



ТАРТУСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

# СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ В ВУЗЕ

В помощь преподавателю XIV

ТАРТУ 1990

ТАРТУСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ  
ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ  
В ВУЗЕ

В помощь преподавателю XIV

---

Тарту 1990

Утверждено на заседании совета физико-химического факультета ТГУ 16 ноября 1988 года.

Ответственный редактор Ю.Я. Лембра

От редактора

В серии "В помощь преподавателю", издаваемой Тартуским университетом с 1976 года, вышло десять методических сборников по физике в следующей хронологической последовательности номеров: IV (1978), V (1980), VI (1982), VII (1982), VIII (1983), IX (1984), X (1985), XI (1986), XII (1988) и XIII (1988).

*Arh.*

KUSTUTATUJ

Tartu Ülikooli  
FISIKA TOLUKOGU

10863

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ В ВУЗЕ.

В помощь преподавателю XIV.

На русском языке.

Тартуский университет.

ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Ülikooli, 18.

Ответственный редактор Ю.Я. Лембра.

Корректор Н. Стороженко.

Подписано к печати 13.12.1989.

МВ 01681.

Формат 60x84/16.

Бумага ротаторная.

Машинопись. Фотопринт.

Условно-печатных листов 5,12.

Учетно-издательских листов 4,90. Печатных листов 5,5.

Тираж 200.

Заказ № 793.

Цена 1 руб.

Типография ТУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.

## "НАЧАЛА" НЬЮТОНА И ПРИЦИП МАХА

З.Н. Бихеле, Г.А. Бихеле

Выход в свет в 1687 г. "Математических начал натуральной философии" Ньютона [1] знаменовал важную веху в научной революции XVII века. В них Ньютон заложил основы теоретико-математического подхода к изучению окружающего мира, нового понимания не только вопросов механики, но и точных наук вообще. Он предложил ученому миру программу, которая в дальнейшем стала ведущей в естествознании и определяла направление развития всей естественно-научной мысли на протяжении двух столетий.

В "Началах" впервые система анализа физических явлений была построена не на качественных рассуждениях, а на основании их математического описания. Ньютон отверг физику перипатетиков и картезианцев, обвиняя их в том, что они, не обращаясь к опыту, конструируют гипотезы для объяснения природных явлений, приписывая при этом предметам всякие "скрытые" качества.

Вопросы, разрабатываемые Ньютоном, были тесно связаны с научной проблематикой того времени, когда рост производства, развитие торговых связей, а вместе с тем и мореплавание стимулировали исследования в области астрономии, механики и тесно связанной с ними математики [2].

Уже в трудах Галилея, Декарта, Гюйгенса и других ученых постепенно выкристаллизовывались начальные понятия и законы механики. Был высказан принцип инерциального движения, продолжались поиски меры движения тел, рассматривалась идея всемирного тяготения. Систематизировав и развив все передовое, достигнутое к этому времени в науке, Ньютон сформулировал основные принципы механики и, опираясь на них, разработал теорию движения тел. Он изложил учение о всемирном тяготении, на основе которого решил ряд задач небесной механики. Однако использованный в "Началах" громоздкий геометрический

метод изложения во многом тормозил дальнейшее расширение работ в области механики. Механика Ньютона начала "работать" лишь после того, как она была переведена Эйлером на язык математического анализа. Построение же ее в основном было завершено в XVIII-XIX веках в трудах Л.Эйлера, Ж. Даламбера, Л.Лагранжа и других великих механиков [3]. Тогда впервые движение тела было описано с помощью дифференциальных уравнений, развита механика системы, введены понятия работы и энергии, разработаны основы аналитической механики.

Остановимся теперь несколько подробнее на рассмотрении вводной части "Начал". Начинается она с определений, где рассматриваются такие понятия, как количество материи (массы), количества движения, приложенные к телу силы и врожденные силы материи. Под количеством материи Ньютон понимает "меру таковой, устанавливаемую пропорционально плотности и объему ее" [1]. Это определение вызвало и вызывает до сих пор различные толкования. Одни видят в нем простую тавтологию, другие указывают, что Ньютон, будучи атомистом, видимо, понимал плотность как меру заполнения атомами единицы объема тела. Следует отметить, что термин "масса" Ньютон в своем труде, согласно замечанию переводившего его академика А.Н. Крылова, использует лишь один раз. Обычно он говорит о количестве материи или просто о теле. Во всяком случае, массу тела как меру его инерции он не определяет.

Ньютон впервые ввел метод описания физических взаимодействий через посредство силы. Давая определение силы, он различает два вида сил: приложенную к телу силу как причину изменения его инерционного состояния и врожденную (присущую материи) силу, которую он считал "вразумительным" назвать силой инерции. Этот термин прижился и, кажется, ни одно понятие в механике не возбуждало и не возбуждает и поныне столько споров, разночтений и толкований, как понятие "силы инерции". Ввиду актуальности этого вопроса, приведем определение этого понятия, данное самим Ньютоном. "Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которому всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерно-прямолинейного движения. Эта сила проявляется телом

единственно лишь когда другая сила, к нему приложенная, производит изменение его состояния" /1/. Ученые по-разному понимают это определение. Некоторые усматривают в нем неудачное смешение понятия "инерции" (как свойства всех тел) с понятием "силы" (как меры механического воздействия). Другие рассматривают силу инерции как силу, с которой ускоряемое тело действует на ускоряющие его тела. Наконец, третьи считают, что силы инерции действуют на само ускоренно движущееся тело.

Далее Ньютон переходит к рассмотрению понятий абсолютного и относительного пространства, времени и движения. Здесь нас интересуют прежде всего представления Ньютона об абсолютном пространстве и абсолютном движении. Он пишет: "Абсолютное пространство, по самой своей сущности безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным" /1/. Утверждая реальное существование независимого, неподвижного пространства какместилища всего сущего в мире, Ньютон наделяет его свойством воздействовать на ускоренно движущиеся относительно него тела, считая, что само пространство остается при этом неизменным. Согласно Ньютону, абсолютное движение тел, т.е. движение относительно абсолютного пространства, можно в ряде случаев отличить от их относительного движения. "Проявления, которыми различаются абсолютное и относительное движение, состоят в силах стремления удалиться от оси вращательного движения, ибо в чисто относительном вращательном движении эти силы равны нулю" /1/. Так, он считает возможным установить абсолютное движение, например, в эксперименте с вращающимся ведром с водой по подъему уровня воды у стенки ведра или по силам, которыми растягивается нить, соединяющая шары, вращающиеся вокруг общего центра масс. Ньютон пишет: "Таким способом могло бы быть определено количество и направление кругового движения внутри огромного пустого пространства, где не существовало бы никаких внешних, доступных чувствам признаков, к которым можно было бы отнести положение шаров" /1/.

Затем Ньютон приводит следующие законы, положенные им в основу механики: закон инерции, закон изменения количества движения и закон равенства действия и противодействия. Фор-

мулируя эти законы, Ньютон, очевидно, предполагал, что движение тел рассматривается относительно абсолютного пространства, что под телом следует понимать точечное тело и что взаимодействие между телами передается мгновенно.

Интересно, что, приводя второй закон, Ньютон нигде не формулирует и не использует его в обычно принятой в настоящее время форме: сила равна произведению массы тела на ускорение, сообщаемое этой силой.

Создается впечатление, что Ньютон, всегда очень чутко и ревниво реагируя на вопросы приоритета в тех или иных своих открытиях, не претендует на авторство приведенных им законов. Действительно, они существовали еще до Ньютона в виде гипотез, правил, нечетко выраженных утверждений в трудах Г. Галилея, Р. Декарта, И. Кеплера и др. [2, 3]. Однако Ньютон впервые четко сформулировал их и представил в виде единой системы принципов, которые необходимы и достаточны для построения механики.

Появление "Начал" встретило у многих ученых восторженный прием. Вольтер одним из первых понял, что с Ньютоном наступила научная революция и мир стал мыслить по-новому. Величайшим из произведений человеческого ума назвал "Начала" Лагранж. Успехи применения механики Ньютона в изучении движения различных, вплоть до небесных, тел приводило к мысли о том, что весь мир управляется законами Ньютона, и если задать в какой-либо момент времени координаты и скорости всех частиц вселенной, то в принципе можно предсказать состояние мира для любого будущего момента времени. Ньютон сам считал: "Было бы желательно вывести из "Начал" механики и остальные явления природы" [1].

И все же идеи Ньютона завоевали себе признание далеко не сразу и не у всего ученого мира того времени, а в упорной борьбе прежде всего с картезианцами, а также со взглядами Лейбница, Гюйгенса и Беркли, решительно не принявших ряд фундаментальных положений Ньютоновской механики, в особенности понятия об абсолютном пространстве, абсолютном времени и абсолютном движении.

Наиболее обстоятельной критике подверг "Начала" Э. Мах в своей книге "Механика" [4], вышедшей в свет в 1883 году.

Мах отвергает систему определений и законов, положенных Ньютоном в основу его механики, и предлагает заменить их следующими установленными из опыта принципами.

1. Взаимодействующие тела (А и В) сообщают друг другу противоположно направленные ускорения  $\vec{a}_A$  и  $\vec{a}_B$ .

2. Отношение абсолютных значений этих ускорений не зависит от физической природы взаимодействий и

$$\frac{a_A}{a_B} = const. \quad (I)$$

Исходя из этих принципов, Мах вводит определения массы тела и действующей на него силы.

Массу тела А ( $m_A$ ), по отношению к взятой за эталон массе тела В ( $m_B$ ), он определяет через обратное отношение ускорений этих тел в процессе их взаимодействия друг с другом

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{a_B}{a_A}. \quad (2)$$

Силу Мах определяет через произведение массы тела на его ускорение под действием этой силы,

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (3)$$

Таким образом, второй закон Ньютона Мах предлагает рассматривать как определение силы. Он считает, что (3) могло бы рассматриваться как закон природы лишь в том случае, если бы все три входящие в него величины ( $\vec{F}$ ,  $m$ ,  $\vec{a}$ ) можно было определить независимо друг от друга. Мах отвергает такую возможность, так как находит, что понятия массы и силы Ньютоном логически (операционально) не определены и не являются независимыми понятиями.

Представив (2) в виде произведения  $m_A \vec{a}_A = -m_B \vec{a}_B$  и исходя из определения силы (3), Мах приходит к утверждению о равенстве сил взаимодействия тел

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B,$$

что в ньютоновской механике известно как третий основной закон.

Как видим, методика изложения основ механики "по Маху" во многом отличается от ньютоновской. Однако она не получила общего признания, несмотря на ряд интересных заложённых в ней мыслей. Лишь у отдельных авторов ее можно видеть в несколько изменённом виде, например в книге У.Регли и др. [5].

Мах считал, что механику надо освободить от метафизических понятий абсолютного пространства и абсолютного движения, "которое на опыте обнаружены быть не могут" [4].

Причиной существования инерциальных координатных систем в природе является (согласно Маху) наличие космических масс, в процессе взаимодействия с которыми и проявляются инертные свойства тел. Находящееся в абсолютно пустом пространстве тело вообще не должно иметь массы.

Так, Мах пишет: "Когда мы говорим, что тело К изменяет свое направление (движения) и скорость только под действием другого тела К', то мы вовсе не можем прийти к этому познанию, если нет налицо других тел А, В и С, относительно которых мы судим о движении тела К. Таким образом мы познаем собственно некоторое отношение тела К к телам А, В и С. Если мы вдруг абстрагируем тела А, В и С и хотим говорить о теле К в абсолютном пространстве, то мы совершаем двойную ошибку. Во-первых, мы не можем знать, что будет делать тело К при отсутствии тел А, В и С. Во-вторых, у нас совсем не было бы средств судить о том, что делает тело К" [4].

Если Ньютон рассматривал скорость тела как величину относительную, а ускорение — как абсолютное (поскольку оно проявляется в абсолютном движении в возникновении сил инерции), то Мах считал относительными как скорость, так и ускорение тел. Центробежные эффекты, развивающиеся при вращении тела и доказывающие, согласно Ньютону, существование абсолютного неподвижного пространства, Мах объяснял относительностью движения тела и окружающего его звездного мира. Таким образом, с его точки зрения, опыт Ньютона с ведром, наполненным водой, ничего не доказывает, поскольку вращение ведра относительно масс вселенной и вращение мироздания вокруг него должны вызывать один и тот же физический эффект — подъем уровня воды у стенки ведра.

Все эти идеи Маха лежат в основе так называемого "принципа Маха". В литературе он приводится в различных формулировках, отражающих ту или иную часть его идей. Основным содержанием этого принципа является утверждение, что инерция тела определяется взаимодействием его с окружающим материальным миром.

Отношение ученых к идеям Маха далеко не однозначно. По мнению одних, принцип Маха - пройденный этап в науке, поскольку он не может указать какого-либо нового пути развития современных физических идей. Другие полагают, что в этом принципе все же "что-то есть", что он в той или иной модификации еще сыграет свою роль на пути к новому физическому миропониманию. Так, Г.Бонди [6] пишет: "Мне представляется - наряду со всеми теми, кто считает, что в принципе Маха что-то есть, что вселенная неявно участвует в любом физическом эксперименте, поскольку в любом физическом эксперименте проявляются инертные свойства тел".

Несомненно однако, что этот принцип сыграл положительную роль в период разработки Эйнштейном начал общей теории относительности.

Для механики (в курсе общей физики) принцип Маха стал в настоящее время актуальным в связи с дискуссией о природе сил инерции. Дело в том, что в качестве одного из основных доводов сторонников "нереальности" сил инерции приводится утверждение, что эти силы не подчиняются третьему закону Ньютона, поскольку нельзя указать источник этих сил. Такой источник принцип Маха указывает - это масса всех остальных тел вселенной.

В настоящее время взгляды Маха на природу сил инерции дополняются новыми идеями. По мнению одних ученых, эти силы обусловлены взаимодействием частиц со своим гравитационным полем в процессе его изменения при ускоренном движении частиц. Другие объясняют их возникновение взаимодействием частиц с некоторой "фоновой материей" и, наконец, с вакуумом [7,8].

## Литература

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии. - Петроград, 1915.
2. Кирсанов В.С. Научная революция XVII века. - М.: Наука, 1987.
3. Гайденоко П.П. Эволюция понятия науки. - М.: Наука, 1987.
4. Мах Э. Механика. Историко-критический очерк ее развития. - СПб, 1909.
5. Регли У., Холлистер У., Денхард У. Теория, проектирование и испытание гироскопов. - М.: Мир, 1972.
6. Бонди Г. Гипотезы и мифы в физической теории. - М.: Мир, 1972.
7. Ворович И. Некоторые вопросы преподавания основ классической механики в университетском курсе. - М.: Институт проблем механики, 1985.
8. Смородинский Я.Я. Тяготение. - М.: Знание, 1975.

### МАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КАК РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЭФФЕКТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

О.В. Сакс

В учебной литературе [1-4 и др.] имеются различные подходы к объяснению или доказательству утверждения, что магнитное взаимодействие представляет собой релятивистский эффект электрического взаимодействия. Объяснение магнитных явлений как релятивистских эффектов не представляет трудностей, когда в курсе общей физики освоены основы специальной теории относительности (СТО). Один из возможных вариантов наглядного объяснения представлен ниже.

Рассмотрим силу электрического взаимодействия в вакууме между точечными зарядами  $q_1$  и  $q_2$  в двух инерциальных системах отсчета  $K$  и  $K'$ , когда  $K'$  движется относительно системы  $K$  с постоянной скоростью. Согласно эмпирическому закону Кулона, сила, с которой покоящийся в системе  $K$  заряд  $q_1$  действует на заряд  $q_2$ , выражается формулой:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad (I)$$

где  $k$  - коэффициент пропорциональности;  $\vec{r}$  - вектор, направленный от заряда  $q_1$  на заряд  $q_2$ . При этом формула (I) правильно отражает связь между величинами  $\vec{F}$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  и  $\vec{r}$  во всех инерциальных системах отсчета, независимо от того, движется ли заряд  $q_2$  или покоится в той же системе  $K$ , где покоится заряд  $q_1$ .

На рис. I изображены силы  $\vec{F}_A \dots \vec{F}_D$ , соответствующие различным положениям заряда (в точках А, В, ... Д; заряды одноименные). Допустим, что в системе отсчета  $K$  заряд  $q_2$  движется с постоянной скоростью в обратном направлении оси  $X$  (см. рис. I, например, в точке В). Если рассмотрим те же заряды  $q_1$  и  $q_2$  в другой системе отсчета  $K'$ , в которой  $q_2$  покоится, то в ней движется в направлении оси  $X$  заряд  $q_1$ . Согласно СТО длины (расстояния) в направлении движения сокращаются в  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  раз. Один и тот же радиус - вектор  $\vec{r}$  в системах отсчета  $K$  и  $K'$  описывается через составляющие по-разному:

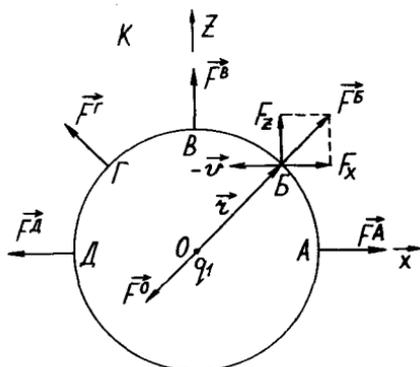


Рис. I. Силы  $\vec{F}_A \dots \vec{F}_D$  в системе отсчета  $K$ , в которой заряд  $q_1$  покоится в начале координат,  $q_2$  движется со скоростью  $-v$ .

$$|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| = \dots = |\vec{F}_D| \neq |\vec{F}_O|$$

$$\left. \begin{aligned} K - \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ K' - \vec{r}' &= x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}', \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - единичные векторы прямоугольной системы координат  $K$ ;  $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$  - то же в системе  $K'$ . Окружность, на которой расположены точки А...Д в системе  $K$ , в системе  $K'$  оказывается эллипсом (рис. 2). В то же время составляющие силы преобразуются по следующим формулам:

$$F'_x = F_x; \quad F'_y = \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad F'_z = \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

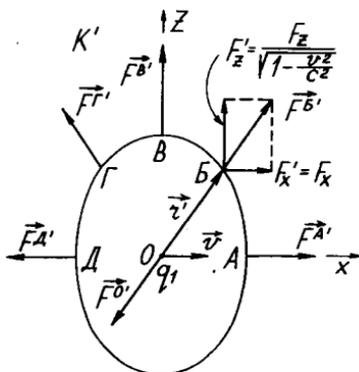


Рис. 2. Те же силы в системе отсчета  $K'$ , движущейся относительно системы  $K$  со скоростью  $\vec{v}$ . Заряд  $q_2$  покоится в системе  $K'$ ,  $q_1$  движется.  $|\vec{F}'_A| \neq |\vec{F}_B| \neq |\vec{F}'_B| \neq |\vec{F}_O|$ .

На рис. 2 изображены силы  $\vec{F}'_A \dots \vec{F}'_D$  при отношении  $\frac{v}{c} = 0,707$ . В данном примере 1,414-кратное увеличение состав-

ляющих  $F'_z$  по сравнению с  $F_z$  следует рассматривать как релятивистский эффект.

Переходим к рассмотрению другого примера.

Допустим, что заряды  $q_1$  и  $q_2$  покоятся в системе отсчета  $K'$ , движущейся относительно системы  $K$  со скоростью  $\vec{v}$  в направлении оси  $x$ . В системе отсчета  $K'$  графическое изображение сил ничем не отличается от рис. 1, кроме индексов (см. рис. 3). Для составляющих силы в системе отсчета  $K$  получим из формул (3):

$$F_x = F'_x; \quad F_y = F'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad F_z = F'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3')$$

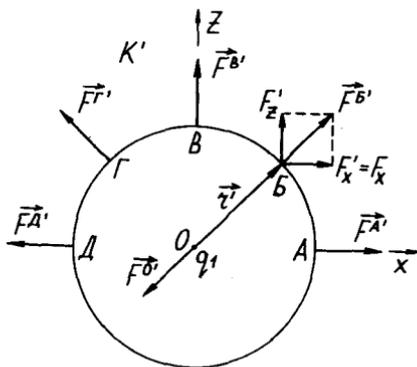


Рис. 3. Силы  $\vec{F}'_A \dots \vec{F}'_D$  в системе отсчета  $K'$ , в которой заряды  $q_1$  и  $q_2$  покоятся.  
 $|\vec{F}'_A| = |\vec{F}'_B| = \dots = |\vec{F}'_D| = |\vec{F}'_O|.$

При отношении  $\frac{v}{c} = 0,707$  имеем картину, представленную на рис. 4.

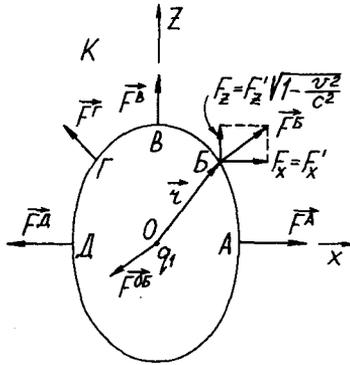


Рис. 4. Те же силы в системе отсчета  $K$ , относительно которой система  $K'$  движется со скоростью  $\vec{v}$  в направлении оси  $x$ .  $\vec{F}'_A = -\vec{F}_A$ ;  $\vec{F}'_B = -\vec{F}_B$ ; и т.д.  $|\vec{F}'_A| \neq |\vec{F}_B| \neq |\vec{F}'_B|$

Составляющие электрических сил отталкивания, перпендикулярные направлению движения, уменьшены в  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  раз. По СТО это просто релятивистский эффект.

Классическая физика дала данному явлению другое объяснение; движущиеся заряды создают вокруг траектории особое поле сил – магнитное поле, которое добавляется к электрическому полю зарядов; в магнитном поле на движущийся заряд действует сила Лоренца.

В книге [1, с. 117] приведен вывод формул для составляющих силы, действующей между зарядами  $q_1$  и  $q_2$ , движущимися параллельно с одинаковыми скоростями  $\vec{v}$ :

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \Phi \cos \theta; & F_z &= \Phi \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin \theta; \\ \Phi &= k \frac{q_1 q_2}{r^2} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\theta$  – угол между вектором скорости  $\vec{v}$  и радиус-вектором  $\vec{r}$ , направленным от заряда  $q_1$  к заряду  $q_2$  (рис. 5).

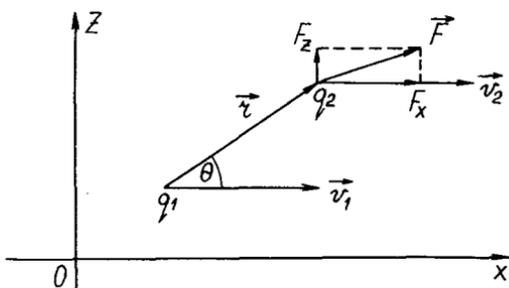


Рис. 5. Заряды  $q_1$  и  $q_2$  движутся с одинаковыми скоростями  $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$  в системе отсчета  $K$

Из формул (4) на основании общих формул преобразований, применяемых в СТО при переходе из одной системы отсчета в другую, можно вывести формулы для случая, когда  $q_1$  движется со скоростью  $\vec{v}_1$ ,  $q_2$  - со скоростью  $\vec{v}_2$ , при этом  $\vec{v}_1 \parallel \pm \vec{v}_2$ :

$$\left. \begin{aligned} F_{1x} &= \Phi_1 \cos \theta; & F_{1z} &= -\Phi_1 \left(1 \mp \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) \sin \theta; \\ F_{2x} &= \Phi_2 \cos \theta; & F_{2z} &= \Phi_2 \left(1 \mp \frac{v_1 v_2}{c^2}\right) \sin \theta; \\ \Phi_1 &= k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}; \\ \Phi_2 &= k \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}}, \end{aligned} \right\} (5)$$

где  $F_{1x}, F_{1z}$  - составляющие силы, действующей на заряд  $q_1$ ,  
а  $F_{2x}, F_{2z}$  - на заряд  $q_2$ .

Примечание относительно знаков "±": знак "-" соответствует случаю, когда скорости направлены в одну сторону ( $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ ), знак "+" - когда скорости направлены противоположно друг другу ( $\vec{v}_1 \parallel -\vec{v}_2$ ).

Из формул (5) легко вывести выражения для составляющих

напряженности электрического поля, например, заряда  $q_1$ , движущегося со скоростью  $\vec{v}_1 \approx \vec{v}$ . Полагаем, что  $q_2 = 1$  как пробный заряд, покоящийся в системе отсчета  $K$  ( $v_2 = 0$ ). Тогда из формул (5) получим составляющие электрического поля заряда  $q_1$ :

$$E_x = F_{2x} \Big|_{v_2=0} \quad E_z = F_{2z} \Big|_{v_2=0}$$

$$q_2=1 \quad q_2=1$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= k \frac{q_1}{r^2} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \cos \theta, \\ E_z &= k \frac{q_1}{r^2} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \sin \theta, \\ \vec{E} &= k \frac{q_1}{r^2} \cdot \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

или

В качестве примера применения формул (5) рассмотрим вывод формулы для силы магнитного взаимодействия двух бесконечно тонких параллельных проводов с токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 6).

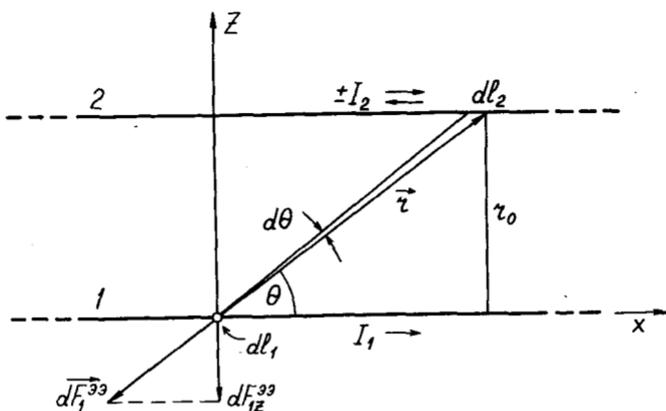


Рис. 6. К расчету магнитной силы, действующей между бесконечно тонкими проводами 1 и 2 с токами  $I_1$  и  $I_2$

Предположим, что провода состоят из положительных неподвижных ионов и электронов проводимости, имеющихся в равных количествах; провода бесконечной длины, расстояние между ними равно  $z_0$ , среднее расстояние между электронами намного меньше расстояния  $z_0$ . В общем случае линейная плотность ионов и электронов проводимости  $n$  (количество зарядов на единицу длины провода), а также средние скорости электронов  $\langle v \rangle$  в одном и другом проводе различны. Обозначим плотности в первом и втором проводе соответственно через  $n_1$  и  $n_2$ , а скорости - через  $\langle v_1 \rangle$  и  $\langle v_2 \rangle$ .

Вычислим баланс сил  $dF_1$ , действующих на элемент провода I длиной  $dl_1$ . Для этого используем формулы (5) и (6), рассматривая заряды на элементарных участках провода как точечные заряды  $dq_1$  и  $dq_2$ :  $dq_1^\pm = \pm en_1 dl_1$ ;  $dq_2^\pm = \pm en_2 dl_2$ , где  $e$  - элементарный заряд. Составляющие сил, параллельные оси  $x$ , при интегрировании по  $dl_2$  от  $+\infty$  до  $-\infty$  или по  $d\theta$  от 0 до  $\pi$ , что, в сущности, эквивалентно, дают нули. Поэтому баланс сил  $dF_1$  можно выразить только через составляющие, перпендикулярные проводу I:

$$dF_1 = \int_{(l_2)} (dF_{12}^{ЭЭ} + dF_{12}^{ЭИ} + dF_{12}^{ИЭ} + dF_{12}^{ИИ}), \quad (7)$$

где  $dF_{12}^{ЭЭ}$  - составляющая силы, с которой движущиеся электроны элемента  $dl_2$  действуют на движущиеся электроны элемента  $dl_1$ ;  $dF_{12}^{ЭИ}$  - составляющая силы, с которой движущиеся электроны элемента  $dl_2$  действуют на покоящиеся положительные ионы элемента  $dl_1$ ;  $F_{12}^{ИЭ}$  - составляющая силы, с которой положительные ионы элемента  $dl_2$  действуют на движущиеся электроны элемента  $dl_1$ ;  $dF_{12}^{ИИ}$  - составляющая силы, с которой ионы элемента  $dl_2$  действуют на ионы элемента  $dl_1$ .

Составляющие  $dF_{12}^{ИЭ}$  и  $dF_{12}^{ИИ}$ , вычисляемые по формуле (I), взаимно компенсируют друг друга, а остальные составляющие, с учетом формул (5) и (6), определяются следующим образом:

$$dF_{12}^{ЭЭ} = -k \frac{dq_1^- dq_2^-}{r^2} \cdot \frac{(1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2}) (1 \mp \frac{\langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle}{c^2})}{(1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2} \sin^2 \theta)^{3/2}} \sin \theta; \quad (8)$$

$$dF_{12}^{\text{эл}} = -dq_1^+ E_z(\theta) = -dq_1 k \frac{dq_2^-}{r^2} \cdot \frac{1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \sin \theta, \quad (9)$$

где  $dq_1^- = -en_1 dl_1$ ;  $dq_1^+ = en_1 dl_1$ ;

$$dq_2^- = -en_2 dl_2 = -en_2 \frac{r d\theta}{\sin \theta} = -en_2 \frac{r_0 d\theta}{\sin^2 \theta}; \quad \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \theta}{r_0^2}.$$

Выражения (8) и (9) имеем в конечном счете с разными знаками. Подставив их в выражение (7) и сократив соответствующие части выражений, получим:

$$\begin{aligned} dF_1 &= -k \frac{e^2 n_1 n_2 dl_1 \cdot \langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle}{c^2} \left(1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2}\right) \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d\theta}{\left(1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} = \dots \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d\theta}{\left(1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} = \frac{-\cos \theta}{\left(1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2}\right) \sqrt{1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2} \sin^2 \theta}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2}} \\ &= \pm k \frac{e^2 n_1 n_2 dl_1 \cdot \langle v_1 \rangle \langle v_2 \rangle}{c^2} \left(1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2}\right) \cdot 2 \frac{1}{1 - \frac{\langle v_2 \rangle^2}{c^2}} = \\ &= 2k \frac{(en_1 \langle v_1 \rangle) \cdot (en_2 \langle v_2 \rangle)}{c^2} dl_1. \end{aligned}$$

Произведение  $en \langle v \rangle$  представляет собой ток  $I$ . В международной системе единиц  $k = (4\pi \epsilon_0)^{-1}$ ,  $\mu_0 = (\epsilon_0 c^2)^{-1}$ . Окончательно получим:

$$dF_1 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r_0} dl_1.$$

Разделив последнее выражение на  $dl_1$ , получим силу  $f_1$ , с которой провод 2 действует на единицу длины провода 1.

$$f_1 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r_0}. \quad (10)$$

Последняя формула совпадает с результатом, получаемым при применении закона Ампера или Био-Савара-Лапласа. При противоположных направлениях тока получают отталкивание, при одном и том же направлении токов - притяжение проводов.

Объяснение магнитных явлений на основе СТО имеет познавательное значение. С точки зрения СТО между электрическими зарядами действует единственная сила. Рассмотрение электрического взаимодействия при любых ситуациях принципиально не требует введения в теорию двух видов полей - электрических и магнитных (как в классической электродинамике). По СТО при переходе из одной системы отсчета в другую электрическая сила, как и любая другая сила, преобразуется по общей формуле преобразования силы [5, с. 81]. При выводе этой формулы в СТО не делается никаких предположений относительно природы физической силы. При переходе из одной системы отсчета в другую изменение силы имеет порядок величины  $v^2/c^2$ .

Согласно классической электродинамике, при двух движущихся зарядах, кроме электрического взаимодействия между ними, имеет место магнитное взаимодействие. По порядку величины последнее слабее электрического взаимодействия также в  $v^2/c^2$  раз (формула силы Лоренца).

С позиций СТО можно сформулировать следующие выводы:

1. Между зарядами действуют только силы одного рода. В принципе безразлично, как их называть, но по историческим причинам они названы "электромагнитными силами". По существу оправдано также более короткое название - "электрические силы".

2. Магнитное взаимодействие - это релятивистский эффект электрического взаимодействия. Оно является следствием того эмпирического факта, что скорость распространения взаимодействий во всех инерциальных системах отсчета конечна и равна фундаментальной физической постоянной  $c$  - скорости света в вакууме. Понятия "магнитный монополю" и "магнитный заряд" не имеют реального физического содержания.

3. Элементарные частицы с электрическим зарядом (электрон, протон и др.), а также нейтрон обладают магнитным моментом и механическим моментом импульса. Эти экспериментальные факты свидетельствуют о том, что частицы со спином  $1/2$

не могут быть точечными. По СТО покоящийся невращающийся объект не может иметь такого релятивистского эффекта электрического поля, как собственный магнитный момент. На этом основании, по мнению автора, в будущих субатомных теориях не исключено рассмотрение частиц со спином  $1/2$  как реально вращающихся объектов.

4. Магнитное поле является искусственным образованием, вспомогательным абстрактным полем для математического описания реального релятивистского эффекта.

Для объяснения данного утверждения можно привести следующий пример. Рассмотрим плоскость  $S$ , на которой находится точечный заряд. Допустим, что плоскость с зарядом движется в направлении нормали. Рассматриваем  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  - векторы в плоскости  $S$ . Векторы электрического поля  $\vec{E}$  расположены радиально по отношению к заряду. Поле  $\vec{E}$  совпадает с направлением действительного силового поля. Поле магнитной индукции  $\vec{B} \perp \vec{E}$ . Реально такого силового поля с направлением векторов  $\vec{B}$  не существует, ибо не существует магнитного заряда.

Допустим теперь, что параллельно первому заряду движется другой электрический заряд, находящийся также на плоскости  $S$ . Тогда на него действует кроме радиальной электростатической силы также радиальная (реальная!) сила Лоренца. Она перпендикулярна (вспомогательному!) полю  $\vec{B}$ . Алгебраическая сумма электростатической и лоренцевой сил и представляет собой действительную силу.

Таким образом, с познавательной точки зрения явным приоритетом обладают электрический заряд и электрическое поле как реальные физические объекты.

Вышесказанное ни в малейшей мере не умаляет рациональности и практического значения решения задач электродинамики с помощью уравнений Максвелла, симметричных относительно электрических и магнитных величин.

#### Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. - 4-е изд., перераб. - М.: Физматгиз, 1962. - 422 с. - Т. 2: Теоретическая физика.

2. Стручков В.В., Яворский Б.М. Вопросы современной физики: Пособие для учителей. - М.: Просвещение, 1973. - 480 с.
3. Орир Дж. Физика в 2-х т. (перев. с англ.). - М.: Мир, 1981. - Т. I. - 336 с.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике в 9-ти вып. (перев. с англ.). - М.: Мир, 1965 - 1967. - Вып. 5: Электричество и магнетизм. - 296 с.
5. Кард П.Г. Задачник по теории относительности. - Тарту, 1984. - Ч. II: Четырехмерный формализм. - 104 с.

## К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛОЖЕНИИ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

К.Э. Таркпеа

Изложение раздела электричества и магнетизма в рамках курса общей физики для нефизических специальностей требует предельно краткой и наглядной формулировки основных понятий. Это обусловлено как ограниченностью количества часов лекционного времени так и, увы, относительно низким уровнем общефизических знаний у большинства студентов. Курс электромагнетизма отличается от предыдущих разделов цикла общей физики значительной абстрактностью фундаментальных понятий. Например, студенты имеют уже по повседневному опыту некоторое представление о таких понятиях, как скорость и температура. Того же никак нельзя утверждать относительно основных величин, характеризующих электромагнитное поле. Этими величинами следует прежде всего считать напряженность электрического поля  $\vec{E}$  и магнитную индукцию  $\vec{B}$ , а также электрическую индукцию  $\vec{D}$  и напряженность магнитного поля  $\vec{H}$ . Опыт преподавания курса электромагнетизма студентам-химикам в ТГУ указывает на серьезные затруднения, возникающие у студентов с усвоением физического смысла названных величин по учебной литературе. Нередки случаи, когда студент подробно расскажет о природе гистерезиса ферромагнетиков как специфической зависимости магнитной индукции  $\vec{B}$  от напряженности поля  $\vec{H}$ ,

но тот же студент не сумеет ответить на вопрос, почему вообще для описания магнитного поля в среде нужны две физические величины  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  или чем различаются эти величины. Такая печальная ситуация во многом обусловлена и тем, что единственный подходящий по своему уровню и имеющийся на эстонском языке учебник И.В. Савельева [1] дает определения величин  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$  в слишком громоздкой форме. В связи с этим предметом настоящей статьи являются возможности упрощения трактовки векторов электромагнитного поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ .

Вопрос изложения основных понятий электромагнетизма неоднократно рассмотрен в методической литературе [2, 3]. Авторы этих работ ставят акцент на аналогию между электрическими и магнитными величинами. Например, избирая исходным понятием электростатики точечный заряд  $dq$ , а в качестве аналогичного понятия для магнетизма элемент тока  $i dl$  [2], они приводят к почти одинаковому виду закон Кулона

$$d^2F = k \frac{dq_1 \cdot dq_2}{r^2}$$

и закон Ампера

$$d^2F_{max} = k' \frac{i_1 dl_1 \cdot i_2 dl_2}{r^2}, \quad (I)$$

определяющие (максимальную) силу взаимодействия между двумя точечными зарядами (элементами тока) в вакууме. Здесь  $r$  - длина радиус-вектора  $\vec{r}$  второго точечного заряда (элемента тока) относительно первого,  $k$  и  $k'$  - коэффициенты пропорциональности, зависящие от системы единиц измерения. Исходя из (I), удобно определить силовые параметры электромагнитного поля  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ :

$$dE_1 = \frac{d^2F}{dq_2} \quad ; \quad dB_1 = \frac{d^2F_{max}}{i_2 dl_2} \quad (2)$$

Из (I) и (2) вытекают формулы для напряженности электрического поля (магнитной индукции) точечного заряда (элемента тока)

$$dE_1 = k \frac{dq_1}{r^2} ; \quad dB_1 = k' \frac{i_1 dl_1}{r^2} \quad (3)$$

Необходимо отметить, что формула (3) для  $dB_1$  справедлива только в том случае, когда вектор  $\vec{r}$  перпендикулярен элементу тока  $i_1 d\vec{l}_1$ .

Общим недостатком вышеизложенной схемы следует считать отсутствие информации о направлениях векторов  $d^2\vec{F}$ ,  $d^2\vec{F}_{max}$ ,  $d\vec{E}_1$  и  $d\vec{B}_1$ . Поэтому для пояснения физического смысла магнитной индукции целесообразно использовать аналогию между электрическим диполем и магнитным токовым контуром. На диполь с электрическим моментом  $\vec{p}_e = q\vec{e}$  действует в электрическом поле крутящий момент

$$\vec{M} = [\vec{p}_e \times \vec{E}] .$$

Следовательно, величина  $E$  может быть определена как максимальный крутящий момент  $M_{max}$  действующий на диполь с единичным электрическим моментом

$$E = \frac{M_{max}}{pe} \quad (4)$$

При этом направление вектора  $\vec{E}$  совпадает с равновесным направлением  $\vec{p}_e$  ( $M = 0$ ).

В качестве исходного понятия при рассмотрении магнитного поля выберем магнитный момент контура

$$\vec{p}_m = iS\vec{n} ,$$

где  $S$  - площадь контура. Направление единичного нормаль-вектора контура  $\vec{n}$  определяется правилом буравчика. Теперь можно дать определение магнитной индукции  $B$  по формуле

$$B = \frac{M_{max}}{p_m} , \quad (5)$$

где направление вектора  $\vec{B}$  совпадает с равновесным направлением  $\vec{r}_m$ , т.е. наблюдается полная аналогия с формулой (4). Аналогом векторной формулы для напряженности поля точечного заряда

$$d\vec{E}_1 = k \frac{dq_1}{r^3} \cdot \vec{r} \quad (6)$$

является закон Био-Савара-Лапласа [1]

$$d\vec{B}_1 = k' \frac{[i_1 d\vec{e}_1 \times \vec{r}]}{r^3} \quad (7)$$

С учетом (6) и (7) законы Кулона и Ампера могут быть представлены в форме

$$d^2\vec{F} = dq_2 \cdot d\vec{E}_1; \quad d^2\vec{F} = [i_2 d\vec{e}_2 \times d\vec{B}_1], \quad (8)$$

подчеркивающей аналогию между ними. Описанный здесь подход, разумеется, требует подробного разъяснения понятия векторного произведения.

По утверждению авторов [3], векторы электрической индукции  $\vec{D}$  и напряженности магнитного поля  $\vec{H}$ , используемые для описания электромагнитного поля в веществе, прямого физического смысла не имеют. С этим трудно согласиться, если даже не возбуждать дискуссию о различиях между прямым и косвенным физическим смыслом. Исходной точкой при осмыслении величин  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ , по-видимому, следует избрать тот факт, что экспериментально регистрируемое электрическое (или магнитное) поле, характеризуемое силовым параметром  $\vec{E}$  ( $\vec{B}$ ), всегда является суперпозицией поля  $\vec{E}_q$  ( $\vec{B}_z$ ) макроскопических зарядов (токов) и поля  $\vec{E}'$  ( $\vec{B}'$ ), обусловленного электрическими (магнитными) моментами микрочастиц. Следовательно, выполняются равенства

$$\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}' \quad \text{и} \quad \vec{B} = \vec{B}_z + \vec{B}' \quad (9)$$

Поле  $\vec{E}'$  ( $\vec{B}'$ ) описывается вектором поляризации  $\vec{P}$  (намагниченности  $\vec{j}$ ), который в случае однородной среды определяется как суммарный дипольный (магнитный) момент единицы объема вещества. Поляризационное поле  $\vec{E}'$  всегда противоположно полю  $\vec{E}_q$  и вектору  $\vec{P}$ , а поле намагниченности  $\vec{B}'$  в пара- и ферромагнетиках имеет одинаковое направление с полем  $\vec{B}_i$  и с вектором  $\vec{j}$ . Поэтому для величин  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  имеем

$$\vec{E} = \vec{E}_q - \vec{E}' ; \quad \vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}' ,$$

откуда

$$\vec{E}_q = \vec{E} + \vec{E}' ; \quad \vec{B}_i = \vec{B} - \vec{B}' . \quad (I0)$$

В качестве характеристик полей  $\vec{E}_q$  и  $\vec{B}_i$  целесообразно ввести величины  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ , определяемые соотношениями

$$\vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{P} ; \quad \vec{H} = \vec{H}_0 - \vec{j} , \quad (II)$$

где  $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}$  и  $\vec{H}_0 = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ . Формулы (II) получены из (I0) путем умножения на электрическую постоянную  $\epsilon_0$  (деления на магнитную постоянную  $\mu_0$ ). Вектор  $\vec{D}$  пропорционален макроскопическому заряду и не зависит от среды. Он является мерой способности заряда порождать электрическое поле. В диэлектрике эта способность расходуется на создание реально измеряемого поля  $\vec{E}$  (член  $\vec{D}_0$  в первой формуле II) и на преодоление поляризации вещества (член  $\vec{P}$ ). Вектор  $\vec{H}$  характеризует аналогично не зависящую от среды способность тока порождать магнитное поле. В пара- или ферромагнетике реальное магнитное поле с индукцией  $\vec{B}$  (член  $\vec{H}_0$ ) обусловлено не только макроскопическим током (член  $\vec{H}$ ), но и намагниченностью  $\vec{j}$  вещества. Величина  $\vec{D}_0$  ( $\vec{H}_0$ ) определяется зарядом  $q_0$  (током  $i_0$ ), вызывающим в вакууме то же самое поле  $\vec{E}$  ( $\vec{B}$ ), создаваемое в веществе зарядом  $q$  (током  $i$ ). Так как диэлектрик ослабляет поле  $\vec{E}_q$ , то в нем  $q > q_0$  и  $\vec{D} > \vec{D}_0$  (в веществе заряд должен быть больше). Пара- и ферромагнетик усиливают поле  $\vec{B}_i$ , и поэтому в них  $i < i_0$  и  $\vec{H} < \vec{H}_0$  (ток должен быть сильнее в случае вакуума). В диамагнетике вектор  $\vec{j}$  противоположен  $\vec{H}$  и соответственно  $\vec{H} > \vec{H}_0$ .

Используя соответственно понятия электрической (магнитной) проницаемости  $\epsilon (\mu)$  и восприимчивости  $\epsilon (\chi)$ , определяемые формулами

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{D}{D_0} ; & \epsilon &= \frac{P}{D_0} ; \\ \mu &= \frac{H_0}{H} ; & \chi &= \frac{J}{H} , \end{aligned} \quad (I2)$$

можно привести (II) к виду

$$\epsilon = 1 + \epsilon ; \quad \mu = 1 + \chi . \quad (I3)$$

Здесь величина  $\epsilon$  определяет, во сколько раз  $q$  в среде должно быть больше  $q_0$ . Величина  $\mu$  определяет, во сколько раз  $i$  в случае пара- или ферромагнетика может быть меньше  $i_0$ . Кстати, формулы для  $\epsilon$  и  $\mu$  (I2) физически эквивалентны общепринятым определениям

$$\epsilon = \frac{E_q}{E} \quad \text{и} \quad \mu = \frac{B}{B_i} .$$

Во всех формулах (9), (I0), (II) и (I3) выражается одна и та же идея сложения полей  $E_q (B_i)$  и  $E' (B')$ . Поэтому трудно понять утверждение авторов [3] об отсутствии прямого физического смысла у одного из слагаемых.

Вышеизложенный аналогово-сравнительный подход используется в курсе лекций для студентов-химиков в ТГУ, и результаты, судя по ответам на экзамене, весьма неплохие. Самостоятельную тему для дискуссии представляют собой сделанные авторами [2] и [3] терминологические изменения. Например, ими предложено назвать величину  $\vec{B}$  напряженностью магнитного поля, так как она по существу является аналогом величины  $\vec{E}$ . Это, по-видимому, обоснованно, но только в том случае, если переход на новую терминологию является всеобщим. С целью предотвращения путаницы в курсе лекций для студентов-химиков используется та же терминология и система обозначений, которая принята в основном учебнике [1]. При построении аналогий следует также не забывать о том, что геометрия электростати-

ческого и магнитного полей принципиально различна. Поэтому аналогия между электрическими и магнитными величинами может способствовать лишь запоминанию материала, но ее никак нельзя рассматривать в качестве доказательства при логическом рассуждении.

### Литература

1. Saveljev I. Füüsika üldkursus 2: Elekter. — Tln.: Valgus, 1978. — 327 lk.
2. Удер Ю.Ф., Рузалеп Э.Й. Об одном возможном сравнительно-аналоговом изложении электро- и магнитостатики в общем курсе физики // В помощь преподавателю. — Тарту: ТГУ, 1983. — Вып. 8: Вопросы методики преподавания физики в вузе. — С. 31-37.
3. Лойде Р.-К.Р., Паккас Р.Р., Суурварик П.А. К методике изложения некоторых основных понятий электромагнетизма в курсе общей физики//В помощь преподавателю — Тарту: ТГУ, 1982. — Вып. 7: Вопросы методики преподавания физики в вузе. — С. 30-38.

### ГЕТЕРОПЕРЕХОД

А.И. Розенталь

В современных разработках полупроводниковых приборов в широком масштабе применяются гетеропереходы. Таким образом, выгодно сочетая материалы, получают возможность оптимизировать характеристики этих приборов, пользуясь же искусством изменять электрические и оптические свойства вещества с помощью квантово-размерных гетероструктур, выходят на совершенно новые рубежи конструирования.

Однако в учебниках, монографиях и статьях по полупроводникам и полупроводниковым приборам до сих пор неоднозначно трактуется термин "гетеропереход". Читатель вправе недоумевать. Ведь прошло уже двадцать восемь лет активной деятельности в области полупроводниковых гетеропереходов (кстати,

пристальное внимание к гомопереходам дольше лишь на десяток лет). Так или иначе, многочисленные определения, предложенные у нас и за рубежом, нередко принципиально отличаются друг от друга. Исключение не составляют и определения, приводимые в энциклопедической и нормативно-технической литературе.

Прямым поводом для написания настоящей заметки послужила случайная справка о термине в "Эстонской советский энциклопедии" [1], точка зрения которой вызывает серьезные возражения.

Ниже будут рассмотрены значения, приписываемые рядом авторов термину "гетеропереход", и попутно - классы полупроводниковых гетеропереходов. Цель - найти компромиссное определение, которое, не претендуя на общность, было бы, по возможности, полным.

Сделаем сначала краткий экскурс в этимологию слова "гетеропереход". Иноязычный элемент слова происходит от греческого *heteros* в значении "разно". Через прилагательное "гетерогенный", или разнородный, слову "гетеропереход" синонимично выражение "гетерогенный переход" (ср. гомопереход - гомогенный переход).

Определение понятия "переход" (по-английски *junction*) в полупроводниковой терминологии, казалось бы, установилось - по большей части им считается "область в полупроводнике между двумя квазиоднородными частями ... с различными типами электропроводности или разными величинами удельной электрической проводимости", как, в частности, звучит определение, данное в [2]. Заметим, что цитата неполная. К опущению нам удобнее вернуться несколько позже. Было бы идеально, если бы процитированное определение охватывало и гетеропереходы. Но это не так - в приведенном виде оно распространяется лишь на всевозможные гомопереходы.

Приведем теперь несовпадающие толкования термина "гетеропереход", взятые из источников разного назначения. Хотя список получился длинным, мы не ручаемся за его полноту. Итак, гетеропереход - это:

1) "граница раздела между двумя различными веществами" [3];

2) "композиционно изменяющаяся фаза, которая образуется, когда соединяются два химически неодинаковых вещества" /4/;

3) класс "структур с поверхностью раздела, в которых по меньшей мере одна составляющая является полупроводником, за исключением частного случая, когда оба материала одинаковы или различаются только типом проводимости" /5/;

4) "контакт двух различных по химическому составу полупроводников" /6/;

5) "переход между полупроводниками, которые различаются по их примесной проводимости, а также по их атомному или сплавному составу" /7/;

6) "переход в монокристалле между двумя различными полупроводниками" /8/;

7) "переходной слой с существующим там диффузионным электрическим полем между двумя различными полупроводниками, которые отличаются друг от друга шириной энергетических зон" /9/;

8) "запорный слой, возникающий в месте соприкосновения двух различных полупроводников (например Ge и GaAs)" /1/.

Легко увидеть, что каждое из этих определений имеет свою важную отличительную черту. Но прежде чем перейти к их анализу, полезно обсудить классификацию полупроводниковых гетеропереходов.

В полупроводниковых гомопереходах, к которым относятся электронно-дырочные ( $p-n$ ), электронно-электронные ( $n^+-n$ ) и дырочно-дырочные ( $p^+-p$ ) переходы, а также переходы, построенные на комбинации с полупроводником собственной проводимости ( $p-i$  и  $n-i$ ), ширина запрещенной зоны, вообще говоря, не меняется; возможно лишь сужение энергетической щели в результате сильного легирования. Потенциальные барьеры для электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне близки и определяются объемным зарядом, или диффузионным электрическим полем. Напротив, в гетеропереходе ширина запрещенной зоны не остается постоянной. Имеется три разновидности резкой стыковки: совмещеннощелевая - узкая щель на гетерогранице находится полностью в пределах широкой, ступенчато-щелевая - узкая щель частично перекрывается широкой и разрывно-щелевая - узкая щель расположена выше или ниже ши-

рокой. Во всех случаях в определение потенциальных барьеров, кроме объемного заряда, вносят вклад и разрывы зон. Многообразие зонных профилей гетеропереходов служит дополнительной степенью свободы при конструировании полупроводниковых приборов.

Гетеропереход называется изотипным, если он образован полупроводниками одного типа проводимости, и анизотипным, если проводимость меняется с электронной на дырочную или наоборот. Подчеркнем, что переход по легированию может быть смещен относительно перехода по химическому составу.

При создании полупроводниковых гетеропереходов важное значение имеет совместимость веществ в кристаллохимическом смысле. Предпочтение следует отдать решеткам, обладающим одинаковой химической природой и одинаковой кристаллической структурой. Но и тогда к наилучшим результатам приводит использование материалов с очень близкими параметрами решетки. Несоответствие параметров решетки является основной причиной возникновения дефектов на границе раздела. С такими дефектами связан очень неудобный канал туннелирования и рекомбинации. К тому же эти дефекты, присутствуя в количествах, больших, чем общее количество примесных центров, ответственных за объемный заряд, могут вызвать значительное изменение барьеров в переходе. Отметим, что слои объемного заряда в анизотипных гетеропереходах, в отличие от  $p-n$ -переходов, при определенных значениях параметров полупроводников могут быть двусторонне обогащенными. Кроме того, в слое объемного заряда гетероперехода может наступить вырождение, а также иметь место инверсия.

Вернемся к вопросу о решетках. Они могут быть двух классов: согласованные и несогласованные. Чтобы достичь хорошего совпадения параметров решетки, в качестве одного или обоих компонентов гетероперехода применяют "изопериодические" тройные или четверные твердые растворы бинарных соединений между элементами тех же групп, что и в бинарной подложке. Несогласованность решеток на несколько процентов является достаточной, чтобы погубить свойства гетероперехода. Однако такая несогласованность может оказаться вполне приемлемой в композиционной сверхрешетке (короткопериодной структуре с

чередующимися гетерослоями), где несогласованность снимается упругим напряжением, обуславливающим двумерное сжатие слоев одного состава и двумерное растяжение слоев другого состава.

Дальнейшую классификацию гетеропереходов можно провести, исходя из резкости перехода. Гетеропереход будем считать резким, если размытость, или "толщина", границы раздела составляет не более нескольких атомарных монослоев. Такому требованию удовлетворяют гетеропереходы, выраженные в строго выдержанной обстановке методами молекулярной или металлоорганической эпитаксии. В этих переходах можно пренебречь эффектами сглаживания, т.е. непрерывного изменения химического и примесного состава вещества в переходе. Гетеропереход будем считать плавным (градиентным), если сглаживание имеет место на более протяженном отрезке, который, однако, по нашему мнению, не должен превышать нескольких длин Дебая. Этот вопрос будет еще раз затронут в конце заметки.

Распределение гетеропереходов по классам можно продолжить. В оптоэлектронных приборах имеет значение прямозонность полупроводника по ту или иную сторону гетерограницы. Далее, помимо планарных, встречаются переходы и другой геометрической формы. Но эти обстоятельства в данном случае роли не играют.

Обратимся вновь к разным толкованиям термина "гетеропереход". Первое и второе место в списке занимают самые общие из них, охватывающие кристаллические, аморфные и стеклообразные системы, их комбинации, контакты твердых тел с жидкими металлами, полупроводниками и диэлектриками. Вообще говоря, под эти толкования можно подвести полупроводниковый гетеропереход в процессе его роста из жидкой фазы. Несмотря на это, польза такой интерпретации сомнительна, поскольку "истинный" полупроводниковый переход сведен к мелкой частности. Наконец, нам кажется, нет смысла вторгаться термином "гетеропереход" в сферу вне физики и техники полупроводников.

Третье толкование несколько уже. Однако оно также слишком общее, могущее привести к неоднозначностям, так как к полупроводниковым гетеропереходам, наряду с переходом полупроводник - полупроводник, относят и другие: диэлектрик -

полупроводник и металл - полупроводник. Отметим, что переход металл-полупроводник включен и в определение понятия "полупроводниковый переход", о котором говорилось выше, только соответствующая часть цитаты была нами опущена.

Следующее, четвертое толкование сводит один термин к другому - "контакт", несущему традиционную специфическую нагрузку. В связи с этим невольно напоминают о себе прижимность присоединительных электрических контактов и наличие зазоров, прослоек и неоднородностей в контактах (переходах) металла - полупроводник. Технология последних осталась такой, что под контактом следует понимать весьма сложную структуру. Поэтому лучше не употреблять слова "контакт" в определении понятия "гетеропереход".

В пятом определении, взятом из американского стандарта, бросается в глаза неоправданное выдвигание на первое место различия в примесной проводимости, которая в изотипном случае может вообще отсутствовать.

Шестое толкование берет за основу монокристаллические вещества. Такое ограничение весьма разумно, если сосредоточить внимание на качественных полупроводниковых гетеропереходах. Однако, как следует из сказанного выше, встречающийся в определении термин "переход" сам требует осмысления.

Седьмое толкование привлекательно тем, что в понятие "гетеропереход" включены объемнозарядные слои у гетерограницы. Таким образом мы получаем возможность говорить о формах барьера или ямы (впадины) как о характеристиках гетероперехода и не упускаем из виду, что процессы в слое объемного заряда в ряде случаев являются решающими при использовании гетеропереходов. Сама формулировка, однако, несколько обескураживает тем, что в ней делается упор на различие ширины всех энергетических зон, а не только запрещенной.

О восьмом определении уже упоминалось. В нем объемнозарядная область также отнесена к гетеропереходу. Однако границы понятия сужены до одной только категории гетеропереходов: переходов с двусторонним обеднением.

Исходя из вышесказанного, сформулируем по возможности полное, но специальное определение понятия "полупроводниковый гетеропереход":

Гетеропереходом называют переходный слой между различными монокристаллическими полупроводниками, в пределах которого меняется, на расстоянии до нескольких длин Дебая, химический и примесный состав и образуется объемный заряд.

Несколько комментариев.

При определенных химических и примесных составах полупроводников и концентрациях примесей в них можно получить гетеропереходы, в которых объемный заряд отсутствует. Такая ситуация как будто противоречит определению. На деле из определения не следует неперенное присутствие объемного заряда в переходном слое.

Полупроводниковый переход, по аналогии с только что приведенным определением, — это переходный слой между одинаковыми или различными монокристаллическими полупроводниками, в пределах которого меняется, на расстоянии до нескольких длин Дебая, примесный, а в последнем случае и химический состав и образуется объемный заряд.

Что касается полупроводниковых слоев, в которых химический состав изменяется на расстоянии, значительно превышающим длину Дебая, то их вряд ли имеет смысл относить к плавным гетеропереходам, как это иногда делают. Ведь в таком случае любой промежуточный состав можно считать образующим. Скорее это особый класс гетероструктур. К гетероструктурам следует отнести также случаи, когда переход по легированию оказывается существенно смещенным относительно перехода по химическому составу.

#### Литература

1. Pooljuht // Eesti nõukogude entsüklopeedia. — 1974. — Kd. — 6. — Lk. 185.
2. Полупроводниковые приборы ... Терминология // Сб. рек. терминов. — М.: АН СССР. Комитет научн.-техн. терминологии, 1965. — Вып. 69.
3. Шарма Б.Л., Пурухит Р.К. Полупроводниковые гетеропереходы / Пер. с англ. — М., 1979.
4. Chez R., Small M.B. // J. Cryst. Growth. — 1981. — Vol. 52. — P. 699-709.

5. Tansley T.L. // Semiconductors and Semimetals/ Eds.  
R.K.Willardson, A.C.Beer. - New York, 1971. - Vol. 7,  
Pt. A. - P. 293-368.
6. Алферов Ж.И., Гуревич С.А. // Физическая энциклопедия.  
-М., 1988. -Т. I. - С. 446-448.
7. IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronics  
Terms. - IEEE, 1984.
8. Кейси Х., Паниш М. Лазеры на гетероструктурах / Пер. с  
англ. - М., 1981. - Т. I.
9. Пасынков В.В., Чиркин Л.К., Шинков А.Д. Полупроводниковые  
приборы: Учебн. пособие для студентов вузов. - М.,  
1981. - 3-е изд., перераб. и доп.

О КВАНТОВЫХ ЧИСЛАХ В ИЗЛОЖЕНИИ АТОМА ВОДОРОДА  
В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

В.А. Веймер, Р.Й. Манкин

I. Введение

В учебниках по курсу общей физики, утвержденных в качестве основных по учебной программе высшей школы [1, 2], квантовомеханическое рассмотрение атома водорода на основе уравнения Шредингера остается несколько декларативным. Утверждается, что из уравнения Шредингера и добавочных физических условий, налагаемых на волновую функцию, следует квантование энергии и момента импульса, далее представляются конечные формулы, которые затем подлежат физической интерпретации. Такой непоследовательный способ представления темы имеет свои объективные причины: загруженность учебных программ при заданном количестве часов, недостаточная математическая подготовленность студентов и т.д.

Мы полагаем, что, несмотря на эти причины, для более глубокого понимания квантовой механики, имеющей фундаментальное значение для физической картины мира, необходимо на реальном физическом примере (атом водорода) продемонстрировать логически последовательное введение некоторых квантовых чисел, исходя из математической модели, то есть из уравнения

Шредингера. В стандартных учебниках квантовой механики к проблеме квантовых чисел атома водорода подходят исходя из собственных значений оператора квадрата момента импульса. Этому сопутствует введение сферических функций и описание их свойств [3, 4]. В курсе общей физики на это не хватает ни времени, ни предварительных математических знаний студентов. Не претендуя на оригинальность, предлагаем одну, математически относительно простую возможность введения главного и орбитального квантовых чисел, исходя только из радиальной части стационарного уравнения Шредингера. Содержание темы может быть рассмотрено в рамках одного-двух академических часов, предпочтительно в форме семинара.

## 2. Главное квантовое число

Описание атома водорода начнем с уравнения Шредингера для стационарных состояний:

$$\Delta \psi + \left( \frac{\alpha}{r} - \beta^2 \right) \psi = 0, \quad (I)$$

где  $\Delta$  - оператор Лапласа,  $\psi$  - волновая функция стационарных состояний,  $\alpha = 2e^2 m_e / \hbar^2$ ,  $\beta^2 = -2Em_e / \hbar^2$ ,  $m_e$  и  $e$  - масса и заряд электрона,  $E$  - его энергия и  $\hbar$  - постоянная Планка. Волновая функция  $\psi$  по своему физическому смыслу всюду в пространстве должна быть конечной.

При решении дифференциального уравнения (I) естественно применить сферические координаты  $(r, \theta, \varphi)$ , и оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\hbar^2 r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (2)$$

Подставив оператор Лапласа в виде (2) в уравнение (I), можем применить метод разделения переменных, то есть искать волновую функцию в виде:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y(\theta, \varphi).$$

После разделения переменных получим:

$$\Delta_r R(r) + \left( \frac{\lambda}{r^2} + \frac{\alpha}{r} - \beta^2 \right) R(r) = 0 \quad (3)$$

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y(\theta, \varphi) - \lambda Y(\theta, \varphi) = 0, \quad (4)$$

где  $\lambda$  - постоянная разделения переменных.

Далее рассмотрим уравнение (3). Нас интересуют такие волновые функции, которые описывают связанные состояния электронов в атоме, то есть  $R(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Кроме того, волновая функция  $R(r)$  должна быть конечной в каждой точке пространства (в том числе и в точке  $r = 0$ ). Если  $r \rightarrow \infty$ , то в уравнении (3) доминируют члены, где нет отрицательных степеней  $r$ . Следовательно, при  $r \rightarrow \infty$  волновая функция должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r) - \beta^2 R(r) = 0.$$

Общим решением этого уравнения

$$R(r) = c_1 e^{-\beta r} + c_2 e^{\beta r}.$$

Так как второе слагаемое при  $r \rightarrow \infty$  неограниченно возрастет, то, учитывая требование конечности  $R(r)$ , следует  $c_2$  принять равным нулю. Следовательно, при  $r \rightarrow \infty$ ,  $R(r) \sim e^{-\beta r}$ . Точное решение уравнения (3) ищем в виде  $R(r) = f(r) e^{-\beta r}$ , где при

$$r \rightarrow \infty \quad f(r) < e^{\beta r}, \quad (5)$$

то есть  $f(r)$  должна расти медленнее, чем  $e^{\beta r}$ , так как в противном случае  $R(r)$  будет описывать не связанное с ядром состояние электрона. Подставив  $R(r)$  искомого вида в уравнение (3), получим уравнение для  $f(r)$ :

$$\frac{d^2}{dr^2} f(r) + 2\left(\frac{1}{r} - \beta\right) \frac{d}{dr} f(r) + \left(\frac{\lambda}{r^2} + \frac{1}{r} (\alpha - 2\beta)\right) f(r) = 0, \quad (6)$$

решение которого ищем в виде ряда

$$\psi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k. \quad (7)$$

Отрицательных степеней  $r$  в этом ряду быть не должно, так как  $R(r)$  должно быть конечным при  $r = 0$ .

Подставив ряд (7) в уравнение (6), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k [(k(k+1) + \lambda) a_k + (\alpha - 2\beta k) a_{k-1}] = 0, \quad a_{-1} = 0.$$

Это равенство может иметь место только в том случае, если выражение в квадратных скобках равно нулю при любых  $k$ . Поэтому

$$a_k (k(k+1) + \lambda) = (2\beta k - \alpha) a_{k-1}. \quad (8)$$

Рассмотрим связь (8). Начиная с некоторого значения  $k > N$ , соотношение  $a_k/a_{k-1} > \beta(1+\epsilon)/k$ , где  $1 > \epsilon > 0$ . С другой стороны, коэффициенты  $v_k$  разложения экспоненциальной функции  $\exp[(1+\epsilon)\beta r]$  удовлетворяют при любых  $k$  условиям  $v_k/v_{k+1} = \beta(1+\epsilon)/k$  [5].

Следовательно, начиная с некоторого значения  $k$ , коэффициенты уменьшаются медленнее, чем коэффициенты  $v_k$ , из-за чего, при достаточно больших  $k$ , будет  $\psi(r) > \exp[(1+\epsilon)\beta r]$ . Последнее неравенство находится в противоречии с условием (5). Поэтому условие (5) удовлетворяется только тогда, если прервать ряд (7) при некотором значении  $k = n - 1$  ( $n = 1, 2, 3 \dots$ ). Итак, функцию  $\psi(r)$  следует искать в виде полинома, где  $n - 1$  предельная степень полинома. Так как в этом случае  $a_n = 0$  и  $a_{n-1} \neq 0$ , то на основании формулы (8)  $n = \alpha/2\beta$ . Учитывая, что  $\alpha = 2e^2 m_e / \hbar^2$  и  $\beta^2 = -2E m_e / \hbar^2$  получим:

$$E = - \frac{e^4 m_e}{2 \hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

Тем самым получим зависимость энергии  $E$  электрона от главного квантового числа  $n$ . Аналогичные рассуждения приводятся

во многих учебниках квантовой механики, однако следующие рассуждения авторам в литературе не встречались.

### 3. Орбитальное квантовое число

До сих пор введенная при разделении переменных постоянная могла быть произвольным числом. Оказывается, что требование конечности волновой функции при  $\ell = 0$  существенно ограничивает возможные значения  $\lambda$ .

Так как  $a_{-1} = 0$ , то из соотношения (8) получим, что  $a_0 \lambda = 0$ . Следовательно, если  $\lambda = 0$ , то  $a_0$  — произвольная постоянная (определяется из условия нормировки) и  $a_0 = 0$ , если  $\lambda \neq 0$ . Поэтому, если  $\lambda = 0$ , то ряд (7) начинается со слагаемого  $a_0$ . Если  $\lambda \neq 0$ , то согласно (8)  $a_1(2 + \lambda) = 0$ , откуда следует, что  $a_1$  — произвольная постоянная, если  $\lambda = -2$ , и  $a_1 = 0$ , если  $\lambda \neq 0, -2$ . Поэтому в случае  $\lambda = -2$  ряд (7) начинается членом  $a_1 r$ . Рассуждая аналогично, приходим к выводу, что ряд начинается членом  $a_\ell r^\ell$ , если  $\lambda = -\ell(\ell + 1)$ , где  $\ell$  положительное целое число. Если  $\lambda \neq -\ell(\ell + 1)$ , то все множители  $a_k$  равны нулю и отличного от нуля физического решения уравнения (3) не существует. Так как в случае фиксированного значения главного квантового числа  $n$  максимальное значение  $k = n - 1$ , то очевидно, что подходящее отличное от нуля решение существует только тогда, когда  $\ell \leq n - 1$ . Следовательно, возможными значениями орбитального квантового числа будут  $\ell = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Ряд (7) начинается с члена  $a_\ell r^\ell$  и кончается членом  $a_{n-1} r^{n-1}$ . Тот факт, что  $\hbar^2 \ell(\ell + 1)$  есть собственное значение оператора квадрата момента импульса, следует уже непосредственно из уравнения (4), если раньше доказано, что  $-\hbar^2 \Delta_{\theta, \varphi}$  есть оператор квадрата момента импульса.

### Литература

1. Детлаф А.А., Яворский Б.М., Милковская Л.Б. Курс физики. — М.: Высшая школа, 1979. — Т. 3.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. — М.: Наука, 1979. — Т. 3.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. - М.: Наука, 1974. - Т. 3. - 752 с.
4. Флюге Э. Задачи по квантовой механике. - М.: Мир, 1974. - 341 с.
5. Lias R. Kvantmehhaanika. - Tartu: TRÜ, 1966. - 242 lk.

## ОБ ИЗЛОЖЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В КУРСЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Ю.Я. Лембра

В данном сообщении мы рассмотрим некоторые проблемы преподавания нестационарной теории возмущений в курсе квантовой механики, которые до сих пор в учебной литературе рациональным образом не решены. Попутно отметим, что союзные издательства не обращают должного внимания на выпуск учебников по квантовой механике. Последнее издание учебника Соколова и др. выпущено в 1979 г., Блохинцева - в 1983 г., причем второй из них не содержит релятивистской квантовой механики.

### 1. Сравнение постоянного и периодического возмущений

В этом разделе мы изучаем две разновидности возмущений, которые часто встречаются в приложениях: постоянное и периодическое возмущения. Нашей целью является получение таблицы, показывающей, как результаты периодического возмущения можно получить из результатов постоянного возмущения. Такая аналогия до сих пор не была должным образом подчеркнута в учебной литературе.

Исходим в первом порядке теории возмущений из общей формулы для вероятности перехода системы  $P_{kn}$  из состояния  $n$  в состояние  $k$  в течение времени  $\tau$  (см., напр., [1, с. 236])

$$P_{kn} = \frac{1}{k^2} \left| \int_0^\tau H'_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t} dt \right|^2. \quad (I)$$

Здесь  $H'_{kn}$  - матричный элемент оператора возмущения

$$H'_{kn}(t) = \int \psi_k^*(x) \hat{H}'(x, t) \psi_n(x) dx, \quad (2)$$

а величина  $\omega_{kn}$  определяется через энергии стационарных состояний

$$\omega_{kn} = \frac{E_k - E_n}{\hbar}. \quad (3)$$

Рассмотрим сначала постоянное возмущение, оператор которого не зависит от времени. Тогда на основе (2) матричный элемент оператора возмущения является постоянным комплексным числом, и из (1) получим

$$P_{kn} = \frac{1}{\hbar^2} |H'_{kn}|^2 \left| \int_0^{\tau} e^{i\omega_{kn}t} dt \right|^2. \quad (4)$$

При больших значениях  $\tau$  (по сравнению с величиной  $1/\omega_{kn}$ ) можно обычным образом ввести скорость перехода  $w_{kn} = P_{kn}/\tau$ , для которой имеет место формула

$$w_{kn} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{kn}|^2 \delta(E_k - E_n). \quad (5)$$

В случае перехода в состояние со сплошным спектром энергии из (5) получается золотое правило Ферми:

$$w_{kn} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{kn}|^2 \rho(E_k) \quad \text{при } E_k = E_n, \quad (6)$$

где  $\rho(E_k)$  - плотность числа конечных состояний.

В слабых учебных группах мы советуем еще провести "пересказ" формулы (6): согласно золотому правилу Ферми, скорость

перехода под действием постоянного возмущения пропорциональна квадрату модуля матричного элемента оператора возмущения и плотности числа конечных состояний.

Переходим к рассмотрению периодического возмущения, оператор которого выражается так:

$$\hat{H}'(x, t) = \hat{W}^\pm(x) e^{\pm i\omega t}, \quad (7)$$

где  $\omega$  - положительная постоянная.

С учетом формул (1), (2) и (7) получим

$$w_{kn} = \frac{1}{k^2} |W_{kn}^\pm|^2 \left| \int_0^\tau e^{i(\omega_{kn} \pm \omega)t} dt \right|^2, \quad (8)$$

где  $W_{kn}^\pm$  - матричный элемент оператора  $\hat{W}^\pm$ .

Сравнение формул (4) и (8) показывает, что подробных вычислений в случае периодического возмущения не стоит делать. Все результаты можно получить от постоянного возмущения с помощью приведенной ниже таблицы.

Возмущение	
постоянное	периодическое
$H'_{kn}$	$W_{kn}^\pm$
$\omega_{kn}$	$\omega_{kn} \pm \omega$
$E_k - E_n$	$E_k - E_n \pm k\omega$

Отметим, что здесь мы вывели таблицу в первом порядке теории возмущений. Однако если учесть свойства коэффициентов в разложении возмущенной волновой функции, то таблица действует в произвольном порядке.

В качестве иллюстрации к таблице перепишем формулу (5) для периодического возмущения:

$$w_{kn} = \frac{2\pi}{k} |W_{kn}^\pm|^2 \delta(E_k - E_n \pm k\omega). \quad (9)$$

Из формул (7) и (9) следует, напр., что испускание фотона обусловлено возмущением типа  $e^{i\omega t}$ , а поглощение фотона - возмущением типа  $e^{-i\omega t}$ .

## 2. Простое упражнение

Задачи по нестационарной теории возмущений в сборниках [2, 3] требуют громоздких вычислений. В связи с этим мы предлагаем здесь простое упражнение, которое можно использовать на аудиторных занятиях.

Линейный гармонический осциллятор ( $m$  - масса,  $q$  - заряд,  $\omega$  - частота собственных колебаний) подвергается воздействию однородного электрического поля, направленного вдоль оси колебаний и изменяющегося во времени по линейному закону

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \omega t, \quad (I0)$$

где  $\mathcal{E}_0$  - постоянная. Считая, что в начальный момент осциллятор находился в основном состоянии, найти в первом порядке теории возмущений вероятности возбуждения различных его состояний в течение промежутка времени  $\tau$ .

Может возникнуть вопрос о практическом осуществлении закономерности (I0). В качестве одного из ответов можно предложить следующее. Используем переменный ток частоты  $\omega' \ll \omega$ . Тогда для моментов времени  $t$  в промежутке  $0 \leq t \leq \tau$ , где  $\tau \ll 1/\omega'$ , закон (I0) выполняется.

С учетом формулы (I0) получим оператор возмущения в следующей форме:

$$\hat{H}'(x, t) = -q \mathcal{E}_0 x \omega t, \quad (II)$$

где  $x$  - координата.

Вероятность перехода под влиянием возмущения (II) получим, исходя из формулы (I), для которой по условию задачи в начальном состоянии колебательное квантовое число равно нулю ( $n = 0$ ).

Матричный элемент оператора возмущения получим из формул (2) и (II)

$$\kappa'_{k_0}(t) = -q \xi_0 x_{k_0} \omega t, \quad (12)$$

где  $x_{k_0}$  — матричный элемент координаты осциллятора, взятый по волновым функциям стационарных состояний. Такой матричный элемент отличается от нуля только в том случае, если колебательные квантовые числа отличаются на единицу. В нашем случае это означает, что от нуля отличается только величина  $x_{10}$ . Другими словами, под действием возмущения (II) в первом порядке теории возмущений возбуждается только первый возбужденный уровень.

Учитывая значение  $x_{10}$ , получим из (12)

$$\kappa'_{10} = -q \xi_0 t \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2m}}. \quad (13)$$

Для вычисления вероятности перехода  $P_{10}$  по формуле (I) надо знать еще величину  $\omega_{10}$ . Используя формулу (3) и уровни энергии гармонического осциллятора, получим простой результат  $\omega_{10} = \omega$ . В итоге получим с помощью формул (I) и (13)

$$P_{10} = \frac{q^2 \xi_0^2 \omega}{2m\hbar} \left| \int_0^{\tau} t e^{i\omega t} dt \right|^2. \quad (14)$$

Путем вычисления простого интеграла получим конечный результат:

$$P_{10} = \frac{q^2 \xi_0^2}{2m\hbar\omega^3} \left( \omega^2 \tau^2 - 2\omega\tau \sin\omega\tau + 4 \sin^2 \frac{\omega\tau}{2} \right). \quad (15)$$

Из формулы (15) вытекает, что  $dP_{10}/d\tau > 0$ . Таким образом приходим к заключению, что если возмущающее электрическое поле изменяется линейно во времени, то вероятность возбуждения осциллятора возрастает во времени как квадратичная функция. Этот результат получен в первом порядке теории возмущений. Для ее использования должно быть  $P_{10} \ll 1$ . Отсюда с учетом (15) следует, что квадратичный рост вероятности пере-

хода действует лишь до моментов времени  $\tau$ , удовлетворяющих условию

$$\tau \ll \frac{\sqrt{\hbar m \omega}}{q \mathcal{E}_0} \quad (16)$$

### Литература

1. Борисоглебский Л.А. Квантовая механика. - Минск: Изд. Университетское, 1988.
2. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. - М.: Наука, 1981.
3. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. - М.: Высшая школа, 1984.

### АСТРОФИЗИЧЕСКИЙ ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ СТАТИСТИКИ ФЕРМИ В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

В.А. Веймер, Р.Й. Манкин

#### 1. Введение

Общеизвестны трудности при нахождении простых примеров по квантовой механике реальных систем в курсе общей физики. Практически нет тем, кроме атома водорода, фотозффекта и излучения абсолютно черного тела, где, при их изложении в рамках общего курса физики, не возникали бы непреодолимые вычислительные трудности.

Ясно, что глубокое понимание и закрепление теоретических знаний физических явлений невозможно без их применения для расчета практических примеров.

В курсе общей физики для студентов, несомненно, сложнейшей темой является квантовая статистика. Поэтому даже упрощенное рассмотрение реального физического примера в этой области, посылного для студентов среднего уровня, окажется полезным.

В настоящей работе рассматривается возможность применения статистики Ферми для объяснения существования некоторых астрофизических объектов на основе идеи, предложенной Ландау [1]. Общеизвестна теория, которая предсказывает превращение звезд с массами, близкими к массе Солнца, в конечной стадии их эволюции в макроскопические квантовые объекты, такие, как белые карлики, нейтронные звезды или даже черные дыры [1]. При этом массы звезд, при которых их эволюция приводит к тому или иному объекту, находятся в пределах одного порядка с массой Солнца ( $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$  кг), а размеры белого карлика ( $R_{\text{бк}} \sim 5 \cdot 10^6$  м) примерно на два порядка меньше размеров Солнца ( $R_{\odot} = 6,86 \cdot 10^8$  м) и более чем на два порядка превышают размеры нейтронных звезд ( $R_{\text{нз}} \sim 10^4$  м) при массах, равных массе Солнца.

Для белых карликов существует предел по массе, называемый пределом Чандрасекара, превышение которого нарушает их устойчивость и приводит к катастрофическому переходу в нейтронную звезду. Предельная масса, превышение которой приводит к сжатию в черную дыру, существует также для нейтронных звезд. Определение критериев потери устойчивости звезд связано с интегрированием сложных уравнений состояния [1, 2] и поэтому в курсе общей физики не рассматривается.

В настоящей работе сделана попытка показать, что использование даже сильно упрощенной модели идеального Ферми-газа электронов (в белых карликах) и нейтронов (в нейтронных звездах) все же позволяет провести оценку критериев устойчивости этих объектов и получить связь между их массой и радиусом.

## 2. Белый карлик

Белым карликом называется звездный объект с металлическими свойствами вещества, то есть состоящий из практически полностью ионизованной плазмы, в которой электронный газ является вырожденным. Состояние равновесия белого карлика обеспечивается равенством давлений вырожденного газа и гравитационного сжатия. Для определения объема, занимаемого вырожденным электронным газом, принимается, согласно принципу Паули, что в каждой ячейке шестимерного фазового простран-

ва могут находиться только два фермиона, то есть в данном случае - два электрона. Из нейтральности системы следует равенство числа протонов и электронов. Химический состав белого карлика может быть учтен введением множителя  $\alpha = (N_p + N_n)/N_p$ , где  $N_p$  - число протонов и  $N_n$  - число нейтронов в звезде. Поскольку в процессе эволюции звезды в белый карлик происходит практически полное превращение водорода в более тяжелые ядра, то можно принять  $\alpha$  около двух.

Для вычисления радиуса белого карлика принимаем ферми-газ идеальным, а его температуру будем считать достаточно низкой (близкой к 0К). Уточним этот критерий.

Из статистики Ферми следует распределение электронов в вырожденном электронном газе, вид которого при температурах  $T = 0$  и  $T > 0$  представлен на рис. I. Низкой можно считать температуру, при которой  $T \ll \epsilon_F/k$ , где  $k$  - постоянная Больцмана. В нашем подходе энергия Ферми  $\epsilon_F$  окажется зависящей только от концентрации электронов  $n_e$ . Состояние, при котором можно считать  $T \sim 0$ , наступает в конечной стадии белого карлика, когда он остынет, излучив практически всю тепловую энергию.

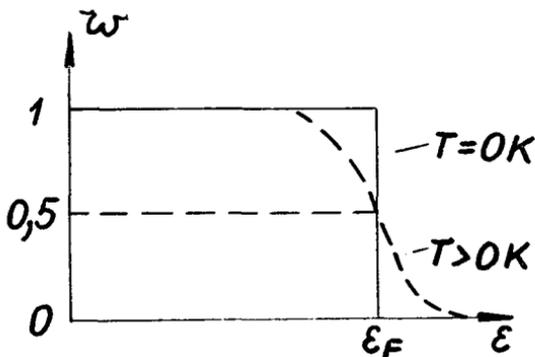


Рис. I. Распределение Ферми-Дирака, распределение вероятности  $w$  заполнения ячейки в фазовом пространстве электронов в зависимости от их энергии  $\epsilon$ .  $\epsilon_F$  - энергия Ферми

Так как  $m_e \ll m_p$  и  $m_p \approx m_n$ , где  $m_e, m_p$  и  $m_n$  массы соответственно электрона, протона и нейтрона, то масса звезды определяется массой нуклонов и числом электронов в звезде  $N = M/\alpha m_p$ , где  $M$  - масса звезды.

Число возможных состояний электронов, а следовательно, и их число в объеме  $V$ :

$$N = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} V \int_0^{p_F} d^3p = \frac{8\pi}{3} \frac{p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} V, \quad (I)$$

где  $\hbar$  - постоянная Планка,  $p_F$  - импульс Ферми. Из (I) находим:

$$p_F = \pi\hbar \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} n_e^{1/3}, \quad \text{где } n_e = \frac{N}{V}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что с ростом концентрации  $n_e$  растет и импульс  $p_F$ , а следовательно, и энергия Ферми.

2.1. Нерелятивистский идеальный ферми-газ:  $\varepsilon_F \ll m_e c^2$ .

Используем для электронов классическую связь  $\varepsilon = \frac{p^2}{2m_e}$ . Среднее значение квадрата импульса выражается:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{1}{n_e} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} p^4 dp = \frac{1}{n_e} \frac{p_F^5}{5\pi^2\hbar^3},$$

откуда, используя формулу (2), получим:

$$\langle p^2 \rangle = \left(\frac{3}{5}\right) (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_e^{2/3}.$$

Полная кинетическая энергия электронов в звезде

$$E_k = N \langle \varepsilon \rangle = \left(\frac{3}{10}\right) (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 / m_e N^{5/3} V^{-2/3}.$$

Учтя, что  $V = (4/3)\pi R^3$ , где  $R$  - радиус звезды, получим:

$$E_k = a_1 N^{5/3} R^{-2}, \quad (3)$$

где  $a_1 = 3 \hbar^2 (10 m_e)^{-1} (\pi^{9/4})^{2/3}$ .

2.2. Ультррелятивистский ферми-газ:  $\varepsilon_F \gg m_e c^2$ .

В этом случае энергия электронов связана с их импульсом соотношением  $\varepsilon = c p$ . Средняя энергия электронов:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{c}{n_e} \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{p_F} p^3 dp = \frac{c}{n_e} \frac{p_F^4}{4\pi^2 \hbar^3}.$$

Полная кинетическая энергия электронов звезды

$$E_k = N \langle \varepsilon \rangle = a_2 N^{4/3} R^{-1}, \quad a_2 = c \hbar (3\pi)^{1/3} (3/4)^{4/3}. \quad (4)$$

2.3. Гравитационная энергия звезды

При расчете гравитационной энергии звезды можно, в простейшей модели, плотность вещества  $\rho$  в объеме звезды считать постоянной. Это можно подкрепить следующими соображениями. Так как электромагнитное взаимодействие между протонами и электронами значительно сильнее их гравитационного взаимодействия, то локально вещество звезды должно быть электрически нейтральным, то есть протоны распределяются в объеме звезды так же, как электроны. В равновесном состоянии во всем объеме звезды энергия Ферми для электронов одинаковая и, следовательно, их концентрация постоянная. Отсюда следует и постоянная концентрация ядер. Не учитывая эффект "осаждения" сложных (тяжелых) ядер, получим  $\rho \approx const$ .

Поэтому, считая звезду сферически симметричной, что справедливо при ее медленном вращении, можем определить гра-

витационную энергию звезды

$$U = - \int_0^R \gamma \frac{M(\kappa) dM(\kappa)}{\kappa} = - \frac{3}{5} \gamma \frac{M^2}{R}, \quad (5)$$

где  $M = \alpha N m_p$ ,  $M(\kappa) = (\frac{4}{3}) \pi \rho \kappa^3$ ,  $dM(\kappa) = 4\pi \rho \kappa^2 d\kappa$ .

#### 2.4. Радиус белого карлика, уравновешенного нерелятивистским вырожденным электронным газом

В нерелятивистском случае можно полную энергию белого карлика в первом приближении представить как сумму кинетической энергии электронов и потенциальной гравитационной энергии звезды:

$$E = a_1 N^{5/3} R^{-2} - b N^2 R^{-1}, \quad b = (\frac{3}{5}) \gamma \alpha^2 m_p^2. \quad (6)$$

Зависимость  $E(R)$  при фиксированном  $N$  (постоянная масса звезды) приведена на рис. 2. Так как при остывании белого карлика ( $T \rightarrow 0$ ) положение равновесия наступит при  $E \rightarrow E_m$ , то величина равновесного радиуса соответствует минимуму зависимости  $E(R)$ , которая получается из условия  $\partial E / \partial R = 0$ , то есть

$$\left. \frac{\partial E}{\partial R} \right|_{R_0} = - \frac{2a_1 N^{5/3}}{R_0^3} + \frac{b N^2}{R_0^2} = 0.$$

Решением этого уравнения будет

$$R_0 = 2a_1 b^{-1} N^{-1/3} = (9\pi/4)^{2/3} \hbar^2 (m_e \gamma)^{-1} (\alpha m_p)^{-5/3} M^{-1/3}. \quad (7)$$

В астрофизике массы звезд часто выражаются в массах Солнца  $M_\odot$ .

Тогда  $R_0 = 22,7 \cdot 10^6 (\alpha^5 M/M_\odot)^{-1/3} \text{ (м)}, \quad (8)$

откуда для радиуса звезды с массой  $M = M_0$  при  $\alpha = 2$  получим  $R_2 = 7,15 \cdot 10^3$  км.

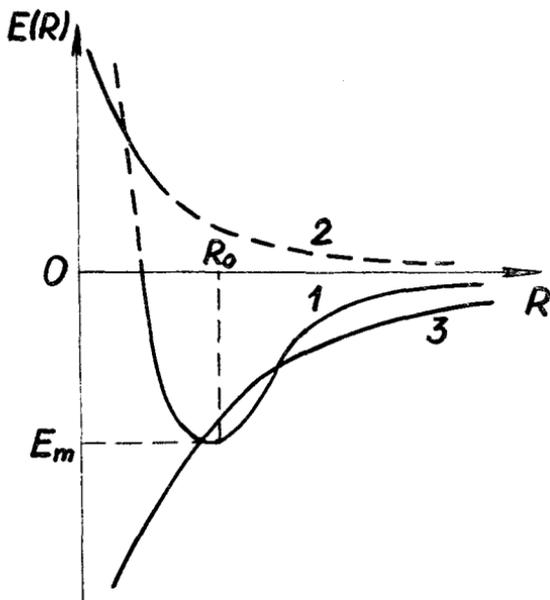


Рис. 2. Зависимость белого карлика от его радиуса. 1 - нерелятивистское рассмотрение ( $E_m$  - минимальная энергия, соответствующая равносному радиусу  $R_0$  при  $T = 0$ ). 2 - релятивистское рассмотрение ( $E > 0$ ,  $M < M_{кр}$ ). 3 - релятивистское рассмотрение ( $E < 0$ ,  $M > M_{кр}$ ). Пунктирные части кривых 1 и 2 формальные

Оценим справедливость нерелятивистского рассмотрения, которое применимо, пока средняя кинетическая энергия электронов  $\langle \epsilon \rangle$  намного меньше их энергии покоя:

$$\langle \epsilon \rangle \ll m_e c^2 \quad \text{или} \quad (3/10) \gamma \alpha m_p M R_0^{-1} \ll m_e c^2, \quad (9)$$

откуда следует, что  $M \ll 2,42 \cdot 10^{31} \alpha^{-2} (\text{кг})$ , или при  $\alpha = 2$  должно выполняться условие  $M \ll 3M_{\odot}$ . Поэтому в случае звезд, содержащих много тяжелых ядер ( $\alpha \sim 2$ ), нерелятивистский подход менее оправдан, так как здесь сказывается влияние релятивистских процессов.

## 2.5. Предел Чандрасекара

Из предыдущего следует, что при  $M > M_0$  необходимо учитывать релятивистские эффекты, то есть рассматривать релятивистский Ферми-газ электронов. Из (3) и (4) следует, что чем больше масса звезды, тем больше в ней кинетическая энергия электронов и их скорость. В ультрарелятивистском случае, если  $\mathcal{E}_F \gg m_e c^2$ , полная энергия звезды на основе (4) и (5) выражается

$$E = N^{4/3} R^{-1} (a_2 - b N^{2/3}). \quad (10)$$

Если  $N$  настолько мало, что  $a_2 - b N^{2/3} > 0$ , то  $E(R)$  монотонно возрастает с уменьшением  $R$  (см. рис. 2, кривая 2) и равновесие звезды возможно только при таких  $R$ , где при заданном  $N$  ультрарелятивистское рассмотрение неприменимо (объем звезды настолько велик - плотность ее настолько мала, что скорости большинства электронов намного меньше скорости света). Поэтому в данном случае следует применить формулу (8).

Если  $N$  настолько велико, что  $a_2 - b N^{2/3} < 0$ , то состояния равновесия белого карлика не существует (рис. 2, кривая 3); звезда будет сжиматься до ядерных плотностей и превратится в нейтронную звезду.

Следовательно, белый карлик может существовать только при числе электронов, определяемом в нем из условия  $a_2 > b N^{2/3}$  или  $N < N_{кр} = (a_2/b)^{3/2}$ . Этому условию соответствует критическая масса:

$$\begin{aligned} M_{кр} &= \alpha m_p N_{кр} = 3(16\pi m_p^2 \alpha^2)^{-1} (5c\pi \hbar \gamma^{-1})^{3/2} \\ &= 1,72 (2/\alpha)^2 M_{\odot}. \end{aligned} \quad (11)$$

При  $\alpha = 2$  получим  $M_{\text{кр}} = 1,72 M_{\odot}$ . Отметим, что критическая масса белого карлика для случая  $\alpha = 2$  найдена на основе уточненной теории  $M_{\text{кр}} = 1,457 M_{\odot}$ , которая называется пределом Чандрасекара.

Определенный интерес представляет выяснение того, при каких температурах можно пользоваться функцией статистики Ферми, соответствующей  $T = 0$  (см. рис. I). Это условие было заложено в основу наших рассуждений, хотя из астрономических наблюдений следует, что для поверхности реальных белых карликов  $T \sim 10^4$  К. Распределение, соответствующее  $T = 0$ , применимо при условии  $\varepsilon_F/k \ll T$ . Если рассматривать белый карлик с массой  $M = M_{\odot}$  в нерелятивистском случае, что достаточно корректно для проведения оценки, то для случая  $\alpha = 2$  получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_F/k &= p_F^2/2m_e k = \left(\frac{2}{81\pi^2}\right)^{1/3} (m_e/k) (\alpha m_p)^{2/3} M_{\odot}^{4/3} (\sigma/\hbar)^2 = \\ &= 2,25 \cdot 10^9 \text{ К}, \end{aligned}$$

что на много порядков выше реальных температур.

Представленное рассмотрение, невзирая на значительные упрощения, достаточно хорошо описывает белый карлик. Для более точного рассмотрения следует принять во внимание, что;

1. Электронный газ не является строго идеальным — следует учитывать электромагнитное взаимодействие. Однако эта поправка невелика, благодаря нейтральности вещества. Кроме того, в этом случае плотность электронного газа в центре звезды будет больше, чем на периферии, что следует учитывать при нахождении потенциальной энергии сжатия.

2. При больших плотностях (при массах, близких к критической) следует учесть, что часть электронов окажутся релятивистскими, и ввести соответствующие поправки. Кроме того, высокое давление "моря" релятивистских электронов увеличивает вероятность обратного  $\beta$ -распада  $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$  ( $\nu_e$  — электронное нейтрино), что приводит к увеличению  $\alpha$ .

### 3. Нейтронная звезда

Нейтронная звезда может образоваться, когда в ядре звезды достигается плотность, при которой электронный газ становится преимущественно ультрарелятивистским и, согласно (10),

его давление не в состоянии сдержать гравитационное сжатие. Звезда будет сжиматься до тех пор, пока подавляющее число протонов не превратится в результате обратного  $\beta$ -распада в нейтроны и давление образовавшегося нейтронного Ферми-газа уравнивает гравитационное сжатие. Отметим, что обратный  $\beta$ -распад будет протекать с большой вероятностью, если кинетическая энергия электронов будет порядка  $2,5 m_e = (m_n - m_p)$ .

Предполагая, что образовавшийся нейтронный газ будет нерелятивистским, что справедливо, так как  $m_n = 1,8 \cdot 10^3 m_e$ , можем зависимость радиуса  $R_n$  нейтронной звезды от ее массы определить так же, как для белого карлика. Только в этом случае во всех расчетах следует  $m_e$  и  $m_p$  заменить на  $m_n$ , а  $\alpha \approx 1$ ; в действительности в нейтронной звезде некоторое число протонов и электронов все же сохраняется.

Тогда для  $R_n$  получим:

$$R_n = \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \left( \frac{\hbar^2}{\gamma} \right) m_n^{-8/3} M^{-1/3} \quad \text{или} \quad R_n = 12,3 \cdot 10^3 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-1/3} (\text{м}). \quad (12)$$

Для оценки массы нейтронной звезды, при которой нейтроны можно считать нерелятивистскими, воспользуемся, как и в случае белого карлика, формулой (9), заменив в ней  $m_e$  на  $m_n$  и определив  $R_n$  из (12), при  $\alpha = 1$  получим  $M \ll 12 M_\odot$ .

Аналогично находим критическую массу нейтронной звезды. Так как формула (II) справедлива для любых фермионов (не содержит  $m_e$ ), то ее можно применить для нейтронной звезды (при  $\alpha = 1$ ), откуда получим, что

$$M < M_{кр} \approx 7 M_\odot. \quad (13)$$

Следует, однако, отметить, что оценки, полученные на основе (12) и (13) для нейтронной звезды, значительно менее точны, чем аналогичные оценки на основе (8) и (II) для белого карлика. Это связано с тем, что, кроме сказанного в конце предыдущего раздела, для более точной оценки параметров нейтронной звезды следует учесть влияние ядерных сил взаимодействия нуклонов (вся нейтронная звезда подобна гигантскому

ядру), а вместо ньютоновской теории тяготения следует применять общую теорию относительности, так как гравитационное поле нейтронных звезд нельзя более считать "слабым". Из-за этих причин плотность вещества в нейтронной звезде нельзя считать постоянной - она значительно увеличивается к центру.

В следующем разделе покажем, что уже при  $M > 3M_0$  нейтронная звезда более существовать не может, и образуется так называемая черная дыра.

#### 4. Черная дыра

Черной дырой называется объект, окруженный поверхностью, на которой вторая космическая скорость равна скорости света. В случае нейтральной невращающейся черной дыры эта поверхность сферическая и называется сферой Шварцшильда. Так как вторая космическая скорость  $v_2 = (2\gamma \frac{M}{R})^{1/2}$ , то при  $v_2 = c$  получим  $R_w = 2\gamma M/c^2$  или  $R_w = (2\gamma M_0/c^2) (M/M_0)$ , или  $R_w \approx 2,96 (M/M_0) (\text{км})$ .

Рассмотрим, наконец, критерий перехода нейтронной звезды в черную дыру. В этом случае для относительной массы звезды можно составить уравнение  $12,3 (M/M_0)^{-1/3} = 2,96 (M/M_0)$ , откуда следует что  $(M/M_0) \approx 2,91$ , то есть уже при массе нейтронной звезды, равной трем массам Солнца, становится вероятным ее переход в черную дыру [3].

#### 5. Заключение

В заключение следует отметить, что, используя, по существу, простые обсуждения и достаточно грубые приближения, здесь получены результаты близкие к тем, которые выводятся на основании современной фундаментальной теории. Разумеется, наши рассуждения не претендуют на дальнейшее развитие теории, однако их простота и доступность для студентов позволяют их использование в качестве эффективного примера квантовой механики и астрофизики, а тем самым служат для расширения мировоззрения.

Содержание настоящей работы может быть рекомендовано как тема одного семинара.

## Литература

1. Шапиро С.А., Тьюколски С.А. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды: В 2-х ч. -М.: Мир, 1985. -ч. I. - 256 с.
2. Шапиро С.А., Тьюколски С.А. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды: В 2-х ч. -М.: Мир, 1985. -ч.2. - С. 257-656.
3. Веймер В., Манкин Р. Некоторые возможности изложения элементов ОТО в курсе общей физики // Методика преподавания физики в вузе: В помощь преподавателю XIII.- Тарту: ТГУ, 1987. - С. 74-82.

### СТРОЕНИЕ И ЭВОЛЮЦИЯ СОЛНЦА КАК ПРИМЕР КОМПЛЕКСНОГО ПРИМЕНЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАКОНОВ ФИЗИКИ

Я.А. Яанисте

В школьном курсе физики обычно для иллюстрации применения законов механики используется открытие планеты Нептун по вычислениям Леверье в 1846 году. Современная астрофизика может служить хорошим примером применения и других законов физики, что, к сожалению, весьма редко встречается в лекционных курсах по общей физике. Конечно, точные математические методы теоретической астрофизики недоступны студентам первого-второго курса, но ведь и в рассказе о Леверье никогда не описывают его методы расчетов. Главное передать суть физического метода описания (или моделирования) природы, а это можно делать и при весьма скромных знаниях по физике и математике.

Для представления основных моментов теории внутреннего строения звезд достаточно одной двухчасовой лекции. Подходящим временем для этой цели считаем момент завершения изучения атомной физики, то есть в самом конце курса.

Разумеется, подобную лекцию советуем провести в виде тематической беседы на тему "Жизнь звезд" или "Когда погаснет

Солнце?". Лекция состоит из трех частей:

- 1) представление начальных данных (данные наблюдений);
- 2) уравнение звезды как равновесного газового шара;
- 3) источники энергии и зреть жизни звезды.

I. При описании исходных данных следует подчеркнуть тот факт, что всю информацию мы получаем от светового излучения. Можно коротко описать телескопы, светоприемную и спектральную аппаратуру. В итоге мы узнаем:

- a) Видимую яркость звезды - световой поток через апертуру телескопа  $L$  ( $\text{Вт}/\text{м}^2$ ).
- b) Распределение энергии в спектре. У ярких горячих звезд (Вега, Сириус) это практически чернотельное излучение, у более холодных (Солнце, Капелла) наблюдается много линий поглощения. Непрерывный спектр и его максимум обычно легко устанавливаются.
- в) У некоторых звезд наблюдается периодическое смещение спектральных линий по сравнению с лабораторным стандартом. Если истолковать это как эффект Доплера, можно восстановить орбитальное движение звезды в двойной системе.
- г) У более близких звезд можно измерить их смещение относительно соседних звезд с периодом в 1 год. Если истолковать это как тригонометрический параллакс, можно найти расстояние до звезды.

Из этих данных, используя приобретенные в курсе физики знания, получим:

- a. По формулам фотометрии - излучательную способность звезды

$$W = 4\pi \ell^2 \cdot L, \quad (1)$$

где  $\ell$  - расстояние до звезды, найденное из параллакса.

- b. Из закона Вина - температуру звезды в чернотельном приближении

$$T = \frac{b}{\lambda_{\max}}, \quad (2)$$

где  $\lambda_{\max}$  - длина волны максимума спектра и  $\epsilon = 2.9 \cdot 10^{-3}$  К - постоянная Вина.

в. Из закона Стефана-Больцмана - радиус звезды  $R$  :

$$W = 4\pi R^2 \epsilon T^4,$$
$$R = \sqrt{\frac{W}{4\pi \epsilon T^4}}. \quad (3)$$

г. Если звезда имеет спутник сравнительно малой массы (например, планету), ее масса определяется из закона гравитации. В случае круговой орбиты

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{G m M}{r^2},$$

где  $m$  - масса планеты,  $r$  - радиус орбиты,  $M$  - масса звезды и  $G$  - гравитационная постоянная.

Орбитальную скорость найдем из периода вращения планеты вокруг звезды  $t$  :

$$v = \frac{2\pi r}{t}$$

и в итоге получим закон Кеплера

$$\frac{r^3}{t^2} = \frac{G M}{4\pi^2} = \text{const},$$

откуда

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G t^2}. \quad (4)$$

Здесь можно добавить, что закон Кеплера справедлив и для эллиптических орбит и при любом отношении масс в системе: в последнем случае под массой  $M$  надо подразумевать полную массу системы ( $M_1 + M_2$  - в случае двойной звезды).

Применим эти формулы для описания Солнца. Из непосредственных измерений знаем:

- солнечную постоянную  $L = 1,36$  кВт/м<sup>2</sup>,

- длину волны максимума спектра  $\lambda_{max} = 0,5 \cdot 10^{-6}$  м,
- расстояние  $\ell = 1,5 \cdot 10^{11}$  м,
- период обращения Земли  $t = 1$  год =  $3,15 \cdot 10^7$  с.

По имеющимся формулам можно найти:

- температуру по (1)  $T_{\odot} = 5800$  К,
- массу по (4)  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$  кг,
- излучательную способность по (2)  $W_{\odot} = 3,8 \cdot 10^{26}$  Вт,
- радиус по (3)  $R_{\odot} = 6,9 \cdot 10^8$  м.

Вычисления по формулам (1-4) могут сделать сами студенты.

2. Вывод уравнения теплового баланса. Современная теория внутреннего строения звезд базируется на трех способах передачи энергии: теплопроводности, конвекции и переносе излучения. Методики и исходные уравнения для моделирования звезды можно найти в учебниках Соболева [1, гл. УШ] или Мартунова [2, гл. IV]. Хотя представленный там математический аппарат не очень трудный, для экономии времени советуем упрощенную схему из популярного обзора Каплана [3].

Предполагаем, что основные термодинамические характеристики звездного вещества (плотность, давление, температура) зависят от расстояния от центра звезды и изменяются плавно. В таком случае нам достаточно определить эти параметры для центра звезды (на поверхности они нам уже известны). Чтобы избежать введения функции нескольких переменных, берем для начала постоянную плотность (некоторую "изохорическую" модель звезды). Кстати, точные расчеты показывают, что для нормальных звезд типа Солнца это не такое уж нелепое предположение.

Давление в центре  $p_c$  в таком случае равно весу столба звездного вещества единичного сечения от центра до поверхности. Это будет не больше, чем

$$p_c = G \frac{M \bar{\rho} R}{\left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{4G \bar{\rho} M}{R}. \quad (5)$$

Здесь  $\bar{\rho} R$  - масса столба,  $\frac{R}{2}$  - расстояние центра массы столба от центра гравитации. Если кого-нибудь это приближение не убеждает - можно и проинтегрировать. Расхождение результатов крайне незначительно.

Температуру в центре найдем из уравнения идеального газа

$$\mu V_m = AT,$$

где, чтобы не спутать с радиусом звезды  $R$ , обозначим газовую постоянную через  $A$ . Учитывая, что  $\rho = M/V_m$  ( $\mu$  - молекулярный вес), получим

$$\rho_c = \frac{A}{\mu} \rho_c T_c, \quad (6)$$

сравнивая (6) с (5),

$$T_c = \frac{4\mu GM\bar{\rho}}{AR\rho_c} \approx \frac{\mu GM}{AR}. \quad (7)$$

Считая, что плотность в центре все-таки больше средней, множитель 4 из (5) обычно опускается, так, для Солнца найдем

$$T_c = \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{8314 \cdot 7 \cdot 10^8} = 2,3 \cdot 10^7 \text{ K},$$

$$\rho_c = \frac{4 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot 1500}{6,9 \cdot 10^8} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Па}$$

(здесь  $1500 \text{ кг/м}^3$  - средняя плотность Солнца  $\rho = \frac{M}{4/3\pi R^3}$ ), для водорода (для полностью ионизованного газа  $\mu \approx 1$ ) астрофизики обычно берут  $\mu = 0,61$ .

3. Источники энергии и время жизни. Методами геологии установлено, что возраст земной коры примерно 5 млрд. лет; в течение 3 млрд. лет существуют живые организмы. Так как диапазон температур, подходящих для жизни, довольно мал ( $270 \text{ K} < T < 320 \text{ K}$ ), светимость Солнца за этот период должна оставаться сравнительно постоянной. Для проверки разных механиз-

мов энерговыделения найдем запас соответствующей энергии и, поделив это на излучательную способность, получим соответствующие характерные шкалы времени для Солнца.

а. Химическая энергия. Теплота сгорания разных веществ около 10–50 Мдж/кг. Однако надо принять к сведению, что здесь не учитывается масса необходимого для процесса горения кислорода. Например, для углерода  $c_r \approx 28$  Мдж/кг, но на каждый килограмм углерода необходимо  $32 : 12 = 2,7$  кг кислорода. В итоге получаем  $c_r (C + O_2) = 7,7$  Мдж/кг, что для Солнца

$$\tau = \frac{c_r M_{\odot}}{W_{\odot}} = \frac{7,6 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{3,8 \cdot 10^{26}} = 4 \cdot 10^{10} \text{ с} = 1270_{\text{млн.}}$$

б. Тепловая энергия. Для изохорической модели звезды

$$\tau = \frac{c_v T_{\text{ер}} M_{\odot}}{W_{\odot}},$$

где  $c_v = 3/2 \frac{A}{\mu}$  — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме. Для атомарного водорода  $c_v \approx 12$  кДж/кг.К. Мы не знаем среднюю температуру, но можем получить верхний предел времени  $\tau$ , считая  $T_{\text{ер}} = T_c$ :

$$\tau = \frac{1,2 \cdot 10^4 \cdot 2,3 \cdot 10^7 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{3,8 \cdot 10^{26}} = 1,5 \cdot 10^{15} \text{ с} = 4,8 \cdot 10^7 \text{ лет.}$$

в. Потенциальная энергия гравитационного поля. Гравитационный потенциал точечной массы или шара находят по известной формуле. Он равен работе, необходимой для удаления одного килограмма вещества с расстояния  $R$  в бесконечность. Значит, при падении одного килограмма вещества на поверхность звезды освобождается такая же энергия. Так как для внутренних слоев ( $r < R$ ) потенциал

$$\varphi = \frac{GM(r)}{r} = \frac{G \bar{\rho} \frac{4}{3} \pi r^3}{r} = \frac{4}{3} \pi \bar{\rho} r^2$$

явно меньше, чем для поверхности, нам легко найти верхний предел энергии, освобожденной при сжатии Солнца до наблюдаемых размеров

$$E_G = \frac{GM^2}{R},$$

что при современной излучательной способности соответствует возрасту

$$\tau = \frac{GM_\odot^2}{R_\odot W} = \frac{6,7 \cdot 10^{11} \cdot (2 \cdot 10^{30})^2}{6,9 \cdot 10^8 \cdot 3,8 \cdot 10^{26}} \approx 10^{15} \text{ с} = 3,3 \cdot 10^7 \text{ лет.}$$

Обратим внимание читателя на то, что полученное здесь число — это возраст, а не "время жизни". В ньютоновской теории гравитационный коллапс при  $R \rightarrow 0$  даст бесконечную энергию, так что найти время жизни нам здесь не удастся.

г. Ядерные реакции. Зная, что примерно 3/4 от массы Солнца составляет водород, можно найти запас ядерной энергии.

При горении водорода в гелий освобождается энергия  $\sim Mc^2$ , где  $M = M_\odot/2$ . Зная светимость Солнца, можно определить порядок характерного времени истощения ядерных запасов энергии. Оценка показывает, что при нынешней светимости Солнца характерное время составляет  $\sim 10^{10}$  лет.

Остается еще один вопрос: в чем причина удивительной стабильности свечения Солнца и других звезд? Почему они сжигают свое топливо медленно и спокойно, почему они не взрываются, как водородная бомба? Чтобы получить ответ, надо вспомнить некоторые принципы квантовой механики.

Термоядерный синтез, как все микропроцессы, имеет вероятностный характер. Если мы говорим, что для образования ядер гелия нужна температура  $10^7$  градусов, то это не значит, что реакция начинается точно при этой температуре. Можно обойтись и без квантовой механики, достаточно нарисовать на доске распределение Максвелла. При любой температуре имеют-

ся частицы очень высокой энергии – их столкновение ведет к образованию ядра гелия. Чем выше температура, тем больше таких ядер и тем больше интенсивность реакции. Это опять ведет к повышению температуры, и получается взрыв.

Однако мы забыли о балансе давления. По уравнению (7) температура в центре звезды при заданной массе обратно пропорциональна радиусу звезды. Повышение температуры в недрах звезды ведет к повышению давления. Равновесие с гравитацией нарушается, звезда раздувается, и температура в центре понижается. Стабильной является такая конфигурация, где энерговыделение в центре точно равняется излучению с поверхности.

По формуле (7) температура в центре пропорциональна массе. Значит, чем больше масса, тем больше и удельное энерговыделение. Поэтому звезды большей массы имеют и большую светимость. И, разумеется, меньшее время жизни.

Примерно так выглядит простейшее представление физики Солнца. Вероятно, многим этого недостаточно... Что же, советуем почитать книгу С.А. Каплана.

#### Литература

1. Соболев В.В. Курс теоретической астрофизики. М.: Наука . - 1967.
2. Мартынов Д.Я. Курс общей астрофизики. М.: Наука . - 1965.
3. Каплан С.А. Физика звезд. М.: Наука . - 1977.

#### ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ И ТЕЗАУРУС ФИЗИЧЕСКИХ ОСНОВ ИЗМЕРЕНИЙ

А.Э. Силас

"Распределяй и располагай материал таким образом, чтобы (где только возможно) на следующей ступени при изучении нового снова повторялось предыдущее!" /1/ А.Дистервег.

Актуальность противоречия между требованиями программ предметов естественно-математического цикла и результатами

учебной работы требует усиленных поисков удовлетворительного выхода. Предлагаемый в педагогической литературе путь - учет принципа преемственности\*, который предполагает выделение основных структурных элементов темы [2] - является одним из возможных в методике преподавания.

Противоречие между материалом, изложенным в учебниках физики, и познавательными возможностями учащихся требует выделения основных структурных элементов физики и определения логических связей между ними с помощью дидактических графов. На их основе разворачивается тезаурус\*\* физики.

Пытаясь исключить причины отрицательного отношения учащихся к физике, мы предлагаем методику преемственного преподавания физических основ измерений (ф.о.и.). Она создана в связи с потребностью найти методически обоснованный фундамент для развития лаборатории физических измерений. Ее задачи:

- 1) связать физические измерения в единую целостную систему;
- 2) выявить более распространенные измеряемые физические величины и научить измерять эти величины с помощью измерительных приборов;
- 3) раскрыть творческие возможности учащихся при физических измерениях;

---

\* "Преемственность в обучении состоит в установлении необходимой связи и правильного соотношения между частями предмета на разных ступенях его изучения" [3]. "Понятие "преемственность в обучении" включает три взаимосвязанных элемента: 1) установление необходимой связи и правильного соотношения между частями учебного предмета на разных фазах его изучения; 2) установление взаимосвязи форм, методов и приемов изучения материала на разных ступенях обучения; 3) определенные требования к знаниям учащихся, к их умению устанавливать внутри- и межпредметные связи" [4].

\*\* "В широком смысле тезаурус интерпретируют как описание системы знаний о действительности, которыми располагает индивидуальный носитель информации или группа носителей. Этот носитель может выполнять функции приемника дополнительной информации, вследствие чего изменяется и его тезаурус" [5].

4) быть дополнением как для учителя, так и для ученика при изучении методов физических измерений;

5) быть вспомогательным материалом при решении конкретной задачи измерений и т.д.

Для этого составлен тезаурус ф.о.и., в который включено наименьшее количество необходимого для технических специальностей учебного материала. Освоение этого материала создает удовлетворительный уровень при изучении ф.о.и. учащимися с гуманитарными склонностями, а также является началом серьезной работы для остальных. При построении тезауруса учитывались результаты ранее проведенных опытов:

- чаще всего причины отрицательного отношения к учению кроются в длительном неуспехе в учебе;
- на основе доступного учебного материала создается ситуация успеха [6].

Тезаурус ф.о.и. устанавливает преемственность в расположении учебного материала. Физика как основа для многих технических дисциплин и физические измерения как выражение физических явлений являются образцом при построении тезауруса.

Схематически методику образования тезауруса можно представить в виде винтовой линии на конической поверхности (см. рис. I) [7]. Коническая поверхность - это емкость, "наполненная" учебным материалом. Буквами К, О, А, Б, В ... обозначим ступени знания этого материала. При этом верхние ступени охватывают стержневой материал (двойная штриховка на рис. I) с нижней ступени (см. рис. I где АС=В). Каждую ступень можно рассматривать как тезаурус (например, тезаурус К и т.д.), который открывается в процессе постепенного приближения к нему. При этом закрепляются стержневые понятия, знания, навыки и умения - основа для самостоятельной работы. Из схемы и [7] видно, что скорость прохождения материала определяется двумя параметрами  $\alpha$  и  $\varphi$ . ( $\alpha$  - угол между осью  $z$  и образующей конуса ;  $\varphi$  - угол между образующей конуса  $m$  и касательной  $l$  к винтовой линии на поверхности конуса в точке Р). С точки зрения методики преподавания  $\alpha$  связано с приростом материала на следующей ступени, а  $\varphi$  - с временным интервалом между ступенями. Эти параметры

выбираются преподавателем на базе тесной обратной связи (следующая ступень принимается только после освоения предыдущего).

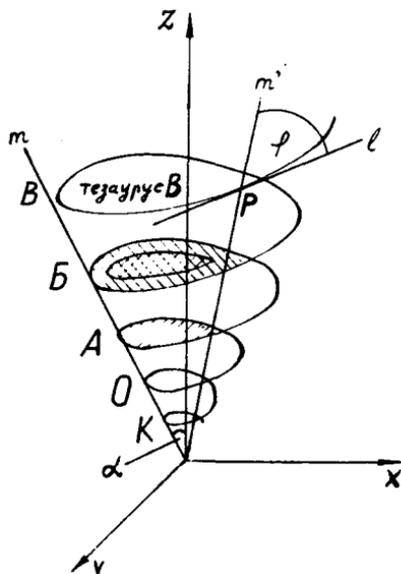


Рис. 1. Схема преемственного преподавания

В рамках данной статьи представляем первые три ступени (К, О, А). Тезаурус А называем азбукой ф.о.и.

Во-первых, в тезаурус войдут 7 основных величин физики (рис. 2 и ступень К на рис. 1). Сюда же включено понятие "напряжение", поскольку в изучаемых вольтметрах фактически измеряется сила тока.

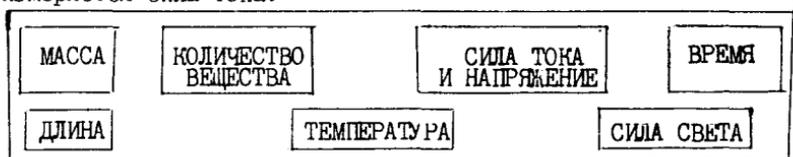


Рис. 2. Основные величины физики

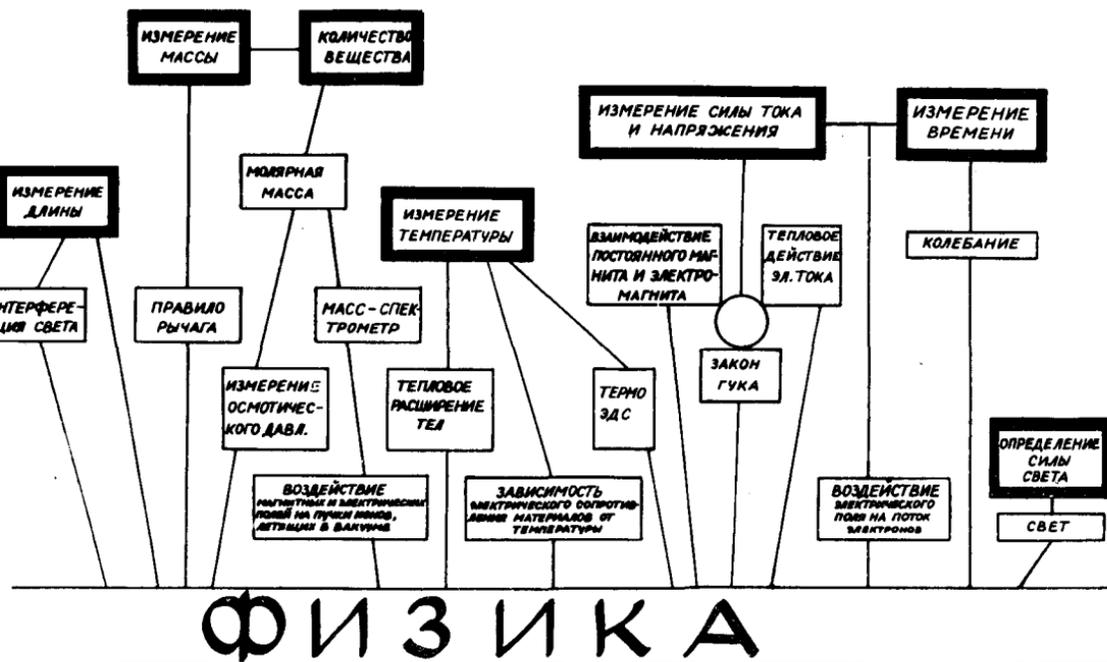


Рис. 3. Физические явления и основные величины физики

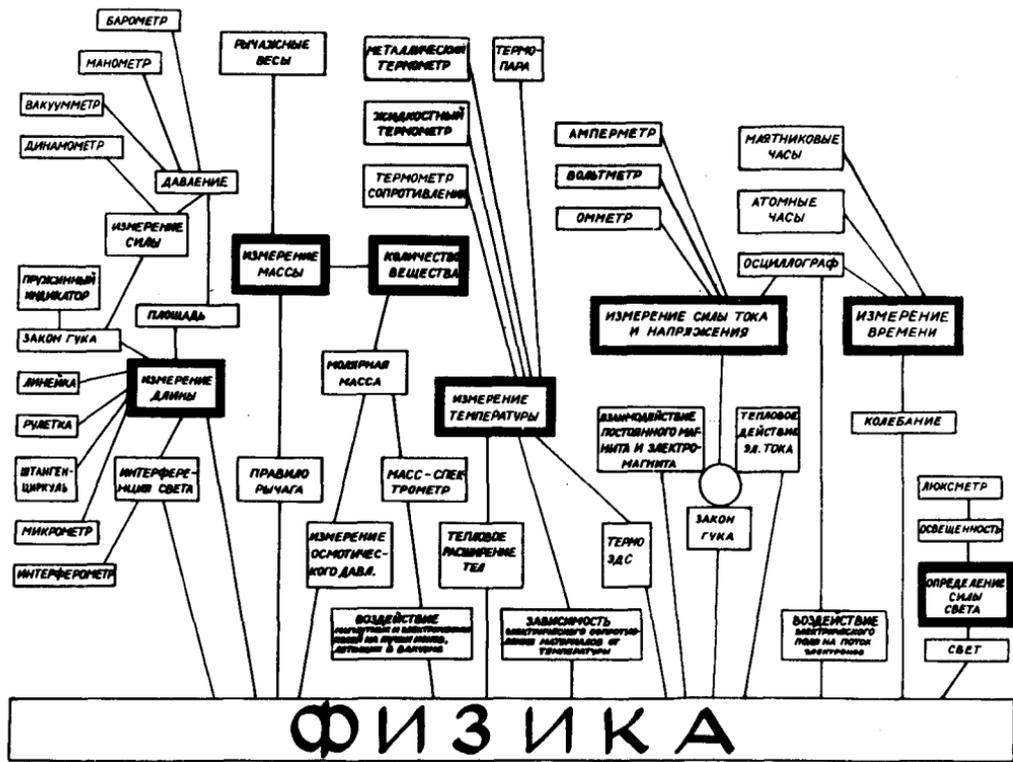


Рис. 4. Азбука физических основ приборов и измерений

После работы над этими понятиями целесообразно приступить к физическим явлениям, тесно связанным с приведенными величинами (рис. 3 и ступень 0 на рис. 1). На базе этих явлений строится множество приборов для измерения основных физических величин.

На третьей ступени азбуки связываем предыдущее с измерительными приборами (рис. 4 и ступень А на рис. 1).

Таким образом преемственно раскрыты пути измерения основных физических величин. Раскрытие в деталях зависит уже от конкретных целей, специальностей и т.д.

Данная система [К): основные величины, (О): основные величины + физические явления, (А): основные величины + физические явления + измерительные приборы и т.д.] может быть рекомендована в качестве:

- 1) лабораторного практикума физических основ измерений [8];
- 2) методики для преемственного преподавания естественно-математических предметов.

Преимуществом тезауруса мы считаем выделение основных структурных элементов темы в целях преемственности преподавания. В ходе использования систем такого типа наблюдается повышение успеваемости [9] на базе более доступного учебного материала.

#### Литература

1. Дистервег А. Избранные педагогические сочинения. - М.: Учпедгиз, 1956. - С. 178.
2. Кьюверялг А.А. Школа-профтехучилище: преемственность в обучении // Советская педагогика. - 1985. - № 12. - С. 41.
3. Преемственность в обучении: Педагогическая энциклопедия. - М., 1966. - Т. 3. - С. 485.
4. Кьюверялг А.А. Сущность преемственности и ее реализация в обучении // Преемственность в обучении учащихся предметам естественно-математического цикла в школе и среднем ПТУ: Методические рекомендации. - М.: Изд-во АПН СССР, 1984. - С. 9.

5. Тезаурус: Большая советская энциклопедия. - М., 1976. - Т. 25. - С. 358.
6. Бабанский Ю.К. Оптимизация процесса обучения. Общедидактический аспект. - М.: Педагогика, 1977. - С. 210-224. (Õpreprotsessi optimeerimine. Ülddidaktiline aspekt/ Tõlk. Mikk J., Saks K. - Tallinn: Valgus, 1984.)
7. Винтовая линия. Математическая энциклопедия. - М., 1977. - Т. I. - С. 705.
8. Силас А.Э. Алфавит физических основ приборов и измерений // Тез. докл. IX зональной науч.-мет. конф. преподавателей общей физики высших учебных заведений Белоруссии, республик Прибалтики и Калининградской области РСФСР. Минск, 24-26 сент. 1986 г. - Минск, 1986. - С. 72-73.
9. Reif F. Scientific approaches to science education// Physics today. - 1986. - Vol. 39. - № 11. - P.48-54.

ЭВМ В ФИЗИЧЕСКОМ ПРАКТИКУМЕ ПО МЕХАНИКЕ  
НА КАФЕДРЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ТГУ

Э.И. Тамм

Серьезный физический эксперимент немалым ныне без применения ЭВМ. В простейшем случае на ЭВМ производится обработка данных, зарегистрированных вручную или автоматически на каком-то носителе информации. В истинно же современном эксперименте комплекс экспериментальных установок работает на линии с ЭВМ, которая управляет работой комплекса, регистрирует данные в своей памяти и обрабатывает их в реальном масштабе времени.

К новой идеологии экспериментальной работы будущий физик должен привыкать в процессе обучения. Это должно осуществляться в физическом практикуме начиная с первого курса, при выполнении курсовых и дипломных работ, при работе в кружках СНО. Единственно возможный до последнего времени пакетный

режим обработки данных (студент отдает подготовленные в определенном виде данные оператору, получает у него обработанную информацию в печатном виде) не убедил ни студента, ни преподавателя в полезности применения ЭВМ. Такая убежденность может возникнуть только тогда, когда студент работает, имея прямой контакт с ЭВМ. Для этого необходимы ЭВМ с терминальными пультами в режиме разделения времени или персональные микро-ЭВМ. В ведущих вузах страны (МГУ, ЛГУ и др.) такие возможности появились уже лет десять тому назад [1, 2, 3, 4], у нас в ТУ<sup>1</sup> они возникают сейчас. В данный момент в распоряжении студентов у нас диалоговые вычислительные комплексы ДВК-2 и мини-ЭВМ ИР-КАВАК (польский вариант СМ-4) с шестью терминалами. Эти ЭВМ не снабжены периферийными устройствами для управления экспериментом, они применимы пока только для обработки данных. Их возможности уменьшает еще и отсутствие графического дисплея.

Обработка результатов эксперимента на ЭВМ в физическом практикуме преследует, по мнению автора, следующие цели:

1) сокращение времени на рутинные вычисления, освобождение времени для анализа сути работы и выводов из конечных результатов;

2) введение новых методов математической обработки информации, которые из-за большого объема вычислительной работы не применимы при ручной обработке;

3) развитие у студентов навыков работы с ЭВМ, убеждение в полезности и необходимости применения ЭВМ при физическом эксперименте.

Время студента на выполнение лабораторной работы и обработку данных ограничено, от него нельзя требовать составления программ для обработки. Весьма поучительна и работа в диалоговом режиме с ЭВМ по готовым программам, тем более, что владеющие приемами программирования имеют возможность оперативного дополнения программ, если они считают это полезным. Готовые программы целесообразно составлять только для таких работ, при которых этим достигается первая или вторая из вышеуказанных целей. Кроме того, в систему программ полезно включать программы для отдельных, наиболее часто встречающихся приемов обработки данных (например, ли-

нейная регрессия и т.п.). В дальнейшем называем их программами общего назначения.

Составленный для практикума по механике курса общей физики (студенты I к.) пакет программ включает сейчас четыре программы общего назначения и три программы для обработки данных конкретных лабораторных работ (специальные программы). Пакет составлен на языке БЕЙСИК, с которым студенты физического отделения знакомятся уже в первом семестре в курсе программирования. После загрузки операционной системы управление передается старт-программе, которая загружает меню (перечень программ пакета с короткими описаниями), а затем интерпретатор БЕЙСИК. Меню имеется и на БЕЙСИК-е. БЕЙСИК-программы рекомендуется запускать через меню. Из каждой конкретной программы возможен выход в меню для перехода к новой программе.

Приведем краткое описание отдельных программ пакета.

Программы общего назначения. SIGMA производит элементарную статистическую обработку одномерной выборки (до 100 элементов), выдавая арифметическое среднее, стандартные отклонения единичного результата и среднего, предельные ошибки на задаваемом пользователем доверительном уровне. HALVIM вычисляет оценку предельной ошибки результата косвенного измерения по методу наихудшего случая. Пользователь задает формулу вычисления результата и предельные ошибки результатов прямого измерения, входящих в эту формулу. LINREG вычисляет коэффициенты формулы линейной регрессии  $y = ax + b$  вместе с оценками ошибок на задаваемом доверительном уровне по двумерной выборке. При необходимости над выборкой можно произвести линеаризующее преобразование. VALBM позволяет по двумерной выборке выбирать подходящую приближающую формулу для описания зависимости двух физических величин. Формула выбирается в виде суммы некоторых базовых функций с коэффициентами. Базовые функции пользователь выбирает эвристически, работая в диалоге с ЭВМ, коэффициенты вычисляются по методу наименьших квадратов. Вычисляются и некоторые статистики для оценки качества выбранной базы.

Специальные программы составлены для обработки данных лабораторных работ "Исследование движения в поле силы тяже-

сти стробоскопическим методом", "Исследование деформации растяжения" и "Определение ускорения силы тяжести физическим маятником". Все эти работы отличаются большим объемом вычислительной работы, во всех программах применяется приближение зависимостей регрессионными формулами. Студент рисует графики этих зависимостей по регрессионным формулам, наносит экспериментальные точки и оценивает качество приближения. В диалоге с ЭВМ студент должен все время активно работать. Например, по промежуточным результатам он исключает из выборки явные промахи, по требованию машины вводит коэффициенты Стьюдента и т.д.

В практикуме по механике сделана также попытка демонстрации работы измерительной установки на линии с вычислительной машиной, в роли которой используется программируемый калькулятор МК-64. Правда, калькулятор не управляет установкой, а только регистрирует два последовательных коротких промежутка времени (показания таймера) в своей памяти при выполнении лабораторной работы "Проверка законов кинематики и динамики ускоренного поступательного движения машиной Атвуда". В практикуме по молекулярной физике используется встроенный АЦП того же калькулятора для снятия временной зависимости разности температур (термо-э.д.с. термопары) при определении коэффициента теплопроводности плоских теплопроводников [5].

В дальнейшем планируется заметное расширение пакета программ общего назначения. Эти программы будут оформлены в виде подпрограмм единой модульной системы программирования, с тем чтобы студенты могли с минимальным трудом составить необходимые им для обработки экспериментальных данных программы.

При составлении частей описанного выше пакета программ работали проф. Х.Таммет, начальник машины О.Теллер, инженер А.Виссел, студенты К.Касък, М.Люси и А.Пязок. Автор выражает им глубокую благодарность.

#### Литература

1. Лабораторные работы физического практикума с применением ЭВМ / Ред М.Ф. Вукс. - Л.: ЛГУ, 1975. - Вып. I. - 108с.

2. Физический практикум с применением ЭВМ / Ред. М.Ф. Вукс.- Л.: ЛГУ, 1977. - Вып. 2. - 127 с.
3. Физический практикум с применением ЭВМ / Под ред. Ф.М. Гольцмана. - Л.: ЛГУ, 1979. - Вып. 3. - 184 с.
4. ЭВМ в курсе общей физики / Под ред. А.Н. Матвеева. - М.: МГУ, 1982. - 230 с.
5. Виссел А.Э., Лаан М.Р. Использование микрокалькулятора "Электроника МК 64" в практикуме по общей физике // Методика преподавания физики в вузе: В помощь преподавателю. - Тарту: ТУ, 1986. - Вып. II. - С. 78-86

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ЯВЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММИРУЕМЫХ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ

З.Н. Бихеле

### Часть I. Исследование статистических распределений

Математическое моделирование как метод научного познания находит все более широкое применение в различных областях науки (в физике, инженерных дисциплинах, биологии, медицине и др.). Поэтому мы считаем целесообразным уже на первых курсах знакомить студентов с приемами проведения численных экспериментов на моделях, пусть даже не очень сложных.

Формулы, уравнения, описывающие свойства и особенности предметов, явлений и процессов, суть не что иное, как их идеальные математические модели. Любая модель отражает лишь некоторые свойства и особенности поведения оригинала. Численные эксперименты на модели, сопоставление их результатов с результатами натуральных опытов позволяют выявить соответствие модели реальному объекту или процессу, установить границы применимости модели. Такую проверку наиболее простых моделей целесообразно выполнять в рамках физического практикума, как это предлагается, например, в работе [1].

Кроме того, существует определенный круг физических яв-

лений, непосредственное экспериментальное исследование которых в рамках общего физического практикума не представляется возможным. В этом случае единственным способом детального ознакомления с ними является проведение численных экспериментов на моделях, описывающих эти явления [2, 3, 4, 5].

Метод численного моделирования особенно эффективен при наличии ЭВМ с дисплеями. Но опыт показывает, что многие задачи общего курса физики можно с успехом решать и с помощью программируемых микрокалькуляторов (ПК) [1, 6, 7].

Ниже приводятся программы для исследования распределения молекул по скоростям и распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела с помощью ПК типа "Электроника ЕЗ-34".

#### ПРОГРАММА I. Исследование функции распределения Максвелла

I. По программе рассчитываются значения функции распределения молекул по скоростям

$$f(v) = \left( \frac{m}{2\pi k T} \right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot e^{-mv^2/(2kT)}$$

в любом интервале скоростей, начиная с некоторого значения  $v_0$ , с произвольным шагом  $\Delta v$ . Вычисляется наиболее вероятная скорость молекул

$$v_0 = (2kT/m)^{1/2}$$

и соответствующее ей максимальное значение функции распределения  $f_m(v_0)$ . Варьируя значения  $T$  и  $m$ , можно исследовать зависимость функции распределения Максвелла от температуры для различных газов.

2. В режиме программирования (Ф ПГ) в ПК вводятся следующие программы.

Текст программы

Адрес	Оператор	Код	Адрес	Оператор	Код	Адрес	Оператор	Код
00	ИП А	6-	02	+	13	04	+	13
01	2	02	03	ИП 0	60	05	ИП В	64

Продолжение

Адрес	Оператор	Код	Адрес	Оператор	Код	Адрес	Оператор	Код
06	÷	I3	21	БП	5I	36	3	03
07	Π I	4I	22	I4	I4	37	$\frac{\sqrt{y}}{x}$	I4
08	F I/x	23	23	F x <sup>2</sup>	22	38	F I/x	23
09	F √	2I	24	Π 4	44	39	F I/x	23
I0	C/Π	50	25	ИΠ I	6I	40	F x <sup>y</sup>	24
II	ΠΠ	53	26	x	I2	4I	4	04
I2	23	23	27	/-/	0L	42	x	I2
I3	ИΠ C	6C	28	F e <sup>x</sup>	I6	43	F Π	20
I4	C/Π	50	29	ИΠ 4	64	44	x	I2
I5	ΠΠ	53	30	x	I2	45	ИΠ 2	62
I6	23	23	3I	Π 2	42	46	x	I2
I7	ИΠ C	6C	32	ИΠ I	6I	47	C/Π	50
I8	ИΠ Д	6Г	33	F Π	20	48	B/O	52
I9	+	I0	34	÷	I3			
20	Π C	4C	35	F √	2I			

3. После перехода на режим автоматического счета (F АВТ), вводят начальные данные:

постоянная Больцмана	к	Π 0
масса молекулы	m <sub>2</sub>	Π A
температура газа	T	Π B
начальная скорость	v <sub>0</sub>	Π C
шаг по скорости	Δv	Π Д

4. Порядок получения результатов расчетов:

V/O C/Π(v<sub>0</sub>) C/Π(f<sub>m</sub>(v<sub>0</sub>)) C/Π(v<sub>1</sub>) C/Π(f(v<sub>1</sub>)) C/Π(v<sub>2</sub>)  
C/Π(f(v<sub>2</sub>)) и т.д.

В скобках после символа C/Π указан символ величины, значение которой высвечивается на индикаторе после остановки ПМК.

5. В процессе счета можно изменить величину шага Δv. Для этого после получения очередного значения f(v<sub>1</sub>) следует ввести в регистр Д новое значение шага Δv Π Д и продолжать

расчеты С/П ( $v_{i+1}$ ) С/П ( $f(v_{i+1})$ ) и т.д.

6. Для расчета значений при другой температуре  $T_I$  или для другого газа  $m$ , заменить значения соответствующих параметров  $T_I$  П В,  $m$ , П А,  $v_0$  П С и считать, как показано в п. 4.

7. Контрольный пример

Для азота ( $N_2$ ) при  $T = 300$  К получим

$$v_0 = 422 \text{ м/с}, f_m(v_0) = 1,967 \cdot 10^{-3} \text{ с/м},$$

$$v_1 = 150 \text{ м/с}, f(v_1) = 0,595 \cdot 10^{-3} \text{ с/м},$$

$$v_2 = 200 \text{ м/с}, f(v_2) = 0,959 \cdot 10^{-3} \text{ с/м}.$$

Время счета одного значения  $f(v)$  примерно 18 с.

ПРОГРАММА 2. Расчет относительного числа молекул  $\Delta N/N$  имеющих скорости в различных интервалах скоростей

1. Для расчетов используется функция распределения Максвелла в виде

$$\varphi(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{v_0} \cdot e^{-v^2/v_0^2}, \text{ где } v_0 = (2RT/\mu)^{1/2}.$$

Интегрирование в заданном интервале скоростей от  $v_1$  до  $v_2$  выполняется по методу Симпсона. Результаты ( $\Delta N/N$ ) выводятся на индикатор в процентах.

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} \varphi(v) dv \approx \frac{h}{3} [\varphi(v_1) + 4\varphi(v_1+h) + 2\varphi(v_1+2h) + \dots + 4\varphi(v-h) + \varphi(v)].$$

Шаг интегрирования  $h = (v_2 - v_1)/n$ , где  $n$  - число шагов.

2. После ввода текста программа, перейти на режим автоматического счета и ввести параметры:

универсальная газовая постоянная	R	П А
молярная масса газа	$\mu$	П В
температура газа	T	П С

Текст программы

Адрес	Оператор	Код	Адрес	Оператор	Код	Адрес	Оператор	Код
00	ИП А	6-	23	↑	0E	46	x	I2
01	2	02	24	ИП 6	66	47	3	03
02	x	I2	25	-	II	48	+	I3
03	ИП В	6L	26	П 6	46	49	I	0I
04	÷	I3	27	ИП I	6I	50	0	00
05	ИП С	6Г	28	ИП 4	64	51	0	00
06	x	I2	29	+	IO	52	x	I2
07	F√	2I	30	П I	4I	53	С/П	50
08	П Д	4Г	31	ПП	53	54	ИП Д	6Г
09	С/П	50	32	54	54	55	÷	I3
10	ИП 2	62	33	П 7	47	56	F x <sup>2</sup>	22
11	ИП I	6I	34	↑	0E	57	↑	0E
12	-	II	35	ИП 6	66	58	/-/	0L
13	ИП 0	60	36	x	I2	59	F e <sup>x</sup>	I6
14	÷	I3	37	ИП 5	65	60	x	I2
15	П 4	44	38	+	IO	61	4	04
16	ИП I	6I	39	П 5	45	62	x	I2
17	ПП	53	40	F L 0	5Г	63	F π	20
18	54	54	41	22	22	64	F√	2I
19	П 5	45	42	ИП 5	65	65	+	I3
20	2	02	43	ИП 7	67	66	ИП Д	6Г
21	П 6	46	44	-	II	67	÷	I3
22	6	06	45	ИП 4	64	68	В/0	52

3. Для вычисления относительного числа молекул, скорости которых лежат в интервале скоростей  $\Delta v = v_2 - v_1$ , надо ввести в память значения границ интервала:

нижняя граница скорости  $v_1$  П I

верхняя граница скорости  $v_2$  П 2

число шагов интегрирования

(обязательно четное)  $n$  П 0

4. Порядок получения результатов

В/0 С/П ( $v_2$ ) С/П ( $\Delta N/N$ ).

5. Для расчета значения  $\Delta N/N$  в другом интервале скоростей при той же температуре заменить значения  $v_1$  и  $v_2$  на новые, восстановить число шагов интегрирования или ввести новое значение  $n$ , как показано в пункте 3, и считать по схеме БП Ю С/П ( $\Delta N/N$ ).

Если расчеты проводят при другой температуре или для другого газа, то после замены всех параметров считать, как показано в пункте 4.

6. Если интервал скоростей задается по значению наиболее вероятной скорости, то после ввода параметров согласно пункту 2 находят значение  $v_0$  по схеме В/О С/П ( $v_0$ ). Затем вводят границы интегрирования  $v_1 = \alpha_1 v_0$  и  $v_2 = \alpha_2 v_0$ ,  $\alpha_1$  ИП Д х П I,  $\alpha_2$  ИП Д х П 2, число шагов интегрирования  $n$  П 0 и продолжают счет по схеме БП Ю С/П ( $\Delta N/N$ ).

#### 7. Контрольный пример

Для азота ( $N_2$ ) при  $T = 300$  К и  $n = 4$  в интервале скоростей от  $v_1 = 150$  м/с до  $v_2 = 200$  м/с получим:  $v_0 = 422$  м/с и  $\Delta N/N = 3,87\%$ . В интервале скоростей от  $v_1 = 0,5v_0$  до  $v_2 = 1,5v_0$   $\Delta N/N = 70,7\%$ . Время счета  $\frac{\Delta N}{N}$  зависит от числа шагов интегрирования. При  $n = 4$  оно равно примерно 95 с.

### ПРОГРАММА 3. Исследование распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела

I. Целью работы является анализ излучения абсолютно черного тела на основе трех известных функций распределения

$$\varphi_1(\lambda, T) = 2\pi h c^2 \lambda^{-5} \left( e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1 \right)^{-1} \quad \text{(Формула Планка)}$$

$$\varphi_2(\lambda, T) = 2\pi h c^2 \lambda^{-5} e^{-\frac{hc}{kT\lambda}} \quad \text{(Формула Вина)}$$

$$\varphi_3(\lambda, T) = 2\pi c k T \lambda^{-4} \quad \text{(Формула Релея-Джинса)}$$

Значения рассчитываются по трем формулам в заданном интервале длин волн начиная с некоторого значения  $\lambda$ , с шагом  $\Delta \lambda$ .

Текст программы

Адрес	Оператор	Код	Адрес	Оператор	Код	Адрес	Оператор	Код
00	F 57	20	21	x	12	42	÷	13
01	2	02	22	П 6	46	43	С/П	50
02	x	12	23	ИП 2	62	44	ИП 5	65
03	ИП С	6Г	24	ИП 5	65	45	/-/	0L
04	x	12	25	+	13	46	F e <sup>x</sup>	16
05	П I	4I	26	П 5	45	47	ИП 3	63
06	ИП С	6Г	27	F e <sup>x</sup>	16	48	x	12
07	ИП А	6-	28	I	0I	49	ИП 0	60
08	x	12	29	-	II	50	÷	13
09	П 2	42	30	F I/x	23	51	С/П	50
10	ИП I	6I	31	ИП 3	63	52	ИП 6	66
11	x	12	32	x	12	53	ИП 0	60
12	П 3	43	33	П 4	44	54	+	13
13	ИП В	6L	34	5	05	55	С/П	50
14	ИП Д	6Г	35	ИП 9	69	56	ИП 9	69
15	x	12	36	F I/x	23	57	ИП 8	68
16	ИП 9	69	37	F I/x	23	58	+	10
17	С/П	50	38	F x <sup>y</sup>	24	59	П 9	49
18	x	12	39	П 0	40	60	БП	5I
19	П 5	45	40	ИП 4	64	61	13	13
20	ИП I	6I	41	X	14			

2. После ввода текста программы перейти на режим автоматического счета и ввести константы:

постоянная Планка             $h$     П А  
 постоянная Больцмана        $k$     П В  
 скорость света                 $c$     П С

3. Ввести значения параметров:

температура тела                 $T$     П Д  
 начальная длина волны        $\lambda$ ,    П 9  
 величина шага                  $\Delta\lambda$     П 8 В/0

4. Для каждой длины волны рассчитывают лучеиспускательную способность абсолютно черного тела по трем формулам в

следующем порядке.

С/П ( $\lambda$ ) С/П ( $\varphi_1$ ) С/П ( $\varphi_2$ ) С/П ( $\varphi_3$ ) и т.д.

Расчеты повторяют до тех пор, пока не будет пройден весь заданный интервал длин волн.

5. После получения очередного значения  $\varphi_3$  можно при желании заменить один из параметров следующим образом:

$\Delta\lambda$  П 8,  $\lambda$  П 9 БП 13 и Т П Д В/0 (или все вместе, согласно п. 3) и продолжать счет согласно п. 4.

6. Контрольный пример.

Для  $T = 2000$  К и  $\lambda = 1,5$  мкм получим  $\varphi_1 = 4,10 \cdot 10^{11}$  Вт/м<sup>3</sup>,  
 $\varphi_2 = 4,06 \cdot 10^{11}$  Вт/м<sup>3</sup>,  
 $\varphi_3 = 1,03 \cdot 10^{13}$  Вт/м<sup>3</sup>.

Время счета  $\varphi_1$  около 15 с.

Примечание. Приведенную программу можно использовать и для исследования только функции распределения Планка  $\varphi_1(\lambda, T)$ . Для этого надо заменить два оператора: по адресу 44 ввести БП вместо ИП 5 и по адресу 45 ввести число 56 вместо знака /-/. Расчет ведется по схеме: С/П ( $\lambda$ ) С/П ( $\varphi(\lambda)$ ) С/П ( $\lambda + \Delta\lambda$ ) С/П ( $\varphi(\lambda + \Delta\lambda, T)$ ) и т.д.

Приведенные программы можно использовать и для микрокалькуляторов "Электроника МК-52", "...МК-54", "...МК-56" и "...МК-61".

#### Литература

1. Бабич И.Л., Мартынюк А.В. Лабораторная работа по численному моделированию движения твердого тела, закрепленного в точке // Сборник научно-методических статей по физике. - М.: Высшая школа, 1987. - Вып. 13. - С. 27-35.
2. Гайдук В.М., Плис В.И. Использование ЭВМ в курсе физики // Сборник научно-методических статей по физике. - М.: Высшая школа, 1987. - Вып. 13. - С. 6-9.
3. Гуров В.М., Готовцев В.В. Использование ЭВМ при изучении темы "Принцип суперпозиции полей" // Сборник научно-методических статей по физике. - М.: Высшая школа, 1987. - Вып. 13. - С. 14-16.

4. Туманьян Ю.А. Анализ излучения черного тела с помощью ЭВМ // Сборник научно-методических статей по физике. - М.: Высшая школа, 1987. - Вып. 13. - С. 17-21.
5. Моделирование физических процессов и явлений. Лабораторный практикум. - Новосибирск, 1986.
6. Сальников А.Н., Шевяков Н.С. Программируемые микрокалькуляторы в физическом практикуме, Саратов.: СПИ, 1986.
7. Briotta D.A., Seligman P.F., Smith P.A. and Spenser C.D. The appropriate use of microcomputers in undergraduate physics labs // Amer. J. Phys. 55.- 1987. - № 10. - P. 891-897.

#### ПРИНЦИПЫ ОРГАНИЗАЦИИ ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА ДЛЯ СТУДЕНТОВ МЕДИЦИНСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

Т.А. Мойрсепп, Т.К. Мойрсепп, М.И. Тамеорг, Х.В. Тераль

Известно, что интерес к предмету и, следовательно, усвоение учебного материала зависит в значительной степени от того, как связано обучение с будущей профессией студента.

В данной статье рассматривается многолетний опыт авторов по модернизации некоторых традиционных для физического практикума лабораторных работ, а также описывается ряд новых работ для студентов-медиков в рамках курса "Медицинская и биологическая физика". При этом мы ограничиваемся рассмотрением цикла работ, который охватывает обучение физическим основам использования различных токов и полей в медицине.

Во всех руководствах к лабораторным работам подробно описаны физические явления, на которых они базируются, даны определения и приводятся единицы измерения используемых физических величин и параметров. Не столь подробно описывается техническая конструкция аппаратов. Студенты, помимо выполнения измерений, должны самостоятельно проделать обработку данных, используя персональные ЭВМ. Результаты требуется представить в протоколе в виде таблиц, графиков и выпечаток данных с ЭВМ.

Вместе с физическими основами в руководствах указаны об-

ласти применения данного физического явления, метода измерения или конкретного аппарата в медицине. Детальное описание соответствующих медицинских процедур, приемов лечения и диагностики в руководствах не приводится, поскольку это не входит в рамки изучаемого курса и, кроме того, студенты первого курса еще не усвоили специальных знаний по своей будущей профессии.

Постоянный импульсный и переменный токи, переменные электрические и магнитные поля, а также электромагнитные волны широко используются в современной медицине в целях диагностики и терапии.

Непрерывный постоянный ток (предельная допустимая и плотность тока в тканях не более  $0,1 \text{ мА/см}^2$ ) используется в лечебных методах гальванизации и электрофореза лекарственных веществ. В медицинских аппаратах переменный низкочастотный ток (50 Гц) преобразуется в постоянный (выпрямляется) напряжением до 60–80 В. В лабораторной работе "Выпрямление переменного тока" [1, 2] изучается выпрямляющее действие полупроводниковых диодов и сглаживающее действие электрических фильтров. Дополнительно изучается процесс выпрямления синусоидального тока в схеме медицинского аппарата для гальванизации и электрофореза "ПУТОК-1". Благодаря специальным выводам от схемы, на экране осциллографа можно наблюдать входное синусоидальное напряжение, пульсирующее напряжение двухполупериодного выпрямителя, сглаженное напряжение с фильтра и постоянное напряжение с выходного потенциометра аппарата.

Частотная зависимость импеданса (полного сопротивления переменному току) тканей организма используется для оценки их жизнеспособности. На импеданс тканей оказывает действие и их физиологическое состояние, в частности, в большой степени кровенаполнение, которое, в свою очередь, обуславливается состоянием сердечно-сосудистой системы. В практикуме студенты выполняют три работы на эту тему.

В работе "Изучение цепи переменного тока" [1, 2, 4] исследуется зависимость от частоты индуктивного и емкостного сопротивлений, измеряется импеданс цепи и сдвиги фаз, а также изучается резонанс напряжений. В руководстве к работе подробно описаны величины, характеризующие переменный ток и элементы цепи.

Прохождение переменного тока через живую ткань (лист или стебель растений) исследуется в работе "Изучение импеданса живой ткани" [3]. Проводимость ткани описывается с помощью эквивалентной схемы, содержащей параллельно включенные резистор (характеризует проводимость электролитов тканей) и конденсатор (характеризует поляризационную емкость тканей). Определяются частотные зависимости импеданса и емкости тканей, а также возникающего сдвига фаз между током и напряжением.

Зависимость импеданса участка тела человека от его кровенаполнения исследуется в работе "Физические основы реоплетизмографии" [4]. Запись реограмм и дифференциальных реограмм с реоплетизмографа РПГ2-02 осуществляется с помощью электрокардиографа ЭКГ-03.

Очень разнообразно в медицине использование импульсных токов. Действие импульсного тока на ткани и органы зависит от формы, длительности, амплитуды и частоты повторения импульсов (электросон, электронаркоз, кардиостимуляция, электрогимнастика и т.д.). В работе "Источники импульсного тока" [1, 3] описаны и исследуются характеристики импульсного тока, их назначение в медицине, методы получения (генератор пилообразных напряжений, мультивибратор). При прохождении через ткани электрические импульсы изменяют форму, что важно знать в диагностике. Поэтому в упомянутой работе рассматривается и преобразование импульсов в RC-цепях (дифференцирующая и интегрирующая цепи). Для наблюдения генерируемых и преобразованных импульсов и измерения их параметров используется осциллограф.

В работе "Ознакомление с аппаратом «ТОНУС-Б» [3] изучаются типы и характеристики импульсных диадинамических токов. Регистрируется зависимость  $1/j = f(R)$ , где  $j$  - сила тока в цепи, содержащей в качестве источника э.д.с. аппарат "ТОНУС-Г",  $R$  - сопротивление внешней цепи (набор различных резисторов имитирует сопротивление тканей пациента). Осуществляется, таким образом, проверка закона Ома для замкнутой цепи, вычисляются эквивалентные значения э.д.с. и внутреннего сопротивления. Определяется зависимость выделенной во внешней цепи мощности в зависимости от ее сопротивления.

Метод лечения модулированным синусоидальным током называется амплипульсной терапией. Ритмическое раздражение такими токами используется для обезболивания, улучшения кровоснабжения и ускорения обменных процессов в тканях и органах. В работе "Аппарат низкочастотной терапии «Амплипульс-4» [4] изучаются режимы работы (непрерывный ток и прерывистый, переменные и однонаправленные токи), измеряются частота модулирующих колебаний, глубина модуляции, мощность, выделяемая во внешней цепи.

В УВЧ-терапии используется переменное высокочастотное электрическое поле, которое создает в тканях токи смещения и проводимости, в результате чего выделяется тепло (смещение зарядов в УВЧ-поле порядка тепловых).

В работе "Изучение УВЧ-генератора" [1, 3] описывается генерация УВЧ-колебаний, регистрируются мощность, выделяемая в терапевтическом контуре, резонансная кривая, степень нагревания электролита и диэлектрика, изучается распределение поля между электродами пациента с помощью дипольной антенны. Используются медицинские аппараты УВЧ-62, УВЧ-30.

Воздействие на биологическую ткань сантиметровыми электромагнитными волнами также приводит к выделению тепла. Особенно сильное поглощение электромагнитных волн происходит в таких тканях, как мышцы, кровь (т.е. содержащих много полярных молекул воды). Воздействие волн на различные по свойствам среды изучается в работе "Ознакомление с аппаратом Луч-3" [4]. Моделью жидкой ткани служит кювета, заполненная поролоном, который смачивается физиологическим раствором. Моделью жировой ткани служит кювета с парафином. Измеряется распределение температуры в кювете по мере удаления от излучателя аппарата.

На ткани организма воздействует внешнее магнитное поле, биотоки тканей сами создают очень слабые магнитные поля. Известно действие магнитного поля на нервную систему и характеристики крови (за счет изменения физико-химических процессов). Все живые организмы на Земле подвержены действию ее магнитного поля.

В работах "Измерение горизонтальной составляющей поля Земли" и "Исследование аппарата низкочастотной магнитной те-

рапии «ПОЛЮС-Б» [4] описаны характеристики магнитного поля, магнитные свойства частиц и сред, параметры магнитного поля Земли, характеристика аппарата магнитотерапии «ПОЛЮС-Г». Практическая часть заключается в определении горизонтальной составляющей поля Земли по изменению периода колебаний магнитного стержня, помещенного в соленоид с током, ось которого ориентирована по направлению поля Земли.

На экране осциллографа наблюдают форму низкочастотных токов, создающих магнитное поле между индукторами аппарата «ПОЛЮС-Г», оценивают относительные значения индукции поля. С помощью специального датчика, перемещаемого между индукторами, изучают распределение магнитного поля.

Поскольку по каждой работе имеется не более трех лабораторных установок (некоторые в одном экземпляре), то студентами они выполняются не в том порядке, как описаны в статье. Для создания цельного представления по теме цикла важно завершить выполнение работ общим коллоквиумом.

Авторы статьи считают, что для улучшения усвоения материала целесообразно объединить все работы учебного года в циклы, аналогичные описанному выше.

В учебном практикуме кафедры геофизики частично созданы и разрабатываются далее для студентов-медиков следующие циклы: информатика; механика, свойства жидкостей; электроизмерительные приборы и медицинская электроника; измерение биопотенциалов; токи и поля; использование оптических явлений; взаимодействие ионизированного излучения с веществом, дозиметрия.

#### Литература

1. Тераль Х. Физический практикум для медиков. - Тарту: ТГУ, 1987.
2. T.Müürsepp. Füüsika praktikum arstiteaduskonna üliõpilastele. II. - Tartu: TRÜ, 1987.
3. T.Müürsepp. Füüsika praktikum arstiteaduskonna üliõpilastele. III. - Tartu: TRÜ, 1987.
4. Машинописные описания работ. Хранятся в научной библиотеке ТГУ и учебной лаборатории кафедры геофизики.

## КАК БЫ ОДОЛЕТЬ ФИЗИКУ?

Л.Э. Мяттас

В предыдущей статье [1] мы описывали, как слушатель подготовительного отделения ЭСХА вздыхает при решении задач по физике: "Ой, как трудно!"

Там же мы указали способ, как преодолеть трудности. К началу решения ведет дублет вопросов: есть ли формулы для неизвестных и есть ли формулы для процессов?

Откуда же берет решающий задачи формулы?

По существующему учебному плану он должен усвоить формулы или слушая лекции по физике, или самостоятельно занимаясь с учебной литературой.

Если решающий сам не читает книг по физике и не может или не хочет слушать лекции, то большинство необходимых формул остается неувоенным. Тогда требуется добрый совет, как решать задачи без инструмента - без формул.

Конечно, прямой виновник неувоения формул - слушатель подготовительного отделения ЭСХА (или студент). Но приходится откровенно признать, что этому во многом способствует и низкий уровень инструментария физического эксперимента в ЭСХА (из-за плохого снабжения) и недостаточность (или отсутствие) учебной литературы по физике на эстонском языке.

Преподавание физики на основе скудного эксперимента предполагает очень высокий уровень внимания слушателя. Как раз этого-то и не хватает всем в течение 8-ми месячного "мелового" курса физики. В результате возникают пробелы в знаниях, падает интерес...

Составители действующего учебного плана (лекции, лабораторные работы, задачи) предполагают, что все в учебном процессе зависит от преподавателя, что студенты одинаково восприимчивы и одарены.

Практический опыт учебной работы показывает противоположное: восприимчивость, способности, интерес индивидуальны и колеблются от очень хороших до очень плохих. Результат учебы зависит в значительной степени от качеств личности учащихся.

Поэтому нам кажется, что модернизацию учебного процесса следует начать с решительного увеличения роли самостоятельной работы студента. Кроме того, следует учесть замечания методистов о содержательной и процессуальной сторонах учебного процесса (см., например, /2/). Познавательную работу учащихся следует направлять от практической деятельности (эксперимента) к образу и от образа к физическому понятию, к величине. Связь между величинами (законы) ведет познание обратно к практике: решению задач, объяснению явлений и т.д.

На важность образа (образа свойства, связи свойств, процессов) указывают вопросы и просьбы слушателей: "покажите нам на пальцах", "объясните суть без математики" и др.

Отсюда ясно, что в целях перестройки учебного процесса надо организовать преподавание физики (физики подготовительного отделения, а может быть, и общей физики) на базе учебной лаборатории по основным понятиям и законам физики.

По мнению пишущего эти строки, слушатель или студент должен сам выводить основные понятия и законы физики в учебной лаборатории. Для организации такой лаборатории необходимо составить альтернативные указания и укомплектовать ее подходящими приборами. Указания должны учитывать способности слушателя или студента: заинтересованным - больше, неспособным - меньше.

Учебную лабораторию как основную форму учебного процесса следует дополнить обзорными лекциями, семинарами, докладами, решением задач и т.д. Подразумевается широкое внедрение вычислительной техники (персональных компьютеров).

Главное преимущество учебной лаборатории - индивидуализация учебного процесса. Она побуждает студента действовать, образно представлять, думать, объяснять, отражать действительность в понятиях.

Реализация лаборатории станет возможной, если вуз будет иметь право сам конкретизировать содержание учебного процесса для достижения желаемого конечного результата.

Пока в ЭСХА такой лаборатории нет. Но если думать о повышении требований к уровню теоретической подготовки студентов, то описанная учебная лаборатория станет необходимой.

Идея создания лаборатории возникла при написании учебно-

го пособия "Физика для подготовительного отделения" (на эстонском языке [3]).

Но если подумать о препятствиях, стоящих на пути организации такой лаборатории (плохое снабжение, отсутствие персональных компьютеров и др.), то приходится поступать так же, как поступают слушатели подготовительного отделения при решении задач: "Ой, как трудно...".

Но где сказано, что должно быть легко?

### Литература

1. Мяттас Л.Э. О решении задач по физике на подготовительном отделении // Методика повышения эффективности преподавания физики в вузе. В помощь преподавателю. XIII. - Тарту: ТГУ, 1988. - С. 97-98.
2. Рутас В.И. К проблеме подготовки специалистов широкого профиля // Профессиональное и социальное формирование студентов в учебно-воспитательном процессе. Проблемы высшей школы. IV. - Тарту: ТГУ, 1981. - С. 4-20.
3. Mättas L. Füüsika ettevalmistusosakonnale. - Tartu: ERA. - 1984. - 1. vihik; 1984. - 2. vihik; 1985. - 3. vihik; 4., 5., 6. vihik (в печати).

## С о д е р ж а н и е

З.Н. Бихеле, Г.А. Бихеле. "Начала" Ньютона и принцип Маха .....	3
О.В. Сакс. Магнитное взаимодействие как релятивистский эффект электрического взаимодействия ....	10
К.Э. Таркпеа. К вопросу об изложении основных понятий электромагнетизма в курсе общей физики ...	21
А.И. Розенталь. Гетеропереход .....	27
В.А. Веймер, Р.Й. Манкин. О квантовых числах в изложении атома водорода в курсе общей физики ....	34
Ю.Я. Лембра. Об изложении нестационарной теории возмущений в курсе квантовой механики .....	39
В.А. Веймер, Р.Й. Манкин. Астрофизический пример применения статистики Ферми в курсе общей физики .....	44
Я.А. Яанисте. Строение и эволюция Солнца как пример комплексного применения основных законов физики.	55
А.Э. Силас. Преемственность и тезаурус физических основ измерений.....	62
Э.И. Тамм. ЭВМ в физическом практикуме по механике на кафедре общей физики ТГУ .....	69
З.Н. Бихеле. Моделирование физических процессов и явлений с помощью программируемых микрокалькуляторов .....	73
Т.А. Мойрсепп, Т.К. Мойрсепп, М.И. Таммеорг, Х.В. Тераль. Принципы организации физического практикума для студентов медицинского факультета .....	81
Л.Э. Мяттас. Как бы одолеть физику? .....	86