) = (s, Ks^2/2, K\alpha s^3/6),$$

mis annab joonest  $\gamma(s)$  ligikaudse ettekujutuse.



Joone  $\tilde{\gamma}(s)$  kolm projektsiooni  
 vastavalt kooldumis-, normaali-  
 ja sirgestustasandile on para-  
 bool, poolkuupparabool ja  
 kuupparabool (joonisel  $\alpha > 0$ ).

Jean Gaston Darboux, prantsuse matemaatik, 1842 - 1917.

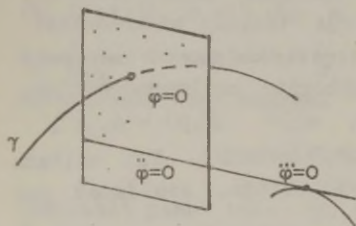
Jean Frédéric Frenet, prantsuse matemaatik, 1816 - 1900.

Uurime 7.1.7 eeskujul ka funktsiooni  $\varphi = \frac{1}{2}(r - \gamma(s))^2$ .  
 Leiame tuletised

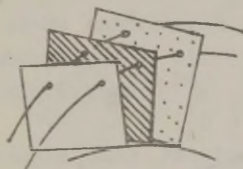
$$\dot{\varphi} = -(r - \gamma, \tau), \quad \ddot{\varphi} = 1 - K(r - \gamma, \nu),$$

$$\ddot{\varphi} = (r - \gamma, K^2 \tau - K\nu - K\alpha\beta).$$

Olgu  $r = \gamma + x\tau + y\nu + z\beta$ . Kui  $\dot{\varphi} = 0$ , siis  $x = 0$ ; see määrab normaaltasandi. Kui  $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ , siis  $x = 0, 1 - Ky = 0$ ;



Normaaltasand mahib tasanduva



saame sirge

$$r = \gamma + \frac{1}{K} \nu + z\beta,$$

mis on normaaltasandi karakteristikuks. Kui  $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ , siis  $Kz\beta + \frac{K}{K} = 0$  ja  $z = -\frac{K}{2K^2}$ .

Karakteristikul fikseerub punkt.

Normaaltasand mahib tasanduva pinna jasee punkt liigub piki selle tagasipoordeserva, mida nimetatakse joone  $\gamma(s)$  ruumiliseks evoluudiviks. Joon  $\gamma(s)$  ise on oma ruumilise evoluudivi kooldumistasandite ortogonaalne trajektor (e. ruumiline evolvent).

7.3. Võtame veel kord vaatlusele funktsiooni

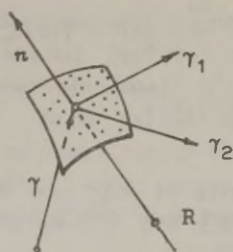
$$\varphi = \frac{1}{2}(r - \gamma)^2,$$

kuid eeldame nüüd, et  $\gamma$  on kahe muutuja  $u$  ja  $v$  vektorfunktsioon. Vektor  $r$  jääb endiselt  $xyz$ -ruumi suvalise punkti  $M$  kohavektoriks. Arvutame funktsiooni  $\varphi$  esimest ja teist järku osatuletised  $u$  ja  $v$  järgi, kasutades tähistusi punktist 3.1, lk. 15:

$$\varphi_{1i} = (r - \gamma, \gamma_{1i}), \quad \varphi_{1j} = -(\gamma_{1i}, \gamma_{1j}) + (r - \gamma, \gamma_{1j}).$$

Kuna me tahame, et tegemist oleks immersiooniga  $(u, v) \mapsto \gamma$ , siis ilmselt  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , vt. 3.5.5, lk. 19. Parameetrite  $u$  ja  $v$  muutudes määrab vektorfunktsioon  $\gamma$  pinna. Osatuletised  $\gamma_{1i}$  ja





$\gamma_2$  on pinna puutujavektorid ning  
 $n = \frac{\gamma_1 \times \gamma_2}{|\gamma_1 \times \gamma_2|}$  on normaali ühikvektor. Viime sisse tähistused

$$g_{1j} = (\gamma_1, \gamma_j), \quad h_{1j} = (n, \gamma_{1j}).$$

Suurused  $g_{1j}$  ja  $h_{1j}$  moodustavad kaks sümmeetrilist maatriksit.

Neile vastavad kaks ruutvormi,

mida nimetatakse pinna *estmeseks* ja *teiseks ruutvormiks*. Objekti ( $g_{1j}$ ) nimetatakse pinna *meetriliseks tenzoriks*, sest ta võimaldab arvutada puutujavektorite skalaarkorrutisi: nimelt, kui  $x = \gamma_1 x^1$  ja  $y = \gamma_1 y^1$ , siis  $(x, y) = g_{1j} x^1 y^j$ , millega on määratud *meetrika* puutujatasandil. Kui esitada teist järku osatuletised  $\gamma_{1j}$  vektoritena, avalduvad nad baasis  $(\gamma_1, \gamma_2, n)$  kujul

$$\gamma_{1j} = \gamma_k^1 \Gamma_{1j}^{1k} + n h_{1j},$$

kus kordajateks on  $h_{1j}$  ja  $\Gamma_{1j}^{1k}$ . Viimaseid nimetatakse *Christoffel'i sümbooliteks*. Nad avalduvad vektorite  $\gamma_1, \gamma_{1j}$  kaudu valemiga  $\Gamma_{1j}^{1k} = g^{kl} (\gamma_1, \gamma_{1j})$ , kus suurused  $(g^{kl})$  moodustavad maatriksi  $(g_{kj})$  poordmaatriksi, st.  $g_{kj} g^{kl} = \delta_j^l$ .

Nendest Gaussi nime kandvatest valemitest saab alguse *pinnateooria* ja edaspidi ka nn. *Riemanni geomeetria*.

Urime nüüd funktsiooni  $\varphi$  ekstreemumi tingimusi. Kui  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , siis  $r - \gamma \mid n$ , st. leidub selline suurus  $R$ , et  $r = \gamma + Rn$ . Kuna  $R$  pole fikseeritud, siis viimane vordus kujutab endast normaali vektorvõrrandit. Siit järeldame, et punkti  $M$  kauguse ekstremaalväärtuse pinnast võime leida mõttes teda piki normaali, ja nii saamegi ekstremaalväärtuse tingimusel, et hessiaan  $|\varphi_{1j}|$  on antud punktis positiivne. Sel juhul  $\varphi_{1j} = -g_{1j} + R h_{1j}$  ja hessiaan avaldub kujul

Elwin Bruno Christoffel, saksa matemaatik, 1829 - 1900.

Carl Friedrich Gauss, saksa matemaatik, 1777 - 1855.

Georg Friedrich Bernard Riemann, saksa matemaatik, 1826-1866.

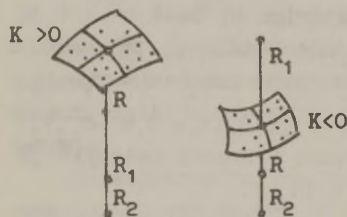
$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix} = R^2 \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} - R \left[ \begin{vmatrix} h_{11} & g_{12} \\ h_{12} & g_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & h_{12} \\ g_{12} & h_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} \right].$$

Kujutust  $(u, v) \mapsto \gamma$  võib korraldada nii, et vektorid  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  moodustaksid pinna puutujatasandil ortonormeeritud baasi (siis  $g_{1j} = \delta_{1j}$ ) ja et see baas oleks pööratud nii, et  $h_{12} = 0$ . Sellist baasi koos normaalvektoriga  $n$  nimetatakse pinna Darboux' teljestikuks. Sel juhul avaldub hessiaan kujul  $(h_{11}R - 1)(h_{22}R - 1)$  ehk  $h_{11}h_{22}(R - R_1)(R - R_2)$ , kus  $R_1 = \frac{1}{h_{11}}$ ,  $R_2 = \frac{1}{h_{22}}$ . Suurusi  $K_1 = \frac{1}{R_1}$  ja  $K_2 = \frac{1}{R_2}$  nimetatakse pinna peahõverusteks, aga suurusi

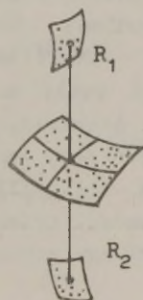
$$K = K_1 K_2 \quad \text{ja} \quad H = K_1 + K_2$$

vastavalt pinna täis- (e. Gaussi) ja keskmiseks hõveruseks. Üldjuhul

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad H = \frac{h_{11}g_{22} + g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

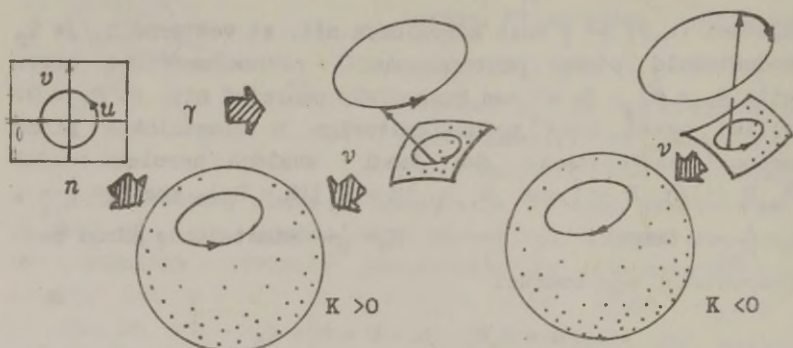


Oletame, et  $R_1 < R_2$ . Siis võib väita, et  $K < 0$  (vastavalt  $K > 0$ ) korral on funktsioonil  $\varphi$  ekstreemum antud punktis parajasti siis, kui  $R_1 < R < R_2$  (vastavalt  $R < R_1$  või  $R_2 < R$ ).



Normaali  $r = \gamma + Rn$  igale punktile vastab funktsiooni  $\varphi(u, v)$  singulaarsus  $\Sigma^2$ , kusjuures kahes nn. fokaalpunktis  $r = \gamma + R_1 n$ ,  $l = 1, 2$ , tekib singulaarsus  $\Sigma^1$ , vt. 3.7, lk. 24. Fokaalpunktid moodustavad kaks fokaalpinna, mis on normaalide mahispinnaks.

7.4. Vaatleme vektorfunktsioone  $\gamma(u,v)$  ja  $n(u,v)$ . Esimene neist kujutab  $uv$ -tasandi pinnale, teine "ühiksfaarile".

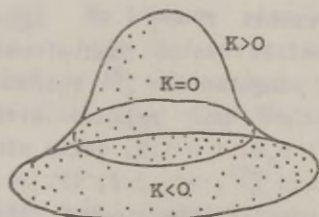


Kuna  $\gamma$  on immersioon, siis võime tulla pinnalt  $uv$ -tasandi kaudu otse "ühiksfaarile". Seega on moodustatud Gaussi kujutus  $v = n \circ \gamma^{-1}$ , mis kujutab pinna "ühiksfaarile". Kuna  $\gamma_1, \gamma_2$  on baasivektorite  $\vec{i}, \vec{j}$  kujutised  $T\gamma$  korral ning  $n_1, n_2$  nende vektorite kujutised  $Tn$  korral, siis kujutus  $Tv$  kujutab vektorid  $\gamma_1, \gamma_2$  vektoreiks  $n_1, n_2$ .

Vektorid  $n_1$  on risti normaalvektoriga  $n$ , sest  $n^2 = 1$  ja  $(n, n_1) = 0$ , ja neid on võimalik avaldada baasi  $\gamma_1, \gamma_2$  kaudu. Viime läbi arutluse Darboux' teljestikus: kuna  $n = \gamma_1 \times \gamma_2$ ,

siis  $n_1 = \gamma_{11} \times \gamma_2 + \gamma_1 \times \gamma_{12} = h_{11} n \times \gamma_2 + h_{12} \gamma_1 \times n = -h_{1j} \gamma_j$ . Järelikult, maatriks  $(-h_{1j})$  on kujutuse  $v$  Jacobi maatriks ja jakobiaaniks on pinna täiskoverus  $K = |h_{1j}|$ .

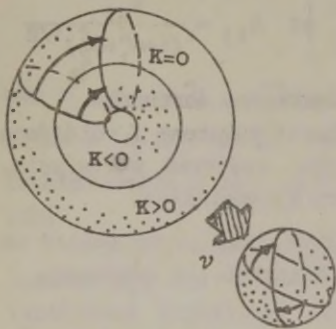
Joont, kus  $K = 0$ , nimetatakse pinna parabolseks jooneks. Ühel pool parabolset joont, kus  $K > 0$ , asub elliptiline piirkond, teisel pool, kus  $K < 0$ , hüperboolne piirkond. Ilmselt on parabolne joon kujutuse  $v$  voldijooneks. Elliptilise piirkonna kujutamisel orientatsioon ei muutu, hüperboolse piirkonna kujutamisel aga muutub.



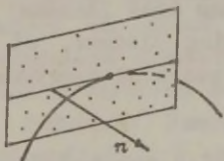
ei muutu, hüperboolse piirkonna kujutamisel aga muutub.

## NÄITED.

7.4.1. Tooril on selgelt näha mõlemad piirkonnad. Kujutamisel  $\nu$  katab toori sfääri kahekordselt (seni, kui toori meridiaan teeb ümber toori telje täispöörde  $360^\circ$ , katab vastav suuringjoon sfääri kahekordselt). Voldijoon tooril koosneb kahest ringjoonest, mis kujutuvad sfäärile tema poolusteks. Kui toori natuke deformeerida, siis need kujutised ei tarvitse olla punktid.



7.4.2. Tasanduva pinna kujutiseks on joon sfääril. Tööpöolest, liikudes piki tasanduva pinna sirgjoonelist moodustajat, mis on ühtlasi tagasipöördeserva puutuja, normaalvektor  $n$  oma suunda ei muuda, sest puutujatasandiks kõikides moodustaja punktides on tagasipöördeserva kooldumistasand.



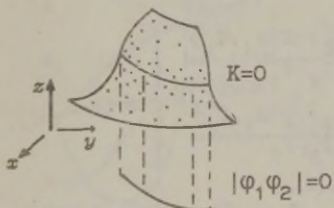
Normaalvektori  $n$  suund sõltub kooldumistasandi pöördest ja muutub vaid üleminekul ühelt sirgjooneliselt moodustajalt teisele.

Täiskõverus võrdub nulliga,  $K = 0$ , sest kujutuse  $\nu$  astak ruumilise joone korral on 1, tasandilise joone korral aga 0.

7.4.3. Veel üks huvitav näide. Olgu kujutus

$$f: (x, y) \mapsto (\varphi_1, \varphi_2)$$

$$z = \varphi(x, y)$$



maaratud mingi funktsiooni osatuletistega, st.  $f$  olgu gradientne kujutus. Vaatleme pinda  $xyz$ -ruumis

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \varphi(u, v).$$

Lähtudes vektorfunktsioonidest

$$\gamma = (u, v, \varphi), \quad \gamma_1 = (1, 0, \varphi_1), \quad \gamma_2 = (0, 1, \varphi_2), \quad \gamma_1 \times \gamma_2 = (-\varphi_1, -\varphi_2, 1),$$

$$\gamma_{1j} = \varphi_{1j} \frac{\varphi_1 \gamma_1 + \varphi_2 \gamma_2 + \gamma_1 \times \gamma_2}{1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2}, \quad \text{näeme, et } h_{1j} = \frac{\varphi_{1j}}{(1 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{1/2}}$$

ja võrdus  $|h_{1j}| = 0$  e.  $K = 0$  on samaväärne võrdusega  $|\varphi_{1j}| = 0$  e.  $|\varphi_1, \varphi_2| = 0$ . See tähendab, et kujutuse  $f$  voldijoon ja paraboolne joon vaadeldaval pinnal vastavad üksteisele, nimelt, esimene on teise projektsioon  $xy$ -tasandile.

7.5. Kuidas leida parve mähisjoont, kui parve jooned on antud parameetriliste võrranditega? Moistkem, et süsteemis

$$\begin{cases} x = x(s, t) \\ y = y(s, t) \end{cases}$$

on  $s$  parve parameeter, st. iga fikseeritud  $s$  korral liigume  $t$  muutudes piki üht parve joont. Võtame kaks lähedast joont vastavalt parameetritele  $s_1$  ja  $s_2$  ning oletame, et nende joonte lõikepunkt on esimesel joonel määratud väärtusega  $t_1$  ja teisel joonel väärtusega  $t_2$ . Siis

$$x(s_1, t_1) = x(s_2, t_2), \quad y(s_1, t_1) = y(s_2, t_2)$$

ja kehtivad võrdused

$$\begin{cases} \frac{x(s_2, t_2) - x(s_1, t_2)}{s_2 - s_1} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} + \frac{x(s_1, t_2) - x(s_1, t_1)}{t_2 - t_1} \cdot \frac{1}{s_2 - s_1} = 0 \\ \frac{y(s_2, t_2) - y(s_1, t_2)}{s_2 - s_1} \cdot \frac{1}{t_2 - t_1} + \frac{y(s_1, t_2) - y(s_1, t_1)}{t_2 - t_1} \cdot \frac{1}{s_2 - s_1} = 0. \end{cases}$$

Siit järeldame, et süsteemi determinant võrdub nulliga:

$$\begin{vmatrix} \frac{x(s_2, t_2) - x(s_1, t_2)}{s_2 - s_1} & \frac{x(s_1, t_2) - x(s_1, t_1)}{t_2 - t_1} \\ \frac{y(s_2, t_2) - y(s_1, t_2)}{s_2 - s_1} & \frac{y(s_1, t_2) - y(s_1, t_1)}{t_2 - t_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Minnes üle piirväärtustele  $s_2 \rightarrow s_1$ ,  $t_2 \rightarrow t_1$  ning eeldades

funktsioonide  $x$  ja  $y$  diferentseeruvust, saame võrrandi

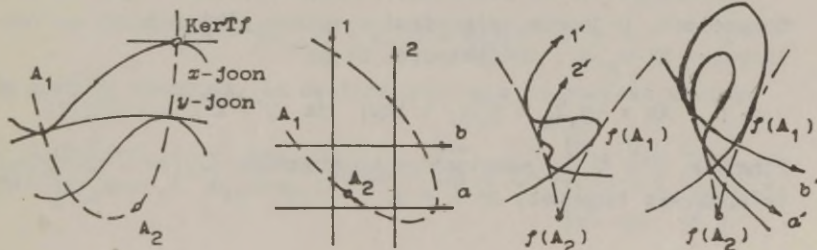
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

kus  $x_1, x_2$  ja  $y_1, y_2$  on funktsioonide  $x$  ja  $y$  vastavad osatuletised  $s$  ja  $t$  järgi. Teist järku determinant  $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$  on funktsioonide  $x$  ja  $y$  jakobiaan ja me tähistame teda lihtsalt  $|xy|$ .

Niisiis võime kõnelda kujutuse  $f:(s,t) \mapsto (x,y)$  voldijoonest  $A_1$ , mis on antud  $st$ -tasandil võrrandiga  $|xy| = 0$  ja voldijoon kujutisest  $f(A_1)$   $xy$ -tasandil, mis ongi otsitav mähisjoon.

Kirjeldame seda olukorda lähemalt. Nimetame funktsiooni  $\varphi$  nivoojooni lühidalt  $\varphi$ -joonteks sõltumata sellest, kas funktsioon on antud  $st$ - või  $xy$ -tasandil. Näiteks,  $st$ -tasandil on antud tavalised koordinaatfunktsioonid  $s$  ja  $t$  ning neile vastavad  $s$ - ja  $t$ -jooned;  $xy$ -tasandil võime näha nende kujutisi. Samuti on  $xy$ -tasandil antud koordinaatfunktsioonid  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$ , mis on seotud funktsioonidega  $x$  ja  $y$  järgmiselt:  $x = \bar{x} \circ f$ ,  $y = \bar{y} \circ f$ , vt. märkus 3.1, lk. 15 ja ka 5.2, lk. 41. Voldijoonel  $A_1$  toimub  $x$ -joonte puutumine  $y$ -joontega, sest  $|xy| = 0$  tähendab, et  $\text{grad}x \perp \text{grad}y$ . Seejuures kujutuse igas  $A_1$  punktis määrab  $x$ -joone ja  $y$ -joone ühine puutuja  $Tf$  tuuma e.  $\text{Ker}Tf$ , sest Jacobi maatriks annuleerib nende joonte puutujavektorid:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} = 0.$$



Esimesel joonisel on kujutatud voldijoon  $A_1$ , millel  $x$ - ja  $y$ -jooned puutuvad. Teisel joonisel on kujutatud 3-jooned 1, 2 ja  $t$ -jooned  $a$ ,  $b$ , kolmandal ja neljandal näeme nende võimalikke kujutisi joone  $f(A_1)$  suhtes. Paneme tähele, et kõik vektorid kujutuvad joone  $A_1$  punktides joone  $f(A_1)$  puutujavektoreiks, sest  $Tf$  astak on 1.

Uurime ka  $|xy|$ -jooni 3 $t$ -tasandil. Nende puutujavektorid kujutuvad  $xy$ -tasandile:

$$\begin{pmatrix} |xy|_2 \\ -|xy|_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} |xy|_2 \\ -|xy|_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x|xy|| \\ |y|xy|| \end{pmatrix}.$$

Olles voldijoonel  $A_1$  tuleb arvestada tingimust  $|xy| = 0$ . Lihtne arvutus (mille jätame lugejale!) näitab, et siis

$$|x|xy|| = \frac{y_1}{x_1} (x_1^2 + x_2^2)^{3/2} \lambda, \quad |y|xy|| = \frac{x_1}{y_1} (y_1^2 + y_2^2)^{3/2} \lambda,$$

kus

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_1 \\ x_{12} & x_{22} & x_2 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{vmatrix}}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} - \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_1 \\ y_{12} & y_{22} & y_2 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix}}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}.$$

Järelikult, joone  $f(A_1)$  puutujavektor, mis on saadud joone  $A_1$  puutujavektori kujutisena, on võrdeline suurusega  $\lambda$ . Võrdus  $\lambda = 0$  määrab voldijoonel  $A_1$  iseärase(d) punkti(d)  $A_2$ , mille kujutis(ed)  $f(A_2)$  osutub (-vad) joone  $f(A_1)$  iseäraseks (-teks) punktiks (-deks).

Moistagi on see kooskõlas "oelduga" punktis 3.6, lk. 21. Toepoolest,  $y$ -joonte valgustamine toimub piki  $x$ -jooni e. vektorvälja  $X(-x_2, x_1)$  trajektoore. Seega

$$y' = Xy = -y_1 x_2 + y_2 x_1 = |xy| \quad \text{ja} \quad y'' = X^2 y = |x|xy||.$$

Tingimus  $y' = 0$  on samaväärne tingimusega  $|xy| = 0$  ja  $y'' = 0$  täiendavalt tähendab, et  $\lambda = 0$ .

NÄIDE. Pakub huvi kujutus

$$r(s, t) = r + r_1 s + r_2 t + \frac{1}{2} (r_{11} s^2 + 2r_{12} st + r_{22} t^2),$$

kus  $r, r_1, r_2, r_{11}, r_{12}, r_{22}$  on mingid fikseeritud vektorid  $xy$ -tasandil, e. koordinaatides

$$\begin{cases} x = u + u_1 s + u_2 t + \frac{1}{2} (u_{11} s^2 + 2u_{12} st + u_{22} t^2) \\ y = v + v_1 s + v_2 t + \frac{1}{2} (v_{11} s^2 + 2v_{12} st + v_{22} t^2). \end{cases}$$

Ilmselt kujutuvad  $s$ -jooned paraboolideks. Tegemist on paraboolide parvega  $xy$ -tasandil ja küsimus seisneb selle parve mahisjoone leidmises. Üldjuhul on voldijooneks  $A_1$   $st$ -tasandil teist järku kõver ja tema kujutist  $f(A_1)$  pole  $xy$ -tasandil lihtne kirjeldada. Toome vaid kolm erijuhtu A, B, C.

A. Olgu  $r = r_1 = r_2 = 0$ . Siis

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} (u_{11} s^2 + 2u_{12} st + u_{22} t^2) \\ y = \frac{1}{2} (v_{11} s^2 + 2v_{12} st + v_{22} t^2). \end{cases}$$

Viime sisse tähistused

$$\lambda = \begin{vmatrix} u_{12} & u_{22} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix}, \quad \mu = \begin{vmatrix} u_{22} & u_{11} \\ v_{22} & v_{11} \end{vmatrix}, \quad \nu = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ v_{11} & v_{12} \end{vmatrix},$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{12} & u_{22} \end{vmatrix}, \quad 2D_{12} = \begin{vmatrix} u_{11} & v_{12} \\ u_{12} & v_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{12} & v_{11} \\ u_{22} & v_{12} \end{vmatrix}, \quad D_{22} = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix},$$

ja kasutame invariantide teooriast tuntud *sistiigiat* (ingl. *syzygy*, sks. *syzygite*)

$$D_{22} x^2 - 2D_{12} xy + D_{11} y^2 + \frac{1}{4} |xy|^2 = 0.$$

On huvitav veenduda, et selline sistiigia tõepoolest kehtib:

$$|xy| = \begin{vmatrix} u_{11}s + u_{12}t & u_{12}s + u_{22}t \\ v_{11}s + v_{12}t & v_{12}s + v_{22}t \end{vmatrix} = \nu s^2 - \mu st + \lambda t^2 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{22} \\ v_{11} & v_{12} & v_{22} \\ t^2 & -st & s^2 \end{vmatrix},$$



$$|xy|^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{22} \\ v_{11} & v_{12} & v_{22} \\ t^2 & -st & s^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{22} & v_{22} & s^2 \\ -2u_{12} & -2v_{12} & 2st \\ u_{11} & v_{11} & t^2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & x \\ D_{12} & D_{22} & y \\ x & y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(D_{11}y^2 - 2D_{12}xy + D_{22}x^2).$$

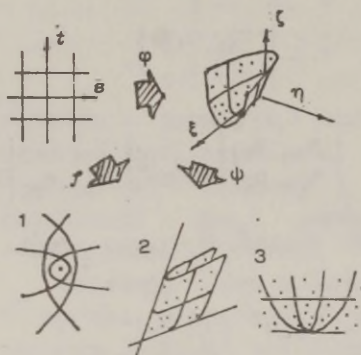
Pealegi on lihtne kontrollida, et

$$\mu^2 - 4\lambda\nu = 4(D_{12}^2 - D_{11}D_{22}).$$

Selgem on  $\tilde{m}$ oista kujutust  $f$ , kui esitada ta kahe kujutuse  $\varphi$  ja  $\psi$  kompositsioonina  $f = \psi\varphi$ :

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2/2 \\ st \\ t^2/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}\xi + u_{12}\eta + u_{22}\zeta \\ v_{11}\xi + v_{12}\eta + v_{22}\zeta \end{pmatrix}.$$

Kujutus  $\varphi$  kerib  $st$ -tasandi kahekordselt  $\xi\eta\zeta$ -ruumi koonuse  $\eta^2 - 4\xi\zeta = 0$   $\tilde{u}$ hele kattelale ja lineaar-kujutus  $\psi$  projekteerib  $\xi\eta\zeta$ -ruumi koos koonusega  $xy$ -tasandile. Projekteerimine toimub vektori  $(\lambda, \mu, \nu)$  sihis, mis  $\tilde{m}$ aarab ka kujutuse  $\psi$  tuuma e.  $\text{Ker}\psi$ . On kolm  $\tilde{v}$ oimalust:



- 1)  $\mu^2 - 4\lambda\nu < 0$ ,  $\text{Ker}\psi$  on koonuse sees;  $st$ -tasand katab kahekordselt  $xy$ -tasandi; voldijooneks  $A_1$  on kaks imaginaarset sirget;
- 2)  $\mu^2 - 4\lambda\nu > 0$ ,  $\text{Ker}\psi$  on väljaspool koonust; voldijoon  $A_1$  ja ka kujutis  $f(A_1)$  koosneb kahest reaalsest sirgest;  $st$ -tasand, murtuna neljaks piki sirgeid  $A_1$ , katab neljakordselt sirgete  $f(A_1)$  moodustatud nurga sise-

piirkonna; sirged  $f(A_1)$  on parabolide parve  $\tilde{m}$ ahisjooneks  $xy$ -tasandil;

- 3)  $\mu^2 - 4\lambda\nu = 0$ ,  $\text{Ker}\psi$  on koonusel; voldijoon  $A_1$  ja kujutis  $f(A_1)$  on sirged;  $st$ -tasand murdub piki sirget  $A_1$  pooleks ning katab kahekordselt pooltasandi  $\tilde{u}$ hel pool sirget  $f(A_1)$ .

## B. Süsteemi

$$\begin{cases} x = u_1 s + u_2 t \\ y = \frac{1}{2} (v_{11} s^2 + 2v_{12} st + v_{22} t^2) \end{cases}$$

korral voldijoon  $A_1$  on sirgjoon

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_{11} & v_{12} \end{vmatrix} s + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_{12} & v_{22} \end{vmatrix} t = 0$$

ja kujutis  $f(A_1)$  parabool

$$D_{22}x^2 + 2By = 0,$$

kus  $B = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & u_1 \\ v_{12} & v_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix}$ . See on järeldus sisiigiast

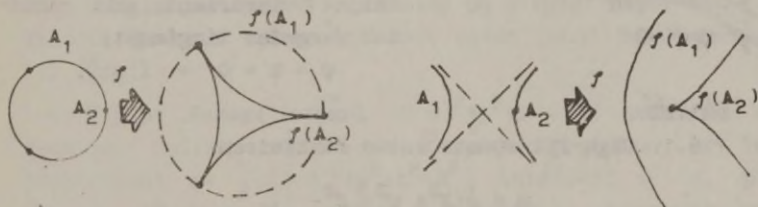
$$D_{22}x^2 + 2By + |xy|^2 = 0,$$

mida on ka kerge kontrollida. Järelikult,  $st$ -tasand, murtuna piki sirgjoont  $A_1$  pooleks, katab kahekordselt  $xy$ -tasandi piirkonna ühel pool parabooli  $f(A_1)$ .

C. Huvitavad on kaks järgmist kujutust

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(s^2 + t^2) + \varepsilon s \\ y = st - \varepsilon t, \end{cases}$$

kus  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . Sõltuvalt määrgist on voldijooneks  $A_1$  kas ringjoon  $s^2 + t^2 = \varepsilon^2$  või hüperbool  $s^2 - t^2 = \varepsilon^2$ . Ringjoonel on kolm kortsupunkti  $(\varepsilon, 0)$  ja  $(-\frac{\varepsilon}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon)$ , hüperboolil vaid üks  $(\varepsilon, 0)$ .



Ringjoont ja tema kujutist on võimalik esitada parameetriliste võrranditega:

$$\begin{cases} s = \varepsilon \cos \tau \\ t = \varepsilon \sin \tau, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\cos 2\tau + 2\cos \tau) \\ y = \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\sin 2\tau - 2\sin \tau). \end{cases}$$

Kujutiseks  $f(A_1)$  on nn. Steineri kõver, mis tekib ringjoone mingi punkti jäljena selle veeremisel mööda teise ringjoone sisekülge tingimusel, et raadiuste suhe oleks 1:3. Hüperbooli ja selle kujutist on samuti võimalik esitada parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} s = \pm \varepsilon \operatorname{ch} \tau \\ t = \pm \varepsilon \operatorname{sh} \tau, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\operatorname{ch} 2\tau \pm 2\operatorname{ch} \tau) \\ y = \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\operatorname{sh} 2\tau \mp 2\operatorname{sh} \tau). \end{cases}$$

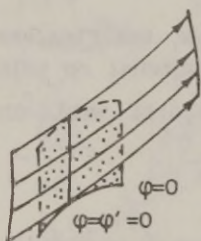
Siin vastavad ülemised märgid ühele, alumised teisele hüperbooli harule.

Lahendamist ootab ülesanne: leida sisiigia, millest tuleneksid kõik erijuhud, nii A, B kui C.

7.6. Veidi teistsuguseks kujuneb olukord mähkijate leidmisel, kui pinna (joone) liikumist põhjustab vektorväli X, või vastav voog  $\alpha_t = \operatorname{expt} X$ . Kui, näiteks, pind on antud võrrandiga  $\varphi = 0$ , siis võrrand  $\varphi \cdot \alpha_t = 0$  määrab pinnaparve, kus t on parve parameeter. Võrrand  $\varphi' = 0$ , kus  $\varphi' = X\varphi = (\varphi \cdot \alpha_t)'_{t=0}$ , määrab pinnal  $\varphi = 0$  karakteristiku.

Mähispind koosneb pinda  $\varphi = 0$  puudutavatest vektorvälja X trajektooridest ja tema võrrandiks on  $I = 0$ , kus I on vektorvälja X invariant, mis rahuldab järgmist tingimust:

$$\varphi = \varphi' = 0 \Rightarrow I = 0.$$



NÄITED.

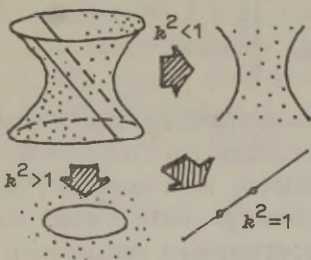
7.6.1. Olgu  $xyz$ -ruumis antud funktsioon

$$\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^2 - 1).$$

Jakob Steiner, šoti matemaatik, 1796 - 1863.

Võrrand  $\varphi = 0$  määrab ühekattelise hüperboloidi. Vektorväli  $X(1,0,k)$  põhjustab selle hüperbooli liikumise,

vt. 4.5.1, lk. 35. Tekib pinnaparv. Kuna  $\varphi'' = 0$ , siis sobivaks invariandiks on  $(\varphi')^2 - 2\varphi\varphi''$ . Arvestades, et  $\varphi' = x - kz$ ,  $\varphi'' = 1 - k^2$ , saame mähispinna võrrandiks  $(x - kz)^2 - (x^2 + y^2 - z^2 - 1)(1 - k^2) = 0$  e. teisendatud kujul  $(1 - y^2)(1 - k^2) + (kx - z)^2 = 0$ . Selleks on elliptiline ( $k^2 > 1$ ) või hüperboolne ( $k^2 < 1$ ) silinder, või tasand ( $k^2 = 1$ ).



Paneme tähele, et suurused  $U = kx - z$  ja  $V = y$  on vektorvälja  $X$  invariandid. Kujutus

$$\pi: (x, y, z) \mapsto (U, V)$$

projekteerib  $xyz$ -ruumi piki vektorvälja  $X$  trajektoore  $UV$ -tasandile.

Kui kujutada hüperboloidi valgustamist piki vektorvälja  $X$  trajektoore, siis silinder heidab ekraanile, milleks on  $UV$ -tasand, hüperboloidi varju. Varju piirdeks on joon

$$\frac{U^2}{k^2 - 1} + V^2 = 1.$$

Olenevalt kiirte kallakust, saame ellipsi ( $k^2 > 1$ ) või hüperbooli ( $k^2 < 1$ ). Kui suurus  $k^2$  kasvades ületab vaartuse 1, toimub  $UV$ -tasandil nn. bifurkatsioon: hüperbooli harud langevad  $V$ -teljele kiirteks  $(-\infty, -1]$  ja  $[1, +\infty)$  ning samal hetkel avaneb lõik  $[-1, +1]$  ellipsiks.

7.6.2. Olgu  $xyz$ -ruumis antud vektorväli  $X(y, z, 0)$ . Leiame tasandi  $x=0$  mähispinna, kui ta hakkab liikuma voo  $a_t$  mõjul. Kuna  $\varphi = x$ ,  $\varphi' = y$ ,  $\varphi'' = z$  ja  $\varphi''' = 0$ , siis sobivaks invariandiks on jällegi  $(\varphi')^2 - 2\varphi\varphi''$ . Mähispinnaks on koonus  $y^2 - 2xz = 0$ .

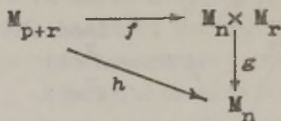
Margime, et parve võrrandiks on  $x - ty + zt^2/2 = 0$ , vt. 4.2.7, lk. 32, ja sama tulemuseni võib antud juhul tulla ka skeemi 7.2 järgi.

7.6.3. Paneme sfaari  $(x-a)^2 + y^2 + z^2 = R^2$  pöörlema ümber  $z$ -telje. Selleks võtame vektorvälja  $X(-y, x, 0)$  ja leiame funktsiooni  $\varphi = \frac{1}{2}[(x-a)^2 + y^2 + z^2 - R^2]$  tuletised  $\varphi' = ay$ ,  $\varphi'' = ax$ ,  $\varphi''' = -ay$ . Näeme, et  $\varphi''' + \varphi' = 0$ . Sobivaks invariandiks on

$(\varphi')^2 + (\varphi'')^2 - (\varphi'' + \varphi)^2$ . Mähispinnaks on toor

$$4\alpha^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2 + z^2 + \alpha^2 - R^2)^2 = 0.$$

7.7. Vaatleme kommutatiivset diagrammi



kus  $M_{p+r}$ ,  $M_n$  ja  $M_r$  on vastavate dimensioonidega muutkonnad,  $f$  on immersioon ja  $g$  on tavaline projektsioon  $(u, v) \mapsto u$ , kus  $u \in M_n$  ja  $v \in M_r$ . Kuna  $f$  on immersioon, siis kujutis  $f(M_{p+r})$  on ruumis  $M_n \times M_r$   $(p+r)$ -mootmeline pind ja selle lõiked tasanditega  $v = \text{const}$  moodustavad, projekteerudes muutkonnale  $M_n$ , seal  $p$ -mootmeliste pindade  $r$ -parameetrilise parve.

R.Thomi vaatevinklist seisneb mähkijate teooria kujutuse  $h = g \circ f$  singulaarsuste uurimises.

### § 8. Diferentsiaalinvariandid

Suurused nagu joone kõverus ja vääne, pinna täis-, keskmine ja peakõverused on vastavate kujutuste nn. diferentsiaalinvariandid, vt. lk. 26. Nagu eespool öeldud, algab kujutuse lokaalne uurimine diagrammist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{B} \end{array} \quad (1)$$

ja seostest, mis tulenevad võrdusest  $\tilde{f}a = bf$ , vt. lk.16

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j^a a_1^j &= b_\beta^a f_1^\beta \\ \tilde{f}_{kl}^a a_1^k a_j^l + \tilde{f}_{ij}^a a_1^k &= b_{\beta\gamma}^a f_1^\beta f_j^\gamma + b_\beta^a f_{ij}^\beta. \end{aligned} \quad (2)$$

. . . . .

Näitame, et nimetatud diferentsiaalinvariante on võimalik tuletada seostest (2).

8.1. Olgu  $M_1$  1-mõõtmeline muutkond e. tavaline arvtelg, kus on lubatud parameetri teisendused  $\alpha$ , ja  $M_2$  2-mõõtmeline eukleidiline tasand, millel on lubatud tavalised liikumised  $\beta$ . Liikumiste Jacobi maatriksid on teatavasti ortogonaalmaatriksid. Immersiooni  $F: M_1 \rightarrow M_2$  korral annab diagramm (1) seosed (2), kus ladina indeksid omavad ühtainust väärtust 1, seetõttu  $\alpha_i^j, \alpha_{ij}^k$  asemel kirjutame lihtsalt  $\alpha', \alpha''$ , kreeka indeksid aga omavad väärtusi 1, 2. Maatriks  $(b_\beta^\alpha)$  on konstantne ortogonaalmaatriks, st.  $b_\alpha^\gamma b_\beta^\gamma = \delta_{\alpha\beta}$ ,  $|b_\beta^\alpha| = 1$  ja  $b_{\alpha\beta}^\gamma = 0$ . Lahti kirjutatuna

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1^1 \alpha' &= b_1^1 f_1^1 + b_2^1 f_1^2 \\ \tilde{f}_1^2 \alpha' &= b_1^2 f_1^1 + b_2^2 f_1^2 \\ \tilde{f}_{11}^1 (\alpha')^2 + \tilde{f}_1^1 \alpha'' &= b_1^1 f_{11}^1 + b_2^1 f_{11}^2 \\ \tilde{f}_{11}^2 (\alpha')^2 + \tilde{f}_1^2 \alpha'' &= b_1^2 f_{11}^1 + b_2^2 f_{11}^2. \end{aligned}$$

Järgnevad seosed meid siin ei huvita. Saadud süsteemi võib esitada ühe maatriksiga

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_1^1 \alpha' & \tilde{f}_{11}^1 (\alpha')^2 + \tilde{f}_1^1 \alpha'' \\ \tilde{f}_1^2 \alpha' & \tilde{f}_{11}^2 (\alpha')^2 + \tilde{f}_1^2 \alpha'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_1^1 & f_{11}^1 \\ f_1^2 & f_{11}^2 \end{bmatrix}.$$

Arvutades determinandid vasakult ja paremalt, saame

$$\begin{vmatrix} \tilde{f}_1^1 & \tilde{f}_{11}^1 \\ \tilde{f}_1^2 & \tilde{f}_{11}^2 \end{vmatrix} \cdot (\alpha')^3 = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_{11}^1 \\ f_1^2 & f_{11}^2 \end{vmatrix}.$$

Samuti märkame, et kehtib seos

$$[(\tilde{f}_1^1)^2 + (\tilde{f}_1^2)^2] \cdot (\alpha')^2 = (f_1^1)^2 + (f_1^2)^2.$$

Järelikult kaks suurust

$$P = \begin{vmatrix} f_1^1 & f_1^2 \\ f_{11}^1 & f_{11}^2 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad Q = (f_1^1)^2 + (f_1^2)^2$$

ei sõltu liikumistest  $b$ , kuid muutuvad parameetri teisendusel  $a$ :

$$\tilde{P}(a')^3 = P, \quad \tilde{Q}(a')^2 = Q.$$

Suurus

$$K = \frac{P}{Q^{3/2}}$$

jääb aga üleminekul  $f \mapsto \tilde{f}$  muutumatuks e. invariantseks. See invariant ongi joone  $F(M_1)$  kõverus. Tõepoolest, olgu joon  $F(M_1)$  antud parameetriliste võrranditega  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ; siis sümboolitele  $f^1, f^2, f_1^1, f_1^2, f_{11}^1, f_{11}^2$  vastavad  $x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$  ja  $P = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}$ ,  $Q = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ . Seega  $\frac{P}{Q^{3/2}}$  on sama kõverus, millest sai koneldud eespool, vt. lk. 59.

8.2. Kui joon on eukleidilisel tasandil  $M_2$  antud funktsiooni  $\varphi$  nivoojoonena, siis on olukord teine. Vaatleme submersiooni  $\tilde{\varphi}: M_2 \rightarrow M_1$ , kus  $M_2$  on samasugune eukleidiline tasand, nagu eelmises punktis, ja  $M_1$  on mingi ühemõõtmeline muutkond, kus on lubatud parameetri teisendused  $c$ . Diagrammi (1) asemel on teine diagramm

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & C \\ b \downarrow & & \downarrow c \\ \tilde{B} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{C} \end{array} \quad (3)$$

ja sellest tulenevad teistsugused seosed

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\beta d_\alpha^\beta &= c' \varphi_\alpha \\ \tilde{\varphi}_{\lambda\mu} d_\alpha^\lambda d_\beta^\mu &= c'' \varphi_\alpha \varphi_\beta + c' \varphi_{\alpha\beta}; \end{aligned} \quad (4)$$

osatuletistel  $\varphi_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}, \tilde{\varphi}_{\alpha\beta}$  on ära jäetud ülemine indeks, sest ta omab ühtainust väärtust, ühemuutuja funktsiooni  $c$  tuletised on aga tähistatud nagu tavaliselt  $c', c''$ . Lähtudes

seostest (4), moodustame maatriksvõrduse

$$(\tilde{s}\tilde{\varphi}_{\lambda\mu} + t\tilde{\varphi}_{\lambda}\tilde{\varphi}_{\mu} + \delta_{\lambda\mu}) \delta_{\alpha}^{\lambda} \delta_{\beta}^{\mu} = sc' \varphi_{\alpha\beta} + [sc'' + t(c')^2] \varphi_{\alpha}\varphi_{\beta} + \delta_{\alpha\beta}$$

ja arvutame determinandid vasakult ja paremalt. Selleks viime sisse tähistused

$$L = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix}, \quad M = \varphi_{11} + \varphi_{22}, \quad S = \varphi_1^2 + \varphi_2^2, \quad T = - \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_1 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

ja analoogiliselt  $\tilde{L}$ ,  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{T}$ . Vasakult saame

$$\begin{vmatrix} \tilde{s}\tilde{\varphi}_{11} + t\tilde{\varphi}_1^2 + 1 & \tilde{s}\tilde{\varphi}_{12} + t\tilde{\varphi}_1\tilde{\varphi}_2 \\ \tilde{s}\tilde{\varphi}_{12} + t\tilde{\varphi}_1\tilde{\varphi}_2 & \tilde{s}\tilde{\varphi}_{22} + t\tilde{\varphi}_2^2 + 1 \end{vmatrix} = s^2\tilde{L} + st\tilde{T} + s\tilde{M} + t\tilde{S} + 1,$$

paremalt sama reegli järgi

$$(sc')^2L + sc' [sc'' + t(c')^2]T + sc'M + [sc'' + t(c')^2]S + 1 = s^2c'(c'L + c''T) + st(c')^3T + s(c'M + c''S) + t(c')^2S + 1.$$

Võrreldes mõlemaid pooli, saame neli seost:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= c'(c'L + c''T), & \tilde{T} &= (c')^3T, \\ \tilde{M} &= c'M + c''S, & \tilde{S} &= (c')^2S. \end{aligned} \quad (5)$$

Otsekohe on näha, et suurus  $T/S^{3/2}$  ei sõltu ei liikumistest ega parameetri teisendustest  $c$ , st. üleminekul  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  jääb ta muutumatuks e. invariantseks. Näitame, et  $-T/S^{3/2}$  on vastava  $\varphi$ -joone kõverus. Selleks esitame uuritava  $\varphi$ -joone immersiooni  $f$  tulemusena.

Vaatleme kompositsiooni

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{\varphi} M_1,$$

kus  $\varphi f = \text{const}$ , ja kirjutame välja vastavad seosed osatule-tiste vahel:

$$\begin{cases} \varphi_{\alpha} f_1^{\alpha} = 0 \\ \varphi_{\alpha\beta} f_1^{\alpha} f_1^{\beta} + \varphi_{\alpha} f_{11}^{\alpha} = 0. \end{cases}$$



Esimesest seosest tuleneb

$$\varphi_1 f_1^1 + \varphi_2 f_1^2 = 0 \Rightarrow (f_1^1)^2 + (f_1^2)^2 = \left[ \frac{f_1^1}{\varphi_2} \right]^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \quad Q = \left[ \frac{f_1^1}{\varphi_2} \right]^2 S,$$

teisest seosest aga saame

$$\varphi_{\alpha\beta} f_1^\alpha f_1^\beta = \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & \varphi_{12} & f_1^2 \\ \varphi_{12} & -\varphi_{22} & f_1^1 \\ f_1^2 & f_1^1 & 0 \end{vmatrix} = - \left[ \frac{f_1^1}{\varphi_2} \right]^2 \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_1 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix} = \left[ \frac{f_1^1}{\varphi_2} \right]^2 T,$$

$$\varphi_{\alpha} f_{11}^{\alpha} = \frac{\varphi_2}{f_1^1} (f_1^1 f_{11}^2 - f_1^2 f_{11}^1) = \frac{\varphi_2}{f_1^1} P, \quad P = - \left[ \frac{f_1^1}{\varphi_2} \right]^3 T,$$

järelikult,  $K = \frac{P}{Q^{3/2}} = - \frac{T}{S^{3/2}}.$

Niisiis  $\varphi$ -joone kõverus avaldub valemiga

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_1 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix}}{(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{3/2}}.$$

Moistagi võime siit saada ka juba tuntud valemi

$$K = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}, \quad \text{vt. lk. 59, kui võtta } \varphi = y - y(x).$$

Tahelepanu väärrib asjaolu, et suurus  $\lambda$ , vt. 7.5, lk. 78, on  $x$ - ja  $y$ -joone kõveruste vahe. Kui eespool oli mainitud, et voldipunktides  $A_1$  need jooned puudutavad üksteist, siis nüüd võib lisada, et kortsupunktides  $A_2$  on neil ka ühised kõverused. Pealegi osutub võrdus  $\lambda = 0$  nii meetriliseks kui ka kujutuse  $f$  topoloogiliseks omaduseks.

NAIDE. Kui  $\varphi = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a$ ,

$$\text{siis} \quad K = \frac{I_3 - I_2\varphi}{[(a_{11}x + a_{12}y + a_1)^2 + (a_{12}x + a_{22}y + a_2)^2]^{3/2}},$$

$$\text{kus } I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix}.$$

Kui palju võib üldse saada sõltumatuid invariante? Arutlegem järgmiselt. Immersiooni korral, vt. 8.1, osales tuletiste  $f_1^1, f_1^2, f_{11}^1, f_{11}^2$  teisendamisel kolm parameetrit, s.o. kaks tuletist  $a', a''$  ja üks pöördenurk maatriksist

$$\begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix};$$

elimineerides neljast seosest, vt. lk. 85, kolm parameetrit, võisime saada ainult ühe seose, mis näitab ühe invariandi olemasolu. Selleks osutus kõverus  $K = \frac{P}{Q^{3/2}}$ .

Nüüd, submersiooni korral on osatuletisi viis:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22}$ , ja nende teisendamisel seostes (4) osaleb kolm parameetrit, s.o. tuletised  $c', c''$  ja pöördenurk  $\alpha$ . Üleminekul seostelt (4) seostele (5) elimineerus maatriks  $(b_\beta^\alpha)$ , st. pöördenurk  $\alpha$ . Suurusid  $L, M, S, T$  on neli ja nende teisendamisel seostes (5) osaleb kaks parameetrit  $c', c''$ . Nende parameetrite elimineerimisel seostest (5) peaks saama kaks invarianti. Üks neist on leitud, nimelt  $\frac{T}{S^{3/2}}$ . Teise leiame samuti: kuna  $\tilde{M}\tilde{T} - \tilde{L}\tilde{S} = (c')^4(\tilde{M}\tilde{T} - \tilde{L}\tilde{S})$ , siis invariantiks osutub suurus

$$\frac{\tilde{M}\tilde{T} - \tilde{L}\tilde{S}}{S^2}. \quad (6)$$

Huvitav on invarianti (6) geomeetriline tõlgendus. Funktsiooni  $\varphi$  gradiendiks on vektorväli  $v = (\varphi_1, \varphi_2)$ . Jälgime vektori  $v$  muutumist nihkel piki  $\varphi$ -joont. Selleks votame  $\varphi$ -joone puutujavektorvälja  $\tau = (\varphi_2, -\varphi_1)$ , ja diferentseerime komponente  $\varphi_1, \varphi_2$  välja  $\tau$  suhtes. Antud punktis saame vektori  $v' = (\varphi_{11}\varphi_2 - \varphi_{12}\varphi_1, \varphi_{12}\varphi_2 - \varphi_{22}\varphi_1)$ , mille skalaarruut võrdub suuruselga  $\tilde{M}\tilde{T} - \tilde{L}\tilde{S}$ . Toepoolest, kuna

$$\begin{aligned} (\varphi_{11} + \varphi_{22})(\varphi_{11}\varphi_2^2 - 2\varphi_{12}\varphi_1\varphi_2 + \varphi_{22}\varphi_1^2) - (\varphi_{11}\varphi_{22} - \varphi_{12}^2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) &= \\ &= (\varphi_{11}\varphi_2 - \varphi_{12}\varphi_1)^2 + (\varphi_{12}\varphi_2 - \varphi_{22}\varphi_1)^2. \end{aligned}$$

siis  $MT - LS = (v')^2$ .

Olgu funktsiooni  $\psi$  nivoojooned vektorvalja  $v$  trajektoideks. Ilmselt moodustavad  $\varphi$ - ja  $\psi$ -jooned tasandil ortogonaalse võrgu, st.  $\varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2 = 0$ . Arvutame  $\psi$ -joone kõveruse. Selleks diferentseerime viimast seost mõlema argumendi järgi:

$$\begin{aligned}\varphi_{11}\psi_1 + \varphi_{12}\psi_2 + \psi_{11}\varphi_1 + \psi_{12}\varphi_2 &= 0 \\ \varphi_{12}\psi_1 + \varphi_{22}\psi_2 + \psi_{12}\varphi_1 + \psi_{22}\varphi_2 &= 0.\end{aligned}$$

Esitame tulemuse maatrikskujul:

$$\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{12} & \psi_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = 0,$$

ning arvestades ilmseid seoseid

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{\psi_1}{\varphi_2} \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ -\varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{\varphi_2}{\psi_1} \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix},$$

tuletame seose

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1}{\varphi_2} (\varphi_1\varphi_2) \times \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ -\varphi_1 \end{pmatrix} + \\ + \left[ \frac{\varphi_2}{\psi_1} \right]^2 \cdot (-\psi_2\psi_1) \times \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{12} & \psi_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} &= 0.\end{aligned}$$

Kuna

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_1 \\ \psi_{12} & \psi_{22} & \psi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 & 0 \end{vmatrix} &= -\psi_{11}\psi_2^2 + 2\psi_{12}\psi_1\psi_2 - \psi_{22}\psi_1^2 = \\ &= -(-\psi_2\psi_1) \times \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{12} & \psi_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix} = \\ &= \left[ \frac{\psi_1}{\varphi_2} \right]^3 (\varphi_1\varphi_2) \times \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ -\varphi_1 \end{pmatrix} =\end{aligned}$$

$$= \left( \frac{\psi_1}{\varphi_2} \right)^3 [(\varphi_{11}\varphi_2 - \varphi_{12}\varphi_1)\varphi_1 + (\varphi_{12}\varphi_2 - \varphi_{22}\varphi_1)\varphi_2] =$$

$$= \left( \frac{\psi_1}{\varphi_2} \right)^3 \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_2 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & -\varphi_1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix},$$

ja

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 = \left( \frac{\psi_1}{\varphi_2} \right)^2 (\varphi_1^2 + \varphi_2^2),$$

siis  $\psi$ -joone koveruseks saame

$$K_1 = \frac{T_1}{S^{3/2}}, \text{ kus } T_1 = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_2 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & -\varphi_1 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Kuna aga  $(v', \tau) = T$ ,  $(v', \nu) = T_1$  ja  $(v', \tau)^2 + (v', \nu)^2 = (v')^2 \cdot \tau^2 + T^2 + T_1^2 = (v')^2 \cdot S$ , siis järelikult

$$\frac{(v')^2}{S^2} = K^2 + K_1^2,$$

st. invariant (6) on koveruste  $K$  ja  $K_1$  ruutude summa.

8.3. Vaatleme "immersionsiooni  $F: M_2 \rightarrow M_3$ , kus  $M_3$  on 3-mootmeline eukleidiline ruum ja  $M_2$  mingi 2-mootmeline muutkond. Kujutist  $F(M_2)$  kujutleme 2-mootmelise pinnana ruumis  $M_3$ .

Seosed (2) avalduvad kujul

$$\tilde{f}_j^\alpha a_1^j = b_\beta^\alpha f_1^\beta$$

$$\tilde{f}_{kl}^\alpha a_1^k a_j^l + \tilde{f}_k^\alpha a_{1j}^k = b_\beta^\alpha f_{1j}^\beta \quad (7)$$

(kasitleme neist ainult kahte esimest). Pind oli juba uurimisel punktis 7.3, lk. 71. Nüüd on vektorid  $\gamma_1$  maaratud osatuletistega  $f_1^\alpha$ . Meetrilise tensori (e. esimese ruutvormi) komponentideks on  $g_{1j} = f_1^\alpha f_j^\alpha$ . Üleminekul  $f \mapsto \tilde{f}$  teiseneb meetriline tensor järgmiselt:

$$g_{1j} = \tilde{g}_{kl} a_1^k a_j^l. \quad (8)$$

Seda näeme, arvestades esimest seost (7) ja maatriksi ( $b_{\beta}^{\alpha}$ ) ortogonaalsust:  $b_{\gamma}^{\alpha} b_{\gamma}^{\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ . Vastavad determinandid on seotud võrdusega

$$|\mathcal{G}| = |\tilde{\mathcal{G}}| \cdot |a|^2, \quad (9)$$

kus  $|a|$  on teisenduse  $a$  jakobiaan.

Vottes arvesse, et

$$|\gamma_1 \times \gamma_2|^2 + (\gamma_1, \gamma_2)^2 = \gamma_1^2 \gamma_2^2, \quad |\gamma_1 \times \gamma_2|^2 = \mathcal{G}_{11} \mathcal{G}_{22} - \mathcal{G}_{12}^2 = |\mathcal{G}|$$

ja  $(\gamma_1 \times \gamma_2, \gamma_{1j}) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{1j})$ , esitame teise ruutvormi komponendid kujul

$$h_{1j} = \sqrt{|\mathcal{G}|} (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{1j}).$$

Tuletame seostest (7) võrduse

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_{1j}) = |a| \cdot (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_{kl}) a_1^k a_j^l$$

ja siit teisendusvalemi

$$h_{1j} = \tilde{h}_{kl} a_1^k a_j^l. \quad (10)$$

Valemid (8) ja (10) annavad tähtsa seose

$$h_{1j} - \lambda \mathcal{G}_{1j} = (\tilde{h}_{kl} - \lambda \tilde{\mathcal{G}}_{kl}) a_1^k a_j^l$$

ja ka võrduse

$$|h_{1j} - \lambda \mathcal{G}_{1j}| = |\tilde{h}_{1j} - \lambda \tilde{\mathcal{G}}_{1j}| \cdot |a|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

millest järeldame, et ruutvõrrandid

$$|h_{1j} - \lambda \mathcal{G}_{1j}| = 0 \quad \text{ja} \quad |\tilde{h}_{1j} - \lambda \tilde{\mathcal{G}}_{1j}| = 0$$

on ekvivalentsed, st. neil on ühesugused lahendid  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$ . Definitsiooni kohaselt on võrrandi  $|h_{1j} - \lambda \mathcal{G}_{1j}| = 0$  lahendeiks pinna peakõverused:  $\lambda_1 = K_1$ ,  $\lambda_2 = K_2$ , vt. lk. 73. Järelikult, pinna peakõverused  $K_1$  ja  $K_2$  ning koos nendega keskmine kõverus  $H = K_1 + K_2$  ja täiskõverus  $K = K_1 K_2$  ei muutu üleminekul  $f \mapsto \tilde{f}$ .

Nagu näeme, on mängus 15 osatuletist  $f_1^{\alpha}$ ,  $f_{1j}^{\alpha}$  ja 13 parameetrit, s.o. 10 osatuletist  $a_1^k$ ,  $a_{1j}^k$  ja neile lisaks 3 Euleri

nurka, mis määravad teljestiku pöörde ja ka maatriksi ( $\beta^{\alpha}$ ). Seega on sõltumatuid invariante  $15-13=2$  ning nendeks on kas peakõverused  $K_1$  ja  $K_2$  või keskmine ja täiskõverus  $H$  ja  $K$ .

8.4. Duaalses vastavuses immersiooniga  $F: M_2 \rightarrow M_3$  on submersioon  $\phi: M_3 \rightarrow M_1$ , kus  $M_3$  on sama 3-mootmeline eukleidiiline ruum ja  $M_1$  mingi 1-mootmeline muutkond. Lähtume diagrammist (3) ja seostest (4), vt. lk. 86, kus kreeka indeksid omavad nüüd väärtusi 1, 2, 3. Seekord on mängus 9 osatuletist  $\varphi_{\alpha}$ ,  $\varphi_{\alpha\beta}$  ja 5 parameetrit, s.o. 3 Euleri nurka ja 2 tuletist  $c'$ ,  $c''$ . Tahendab, leidub  $9-5=4$  sõltumatut invarianti.

Viime sisse tähistused

$$A = \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33}, \quad B = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2,$$

$$C = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} \\ \varphi_{13} & \varphi_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{vmatrix},$$

$$D = - \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_1 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} & \varphi_1 \\ \varphi_{13} & \varphi_{33} & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_2 \\ \varphi_{23} & \varphi_{33} & \varphi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$E = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} \end{vmatrix}, \quad F = - \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_1 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_2 \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix},$$

ja järgides täpselt valemite (5) saamist, vt. lk. 87, tuleta- me nende suuruste teisendusvalemid

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= c'A + c''B, & \tilde{B} &= (c')^2 B, \\ \tilde{C} &= c'(C' + c''D), & \tilde{D} &= (c')^3 D, \\ \tilde{E} &= (c')^2 (c'E + c''F), & \tilde{F} &= (c')^4 F. \end{aligned} \quad (11)$$

Siit näeme otsekohe, et liitsuhted

$$B^{1/2}; D^{1/3}; F^{1/4}$$

ja

Leonhard Euler, šveitsi matemaatik, 1707 - 1783.

$$\left| \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right|^{1/4} : \left| \begin{array}{cc} A & B \\ E & F \end{array} \right|^{1/5} : \left| \begin{array}{cc} C & D \\ E & F \end{array} \right|^{1/6}$$

on invariantised ja annavadki 4 sõltumatut invarianti. Neist kaks on submersiooni  $\phi$  kihi keskmine kõverus ja täiskõverus:

$$H = -\frac{D}{B^{3/2}}, \quad K = \frac{F}{B^2}. \quad (12)$$

Et selles veenduda, esitame vaadeldava kihi immersiooni  $F: M_2 \rightarrow M_3$  kujutisena. Siis  $\varphi_j = \text{const}$  ja kehtivad seosed

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha f_1^\alpha &= 0 \\ \varphi_{\alpha\beta} f_1^\alpha f_j^\beta + \varphi_{\gamma\gamma} f_{1j}^\gamma &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Esimesest seosest (13) e. süsteemist

$$\begin{cases} \varphi_1 f_1^1 + \varphi_2 f_1^2 + \varphi_3 f_1^3 = 0 \\ \varphi_1 f_2^1 + \varphi_2 f_2^2 + \varphi_3 f_2^3 = 0 \end{cases}$$

ilmeb, et

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 = \begin{vmatrix} f_1^2 & f_1^3 \\ f_2^2 & f_2^3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1^3 & f_1^1 \\ f_2^3 & f_2^1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1^1 & f_1^2 \\ f_2^1 & f_2^2 \end{vmatrix}$$

või mingi teguri  $\alpha$  täpsusega

$$\varphi_1 = \alpha \begin{vmatrix} f_1^2 & f_1^3 \\ f_2^2 & f_2^3 \end{vmatrix}, \quad \varphi_2 = \alpha \begin{vmatrix} f_1^3 & f_1^1 \\ f_2^3 & f_2^1 \end{vmatrix}, \quad \varphi_3 = \alpha \begin{vmatrix} f_1^1 & f_1^2 \\ f_2^1 & f_2^2 \end{vmatrix},$$

seejuures  $B = \alpha^2 |g|$ . Siis veel  $\varphi_\alpha = B^{1/2} n^\alpha$ ,  $\varphi_\alpha f_{1j}^\alpha = B^{1/2} h_{1j}^\alpha$ , ja teine seos (13) annab  $\varphi_{\alpha\beta} f_1^\alpha f_j^\beta + B^{1/2} h_{1j}^\alpha = 0$ . Kirjutame välja kaks võrdust

$$g_{1j} = \delta_{\alpha\beta} f_1^\alpha f_j^\beta, \quad h_{1j} = -B^{-\frac{1}{2}} \varphi_{\alpha\beta} f_1^\alpha f_j^\beta$$

ja moodustame maatriksi

$$h_{1j} - \lambda g_{1j} = -(B^{-\frac{1}{2}} \varphi_{\alpha\beta} + \lambda \delta_{\alpha\beta}) f_1^\alpha f_j^\beta.$$

Meid huvitab ruutvõrrand  $|\tilde{h}_{1j} - \lambda g_{1j}| = 0$ , mille lahendeiks on pinna peakõverused  $K_1$  ja  $K_2$ .

Viime läbi väikese algebraise arutluse. Esiteks, meil on tegemist 2. järku ruutmaatriksiga

$$U = (A_{\alpha\beta} f_1^\alpha f_j^\beta),$$

kus  $A_{\alpha\beta} = -B^{-1/2}(\varphi_{\alpha\beta} - \lambda \delta_{\alpha\beta})$ . Nagu on teada algebrast, avaldub maatriksi  $U$  determinant jälgede  $\text{tr}U$  ja  $\text{tr}U^2$  kaudu:

$$|U| = \frac{1}{2}(\text{tr}^2 U - \text{tr}U^2),$$

mida võime näha, näiteks, enamtuntud valemist

$$U^2 - \text{tr}U \cdot U + |U| \cdot E = 0$$

( $E$  on ühikmaatriks). Kuna  $\text{tr}U = A_{\alpha\beta} f_1^\alpha f_1^\beta$  ja  $\text{tr}U^2 = A_{\alpha\beta} A_{\mu\nu} f_1^\alpha f_j^\beta f_j^\mu f_1^\nu$ , siis

$$\begin{aligned} 8|U| &= 4A_{\alpha\beta} A_{\mu\nu} (f_1^\alpha f_1^\beta f_j^\mu f_j^\nu - f_1^\alpha f_j^\beta f_j^\mu f_1^\nu) = \\ &= (A_{\alpha\beta} A_{\mu\nu} - A_{\mu\beta} A_{\alpha\nu}) (f_1^\alpha f_j^\mu - f_j^\alpha f_1^\mu) (f_1^\beta f_j^\nu - f_j^\beta f_1^\nu) = \\ &= \frac{1}{x^2} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \varphi_1 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & \varphi_2 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Arvutame viimase determinandi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_{11} + B^{1/2}\lambda & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_1 \\ \varphi_{12} & \varphi_{22} + B^{1/2}\lambda & \varphi_{23} & \varphi_2 \\ \varphi_{13} & \varphi_{23} & \varphi_{33} + B^{1/2}\lambda & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} &= -\frac{1}{B}(B^2\lambda^2 + DB\frac{1}{2}\lambda + F) = \\ &= -B \left[ \lambda^2 + \frac{D}{B^{3/2}} \lambda + \frac{F}{B^2} \right]. \end{aligned}$$

Ruutvõrrandid



$$|h_{1j} - \lambda g_{1j}| = 0 \quad \text{ja} \quad \lambda^2 + \frac{D}{B^{3/2}} \lambda + \frac{F}{B^2} = 0$$

osutuvad ekvivalentseteks. Valemid (12) kehtivad tõepoolest. Need valemid kannavad Neumanni nime.

Teeme Neumanni valemest mõned järeldused.

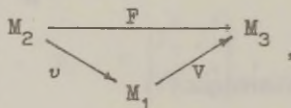
8.4.1. Olgu  $xyz$ -ruumis  $\varphi(x, y, z) = \psi(x, y)$ . Submersiooni  $\varphi$  kihtideks on  $z$ -teljega paralleelsete moodustajatega silindrid. Suurustest  $A, B, C, D, E, F$  funktsiooni  $\varphi$  jaoks võrduvad kaks nulliga,  $E = F = 0$ , teised aga langevad kokku suurustega  $M, S, L, T$  funktsiooni  $\psi$  jaoks:  $A = M, B = S, C = L, D = T$ . Silindri peakõverus võrdub nulliga,  $K = 0$ , keskmine kõverus aga langeb kokku juhtjoone kõverusega,  $H = -D/B^{3/2} = -T/S^{3/2}$ .

8.4.2. Olgu  $\varphi(x, y, z) = \psi(x, y) - z$ . Funktsiooni  $\varphi$  ruumiliseks graafikuks on pind  $\varphi = 0$ . Sel juhul  $\varphi_1 = \psi_1, \varphi_2 = \psi_2, \varphi_3 = -1, \varphi_{11} = \psi_{11}, \varphi_{12} = \psi_{12}, \varphi_{22} = \psi_{22}, \varphi_{13} = \varphi_{23} = \varphi_{33} = 0$  ja  $A = M, B = S + 1, C = L, D = T + M, E = 0, F = L$ .

Funktsiooni  $\varphi$  hessiaan võrdub nulliga,  $L = 0$ , parajasti siis, kui tema ruumiline graafik on tasanduv pind,  $K = 0$ .

Funktsioon  $\varphi$  rahuldab diferentsiaalvorandit  $T + M = 0$  parajasti siis, kui tema ruumiline graafik on minimaalpind,  $H = 0$ .

8.5. Olgu  $M_1, M_2$  ja  $M_3$  vastavalt 1-, 2- ja 3-mootmeline muutkond. Kommutatiivne diagramm



kus  $v, V$  ja  $F$  on immersioonid, määrab ruumis  $M_3$  joone  $V(M_1)$ , mis kuulub pinnale  $F(M_2)$ . Võrdusest  $V = f v$  tuleb seosed, vt. lk. 16,

$$\begin{aligned}
 v_1^\alpha &= f_1^\alpha v_1^1 \\
 v_{11}^\alpha &= f_{1j}^\alpha v_1^j v_2^j + f_1^\alpha v_{11}^1 \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Karl Gottfried Neumann, saksa matemaatik, 1831 - 1925.

Kui  $M_3$  on eukleidiline ruum, siis võib kasutada Gaussi valemeid,  $f_{1j}^\alpha = f_k^\alpha \Gamma_{1j}^k + n^\alpha n_{1j}$ , vt. lk. 72, ja avaldada teise seose kujul

$$v_{11}^\alpha = f_k^\alpha (v_{11}^k + \Gamma_{1j}^k v_1^i v_1^j) + n^\alpha n_{1j} v_1^i v_1^j.$$

Kuna suurused  $v_{1i}^\alpha$ ,  $v_{1i}^\alpha$  määravad joone  $V(M_1)$  kooldumistasandi, võib esineda kaks erijuhtu: kõikjal piki joont  $V(M_1)$  kooldumistasand

1) ühtib pinna  $F(M_2)$  puutujatasandiga, s.o.

$$n_{1j} v_1^i v_1^j = 0,$$

- sel juhul nimetatakse joont  $V(M_1)$  selle pinna asümptootiliseks jooneks;

2) läbib pinna  $F(M_2)$  normaali, s.o.  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ , et

$$v_{11}^k + \Gamma_{1j}^k v_1^i v_1^j = \lambda v^k,$$

- sel juhul nimetatakse joont  $V(M)$  selle pinna geodeetiliseks jooneks.

Kui muutkondadel  $M_1$ ,  $M_2$  ja  $M_3$  lubada lokaalseid teisendusi  $\rho$ ,  $\alpha$  ja  $\beta$  ( $\beta$  on tavaline liikumine  $M_3$ -s), siis kehtivad seosed (tuletuse jäatame lugejale):

$$(\tilde{n}_{1j} \tilde{v}_1^i \tilde{v}_1^j) \cdot (\rho')^2 = n_{1j} v_1^i v_1^j,$$

$$(\tilde{v}_{11}^i + \tilde{\Gamma}_{kl}^i \tilde{v}_1^k \tilde{v}_1^l) (\rho')^2 + \tilde{v}_1^i \rho' = a_j^i (v_{11}^j + \Gamma_{kl}^j v_1^k v_1^l).$$

Siit näeme, et ülaltoodud asümptootilise ja geodeetilise joonte võrrandeil on invariantne iseloom.

8.6. Kui eelmises diagrammis 8.5 asendada muutkond  $M_1$  kahe 1-mootmelise muutkonna otsekorrutisega  $M_1 \times M'_1$ , siis mõistame kujutist  $V(M_1 \times M'_1)$  joonte võrguna pinnal  $F(M_2)$ . Muutkonnas  $M_1 \times M'_1$  on lubatud lokaalsed teisendused  $\rho \times \sigma$ , kus  $\rho$  ja  $\sigma$  on teisendused eraldi muutkondades  $M_1$  ja  $M'_1$ . Vordusest  $V = fV$  tuletame seosed

$$v_1^\alpha = f_j^\alpha v_1^j$$

$$v_{1j}^\alpha = f_{kl}^\alpha v_1^k v_j^l + f_k^\alpha v_{1j}^k$$

. . . . .

Olgu  $M_3$  nagu ennegi eukleidiline ruum. Siis esimesest seosest saame

$$v_1^\alpha v_2^\alpha = g_{1j} v_1^j v_2^j .$$

Teisest seosest kirjutame välja  $v_{12}^\alpha$ , kasutades Gaussi valemeid,

$$v_{12}^\alpha = f_k^\alpha (v_{12}^k + \Gamma_{1j}^k v_1^j v_2^j) + n^\alpha h_{1j} v_1^j v_2^j .$$

Võib esineda kolm erijuhtu: pinna  $F(M_2)$  igas punktis

1) vektorid  $v_1^\alpha$  ja  $v_2^\alpha$  on teineteisega risti, s.o.

$$g_{1j} v_1^j v_2^j = 0,$$

- sel juhul kõneldakse, et võrk on *ortogonaalne*;

2) vektorid  $v_1^\alpha$  ja  $v_2^\alpha$  on teise ruutvormi suhtes kaassihilised, s.o.

$$h_{1j} v_1^j v_2^j = 0,$$

- sel juhul kõneldakse, et võrk on *adjungeeritud*;

3) toimub vektorite  $v_1^\alpha$  paralleelne ülekanne piki vektorvälja  $v_2^\alpha$  trajektoore, ja vastupidi:

$$v_{12}^k + \Gamma_{1j}^k v_1^j v_2^j = 0,$$

- sel juhul kõneldakse, et võrk on *absoluutselt paralleelne*.

Teisenduste  $\rho \times \sigma$ ,  $a$  ja  $b$  korral kehtivad seosed

$$(\tilde{g}_{1j} \tilde{v}_1^j \tilde{v}_2^j) \rho' \sigma' = g_{1j} v_1^j v_2^j ,$$

$$(\tilde{h}_{1j} \tilde{v}_1^j \tilde{v}_2^j) \rho' \sigma' = h_{1j} v_1^j v_2^j ,$$

$$(\tilde{v}_{12}^k + \tilde{\Gamma}_{1j}^k \tilde{v}_1^j \tilde{v}_2^j) \rho' \sigma' = \alpha_1^k (v_{12}^1 + \Gamma_{1j}^1 v_1^j v_2^j) ,$$

sest  $\tilde{v}_1^\alpha \rho' = b_\beta^\alpha v_1^\beta$ ,  $\tilde{v}_2^\alpha \sigma' = b_\beta^\alpha v_2^\beta$ ,  $\tilde{v}_{12}^\alpha \rho \sigma' = b_\beta^\alpha v_{12}^\beta$  jne.

Siit näeme, et ülaltoodud võrrandeil 1), 2) ja 3) on invariantne iseloom.

8.7. Seosed (2), lk. 84, võivad olla esitatud ka ilmutatud kujul osatuletiste  $\tilde{f}_1^\alpha, \tilde{f}_{1j}^\alpha, \dots$  suhtes:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1^\alpha &= b_\beta^\alpha f_j^\beta \bar{a}_1^j, \\ \tilde{f}_{1j}^\alpha &= b_\beta^\alpha (f_{kl}^\beta - f_s^\beta A_{kl}^s + B_{\lambda\mu}^\beta f_k^\lambda f_1^\mu) \bar{a}_1^k \bar{a}_j^l, \\ &\dots \end{aligned} \quad (14)$$

Siin on kasutusel sümboolid

$$A_{kl}^s = \bar{a}_p^s a_{kl}^p, \quad B_{\lambda\mu}^\beta = \bar{b}_\gamma^\beta b_{\lambda\mu}^\gamma \quad (15)$$

ning maatriksid  $(a_j^i)$  ja  $(\bar{a}_1^j)$ , samuti maatriksid  $(b_p^\alpha)$  ja  $(b_\alpha^\beta)$  on üksteise suhtes pöördmaatriksid. Sellisel kujul võimaldavad seosed (14) ükskõik millise diferentsiaaloperaatori või diferentsiaalvõrrandi (ka diferentsiaalvõrrandite süsteemi) esitada suvalistes koordinaadistikes. See aga võimaldab omakorda selgitada nende invariantseid omadusi.

Toome kaks lihtsamat näidet.

8.7.1. Kui kujutus on mingisugustes koordinaadistikes lineaarne, s.o.  $\tilde{f}_{1j}^\alpha = 0$ , siis üldistes joonkoordinaatides on ta esitatud diferentsiaalvõrrandite süsteemiga

$$f_{1j}^\alpha - f_k^\alpha A_{1j}^k + B_{\beta\gamma}^\alpha f_1^\beta f_j^\gamma = 0. \quad (16)$$

Juhul  $n = 1$  saame sirgjoone diferentsiaalvõrrandi joonkoordinaatides

$$f_{11}^\alpha + B_{\beta\gamma}^\alpha f_1^\beta f_1^\gamma = A f_1^\alpha. \quad (17)$$

Võrreldes süsteemi (17) geodeetilise joone võrranditega, lk. 97, näeme ilmset analoogiat. Geodeetiline joon pinnal kaitub teatud mõttes nii, nagu sirgjoon tasandil  $\mathbb{R}^2$ . Üks omadustest seisneb selles, et geodeetiline joon pinnal on lühim trajektoor kahe antud punkti vahel.

Juhul  $m = 1$  saame süsteemist (16) tasanõi diferentsiaalvõrrandid joonkoordinaatides

$$f_{1j} - f_k A_{1j}^k + B f_1 f_j = 0. \quad (18)$$

8.7.2. Vaatame, kuidas teisenõeb lineaarvõrrand

$$\lambda^{1j} f_{1j} + \mu^k f_k = 0 \quad (19)$$

sõltumatute muutujate teisenõemisel ( $n=2$ ). Lugesões teisõendust  $\tilde{b}$  samasõustõendõuseks, kasutame seõseid

$$f_1 = \tilde{f}_j a_1^j, \quad f_{1j} = \tilde{f}_{kl} a_1^k a_j^l + \tilde{f}_k a_{1j}^k.$$

Võrrand (19) jõeab lineaarseks. Teisenõevad vaid kordajad:

$$\tilde{\lambda}^{1j} = a_k^1 a_1^j \lambda^{kl}, \quad \tilde{\mu}^k = a_{1j}^k \lambda^{1j} + a_j^k \mu^j. \quad (20)$$

Maatriksi  $(\lambda^{1j})$  determinant teisenõeb jõergõmisõelt:

$$|\tilde{\lambda}| = |a|^2 \cdot |\lambda|.$$

Kuna jakobiaan  $|a|$  seisab selles valemis ruudõs, siis on determinandil  $|\lambda|$  invariantne omadus: igas koordinaatsõustõemis on ta kas positiivne, negatiivne või võrdne nulliga. Vastavalt sellele nimõtatakse võrrandit (19) *elliptiliseks*, *hõperboolseks* või *paraboolseks*.

#### 4. peatükk. DIFERENTSIAALVÖRRANDID

Diferentsiaalgeomeetria on suurel määral seotud diferentsiaaloperaatorite ja diferentsiaalvõrranditega. Kui klassikaline diferentsiaalgeomeetria tegeleb küllalt spetsiifiliste objektidega (jooned, pinnad,...), siis kaasaegses matemaatikas on kujunemas avar valdkond, mis hõlmab väga paljusid traditsiooniliselt eraldi eksisteerinud teooriaid. Tutvume siin mõningate kontseptsioonidega.

#### § 9. Harilikud diferentsiaalvõrrandid

9.1. Pole midagi hämmastavat, kui me võtame kasutusele lõpmatudimensionaalse arvruumi  $\mathbb{R}^\infty$ . Näiteks Maclaurini rea

$$u_t = u + u' t + u'' \frac{t^2}{2} + \dots \quad (1)$$

kordajad ( $u, u', u'', \dots$ ) moodustavad selle ruumi punkti, ja vastupidi, igale  $\mathbb{R}^\infty$  punktile võib seada vastavusse rea (1).

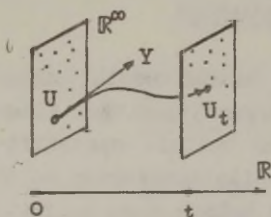
Võtame kasutusele lõpmatu järku maatriksid

$$U = \begin{bmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad U_t = \begin{bmatrix} u_t \\ u'_t \\ u''_t \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad e^{Ct} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \dots \\ 0 & 1 & t & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Maatrikseid  $U$  ja  $U_t$  tõlgendame ruumi  $\mathbb{R}^\infty$  punktidenä. Maatriks  $C$  erineb ühikmaatriksist  $E$  selle poolest, et kui ühikmaatriksis asuvad ühed peadiagonaalil, siis maatriksis  $C$  on nad nihkunud ühe elemendi võrra paremale. Kui maatriksit  $C$  korrutada  $k$  korda iseendaga, siis ühed nihkuvad ilmselt  $k$  elemendi võrra paremale. Maatriks  $e^{Ct}$  on maatriksi  $Ct$  eksponentsiaal:

$$e^{Ct} = E + Ct + C^2 \frac{t^2}{2} + \dots$$

Moodustame otsekorrutise  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$ , kus  $\mathbb{R}$  on  $t$ -telg. Seega on iga punktiga  $t \in \mathbb{R}$  seotud üks  $\mathbb{R}^\infty$ , mida nimetame kihiks ja mille punkte tähistame sümboliga  $U_t$ . Võib kõnelda kihtruumist, vt. 6.3, lk. 47, ja kihtide projekteerimisest baasile



$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R} : (t, U_t) \mapsto t.$$

Kui igas kihis fikseerida punkt, st. korraldada vastavus  $t \mapsto U_t$ , siis ruumis  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$  tekib joon e. kihtruumi lõtge.

Lõikel on kõik koordinaadid  $(u_t, u'_t, \dots)$   $t$  funktsioonid.

Erilist osa etendab kirjeldavas kihtruumis vektorväli

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial u} + u'' \frac{\partial}{\partial u'} + u''' \frac{\partial}{\partial u''} + \dots, \quad (2)$$

mida nimetatakse *tätsdiferentsiaaloperaatoriks*. Tähistame funktsiooni  $\varphi$  tuletisi  $Y\varphi$  lihtsalt primiga, st.  $Y\varphi = \varphi'$ . Selline tähistus on põhjendatud järgmise asjaoluga. Oletame, et funktsioon  $\varphi$  sõltub koordinaatidest  $(t, u_t, u'_t, \dots)$ , kus  $u_t, u'_t, \dots$  on  $t$  funktsioonid ja  $u_0 = u, u'_0 = u', \dots$  Diferentseerime seda funktsiooni  $t$  järgi kohal  $t=0$ . Siis ilmselt  $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} u' + \frac{\partial \varphi}{\partial u'} u'' + \dots$  ja  $\varphi' = Y\varphi$ . Ka punkti  $U$  koordinaatidel pole primid juhuslikud, sest  $u' = Yu, u'' = Yu', \dots$

Õeldut saab väljendada maatriksi  $C$  abil, nimelt  $U' = CU$ . Viimast võrdust võib võtta diferentsiaalvõrrandite süsteemina, mille lahendid avalduvad maatrikskujul  $U_t = e^{Ct}U$ . Lihtne skeem

$$U' = CU \Rightarrow U_t = e^{Ct}U \quad (3)$$

osutub allpool üpris kasulikuks. Joon  $(t, U_t)$ , kus  $U_t = e^{Ct}U$ , on ruumis  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$  vektorvälja  $Y$  trajektoor, mis saab alguse hetkel  $t=0$  punktis  $U$ . Erinevate punktide  $U$  korral moodustavad jooned  $U_t$  algkihil vektorvälja  $Y$  faasiportree. Funktsioonid  $e^{-Ct}U$  on ruumis  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$  vektorvälja  $Y$  invariantid, sest  $(e^{-Ct}U)' = -e^{-Ct}CU + e^{-Ct}U' = 0$ .

Pakume lugejale hea harjutuse. Osatuletiste operaatorid ja koordinaatfunktsioonide diferentsiaalid moodustavad kiht-

ruumis  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$  naturaalse baasi

$$\left( \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u'}, \dots ; dt, du, du', \dots \right),$$

vt. 6.5, lk. 51. Kui asendada siin operaator  $\frac{\partial}{\partial t}$  täisdiferentsiaaloperaatoriga  $Y$ , siis asenduvad diferentsiaalid  $du, du', \dots$  automaatselt vormidega  $\omega^0 = du - u' dt, \omega^1 = du' - u'' dt, \dots$  ja vastavad matriksid on teineteise pöördmatriksid:

$$\left( Y \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u'} \dots \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u'} \dots \right) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ u' & 1 & 0 & . \\ u'' & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} dt \\ \omega^0 \\ \omega^1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ -u' & 1 & 0 & . \\ -u'' & 0 & 1 & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} dt \\ du \\ du' \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Tekib uus, mn. adapteeritud baas

$$\left( Y, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u'}, \dots ; dt, \omega^0, \omega^1, \dots \right).$$

Tähistame  $X_0 = \frac{\partial}{\partial u}, X_1 = \frac{\partial}{\partial u'}, \dots$  ja viime sisse kaks matriksit

$$X = (X_0 \ X_1 \ \dots) \quad \text{ja} \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega^0 \\ \omega^1 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Näidata, et

$$X' = -XC, \quad \omega' = C\omega. \quad (4)$$

Võrrelda seda valemitega (16), lk. 52. Kas ka siin on kasutatav skeem (3)?

Näidata, et

1) vektorväli  $Z = XZ$ , kus  $Z$  on lõpmatu veerumatriks, on invariantne vektorvälja  $Y$  suhtes parajasti siis, kui  $Z' = CZ$ ,

2) lineaarne funktsioon  $F = fU$ , kus  $f$  on lõpmatu reamatriks, on vektorvälja  $Y$  invariant parajasti siis, kui  $f' = -fC$ , sel juhul  $F = KU_{-t}$ , kus  $U_{-t} = e^{-Ct}U$  ja  $K$  on suvaline konstantne reamatriks.



9.2. Harilik diferentsiaalvõrrand pole midagi muud, kui mingi võrrand  $F = 0$ , kus  $F$  on teatud funktsioon  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ . Funktsiooni  $F$  nimetatakse diferentsiaaloperaatoriks.

Võrrandi  $F = 0$  lahendiks nimetatakse funktsiooni  $u_t$ , mis koos oma tuletistega  $u'_t, u''_t, \dots$  rahuldab seda võrrandit samaselt, st. iga  $t$  väärtuse korral.

Funktsioonile  $F$  võib täisdiferentsiaaloperaatorit  $Y$  rakendada mitu korda. Sel juhul kõneldakse võrrandi  $F = 0$  jätkamisest. Öeldakse, et süsteem

$$F = F' = \dots = F^{(k)} = 0 \quad (5)$$

on saadud võrrandi  $F = 0$   $k$ -kordsel jätkamisel. Lahend  $u_t$  peab rahuldama süsteemi (5) iga  $k$  korral, ka erijuhul  $k \rightarrow \infty$ .

Sellele arutlusele võime anda kena geomeetrilise tõlgenduse. Esiteks määrab võrrand  $F = 0$  ruumis  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$  pinna, mida valgustab piki oma trajektoore vektorväli  $Y$ , vt. 3.6, lk. 21. Süsteem (5) tekitab  $k=1,2,3,\dots$  korral stratifikatsiooni  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ . Piirprotsessis, kui  $k \rightarrow \infty$ , eraldub pinnal  $F = 0$  singulaarsus  $A_\infty$ , mida nimetame selle pinna täiskarakteristikuks. Pinna  $A_k$  dimensiooni kohta öeldakse, et tema koodimensioon on  $k+1$ , sest nii palju on süsteemis (5) võrrandeid. Täiskarakteristiku  $A_\infty$  dimensioon võib olla lõplik arv. Kui näiteks  $F = 0$  on  $n$  järku diferentsiaalvõrrand, siis ta sisaldab oluliselt tuletist  $u^{(n)}$ , st.  $\frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} \neq 0$ . Vastavalt teoreemile ilmutamata funktsioonist määrab  $u^{(n)}$  parameetri  $t$  funktsioonina, kusjuures  $n$  suurust  $u, u', \dots, u^{(n-1)}$  jäävad suvalisteks parameetriteks. Esimene jätkamine annab võrrandi  $\dots + \frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} u^{(n+1)} = 0$  (vasakpoolses avaldises on toodud vaid viimane liidetav), mis määrab  $u^{(n+1)}$  parameetri  $t$  funktsioonina, kusjuures, arvestades eelöeldut, suurused  $u, u', \dots, u^{(n-1)}$  jäävad samuti suvalisteks. Analoogiliselt võimaldavad järgmised jätkamised avaldada kõik kõrgemat järku tuletised. Kirjeldatud protsessi tulemusena avaldub lahend reana (1), kus  $n$  esimest kordajat (mis võivad esineda ka järgmistes liikmetes) jäävad suvalisteks parameetriteks. See-ga on täiskarakteristiku  $A_\infty$  dimensiooniks  $n$ . Lahend  $u_t$  koos

oma tuletistega  $u'_t, \dots$  määrab kihtruumis  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$  vektorvälja  $Y$  trajektoori, mis kuulub täiskarakteristikule  $A_\infty$ .

NÄIDE. Teist järku homogeense lineaarvõrrandi

$$u'' + pu' + qu = 0, \quad p, q \in \mathbb{R},$$

koik jätkamised on avaldatavad üheainsa maatriksvõrrandiga

$$(C^2 + pC + qE)U = 0.$$

Täiskarakteristik  $A_\infty$  on kahemootmeline tasand, vektorite  $U$  ja  $U' = CU$  lineaarkate, kus  $U \in \text{Ker}(C^2 + pC + qE)$ .

Vastavalt karakteristliku võrrandi  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  lahendele, mis võivad olla kas reaalsed, st.  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta$ , või kaaskomplekssed, st.  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ , kusjuures  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , saame  $p = -2\alpha$ ,  $q = \alpha^2 \mp \beta^2$  ja

$$[(C - \alpha E)^2 \mp \beta^2 E] U = 0, \quad (C - \alpha E)^2 U = \pm \beta^2 U.$$

Kuna  $e^{(C - \alpha E)t} = e^{-\alpha t} e^{Ct}$ , siis

$$U_t = e^{Ct} U = e^{\alpha t} e^{(C - \alpha E)t} U.$$

Jäab üle arvutada

$$e^{(C - \alpha E)t} U = [E + (C - \alpha E)t \pm \beta^2 \frac{t^2}{2} + \dots] U.$$

Reaalsete lahendite  $\lambda_{1,2}$  korral saame

$$U_t = e^{\alpha t} (U \operatorname{ch}\beta t + \frac{1}{\beta} U^* \operatorname{sh}\beta t),$$

komplekssete lahendite korral

$$U_t = e^{\alpha t} (U \cos\beta t + \frac{1}{\beta} U^* \sin\beta t),$$

kus  $U^* = U' - \alpha U$ . Piirprotsessil  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\frac{\operatorname{sh}\beta t}{\beta} \rightarrow t$ ,  $\frac{\sin\beta t}{\beta} \rightarrow t$ , langevad kokku lahendid, st.  $\lambda_1 = \lambda_2$ , ja

$$U_t = e^{\alpha t} (U + U^* t).$$

Seega on kõik täiskarakteristikule  $A_\infty$  kuuluvad vektorvälja  $Y$  trajektoorid ja samuti kõik diferentsiaalvõrrandi lahendid

leitud.

Tasandil  $A_\infty$  toimuvat võib kirjeldada selle järgi, mida näeme projektsioonis  $uu'u''$ -ruumi tasandil  $u'' + pu' + qu = 0$ . Üldjuhul on funktsiooni

$$W = \begin{vmatrix} u'' & u' \\ u' & u \end{vmatrix}$$

nivoopindadeks  $uu'u''$ -ruumis hüperboloidide parv, koos neile ühise asümptootilise koonusega  $W=0$ . Kuna

$$W' = \begin{vmatrix} u'' & u' \\ u' & u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -pu'' & -qu' & u' \\ -pu' & -qu & u \end{vmatrix} = -pW,$$

siis  $W_t = e^{-pt}W$ , mis tähendab parve imprimitiivsust voo  $a_t = \exp tY$  suhtes, so.  $t$  muutumisel jääb koonus paigale ja ka parv ise jääb muutumatuks, kuid iga hüperboloid võib kas eemalduda koonusest ( $p < 0$ ) või läheneda sellele ( $p > 0$ ). Kui punkt  $U \in A_\infty$  liigub piki vektorvälja  $Y$  trajektoori, siis tema projektsioon  $uu'u''$ -ruumis liigub piki tasandi  $u'' + pu' + qu = 0$  ja vastava hüperboloidi lõikejoont. On kolm võimalust:



1)  $p^2 - 4q > 0$ , tasand lõikab koonust piki kaht sirgjoonset moodustajat ja kahekattelisi hüperboloide piki hüperboole;

2)  $p^2 - 4q < 0$ , tasand lõikab koonust ainult tipus ja ühekattelisi hüperboloide piki ellipseid;

3)  $p^2 - 4q = 0$ , tasand on koonuse puutujaks ja lõikab ühekattelisi hüperboloide piki nende sirgjoonseid moodustajaid.

Arvestades hüperboloidide deformeerimist ( $p \neq 0$ ), saamegi ettekujutuse trajektooride kulgemisest. Näiteks, teisel juhul näitab liikumine piki suurenevaid või kahanevaid ellip-

seid mittestabiilise ( $p < 0$ ) või stabiilise ( $p > 0$ ) fookuse teket, vt. lk. 31. Juhul  $p = 0$  on funktsioon  $W$  vektorvälja  $Y$  invariant ja vaadeldavad trajektoolid on teist järku jooned.

9.3. Mõistagi pole alati võimalik täiskarakteristikut  $A_\infty$  ja temas toimuvat kirjeldada sama ilmekalt, kui õnnestus eelnenud näites. Kuid on olemas veel vormid  $\omega^0, \omega^1, \dots$ , mis võivad anda duaalsest seisukohast samasugust informatsiooni.

Näiteks, esimest järku diferentsiaalvõrrand

$$F(t, u, u') = 0$$

määrab  $tu$ -ruumis pinna. Vormile  $\omega^0 = du - u' dt$  vastab selles ruumis kahemootmeline jaotus (igas punktis vormi  $\omega^0$  annulaator), mida nimetatakse Cartani jaotuseks. Selle jaotuse baasiks võib võtta kaks vektorvälja

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial u'}$$

Moodustame vektorvälja

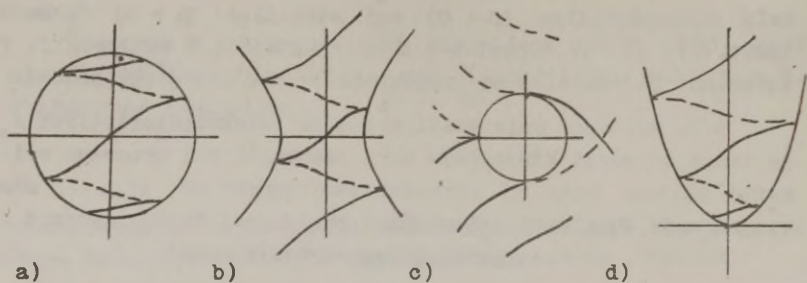
$$Y_F = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_{1F} & Y_{2F} \end{vmatrix}$$

ehk  $Y_F = (Y_{2F})Y_1 - (Y_{1F})Y_2$ , mis ilmselt kuulub Cartani jaotusele, sest ta on  $Y_1$  ja  $Y_2$  lineaarkombinatsioon ja puudutab funktsiooni  $F$  nivoopindu, kuna  $Y_F F = 0$ . Projekteerides vektorvälja  $Y_F$  trajektoolid pinnalt  $F = 0$  piki  $u'$ -telge  $tu$ -tasandile, saame diferentsiaalvõrrandi integraaljooned.

Juhime tähelepanu kahele asjaolule.

1) Valgustades pinda  $F = 0$  piki vektorvälja  $Y_2$  trajektoore (e. piki  $u'$ -teljega paralleelseid sirgeid), tekivad sellel pinnal voldijoon  $Y_{2F} = 0$  ja kortsupunkt(id)  $Y_{2F} = Y_{2F}^2 = 0$ . Kuna võrrand  $F(t, u, u') = 0$  määrab  $tu$ -tasandil isokliinide parve (parve parameetrik on  $u'$ ), siis voldijoon projekteerub isokliinide mähisjooneks ja kortsupunkt(id) sellele mähisjoone iseäraseks (-eiks) punkti(de)ks. Integraaljoontele on mähisjoon tõkkeks ja üldjuhul nad põrkuvad sealt tagasi.

Elie Joseph Cartan, prantsuse matemaatik, 1869 - 1951.



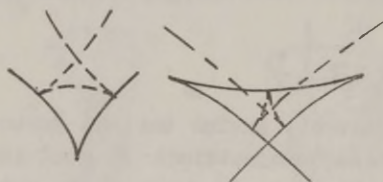
Joonistel on näidatud, kuidas kulgevad integraaljooned, kui pinnaks  $F = 0$  on

a)  $t^2 + u^2 + (u')^2 = 1$  - sfäär;

b)  $t^2 - u^2 + (u')^2 = 1$  - 1-katteline hüperboloid, vaade eest;

c)  $t^2 + u^2 - (u')^2 = 1$  - 1-katteline hüperboloid, vaade ülalt;

d)  $t^2 - u + (u')^2 = 0$  - elliptiline paraboloid.



Kui  $\tilde{t}$ oke moodustab teraviku, siis integraaljoon moodustab paasusaba, kui  $\tilde{t}$ oke moodustab liblika, siis integraaljoon moodustab liblika.

2) Valgustades pinda  $F = 0$  piki vektorvälja  $Y_1$  trajektoore (milleks on sirgjooned, kuna vektorvälja  $Y_1$  invariantideks on  $u'$  ja  $u - u't$ ), tekivad sellel pinnal voldijoon  $Y_1 F = 0$  ja kortsupunkt(id)  $Y_1 F = Y_1^2 F = 0$ . Voldijoon projektsioonil on integraaljoonte kaanupunktid, sest diferentsiaalvõrrandi esimene jätkamine annab  $Y_1 F + u' Y_2 F = 0$  ja  $Y_1 F = 0 \Rightarrow u' = 0$ . Kortsupunktid projekteeruvad isokliinide sirgestuspunktideks. Toepoolest, olgu  $F_1 = \frac{\partial F}{\partial t}$  ja  $F_2 = \frac{\partial F}{\partial u}$ , siis arvestades, et  $Y_1 F = F_1 + u' F_2 = 0$ , saame

$$Y_1^2 F = F_{11} + 2u' F_{12} + (u')^2 F_{22} = -\frac{1}{F_2^2} \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_1 \\ F_{12} & F_{22} & F_2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix},$$

ja seal, kus  $Y_1^2 F = 0$ , on isokliini kõverus null.

*Legendre'i teisendusel*

$\alpha : (t, u, u') \mapsto (\tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{u}')$ , kus  $\tilde{t} = u'$ ,  $\tilde{u} = u - tu'$ ,  $\tilde{u}' = -t$ , muutub naturaalne baas:

$$\begin{bmatrix} d\tilde{t} \\ d\tilde{u} \\ d\tilde{u}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -u' & 1 & -t \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} dt \\ du \\ du' \end{bmatrix},$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{u}} \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{u}'} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial u} \quad \frac{\partial}{\partial u'} \right] \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ t & 1 & -u' \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

diferentsiaalvõrrand  $F = 0$  saab teise kuju  $\tilde{F} = 0$ , kus

$$\tilde{F} = F \circ \alpha^{-1}, \quad \text{st. } \tilde{F}(\tilde{t}, \tilde{u}, \tilde{u}') = F(-\tilde{u}', \tilde{u} - \tilde{t}\tilde{u}', \tilde{t}),$$

ja vektorväljad  $Y_1, Y_2$  teisenevad vektorväljadeks  $\tilde{Y}_1 = Y_2$ ,  $\tilde{Y}_2 = -Y_1$ , st.

$$(\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2) = (Y_1, Y_2) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pind, Cartani jaotus ja vektorväli  $Y_F$  ei muutu:  $\tilde{\omega}^0 = \omega^0$ ,

$\tilde{Y}_F = Y_F$ . Vaatleme projektsioone

$$\pi : (t, u, u') \mapsto (t, u) \quad \text{ja} \quad \tilde{\pi} : (t, u, u') \mapsto (u, u').$$

Vektorvälja  $Y_F$  trajektoorid projekteeruvad

$$\begin{aligned} \pi \text{ korral d.v. } F = 0 & \text{ integraaljoonteks ja} \\ \tilde{\pi} \text{ korral d.v. } \tilde{F} = 0 & \text{ integraaljoonteks.} \end{aligned}$$

Voldijoon  $F = Y_2 F = 0$  projekteerub

$$\begin{aligned} \pi \text{ korral d.v. } F = 0 & \text{ integraaljoonte tükkeks ja} \\ \tilde{\pi} \text{ korral jooneks, kus d.v. } F = 0 & \text{ integraaljoontel on} \\ & \text{kaanupunktid.} \end{aligned}$$

---

Adrien-Marie Legendre, prantsuse matemaatik, 1752 - 1833.

Voldijoon  $F = Y_1 F = 0$  projekteerub  
 $\pi$  korral jooneks, kus d.v.  $F = 0$  integraaljoontel on  
 kaanupunktid, ja  
 $\tilde{\pi}$  korral d.v.  $\tilde{F} = 0$  integraaljoonte tükkeks.

Kortsupunktid  $F = Y_2 F = Y_2^2 F = 0$  projekteeruvad  
 $\pi$  korral d.v.  $F = 0$  integraaljoonte tükke isearas-  
 teks punktideks ja  
 $\tilde{\pi}$  korral d.v.  $\tilde{F} = 0$  isokliinide sirgestuspunktideks.

Kortsupunktid  $F = Y_1 F = Y_1^2 F = 0$  projekteeruvad  
 $\pi$  korral d.v.  $F = 0$  isokliinide sirgestuspunktideks ja  
 $\tilde{\pi}$  korral d.v.  $\tilde{F} = 0$  integraaljoonte tükke isearasteks  
 punktideks.

Kõik see võimaldab kvalitatiivselt kirjeldada diferent-  
 siaalvõrrandi integraaljoonte käitumist.

#### 9.4. Teist järku diferentsiaalvõrrand

$$F(t, u, u', u'') = 0$$

määrab  $tu u''$ -ruumis kolmemootmelise (hüper-)pinna. Siis on  
 Cartani jaotus, kui vormide  $\omega^0 = du - u' dt$ ,  $\omega^1 = du' - u'' dt$  an-  
 nullaator, kahemootmeline. Tema baasi moodustavad vektor-  
 väljad

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial u} + u'' \frac{\partial}{\partial u'}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial u''}.$$

Pinnal  $F = 0$  tekib vektorväli  $Y_F = (Y_2 F) Y_1 - (Y_1 F) Y_2$ .

Koos vektorvälja  $Y_F$  trajektoorigega projekteerub pind  
 $F = 0$  piki vektorvälja  $Y_2$  trajektoore  $tu u''$ -ruumi. Voldipind  
 $F = Y_2 F = 0$  projekteerub  $Y_F$  trajektoore projektsioonide  
 (kahemootmeliseks) tükkeks. Kortsujoon  $F = Y_2 F = Y_2^2 F = 0$  pro-  
 jekteerub selle tükkepinnaga tagasipöördeservaks ja paasusaba-  
 punktid  $F = Y_2 F = Y_2^2 F = Y_2^3 F = 0$  projekteeruvad selle tagasi-  
 pöördeserva isearasteks punktideks.

Nüüd võib kirjeldada ka diferentsiaalvõrrandi  $F = 0$   
 integraaljooni  $tu$ -tasandil, kui vektorvälja  $Y_F$  trajektoore  
 projektsioone kahekordsel projekteerimisel:

$$(t, u, u', u'') \mapsto (t, u, u') \mapsto (t, u).$$

9.5. Süsteem kahest esimest järku diferentsiaalvõrrandist

$$\begin{cases} F(t, u, v, u', v') = 0 \\ G(t, u, v, u', v') = 0 \end{cases}$$

määrab 5-mõõtmelises  $tuvu'v'$ -ruumis kolmemõõtmelise pinna. Sel juhul on Cartani jaotus, kui vormide  $\omega^1 = du - u'dt$ ,  $\omega^2 = dv - v'dt$  annulaator, kolmemõõtmeline ja tema baasi moodustavad vektorväljad

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial u'}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial v'}.$$

Tekib vektorväli

$$Y = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix}, \quad F_i = Y_i F, \quad G_i = Y_i G, \quad i=1,2,3,$$

mis kuulub Cartani jaotusele ja on pinna puutujaks. Tema trajektoride projektsioonid  $tuv$ -ruumi on süsteemi integraaljooned. Kahemõõtmeline voldipind

$$\begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix} = 0$$

projekteerub integraaljoonte tõkkeks. Järgmised singulaarsused on määratud võrranditega

$$Y \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix} = 0, \quad Y^2 \begin{vmatrix} F_2 & F_3 \\ G_2 & G_3 \end{vmatrix} = 0.$$



## § 10. Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid

10.1. Eelmises paragrahvis oli  $\tilde{u}$  sõltumatu parameeter  $t$  ainus ja me tõlgendasime seda ajana. Nüüd olgu ühe parameetri asemel  $n$  parameetrit

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_n),$$

st. olgu aeg  $n$ -mõõtmeline (miks mitte?). Tundmatu funktsioon  $u$  sõltugu nendest muutujatest. Osatuletised tähistame alumiste indeksitega:

$$u_{,1} = \frac{\partial u}{\partial t_1}, \quad u_{,1j} = \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_j}, \quad \dots$$

Vaatleme  $n$ -mõõtmelise baasiga kihtruumi

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

kus koordinaatideks on  $(t_1, u, u_{,1}, u_{,1j}, \dots)$ , ja defineerime täisdiferentsiaaloperaatorid

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + u_{,1} \frac{\partial}{\partial u} + u_{,1j} \frac{\partial}{\partial u_{,j}} + \dots$$

Viimased moodustavad  $n$ -mõõtmelise integreeruva (!) jaotuse, mille integraalpindadeks on aditiivse rühma  $\mathbb{R}^n$  orbiidid ruumis  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\infty$ . Täpsustame seda mõtet.

Olgu mingis vektorruumis  $V$  antud  $n$  omavahel kommuteeruvat lineaaroperaatorit (afiinorit)

$$C = (C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Moodustame iga  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$  korral uue operaatori

$$tC = t_1 C_1 + t_2 C_2 + \dots + t_n C_n.$$

Kasutame multiindekseid  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  ja vastavaid tähistusi

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

(arvu  $|\alpha|$  nimetatakse multiindeksi  $\alpha$  kaaluks),

$$t^\alpha = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_n^{\alpha_n}, \quad C^\alpha = C_1^{\alpha_1} C_2^{\alpha_2} \dots C_n^{\alpha_n}.$$

Iga täisarvu  $k$  korral kehtib võrdus

$$\frac{(tC)^k}{k!} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{t^\alpha}{\alpha!} C^\alpha,$$

kus parempoolses avaldises on mõeldud summeerimist üle kõikide multiindeksite  $\alpha$  kaaluga  $k$ . Näiteks, kui  $n = 2$ , siis kaalule  $k = 1$  vastab kaks multiindeksit  $(1,0)$ ,  $(0,1)$  ja summas on kaks liidetavat  $t_1 C_1 + t_2 C_2$ , kaalule  $k = 2$  vastab kolm multiindeksit  $(2,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(0,2)$  ja summas on kolm liidetavat

$$\frac{(t_1 C_1 + t_2 C_2)^2}{2} = \frac{t_1^2 C_1^2}{2} + t_1 t_2 C_1 C_2 + \frac{t_2^2 C_2^2}{2} \quad \text{jne.}$$

Eksponentsiaal  $e^{tC}$  on summade  $\frac{(tC)^k}{k!}$  summa üle kõikide kaalude  $k=0,1,2,\dots$ , st.

$$e^{tC} = \sum_{|\alpha|} \frac{t^\alpha}{\alpha!} C^\alpha.$$

Ilmselt on  $t \mapsto e^{tC}$  aditiivse rühma  $\mathbb{R}^n$  monomorfne kujutus vektorruumi  $V$  teisenduste rühma

$$v \mapsto v_t = e^{tC} v, \quad \forall v \in V.$$

Täisdiferentsiaaloperaatorid

$$Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

kommuteeruvad omavahel ja seega on võimalik samuti kõnelda eksponentsiaalset

$$e^{tY} = \sum_{|\alpha|} \frac{t^\alpha}{\alpha!} Y^\alpha.$$

Ruumi  $V$  moodustavad kõik siledad funktsioonid  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  ja valemit  $v_t = e^{tC} v$  tuleb mõista järgmiselt:

$$f_t = e^{tY} f = \sum_{|\alpha|} \frac{t^\alpha}{\alpha!} Y^\alpha f.$$

See valem kehtib muidugi ka koordinaatfunktsioonide  $U=(u, u_1, u_{1j}, \dots)$  korral:

$$U_t = e^{tY}U. \quad (6)$$

Saame valemi (3) üldistuse, mis ühtib viimasega väärtusel  $n=1$ . Koos  $n$ -mootmeliste orbiitidega igas kihis tekivad ülalmainitud jaotuse  $n$ -mootmelised integraalpinnad kihiruumis  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{\infty}$ .

Kommenteerime valemit (6) juhul  $n=2$ . Olgu  $U_1 = Y_1 U$ ,  $U_{1j} = Y_1 Y_j U, \dots$ , siis

$$U_t = U + U_1 t_1 + U_2 t_2 + \frac{1}{2} (U_{11} t_1^2 + 2U_{12} t_1 t_2 + U_{22} t_2^2) + \dots$$

Sümboleid  $U, U_1, U_{1j}$  on otstarbekas tõlgendada lõpmatut järku 2-mootmeliste (üldjuhul  $n$ -mootmeliste) maatriksitena

$$U = \begin{bmatrix} u & u_2 & u_{22} \\ u_1 & u_{12} & \\ u_{11} & & \end{bmatrix}, \quad U_1 = \begin{bmatrix} u_1 & u_{12} & u_{122} \\ u_{11} & u_{112} & \\ u_{111} & & \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} u_2 & u_{22} & u_{222} \\ u_{12} & u_{122} & \\ u_{112} & & \end{bmatrix},$$

$$U_{11} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{112} \\ u_{111} & \end{bmatrix}, \quad U_{12} = \begin{bmatrix} u_{12} & u_{122} \\ u_{112} & \end{bmatrix}, \quad U_{22} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{222} \\ u_{122} & \end{bmatrix}.$$

Igas maatriksis üleminekul suvaliselt reall (veerult) järgmisele reale (veerule) lisandub selle rea (veeru) igale elemendile uus indeks 1 (vastavalt 2). Maatriksi  $U_1$  saamiseks võib lähtuda maatriksist  $U$  ja jätta ära tema esimene rida, kui  $l=1$ , või esimene veerg, kui  $l=2$ ; maatriksi  $U_{1j}$  saamiseks tuleb maatriksis  $U_1$  ära jätta tema esimene rida, kui  $j=1$ , või esimene veerg, kui  $j=2$ , jne.

Seega on maatriksi  $U_t$  esimene loode-element

$$u_t = u + u_1 t_1 + u_2 t_2 + \frac{1}{2} (u_{11} t_1^2 + 2u_{12} t_1 t_2 + u_{22} t_2^2) + \dots,$$

mis oma kujult pole midagi muud, kui funktsiooni  $u(t_1, t_2)$  Maclaurini reaksarendus. Teised  $U_t$  elemendid on selle funktsiooni vastavad osatuletised.

Olgu nüüd kihtruumis  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  antud  $p$  funktsiooni (e. diferentsiaaloperaator)

$$F = (F^1, F^2, \dots, F^p).$$

Diferentsiaalvõrrandi  $F = 0$  all mõistame süsteemi  $F^\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ . Võrrandit  $F = 0$  võib jätkata mitu korda. Näiteks, esimesel jätkamisel lisandub süsteemile  $F = 0$  süsteem  $YF = 0$ , kus  $YF$  all mõistame kõiki  $np$  tuletist  $Y_\alpha F^\alpha$ . Kõikvõimalikud jätkamised määravad võrrandi  $F = 0$  täiskarakteristiku.

Võrrandi  $F = 0$  lahendiks on funktsioon  $u_t$ , mis koos oma osatuletistega rahuldab kõiki jätkamisi, st. moodustab kihtruumi  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  loike, ülalmainitud jaotuse integraalpinna, mis kuulub võrrandi täiskarakteristikule.

10.2. Lihtsaim näide:  $Y^{k+1}U = 0$ . Valemi (6) parempoolne avaldis on lõplik summa. Kõik osatuletised  $u_{i_1 \dots i_s}$ , kui  $s > k$ , võrduvad nulliga. Lahendiks on  $n$ -astme polünoom

$$u_t = u + u_1 t_1 + \dots + \frac{1}{k!} u_{i_1 \dots i_k} t_{i_1} \dots t_{i_k}.$$

Olgu  $n = k = 2$ , siis

$$U_t = (E + tY + \frac{t^2}{2} Y^2)U$$

ja 6-mõõtmelises kihis, kus koordinaatideks on  $(u, u_1, u_{1j})$ , tekivad 2-mõõtmelised orbiidid. Järelikult, invariante peaks olema  $6-2=4$ ; neist kolm on osatuletised  $u_{11}$ ,  $u_{12}$ ,  $u_{22}$  ja neljandaks osutub determinant

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 2u \end{vmatrix}.$$

Veenduda, et tõepoolest

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 2u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & u_{12} & u_1 \\ 0 & u_{22} & u_2 \\ u_{11} & u_2 & 2u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & 0 & u_1 \\ u_{12} & 0 & u_2 \\ u_1 & u_{21} & 2u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 \\ u_1 & u_2 & u_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Näidata, millised on invariandid siis, kui  $n = 3$ ,  $k = 2$ . Aga kui  $k = 3$ ? Viimane küsimus puudutab kolmanda astme polünoome ja üldjuhul, kui  $n > 1$ , puudub vastus siiani. Ilmselt on invariandid olemas iga  $n$  ja  $k$  korral.

10.3. Kui harilikel diferentsiaalvõrranditel eksisteerivad lahendid alati (muidugi tingimusel, et funktsioon  $F$  on diferentseeruv ja  $\frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} \neq 0$ ) ja nad sõltuvad  $n$  suvalisest parameetrist (st. taiskarakteristik on  $n$ -mõõtmeline), siis osatuletistega diferentsiaalvõrrandi puhul lahendid ei tarvitse eksisteerida ja kui nad eksisteerivadki, siis tavaliselt funktsionaalse suvaga ( $\infty$  parameetrit).

Võtame Laplace'i võrrandi  $u_{11} + u_{22} = 0$  ( $n=2$ ). Taiskarakteristik on määratud järgmiselt:

$$(Y_1^2 + Y_2^2)U = 0.$$

Kui maatriksis  $U$ , vt. lk. 114, jätta suvaliseks kaks esimest veergu, siis kõik teised veerud on määratud üheselt ja üldlahend avaldub reana

$$u_t = u + u_1 t_1 + u_2 t_2 + \frac{1}{2}[u_{11}(t_1^2 - t_2^2) + 2u_{12}t_1 t_2] + \\ + \frac{1}{6}[u_{111}(t_1^3 - 3t_1 t_2^2) + u_{112}(3t_1^2 t_2 - t_2^3)] + \dots$$

Lahendite ruumi baasi moodustavad harmoonilised funktsioonid

$$1, t_1, t_2, t_1^2 - t_2^2, 2t_1 t_2, t_1^3 - 3t_1 t_2^2, 3t_1^2 t_2 - t_2^3, \dots,$$

ehk polaarkoordinaatides (kasutades üleminekuvalemeid  $t_1 = \rho \cos\varphi$ ,  $t_2 = \rho \sin\varphi$ ):

$$1, \rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, \rho^2 \cos 2\varphi, \rho^2 \sin 2\varphi, \rho^3 \cos 3\varphi, \rho^3 \sin 3\varphi, \dots$$

Funktsionaalse suva võib ära kasutada rajaülesannetes. Näiteks kui ringjoonel  $\rho = R$  on antud suvaline funktsioon esituna Fourier reana

Jean-Baptiste-Joseph de Fourier, prantsuse matemaatik, 1768-1830.

Pierre Simon Laplace, prantsuse matemaatik, 1749 - 1827.

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

siis ringis  $\rho < R$  avaldub lahend reana

$$u(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

kus kordajad  $a_k, b_k$  on määratud funktsiooniga  $f(\varphi)$  (nn. Dirichlet' ülesanne).

10.4. Olgu antud süsteem

$$\begin{cases} F(u_{11}, u_{12}, u_{22}) = 0 \\ G(u_{11}, u_{12}, u_{22}) = 0, \end{cases}$$

kus  $n = 2$  ja tundmatuks funktsiooniks on  $u(t_1, t_2)$ . Suvaliste  $F$  ja  $G$  korral lahend ei eksisteeri. Toepoolest, olgu  $F_1, F_2, F_3$  ja  $G_1, G_2, G_3$  funktsioonide  $F$  ja  $G$  osatuletised vastavalt muutujate  $u_{11}, u_{12}, u_{22}$  järgi; siis süsteemi esimene jätkamine annab

$$\begin{cases} F_1 u_{111} + F_2 u_{112} + F_3 u_{122} & = 0 \\ F_1 u_{112} + F_2 u_{122} + F_3 u_{222} & = 0 \\ G_1 u_{111} + G_2 u_{112} + G_3 u_{122} & = 0 \\ G_1 u_{112} + G_2 u_{122} + G_3 u_{222} & = 0 \end{cases}$$

ja vaid tingimusel

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & 0 \\ 0 & F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 & 0 \\ 0 & G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = 0$$

võib öelda, et süsteem on involutiivne, st. lahend eksisteerib formaalselt.

Näiteks, kahest süsteemist

---

Peter Gustav Lejeune Dirichlet, saksa matemaatik, 1805-1859.

$$\begin{cases} u_{11}^3 - 3u_{22} = 0 \\ u_{11}^2 - 2u_{12} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{11} + u_{22} = 0 \\ u_{12} = 0 \end{cases}$$

esimene on involutiivne, teine aga mitte.

Antud süsteem määrab ilmselt  $u_{11}u_{12}u_{22}$ -ruumis mingi joone. Kui see joon oleks esitatud parameetriliste võrranditega

$$u_{11} = \varphi(t), \quad u_{12} = \psi(t), \quad u_{22} = \chi(t),$$

siis involutiivsuse tingimus avalduks kujul

$$\begin{vmatrix} \varphi' & \psi' \\ \psi' & \chi' \end{vmatrix} = 0.$$

See tuleneb eelmisest tingimusest, kui arvestada, et

$$F = u_{11} - \varphi \circ \chi^{-1}(u_{22}), \quad G = u_{12} - \psi \circ \chi^{-1}(u_{22}).$$

Tingimus  $\varphi' \chi' - (\psi')^2 = 0$  tähendab, et joone  $(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$  puutujavektor kuuluks igas punktis nn. Monge'i koonusele.

Üldiselt kannab formaalse integreeruvuse eest vastutust ja annab vastavat informatsiooni antud diferentsiaalvõrrandi (süsteemi) sümbol. Sümbolite uurimine viiks meid juba liiga spetsiaalsesse valdkonda.

## § 11. Pindade valgustamine

Lõpetame peatuki ja brošüüri efektse teemaga, mis eeldab meie teadmisi nii algebrast, geometriast kui diferentsiaalvõrranditest.

11.1 Olgu  $n$ -ruumis  $\mathbb{R}^n$  antud pind  $\varphi=0$ . Selle pinna valgustamisel piki vektorvälja  $X$  trajektoore on oluline uurida koos funktsiooniga  $\varphi$  ka tema tuletisi. Tähistame

$$u = \varphi, \quad u' = X\varphi, \quad u'' = X^2\varphi, \dots \quad (7)$$

Gaspard Monge, prantsuse matemaatik, 1746 - 1818.

David Hilbert, saksa matemaatik, 1862 - 1943.

Süsteem (7) määrab kujutuse  $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$ , kus  $\mathbb{R}$  on  $t$ -telg, või lihtsalt

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\infty,$$

sest  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on samasuskujutus  $\text{id}_{\mathbb{R}}$ . Kujutus  $T\phi$  teisendab vektorvälja  $\frac{\partial}{\partial t} + X$  ruumist  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  taisdiferentsiaaloperaatoriks  $Y$ , sest  $u \circ \phi = \phi$  tõttu  $(Yu) \circ \phi = X(u \circ \phi)$ ,  $(Yu') \circ \phi = X(u' \circ \phi)$ , ... Seega iga seos funktsiooni  $\phi$  ja tuletiste  $X\phi$ ,  $X^2\phi$ , ... vahel kandub kihtruumi  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$  diferentsiaalvõrrandiks, millel on oma invariandid. Olgu meil  $p$  sellist invarianti, mis määravad ühtlasi kujutuse  $J : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Siis kompositsioon annab  $J \circ \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  vektorvälja  $X$   $p$  invarianti, ja kui on teada vektorvälja  $X$   $n-1$  sõltumatut invarianti  $I^1, \dots, I^{n-1}$ , mis määravad ühtlasi mingi kujutuse  $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  ( $\mathbb{R}^n$  projekteerimise piki vektorvälja  $X$  trajektoore ekraanile  $\mathbb{R}^{n-1}$ ), siis peaks eksisteerima selline kujutus  $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ , et järgmine diagramm oleks kommutatiivne:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^\infty \\ I \downarrow & & \downarrow J \\ \mathbb{R}^{n-1} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{R}^p \end{array} \quad (8)$$

Teisiti öeldes, invariandid  $J \circ \phi$  peaksid avalduma baasiinvariantide  $I$  kaudu. Põhimõtteliselt on see võimalik, kuid praktiliselt võib kujutuse  $\phi$  leidmine osutuda komplitseerituks.

Algebraaliste invariantide  $I$  ja  $J$  korral on kujutus  $\phi$  samuti algebraalne. See väide on seotud tuntud Hilberti probleemiga ja järeldub vastavast teoreemist algebraaliste invariantide baasi kohta.

Toome näiteid.

11.1.1. Näites 7.6.1, lk. 82, moodustavad diagrammi (8) kujutused

$$\begin{array}{ccc} (x, y, z) & \xrightarrow{\phi} & (u, u', u'', \dots) \\ I \downarrow & & \downarrow J \\ (U, V) & \xrightarrow{\psi} & \delta \end{array}$$



$$\text{kus } u \circ \phi = \varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^2 - 1), \quad u' \circ \phi = \varphi' = x - kz,$$

$$u'' \circ \phi = 1 - k^2, \quad u''' \circ \phi = 0, \dots,$$

$$U \circ I = kx - z, \quad V \circ I = y,$$

$$\delta \circ J = (u')^2 - 2uu'',$$

$$\delta \circ J\phi = (x - kz)^2 - (x^2 + y^2 - z^2 - 1)(1 - k^2),$$

$$\delta \circ \psi = U^2 + (1 - V^2)(1 - k^2).$$

Invariant  $\delta$  rahuldab kahte tingimust, vt. 7.6, lk. 82:

$$1) (\delta \circ J)' = 0, \quad 2) u = u' = 0 \Rightarrow \delta \circ J = 0. \quad (9)$$

Järelikult,

1) pind  $\delta \circ J\phi = 0$  koosneb vektorvälja  $X$  trajektooridest,

2) pinna  $\varphi = 0$  voldijoon kuulub pinnale  $\delta \circ J\phi = 0$  ja tema vari on määratud UV-tasandil võrrandiga  $\delta \circ \psi = 0$ .

Ühekattelise hüperboloidi valgustamisel on tema varjujooneks ekraanil kas ellips,  $|k| > 1$ , või hüperbool,  $|k| < 1$ .

11.1.2. Samasugune olukord tekib ruumis  $\mathbb{R}^4$  hüperkvadriku  $\varphi = 0$ , kus  $\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 \pm z^2 - t^2 - 1)$ , valgustamisel piki vektorvälja  $X(1, 0, 0, k)$  trajektoore, millel on kolm invarianti  $U = y$ ,  $V = z$ ,  $W = kx - t$ . Sel korral  $u \circ \phi = \varphi$ ,  $u' \circ \phi = x - kt$ ,  $u'' \circ \phi = 1 - k^2$ ,  $u''' \circ \phi = 0, \dots$

$$\delta \circ J = (u')^2 - 2uu'', \quad \delta \circ J\phi = (x - kt)^2 - (1 - k^2)(x^2 + y^2 \pm z^2 - t^2 - 1),$$

$$\delta \circ \psi = W^2 - (1 - k^2)(U^2 \pm V^2 - 1).$$

Kvadriku varju piirdeks 3-mootmelisel UVW-ekraanil on plussmärgi korral ühekatteline hüperboloid, kui  $|k| < 1$ , või ellipsoid, kui  $|k| > 1$ , miinusmärgi korral aga vastavalt kas kahe- või ühekatteline hüperboloid.

Väartusel  $|k| = 1$  toimub bifurkatsioon.



Kui  $|k|$  ületab kasvades väärtuse 1, siis esimesel juhul kattub ringjoone  $U^2 + V^2 = 1$  välispiirkond tasandil  $W = 0$  ühekattelise hüperboloidiga ja sisepiirkonnast paisub välja ellipsoid; teisel juhul kattub hüperbooli  $U^2 - V^2 = 1$  välispiirkond kahekattelise hüperboloidiga ja sisepiirkonnast paisub välja ühekatteline hüperboloid.

11.1.3. On mõeldav sama hüperkvadriku valgustamine ruumis  $\mathbb{R}^4$  kahemootmeliste kiirtega, mis on määratud kahe vektorväljaga  $X_1(1, 0, k, 0)$ ,  $X_2(1, 0, 0, l)$ , või nende invariantidega  $U = y$ ,  $V = klx - lz - kt$ . Sel juhul tuleb diskriminandi  $\begin{vmatrix} u''u' \\ u'2u \end{vmatrix}$  asemel kasutada determinanti 10.2, lk. 115, mis seda ilmselt üldistab. Kuna  $\varphi_1 = x \pm kz$ ,  $\varphi_2 = x - lt$ ,  $\varphi_{11} = 1 \pm k^2$ ,  $\varphi_{12} = 1$ ,  $\varphi_{22} = 1 - l^2$ , siis UV-tasandil saame võrrandi

$$A(U^2 - 1) \mp V^2 = 0,$$

kus  $A = (1 \pm k^2)(1 - l^2) - 1$ . Varju piirdeks on UV-tasandil kas ellips või hüperbool. Väärtusel  $A = 0$  toimub bifurkatsioon.

11.1.4. Kolmandat järku pindade valgustamisel  $xyz$ -ruumis võime näha voldijoontel ka kortsupunkte. Toimugu valgustamine piki vektorvälja  $X(1, 0, k)$  trajektoore. Invariantideks on  $U = kz - x$ ,  $V = y$ . Vaatleme funktsiooni

$$\varphi = \frac{1}{6} (x^3 \mp 3xy^2 - 6z).$$

Miinusmärgi korral määrab võrrand  $\varphi = 0$  nn. ahvisadula, plussmärgi korral nimetame seda pinda tooliks. Kuna

$$\varphi' = \frac{1}{2} (x^2 \mp y^2 - 2k), \quad \varphi'' = x, \quad \varphi''' = 1,$$

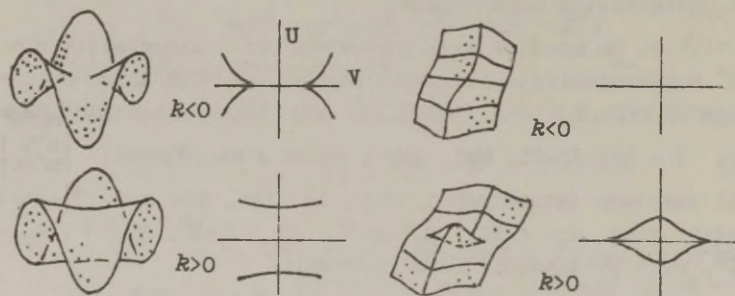
siis on tegemist diferentsiaalvõrrandiga  $u''' = 1$ , mille invariantideks on

$$D_1 = u - u'u'' + \frac{1}{3} (u''')^3, \quad D_2 = u' - \frac{1}{2} (u''')^2,$$

vt. lk. 32. Voldijoone määramiseks need invariantid ei sobi,

sest kumbki neist ei rahulda teist tingimust (9). Küll aga sobib diskriminant  $D = (3D_1)^2 + (2D_2)^3$ . Saame

$$D_1 \circ \psi = U, \quad D_2 \circ \psi = \mp \frac{v^2}{2} - k, \quad D \circ \psi = 9U^2 - (2k \pm v^2)^3.$$



Võrrand  $D \circ \psi = 0$  e.

$$9U^2 = (2k \pm v^2)^3$$

määrab UV-tasandil voldijoon kujutise (6. järku joone). Tingimusel  $D_1 = 0$  või  $D_2 = 0$  (sest  $u'' = 0$ ) eralduvad voldijoonel kortsupunktid (stratifikatsioon  $A_1 \supset A_2$ ), mille kujutised osutuvad teravikupunktideks. Näiteks ahvisadula korral koosneb voldijoon kujutis kahest harust teravikega ( $k < 0$ ), või ilma ( $k > 0$ ). Tooli korral võib voldijoon puududa ( $k < 0$ ), või kui see olemas on, siis tema kujutis moodustab huuled, nagu näidatud joonisel, kahe teravikuga huulenurkades.

11.1.5. Olgu  $xy$ -tasandil antud vektorväli  $X(x-a, y-b)$ , mille trajektoorid on fikseeritud punktist  $(a, b)$  lähtuvad sirgjooned. Võib konelda selles punktis asuvast valgusallikast.

Valgustame teist järku joont  $\varphi = 0$  üldjuhul, kus

$$\varphi = \frac{1}{2} (x \ y \ 1) \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sellises esituses on hõlbus leida tuletised

$$X\varphi = (x \ y \ 1) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X^2\varphi = X\varphi + (x-a \ y-b \ 0) \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Järgmisel diferentseerimisel leiame

$$X^3\varphi = X^2\varphi + 2(X^2\varphi - X\varphi),$$

st. tegemist on diferentsiaalvõrrandiga

$$u''' - 3u'' + 2u' = 0,$$

millel on kaks invarianti  $u'' - 3u' + 2u$  ja  $(u'' - 2u')^2 (u' - u)^{-1}$ . Voldijoone määramiseks need ei sobi, kuid sobib nende vahe, vt. teine tingimus (9), lk. 120. See aga annab meile võrrandi  $(u'' - u')(u'' - 3u' + 2u) - (u'' - 2u')^2 = 0$ , ehk

$$2u(u'' - u') - (u')^2 = 0.$$

Näiteks, ringjoone valgustamisel  $\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - r^2)$  ja

tulemuseks on ruutvõrrand

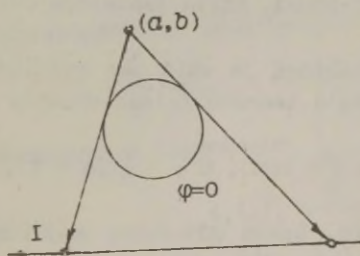
$$(a^2 - r^2)I^2 - 2abI + b^2 - r^2 = 0,$$

kus  $I = \frac{y-b}{x-a}$  on vektorvälja  $X$

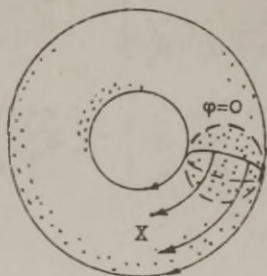
invariant. Selle lahendid on tingimusel  $a^2 + b^2 - r^2 > 0$  (st. kui punkt  $(a, b)$  on väljaspool ringjoont) reaalsed ja erinevad ning määravad  $I$ -teljel vasta-

valt kaks punkti, milleks on ringjoone varju piirdepunktid.

Küsimus lugejale: kuidas toimub 2. ja 3. järku pindade valgustamine ruumis, kui valgusallikas asub punktis  $(a, b, c)$ ?



11.1.6. Valguskiired võivad olla kõverad, nt. ringjooned, vektorvälja  $X(-y, x, 0)$  trajektoorid  $xyz$ -ruumis.



Sfääri

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

valgustamisel saame diferentsiaalvorrandi  $u'' + u' = 0$  ja sobiva invariandi  $(u'')^2 + (u')^2 - (u'' + u')^2$ , mis annab otsekõrre teoori vorrandi

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

11.2. Diagramm (8) annab meile suurepärase võimaluse uurida Viète'i kujutisi. Võtame näiteks kuuppolünoomi

$$u_t = u + u' t + u'' \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}.$$

Vastavalt Viète'i teoreemile avalduvad kordajad  $u$ ,  $u'$ ,  $u''$  polünoomi juurte  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  kaudu valemitega

$$\phi : u = -\frac{1}{6} t_1 t_2 t_3, \quad u' = \frac{1}{6} (t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2), \quad u'' = -\frac{1}{3} (t_1 + t_2 + t_3).$$

Kui siin  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  on reaalarvud, siis on seega defineeritud  $t_1 t_2 t_3$ -ruumi kujutus ruumi  $u' u''$ -ruumi, mille tähistame sümbooliga  $\phi$ .

Kui kaks juurt on kaaskomplekssed ja vaid üks reaalne:  $t_{1,2} = \alpha + \beta i$ ,  $t_3 = \tau$ , siis annab Viète'i teoreem teised valemid

$$\phi : u = -\frac{1}{6} (\alpha^2 + \beta^2) \tau, \quad u' = \frac{1}{6} (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\tau), \quad u'' = -\frac{1}{3} (2\alpha + \tau),$$

kus  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\tau$  on ikkagi reaalarvud. Saame  $\alpha\beta\tau$ -ruumi kujutuse  $u' u''$ -ruumi, mille tähistame sümbooliga  $\phi_1$ .

Kujutusi  $\phi$  ja  $\phi_1$  nimetame Viète'i kujutusteks.

---

François Viète, algebra isa, prantsuse matemaatik.  
1540 - 1603.

Pangem tähele, et  $t_1, t_2, t_3$ -ruumis on olemas vektorväli  $X(-1, -1, -1)$ , mille suhtes funktsiooni  $\varphi = -\frac{1}{6}t_1 t_2 t_3$  tuletised on:

$$X\varphi = \frac{1}{6}(t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2), \quad X^2\varphi = -\frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3), \quad X^3\varphi = 1,$$

ja  $\alpha\beta\tau$ -ruumis on vektorväli  $X_1(-1, 0, -1)$ , mille suhtes funktsiooni  $\varphi_1 = \frac{1}{6}(\alpha^2 + \beta^2)\tau$  tuletised on:

$$X_1\varphi_1 = \frac{1}{6}(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\tau), \quad X_1^2\varphi_1 = -\frac{1}{3}(2\alpha + \tau), \quad X_1^3\varphi_1 = 1.$$

Mõlemal juhul oleme samasugustes tingimustes, nagu olime näites 11.1.4.

On võimalik avaldada vektorvälja  $Y(u', u'', 1)$  invariantid  $D_1, D_2$ . D nii vektorvälja  $X$  kui ka vektorvälja  $X_1$  invariantide kaudu. Valime vektorvälja  $X$  invariantideks suurused  $x, y$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

ning vektorvälja  $X_1$  invariantideks  $\xi, \eta$ :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \tau \end{pmatrix}.$$

Samalaadset on defineeritud kaks äärmist kujutust

$$I : (t_1, t_2, t_3) \mapsto (x, y) \quad \text{jä} \quad I_1 : (\alpha, \beta, \tau) \mapsto (\xi, \eta)$$

kanekordses diagrammis

$$\begin{array}{ccccc} t_1, t_2, t_3 & \xrightarrow{\Phi} & u, u', u'' & \xleftarrow{\Phi_1} & \alpha\beta\tau \\ I \downarrow & & \downarrow J & & \downarrow I_1 \\ x, y & \xrightarrow{\Psi} & D_1, D_2 & \xleftarrow{\Psi_1} & \xi, \eta \\ & & \downarrow D & & \end{array}$$

Üllatavalt summeerilisteks kujunevad alumised nooled

$$\Psi : D_1 = -\frac{1}{3} x(x^2 - 3y^2), D_2 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2), D = -y^2(3x^2 - y^2)^2;$$

$$\Psi_1 : D_1 = -\frac{1}{3} \xi(\xi^2 + 3\eta^2), D_2 = -\frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), D = \eta^2(3\xi^2 + \eta^2)^2.$$

Tõepoolest, kui  $t_1, t_2, t_3$  on polünoomi  $u_t$  juured, siis teostades selles polünoomis nn. *Tschirnhausi teisenduse*  $t = s - u$ , saame polünoomi  $D_1 + D_2 s + s^3/6$ , mille juurteks on  $t_1 + u$ ,  $t_2 + u$ ,  $t_3 + u$ , ehk  $b - c$ ,  $c - a$ ,  $a - b$ , kus

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}.$$

Lähtudes jällegi Viète'i teoreemist, saame

$$D_1 = -\frac{1}{6}(a-b)(b-c)(c-a),$$

$$D_2 = \frac{1}{6}[(b-c)(c-a) + (a-b)(c-a) + (a-b)(b-c)].$$

Samal ajal avaldub diskriminant  $D$  valemiga (millel küll antud hetkel pole tähtsust):

$$D = -\frac{27}{4} a^2 b^2 c^2.$$

Kuna kujutuse  $\Psi$  korral on

$$b-c = 2x, \quad c-a = -x\sqrt{3} y, \quad a-b = -x\sqrt{3} y,$$

ja kujutuse  $\Psi_1$  korral

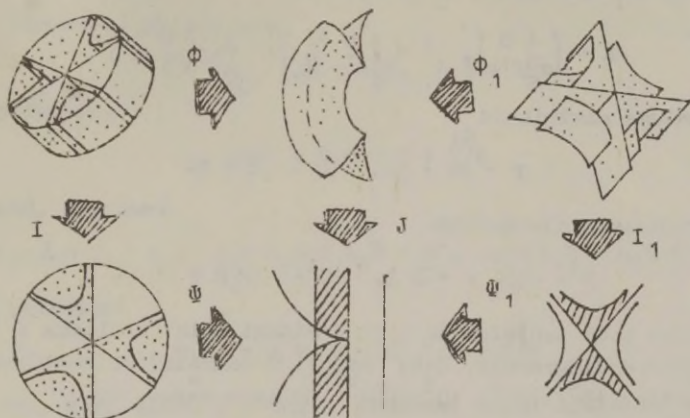
$$b-c = -\frac{2}{3}(\alpha - \tau), \quad c-a = \frac{1}{3}(\alpha - \tau) + \beta i, \quad a-b = \frac{1}{3}(\alpha - \tau) - \beta i,$$

siis siit saamegi ülaltoodud avaldised  $D_1$  ja  $D_2$  jaoks. Samasustest

$$x^2(x^2 - 3y^2)^2 + y^2(3x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^3,$$

$$\xi^2(\xi^2 + 3\eta^2)^2 - \eta^2(3\xi^2 + \eta^2)^2 = (\xi^2 - \eta^2)^3,$$

saame definitsoonivalemit  $D=(3D_1)^2+(3D_2)^3$  arvestades, vastavad avaldised ka diskriminandi  $D$  jaoks.



Alumised nooled tõlgenduvad nüüd järgmisel viisil. Võrrand  $D=0$  määrab  $D_1, D_2$ -tasandil poolkuupparabooli. Kujutus  $\Psi$  murrab  $xy$ -tasandi piki sirgeid  $y=0$  ja  $y=\pm\sqrt{3}x$  kokku ja katab sellega kuuekordselt poolkuupparabooli sisepiirkonna  $D \leq 0$ . Kujutus  $\Psi_1$  murrab  $\xi\eta$ -tasandi kokku piki sirget  $\eta=0$  ja katab kahekordselt poolkuupparabooli välispiirkonna  $D \geq 0$ . Seejuures ringjoon  $x^2+y^2=a^2$  ja hüperbool  $\xi^2-\eta^2=a^2$  kujutuvad ühele ja samale sirgele  $D_2 = -\frac{1}{2}a^2$ .

Nüüd tõlgenduvad üllemised nooled, st. Viète'i kujutused, juba iseenezest. Võrrand  $D=0$  määrab  $uu''$ -ruumis tasanduva pinna tagasipöördeservaga  $M_t = (t^3/6, t^2/2, t)$ , vt. 4.2.8, lk. 33. Ilmselt pakib kujutus  $\phi$  eelnevalt kuueks murtud  $t_1, t_2, t_3$ -ruumi selle tasanduva pinna hõlmade vahele ja kujutus  $\phi_1$  pakib kaheks murtud  $qst$ -ruumi väljapoole hõlma. Seejuures koolduvad sirged, mis on vektorväljade  $X$  ja  $X_1$  trajektoorideks, tingimata vektorvälja  $Y$  trajektoorideks, st. vastavateks kuupparaboolideks  $uu''$ -ruumis. Kuidas nimelt toimub pakkimine kujutuste  $\phi$  ja  $\phi_1$  korral, on kirjeldatud kujutus-



tega  $\tilde{\Psi}$  ja  $\tilde{\Psi}_1$ .

Lõpuks tuletame Cardano valemi ja ehitame nea masina kuuppolünoomi juurte arvutamiseks.

Võtame kasutusele tähistused

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

moodustame maatriksid

$$P = xE + yI, \quad Q = \xi E + \eta J$$

ja arvutame nende kuubid:

$$P^3 = -3D_1 + \sqrt{-D} I, \quad Q^3 = -3D_1 E + \sqrt{D} J.$$

Mõistagi pole tähistustel I ja J midagi ühist nooltega I ja J ülaltoodud diagrammis. Kaks mainitud samasust on samaväärsed võrdustega  $|P^3| = |P|^3$ ,  $|Q^3| = |Q|^3$ . Ühtlasi näeme, et

$$(x + yi)^3 = (\xi + \eta)^3 = -3D_1 + \sqrt{D}.$$

Maatriksite  $P^3$  ja  $Q^3$  karakteristlikud võrrandid

$$|P^3 - \lambda^3 E| = 0 \quad \text{ja} \quad |Q^3 - \lambda^3 E| = 0$$

langevad kokku ruutvõrrandiga  $\lambda^3$  suhtes

$$(\lambda^3 + 3D_1)^2 - D = 0,$$

miile lahendeiks on

$$\lambda_{1,2}^3 = -3D_1 \pm \sqrt{D},$$

st. suurused  $(x+yi)^3$  ehk  $(\xi+\eta)^3$ .

Olgu  $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,  $\bar{\varepsilon} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$  kuupjuured ühest.

Kuna

$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 = -6D_1, \quad (\lambda_1 \lambda_2)^3 = (3D_1)^2 - D = -(2D_2)^3, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -2D_2,$$

siis

Girolamo Cardano, itaalia matemaatik, 1501 - 1576.

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1 + \lambda_2)^3 + 6D_2(\lambda_1 + \lambda_2) + 6D_1 &= 0, \\
 (\lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \bar{\varepsilon})^3 + 6D_2(\lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \bar{\varepsilon}) + 6D_1 &= 0, \\
 (\lambda_1 \bar{\varepsilon} + \lambda_2 \varepsilon)^3 + 6D_2(\lambda_1 \bar{\varepsilon} + \lambda_2 \varepsilon) + 6D_1 &= 0,
 \end{aligned}$$

mis tähendab, et suurused

$$\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \bar{\varepsilon}, \lambda_1 \bar{\varepsilon} + \lambda_2 \varepsilon$$

on polünoomi

$$\psi(z) = D_1 + D_2 z + z^3/6$$

juured, suurused

$$z_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - u'', \quad z_2 = \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \bar{\varepsilon} - u'', \quad z_3 = \lambda_1 \bar{\varepsilon} + \lambda_2 \varepsilon - u''$$

aga polünoomi

$$\varphi(z) = u + u'z + u'' z^2/2 + z^3/6$$

juured, sest  $\varphi(z - u'') = \psi(z)$ . Viimased võime avaldada funktsiooni

$$f(z) = \lambda_2 z^2 + \lambda_1 z - u''$$

vaartustena kohal 1,  $\varepsilon$ ,  $\bar{\varepsilon}$ :

$$z_1 = f(1), \quad z_2 = f(\varepsilon), \quad z_3 = f(\bar{\varepsilon}).$$

See annabki üldise Cardano valemi.

Funktsiooni  $f(z)$  kordajaid  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  nimetatakse Lagrange'i resolventideks. Need on määratud valemiga

$$\lambda_{1,2} = \sqrt[3]{-3D_1 \pm \sqrt{D}}$$

või siis juurte  $z_1, z_2, z_3$  kaudu:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3}(z_1 + \bar{\varepsilon}z_2 + \varepsilon z_3), \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}(z_1 + \varepsilon z_2 + \bar{\varepsilon}z_3).$$

Tavaliselt esitatakse Cardano valem polünoomi  $z^3 + pz + q$  puhul kujul

---

Joseph Louis Lagrange. prantsuse matemaatik, 1736 - 1813.

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

kusjuures nõutakse, et kuupjuurte korrutiseks oleks  $-p/3$ .  
See klapiib ka meie tulemusega, sest esitades võrrandi  
 $z^3 + pz + q = 0$  kujul  $z^3 + D_2 z + D_1 = 0$  näeme, et

$$D_1 = q/6, \quad D_2 = p/6, \quad D = q^2/4 + p^3/27 \quad \text{ja}$$

$$\lambda_{1,2} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

Muidugi on funktsioon  $f(z)$  Cardano valemist meeldivam. Kuigi  
Lagrange'i resolventide määramisel tuleb arvestada tingimust  
 $\lambda_1 \lambda_2 = -2D_2$ , on juurte arvutamine lihtsam, sest nendeks on  
vaartused  $f(1)$ ,  $f(\varepsilon)$ ,  $f(\bar{\varepsilon})$ .

Seega kujutab funktsioon  $f(z)$  komplekstasandi iseendasse  
ning viib ühejuured  $1$ ,  $\varepsilon$ ,  $\bar{\varepsilon}$  juurteks  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ . Liikugu punkt  
 $z$  piki ringjoont  $(\cos t, \sin t)$ . Esitame kompleksarvud trigono-  
meetrilisel kujul:

$$z = \cos t + i \sin t,$$

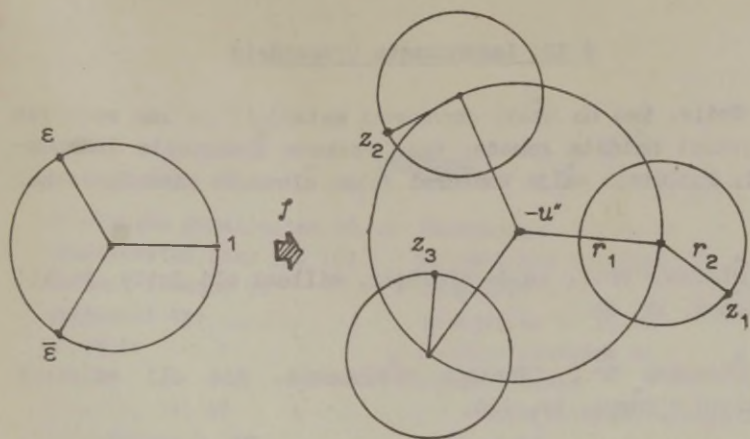
$$-u = r_0 (\cos \theta_0 + i \sin \theta_0),$$

$$\lambda_k = r_k (\cos \theta_k + i \sin \theta_k), \quad k=1,2.$$

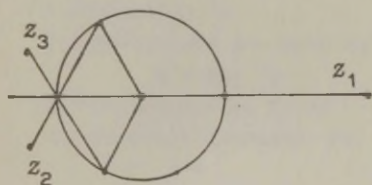
Kui nüüd  $f(z) = x + yi$ , siis määrab avaldis  $-u + \lambda_1 z + \lambda_2 z^2$  joone  
parameetrilised võrrandid

$$\begin{cases} x = r_0 \cos \theta_0 + r_1 \cos(\theta_1 + t) + r_2 \cos(\theta_2 + 2t) \\ y = r_0 \sin \theta_0 + r_1 \sin(\theta_1 + t) + r_2 \sin(\theta_2 + 2t) \end{cases}$$

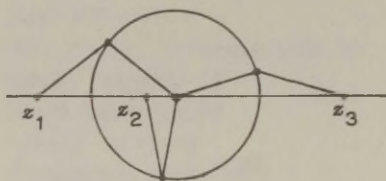
mis on ühikringjoone kujutiseks. Ümber punkti  $-u$  pöörleb  
raadius  $r_1$  ja selle otsas pöörleb kaks korda kiiremalt teine  
raadius  $r_2$ . Algseis  $u + \lambda_1 + \lambda_2$ , kui  $t=0$ , määrab esimese juure  
 $z_1$ , hetkel  $t=2\pi/3$  fikseerub teine juur  $-u + \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \bar{\varepsilon} = z_2$  ja  
hetkel  $t=4\pi/3$  kolmas juur  $u + \lambda_1 \bar{\varepsilon} + \lambda_2 \varepsilon = z_3$ . Vändates sellist  
masinat, võime kergesti leida kõik juured  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ .



Kogu see jutt on õige üldjuhul, kui polünoomi  $\varphi(z)$  kordajad  $u, u', u''$  on kompleksarvud. Kui need kordajad on reaalsed, siis juurte asetus sõltub diskriminandi  $D$  märgist, nagu näidatud joonisel.



$D > 0$



$D \leq 0$

Soovitame lugejale viia läbi samasuguse arutluse ruut-funktsiooni  $u + u't + t^2/2$  puhul.

## § 12. Lahendamata ülesandeid

Neile, kes on hästi omandanud materjali ja kes soovivad oma oskust näidata kenade, kuid raskete ülesannete lahendamisel, kuulutame välja konkursi kolme ülesande lahendamiseks.

Ülesanne nr.1. Leida sisetangid, millest oli juttu punkti 7.5 lõpus, lk. 82.

Ülesanne nr.2. Vastata küsimusele, mis oli esitatud punkti 10.2 lõpus, lk. 116.

Ülesanne nr.3. Viia läbi täielik analüüs punkti 11.2 eeskujul 4. astme polünoomi  $u + u't + u'' \frac{t^2}{2} + u''' \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}$  puhul.

Õiged vastused võivad avalikustada.

Võitjatele määratakse preemiat.

## REGISTER

- Absoluutne parallelism 50  
 adapteeritud baas 52, 103  
 afiinne seostus 50  
 ahvisadul 121  
 atlas 24
- Baas 11, 34, 47  
 bijektsioon 5, 18  
 binormaals 69
- Cardano valem 128  
 Cartani jaotus 107  
 Cristoffeli sümboolid 72
- Darboux' teljestik 73  
     — vektor 70  
 difeomorfism 18  
 diferentseeruv muutkond 24  
     — kujutus 15  
 diferentseeruvuse klass 15  
 diferentsiaaloperaator 28,  
     104, 115  
 diferentsiaalvorm 39  
 diferentsiaalvõrrandi  
     — lahend 104, 115  
     — sümbool 118  
     — jätkamine 104  
 diferentsiaalvõrrandite  
     "süsteem 115
- Dirichlet' ülesanne 117  
 duaalsus 11
- Ekstreemumulesanne 72  
 elliptiline piirkond 74  
 endomorfism 10  
 epimorfism 8, 9, 18  
 esimene ruutvorm 72  
 esimest järku  
     diferentsiaalvõrrand 107  
 evoluuat 57  
 evolvent 62
- Faasiportree 31  
 fokaalpind 73  
 fokaalpunkt 73  
 fookus 31, 107  
 Fourier' rida 116  
 Frenet' teljestik 70  
 funktsioon 5  
 funktsiooni diferentsiaal 39  
 Gaussi kujutus 74  
 Grami maatriks 68  
 Greeni valem 40  
 "güroskoobi efekt 39
- Harilik  
     diferentsiaalvõrrand 104  
 harmooniline funktsioon 116  
 Hesse maatriks 23  
 hessiaan 23  
 holonoomia 48  
 holonoomne baas 51  
 "hüperboolne piirkond 74  
 "hüperkvadrik 120

- Immersioon 17, 18  
 injektiivne maatriks 13  
 injektsioon 5, 18  
 integreeruv jaotus 45  
 integreeruvusmaatriks 45  
 integreeruvustegur 45  
 involutiivne süsteem 117  
 iseärasus 19  
 isokliinid 107  
 isomorfism 8, 9, 18  
  
 Jacobi maatriks 15  
 jakobiaan 18  
 jaotus 44  
 joonte parv 54  
 joonpind 25  
  
 Kaart 24  
 kaaskujutus 10  
 kaasruum 10  
 kaja 60  
 kanalpind 64  
 kanooniline esitus 6, 8, 13  
 karakteristik 65  
 karakteristiklik punkt 54  
 kaspoid 21, 68  
 katastroof 19, 22  
 kaustik 63  
 keskmine koverus 73  
 kihtide translatsioon 47  
 kihtruum 18, 47, 102  
 Kleini pudel 24  
 kobaas 11, 40  
 kodimensioon 104  
 kokujutis 10  
 kommutatiivne diagramm 6, 25  
 kompleks 25  
  
 kongruents 25  
 kooldumistasand 69  
 koordinaadid 24  
 korts 21, 56, 78, 108  
 kotuum 10  
 kovariantne tuletis 50, 53  
 kovektor 10  
 Kroneckeri delta 11  
 kujutis 6, 9  
 kujutus 5  
 kujutuse diferentsiaal 15, 34  
     — graafik 20  
     — invariandid 26  
 kuupparabool 33, 70  
 koverus 58, 70  
 koverusobjekt 48  
  
 Lagrange'i resolvendid 129  
 lainefront 63  
 Laplace'i vörrand 116  
 Legendre'i teisendus 109  
 liblikas 21  
 Lie rühm 51  
     — tuletis 37, 43, 51  
 lift 47  
 liikuv teljestik 62, 68  
 lineaarne kujutus 9  
     — seostus 49  
 lineaarrühm 10  
 lopmatudimensionaalne  
     arvruum 101  
  
 Maatriksi eksponentsiaal 101  
 maatriksite kommutaator 36  
 Maclaurini rida 22, 35, 38, 43,  
     70, 101, 114  
 meetrika 72

meetriline tensor 72  
minimaalpind 96  
mitteholonoomne baas 51  
mitteholonoomsuse objekt 51  
Monge'i koonus 118  
monomorfism 8, 9, 18  
morfism 8  
Morse'i lemma 23  
multiindeks 112  
muutkond 18, 24  
Mobiuse leht 24, 48  
mahispind 65  
  
Naturaalne baas 34, 103  
n-mootmeline aeg 112  
normaaltasand 69  
  
Osatuletistega  
diferentsiaalvorrann 115  
originaal 6  
  
Paraboolne joon 74  
parve mahisjoon (-pind) 55,  
76, 82  
Pfaffi probleem 46  
peakoverused 73  
peanormaal 69  
pinnaparv 65  
pinna puutujatasand 20, 34  
pinnateooria 18, 72  
plokk-maatriks 13  
poolkuupparabool 56, 70  
poolrühm 9  
puutuja 69  
puutujakihtruum 50  
paasusaba 21, 68, 108  
poordseos 4  
  
" " poore 31  
Regulaarne maatriks 13  
Riemanni geomeetria 72  
ruumiline evoluu 71  
— evolvent 71  
" rühma esitus 112  
" rühmateooria 18  
" rühmoid 8  
Sadul 32  
seos 4  
seostus kihtruumis 47  
sile kujutus 15  
singulaarsus 19, 73  
sirgestustasand 69  
sisiigia 79  
Steineri köver 82  
Stokesi valem 43  
stratifikatsioon 20, 68  
submersioon 17, 18  
suluoperatsioon 36  
solm 32  
soltumatud funktsioonid 29  
" surjektiivne maatriks 13  
" surjektsioon 5, 18  
  
Tasanduv pind 25, 66, 75  
Tayloriga rida 28  
teine ruutvorm 72  
teisendus 10  
teisenduste rühm 18  
teist järku  
diferentsiaalvorrann 105, 110  
teoreem astakust 17  
tool 121  
toor 24, 48, 64, 75, 124



trajektoor 29  
Tschirnhausi teisendus 126  
tuum 9  
"täht 21  
"täisdiferentsiaal-  
    operaator 102, 112  
"täiskarakteristik 104, 115  
täiskoverus 73  
"täpne diferentsiaalvorm 40  
    — jada 10

Vari ekraanil 83  
vektor 9  
vektori komponendid 11  
vektorite lineaarkate 11

vektorruum 9  
vektorväli 28  
vektorvälja invariandid 29, 102  
    — faasiportree 102  
    — trajektoorid 102  
vektorväärtustega kovektor 12  
Viète'i kujutused 124  
vigvam 21  
volt 21, 56, 77, 108  
"välisdiferentsiaal 42, 43  
"väliskorrutis 41  
"välisvorm 41  
"vaane 70

"Üleminekufunktsioonid 24

Arnold V. 22  
Bartels M. 70  
Cardano G. 128  
Cartan E. J 107  
Christoffel E. B 72  
Coriolis G. G 39  
Darboux J. G. 70  
Dirichlet P. G. D. 117  
Euler L. 93  
Fourier J.-B.-J. 116  
Frenet J. F. 70  
Gauss C. F. 72  
Gram J. P. 68  
Green G. 40  
Hesse L.O. 23  
Hilbert D. 119  
Jacobi K. 15  
Klein F. 24  
Kronecker L. 11

Laplace P. S. 116  
Legendre A.-M. 109  
Lie S. M. 44  
Maclaurin C. 22  
Monge G. 118  
Morse H. K. M 23  
"Mobius A. F. 24  
Neumann K. G. 96  
Pfaff J. F. 46  
Riemann G. F. B. 72  
Schwarz H. A. 36  
Senff K. E. 70  
Steiner J. 82  
Stokes G. G. 43  
Taylor B. 28  
Thom R. 22  
Tschirnhausen E. W. 126  
Viète F. 124  
Zeldovits J. 63

Майдо Рахула.  
ВВЕДЕНИЕ В ДИФЕРЕНЦИАЛЬНУЮ ГЕОМЕТРИЮ.  
На эстонском языке.  
Тартуский университет.  
ЭР, 202400, г. Тарту, ул. Юликооли, 18.  
Vasintav toimetaja A. Parring.  
Korrektor L. Jago.  
Paljundamisele antud 6.08.1991.  
Formaat 60×84/16  
Kirjutuspaber.  
Kiri: roman. Rotaprint.  
Tingtrükipoognaid 7,9.  
Arvestuspoognaid 8,8.  
Trükipoognaid 8,5.  
Trükiarv 300.  
Tell. nr. 381.  
Hind rbl. 8.50  
TU trükkoda. EV, 202400 Tartu, Tiigi t. 78.

Rbl. 8.50