Tartu Ülikool
loodus- ja täppisteaduste valdkond
matemaatika ja statistika instituut
matemaatika eriala

Andre Ostrak

Lipschitzi-vaba Banachi ruumi oktaeedrilisus

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Märt Põldvere

Tartu 2016

Lipschitzi-vaba Banachi ruumi oktaeedrilisus

Bakalaureusetöö

Andre Ostrak

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös antakse J. Becerra Guerrero, G. López-Pérezi ja A. Rueda Zoca artikli *Octahedrality in Lipschitz free Banach spaces* (vt `arXiv:1512.03558v1 [math.FA]`, 11. dets. 2015) põhitulemustele alternatiivne tõestus. Need tulemused näitavad kolmel erijuhul Lipschitzi-vaba Banachi ruumi oktaeedrilisust. Originaaltõestustes näidatakse, et Lipschitzi-vaba ruumi kaasruum rahuldab oktaeedrilisuse teatud duaalset kirjeldust. Bakalaureusetöös esitatud alternatiivsetes tõestustes näidatakse oktaeedrilisust definitsiooni põhjal.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: funktsionaalanalüüs, Banachi ruumid, meetrilised ruumid, normeeritud ruumid, mittelineaarsed operaatorid.

Octahedrality of Lipschitz-free Banach spaces

Bachelor's thesis

Andre Ostrak

Abstract. The aim of this bachelor's thesis is to give alternative proofs of the main results of the paper *Octahedrality in Lipschitz free Banach spaces* by J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez and A. Rueda Zoca (see `arXiv:1512.03558v1 [math.FA]`, 11 Dec. 2015). In this paper, the authors study octahedrality in vector valued Lipschitz-free Banach spaces on a metric space under topological hypotheses on it such as having cluster points or having infinite radius. Their proofs rely on the dual characterization of octahedrality, while the corresponding proofs in the present thesis are based on the definition of octahedrality.

CERCS research specialisation. P140 Series, Fourier Analysis, functional analysis.
Keywords: functional analysis, Banach spaces, metric spaces, normed spaces, non-linear operators.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on Banachi ruumide geomeetria alane teaduslik uurimus funktsionaalanalüüsi valdkonnast.

Bakalaureusetöö peamine eesmärk on anda J. Becerra Guerrero, G. López Pérezi ja A. Rueda Zoca artikli [2] põhitulemustele alternatiivne tõestus. Artiklis [2] näidatakse Lipschitzi-vaba Banachi ruumi oktaeedrilisust kolmel erijuhul, selleks kasutatakse oktaeedrilise ruumi kaasruumi teatud kirjeldust ja näidatakse, et Lipschitzi-vaba ruumi kaasruum rahuldab vastavat tingimust. Bakalaureusetöös esitatud uued alternatiivsed tõestused näitavad Lipschitzi-vaba ruumi oktaeedrilisust oktaeedrilisuse definitsiooni põhjal. Mõlemal juhul rakendatakse Lipschitzi-vaba Banachi ruumi kaasruumi tuntud kirjeldust.

Bakalaureusetöö koosneb kahest peatükist. Esimeses peatükis anname töö põhieesmärgi täitmiseks vajalikud eelteadmised, tuginedes peamiselt N. Weaveri monograafiale [10], H. Niglase magistritööle [8] ning J. A. Chávez Domínguezi doktoritööle [4]. Teises peatükis esitatakse artikli [2] kolm põhitulemust koos uue tõestusega. Sellega täidetakse bakalaureusetöö põhieesmärk.

Bakalaureusetöös vaatleme ainult mittetriviaalseid normeeritud ruume ja Banachi ruume ning eeldame, et need on üle reaalarvude korpuse.

Töös kasutatakse järgmisi tähistusi. Normeeritud ruumi X kinnist ühikkera tähistame B_X ning ühiksfääri S_X. Ruumi X kaasruumi tähistame X^*. Kui $x^* \in X^*$ ja $x \in X$, siis arvu $x^*(x)$ tähistame ka $\langle x^*, x\rangle$.

Järgnevalt loetleme mõned töös kasutatud baasmõisted ja -tulemused.

Öeldakse, et normeeritud ruumid X ja Y on *isomeetriliselt isomorfsed*, kui leidub lineaarne sürjektiivne kujutus $T\colon X \to Y$ nii, et iga $x \in X$ korral

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

Sel juhul öeldakse, et T on *isomeetriline isomorfism.*

Kui X on meetriline ruum ja Y on normeeritud ruum, siis kujutuse $f\colon X \to Y$ *kandjaks* nimetatakse hulga X alamhulka

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Kui X on mingi hulk ja A tema alamhulk, siis hulga A *karakteristlikuks funktsiooniks* nimetatakse funktsiooni $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$, mille korral

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in A; \\ 0, & \text{kui } x \notin A. \end{cases}$$

Olgu X vektorruum üle reaalarvude korpuse. *Poolnormiks* vektorruumil X nimetatakse kujutust $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$, mis rahuldab tingimusi

1° $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \qquad x \in X, \; \lambda \in \mathbb{R},$

2° $\|x_1 + x_2\| \le \|x_1\| + \|x_2\|, \qquad x_1, x_2 \in X.$

Poolnorm $\|\cdot\|$ on norm, kui kehtib implikatsioon

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Käesolevas bakalaureusetöös kasutame järgmist Hahni–Banachi teoreemi järeldust.

Teoreem (teoreem piisavast arvust funktsionaalidest, vt nt [9, lk 170]). *Olgu X normeeritud ruum. Iga $x \in X$ korral leidub $x^* \in X^*$ nii, et $\|x^*\| = 1$ ja $x^*(x) = \|x\|$.*

1 Vajalikud eelteadmised

1.1 Lipschitzi ruum

Selles alapunktis näitame, et nullpunktiga meetrilisest ruumist Banachi ruumi tegutsevate kõigi selliste kujutuste hulk, mis rahuldavad Lipschitzi tingimust ja viivad nullpunkti nullelemendiks, on Banachi ruum punktiviisi defineeritud vektorruumi tehete ja loomuliku normi (Lipschitzi konstant) suhtes. Seda Banachi ruumi nimetatakse *Lipschitzi ruumiks*.

Definitsioon 1.1. Olgu (X, d) ja (Y, ϱ) meetrilised ruumid ning $f\colon X \to Y$. Öeldakse, et kujutus f rahuldab *Lipschitzi tingimust*, kui leidub $L \geq 0$ nii, et iga $p, q \in X$ korral

$$\varrho(f(p), f(q)) \leq L\, d(p, q).$$

Vähimat sellist arvu L tähistame $\mathrm{Lip}(f)$.

Definitsioon 1.2 (vt nt [8, definitsioon 1.2])**.** Meetrilist ruumi, milles on fikseeritud kindel element, nimetatakse *nullpunktiga meetriliseks ruumiks*. Fikseeritud elementi nimetatakse *nullpunktiks* ja tähistatakse 0.

Olgu X nullpunktiga meetriline ruum ja Y Banachi ruum. Tähistame sümboliga $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$ kõigi selliste Lipschitzi tingimust rahuldavate kujutuste $f\colon X \to Y$ hulka, mille korral $f(0) = 0$. Meie siht on näidata, et $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$ on Banachi ruum punktiviisi defineeritud vektorruumi tehete ja normi $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f)$ suhtes. Ilma lisatingimuseta $f(0) = 0$ defineerib $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f)$ poolnormi, mis üldiselt ei ole norm.

Lause 1.3. *Hulk* $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$ *on vektorruum üle reaalarvude korpuse punktiviisi defineeritud tehete suhtes.*

Tõestus. Piisab näidata, et $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$ on alamruum kõigi kujutuste $X \to Y$ vektorruumis, kus nullelemendiks on nullfunktsioon ning liitmine ja reaalarvuga korrutamine on defineeritud punktiviisi.

Ilmselt nullfunktsioon kuulub hulka $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$. Näitame, et alamhulk $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$ on kinnine liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes. Kui $f_1, f_2 \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, siis $\lambda f_1 + f_2 \in \mathrm{Lip}_0(X, Y)$, sest iga $p, q \in X$ korral

$$\begin{aligned}
\|(\lambda f_1 + f_2)(p) - (\lambda f_1 + f_2)(q)\| &= \|\lambda f_1(p) + f_2(p) - \lambda f_1(q) - f_2(q)\| \\
&= \|\lambda f_1(p) - \lambda f_1(q) + f_2(p) - f_2(q)\| \\
&\leq \|\lambda f_1(p) - \lambda f_1(q)\| + \|f_2(p) - f_2(q)\| \\
&\leq |\lambda|\, \mathrm{Lip}(f_1)\, d(p, q) + \mathrm{Lip}(f_2)\, d(p, q) \\
&= \big(|\lambda|\, \mathrm{Lip}(f_1) + \mathrm{Lip}(f_2)\big)\, d(p, q)
\end{aligned}$$

ja

$$(\lambda f_1 + f_2)(0) = \lambda f_1(0) + f_2(0) = 0.$$

Seega on $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ vektorruum. $\square$

Lause 1.4. *Vektorruum* $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ *on Banachi ruum normiga*

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f).$$

Tõestus. Näitame, et $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \mathrm{Lip}(f)$, $f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$, on norm.

1° Tingimus $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 0$ on samaväärne tingimusega $\|f(p) - f(q)\| = 0$ iga $p, q \in X$ korral ehk f on nullfunktsioon, sest $f(0) = 0$.

2° Kui $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$, siis iga $p, q \in X$ korral

$$\|\lambda f(p) - \lambda f(q)\| = |\lambda|\, \|f(p) - f(q)\|,$$

järelikult $\mathrm{Lip}(\lambda f) = |\lambda| \,\mathrm{Lip}(f)$ ehk $\|\lambda f\|_{\mathrm{Lip}} = |\lambda|\, \|f\|_{\mathrm{Lip}}$.

3° Kui $f_1, f_2 \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$, siis iga $p, q \in X$ korral

$$\begin{aligned}\|(f_1 + f_2)(p) - (f_1 + f_2)(q)\| &= \|f_1(p) - f_1(q) + f_2(p) - f_2(q)\| \\ &\leq \|f_1(p) - f_1(q)\| + \|f_2(p) - f_2(q)\|,\end{aligned}$$

järelikult $\mathrm{Lip}(f_1 + f_2) \leq \mathrm{Lip}(f_1) + \mathrm{Lip}(f_2)$ ehk $\|f_1 + f_2\|_{\mathrm{Lip}} \leq \|f_1\|_{\mathrm{Lip}} + \|f_2\|_{\mathrm{Lip}}$.

Seega on $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ normeeritud ruum.

Veendume nüüd, et normeeritud ruum $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ on täielik. Olgu (f_n) Cauchy jada ruumis $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$, s.t

$$\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_{\mathrm{Lip}} = 0.$$

Näitame, et (f_n) koondub ruumis $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$. Iga $x \in X$ korral koondub $(f_n(x))$ ruumis Y, sest ta on Cauchy jada:

$$\begin{aligned}\|f_m(x) - f_n(x)\| &= \|(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(0)\| \\ &\leq \|f_m - f_n\|_{\mathrm{Lip}}\, d(x,0) \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Vaatleme kujutust $f \colon X \to Y$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Näitame, et $f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$. Kuna $f_n(0) = 0$ iga n korral, siis $f(0) = 0$. Kujutus f rahuldab Lipschitzi tingimust, sest iga $p, q \in X$ korral

$$\|f(p) - f(q)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n(p) - f_n(q)\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_{\mathrm{Lip}}\, d(p,q)$$

ja

$$\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq \sup_n \|f_n\|_{\mathrm{Lip}} < \infty,$$

sest Cauchy jada (f_n) on tõkestatud.

Näitame, et $\|f - f_n\|_{\mathrm{Lip}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Kuna f_n on Cauchy jada, siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga $m, n \geq N$ korral

$$\|f_m - f_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq \varepsilon.$$

Kui $n \geq N$, siis $\|f - f_n\|_{\mathrm{Lip}} \leq \varepsilon$, sest iga $p, q \in X$ korral

$$\begin{aligned}\|(f - f_n)(p) - (f - f_n)(q)\| &= \lim_{m\to\infty} \|(f_m - f_n)(p) - (f_m - f_n)(q)\| \\ &\leq \varepsilon\, d(p,q).\end{aligned}$$

Järelikult $\|f - f_n\|_{\mathrm{Lip}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\square$

Märgime, et ruum $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ ei sõltu tegelikult meetrilises ruumis X nullpunkti valikust. Täpsemalt, kui esialgse nullpunkti 0 asemel lugeda meetrilise ruumi X uueks nullpunktiks element θ ja $\mathrm{Lip}_\theta(X,Y)$ on vastav Lipschitzi ruum, siis $\mathrm{Lip}_0(X,Y)$ ja $\mathrm{Lip}_\theta(X,Y)$ on isomeetriliselt isomorfsed. Näitame, et kujutus $T\colon \mathrm{Lip}_0(X,Y) \to \mathrm{Lip}_\theta(X,Y)$,

$$(Tf)(p) = f(p) - f(\theta), \qquad f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y),\ p \in X,$$

on isomeetriline isomorfism. Kujutus T on korrektselt defineeritud, sest iga $f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$ korral erinevad kujutused f ja Tf vaid konstandi $f(\theta)$ võrra, seega $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(Tf)$ ja $(Tf)(\theta) = 0$. Kujutus T on ilmselt lineaarne. Veendume, et T on sürjektiivne. Kui $g \in \mathrm{Lip}_\theta(X,Y)$, siis $f\colon X \to Y$, $f(p) = g(p) - g(0)$, korral $f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y)$ ja $Tf = g$, sest iga $p \in X$ korral

$$(Tf)(p) = f(p) - f(\theta) = g(p) - g(0) - g(\theta) + g(0) = g(p).$$

1.2 Molekulide ruum

Selles alapunktis vaatleme teatud lihtsaid kujutusi, mida nimetatakse molekulideks. Toome sisse molekulide ruumi mõiste ning näitame, et see on normeeritud ruum. Varem käsitletud arvväärtustega molekulide kõrval uuriti esmakordselt doktoritöös [4] üldisemaid vektorväärtustega molekule.

Olgu X meetriline ruum ja Y Banachi ruum üle reaalarvude korpuse.

Definitsioon 1.5. Funktsiooni $m\colon X \to Y$ nimetatakse *molekuliks*, kui tema kandja on lõplik ja ta rahuldab tingimust $\sum_{p\in X} m(p) = 0$.

Kõigi ruumist X ruumi Y tegutsevate molekulide hulka tähistame $\mathcal{M}(X,Y)$. Molekuli definitsioonis tähendab tingimus $\sum_{p\in X} m(p) = 0$ teisisõnu, et m on nullfunktsioon või $\sum_{p\in \mathrm{supp}(m)} m(p) = 0$. Kui molekul m ei ole nullfunktsioon, siis on m kandja vähemalt kaheelemendiline.

Lause 1.6. *Hulk $\mathcal{M}(X,Y)$ on vektorruum üle reaalarvude korpuse punktiviisi defineeritud tehete suhtes.*

Tõestus. Piisab näidata, et $\mathcal{M}(X,Y)$ on alamruum kõigi kujutuste $X \to Y$ vektorruumis, kus nullelemendiks on nullfunktsioon ning liitmine ja reaalarvuga korrutamine on defineeritud punktiviisi.

Ilmselt nullfunktsioon kuulub hulka $\mathcal{M}(X,Y)$. Näitame, et alamhulk $\mathcal{M}(X,Y)$ on kinnine liitmise ja reaalarvuga korrutamise suhtes. Kui $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(X,Y)$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, siis $\lambda m_1 + m_2 \in \mathcal{M}(X,Y)$, sest

$$\mathrm{supp}(\lambda m_1 + m_2) \subset \mathrm{supp}(m_1) \cup \mathrm{supp}(m_2),$$

järelikult $\lambda m_1 + m_2$ kandja on lõplik, ja

$$\begin{aligned}\sum_{p\in X} (\lambda m_1 + m_2)(p) &= \sum_{p\in X} \big(\lambda m_1(p) + m_2(p)\big) \\ &= \lambda \sum_{p\in X} m_1(p) + \sum_{p\in X} m_2(p) \\ &= \lambda\, 0 + 0 = 0.\end{aligned}$$

□

Iga $p, q \in X$ ja $y \in Y$ korral tähistame $ym_{pq} = y\chi_{\{p\}} - y\chi_{\{q\}}$, s.t $ym_{pq}\colon X \to Y$ on nullfunktsioon juhul $p = q$ ja juhul $p \neq q$ on

$$ym_{pq}(x) = \begin{cases} y, & \text{kui } x = p; \\ -y, & \text{kui } x = q; \\ 0, & \text{kui } x \neq p \text{ ja } x \neq q. \end{cases}$$

Näitame, et hulga $\mathcal{M}(X,Y)$ iga element on esitatav kujul

$$m = \sum_{i=1}^{n} y_i m_{p_i q_i},$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in Y$ ja $p_i, q_i \in X$. Vaatleme ainult juhtu, kus m ei ole nullfunktsioon. Fikseerime vabalt $q \in X$, siis

$$m = \sum_{p \in \operatorname{supp}(m)} m(p) m_{pq},$$

sest

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{p \in \operatorname{supp}(m)} m(p) m_{pq} \Big)(x) &= \sum_{p \in \operatorname{supp}(m)} \big(m(p)(\chi_{\{p\}} - \chi_{\{q\}}) \big)(x) = \\ &= \begin{cases} m(x) - \displaystyle\sum_{p \in \operatorname{supp}(m)} m(p) = m(x), & \text{kui } x = q; \\ m(x), & \text{kui } x \neq q. \end{cases}\end{aligned}$$

Siinkohal tasub ära märkida, et molekuli m esitus kujul $m = \sum_{i=1}^n y_i m_{p_i q_i}$ pole ühene.

R. F. Arens ja J. Eells näitasid artiklis [1] (vt ka [10, teoreem 2.2.2, järeldus 2.2.3] ja [8, lk 17–18]), et vektorruumi $\mathcal{M}(X, \mathbb{R})$ saab muuta normeeritud ruumiks nii, et meetrilises ruumis vabalt fikseeritud nullpunkti korral $\mathcal{M}(X, \mathbb{R})^* = \operatorname{Lip}_0(X, \mathbb{R})$. Täpsemalt, vektorruum $\mathcal{M}(X, \mathbb{R})$ on normeeritud ruum normiga

$$\|m\|_{Æ} = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^n |a_i| \, d(p_i, q_i) \colon m = \sum_{i=1}^n a_i m_{p_i q_i} \Big\},$$

kus infiimum on võetud üle kõigi m esituste kujul $m = \sum_{i=1}^n a_i m_{p_i q_i}$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ja $p_i, q_i \in X$) ja kujutus $T\colon \operatorname{Lip}_0(X, \mathbb{R}) \to \mathcal{M}(X, \mathbb{R})^*$,

$$\langle Tf, m \rangle = \sum_{p \in X} f(p) m(p), \qquad f \in \operatorname{Lip}_0(X, \mathbb{R}),\ m \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R}),$$

on isomeetriline isomorfism. Edaspidi kirjutame $f \in \operatorname{Lip}_0(X, \mathbb{R})$ ja $m \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R})$ korral $\langle Tf, m \rangle$ asemel $\langle f, m \rangle$. J. A. Chávez Domínguez näitas doktoritöös [4] Arensi ja Eellsi eeskujul, et vektorruum $\mathcal{M}(X, Y)$ on normeeritud ruum.

Lause 1.7 ([4, lemma 2.3.2])**.** *Kujutus* $\| \cdot \|_{Æ} \colon \mathcal{M}(X, Y) \to \mathbb{R}$,

$$\|m\|_{Æ} = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^n \|y_i\| \, d(p_i, q_i) \colon m = \sum_{i=1}^n y_i m_{p_i q_i} \Big\},$$

kus infiimum on võetud üle kõigi m *esituste kujul* $m = \sum_{i=1}^n y_i m_{p_i q_i}$*, on poolnorm.*

Tõestus. 1° Iga $m \in \mathcal{M}(X,Y)$ ja $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ korral

$$\begin{aligned}
\|\lambda m\|_{Æ} &= \inf\Big\{\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|\, d(p_i,q_i) \colon \lambda m = \sum_{i=1}^{n} y_i m_{p_i q_i}\Big\} \\
&= \inf\Big\{|\lambda| \sum_{i=1}^{n} \Big\|\frac{y_i}{\lambda}\Big\|\, d(p_i,q_i) \colon m = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\lambda} m_{p_i q_i}\Big\} \\
&= |\lambda| \inf\Big\{\sum_{i=1}^{n} \Big\|\frac{y_i}{\lambda}\Big\|\, d(p_i,q_i) \colon m = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\lambda} m_{p_i q_i}\Big\} \\
&= |\lambda|\, \|m\|_{Æ}.
\end{aligned}$$

Kui $\lambda = 0$, siis võrdus $\|\lambda m\|_{Æ} = |\lambda|\, \|m\|_{Æ}$ on ilmne.

2° Olgu $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(X,Y)$. Näitame, et

$$\|m_1 + m_2\|_{Æ} \leq \|m_1\|_{Æ} + \|m_2\|_{Æ}.$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Infiimumi mõiste kohaselt leiduvad m_1 ja m_2 sellised esitused $m_1 = \sum_{i=1}^{n_1} y_i^1 m_{p_i^1 q_i^1}$ ja $m_2 = \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2 m_{p_i^2 q_i^2}$, et

$$\sum_{i=1}^{n_1} \|y_i^1\|\, d(p_i^1, q_i^1) \leq \|m_1\|_{Æ} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$\sum_{i=1}^{n_2} \|y_i^2\|\, d(p_i^2, q_i^2) \leq \|m_2\|_{Æ} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kuna $m_1 + m_2 = \sum_{i=1}^{n_1} y_i^1 m_{p_i^1 q_i^1} + \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2 m_{p_i^2 q_i^2}$, siis

$$\begin{aligned}
\|m_1 + m_2\|_{Æ} &= \Big\| \sum_{i=1}^{n_1} y_i^1 m_{p_i^1 q_i^1} + \sum_{i=1}^{n_2} y_i^2 m_{p_i^2 q_i^2} \Big\|_{Æ} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n_1} \|y_i^1\|\, d(p_i^1, q_i^1) + \sum_{i=1}^{n_2} \|y_i^2\|\, d(p_i^2, q_i^2) \\
&\leq \|m_1\|_{Æ} + \frac{\varepsilon}{2} + \|m_2\|_{Æ} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \|m_1\|_{Æ} + \|m_2\|_{Æ} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Järelikult $\|m_1 + m_2\|_{Æ} \leq \|m_1\|_{Æ} + \|m_2\|_{Æ} + \varepsilon$ iga $\varepsilon > 0$ korral ehk

$$\|m_1 + m_2\|_{Æ} \leq \|m_1\|_{Æ} + \|m_2\|_{Æ}.$$

$\square$

Lause 1.8 ([4, lemma 2.3.2])**.** *Poolnorm $\|\cdot\|_{\text{Æ}}$ ruumil $\mathcal{M}(X,Y)$ on norm.*

Tõestus. Piisab näidata, et kui $\|m\|_{\text{Æ}} = 0$, siis m on nullfunktsioon. Vaatleme kujutust $B\colon \operatorname{Lip}_0(X,Y^*) \times \mathcal{M}(X,Y) \to \mathbb{R}$,

$$B(f,m) = \sum_{p\in X} \langle f(p), m(p)\rangle.$$

Tähistame iga $f \in \operatorname{Lip}_0(X,\mathbb{R})$ ja $y^* \in Y^*$ korral kujutuse $f(\cdot)y^*\colon X \to Y^*$, $x \mapsto f(x)y^*$. Osutub, et $f(\cdot)y^* \in \operatorname{Lip}_0(X,Y^*)$, sest

$$f(0)y^* = 0\,y^* = 0$$

ja iga $p,q \in X$ korral

$$\|f(p)y^* - f(q)y^*\| = |f(p) - f(q)|\,\|y^*\| \leq \|f\|_{\text{Lip}}\,\|y^*\|\,d(p,q).$$

Kui $f \in \operatorname{Lip}_0(X,\mathbb{R})$, $y^* \in Y^*$ ja $m \in \mathcal{M}(X,Y)$, kusjuures m on kujul $m = \sum_{i=1}^n y_i m_{p_i q_i}$, kus $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in Y$ ja $p_i, q_i \in X$, siis

$$\begin{aligned}
\big|B\big(f(\cdot)y^*, m\big)\big| &= \Big|\sum_{p\in X} \Big\langle f(p)y^*, \sum_{i=1}^n y_i m_{p_i q_i}(p)\Big\rangle\Big| \\
&= \Big|\sum_{p\in X} \bigg(f(p)y^*\Big(\sum_{i=1}^n y_i m_{p_i q_i}(p)\Big)\bigg)\Big| \\
&= \Big|\sum_{p\in X} \Big(\sum_{i=1}^n m_{p_i q_i}(p) f(p) y^*(y_i)\Big)\Big| \\
&= \Big|\sum_{i=1}^n \big\langle f(p_i)y^* - f(q_i)y^*, y_i\big\rangle\Big| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|f(p_i)y^* - f(q_i)y^*\|\,\|y_i\| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \|f\|_{\text{Lip}}\,d(p_i,q_i)\,\|y^*\|\,\|y_i\| \\
&= \|f\|_{\text{Lip}}\,\|y^*\| \sum_{i=1}^n \|y_i\|\,d(p_i,q_i).
\end{aligned}$$

Seega

$$\big|B\big(f(\cdot)y^*, m\big)\big| \leq \|f\|_{\text{Lip}}\,\|y^*\| \sum_{i=1}^n \|y_i\|\,d(p_i,q_i).$$

Võttes infiimumi üle kõigi m esituste kujul $m = \sum_{i=1}^{n} y_i m_{p_i,q_i}$, saame

$$|B\big(f(\cdot)y^*, m\big)| \leq \|f\|_{\mathrm{Lip}} \, \|y^*\| \, \|m\|_{Æ}.$$

Olgu $m \in \mathcal{M}(X, Y)$. Paneme tähele, et iga $y^* \in Y^*$ korral $y^* \circ m \in \mathcal{M}(X, \mathbb{R})$, sest y^* lineaarsuse tõttu

$$\mathrm{supp}(y^* \circ m) \subset \mathrm{supp}(m),$$

järelikult on $y^* \circ m$ kandja lõplik, ja

$$\sum_{p \in X} y^* \circ m(p) = \sum_{p \in X} y^*\big(m(p)\big) = y^*\Big(\sum_{p \in X} m(p)\Big) = y^*(0) = 0.$$

Veel paneme tähele, et iga $f \in \mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{R})$ korral

$$B\big(f(\cdot)y^*, m\big) = \sum_{p \in X} \langle f(p)y^*, m(p)\rangle = \sum_{p \in X} f(p)y^*\big(m(p)\big) = \langle f, y^* \circ m\rangle.$$

Kui $\|m\|_{Æ} = 0$, siis järelikult $B\big(f(\cdot)y^*, m\big) = 0$ ehk $\langle f, y^* \circ m\rangle = 0$ iga $f \in \mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{R})$ ja $y^* \in Y^*$ korral. Seega $y^* \circ m = 0$ iga $y^* \in Y^*$ korral ehk $m = 0$. □

Definitsioon 1.9. Normeeritud ruumi $\mathcal{M}(X, Y)$ täieldit $\mathcal{F}(X, Y)$ nimetatakse *Lipschitzi-vabaks ruumiks.*

1.3 Molekulide ruumi kaasruum

Selles alapunktis näitame, et kui Lipschitzi ruumi moodustavate kujutuste sihtruum on kaasruum, siis Lipschitzi ruum on teatud molekulide ruumi kaasruum.

Teoreem 1.10 ([4, lause 2.3.3])**.** *Olgu X nullpunktiga meetriline ruum ja Y Banachi ruum. Kujutus $T\colon \mathrm{Lip}_0(X, Y^*) \to \mathcal{M}(X, Y)^*$,*

$$\langle Tf, m\rangle = \sum_{p \in X} \langle f(p), m(p)\rangle, \qquad f \in \mathrm{Lip}_0(X, Y^*),\ m \in \mathcal{M}(X, Y),$$

on isomeetriline isomorfism.

Tõestus. Esmalt veendume, et T on korrektselt defineeritud kujutus. Kui $f \in \mathrm{Lip}_0(X, Y^*)$, siis ilmselt Tf on kujutus ruumist $\mathcal{M}(X, Y)$ ruumi $\mathbb{R}$.

Vahetult on kontrollitav, et Tf on lineaarne: iga $m_1, m_2 \in \mathcal{M}(X,Y)$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned}\langle Tf, \lambda m_1 + m_2\rangle &= \sum_{p\in X} \big\langle f(p), \big(\lambda m_1 + m_2\big)(p)\big\rangle \\ &= \sum_{p\in X} \big(\langle f(p), \lambda m_1(p)\rangle + \langle f(p), m_2(p)\rangle\big) \\ &= \lambda \sum_{p\in X} \langle f(p), m_1(p)\rangle + \sum_{p\in X}\langle f(p), m_2(p)\rangle \\ &= \lambda\langle Tf, m_1\rangle + \langle Tf, m_2\rangle.\end{aligned}$$

Kujutus Tf on tõkestatud, sest iga $m \in \mathcal{M}(X,Y)$ korral

$$|\langle Tf, m\rangle| \le \|f\|_{\mathrm{Lip}} \, \|m\|_{Æ}. \tag{1.1}$$

Tõepoolest, kui $m \in \mathcal{M}(X,Y)$ ja $m = \sum_{i=1}^n y_i m_{p_i q_i}$, kus $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in Y$ ja $p_i, q_i \in X$, $p_i \neq q_i$, siis

$$\begin{aligned}|\langle Tf, m\rangle| &= \Big|\sum_{p\in X} \Big\langle f(p), \sum_{i=1}^n y_i m_{p_i q_i}(p)\Big\rangle\Big| = \Big|\sum_{i=1}^n \big\langle f(p_i) - f(q_i), y_i\big\rangle\Big| \\ &\le \sum_{i=1}^n \|f(p_i) - f(q_i)\| \, \|y_i\| \le \sum_{i=1}^n \|f\|_{\mathrm{Lip}} \, d(p_i, q_i) \, \|y_i\| \\ &= \|f\|_{\mathrm{Lip}} \sum_{i=1}^n \|y_i\| \, d(p_i, q_i).\end{aligned}$$

Seega iga $m \in \mathcal{M}(X,Y)$ korral

$$|\langle Tf, m\rangle| \le \|f\|_{\mathrm{Lip}} \inf\Big\{\sum_{i=1}^n \|y_i\| \, d(p_i, q_i) \colon m = \sum_{i=1}^n y_i m_{p_i q_i}\Big\},$$

kus infiimum on võetud üle kõigi m esituste kujul $m = \sum_{i=1}^n y_i m_{p_i q_i}$, ehk

$$|\langle Tf, m\rangle| \le \|f\|_{\mathrm{Lip}} \, \|m\|_{Æ}.$$

Vahetult on kontrollitav, et T on lineaarne: iga $f_1, f_2 \in \mathrm{Lip}_0(X, Y^*)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ja $m \in \mathcal{M}(X,Y)$ korral

$$\begin{aligned}\langle T(\lambda f_1 + f_2), m\rangle &= \sum_{p\in X} \big\langle \big(\lambda f_1 + f_2\big)(p), m(p)\big\rangle \\ &= \sum_{p\in X} \big(\langle \lambda f_1(p), m(p)\rangle + \langle f_2(p), m(p)\rangle\big) \\ &= \lambda \sum_{p\in X}\langle f_1(p), m(p)\rangle + \sum_{p\in X}\langle f_2(p), m(p)\rangle \\ &= \lambda\langle Tf_1, m\rangle + \langle Tf_2, m\rangle.\end{aligned}$$

Veendume, et T on sürjektiivne. Olgu $\varphi \in \mathcal{M}(X,Y)^*$. Piisab näidata, et leidub $f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y^*)$ nii, et $Tf = \varphi$. Iga $p \in X$ korral defineerime kujutuse $y_p^*\colon Y \to \mathbb{R}$, $y_p^*(y) = \varphi(ym_{p0})$. Näitame, et $y_p^* \in Y^*$. Tõepoolest, y_p^* on lineaarne, sest iga $y_1, y_2 \in Y$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ korral

$$\begin{aligned} y_p^*(\lambda y_1 + y_2) &= \varphi\big((\lambda y_1 + y_2)m_{p0}\big) = \varphi(\lambda y_1 m_{p0} + y_2 m_{p0}) \\ &= \varphi(\lambda y_1 m_{p0}) + \varphi(y_2 m_{p0}) = \lambda\varphi(y_1 m_{p0}) + \varphi(y_2 m_{p0}) \\ &= \lambda y_p^*(y_1) + y_p^*(y_2), \end{aligned}$$

ning tõkestatud, sest iga $y \in Y$ korral ilmselt $\|ym_{p0}\|_{Æ} \le \|y\|\, d(p,0)$ ning seega

$$|y_p^*(y)| = |\varphi(ym_{p0})| \le \|\varphi\|\, \|ym_{p0}\|_{Æ} \le \|\varphi\|\, \|y\|\, d(p,0).$$

Vaatleme kujutust $f\colon X \to Y^*$, $f(p) = y_p^*$. Veendume, et $f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y^*)$. Esmalt paneme tähele, et

$$f(0)(y) = y_0^*(y) = \varphi(ym_{00}) = \varphi(0) = 0.$$

Näitame nüüd, et f rahuldab Lipschitzi tingimust. Olgu $p,q \in X$ ja $y \in Y$. Ilmselt $\|ym_{pq}\|_{Æ} \le \|y\|\, d(p,q)$. Seega iga $y \in B_Y$ korral

$$\begin{aligned} |\langle f(p) - f(q), y\rangle| &= |\langle f(p), y\rangle - \langle f(q), y\rangle| = |y_p^*(y) - y_q^*(y)| \\ &= |\varphi(ym_{p0}) - \varphi(ym_{q0})| = |\varphi(ym_{pq})| \le \|\varphi\|\, \|ym_{pq}\|_{Æ} \\ &\le \|\varphi\|\, \|y\|\, d(p,q) \le \|\varphi\|\, d(p,q). \end{aligned}$$

Järelikult $\mathrm{Lip}(f) \le \|\varphi\|$. Kokkuvõttes $f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y^*)$, kusjuures

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \le \|\varphi\|_{Æ}. \tag{1.2}$$

Veendume, et $Tf = \varphi$: iga $m \in \mathcal{M}(X,Y)$ korral

$$\begin{aligned} \langle Tf, m\rangle &= \sum_{p\in X} \langle f(p), m(p)\rangle = \sum_{p\in X} y_p^*\big(m(p)\big) = \sum_{p\in X} \varphi\big(m(p)m_{p0}\big) \\ &= \varphi\Big(\sum_{p\in X} m(p)m_{p0}\Big) = \varphi\Big(\sum_{p\in \mathrm{supp}(m)} m(p)m_{p0}\Big) = \varphi(m). \end{aligned}$$

Näitame, et T on injektiivne. Olgu $f,g \in \mathrm{Lip}_0(X,Y^*)$ sellised, et $Tf = Tg$. Siis $f = p$, sest iga $p \in X$ ja $y \in Y$ korral

$$\begin{aligned} \langle f(p), y\rangle &= \langle f(p), y\rangle - \langle f(0), y\rangle = \langle Tf, ym_{p0}\rangle \\ &= \langle Tg, ym_{p0}\rangle = \langle g(p), y\rangle - \langle g(0), y\rangle = \langle g(p), y\rangle. \end{aligned}$$

Seega on T bijektiivne ning võrratuste (1.1) ja (1.2) põhjal on iga $f \in \mathrm{Lip}_0(X,Y^*)$ korral

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|Tf\|_{Æ}.$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et T on isomeetriline isomorfism. $\square$

Edaspidi kirjutame $f \in \operatorname{Lip}_0(X, Y^*)$ ja $m \in \mathcal{M}(X, Y)$ korral $\langle Tf, m\rangle$ asemel $\langle f, m\rangle$.

Teoreem 1.11 (Tietze jätkuteoreem meetriliste ruumide jaoks, vt nt [10, teoreem 1.5.6])**.** *Olgu X meetriline ruum ja $E \subset X$, siis iga Lipschitzi tingimust rahuldava $g\colon E \to \mathbb{R}$ korral leidub g jätk $f\colon X \to \mathbb{R}$ nii, et*

$$\operatorname{Lip}(f) = \operatorname{Lip}(g).$$

Lause 1.12 ([4, lause 2.3.4])**.** *Olgu X meetriline ruum ja Y Banachi ruum. Iga $y \in Y$ ja $p, q \in X$ korral $\|ym_{pq}\|_{\text{Æ}} = \|y\|\, d(p,q)$.*

Tõestus. Võrratus $\|ym_{pq}\|_{\text{Æ}} \leq \|y\|\, d(p,q)$ kehtib normi $\|\cdot\|_{\text{Æ}}$ definitsiooni põhjal.

Näitame, et $\|ym_{pq}\|_{\text{Æ}} \geq \|y\|\, d(p,q)$. See võrratus kehtib ilmselt juhul $p = q$. Eeldame edasises, et $p \neq q$. Kujutuse $g\colon \{p, q\} \to \mathbb{R}$, $g(p) = d(p,q)$, $g(q) = 0$, puhul on ilmselt $\operatorname{Lip}(g) = 1$. Tietze jätkuteoreemi (vt teoreem 1.11) kohaselt leidub g selline jätk $h\colon X \to \mathbb{R}$, et $\operatorname{Lip}(h) = 1$. Teoreemi piisavast arvust funktsionaalidest põhjal leidub selline $y^* \in S_{Y^*}$, et $y^*(y) = \|y\|$. Olgu $f\colon X \to Y^*$, $f(x) = h(x)y^*$. Kui vaadelda punkti q ruumi X nullpunktina, siis $f \in \operatorname{Lip}_0(X, Y^*)$ ja

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \operatorname{Lip}(f) = \operatorname{Lip}(h) = 1.$$

Teoreemi 1.10 põhjal saame

$$\begin{aligned}\|ym_{pq}\|_{\text{Æ}} &\geq \langle f, ym_{pq}\rangle = \langle f(p) - f(q), y\rangle \\ &= \langle d(p,q)\, y^* - 0, y\rangle = d(p,q)\, y^*(y) = d(p,q)\, \|y\|.\end{aligned}$$

$\square$

2 Põhitulemused

Käesolevas peatükis anname artikli [2] põhitulemustele (vt [2, teoreem 2.5 ning laused 2.7 ja 2.8]) alternatiivse tõestuse. Artikli [2] põhitulemused näitavad, et teatud eeldustel on Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(X, Y)$ oktaeedriline.

Olgu X meetriline ruum ja Y Banachi ruum.

Definitsioon 2.1 ([2, definitsioon 2.3])**.** Öeldakse, et paaril (X, Y) on *omadus CEP*, kui iga $E \subset X$ ja Lipschitzi funktsiooni $g\colon E \to Y$ korral leidub g jätk $f\colon X \to Y$ nii, et

$$\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(g).$$

Näide 2.2. Paaril $(X, \mathbb{R})$ on omadus CEP Tietze jätkuteoreemi (vt 1.11) põhjal.

Näide 2.3. Omadusega CEP Banachi ruumide paaride näiteid leiab nt [3, peatükk 2.3]. Näiteks on CEP omadus Hilberti ruumi H korral paaril (H, H).

Definitsioon 2.4 ([5, lk 4] ja [6, lause 2.1])**.** Öeldakse, et normeeritud ruum Z on *oktaeedriline*, kui iga $n \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_n \in S_Z$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $z \in S_Z$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\|z_i + z\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Näide 2.5. Banachi ruumid ℓ_1 ja $C[0, 1]$ on oktaeedrilised (vt nt [7, laused 3.9 ja 3.10]).

Paneme tähele, et Lipschitzi-vaba ruum $\mathcal{F}(X, Y)$ on oktaeedriline parajasti siis, kui molekulide ruum $\mathcal{M}(X, Y)$ on oktaeedriline. See väide järeldub otse järgmisest elementaarsest lemmast.

Lemma 2.6. *Olgu Z normeeritud ruum ja W tema kõikjal tihe alamruum. Z on oktaeedriline parajasti siis, kui W on oktaeedriline.*

Tõestus. Eeldame, et Z on oktaeedriline. Olgu $w_1, \ldots, w_n \in S_W$ ja $\varepsilon > 0$. Eelduse kohaselt leidub $z \in S_Z$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\|w_i + z\| \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kuna W on kõikjal alamruum, siis leidub selline $w \in S_W$, et $\|z - w\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\|w_i + w\| \geq \|w_i + z\| - \|z - w\| \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.$$

Järelikult on W oktaeedriline.

Eeldame nüüd, et W on oktaeedriline. Olgu $z_1, \dots, z_n \in S_Z$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna W on kõikjal tihe alamruum, siis leiduvad $w_1, \dots, w_n \in S_W$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\|z_i - w_i\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Eelduse kohaselt leidub $w \in S_W$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\|w_i + w\| \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ilmselt $w \in S_Z$, kusjuures iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\|z_i + w\| \geq \|w_i + w\| - \|z_i - w_i\| \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.$$

Järelikult on Z oktaeedriline. $\square$

Nüüd oleme valmis esitama arikli [2] põhitulemused ja neid tõestama.

Teoreem 2.7 ([2, teoreem 2.5])**.** *Olgu X meetriline ruum, Y Banachi ruum ning olgu paaril (X, Y^*) omadus CEP. Kui ruumis X leidub kuhjumispunkt, siis on ruum $\mathcal{M}(X, Y)$ oktaeedriline.*

Tõestus. Eeldame, et ruumis X leidub kuhjumispunkt. Fikseerime vabalt $n \in \mathbb{N}$, $m_1, \dots, m_n \in S_{\mathcal{M}(X,Y)}$ ja $\varepsilon > 0$. Ruum $\mathcal{M}(X, Y)$ on oktaeedriline, kui leidub $m \in S_{\mathcal{M}(X,Y)}$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\|m_i + m\| \geq \frac{2}{1 + \varepsilon}.$$

Loeme ruumi X ühe kindla kuhjumispunkti nullpunktiks. Olgu $\delta > 0$ selline, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $x \in \operatorname{supp}(m_i) \setminus \{0\}$ korral $d(0, x) \geq \delta$. Kuhjumispunkti mõiste kohaselt leidub $p \in X$ nii, et $p \neq 0$ ja

$$d(0, p) < \frac{\delta \varepsilon}{2 + \varepsilon}.$$

Fikseerime vabalt $y \in S_Y$ ja võtame

$$m = \frac{y}{d(0, p)} m_{p0}.$$

Lause 1.12 põhjal on $\|m\| = 1$.

Näitame, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\|m_i + m\| \geq \frac{2}{1 + \varepsilon}.$$

Teoreemi 1.10 ja teoreemi piisavast arvust funktsionaalidest põhjal leiduvad $f_i \in \mathrm{Lip}_0(X, Y^*)$ ja $y^* \in S_{Y^*}$ nii, et $\mathrm{Lip}(f_i) = 1$ ja $\langle f_i, m_i \rangle = 1$ ning $y^*(y) = \|y\| = 1$. Vaatleme ruumi X alamruumi $E_i = \mathrm{supp}(m_i) \cup \{0, p\}$ ja kujutust $g_i \colon E_i \to Y^*$,

$$g_i(a) = \begin{cases} d(0,p)\, y^*, & \text{kui } a = p; \\ f_i(a), & \text{kui } a \in E_i \setminus \{p\}. \end{cases}$$

Osutub, et $\mathrm{Lip}(g_i) \leq 1 + \varepsilon$. Veendume selles.

1) Kui $a, b \in E_i \setminus \{p\}$, siis

$$\|g_i(a) - g_i(b)\| = \|f_i(a) - f_i(b)\| \leq \mathrm{Lip}(f_i)\, d(a,b) = d(a,b).$$

2) Kui $a = p$ ja $b = 0$, siis

$$\|g_i(a) - g_i(b)\| = \|g_i(p) - g_i(0)\| = \|d(p,0)\, y^*\| = d(p,0) = d(a,b).$$

3) Kui $a = p$ ja $b \in E_i \setminus \{0, p\}$, siis

$$\begin{aligned} \|g_i(a) - g_i(b)\| &= \|g_i(p) + f_i(0) - f_i(b)\| \leq \|g_i(p)\| + \|f_i(0) - f_i(b)\| \\ &= d(0,p) + \|f_i(0) - f_i(b)\| \leq d(0,p) + \mathrm{Lip}(f_i)\, d(0,b) \\ &\leq d(0,p) + d(0,p) + d(p,b) = 2d(0,p) + d(p,b), \end{aligned}$$

seega

$$\frac{\|g_i(a) - g_i(b)\|}{d(a,b)} \leq \frac{d(p,b) + 2d(0,p)}{d(p,b)} = 1 + \frac{2d(0,p)}{d(p,b)} < 1 + \varepsilon,$$

sest

$$\frac{d(0,p)}{d(p,b)} \leq \frac{d(0,p)}{d(0,a) - d(0,p)} < \frac{\frac{\delta\varepsilon}{2+\varepsilon}}{\delta - \frac{\delta\varepsilon}{2+\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Järelikult $\mathrm{Lip}(g_i) \leq 1 + \varepsilon$. Omaduse CEP tõttu leidub kujutuse g_i jätk $h_i \in \mathrm{Lip}_0(X, Y^*)$ nii, et $\mathrm{Lip}(h_i) = \mathrm{Lip}(g_i)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \langle h_i, m \rangle &= \sum_{a \in X} \langle h_i(a), m(a) \rangle = \langle h_i(p), m(p) \rangle + \langle h_i(0), m(0) \rangle \\ &= \left\langle d(0,p)\, y^*, \frac{y}{d(0,p)} \right\rangle + 0 = y^*(y) = 1. \end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)\, \|m_i + m\| &\geq \langle h_i, m_i + m \rangle = \langle h_i, m_i \rangle + \langle h_i, m \rangle \\ &= \langle f_i, m_i \rangle + \langle h_i, m \rangle = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

□

Kuhjumispunkti olemasolu ruumis X ei ole $\mathcal{M}(X,Y)$ oktaeedrilisuseks tarvilik. Kahes järgmises tulemuses saadakse ruumi $\mathcal{M}(X,Y)$ oktaeedrilisus eeldustel, mis ei nõua kuhjumispunkti olemasolu ruumis X.

Teoreem 2.8 ([2, lause 2.7]). *Olgu X meetriline ruum, Y Banachi ruum ja olgu paaril (X,Y^*) omadus CEP. Ruum $\mathcal{M}(X,Y)$ on oktaeedriline, kui*

$$\sup_{p,q\in X} d(p,q)=\infty. \tag{2.1}$$

Tõestus. Eeldame, et tingimus (2.1) on täidetud. Fikseerime vabalt $n\in\mathbb{N}$, $m_1,\dots,m_n\in S_{\mathcal{M}(X,Y)}$ ja $\varepsilon>0$. Näitame, et leidub $m\in S_{\mathcal{M}(X,Y)}$ nii, et iga $i\in\{1,\dots,n\}$ korral

$$\|m_i+m\|\geq\frac{2}{1+\varepsilon}.$$

Loeme ruumi X ühe kindla punkti nullpunktiks. Teoreemi 1.10 ja teoreemi piisavast arvust funktsionaalidest põhjal leidub iga $i\in\{1,\dots,n\}$ korral $f_i\in\mathrm{Lip}_0(X,Y^*)$ nii, et $\mathrm{Lip}(f_i)=1$ ja $\langle f_i,m_i\rangle=1$.

Eelduse (2.1) kohaselt leidub ruumi X elementide jada (p_k) nii, et

$$\lim_{k\to\infty} d(p_k,0)=\infty.$$

Järelikult iga $p\in X$ korral

$$d(p_k,p)\geq d(p_k,0)-d(0,p)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

Fikseerime sellise $k\in\mathbb{N}$, et iga $i\in\{1,\dots,n\}$ ja $p\in\mathrm{supp}(m_i)\cup\{0\}$ korral

$$d(p,0)+\|f_i(p)\|<\varepsilon\, d(p_k,p).$$

Fikseerime vabalt $y\in S_Y$ ja võtame

$$m=\frac{y}{d(0,p_k)}\,m_{p_k0}.$$

Lause 1.12 põhjal on $\|m\|=1$.

Näitame, et iga $i\in\{1,\dots,n\}$ korral

$$\|m_i+m\|\geq\frac{2}{1+\varepsilon}.$$

Teoreemi piisavast arvust funktsionaalidest põhjal leidub $y^*\in S_{Y^*}$ nii, et $y^*(y)=\|y\|=1$. Vaatleme ruumi X alamruumi $E_i=\mathrm{supp}(m_i)\cup\{0,p_k\}$ ning kujutust $g_i\colon E_i\to Y^*$,

$$g_i(a)=\begin{cases} d(0,p_k)\,y^*, & \text{kui } a=p_k;\\ f_i(a), & \text{kui } a\in E_i\setminus\{p_k\}.\end{cases}$$

Osutub, et $\mathrm{Lip}(g_i) \le 1+\varepsilon$. Veendume selles.

1) Kui $a, b \in E_i \setminus \{p_k\}$, siis

$$\|g_i(a) - g_i(b)\| = \|f_i(a) - f_i(b)\| \le \mathrm{Lip}(f_i)\, d(a,b) = d(a,b).$$

2) Kui $a = p_k$ ja $b \in E_i \setminus \{p_k\}$, siis

$$\begin{aligned}
\|g_i(a) - g_i(b)\| &\le \|g_i(p_k)\| + \|g_i(b)\| = d(p_k, 0) + \|f_i(b)\| \\
&\le d(p_k, b) + d(b, 0) + \|f_i(b)\| < d(p_k, b) + d(p_k, b)\,\varepsilon \\
&= (1+\varepsilon)\, d(a,b).
\end{aligned}$$

Järelikult $\mathrm{Lip}(g_i) \le 1+\varepsilon$. Omaduse CEP põhjal leidub kujutuse g_i jätk $h_i \in \mathrm{Lip}_0(X, Y^*)$ nii, et $\mathrm{Lip}(h_i) = \mathrm{Lip}(g_i)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\langle h_i, m\rangle &= \sum_{p\in X} \langle h_i(p), m(p)\rangle = \langle h_i(p_k), m(p_k)\rangle + \langle h_i(0), m(0)\rangle \\
&= \left\langle d(0, p_k)\, y^*, \frac{y}{d(0,p_k)} \right\rangle + 0 = y^*(y) = 1.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
(1+\varepsilon)\, \|m_i + m\| &\ge \langle h_i, m_i + m\rangle = \langle h_i, m_i\rangle + \langle h_i, m\rangle \\
&= \langle f_i, m_i\rangle + \langle h_i, m\rangle = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

□

Teoreem 2.9 ([2, lause 2.8]). *Olgu X meetriline ruum, Y Banachi ruum ja olgu paaril (X, Y^*) omadus CEP. Ruum $\mathcal{M}(X,Y)$ on oktaeedriline, kui*

$$\inf_{\substack{p,q\in X \\ p\neq q}} d(p,q) = 0. \tag{2.2}$$

Tõestus. Eeldame, et tingimus (2.2) on täidetud. Näitame, et $\mathcal{M}(X,Y)$ on oktaeedriline. Kui ruumis X leidub kuhjumispunkt, siis on $\mathcal{M}(X,Y)$ oktaeedriline teoreemi 2.7 põhjal. Seega eeldame edasises, et ruumis X kuhjumispunkti ei ole.

Olgu $n \in \mathbb{N}$, $m_1, \ldots, m_n \in S_{\mathcal{M}(X,Y)}$ ja $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub $m \in S_{\mathcal{M}(X,Y)}$ nii, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\|m_i + m\| \ge \frac{2}{1+\varepsilon}.$$

Kuna ruumis X ei ole kuhjumispunkti, siis leidub selline $r > 0$, et $B(p, r) = \{p\}$ iga $p \in \mathrm{supp}(m_i)$ ja $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral. Eelduse (2.2) kohaselt leiduvad ruumi X sellised elementide jadad (p_k) ja (q_k), et $p_k \neq q_k$ iga k korral ja

$$\lim_{k\to\infty} d(p_k, q_k) = 0.$$

Järelikult leidub selline k, et

$$d(p_k, q_k) < \frac{\varepsilon r}{2}.$$

Fikseerime vabalt $y \in S_Y$ ja võtame

$$m = \frac{y}{d(p_k, q_k)}\, m_{p_k q_k}.$$

Lause 1.12 põhjal on $\|m\| = 1$. Näitame, et iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\|m_i + m\| \geq \frac{2}{1 + \varepsilon}.$$

Vaatleme punkti q_k ruumi X nullpunktina. Teoreemi 1.10 ja teoreemi piisavast arvust funktsionaalidest põhjal leiduvad $f_i \in \mathrm{Lip}_0(X, Y^*)$ ja $y^* \in S_{Y^*}$ nii, et $\mathrm{Lip}(f_i) = 1$ ja $\langle f_i, m_i \rangle = 1$ ning $y^*(y) = \|y\| = 1$. Vaatleme ruumi X alamruumi $E_i = \mathrm{supp}(m_i) \cup \{p_k, q_k\}$ ja kujutust $g_i \colon E_i \to Y^*$,

$$g_i(a) = \begin{cases} d(p_k, q_k)\, y^*, & \text{kui } a = p_k; \\ f_i(a), & \text{kui } a \in E_i \setminus \{p_k\}. \end{cases}$$

Osutub, et $\mathrm{Lip}(g_i) \leq 1 + \varepsilon$. Veendume selles.

1) Kui $a, b \in E_i \setminus \{p_k\}$, siis

$$\|g_i(a) - g_i(b)\| = \|f_i(a) - f_i(b)\| \leq \mathrm{Lip}(f_i)\, d(a, b) = d(a, b).$$

2) Kui $a = p_k$ ja $b = q_k$, siis

$$\|g_i(a) - g_i(b)\| = \|d(p_k, q_k)\, y^*\| = d(p_k, q_k)\|y^*\| = d(a, b).$$

3) Kui $a = p_k$ ja $b \in E_i \setminus \{p_k, q_k\}$, siis

$$\begin{aligned} \|g_i(a) - g_i(b)\| &= \|d(p_k, q_k)\, y^* - f_i(b)\| \\ &\leq d(p_k, q_k)\, \|y^*\| + \|f_i(q_k) - f_i(b)\| \\ &\leq d(p_k, q_k) + \mathrm{Lip}(f_i)\, d(q_k, b) \\ &= d(p_k, q_k) + d(q_k, b) \\ &\leq d(p_k, q_k) + d(p_k, q_k) + d(p_k, b), \end{aligned}$$

seega

$$\frac{\|g_i(a) - g_i(b)\|}{d(a, b)} \leq \frac{d(p_k, b) + 2d(p_k, q_k)}{d(p_k, b)} \leq 1 + 2\frac{d(p_k, q_k)}{d(p_k, b)} < 1 + \varepsilon,$$

sest

$$\frac{d(p_k, q_k)}{d(p_k, b)} \leq \frac{\varepsilon r}{2r} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Järelikult $\mathrm{Lip}(g_i) \leq 1 + \varepsilon$. Omaduse CEP tõttu leidub kujutuse g_i jätk $h_i \in \mathrm{Lip}_0(X, Y^*)$ nii, et $\mathrm{Lip}(h_i) = \mathrm{Lip}(g_i)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\langle h_i, m\rangle &= \sum_{p\in X} \langle h_i(p), m(p)\rangle = \langle h_i(p_k), m(p_k)\rangle + \langle h_i(q_k), m(q_k)\rangle \\ &= \left\langle d(p_k, q_k)\, y^*, \frac{y}{d(p_k, q_k)} \right\rangle + 0 = y^*(y) = 1.\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)\,\|m_i + m\| &\geq \langle h_i, m_i + m\rangle = \langle h_i, m_i\rangle + \langle h_i, m\rangle \\ &= \langle f_i, m_i\rangle + \langle h_i, m\rangle = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

$\square$

Kasutatud kirjandus

[1] R. F. Arens, J. Eells, *On embedding uniform and topological spaces*, Pacific J. Math. **6** (1956), 397–403.

[2] J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez, A. Rueda Zoca, *Octahedrality in Lipschitz free Banach spaces*, (2015), `arXiv:1512.03558v1 [math.FA]`.

[3] Y. Benyamini, J. Lindenstraus, *Geometric Nonlinear Functional Analysis. Vol. 1*, Colloquium Publications **48**, American Mathematical Society, 2000.

[4] J. A. Chávez Domínguez, *Operator Ideals in Lipschitz and Operator Spaces Categories*, dissertation, Texas A&M University, 2012, `http://hdl.handle.net/1969.1/ETD-TAMU-2012-08-11642`.

[5] G. Godefroy, *Metric characterization of first Baire class linear forms and octahedral norms*, Studia Math. 95 (1989), 1–15.

[6] R. Haller, J. Langemets, M. Põldvere, *On duality of diameter 2 properties*, J. Conv. Anal. **22** (2015), 465–483.

[7] R. Nadel, *Diameeter-2 omadustega Banachi ruumide kaasruumide kirjeldused oktaeedrilisuse abil*, bakalaureusetöö, Tartu Ülikool, 2014, `http://hdl.handle.net/10062/42899`.

[8] H. Niglas, *Lipschitzi kujutused ja M-ideaalid*, magistritöö, Tartu Ülikool, 2014, `http://hdl.handle.net/10062/42888`.

[9] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[10] N. Weaver, *Lipschitz Algebras*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1999.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Andre Ostrak,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Lipschitzi-vaba Banachi ruumi oktaeedrilisus“, mille juhendajad on vanemteadur Rainis Haller ja dotsent Märt Põldvere

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **12.05.2016**