Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Dairis Püvi

Bishop-Phelps-Bollobáse teoreem

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Kristel Mikkor
Märt Põldvere

Tartu 2016

Bishop-Phelps-Bollobáse teoreem

Bakalaureusetöö

Dairis Püvi

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös esitatakse Bishop–Phelpsi tugifunktsionaalide teoreemi üksikasjalik tõestus. Tõestus järgib Bishopi ja Phelpsi originaaltõestust aastast 1963, kuid üks lemma on asendatud tema tugevdusega Phelpsi hilisemast artiklist ajakirjas *Advances in Math.*, 1974 (järeldus 2.3), millele antakse töös lihtsam tõestus. Selline asendus võimaldab kõrvalsaadusena tõestada parimate võimalike (teada olevate) hinnangutega Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemi.

CERCS teaduseriala: P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: Banachi ruum, Bishop–Phelpsi tugifunktsionaalide teoreem, Bishop–Phelps–Bollobáse teoreem.

The Bishop-Phelps-Bollobás' Theorem

Bachelor's thesis

Dairis Püvi

Abstract. In this bachelor's thesis, a detailed proof of the Bishop–Phelps–Bollobás theorem is presented. The proof follows the orginial proof of Bishop an Phelps from 1963, but one lemma has been replaced by its strengthening from Phelps's paper in *Advances in Math.*, 1974 (Corollary 2.3), which has been given a simpler proof in the thesis. This replacement enables to prove, as a byproduct, the sharpest possible (known) Bishop–Phelps–Bollobás theorem.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
Key words: Banach space, Bishop–Phelps support functional theorem, Bishop–Phelps–Bollobás theorem.

Sisukord

Sissejuhatus

Olgu X normeeritud ruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pideva lineaarse funktsionaali $f\colon X \to \mathbb{K}$ norm on defineeritud võrdusega

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqslant 1}} |f(x)|.$$

Kui see supreemum saavutatakse (st leidub $x_0 \in X$, $\|x_0\| \leqslant 1$, nii, et $|f(x_0)| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leqslant 1}} |f(x)|$), siis öeldakse, et funktsionaal f *saavutab oma normi.* Üldjuhul pidev lineaarne funktsionaal $f\colon X \to \mathbb{K}$ võib, kuid ei tarvitse oma normi saavutada (vt käesoleva töö lauseid 1.10 ja 1.11 ning näidet 1.1).

Järgnevad märkmed meie ülesandepüstituse ajaloolise tausta kohta on refereeritud põhiliselt monograafiast [M].

Aastal 1964 andis R. C. James[1] artiklis [J^{64}] tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et iga pidev lineaarne funktsionaal Banachi ruumil X saavutaks oma normi.

Jamesi refleksiivsusteoreem (ehk lihtsalt **Jamesi teoreem,** 1964; vt nt [M, lk 134, teoreem 1.13.15 või 1.13.16] või [J^{72}])**.** *Olgu X Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruum X on refleksiivne;*

(ii) *iga pidev lineaarne funktsionaal ruumil X saavutab oma normi.*

Märkus. Banachi ruumi *refleksiivsuse* kohta vt käesoleva töö definitsiooni 1.7.

Märkus. Implikatsioon (i)$\Rightarrow$(ii) Jamesi teoreemis on üsna ilmne (vt käesoleva töö lauset 1.10; implikatsioon (ii)$\Rightarrow$(i) on tugevalt mittetriviaalne.

Märkus. Jamesi teoreemi tõestus separaabli Banachi ruumi juhu jaoks ilmus aastal 1957 artiklis [J^{57}].

[1] Robert Clarke James (1918–2004) – USA matemaatik.

Märkus. Jamesi teoreemi tõestus (Jamesi) artiklis [J^{72}] on oluliselt lihtsam selle teoreemi originaaltõestusest artiklis [J^{64}]; monograafias [M, paragrahv 1.13] esitatud tõestus järgib artikli [J^{72}] tõestust.

Ligikaudu Jamesi teoreemi separaabli versiooni (s.t artikli [J^{57}]) ilmumise aegu asus R. R. Phelps[2] uurima normi saavutavaid funktsionaale mitterefleksiivsetel Banachi ruumidel ja pani tähele, et iga klassikalise mitterefleksiivse Banachi ruumi puhul on oma normi saavutavate funktsionaalide hulk kõigi vastaval ruumil pidevate linaarsete funktsionaalide ruumis kõikjal tihe. Jamesi teoreemi valguses tundus Phelpsile, et sellise omadusega normeeritud ruumid on teatavas mõttes “peaaegu” refleksiivsed, millega oligi motiveeritud järgnev definitsioon. Sümbol X^* tähistab traditsiooniliselt normeeritud ruumi X kaasruumi, s.t pidevate lineaarsete funktsionaalide $X \to \mathbb{K}$ Banachi ruumi.

Definitsioon (Phelps, 1957; vt nt [M, definitsioon 2.11.1] või [Ph^{57}])**.** Öeldakse, et normeeritud ruum X on *subrefleksiivne,* kui oma normi saavutavate funktsionaalide hulk on kaasruumis X^* kõikjal tihe, s.t iga $f \in X^*$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $g \in X^*$ nii, et

(1) $|g(y)| = \|g\|$ mingi $y \in X$, $\|y\| \leqslant 1$, korral;

(2) $\|f - g\| < \varepsilon$.

Loomulikult on iga refleksiivne (Banachi) ruum subrefleksiivne. Artiklis [Ph^{57}], kus Phelps tõi sisse subrefleksiivsuse mõiste, andis ta ka näite mittetäielikust normeeritud ruumist, mis pole subrefleksiivne (lihtsam näide samast fenomenist on toodud monograafias [M, lk 271–272, näide 2.11.2]). Küsimus, kas iga täielik normeeritud ruum (s.t Banachi ruum) on subrefleksiivne, jäi lahtiseks. Artiklis [BPh^{61}] andsid Phelps ja E. A. Bishop[3] sellele küsimusele jaatava vastuse.

Bishop–Phelpsi subrefleksiivsusteoreem (1961; vt nt [M, lk 278, teoreem 2.11.14] või [BPh^{61}])**.** *Iga Banachi ruum on subrefleksiivne.*

Tervikpildi seisukohalt on oluline märkida, et leidub ka mittetäielikke subrefleksiivseid normeeritud ruume (vt nt [M, lk 279, ülesanne 2.115]). Veelgi enam, artiklis [J^{71}] esitas James näite mittetäielikust normeeritud ruumist, mille korral iga pidev lineaarne funktsionaal sellel ruumil saavutab oma normi. (Märgime, et iga sellise omadusega ruumi täield on alati refeksiivne, vt [M, lk 135, ülesanne 1.150].)

Artiklis [BPh^{63}] andsid Bishop ja Phelps oma subrefleksiivsusteoreemile uue tõestuse, tuues selles selgemalt esile artikli [BPh^{61}] tõestuses sisalduvad geomeetrilised ideed. Tegelikult tõestasid Bishop ja Phelps artiklis [BPh^{63}] midagi enamat kui subfrefleksiivusteoreem: nende põhitulemus oli järgmine.

[2]Robert Ralph Phelps (1926–2013) – USA matemaatik.
[3]Errett Albert Bishop (1928–1983) – USA matemaatik.

Bishop–Phelpsi tugifunktsionaalide teoreem (ehk lihtsalt Bishop–Phelpsi teoreem, 1963; vt nt [DU, lk 189, teoreem 4] või [M, lk 278, teoreem 2.11.13] või [BPh^{63}])**.** *Olgu C mittetühi kinnine tõkestatud kumer alamhulk reaalses Banachi ruumis X. Siis hulgas C maksimaalse väärtuse saavutavate funktsionaalide hulk on kaasruumis X^* kõikjal tihe, s.t mis tahes $f \in X^*$ ja $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $g \in X^*$ ja $y \in C$ nii, et*

(1) $g(y) = \sup\limits_{x \in C} g(x)$;

(2) $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.

Märkus. Bishop–Phelpsi subrefleksiivsusteoreem on erijuht Bishop–Phelpsi tugifunktsionaalide teoreemist, kus hulga C rollis on ruumi X kinnine ühikkera.

Märkus. Tugifunktsionaali mõiste on käesolevas töös avatud definitsioonis 1.6 ja sellele järgnevas kommentaaris.

Artiklis [Bo] pani B. Bollobás[4] tähele, et Bishop–Phelpsi subrefleksiivuseteoreemi tõestuses artiklis [BPh^{61}] on implitsiitselt tõestatud tugevam väide: lisaks sellele, et me saame funktsionaali f lähendada funktsionaaliga g, mis saavutab oma normi, me saame samaaegselt punkti, milles f on lähedane oma normile, lähendada punktiga, milles g saavutab oma normi. Sellele väitele viidatakse kui *Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemile.*

Bishop–Phelps–Bollobáse teoreem (vrd [Bo, teoreem 1])**.** *Olgu X reaalne Banachi ruum ning olgu $f \in X^*$ ja $z \in X$ sellised, et $\|f\| = \|z\| = 1$ ja $f(z) \geqslant 1 - \dfrac{\varepsilon^2}{2}$, kus $0 < \varepsilon < 2$. Siis leiduvad $g \in X^*$ ja $y \in X$ nii, et*

(1) $g(y) = \|g\| = \|y\| = 1$;

(2) $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$;

(3) $\|z - y\| \leqslant \varepsilon$.

Märkus (vt märkust 2.2)**.** Bollobás tõestas artiklis [Bo] eelneva teoreemi vaid juhu jaoks, kus $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, kusjuures tingimuse (3) asemel sai ta nõrgema tingimuse

(3′) $\|z - y\| < \varepsilon + \varepsilon^2$.

[4] Béla Bollobás (snd 1943) – Ungaris sündinud Suurbritannia ja USA matemaatik.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on esitada Bishop–Phelpsi tugifunktsionaalide teoreemile ja Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemile üksikasjalik tõestus. Allikmaterjalina toetume me siinkohal monograafiale [DU], kus tõestusskeem järgib artikli [BPh63] tõestusskeemi, kuid me asendame selles skeemis ühe lemma (vt [DU, lemma 3] või lemma 2.10) tema tugevdusega Phelpsi hilisemast artiklist [Ph74, järeldus 2.3] (vt lemmat 2.6), millele me anname ka uue tõestuse. See asendus võimaldab meil saada Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemis parimad võimalikud hinnangud (vt märkusi 2.1, 2.2 ja 2.8).

Töö koosneb kahest peatükist.

Esimeses peatükis toome välja eelteadmised ja abitulemused, mis on vajalikud põhitulemuste mõistmiseks ja tõestamiseks. Esimeses paragrahvis meenutame osalise järjestuse mõistet ja sõnastame Kuratowski–Zorni lemma, teises selgitame koonuste ja vektorruumi tehetega kooskõlas olevate järjestuste vahekorda vektorruumis, kolmandas selgitame hüpertasandi, poolruumi ja tugifunktsionaali mõistet, neljandas sõnastame Hahn–Banachi jätkamisteoreemi ja ühe versiooni Hahn–Banachi eraldamisteoreemist ning selgitame refleksiivse normeeritud ruumi mõistet. Viiendas paragrahvis toome näiteid oma normi saavutavatest ja mittesaavutavatest pidevatest lineaarsetest funktsionaalidest, kuuendas paragrahvis tõestame olulisemad faktid koonduvate perede kohta meetrilises ruumis ning viimases, seitsmendas, toome välja veel mõned vajalikud abitulemused, mis oma temaatika poolest eelnevatesse paragrahvidesse hästi ei sobinud.

Teises peatükis tegeleme käesoleva töö põhitulemustega. Esimeses paragrahvis sõnastame veel kord Bishop–Phelpsi tugifunktsionaalide teoreemi, Bishop–Phelpsi subrefleksiivsusteoreemi ja Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemi. Teises paragrahvis tõestame mõned piisavad tingimused garanteerimaks, et kaks pidevat lineaarset funktsionaali normeeritud ruumi kaasruumis on teineteisele "lähedal". Kolmandas paragrahvis tõestame Bishop–Phelpsi ja Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemi ning viimases, neljandas, analüüsime, millise efekti andis eelmises paragrahvis Bishopi ja Phelpsi algupärases tõestusskeemis ühe nende originaallemma asendamine sellest tugevama Phelpsi lemmaga.

Töös on kasutatud järgmisi tähistusi. Normeeritud (ja erijuhul Banachi) ruumis X tähistame lahtist kera keskpunktiga $a \in X$ ja raadiusega $r > 0$ sümboliga $B(a, r)$, s.t

$$B(a,r) := \{x \in X\colon\ \|x - a\| < r\}.$$

Ruumi X ühiksfääri ja kinnist ühikkera tähistame me vastavalt sümbolitega S_X ja B_X, s.t

$$S_X := \{x \in X\colon\ \|x\| = 1\} \quad \text{ja} \quad B_X := \{x \in X\colon\ \|x\| \leqslant 1\},$$

ruumi X alamhulga A sisemust, sulundit ja raja vastavalt sümbolitega A°, $\overline{A}$ ja ∂A ning tema lineaarset katet sümboliga $\operatorname{span} A$.

Ruumi X kaasruumi (s.t ruumil X tegutsevate pidevate lineaarset funktsionaalide ruumi) tähistame me sümboliga X^*. Meenutame, et kaasruum X^* on täielik normeeritud ruum (s.t Banachi ruum) normiga

$$\|f\| = \sup_{x \in B_X} f(x), \quad f \in X^*.$$

Ruumi X teist kaasruumi, s.t kaasruumi X^* kaasruumi tähistame me sümboliga X^{**}, s.t $X^{**} = (X^*)^*$.

Teises peatükis kasutame me kaasruumi X^* elementide märkimisel tähistusi x^* ja y^* – rõhutame, et need on terviklikud sümbolid (erinevalt sümbolist X^*, mis on saadud ülaindeksina tärni * lisamisel iseseisvat tähendust omavale sümbolile X).

Kui X on vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, siis arvu $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ja elemendi $x \in X$ korral me kirjutame korrutise $\frac{1}{\alpha} x$ asemel sageli $\frac{x}{\alpha}$.

I PEATÜKK

Vajalikke eelteadmisi ja abitulemusi

1.1 Osalise järjestuse seos; Kuratowski–Zorni lemma

Definitsioon 1.1 (vt [OO, lk 167])**.** Seost $\preccurlyeq$ hulgas $\mathcal{A}$ nimetatakse *osaliseks järjestuseks,* kui mis tahes $a, b, c \in \mathcal{A}$ korral

PO1° $a \preccurlyeq a$ (s.t $\preccurlyeq$ on refleksiivne);

PO2° $a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq c \implies a \preccurlyeq c$ (s.t $\preccurlyeq$ on transitiivne);

PO3° $a \preccurlyeq b,\ b \preccurlyeq a \implies a = b$ (s.t $\preccurlyeq$ on antisümmeetriline).

Seejuures öeldakse, et $(\mathcal{A}, \preccurlyeq)$ on *osaliselt järjestatud hulk.* Kui järjestuse $\preccurlyeq$ roll on kontekstist selge, siis öeldakse ka lihtsalt, et $\mathcal{A}$ on osaliselt järjestatud hulk. Kui $a \preccurlyeq b$, siis kirjutatakse ka $b \succcurlyeq a$; sel juhul öeldakse, et element a *eelneb* elemendile b või et element b *järgneb* elemendile a.

Definitsioon 1.2 (vt [KN, lk 24, lk 60])**.** Olgu $\mathcal{A}$ osaliselt järjestatud hulk. Öeldakse, et

- osahulk $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ on *lineaarselt järjestatud,* kui mis tahes $a, b \in B$ korral $a \preccurlyeq b$ või $b \preccurlyeq a$;
- element $a \in \mathcal{A}$ on osahulga $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ *ülemine tõke,* kui $b \preccurlyeq a$ iga $b \in \mathcal{B}$ korral;
- element $a \in \mathcal{A}$ on hulga $\mathcal{A}$ *maksimaalne element,* kui $b \in \mathcal{A}$, $a \preccurlyeq b$, korral $a = b$ (s.t ei ole olemas elemendile a järgnevaid ja seejuures temast erinevaid elemente).

Lemma 1.1 (Kuratowski–Zorni lemma; vt [OO, lk 168])**.** *Kui osaliselt järjestatud hulga $\mathcal{A}$ igal lineaarselt järjestatud osahulgal on olemas ülemine tõke, siis hulgas $\mathcal{A}$ leidub maksimaalne element.*

1.2 Koonused ja järjestused vektorruumis

Definitsioon 1.3 (vt [OO, lk 79])**.** Olgu X vektorruum. Öeldakse, et hulk $A \subset X$ on *kumer,* kui mis tahes x, $y \in A$ ja $\lambda \in [0, 1]$ korral

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in A.$$

Kuna $(1-\lambda)x+\lambda y = x+\lambda(y-x)$, siis hulga A kumerus tähendab geomeetriliselt, et koos oma mis tahes kahe punktiga sisaldab hulk A ka neid punkte ühendava sirglõigu.

Definitsioon 1.4 (vt [M, lk 273, definitsioon 2.11.4])**.** Olgu X vektorruum ning olgu K ruumi X mittetühi alamhulk. Öeldakse, et hulk K on *koonus,* kui

C1° K on kumer;

C2° K on kinnine mittenegatiivse reaalarvuga korrutamise suhtes, s.t

$$x \in K, t \in \mathbb{R}, t \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad tx \in K; \tag{1.1}$$

C3° $K \cap (-K) = \{0\}$, s.t

$$x, -x \in K \quad \Longrightarrow \quad x = 0. \tag{1.2}$$

Teoreem 1.2. *Kui osalise järjestuse seos $\preccurlyeq$ vektorruumis X rahuldab tingimusi*

1° $x, y \in X, x \preccurlyeq y, t \in \mathbb{R}, t \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad tx \preccurlyeq ty;$

2° $x, y, z \in X, x \preccurlyeq y \quad \Longrightarrow \quad x + z \preccurlyeq y + z,$

siis hulk

$$K = \{x \in X : x \succcurlyeq 0\} \tag{1.3}$$

on koonus, kusjuures mis tahes $x, y \in X$ korral

$$x \preccurlyeq y \quad \Longleftrightarrow \quad y - x \in K. \tag{1.4}$$

Teiselt poolt, kui K on koonus vektorruumis X, siis valemiga (1.4) *defineeritud seos $\preccurlyeq$ on osaline järjestus ruumis X, mis rahuldab tingimusi* 1° *ja* 2°*, kusjuures kehtib* (1.3)*.*

Tõestus. Rahuldagu osalise järjestuse seos vektorruumis X tingimusi 1° ja 2°. Näitame, et K on koonus, s.t K on kumer, kusjuures kehtivad (1.1) ja (1.2).

Veendumaks, et K on kumer, peame näitama, et mis tahes $x, y \in K$ ja $\lambda \in (0,1)$ korral $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$, s.t

$$(1-\lambda)x + \lambda y \succcurlyeq 0.$$

Olgu $x, y \in K$, s.t $x \succcurlyeq 0$ ja $y \succcurlyeq 0$, ning olgu $\lambda \in (0,1)$. Siis tingimuse 1° põhjal $(1-\lambda)x \succcurlyeq (1-\lambda)0$ ja $\lambda y \succcurlyeq \lambda 0$, seega tingimuse 2° põhjal

$$(1-\lambda)x + \lambda y \succcurlyeq (1-\lambda)0 + \lambda y = \lambda y \succcurlyeq \lambda 0 = 0.$$

Olgu $x \in K$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$. Tingimuse (1.1) kehtivuseks peame näitama, et $tx \in K$, s.t $tx \succcurlyeq 0$. Kuna $x \in K$, siis $x \succcurlyeq 0$, seega tingimuse 1° põhjal ka $tx \succcurlyeq t0 = 0$.

Olgu $x, -x \in K$, s.t $x \succcurlyeq 0, -x \succcurlyeq 0$. Tingimuse (1.2) kehtivuseks peame näitama, et $x = 0$. Seose $\preccurlyeq$ antisümmeetrilisuse tõttu piisab selleks näidata, et $0 \preccurlyeq x$ ja $x \preccurlyeq 0$. Neist esimene tingimus kehtib eelduse põhjal, teise jaoks märgime, et tingimuse 2° põhjal

$$x = 0 + x \preccurlyeq -x + x = 0.$$

Jääb näidata, et kehtib (1.4):

$$x \preccurlyeq y \iff y \succcurlyeq x \iff (y-x)+x \succcurlyeq 0+x \iff y-x \succcurlyeq 0 \iff y-x \in K.$$

Teiselt poolt, olgu K koonus vektorruumis X. Näitame, et valemiga (1.4) defineeritud seos $\preccurlyeq$ on osaline järjestus, s.t kehtivad PO1°–PO3°. Olgu $x, y, z \in X$.

PO1°. Veendume, et $x \preccurlyeq x$, s.t $0 = x - x \in K$. Olgu $u \in K$, siis $0 = 0u \in K$ tingimuse (1.1) põhjal.

PO2°. Eeldame, et $x \preccurlyeq y$ ja $y \preccurlyeq x$, s.t $y - x \in K$ ja $x - y \in K$. Peame näitama, et $x = y$. Kuna $-(y-x) = x - y \in K$, siis tingimuse (1.2) põhjal $y - x = 0$ ehk $x = y$.

PO3°. Olgu $x \preccurlyeq y$ ja $y \preccurlyeq z$, s.t $y - x \in K$ ja $z - y \in K$. Peame näitama, et $x \preccurlyeq z$, s.t $z - x \in K$. Kuna K on kumer ja $y - x,\ z - y \in K$, siis

$$\frac{1}{2}(z-x) = \frac{1}{2}(y-x) + \frac{1}{2}(z-y) \in K,$$

järelikult tingimuse (1.1) põhjal $z - x = 2\left(\frac{1}{2}(z-x)\right) \in K$.

Näitame, et järjestus $\preccurlyeq$ rahuldab tingimusi 1° ja 2°.

1° Olgu $x, y \in X$, $x \preccurlyeq y$ (s.t $y - x \in K$), $t \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$. Siis $ty - tx = t(y-x) \in K$ (tingimuse (1.1) põhjal), seega $tx \preccurlyeq ty$, s.t 1° kehtib.

2° Olgu $x, y, z \in X, x \preccurlyeq y$, s.t $y - x \in K$. Siis $(y+z) - (x+z) = y - x \in K$, seega $x + z \preccurlyeq y + x$, niisiis 2° kehtib.

Jääb tõestada võrdus (1.3), milleks piisab tähele panna, et

$$x \in K \quad \Longleftrightarrow \quad x - 0 \in K \quad \Longleftrightarrow \quad x \succcurlyeq 0.$$

Sellega on teoreem tõestatud. $\square$

Lause 1.3. *Olgu $K \neq \{0\}$ koonus normeeritud ruumis X. Siis*

$$K = \{tx\colon x \in K \cap S_X, t \in \mathbb{R}, t \geqslant 0\}.$$

Tõestus. Ühelt poolt, olgu $z \in K \backslash \{0\}$. Siis $\frac{1}{\|z\|} z \in K \cap S_X$, seejuures $z = \|z\| \left(\frac{1}{\|z\|} z \right)$. Lisaks sellele $0 = 0 \frac{1}{\|z\|} z$.

Teiselt poolt, kui $x \in K \cap S_X$ ja $t \geqslant 0$, siis $tx \in K$ koonuse definitsiooni 1.4 põhjal. $\square$

1.3 Hüpertasandid ja poolruumid

Järgnev tulemus on meile tuttav lineaaralgebra kursusest.

Lause 1.4 (vt nt [V, lause 1.1 ja lemma 1.3, (a)])**.** *Olgu X vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$ (siin $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

(a) *Olgu $f: X \to \mathbb{K}, f \neq 0$, lineaarne funktsionaal ning olgu $z \in X$ selline, et $f(z) \neq 0$. Siis*

$$X = \ker f \oplus \operatorname{span}\{z\}, \tag{1.5}$$

s.t iga $x \in X$ korral leiduvad üheselt määratud $y \in \ker f$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$ nii, et

$$x = y + \alpha z. \tag{1.6}$$

(b) *Olgu $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ lineaarsed funktsionaalid. Kui $\ker f \subset \ker g$, siis $g = \beta f$ mingi $\beta \in \mathbb{K}$ korral.*

Definitsioon 1.5. Olgu X reaalne vektorruum ning olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f \neq 0$, lineaarne funktsionaal. Hulka

$$\{x \in X\colon f(x) = \alpha\} \tag{1.7}$$

nimetatakse *hüpertasandiks.* Hulkasid

$$\{x \in X \colon f(x) > \alpha\} \quad \text{ja} \quad \{x \in X \colon f(x) \geqslant \alpha\} \tag{1.8}$$

nimetatakse *poolruumideks.*

Märgime, et mis tahes lineaarse funktsionaali $g \colon X \to \mathbb{R}$, $g \neq 0$, ja arvu $\beta \in \mathbb{R}$ korral on ka hulgad

$$\{x \in X \colon g(x) < \beta\} \qquad \text{ja} \qquad \{x \in X \colon g(x) \leqslant \beta\} \tag{1.9}$$

poolruumid, sest $-g$ on lineaarne funktsionaal, kusjuures

$$g(x) < \beta \quad \Longleftrightarrow \quad (-g)(x) > -\beta \qquad \text{ja} \qquad g(x) \leqslant \beta \quad \Longleftrightarrow \quad (-g)(x) \geqslant -\beta,$$

ning, teiselt poolt, poolruumid (1.8) on esitatavad kujul (1.9), kus $g = -f$ ja $\beta = -\alpha$.

Järgnev osa, mis aitab saada paremat intuitiivset ettekujutust hüpertasanditest ja poolruumidest, on refereeritud bakalaureusetööst [Ma, lk 11–13].

Vaatleme juhtu, kus $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sel juhul on $\{e_1, e_2\}$ ruumi X baas, kus

$$e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Kui f on lineaarne funktsionaal ruumil X, siis, tähistades

$$\alpha_1 = f(e_1), \quad \alpha_2 = f(e_2),$$

saame, et mis tahes $x = (\xi_1, \xi_2) = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ korral

$$f(x) = f(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) = \xi_1 f(e_1) + \xi_2 f(e_2) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2.$$

Teiselt poolt, kui $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, siis funktsionaal

$$f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (\xi_1, \xi_2) \longmapsto \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 \in \mathbb{R}$$

on lineaarne. Niisiis oleme kokkuvõttes saanud, et f *on lineaarne funktsionaal ruumil* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *parajasti siis, kui leiduvad* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *nii, et*

$$f(x) = \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 \quad \textit{iga}\ x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ \textit{korral.} \tag{1.10}$$

Märkus 1.1. Funktsionaalanalüüsi kursusest mäletame, et iga lineaarne funktsionaal lõplikumõõtmelisel normeeritud ruumil on pidev (vt [OO, lk 120]).

Olgu nüüd $f \neq 0$ lineaarne funktsionaal ruumil $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, olgu $c \in \mathbb{R}$ ning olgu $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, sellised, et kehtib (1.10). Siis hüpertasand

$$\{x \in X\colon\ f(x) = c\} = \big\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\colon\ \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 = c\big\},$$

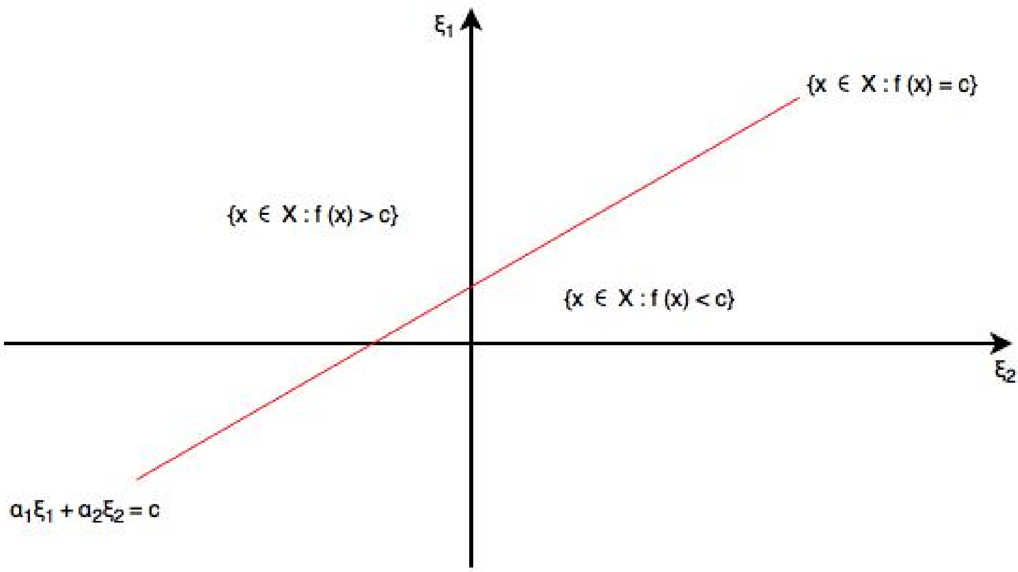
on sirge, poolruumid

$$\{x \in X\colon\ f(x) > c\} = \big\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\colon\ \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 > c\big\},$$
$$\{x \in X\colon\ f(x) < c\} = \big\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\colon\ \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 < c\big\}$$

on lahtised pooltasandid ning poolruumid

$$\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant c\} = \big\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\colon\ \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 > c\big\},$$
$$\{x \in X\colon\ f(x) \leqslant c\} = \big\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\colon\ \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 < c\big\}$$

on kinnised pooltasandid (vt joonist 1.1).



Joonis 1.1

Sarnaselt saame ettekujutuse hüpertasanditest ja poolruumidest ka kolmemõõtmelise ruumi puhul: kui $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, siis hulk $\{x \in X\colon\ f(x) = c\}$ on tasand, hulgad $\{x \in X\colon\ f(x) > c\}$ ja $\{x \in X\colon\ f(x) < c\}$ on lahtised poolruumid ning hulgad $\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant c\}$ ja $\{x \in X\colon\ f(x) \leqslant c\}$ on kinnised poolruumid.

Süvendamaks oma arusaama hüpertasanditest ja poolruumidest (ka lõpmatumõõtmelises ruumis), püüame järgnevalt paremini aru saada poolruumide $\{x \in X\colon\ f(x) > c\}$ struktuurist.

Kui X on vektorruum ja f on lineaarne funktsionaal ruumil X, siis funktsionaali f *tuum*

$$\ker f := \{x \in X\colon\ f(x) = 0\}$$

on ruumi X vektoralamruum. Kui seejuures $f \neq 0$ ja $z \in X$ on selline, et $f(z) \neq 0$, siis ruum X on tuuma $\ker f$ ja hulga $\{z\}$ lineaarse katte $\operatorname{span}\{z\} := \{\alpha z\colon\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ otsesumma:

$$X = \ker f \oplus \operatorname{span}\{z\},$$

s.t iga $x \in X$ korral leiduvad üheselt määratud $y \in \ker f$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ selliselt, et

$$x = y + \alpha z.$$

Olgu nüüd X normeeritud ruum. Sel juhul alamruum $\operatorname{span}\{z\}$ on kinnine; kui $f \in X^*$ (st lineaarne funktsionaal f on pidev), siis ka $\ker f$ on ruumi X kinnine alamruum.

Kui $f \neq 0$, siis me saame eelnevas arutelus valida elemendi $z \in X$ nii, et $f(z) = 1$. Kui nüüd $c \in \mathbb{R}$, siis *hüpertasand* $\big\{x \in X\colon\ f(x) = c\big\}$ on tuuma (*hüperalamruumi*) $\ker f$ nihe:

$$\big\{x \in X\colon\ f(x) = c\big\} = \ker f + cz = \big\{y + cz\colon\ y \in \ker f\big\};$$

poolruum $\big\{x \in X\colon\ f(x) > c\big\}$ on hüpertasandite ühend:

$$\big\{x \in X\colon\ f(x) > c\big\} = \bigcup_{\alpha > c}\big(\ker f + \alpha z\big).$$

Selle paragrahvi lõpetuseks toome sisse *tugifunktsionaali* mõiste.

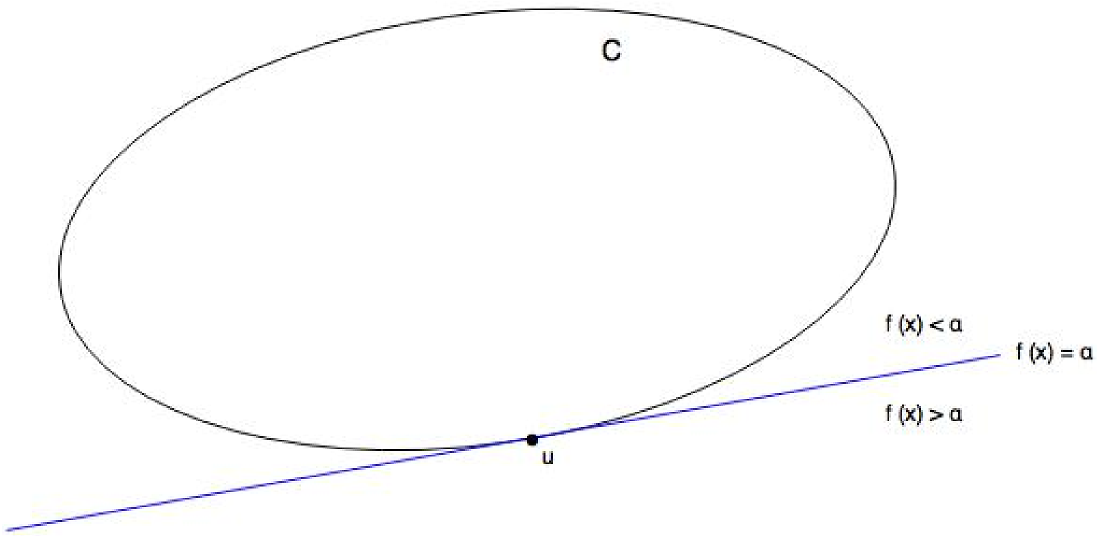
Definitsioon 1.6. Olgu X reaalne normeeritud ruum ning olgu $C \subset X$. Öeldakse, et funktsionaal $f \in X^*$, $f \neq 0$, on *tugifunktsionaal* hulgale C, kui ta saavutab hulgas C oma supreemumi, s.t leidub $u \in C$ nii, et $f(u) = \sup\limits_{x \in C} f(x)$.

Mõiste tugifunktsionaal on motiveeritud tema järgmise geomeetrilise tõlgendusega: kui funktsionaal f on hulga C tugifunktsionaal ja $u \in C$ on selline, et $\alpha := f(u) = \sup\limits_{x \in C} f(x)$, siis kahemõõtmelise (samuti ka kolmemõõtmelise) ruumi juhul hüpertasand $f(x) = \alpha$ justkui toetaks hulka C punktis u (vt joonist 1.2).

1.4 Hahn–Banachi teoreemid ja normeeritud ruumi refleksiivsus

Olgu X normeeritud ruum ning olgu Y ruumi X alamruum. Üldiselt, kui funktsionaal $f \in X^*$ on funktsionaali $g \in Y^*$ jätk (s.t $f|_Y = g$), siis $\|f\| \geqslant \|g\|$, s.t jätkamisel funktsionaali norm ei vähene, sest

$$\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)| \geqslant \sup_{y \in B_Y} |f(y)| = \sup_{y \in B_Y} |g(y)| = \|g\|.$$



Joonis 1.2

Järgnev fundamentaalne *Hahn–Banachi jätkamisteoreem* ütleb, et iga funktsionaal normeeritud ruumi alamruumil on jätkatav kogu ruumile nii, et tema norm jääb samaks.

Teoreem 1.5 (Hahn–Banachi jätkamisteoreem; vt [OO, lk 165])**.** *Olgu X normeeritud ruum ning olgu Y ruumi X alamruum. Siis iga $g \in Y^*$ korral leidub $f \in X^*$ nii, et*

$$f|_Y = g \qquad \text{ja} \qquad \|f\| = \|g\|.$$

Märkus 1.2. Hahn–Banachi jätkamisteoreemi tõestamisel tõestatakse kõigepealt tema järgnev erijuht, mille kohaselt on reaalset pidevat lineaarset funktsionaali võimalik jätkata normi säilides "ühe dimensiooni võrra".

Lemma 1.6 (lemma elementaarsest jätkust; vt [OO, lk 165])**.** *Olgu X reaalne normeeritud ruum, olgu Y ruumi X alamruum ning olgu $x \in X \backslash Y$. Tähistame*

$$Z := \operatorname{span}\big(Y \cup \{x\}\big) = \{y + \alpha x \colon y \in Y, \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

Siis iga $g \in Y^*$ korral leidub $f \in Z^*$ nii, et

$$f|_Y = g \qquad \text{ja} \qquad \|f\| = \|g\|.$$

Lemmast elementaarsest jätkust 1.6 järeldatakse Kuratowski–Zorni lemma abil Hahn–Banachi jätkamisteoreemi 1.5 reaalne juht. Lõpuks, toetudes üldisele seosele kompleksse lineaarse funktsionaali ja tema reaalosa vahel [M, lk 72, lause 1.9.3], järeldatakse Hahn–Banachi jätkamisteoreemi 1.5 reaalsest juhust tema kompleksne juht.

Järeldus 1.7 (teoreem piisavast arvust funktsionaalidest; vt [OO, lk 170, järeldus 1])**.** *Olgu $X \neq \{0\}$ normeeritud ruum. Siis iga $x \in X$ korral leidub $f \in X^*$ nii, et $\|f\| = 1$ ja $f(x) = \|x\|$.*

Tõestus. Eeldame esialgu, et $x \neq 0$. Defineerime alamruumil

$$Y = \operatorname{span}\{x\} = \{\alpha x \colon \alpha \in \mathbb{K}\}$$

funktsionaali g võrdusega $g(\alpha x) = \alpha\|x\|, \alpha x \in Y$. On selge, et g on lineaarne. Kuna

$$|g(\alpha x)| = \big|\alpha\|x\|\big| = |\alpha|\|x\| = \|\alpha x\|,$$

siis g on tõkestatud ja $\|g\| = 1$. Hahn-Banachi teoreemi põhjal leidub funktsionaalile g jätk $f \in X^*$ nii, et $\|f\| = \|g\| = 1$. Kuna $x \in Y$, siis $f(x) = g(x) = \|x\|$.

Eeldame nüüd, et $x = 0$. Olgu $f \in X^*$ suvaline funktsionaal, mille korral $\|f\| = 1$ (eelnevas tõestasime, et selliseid funktsionaale leidub). Siis $f(x) = f(0) = 0 = \|x\|$. □

Olgu X normeeritud ruum ning olgu $x \in X$. Defineerime funktsionaali $F_x \colon X^* \to \mathbb{K}$,

$$F_x(f) = f(x), \qquad f \in X^*.$$

Paneme tähele, et funktsionaal F_x on lineaarne, sest kui $f, g \in X^*$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$, siis

$$F_x(f + \alpha g) = (f + \alpha g)(x) = f(x) + (\alpha g)(x) = f(x) + \alpha\big(g(x)\big) = F_x(f) + \alpha F_x(g).$$

Funktsionaal F_x on ka tõkestatud, sest iga $f \in X^*$ korral

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x\| = \|x\|\,\|f\|.$$

Niisiis, $F_x \in (X^*)^* =: X^{**}$, seejuures $\|F_x\| \leqslant \|x\|$; veelgi enam, $\|F_x\| = \|x\|$, sest järelduse 1.7 põhjal (s.t teoreemi põhjal piisavast arvust funktsionaalidest) leidub $f_0 \in X$, $\|f_0\| = 1$, nii, et $f_0(x) = \|x\|$ ning seega

$$\|F_x\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |F_x(f)| \geqslant F_x(f_0) = f_0(x) = \|x\|.$$

Defineerime kujutuse

$$j_X \colon X \ni x \mapsto F_x \in X^{**}. \tag{1.11}$$

Seda kujutust j_X nimetatakse ruumi X *loomulikuks* (ehk *kanooniliseks*) *sisestuseks* oma teise kaasruumi.

Eelneva põhjal on kujutus j_X isomeetria (sest iga $x \in X$ korral $\|j_X x\| = \|F_x\| = \|x\|$); kujutus j_X on ka lineaarne. Tõepoolest, kui $x, z \in X^{**}$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$, siis $j_X(x + \alpha z) = j_X(x) + \alpha j_X(z)$, sest mis tahes $f \in X^*$ korral

$$\begin{aligned}\big(j_X(x + \alpha z)\big)(f) &= F_{x+\alpha z}(f) = f(x + \alpha z) = f(x) + \alpha f(z) = \\ &= F_x(f) + \alpha F_z(f) = \big(j_X(x)\big)(f) + \alpha\big(j_X(z)\big)(f) = \big(j_X(x) + \alpha j_X(z)\big)(f).\end{aligned}$$

Definitsioon 1.7. Öeldakse, et normeeritud ruum X on *refleksiivne*, kui tema loomulik sisestus (1.11) oma teise kaasruumi on sürjektsioon.

Normeeritud ruumi X refleksiivsus tähendab niisiis, et tema teine kaasruum on loomulikul viisil samastatav ruumi X endaga.

Märkus 1.3. On ilmne, et iga refleksiivne normeeritud ruum on täielik, s.t Banachi ruum. Tõepoolest, refleksiivne normeeritud ruum X on isomeetriliselt isomorfne oma teise kaasruumiga (vastavaks isomeetriliseks isomorfismiks on loomulik sisestus j_X), iga kaasruum on täielik (vt nt [OO, lk 159]) ning täieliku ruumiga isomorfne normeeritud ruum on samuti täielik (vt nt [M, lk 31, lause 1.4.14, (c)]).

Selle punkti lõpetuseks esitame ühe Hahn–Banachi teoreemi geomeetrilise versiooni.

Teoreem 1.8 (Hahn–Banachi eraldamisteoreem, Eidelheiti versiooni reaalse normeeritud ruumi juht; vt nt [M, lk 179, teoreem 2.2.26])**.** *Olgu X normeeritud ruum ning olgu C_1 ja C_2 ruumi X mittetühjad kumerad alamhulgad, kusjuures hulga C_2 sisemus C_2° on mittetühi ja $C_1 \cap C_2^\circ = \emptyset$. Siis leiduvad funktsionaal $f \in X^*$ ja arv $\alpha \in \mathbb{R}$ nii, et*

(1) *$f(x) \leqslant \alpha$ iga $x \in C_1$ korral;*

(2) *$f(x) \geqslant \alpha$ iga $x \in C_2$ korral;*

(3) *$f(x) > \alpha$ iga $x \in C_2^\circ$ korral.*

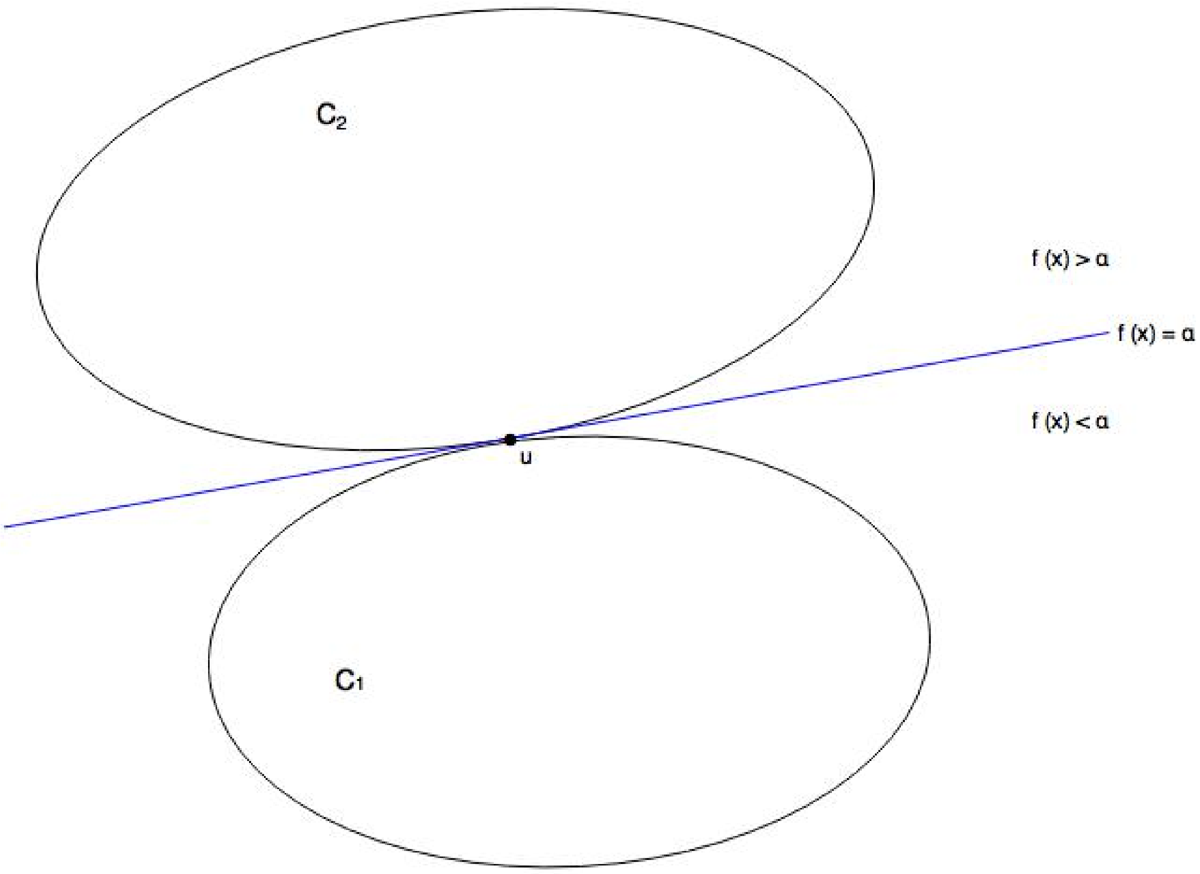
Eraldamisteoreemi 1.8 geomeetrilist sisu selgitab joonis 1.3: teoreemi eeldustel leiduvad funktsionaal $f \in X^*$ ja arv $\alpha \in \mathbb{R}$ nii, et hulgad C_1 ja C_2 jäävad teine teisele poole hüpertasandit $f(x) = \alpha$.

1.5 Näiteid normi saavutavatest ja mittesaavutavatest funktsionaalidest

Lause 1.9. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $f \in X^* \setminus \{0\}$ ja $x \in B_X$ sellised, et*

$$|f(x)| = \|f\|.$$

Siis $\|x\| = 1$, s.t $x \in S_X$.



Joonis 1.3

Tõestus. Kõigepealt märgime, et $x \neq 0$, sest vastasel korral $\|f\| = |f(0)| = 0$, s.t $f = 0$. Nüüd $\left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = 1$, seega

$$\|f\| \geqslant \left| f\left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right| = \left| \frac{1}{\|x\|} f(x) \right| = \frac{1}{\|x\|} |f(x)| = \frac{1}{\|x\|} \|f\|,$$

millest $\|x\| \geqslant 1$; niisiis $\|x\| = 1$. □

Lause 1.10. *Iga pidev lineaarne funktsionaal refleksiivsel normeeritud ruumil saavutab oma normi.*

Tõestus. Olgu $X \neq \{0\}$ refleksiivne normeeritud ruum ning olgu $f \in X^*$. Teoreemi põhjal piisavast arvust funktsionaalidest (vt järeldust 1.7) leidub $F \in X^{**}$, $\|F\| = 1$, nii, et $F(f) = \|f\|$. Ruumi X refleksiivsuse tõttu on loomulik sisestus $j_X \colon X \to X^{**}$ sürjektsioon, seega leidub $x \in X$ nii, et $F = j_X x$. Kuna j_X on isomeetria, siis $\|x\| = 1$; seejuures

$$f(x) = (j_X x)(f) = F(f) = \|f\|;$$

niisiis funktsionaal f saavutab oma normi. □

Lause 1.11. *Iga pidev lineaarne funktsionaal lõplikumõõtmelisel normeeritud ruumil saavutab oma normi.*

Tõestus. Saab näidata, et iga lõplikumõõtmeline normeeritud ruum on refleksiivne; seega järeldub väide lausest 1.10. Tõestame lause ka ilma lauset 1.10 kasutamata.

Kuna

$$\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)|,$$

siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub $x_n \in B_X$ nii, et

$$\|f\| \geqslant |f(x_n)| > \|f\| - \frac{1}{n}.$$

Kuna $\|f\| - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|$, siis

$$|f(x_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|.$$

Lõplikumõõtmelise normeeritud ruumi X kinnine ühikkera B_X on kompaktne (vt nt [OO, lk 91, järeldus 3]), seega leiduvad $x \in B_X$ ning jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ osajada $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ nii, et $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Aga nüüd

$$\|f\| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \lim_{n\to\infty} |f(x_{k_n})| = |f(x)|,$$

s.t funktsionaal f saavutab oma normi.

□

Näide 1.1. Olgu $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j$ absoluutselt koonduv rida ruumis $\mathbb{R}$, s.t $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$, kusjuures $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| < \infty$, teisisõnu $a := (\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ on reaalse ruumi ℓ_1 element. Defineerime funktsionaali $f\colon\ c_0 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi_j, \quad x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0.$$

Siis

(a) $f \in c_0^*$ (s.t funktsionaal f on pidev ja lineaarne), kusjuures

$$\|f\| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| = \|a\|; \tag{1.12}$$

(b) funktsionaal f saavutab oma normi parajasti siis, kui

$$\text{leidub } N \in \mathbb{N} \text{ nii, et } \alpha_j = 0 \text{ iga } j \geqslant N \text{ korral.} \tag{1.13}$$

Põhjendus. (a). Kõigepealt märgime, et mis tahes $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ korral rida $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi_j$ koondub, sest ta koondub absoluutselt:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j \xi_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j||\xi_j| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|\|x\| \leqslant \|x\| \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| = \|a\|\|x\|. \tag{1.14}$$

Funktsionaal f on lineaarne, sest mis tahes $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}, y = (\eta_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ ja $\beta \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned} f(x+\beta y) &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(\xi_j + \beta\eta_j) = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j\xi_j + \beta\alpha_j\eta_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\xi_j + \sum_{j=1}^{\infty} \beta\alpha_j\eta_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\xi_j + \beta \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\eta_j = f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Funktsionaal f on ka tõkestatud, sest mis tahes $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ korral hinnangu (1.14) põhjal

$$|f(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j \xi_j| \leqslant \|a\|\|x\|;$$

seejuures $\|f\| \leqslant \|a\|$. Tähistame iga $j \in \mathbb{N}$ korral $\theta_j = \operatorname{sgn} \alpha$ ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$x_n = (\underbrace{\theta_1, \ldots, \theta_n}_{n}, 0, 0, \ldots) \in c_0;$$

siis $\|x_n\| \leqslant 1$, järelikult

$$\|f\| \geqslant f(x_n) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \theta_j = \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|,$$

millest protsessis $n \to \infty$ järeldub, et

$$\|f\| \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| = \|a\|;$$

niisiis (1.12) kehtib.

(b). Kehtigu (1.13). Siis näite osa (a) tähistusi kasutades $x_N \in c_0$, kusjuures $\|x_N\| \leqslant 1$ ja

$$f(x_N) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \theta_j = \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| = \|a\|;$$

niisiis funktsionaal f saavutab oma normi.

Eeldame nüüd, et (1.13) ei kehti. Olgu $x = (\xi_j) \in c_0$, $\|x\| \leqslant 1$. Siis leidub $N_0 \in \mathbb{N}$ nii, et

$$j \geqslant N_0 \quad \Longrightarrow \quad |\xi_j| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Seega

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \xi_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j \xi_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j||\xi_j| \\ &= \sum_{j=1}^{N_0} |\alpha_j||\xi_j| + \sum_{j=N_0+1}^{\infty} |\alpha_j||\xi_j| \leqslant \sum_{j=1}^{N_0} |\alpha_j| + \sum_{j=N_0+1}^{\infty} |\alpha_j| \frac{1}{2} \\ &< \sum_{j=1}^{N_0} |\alpha_j| + \sum_{j=N_0+1}^{\infty} |\alpha_j| = \|a\| = \|f\| \end{aligned}$$

(range võrratus selle võrratusteahela viimase rea alguses kehtib, sest tingimuse (1.12) mittekehtimise tõttu leidub $j > N_0$ nii, et $\alpha_j \neq 0$ ning seega $|\alpha_j|\frac{1}{2} < |\alpha_j|$). Niisiis iga $x \in c_0$, $\|x\| \leqslant 1$, korral $|f(x)| < \|f\|$, seega funktsionaal f ei saavuta oma normi. $\square$

1.6 Pered meetrilistes ruumides

Definitsioon 1.8. Seost $\preccurlyeq$ hulgas $\mathcal{A}$ nimetatakse *eeljärjestuseks,* kui mis tahes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ korral

PO1° $\alpha \preccurlyeq \alpha$ (s.t $\preccurlyeq$ on refleksiivne);

PO2° $\alpha \preccurlyeq \beta, \beta \preccurlyeq \gamma \quad \Longrightarrow \quad \alpha \preccurlyeq \gamma$ (s.t $\preccurlyeq$ on transitiivne).

Seejuures öeldakse, et $(\mathcal{A}, \preccurlyeq)$ on *eeljärjestatud* hulk. Kui järjestuse $\preccurlyeq$ roll on kontekstist selge, siis öeldakse ka lihtsalt, et $\mathcal{A}$ on eeljärjestatud hulk. Kui $\alpha \preccurlyeq \beta$, siis kirjutatakse ka $\beta \succcurlyeq \alpha$; sel juhul öeldakse, et element α *eelneb* elemendile β või et element β *järgneb* elemendile α.

Märkus 1.4. Antisümmeetriline eeljärjestus on osaline järjestus (vt osalise järjestuse definitsiooni 1.1).

Definitsioon 1.9. Öeldakse, et eeljärjestatud hulk $(\mathcal{A}, \preccurlyeq)$ on suunatud hulk, kui $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ja

(D) mis tahes $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ korral leidub $\gamma \in \mathcal{A}$ nii, et $\gamma \succcurlyeq \alpha$ ja $\gamma \succcurlyeq \beta$.

Näide 1.2. Reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ ja naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ on suunatud hulgad loomuliku järjestuse suhtes.

Näide 1.3. Meetrilises ruumis mis tahes punkti lahtiste ümbruste hulk on suunatud hulk loomuliku järjestuse suhtes:

$$U \preccurlyeq V \quad :\Longleftrightarrow \quad V \subset U.$$

Tõepoolest, kui U ja V on meetrilise ruumi X punkti x lahtised ümbrused, siis ka $W := U \cap V$ on punkti x lahtine ümbrus, kusjuures $W \subset U$ ja $W \subset V$, s.t $W \succcurlyeq U$ ja $W \succcurlyeq V$.

Näide 1.4. Neljast punktist koosnev hulk $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ on suunatud hulk järjestuse $\preccurlyeq$ suhtes, kus

$$a \preccurlyeq a,\ \ b \preccurlyeq b,\ \ c \preccurlyeq c,\ \ d \preccurlyeq d,\ \ a \preccurlyeq c,\ \ b \preccurlyeq c,\ \ c \preccurlyeq d.$$

Definitsioon 1.10. Olgu $(\mathcal{A}, \preccurlyeq)$ eeljärjestatud hulk ning olgu X meetriline ruum. Kujutust

$$f \colon \mathcal{A} \to X \tag{1.15}$$

nimetatakse pereks. Tähistades pere (1.15) korral $x_\alpha = f(\alpha)$, $\alpha \in A$, märgitakse pere (1.15) ka sümboliga $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ või lihtsalt (x_α).

Näide 1.5. Jada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ meetrilises ruumis X on pere $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in X$.

Definitsioon 1.11. Öeldakse, et pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ meetrilises ruumis X *koondub* elemendiks $x \in X$ ja kirjutatakse

$$x_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \mathcal{A}]{} x \quad \text{või} \quad x = \lim_{\alpha \in \mathcal{A}} x_\alpha,$$

kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, x) < \varepsilon.$$

Elementi x nimetatakse seejuures pere $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ *piirväärtuseks.*

Lause 1.12. *Perel meetrilises ruumis saab olla ülimalt üks piirväärtus.*

Tõestus. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ koonduv pere meetrilises ruumis X ning olgu $x, z \in X$ sellised, et

$$x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} x \quad \text{ja} \quad x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} z. \tag{1.16}$$

Lause tõestuseks piisab näidata, et $x = z$, s.t $\varrho(x, z) = 0$, milleks, fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, piisab näidata, et $\varrho(x, z) < 2\varepsilon$.

Koonduvuste (1.16) tõttu leiduvad indeksid $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_1 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, x) < \varepsilon$$

ja

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_2 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, z) < \varepsilon.$$

Valime indeksi $\alpha \in \mathcal{A}$ nii, et $\alpha \succcurlyeq \alpha_1$ ja $\alpha \succcurlyeq \alpha_2$; siis

$$\varrho(x, z) \leqslant \varrho(x, x_\alpha) + \varrho(x_\alpha, z) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

nagu soovitud. □

Definitsioon 1.12. Öeldakse, et pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ meetrilises ruumis X on *Cauchy pere,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha, \beta \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon.$$

Lause 1.13. *Koonduv pere meetrilises ruumis on Cauchy pere.*

Tõestus. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ koonduv pere meetrilises ruumis X ning olgu $\varepsilon > 0$. Lause tõestuseks piisab leida indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha, \beta \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon.$$

Tähistame $x = \lim\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha$; siis leidub indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nüüd mis tahes $\alpha, \beta \succcurlyeq \alpha_0$ korral

$$\varrho(x_\alpha, x_\beta) \leqslant \varrho(x_\alpha, x) + \varrho(x, x_\beta) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Lause 1.14. *Cauchy pere täielikus meetrilises ruumis koondub.*

Tõestus. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ Cauchy pere täielikus meetrilises ruumis X. Valime indeksid $\alpha_1 \preccurlyeq \alpha_2 \preccurlyeq \alpha_3 \preccurlyeq \cdots$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\alpha, \beta \succcurlyeq \alpha_n \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, x_\beta) < \frac{1}{n}. \tag{1.17}$$

Selline valik on võimalik: kõigepealt valime $\alpha_1 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha, \beta \succcurlyeq \alpha_1 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, x_\beta) < 1$$

(see on võimalik, sest (x_α) on Cauchy pere) ning jätkame induktiivselt:

- kui on antud $m \in \mathbb{N}$ ja indeksid $\alpha_1 \preccurlyeq \alpha_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \alpha_m$ nii, et iga $n \in \{1, \ldots, m\}$ korral kehtib (1.17), valime indeksi $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

  $$\alpha, \beta \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, x_\beta) < \frac{1}{m+1}$$

  ning seejärel valime indeksi $\alpha_{m+1} \in \mathcal{A}$ nii, et $\alpha_{m+1} \succcurlyeq \alpha_m$ ja $\alpha_{m+1} \succcurlyeq \alpha_0$

(selline valik on võimalik hulga $\mathcal{A}$ suunatuse tõttu).

Paneme tähele, et jada $(x_{\alpha_n})_{n=1}^\infty$ on Cauchy jada – tõepoolest, mis tahes $\varepsilon > 0$ korral, valides $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{1}{N} < \varepsilon$, kehtib implikatsioon

$$n, m \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_{\alpha_n}, x_{\alpha_m}) < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

(sest $n, m \geqslant N$ korral $\alpha_n \succcurlyeq \alpha_N$ ja $\alpha_m \succcurlyeq \alpha_N$).

Ruumi X täielikkuse tõttu jada $(x_{\alpha_n})_{n=1}^\infty$ koondub, s.t $x_{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ mingi $x \in X$ korral. Lause tõestuseks jääb näidata, et $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} x$, s.t fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, leidub indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, x) < \varepsilon.$$

Kuna $x_{\alpha_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, siis leidub $N_0 \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N_0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_{\alpha_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Valime $N \in \mathbb{N}$ nii, et $N \geqslant N_0$ ja $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. Kui nüüd $\alpha \succcurlyeq \alpha_N$, siis

$$\varrho(x_\alpha, x) \leqslant \varrho(x_\alpha, x_{\alpha_N}) + \varrho(x_{\alpha_N}, x) < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Lause 1.15. *Olgu* $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *ja* $(z_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *reaalarvude pered, kusjuures leidub indeks* $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ *nii, et*

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad x_\alpha \leqslant z_\alpha,$$

ning eksisteerivad piirväärtused

$$a := \lim_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha \quad ja \quad c := \lim_{\alpha\in\mathcal{A}} z_\alpha.$$

Siis $a \leqslant c$.

Tõestus. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Lause tõestuseks piisab näidata, et $a < c + 2\varepsilon$.

Kuna $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} a$ ja $z_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} c$, siis leiduvad indeksid $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_1 \quad \Longrightarrow \quad a - \varepsilon < x_\alpha < a + \varepsilon$$

ja

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_2 \quad \Longrightarrow \quad c - \varepsilon < z_\alpha < c + \varepsilon.$$

Valides indeksi $\alpha \in \mathcal{A}$ nii, et $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$, $\alpha \succcurlyeq \alpha_1$ ja $\alpha \succcurlyeq \alpha_2$, kehtib

$$a - \varepsilon < x_\alpha \leqslant z_\alpha < c + \varepsilon,$$

millest $a < c + 2\varepsilon$, nagu soovitud. □

Definitsioon 1.13. Öeldakse, et pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ruumis $\mathbb{R}$ on *ülalt tõkestatud,* kui tema elementide hulk on ülalt tõkestatud, s.t leidub $M \geqslant 0$ nii, et

$$x_\alpha \leqslant M \quad \text{iga } \alpha \in \mathcal{A} \text{ korral.}$$

Definitsioon 1.14. Öeldakse, et pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ruumis $\mathbb{R}$ on *mittekahanev,* kui

$$\alpha \preccurlyeq \beta \quad \Longrightarrow \quad x_\alpha \leqslant x_\beta.$$

Lause 1.16. *Ülalt tõkestatud mittekahanev reaalarvude pere koondub.*

Tõestus. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ülalt tõkestatud mittekahanev reaalarvude pere. Tähistame $x := \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} x_\alpha < \infty$ (märgime, et pidevuse aksioomi põhjal see ülemine raja eksisteerib ja on lõplik). Näitame, et $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} x$, s.t iga $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad |x_\alpha - x| < \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Ülemise raja mõiste kohaselt leidub $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$x_{\alpha_0} > x - \varepsilon.$$

Nüüd mis tahes indeksi $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$ korral

$$x - \varepsilon < x_{\alpha_0} \leqslant x_\alpha \leqslant x < x + \varepsilon;$$

niisiis $|x_\alpha - x| < \varepsilon$. □

Lause 1.17. *Olgu X meetriline ruum ning olgu $C \subset X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *hulk C on kinnine;*

(ii) *hulk C sisaldab kõigi oma elementide koonduvate perede piirväärtused, s.t mis tahes hulga C elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ja $x \in X$ korral*

$$x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} x \quad \Longrightarrow \quad x \in C.$$

Tõestus. (i)⇒(ii). Olgu C kinnine. Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ hulga C elementide koonduv pere ning olgu $x \in X$ selle pere piirväärtus, s.t $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} x$. Implikatsiooni tõestuseks peame näitama, et $x \in C$.

Kuna $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} x$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub indeks $\alpha_\varepsilon \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, x) < \varepsilon.$$

Nüüd iga $\varepsilon > 0$ korral $\varrho(x_{\alpha_\varepsilon}, x) < \varepsilon$, s.t $x_{\alpha_\varepsilon} \in B(x, \varepsilon)$, niisiis $B(x, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset$; järelikult $x \in \overline{C}$ (vt nt [OO, lk 25]). Hulga C kinnisuse tõttu $\overline{C} = C$, seega $x \in C$, nagu soovitud.

(ii)⇒(i) on ilmne, sest funktsionaalanalüüsi sissejuhatavast kursusest teame, et hulga C kinnisus on samaväärne järgmise väitest (ii) nõrgema väitega (meenutame, et iga jada on pere):

(ii') *hulk C sisaldab kõigi oma elementide koonduvate jadade piirväärtused, s.t mis tahes hulga C elementide jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ ja $x \in X$* korral

$$x_\alpha \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \Longrightarrow \quad x \in C.$$

□

Lause 1.18. *Olgu X ja Y meetrilised ruumid, olgu $f\colon X \to Y$ ning olgu $a \in X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *f on pidev punktis a;*

(ii) *mis tahes punktiks a koonduva pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ korral ruumis X koondub vastav funktsiooni f väärtuste pere $\big(f(x_\alpha)\big)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ punktiks $f(a)$ ruumis Y, s.t*

$$x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} a \quad \Longrightarrow \quad f(x_\alpha) \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} f(a).$$

Tõestus. (i)⇒(ii). Olgu f pidev punktis a ning olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ pere ruumis X, mille korral $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} a$. Peame näitama, et $f(x_\alpha) \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} f(a)$ ruumis Y, s.t fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, leidub indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho\big(f(x_\alpha), f(x)\big) < \varepsilon. \tag{1.18}$$

Kuna f on pidev punktis a, siis leidub $\delta > 0$ nii, et

$$\varrho(x, a) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \varrho\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon.$$

Kuna $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} a$, siis leidub indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha \succcurlyeq \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \varrho(x_\alpha, a) < \delta.$$

Aga nüüd kehtib (1.18).

(ii)⇒(i) on ilmne, sest funktsionaalanalüüsi sissejuhatavast kursusest teame (vt [OO, lk 61]), et funktsiooni f pidevus punktis a on samaväärne järgmise tingimusest (ii) nõrgema tingimusega (meenutame, et iga jada on pere):

(ii') *mis tahes punktiks a koonduva jada $(x_n)_{n=1}^\infty$ korral ruumis X koondub vastav funktsiooni väärtuste jada $\big(f(x_n)\big)_{n=1}^\infty$ punktiks $f(a)$ ruumis Y, s.t*

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a).$$

□

1.7 Veel abitulemusi

Lause 1.19. *Olgu X normeeritud ruum, olgu $C \subset X$, olgu $f \in X^*$, $f \neq 0$, ning olgu $z \in C^\circ$. Siis*

$$\sup_{x \in C} f(x) > f(z) > \inf_{x \in C} f(x).$$

Seega, kui $y \in C$ on selline, et

$$f(y) = \sup_{x \in C} f(x) \quad \text{või} \quad f(y) = \inf_{x \in C} f(x),$$

siis $y \in \partial C$.

Tõestus. Kuna $z \in C^\circ$, siis leidub $\delta > 0$ nii, et $B(z, 2\delta) \subset C$. Olgu $y \in S_X$ selline, et $f(y) > 0$; siis

$$u := z + \delta y \in B(z, 2\delta) \subset C \quad \text{ja} \quad v := z - \delta y \in B(z, 2\delta) \subset C;$$

seejuures

$$f(u) = f(z) + \delta f(y) > f(z) > f(z) - \delta f(y) = f(v),$$

järelikult

$$\sup_{x \in C} f(x) \geqslant f(u) > f(z) > f(v) \geqslant \inf_{x \in C} f(x).$$

□

Lause 1.20. *Olgu C normeeritud ruumi X kumer alamhulk. Siis ka hulga C sisemus C° on kumer.*

Tõestus. Olgu $x, z \in C^\circ$ ning olgu $\lambda \in (0, 1)$. Sisemuse C° kumeruseks piisab näidata, et $y := (1 - \lambda)x + \lambda z \in C^\circ$, s.t leidub $\delta > 0$ nii, et $B(y, \delta) \subset C$.

Kuna $x, z \in C^\circ$, siis leiduvad $\delta_1, \delta_2 > 0$ nii, et $B(x, \delta_1) \subset C$ ja $B(z, \delta_2) \subset C$. Tähistame $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$; siis $B(x, \delta) \subset C$ ja $B(z, \delta) \subset C$.

Näitame, et $B(y, \delta) \subset C$. Olgu $v \in B(y, \delta)$, s.t $\|v - y\| < \delta$. Siis

$$u := x + v - y \in B(x, \delta) \subset C \quad \text{ja} \quad w := z + v - y \in B(z, \delta) \subset C;$$

seega hulga C kumeruse tõttu $(1 - \lambda)u + \lambda w \in C$. Kuna

$$\begin{aligned}(1 - \lambda)u + \lambda w &= (1 - \lambda)x + (1 - \lambda)v - (1 - \lambda)y + \lambda z + \lambda v - \lambda y \\ &= (1 - \lambda)x + \lambda z - y + v = y - y + v = v,\end{aligned}$$

siis $v \in C$; järelikult $B(y, \delta) \in C$, nagu soovitud. □

Lemma 1.21. *Olgu X vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$, olgu C ruumi X kumer alamhulk ning olgu $f\colon X \to \mathbb{K}$ lineaarne funktsionaal. Leidugu $x, z \in C$ nii, et $f(x) > 0 > f(z)$. Siis leidub $y \in C$ nii, et $f(y) = 0$.*

Tõestus. Valime $\lambda \in (0,1)$ nii, et

$$f\big((1-\lambda)x + \lambda z\big) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(z) = 0,$$

s.t $f(x) = \lambda\big(f(x) - f(z)\big)$, s.t

$$\lambda = \frac{f(x)}{f(x) - f(z)}.$$

Kuna C on kumer, siis $y := (1-\lambda)x + \lambda z \in C$, seejuures $f(y) = 0$. □

II PEATÜKK

Bishop–Phelps–Bollobáse teoreem

Kõikjal selles peatükis vaatleme vaid reaalseid normeeritud (ja erijuhul Banachi) ruume.

2.1 Bishop–Phelpsi ja Bishop–Phelps–Bollobáse teoreem

Teoreem 2.1 (Bishop–Phelpsi tugifunktsionaalide teoreem; vt [DU, lk 189, teoreem 4] või [M, lk 278, teoreem 2.11.13])**.** *Olgu C mittetühi kinnine tõkestatud kumer alamhulk reaalses Banachi ruumis X. Siis hulgas C maksimaalse väärtuse saavutavate funktsionaalide hulk on kaasruumis X^* kõikjal tihe, s.t mis tahes $x^* \in X^*$ ja $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $y^* \in X^*$ ja $y \in C$ nii, et*

(1) $y^*(y) = \sup_{x \in C} y^*(x)$;

(2) $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$.

Teisisõnu ütleb Bishop-Phelpsi teoreem 2.1, et Banachi ruumi X mittetühja kinnise tõkestatud kumera alamhulga tugifunktsionaalide (vt definitsiooni 1.6) hulk on kaasruumis X^* kõikjal tihe.

Bishop–Phelpsi teoreemi 2.1 tõestasid E. A. Bishop ja R. R. Phepls artiklis [BPh[63]]; tõestus arendas edasi nende subrefleksiivsusteoreemi tõestust artiklist [BPh[61]], tuues selgemini esile selles peituvad geomeetrilised ideed.

Teoreem 2.2 (Bishop-Phelpsi subrefleksiivsusteoreem; vt nt [M, lk 278, teoreem 2.11.14])**.** *Iga Banachi ruum on subrefleksiivne, s.t oma normi saavutavate funktsionaalide hulk on kaasruumis X^* kõikjal tihe, s.t iga $x^* \in X^*$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y^* \in X^*$ nii, et*

(1) $y^*(y) = \|y^*\|$ *mingi* $y \in X$, $\|y\| \leqslant 1$, *korral;*

(2) $\|x^* - y^*\| < \varepsilon$.

Artiklis [Bo] pani B. Bollobás tähele, et Bishop–Phelpsi subrefleksiivsusteoreemi tõestuses artiklis [BPh^{61}] on implitsiitselt tõestatud tugevam väide: lisaks sellele, et me saame funktsionaali x^* lähendada funktsionaaliga y^*, mis saavutab oma normi, me saame samaaegselt punkti, milles x^* on lähedane oma normile, lähendada punktiga, milles y^* saavutab oma normi. Sellele väitele viidatakse kirjanduses kui *Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemile*.

Teoreem 2.3 (Bishop–Phelps–Bollobáse teoreem; vrd [Bo, teoreem 1])**.** *Olgu X reaalne Banachi ruum ning olgu $x^* \in S_{X^*}$ ja $z \in S_X$ sellised, et $x^*(z) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, kus $0 < \varepsilon < 2$. Siis leiduvad $y^* \in S_{X^*}$ ja $y \in S_X$ nii, et*

(1) $y^*(y) = 1$;

(2) $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$;

(3) $\|z - y\| \leqslant \varepsilon$.

Märkus 2.1. Teoreem 2.3 on teatavas mõttes parim võimalik (vt [CKMMR, näide 2.5]): mis tahes $\varepsilon \in (0,2)$ korral leiduvad $x^* \in (\ell_\infty^2)^*$ ja $z \in \ell_\infty^2$ nii, et $\|x^*\| = \|z\| = 1$ ja $x^*(z) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, kuid mis tahes $y^* \in (\ell_\infty^2)^*$, $y \in \ell_\infty^2$, $y^*(y) = \|y^*\| = \|y\| = 1$, korral

$$\max\{\|x^* - y^*\|, \|z - y\|\} \geqslant \varepsilon.$$

Märkus 2.2. Bollobás tõestas artiklis [Bo] teoreemi 2.3 vaid juhu jaoks, kus $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, kusjuures tingimuse (3) asemel sai ta nõrgema tingimuse

(3′) $\|z - y\| < \varepsilon + \varepsilon^2$.

Teoreem 2.3 esineb kirjanduses juhu $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ jaoks artiklis [CGK, järeldus 3.2], kus ta on järeldatud Brøndsted–Rockafellari variatsiooniprintsiibist [Ph^{93}, teoreem 3.17], ning kõige üldisema juhu $0 < \varepsilon < 2$ jaoks artiklis [KS, Teoreem 2.1] viitega artiklitele [CKMMR, järeldus 2.4] ja [CKMMS, lause 1.2] (viimases kahes artiklis on teoreem esitatud vähemalt formaalselt veidi nõrgemal kujul), kus ta on järeldatud Phelpsi tulemusest [Ph^{74}, järeldus 2.2] – niisiis oli Bishop–Phleps–Bollobáse teoreemi tugevaim versioon (s.t teoreem 2.3) üsna tõenäoliselt Phelpsile teada juba hiljemalt aastal 1974.

Selles peatükis esitame Bishop–Phelpsi teoreemile 2.1 ja Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemile 2.3 üksikasjaliku tõestuse, mis oma põhiideedes toetub artikli [BPh^{63}] tõestusele (allikmaterjalina kasutame siin monograafiat [DU]), kuid milles üks lemma (vt [DU, lemma 3] või lemma 2.10) on asendatud tema tugevdusega Phelpsi hilisemast artiklist [Ph^{74}, järeldus 2.3] (vt lemmat 2.6), millele me anname ka uue tõestuse. See asendus võimaldab meil saada Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemis 2.3 parimad võimalikud hinnangud (vt märkusi 2.1, 2.2 ja 2.8).

2.2 Millal kaks funktsionaali on teineteisele "lähedal"

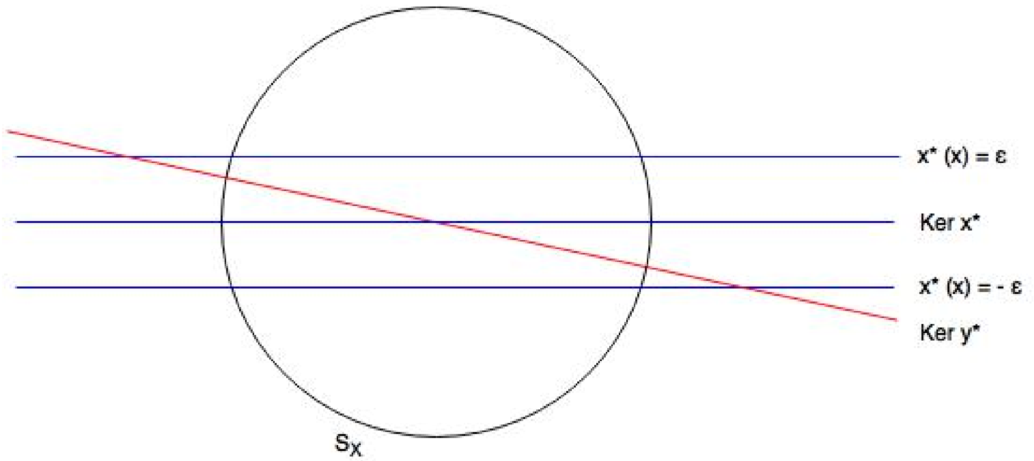
Järgnevat R. R. Phelpsi lemmat artiklist [Ph^{60}, lemma 3.1] me küll Bishop–Phelpsi ja Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemide 2.1 ja 2.3 tõestamisel otseselt ei kasuta, kuid see lemma annab hea geomeetrilise idee garanteerimaks, et kaks pidevat lineaarset funktsionaali on teineteisele "lähedal".

Lemma 2.4 (vt [DU, lk 188, lemma 2] või [M, lk 276, Lemma 2.11.10])**.** *Olgu X reaalne normeeritud ruum, olgu $x^*, y^* \in S_{X^*}$ ning olgu $0 < \varepsilon < 1$, kusjuures*

$$|x^*(x)| \leqslant \varepsilon \quad \textit{iga } x \in S_X \cap \ker y^* \textit{ korral.} \tag{2.1}$$

Siis kas $\|x^* - y^*\| \leqslant 2\varepsilon$ või $\|x^* + y^*\| \leqslant 2\varepsilon$.

Lemmal 2.4 on lihtne geomeetriline tõlgendus (vt joonist 2.1): kui "nurk" tuumade $\ker x^*$ ja $\ker y^*$ vahel on "väike", siis kas x^* ja y^* või x^* ja $-y^*$ on teineteisele "lähedal".



Joonis 2.1

Lemma 2.4 tõestus. Tingimus (2.1) tähendab, et $\|x^*|_{\ker y^*}\| \leqslant \varepsilon$. Hahn–Banachi jätkamisteoreemi 1.5 põhjal (õigupoolest piisab siin ka lemmast 1.6 elementaarsest jätkust) leidub funktsionaal $z^* \in X^*$, mille korral

$$z^*|_{\ker y^*} = x^*|_{\ker y^*} \quad \text{ja} \quad \|z^*\| = \|z^*|_{\ker y^*}\| = \|x^*|_{\ker y^*}\| \leqslant \varepsilon.$$

Nüüd $\ker y^* \subset \ker(x^* - z^*)$, järelikult lause 1.4, (b), põhjal leidub $\alpha \in \mathbb{R}$ nii, et $x^* - z^* = \alpha y^*$. Märgime, et $\big||\alpha| - 1\big| \leqslant \varepsilon$, sest

$$1 - \varepsilon \leqslant \|x^*\| - \|z^*\| \leqslant \|x^* - z^*\| = \|\alpha y^*\| = |\alpha|\|y^*\| = |\alpha| \leqslant \|x^*\| + \|z^*\| \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Tähistades $\Theta = \dfrac{\alpha}{|\alpha|}$, piisab nüüd lemma tõestuseks näidata, et $\|x^* - \Theta y^*\| \leqslant 2\varepsilon$. Kuna

$$|\alpha - \Theta| = \left|\alpha - \frac{\alpha}{|\alpha|}\right| = \big||\alpha| - 1\big| \leqslant \varepsilon,$$

siis

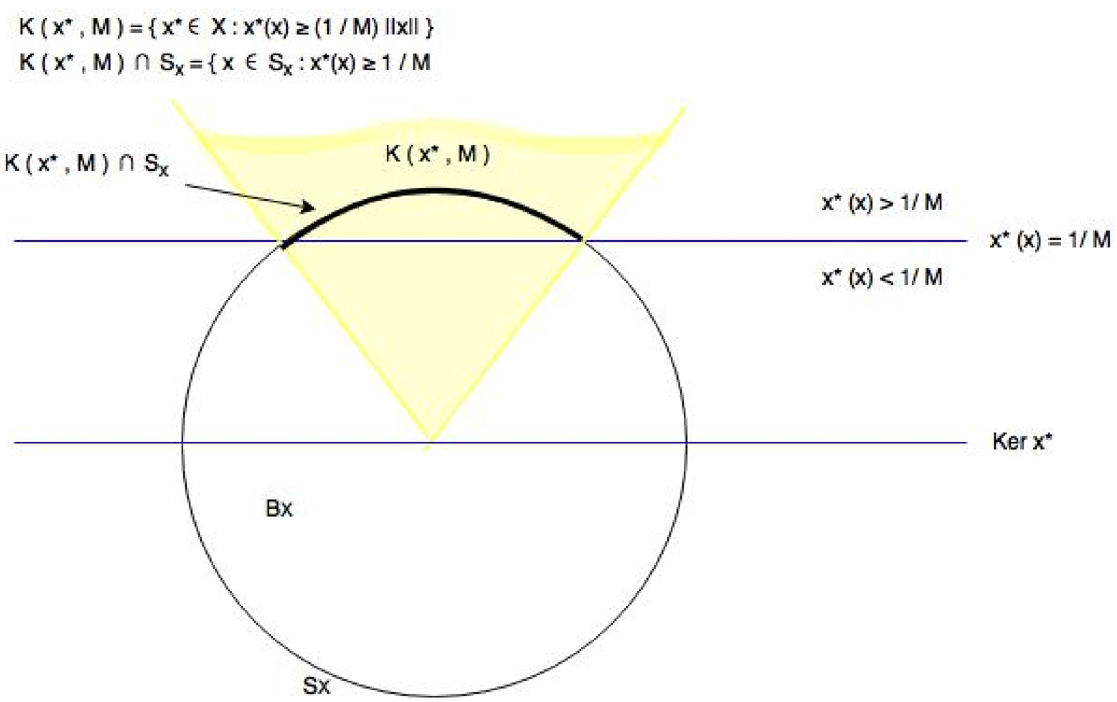
$$\begin{aligned}\|x^* - \Theta y^*\| &= \|x^* - \alpha y^* + \alpha y^* - \Theta y^*\| \leqslant \|x^* - \alpha y^*\| + \|\alpha y^* - \Theta y^*\| \\ &= \|z^*\| + |\alpha - \Theta|\|y^*\| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Olgu X reaalne normeeritud ruum, olgu $x^* \in S_{X^*}$ ning olgu $M > 1$. Üks olulisemaid tööriistu Bishop-Phelpsi teoreemi 2.1 tõestamisel on hulk

$$K(x^*, M) := \left\{x \in X \colon x^*(x) \geqslant \frac{1}{M}\|x\|\right\}.$$

Kuna järgneva lause põhjal on $K(x^*, M)$ koonus, siis on tema skitseerimisel abi lausest 1.3 (vt joonist 2.2).



Joonis 2.2

Lause 2.5. *Hulk $K(x^*, M)$ on kinnine koonus, kusjuures*

$$K(x^*, M)^\circ = \Big\{x \in X \colon x^*(x) > \frac{1}{M}\|x\|\Big\} \tag{2.2}$$

ja

$$\partial K(x^*, M) = \Big\{x \in X \colon x^*(x) = \frac{1}{M}\|x\|\Big\}; \tag{2.3}$$

niisiis $K(x^*, M)^\circ \neq \emptyset$. Seejuures

$$\overline{K(x^*, M)} = \overline{K(x^*, M)^\circ}. \tag{2.4}$$

Märkus 2.3. Saab näidata (vt nt [M, lk 184, ülesanne 2.26]), et *kui X on normeeritud ruum ja C on ruumi X kumer alamhulk, mille sisemus on mittetühi, s.t $C^\circ \neq \emptyset$, siis $\overline{C} = \overline{C^\circ}$.* Võrdus (2.4) on selle tulemuse erijuht, kus $C = K(x^*, M)$.

Lause 2.5 tõestus. Näitame, et $K(x^*, M)$ on koonus, s.t ta on kumer, kusjuures tema jaoks kehtivad tingimused (1.1) ja (1.2).

Veendumaks, et $K(x^*, M)$ on kumer, peame näitama, et mis tahes $x, y \in K(x^*, M)$ ja $\lambda \in (0, 1)$ korral $(1-\lambda)x + \lambda y \in K(x^*, M)$, s.t

$$x^*\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) \geqslant \frac{1}{M}\|(1-\lambda)x + \lambda y\|.$$

Olgu $x, y \in K(x^*, M)$, s.t $x^*(x) \geqslant \frac{1}{M}\|x\|$ ja $x^*(y) \geqslant \frac{1}{M}\|y\|$, ning olgu $\lambda \in (0,1)$. Siis

$$\begin{aligned} x^*\big((1-\lambda)x + \lambda y\big) &= (1-\lambda)x^*(x) + \lambda x^*(y) \geqslant (1-\lambda)\frac{1}{M}\|x\| + \lambda\frac{1}{M}\|y\| \\ &= \frac{1}{M}\big((1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\|\big) = \frac{1}{M}\big(\|(1-\lambda)x\| + \|\lambda y\|\big) \\ &\geqslant \frac{1}{M}\|(1-\lambda)x + \lambda y\|. \end{aligned}$$

Olgu $x \in K(x^*, M)$ ja $t \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$. Tingimuse (1.1) kehtivuseks hulga $K(x^*, M)$ jaoks peame näitama, et $tx \in K(x^*, M)$, s.t $x^*(tx) \geqslant \frac{1}{M}\|tx\|$. Kuna $x \in K(x^*, M)$, siis $x^*(x) \geqslant \frac{1}{M}\|x\|$, järelikult

$$x^*(tx) = tx^*(x) \geqslant t\frac{1}{M}\|x\| = \frac{1}{M}t\|x\| = \frac{1}{M}\|tx\|.$$

Olgu $x, -x \in K(x^*, M)$, s.t

$$x^*(x) \geqslant \frac{1}{M}\|x\| \quad \text{ja} \quad x^*(-x) \geqslant \frac{1}{M}\|-x\|. \tag{2.5}$$

Tingimuse (1.2) kehtivuseks hulga $K(x^*, M)$ jaoks peame näitama, et $x = 0$. Võrratustest (2.5) järeldub, et

$$x^*(x) \geqslant 0 \quad \text{ja} \quad -x^*(x) = x^*(-x) \geqslant 0,$$

millest $x^*(x) = 0$. Kuna $\|x\| \leqslant Mx^*(x) = 0$, siis $\|x\| = 0$, s.t $x = 0$.

Näitame, et $K(x^*, M)$ on kinnine. Olgu $x_n \in K(x^*, M)$, $n \in \mathbb{N}$, ja $x \in X$, sellised, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Hulga $K(x^*, M)$ kinnisuseks piisab näidata, et $x \in K(x^*, M)$, s.t $x^*(x) \geqslant \frac{1}{M}\|x\|$. Kuna $x_n \in K(x^*, M)$, siis

$$x^*(x_n) \geqslant \frac{1}{M}\|x_n\| \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{2.6}$$

Funktsionaali x^* ja normi pidevuse tõttu

$$x^*(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*(x) \qquad \text{ja} \qquad \|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|,$$

seega järeldub võrratustest (2.6) piirprotsessis $n \to \infty$, et $x^*(x) \geqslant \frac{1}{M}\|x\|$, nagu soovitud.

Valemite (2.2) ja (2.3) tõestuseks piisab näidata, et

$$\left\{x \in X \colon x^*(x) > \frac{1}{M}\|x\|\right\} \subset K(x^*, M)^\circ \tag{2.7}$$

ja

$$\left\{x \in X \colon x^*(x) = \frac{1}{M}\|x\|\right\} \cap K(x^*, M)^\circ \neq \emptyset. \tag{2.8}$$

Olgu $x \in X$ selline, et $x^*(x) > \frac{1}{M}\|x\|$. Sisalduvuse (2.7) tõestuseks piisab leida $\delta > 0$ nii, et iga $z \in X$, $\|z\| < \delta$, korral

$$x^*(x+z) \geqslant \frac{1}{M}\|x+z\|. \tag{2.9}$$

Mis tahes $z \in X$ korral, tähistades $\alpha := x^*(x) - \frac{1}{M}\|x\| > 0$,

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad &\Longleftarrow \quad x^*(x) + x^*(z) \geqslant \frac{1}{M}\|x\| + \frac{1}{M}\|z\| \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha \geqslant \frac{\|z\|}{M} - x^*(z) \\
&\Longleftarrow \quad \alpha \geqslant \frac{\|z\|}{M} + \|z\| \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha \geqslant \|z\|\left(\frac{1}{M} + 1\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \|z\| \leqslant \frac{\alpha M}{M+1};
\end{aligned}$$

niisiis me võime võtta $\delta = \dfrac{\alpha M}{M+1}$.

Olgu $x \in X$ selline, et $x^*(x) = \dfrac{1}{M}\|x\|$. Valemi (2.8) tõestuseks piisab, fikseerides vabalt $\delta > 0$, leida $z \in S_X$ nii, et $x+\delta z \notin K(x^*, M)$. Selleks märgime, et mis tahes $z \in S_X$ korral

$$
\begin{aligned}
x+\delta z \notin K(x^*, M) \quad &\Longleftrightarrow \quad x^*(x+\delta z) < \frac{1}{M}\|x+\delta z\| \\
&\Longleftarrow \quad x^*(x) + \delta x^*(z) < \frac{1}{M}\big(\|x\| - \delta\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \delta x^*(z) < -\frac{\delta}{M} \\
&\Longleftrightarrow \quad x^*(-z) > \frac{1}{M}.
\end{aligned}
$$

Kuna $\|x^*\| = 1$ ja $\dfrac{1}{M} < 1$, siis tingimust $x^*(-z) > \dfrac{1}{M}$ rahuldav $z \in S_X$ leidub.

Veendume, et $K(x^*, M)^\circ \neq \emptyset$: kuna $\|x^*\| = 1 > \dfrac{1}{M}$, siis leidub $x \in S_X$ nii, et

$$
x^*(x) > \frac{1}{M} = \frac{1}{M}\|x\|,
$$

aga nüüd võrduse (2.2) põhjal $x \in K(x^*, M)^\circ$.

Võrduseks (2.4) piisab näidata, et $\partial K(x^*, M) \subset \overline{K(x^*, M)^\circ}$. Selleks, fikseerides vabalt $x \in \partial K(x^*, M)$ ja $\delta > 0$, piisab veenduda, et $B(x, 2\delta) \cap K(x^*, M)^\circ \neq \emptyset$. Selleks omakorda piisab leida $z \in S_X$ nii, et $u := x+\delta z \in K(x^*, M)^\circ$ (sest kuna $u \in B(x, 2\delta)$, siis niisugusel juhul $u \in B(x, 2\delta) \cap K(x^*, M)^\circ$). Mis tahes $z \in S_X$ korral

$$
\begin{aligned}
x+\delta z \in K(x^*, M)^\circ \quad &\Longleftrightarrow \quad x^*(x+\delta z) > \frac{1}{M}\|x+\delta z\| \\
&\Longleftarrow \quad x^*(x) + \delta x^*(z) > \frac{1}{M}\|x\| + \delta\frac{1}{M} \\
&\Longleftrightarrow \quad x^*(z) > \frac{1}{M};
\end{aligned}
$$

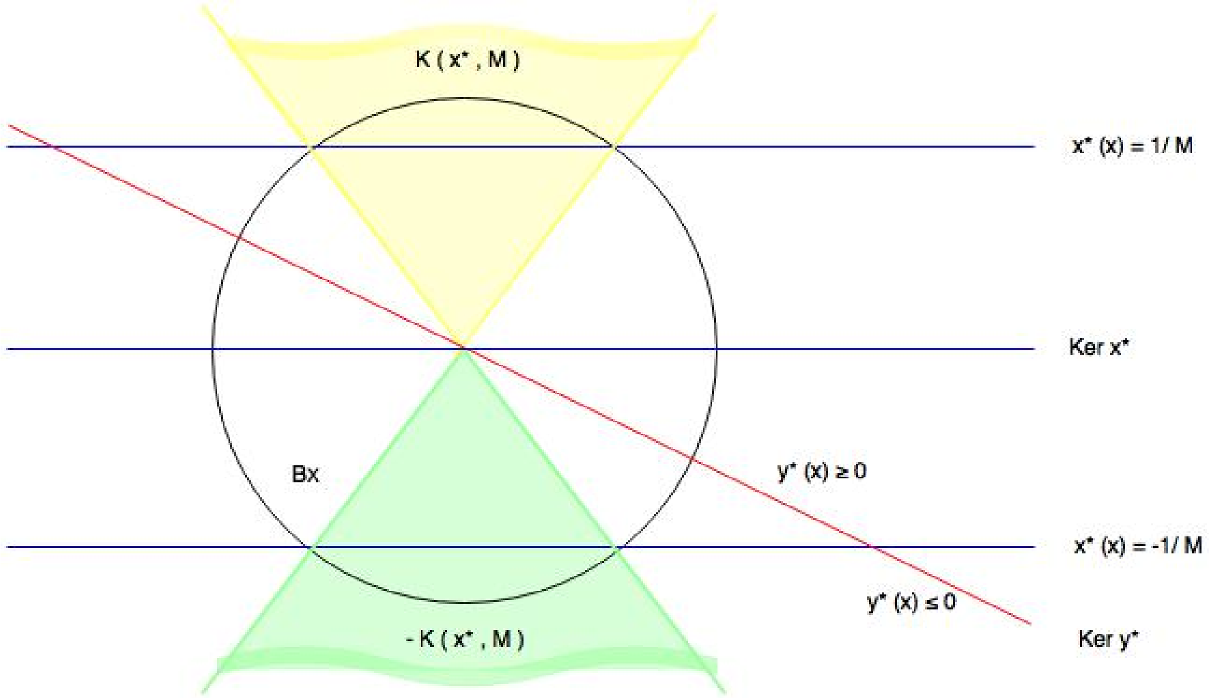
niisiis soovitud omadusega $z \in S_X$ leidub. □

Järgnev lemma annab juba väga tugeva vihje koonuse $K(x^*, M)$ rolli kohta Bishop–Phelpsi teoreemi 2.1 tõestamisel.

Lemma 2.6 (vt [Ph[74], järeldus 2.3])**.** *Olgu X reaalne normeeritud ruum, olgu $x^*, y^* \in S_{X^*}$ ning olgu $M > 1$, kusjuures funktsionaal y^* on koonusel $K(x^*, M)$ mittenegatiivne, s.t*

$$
y^*(x) \geqslant 0 \quad \textit{iga } x \in K(x^*, M) \textit{ korral.} \tag{2.10}
$$

Siis $\|x^* - y^*\| \leqslant \dfrac{2}{M}$.



Joonis 2.3

Tuuma $\ker y^*$ ja koonuse $K(x^*, M)$ vastastikust asendit eeldusel, et funktsionaal $y^* \in S_{X^*}$ on sellel koonusel mittenegatiivne (s.t lemma 2.6 eeldusel (2.10)), kirjeldab joonis 2.3. Seda joonist vaadates tundub, et kui $x \in S_X \cap \ker y^*$, siis $|x^*(x)| \leqslant \dfrac{1}{M}$ (mis lemma 2.4 põhjal annaks meile, et kehtib üks võrratustest $\|x^* - y^*\| \leqslant \dfrac{2}{M}$ või $\|x^* + y^*\| \leqslant \dfrac{2}{M}$). Nagu näitab järgnev lemma, peab see hüpotees paika.

Lemma 2.7. *Olgu X reaalne normeeritud ruum, olgu $x^*, y^* \in S_{X^*}$ ning olgu $M > 1$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *y^* säilitab koonusel $K(x^*, M)$ märki (s.t kas $y^*(x) \geqslant 0$ iga $x \in K(x^*, M)$ korral või $y^*(x) \leqslant 0$ iga $x \in K(x^*, M)$ korral);*

(ii) *$|x^*(x)| \leqslant \dfrac{1}{M}$ iga $x \in S_X \cap \ker y^*$ korral.*

Märkus 2.4. Lemma 2.6 (ja niisiis ühtlasi ka Bishop–Phelpsi teoreemi 2.1 ja Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemi 2.3) tõestuses kasutame me lemmast 2.7 vaid implikatsiooni (i)⇒(ii).

Lemma 2.7 tõestus. (i)⇒(ii). Eeldame, et (ii) ei kehti. Siis leidub $z \in S_X \cap \ker y^*$ nii, et $x^*(z) > \dfrac{1}{M}$. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et ka (i) ei kehti. Kuna lause 2.5

põhjal $z \in K(x^*, M)^\circ$, siis lause 1.19 põhjal

$$\sup_{x \in K(x^*,M)} y^*(x) > y^*(z) = 0 \quad \text{ja} \quad \inf_{x \in K(x^*,M)} y^*(x) < y^*(z) = 0,$$

järelikult omandab funktsionaal y^* koonusel $K(x^*, M)$ nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi, s.t (i) ei kehti, nagu soovitud.

(ii)$\Rightarrow$(i). Eeldame, et (i) ei kehti, s.t funktsionaal y^* omandab koonusel $K(x^*, M)$ nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et ka (ii) ei kehti.

Paneme tähele, et funktsionaal y^* omandab ka sisemusel $K(x^*, M)^\circ$ nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi. Tõepoolest, olgu $x \in K(x^*, M)$ selline, et $y^*(x) > 0$. Lause 2.5 põhjal

$$K(x^*, M) = \overline{K(x^*, M)} = \overline{K(x^*, M)^\circ},$$

seega leiduvad $x_n \in K(x^*, M)^\circ$, $n \in \mathbb{N}$, nii, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Funktsionaali y^* pidevuse tõttu ka $y^*(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y^*(x)$. Kuna $y^*(x) > 0$, siis alates teatavast indeksist on väärtused $y^*(x_n)$ positiivsed; niisiis on funktsionaalil y^* sisemusel $K(x^*, M)^\circ$ positiivseid väärtusi. Analoogiliselt saab näidata, et funktsionaalil y^* on sisemusel $K(x^*, M)^\circ$ ka negatiivseid väärtusi. Niisiis leiduvad $u, w \in K(x^*, M)^\circ$ nii, et $y^*(u) > 0$ ja $y^*(w) < 0$. Kuna sisemus $K(x^*, M)^\circ$ on lause 1.20 põhjal kumer, siis lemma 1.21 põhjal leidub punkt $v \in K(x^*, M)^\circ$ nii, et $y^*(v) = 0$. Tähistame $z = \dfrac{v}{\|v\|}$; siis $z \in S_X \cap \ker y^*$. Kuna $v \in K(x^*, M)^\circ$, siis lause 2.5 põhjal

$$x^*(z) = x^*\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\|v\|} x^*(v) > \frac{1}{\|v\|}\frac{1}{M}\|v\| = \frac{1}{M};$$

niisiis väide (ii) ei kehti, nagu soovitud. $\square$

Märkus 2.5. Lemma 2.6 eeldusest (2.10) järeldub lemma 2.7 põhjal lemma 2.7 tingimus (ii), millest lemma 2.4 põhjal järeldub, et $\|x^* - y^*\| \leqslant \dfrac{2}{M}$ või $\|x^* + y^*\| \leqslant \dfrac{2}{M}$; niisiis lemma 2.6 tõestuseks piisab neist viimane võrratus välistada. Kui $M > 2$, on see lihtne: valime $x \in S_X$ nii, et $x^*(x) > \dfrac{2}{M}$; siis $x \in K(x^*, M)$ ning järelikult eelduse (2.10) põhjal $y^*(x) \geqslant 0$; seega

$$\|x^* + y^*\| \geqslant (x^* + y^*)(x) = x^*(x) + y^*(x) \geqslant x^*(x) > \frac{2}{M}.$$

Ilma kitsendava eelduseta $M > 2$ lemma 2.6 lemmadest 2.7 ja 2.4 nii vahetult ei järeldu. Sellisel juhul (s.t üldisel juhul, kus $M > 1$) tuleb kõigepealt jällegi järeldada eeldusest (2.10) lemma 2.7 abil lemma 2.7 tingimus (ii); seejärel, jätkates nagu lemma 2.4 tõestuses, kus $\varepsilon = \frac{1}{M}$, piisab seal veenduda, et $\alpha > 0$: valime $x \in S_X$ nii, et $x^*(x) > \frac{1}{M}$ (siis $x \in K(x^*, M)$ ning järelikult eelduse (2.10) põhjal $y^*(x) \geqslant 0$); sel juhul

$$\alpha y^*(x) = x^*(x) - z^*(x) > \frac{1}{M} - \|z^*\| \geqslant 0,$$

millest, arvestades, et $y^*(x) \geqslant 0$, järeldub, et $y^*(x) > 0$ ning järelikult ka $\alpha > 0$.

Esituse terviklikkuse huvides paneme eelnevas märkuses kirjeldatud lemma 2.6 tõestuse kirja ka ilma viideteta lemma 2.4 tõestusele. Märgime, et siin esitatav tõestus erineb oluliselt Phelpsi originaaltõestusest artiklis [Ph74] ja on temast mõnevõrra lihtsam.

Lemma 2.6 tõestus. Lemma 2.7 põhjal järeldub eeldusest (2.10), et $\|x^*|_{\ker y^*}\| \leqslant \frac{1}{M}$. Hahn–Banachi jätkamisteoreemi 1.5 põhjal (tegelikult piisab meil siin ka lemmast 1.6 elementaarsest jätkust) leidub funktsionaal $z^* \in X^*$, mille korral

$$z^*|_{\ker y^*} = x^*|_{\ker y^*} \quad \text{ja} \quad \|z^*\| = \|z^*|_{\ker y^*}\| = \|x^*|_{\ker y^*}\| \leqslant \frac{1}{M}.$$

Nüüd $\ker y^* \subset \ker(x^* - z^*)$, järelikult lause 1.4, (b), põhjal leidub $\alpha \in \mathbb{R}$ nii, et $x^* - z^* = \alpha y^*$. Paneme tähele, et $\alpha > 0$. Tõepoolest, valides $x \in S_X$ nii, et $x^*(x) > \frac{1}{M}$ (siis $x \in K(x^*, M)$ ning järelikult eelduse (2.10) põhjal $y^*(x) \geqslant 0$), kehtib

$$\alpha y^*(x) = x^*(x) - z^*(x) > \frac{1}{M} - \|z^*\| \geqslant 0,$$

millest, arvestades, et $y^*(x) \geqslant 0$, järeldub, et $y^*(x) > 0$ ning järelikult ka $\alpha > 0$. Nüüd $|1 - \alpha| = \big|1 - |\alpha|\big| \leqslant \frac{1}{M}$, sest

$$1 - \frac{1}{M} \leqslant \|x^*\| - \|z^*\| \leqslant \|x^* - z^*\| = \|\alpha y^*\| = |\alpha|\|y^*\| = |\alpha| \leqslant \|x^*\| + \|z^*\| \leqslant 1 + \frac{1}{M};$$

järelikult

$$\begin{aligned}\|x^* - y^*\| &= \|x^* - \alpha y^* + (\alpha - 1)y^*\| \leqslant \|x^* - \alpha y^*\| + |\alpha - 1|\|y^*\| = \|z^*\| + |\alpha - 1| \\ &\leqslant \frac{1}{M} + \frac{1}{M} = \frac{2}{M}.\end{aligned}$$

□

2.3 Bishop–Phelpsi ja Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemi tõestus

Lemma 2.6 valguses on nüüd üsna selge, et Bishop-Phelpsi teoreemi 2.1 tõestuseks piisab tõestada järgnev lemma.

Lemma 2.8 (vt [DU, lk 188, lemma 1, ja lk 189, teoreemi 4 tõestus])**.** *Olgu X reaalne Banachi ruum, olgu C ruumi X kinnine kumer alamhulk, olgu funktsionaal $x^* \in X^*$ tõkestatud hulgas C, olgu $z \in C$ ning olgu $M > 1$. Siis leiduvad $y \in C$ ja $y^* \in S_{X^*}$ nii, et*

(1) $y - z \in K(x^*, M)$;

(2) $C \cap \big(y + K(x^*, M)\big) = \{y\}$;

(3) $\sup\limits_{x \in C} y^*(x) = y^*(y)$;

(4) $y^*(x) \geqslant 0$ *iga* $x \in K(x^*, M)$ *korral.*

Lemma 2.8 roll Bishop–Phelpsi teoreemi 2.1 tõestuses on üsna läbipaistev: kui $y^* \in S_{X^*}$ on hulki $C_1 := C$ ja $C_2 := y + K(x^*, M)$ Hahn–Banachi eraldamisteoreemi 1.8 mõttes eraldav funktsioon (vt joonist 2.4), siis kehtivad (3) ja (4) ning järelikult lemma 2.6 põhjal $\|x^* - y^*\| \leqslant \dfrac{2}{M}$.

Lemma 2.8 tõestus. Olgu $\preccurlyeq$ koonuse $K(x^*, M)$ poolt indutseeritud osaline järjestus ruumis X, s.t

$$x \preccurlyeq y \quad :\Longleftrightarrow \quad y - x \in K(x^*, M), \qquad x, y \in X.$$

Näitame, et hulgas $\mathscr{L} := \{x \in C : x \succcurlyeq z\}$ eksisteerib maksimaalne element.

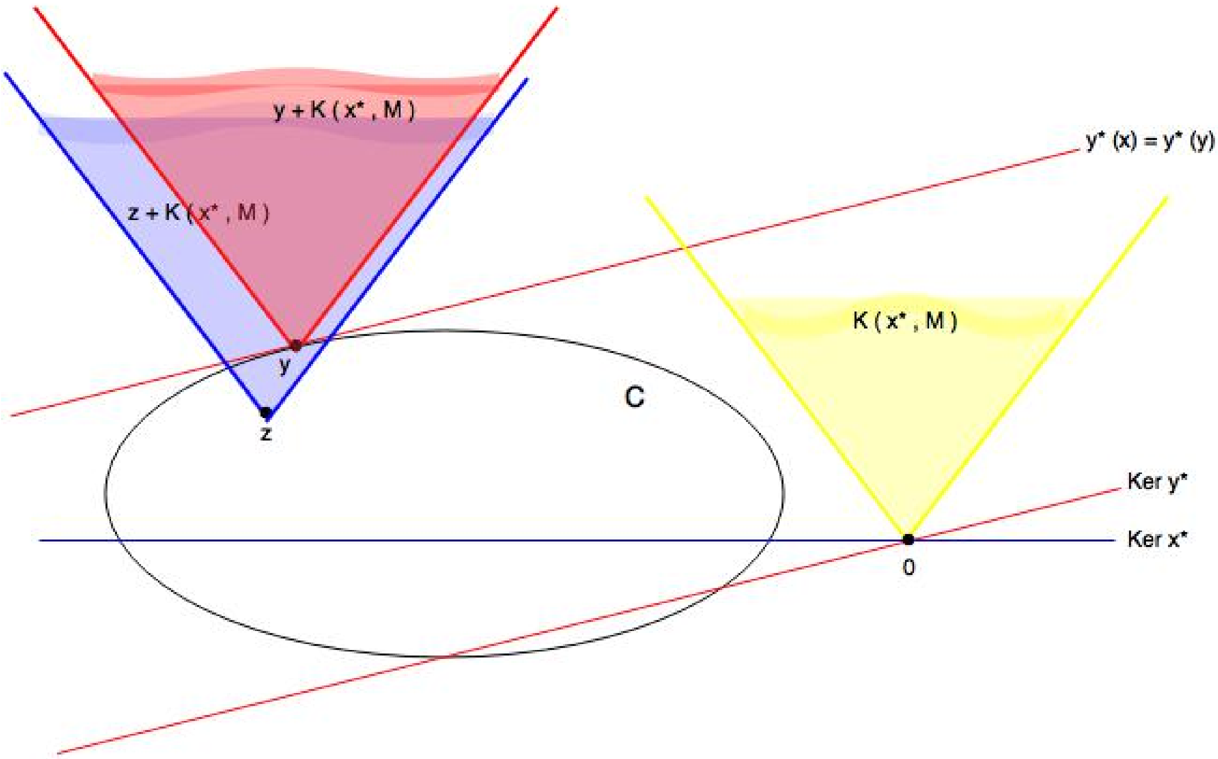
Olgu $W \subset \mathscr{L}$ lineaarselt järjestatud alamhulk. Siis $\big(x^*(w)\big)_{w \in W}$ on tõkestatud mittekahanev reaalarvude pere, sest mis tahes $v, w \in W$, $w \preccurlyeq v$, korral

$$x^*(v) - x^*(w) = x^*(v - w) \geqslant \frac{1}{M}\|v - w\| \geqslant 0$$

ning järelikult $x^*(v) \geqslant x^*(w)$.

Lause 1.16 põhjal $x^*(w) \xrightarrow[w \in W]{} \alpha$, kus $\alpha := \sup\limits_{w \in W} x^*(w)$. Kuna $\big(x^*(w)\big)_{w \in W}$ kui koonduv pere on lause 1.13 põhjal Cauchy pere, siis ka $(w)_{w \in W}$ on Cauchy pere, sest mis tahes $v, w \in W$, $w \preccurlyeq v$, korral $v - w \in K(x^*, M)$ ning järelikult

$$\|v - w\| \leqslant M x^*(v - w) = M|x^*(v) - x^*(w)| \xrightarrow[w, v \in W]{} 0.$$



Joonis 2.4

Ruumi X täielikkuse tõttu lause 1.14 põhjal Cauchy pere $(w)_{w \in W}$ koondub, s.t leidub $u \in X$ nii, et $w \xrightarrow[w \in W]{} u$. Hulga C kinnisuse tõttu lause 1.17 põhjal $u \in C$. Funktsionaali x^* pidevuse tõttu lause 1.18 põhjal $x^*(w) \xrightarrow[w \in W]{} x^*(u)$, järelikult pere piirväärtuse ühesuse (vt lauset 1.12) tõttu $x^*(u) = \alpha = \sup_{w \in W} x^*(w)$.

Veendume, et iga $w \in W$ korral $u \succcurlyeq w$, s.t $u - w \in K(x^*, M)$. Olgu $w \in W$. Siis mis tahes $v \in W$, $v \succcurlyeq w$, korral

$$x^*(v - w) \geqslant \frac{1}{M} \|v - w\|,$$

millest piirprotsessis $v \in W$ funktsionaali x^* ja normi pidevuse tõttu (lausete 1.18 ja 1.15 põhjal)

$$x^*(u - w) \geqslant \frac{1}{M} \|u - w\|,$$

s.t $u - w \in K(x^*, M)$, s.t $u \succcurlyeq w$. Seega ka $u \succcurlyeq z$. Niisiis $u \in \mathscr{L}$; seejuures u on hulga W ülemine tõke. Kuratowski–Zorni lemma põhjal eksisteerib hulgas $\mathscr{L}$ maksimaalne element; olgu üheks selleks $y \in \mathscr{L}$. Siis $y \succcurlyeq z$, seega $y - z \in K(x^*, M)$, s.t (1) kehtib.

Kuna $0 \in K(x^*, M)$, siis $y = y + 0 \in y + K(x^*, M)$, järelikult $y \in C \cap \big(y + K(x^*, M)\big)$. Olgu $v \in C \cap \big(y + K(x^*, M)\big)$. Tingimuse (2) kehtivuseks jääb näidata, et $v = y$. Kuna $v - y \in K(x^*, M)$, s.t $v \succcurlyeq y$, siis elemendi y maksimaalsuse tõttu $v = y$, nagu soovitud.

Kuna lause 2.5 põhjal $K(x^*, M)^\circ \neq \emptyset$, siis ka $\big(y + K(x^*, M)\big)^\circ = y + K(x^*, M)^\circ \neq \emptyset$, seega Hahn–Banachi eraldamisteoreemi 1.8 põhjal (võttes seal $C_1 = C$ ja $C_2 = y + K(x^*, M)$ ning pannes tähele, et $C \cap \big(y + K(x^*, M)\big)^\circ = C \cap \big(y + K(x^*, M)^\circ\big) = \emptyset$, sest $0 \notin K(x^*, M)^\circ$) leiduvad $y^* \in S_{X^*}$ ja $\beta \in \mathbb{R}$ nii, et

$$\sup_{x \in C} y^*(x) \leqslant \beta \qquad \text{ja} \qquad y^*(x) \geqslant \beta \text{ iga } x \in \big(y + K(x^*, M)\big) \text{ korral.}$$

Siit järeldub, et $y^*(y) = \beta = \sup_{x \in C} y^*(x)$, s.t tingimus (3) kehtib.

Jääb näidata, et kehtib tingimus (4). Iga $x \in K(x^*, M)$ korral $y + x \in \big(y + K(x^*, M)\big)$, seega

$$y^*(y) + y^*(x) = y^*(y + x) \geqslant \beta = y^*(y),$$

järelikult $y^*(x) \geqslant 0$. $\square$

Järeldus 2.9. *Olgu C reaalse Banachi ruumi X kinnine kumer alamhulk, olgu funktsionaal $x^* \in X^*$ tõkestatud hulgas C, olgu $z \in C$ ja $\delta > 0$ sellised, et $x^*(z) \geqslant \sup_{x \in C} x^*(x) - \delta$, ning olgu $M > 1$. Siis leiduvad $y \in C$ ja $y^* \in S_{X^*}$ nii, et*

(1) $\sup_{x \in C} y^*(x) = y^*(y)$;

(2) $\|y^* - x^*\| \leqslant \dfrac{2}{M}$;

(3) $\|y - z\| \leqslant M\delta$.

Tõestus. Rahuldagu $y \in C$ ja $y^* \in S_{X^*}$ lemma 2.8 tingimusi (1)–(4). Lemma 2.8 tingimus (3) on käesoleva lemma tingimus (1) ning lemma 2.8 tingimusest (4) järeldub lemma 2.6 põhjal käesoleva lemma tingimus (2). Lemma 2.8 tingimusest (1) järeldub, et

$$\frac{1}{M}\|y - z\| \leqslant x^*(y - z) = x^*(y) - x^*(z) \leqslant \sup_{x \in C} x^*(x) - x^*(z) \leqslant \delta,$$

millest järeldub käesoleva lemma tingimus (3). $\square$

Bishop–Phelpsi teoreemi 2.1 tõestuseks piisab valida järelduses 2.9 arv $M > 1$ nii, et $\dfrac{2}{M} \leqslant \varepsilon$. $\square$

Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemi 2.3 tõestuseks piisab järelduses 2.9 võtta $C = B_X$, $\delta = \dfrac{\varepsilon^2}{2}$ ja $M = \dfrac{2}{\varepsilon}$. $\square$

2.4 Erinevus Bishopi ja Phelpsi originaaltõestusest

Artiklis [BPh63] (ning monograafiates [DU] ja [M], kus on järgitud selle artikli tõestusskeemi) on Bishop–Phelpsi tugifunktsionaalide teoreemi 2.1 tõestamisel lemma 2.6 asemel kasutatud järgnevat lemmat.

Lemma 2.10 (vt [DU, lk 188–189, lemma 3] või [M, lk 276 lemma 2.11.11])**.** *Olgu X reaalne normeeritud ruum, olgu $x^*, y^* \in S_{X^*}$, olgu $0 < \varepsilon < 1$ ning olgu $M > 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, kusjuures*

$$y^*(x) \geqslant 0 \quad \text{iga } x \in K(x^*, M) \text{ korral.} \tag{2.11}$$

Siis $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$.

Tõestus. Valime $x \in S_X$ nii, et $1 + \frac{2}{\varepsilon} < Mx^*(x)$. Kui $y \in S_X \cap \ker x^*$, siis

$$\Big\| x \pm \frac{2}{\varepsilon} y \Big\| \leqslant 1 + \frac{2}{\varepsilon} < Mx^*(x) = Mx^*\Big(x \pm \frac{2}{\varepsilon} y\Big),$$

seega $x \pm \frac{2}{\varepsilon} y \in K(x^*, M)$, niisiis eelduse (2.11) põhjal $y^*\Big(x \pm \frac{2}{\varepsilon} y\Big) \geqslant 0$ ning järelikult

$$|y^*(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} y^*(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \|x\| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lemma 2.4 põhjal kas $\|x^* + y^*\| \leqslant \varepsilon$ või $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$. Lemma tõestuseks piisab nüüd näidata, et $\|x^* + y^*\| > \varepsilon$. Selleks märgime, et kuna $\varepsilon < 1$ ja $\frac{1}{M} < 1$, siis leidub $z \in S_X$, mille korral $x^*(z) > \max\Big\{\varepsilon, \frac{1}{M}\Big\}$. Nüüd $z \in K(x^*, M)$, seega eelduse (2.11) põhjal $y^*(z) \geqslant 0$ ning järelikult

$$\varepsilon < x^*(z) + y^*(z) = (x^* + y^*)(z) \leqslant \|x^* + y^*\|.$$

□

Märkus 2.6. Põhiline erinevus lemmade 2.10 ja 2.6 tõestuste vahel on see, et lemma 2.10 tõestuses on hinnatud funktsionaali y^* väärtusi punktides $x \in S_X \cap \ker x^*$, lemma 2.6 tõestuses aga funktsionaali x^* väärtusi punktides $x \in S_X \cap \ker y^*$.

Märkus 2.7. Lemma 2.10 jääb kehtima, kui seal eeldada, et $M = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.

Tõepoolest, olgu X reaalne Banachi ruum, olgu $x^*, y^* \in S_{X^*}$, olgu $0 < \varepsilon < 1$ ning olgu $M = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, kusjuures kehtib (2.11). Kui $\varepsilon < \varepsilon' < 1$, siis $M > 1 + \frac{2}{\varepsilon'}$, seega lemma 2.10 põhjal $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon'$. Protsessis $\varepsilon' \to \varepsilon+$ järeldub siit, et $\|x^* - y^*\| \leqslant \varepsilon$.

Kuna $1 < M < M'$ korral $K(x^*, M) \subset K(x^*, M')$, siis lemma 2.10 muutub tugevamaks, kui seal eeldada, et $M = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$.

Kuna

$$M = 1 + \frac{2}{\varepsilon} \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon = \frac{2}{M-1},$$

siis võib tugevaima lemmas 2.10 sisalduva väite formuleerida järgmiselt.

Järeldus 2.11. *Olgu X reaalne normeeritud ruum, olgu $x^*, y^* \in S_{X^*}$ ja olgu $M > 3$, kusjuures kehtib* (2.11). *Siis $\|x^* - y^*\| \leqslant \frac{2}{M-1}$.*

Märkus 2.8. Järeldust 2.11 lemmaga 2.6 võrreldes on selge, et lemma 2.6 on sellest järeldusest (ja seega ka lemmast 2.10) tugevam. Lemma 2.6 praktiline eelis lemma 2.10 ees tuleb ilmsiks, kui proovida järelduse 2.11 abil tõestada Bishop-Phelps-Bollobáse teoreemi, kasutades selleks, nagu eespool, lemmat 2.8. Järelduse 2.9 analoog, mille me saame lemmast 2.8 kasutades lemma 2.6 asemel järeldust 2.11, on järgmine.

Järeldus 2.12. *Olgu C reaalse Banachi ruumi X kinnine kumer alamhulk, olgu funktsionaal $x^* \in X^*$ tõkestatud hulgas C, olgu $z \in C$ ja $\delta > 0$ sellised, et $x^*(z) \geqslant \sup_{x \in C} x^*(x) - \delta$, ning olgu $M > 3$. Siis leiduvad $y \in C$ ja $y^* \in S_{X^*}$ nii, et*

(1) $\sup_{x \in C} y^*(x) = y^*(y)$;

(2) $\|y^* - x^*\| \leqslant \frac{2}{M-1}$;

(3) $\|y - z\| \leqslant M\delta$.

Proovime nüüd eelneva järelduse abil tõestada Bishop-Phelps-Bollobáse teoreemi. Olgu X reaalne Banachi ruum ning olgu $x^* \in S_{X^*}$ ja $z \in S_X$ sellised, et $x^*(z) \geqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, kus $0 < \varepsilon < 1$. Võttes järelduses 2.12 $C = B_X$, $\delta = \frac{\varepsilon^2}{2}$ ja $M = 1 + \frac{2}{\varepsilon}$, annab see järeldus meile $y \in B_X$ ja $y^* \in S_{X^*}$ nii, et

(1) $y^*(y) = \sup_{x \in B_X} y^*(x) = \|y^*\| = 1$ (niisiis, ka $y \in S_Y$);

(2) $\|y^* - x^*\| \leqslant \frac{2}{M-1} = \varepsilon$;

(3) $\|y - z\| \leqslant M\delta = \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)\frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}$.

Saadud hinnangud on nõrgemad kui Bishop-Phelps-Bollobáse teoreemis 2.3.

Kirjandus

[BPh61] E. Bishop, R. R. Phelps, *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 97–98.

[BPh63] E. Bishop, R. R. Phelps, *The support functionals of a convex set*, Convexity (V. L. Klee, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 7, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963, 27–35.

[Bo] B. Bollobás, *An extension to the theorem of Bishop and Phelps,* Bull. London Math. Soc. **2** (1970), 181–182.

[CGK] B. Cascales, A. J. Guirao, V. Kadets, *A Bishop–Phelps–Bollobás type theorem for uniform algebras,* Adv. Math. **240** (2013), 370–382.

[CKMMS] M. Chica, V. Kadets, M. Martin, J. Meri, M. Soloviova *Two refinements of the Bishop-Phelps-Bollobás modulus,* Banach J. Math. Anal. **9** (2015), 296–315.

[CKMMR] M. Chica, V. Kadets, M. Martin, S. Moreno-Pulido, F. Rambla-Barreno *Bishop–Phelps–Bollobás moduli of a Banach space,* J. Math. Anal. Appl. **412** (2014), 697–719.

[DU] J. Diestel, J. J. Uhl, jr., *Vector Measures*, Math. Surveys, vol.15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

[J57] R. C. James, *Reflexivity and the supremum of linear functionals*, Ann. of Math. **66** (1957), 159–169.

[J64] R. C. James, *Characterizations of reflexivity*, Studia Math. **23** (1964), 205–216.

[J71] R. C. James, *A counterexample for a sup theorem in normed spaces*, Israel J. Math. **9** (1971), 511–512.

[J72] R. C. James, *Reflexivity and the sup of linear functionals*, Israel J. Math. **13** (1972), 289–300.

[KN] M. Kilp, U. Nummert, *Hulgateooria elemendid*, Tartu Ülikool, Tartu, 1994.

[KS] V. Kadets, M. Soloviova, *A modified Bishop–Phelps–Bollobás theorem and its sharpness,* Mat. Stud. **44** (2015), 84–88.

[Ma] H. C. Martinsaari, *Hambuvus ja tugevalt eksponeeritud punktid Banachi ruumis*, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2010.

[M] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory,* Graduate Texts in Mathematics, 183, Springer, New York, 1998.

[OO] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[Ph^{57}] R. R. Phelps, *Subreflexive normed linear spaces*, Arch. Math. (Basel) **8** (1957), 444–450.

[Ph^{60}] R. R. Phelps, *A representation theorem for bounded convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 976–983.

[Ph^{74}] R. R. Phelps, *Support cones in Banach spaces and their applications*, Advances in Math. **13** (1974), 1–19.

[Ph^{93}] R. R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability,* second ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1364, Springer, Berlin, 1993.

[V] T. Viil, *Normi säilitavate jätkude ühesus*, magistritöö, Tartu Ülikool, Tartu, 2015.

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Dairis Püvi (sünnikuupäev: 03.09.1993),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Bishop–Phelps–Bollobáse teoreem",
   mille juhendajateks on Kristel Mikkor ja Märt Põldvere,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 12.05.2016