ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Материалы конференции

"Методы алгебры и функционального анализа при исследовании семейств операторов"

24-26 ноября 1978

ТАРТУ 1978

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Материалы конференции

"Методы алгебры и функционального анализа при исследовании семейств операторов"

24-26 ноября 1978

ТАРТУ 1978

Настоящая конференция посвящена 65-летию
со дня рождения проф. Г.Кангро

Гуннар Кангро (1913 - 1975) окончил Тартуский ун-т, работал ассистентом в Таллинском Политехн. ин-те в 1936-1941, во время Великой Отечественной войны работал стипендиатом Совнаркома ЭССР в Челябинском ин-те механ. сельск. хоз-ва и в Московском госуниверситете. С ноября 1944 года до конца жизни он работал в Тартуском госуниверситете, доцент (1946), д-р физ.-матем. наук (1948), профессор (1951), зав. каф. матем. анализа (1959-1975), член-корр. АН ЭССР (1961), засл.деятель науки ЭССР (1965).

Г.Кангро руководил более 20 аспирантами по алгебре, теории суммируемости, методам вычислений, рядам Фурье, теории приближения функций и др. Им написаны учебники по алгебре и математического анализу.

ОСТАВШИЕСЯ НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ ПРОФ. Г.КАНГРО

Э.Юримяэ

После смерти проф. Г.Кангро 25 декабря 1975 года сохранились его научные заметки более 400 страниц, которые были первоначально систематизированы тов. З.Рийвес и К.Рийвес. Эти заметки содержат различные научные идеи, фиксированные за многие годы, некоторые законченные результаты и одну почти готовую статью.

По этим сохранившимся заметкам можно судить о широком круге научных интересов проф. Г.Кангро. Оставшиеся заметки относятся в подавляющем большинстве к теории суммируемости и можно группировать в следующие 8 разделов.

1. Тауберовы теоремы. По этому направлению рассмотрены общая схема доказательства тауберовых теорем, принцип приведения в тауберовых теоремах, общие тауберовые теоремы для треугольных методов суммирования, тауберовы теоремы с остаточным членом и лакунарными тауберовыми условиями, обобщение метода Гофмана, тауберовы теоремы для метода Вороного—Нёрлунда, тауберовы теоремы с остаточным членом для λ^*-ограниченности, приведение тауберовых теорем на пространство n^λ и классификация тауберовых условий. Отметим, что последовательность $x = (\xi_n)$ называется λ^*-ограниченной, если $\xi_n = \mathcal{O}(\lambda_n)$, а $n^\lambda = \{x : \lambda_n \xi_n = o(1)\}$.

2. Множители суммируемости. Рассмотрены множители типов $(A, |B|)$, (A, A^λ) и $(|A|, A^\lambda)$, а также найдены связи между множителями типов (A, B) и (B^*, A^*), где A^* - пространство, сопряженное к A.

3. Суммирование ортогональных рядов. К этому разделу относятся следующие исследования: множители Вейля для ортогональных рядов относительно (R, p_n)-суммируемости со скоростью, суммируемость рядов Фурье и наилучшее приближение, обобщения теоремы Болгова и одна почти готовая статья "Сильная суммируемость ортогональных рядов со скоростью",

которая нами была подготовлена к печати и в ближайшее время выйдет в Известиях АН Эст. ССР.

4. Общая теория суммируемости была представлена проф. Г.Кангро в обзорной статье [1]. В дополнение к этому им изучены совершенность и характеристика общих методов суммирования, существование ограниченных элементов в поле суммируемости.

5. Свойства методов суммирования со скоростью. По этому направлению рассмотрены обобщение теоремы Виланского—Целлера относительно суммируемости ограниченных последовательностей, образ пространства c^λ, методы типа M и λ-консервативные методы, сохраняющие λ-ограниченность при всех λ.

6. Новые пространства, связанные с суммируемостью со скоростью. Рассмотрены множества

$$a^0 = \{x = (\xi_n) : \sum |\xi_n - \xi| < \infty\},$$
$$a^\lambda = \{x = (\xi_n) : \sum |\bar{\Delta} \lambda_n (\xi_n - \xi)| < \infty\},$$
$$\ell^\lambda = \{x = (\xi_n) : \sum \lambda_n |\xi_n - \xi| < \infty\}$$

и

$$c^{\lambda\lambda'} = \{x = (\xi_n) : \exists \lim \lambda'_n (\beta_n - \beta)\},$$

где $\beta_n = \lambda_n(\xi_n - \xi)$, $\beta = \lim \beta_n$ и $\xi = \lim \xi_n$. Эти множества топологизированы, изучены линейные непрерывные функционалы в полученных пространствах, а также матричные преобразования этих пространств.

7. Мерсеровы теоремы для λ-суммируемости.

8. Сильная суммируемость как числовых так и функциональных рядов.

Литература

1. Кангро Г.Ф., Теория суммируемости последовательностей и рядов. В сб. "Мат. анализ. Т. 12 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)", М., 1974, 5-70.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

ПСЕВДОСХОДИМОСТЬ И СУММИРУЕМОСТЬ ИТЕРАЦИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А.Меленцов и С.Рудаков

Пусть X – пространство Банаха и $\Phi \subset X^*$ – нормирующее множество (т.е. норма $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in \Phi\}$ эквивалентна норме пространства X).

Определение 1 (см.[3]). Последовательность элементов $\{x_n\}$ из X называется псевдосходящейся к элементу x_0, если для каждого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{f \in \Phi} \operatorname{card}\{n : |f(x_n - x_0)| \geqslant \varepsilon\} < \infty .$$

Очевидно, псевдосходящаяся последовательность сходится в слабой топологии пространства X и каждая сильно сходящаяся последовательность псевдосходится.

Определение 2. Будем говорить, что бесконечная матрица $C = (c_{mn})$ принадлежит классу $\Omega(C, 1)$, если для каждого m существует конечная строго возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ такая, что

$$c_{mn} = \begin{cases} 1/m, & \text{если } n = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ 0, & \text{если } n \neq n_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{cases}$$

Теорема 1. Последовательность $\{x_n\}$ из X тогда и только тогда псевдосходится к элементу x_0, когда она суммируема к этому элементу каждой матрицей из класса $\Omega(C, 1)$ в сильной топологии пространства X.

Определение 3. Будем говорить, что матрица $C = (c_{mn})$ из класса $\Omega(C, 1)$ принадлежит подклассу $\Omega(\mathcal{U}, C, 1)$, если каждому m соответствует натуральные числа a и d такие, что

$$c_{mn} = \begin{cases} 1/m, & \text{если } n = a + d(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Определение 4. Последовательность элементов $\{x_n\}$ из X будем называть почти псевдосходящейся к элементу x_0, если она суммируема к x_0 каждой матрицей из подкласса $\Omega(\mathcal{U}, C, 1)$ в сильной топологии пространства X.

Замечание. Известно обобщение теоремы Бака [4], в силу которого из суммируемости последовательности $\{x_n\}$ к элементу x_0 каждой матрицей из класса $\mathfrak{P}(C,1)$ в слабой топологии пространства X следует слабая сходимость такой последовательности. В связи с этим понятие слабой псевдосходимости вводится следующим образом.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ из X назовем слабо псевдосходящейся к x_0, если она суммируема к элементу x_0 каждой матрицей из подкласса $\mathfrak{P}(\mathfrak{U},C,1)$ в слабой топологии пространства X.

Определение 6. Пусть F - замкнутое выпуклое множество из строго выпуклого банахова пространства X. Отображение P из X в F, определяемое равенством

$$\|x-P(x)\|=\inf\{\|x-z\|:\quad z\in F\},$$

называют метрической проекцией пространства X на множество F.

Известно [1], что если X - строго выпуклое рефлексивное пространство, то P определено всюду на X и однозначно.

Определение 7. Пусть C - множество из банахова пространства X. Отображение $T: C\to C$ называют нерастягивающим, если для каждой пары элементов x и y из C имеет место неравенство

$$\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|.$$

В этом случае будем писать $T\in \text{cont}\, C$.

Определение 8. Точку x называют неподвижной точкой отображения T множества C в себя, если $Tx=x$. Через $F(T)$ обозначим совокупность всех неподвижных точек отображения T.

Известно [2] следующее свойство множества $F(T)$.

Теорема 2. Пусть X - строго выпуклое пространство Банаха, а множество $C\subset X$ замкнутое и выпуклое. Если $T\in \text{cont}\, C$ и $F(T)\neq\varnothing$, то $F(T)$ является замкнутым выпуклым множеством.

Теорема 3. Пусть X - равномерно выпуклое банахово пространство. Если C - замкнутое выпуклое множество из X и $T \in \in \operatorname{cont} C$, причем $F(T) \neq \emptyset$, то последовательность метрических проекций $\{PT^n x\}$ итераций $\{T^n x\}$ на множество $F(T)$ сходится к элементу $x_0 \in F(T)$ в сильной топологии пространства X.

В частности, теорема 3 верна, если X является пространством Гильберта.

Определение 9. Точку x называем псевдопредельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если существует матрица $A = (a_{mn}) \in \mathfrak{P}(C,1)$ такая, что x является предельной точкой последовательности $A(x_n)$ в слабой топологии пространства X.

Введение понятия псевдопредельной точки оправдывается следующим результатом.

Теорема 4. Если C - замкнутое выпуклое множество из пространства Гильберта H, $T \in \operatorname{cont} C$, $F(T) \neq \emptyset$ и $x_0 = \lim PT^n x$, то метрическая проекция на $F(T)$ каждой псевдопредельной точки последовательности $\{T^n x\}$ совпадает с точкой x_0.

Теорема 5. Множество всех псевдопредельных точек оператора $T \in \operatorname{cont} C$ (где C - замкнутое выпуклое множество), действующего в пространстве Банаха X является замкнутым выпуклым множеством.

Свойство псевдопредельных точек, зафиксированное теоремой 4, приводит к следующему алгоритму отыскания неподвижных точек оператора.

Пусть выполнены условия теоремы 4. Пусть y_0 и θ - различные псевдопредельные точки последовательности итераций $\{T^n x\}$ оператора, действующего в действительном пространстве Гильберта H и $\|y\| = 1$.

Рассмотрим оператор

$$\Phi(\lambda) = (T(\lambda y), y).$$

Легко видеть, что $\Phi \in \operatorname{cont} R^1$. Пусть λ_0 - неподвижная точка оператора Φ. Тогда $\lambda_0 y$ - неподвижная точка оператора T.

Определение 10. Пусть $T \in \mathrm{cont}\, C$ и $x \in C$. Множество

$$\omega_p(x) = \{ y \in C : \exists A \in \Omega(\mathcal{U}, C, 1),\ y \text{ - предельная точка в слабой топологии пространства } X \}$$

будем называть слабым псевдопредельным множеством отображения T в точке x.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 4. Последовательность итераций $\{T^n x\}$ в том и только в том случае слабо псевдосходится к элементу y, если $F(T) \neq \emptyset$ и $\omega_p(x) \in F(T)$.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 4. Если отображение T вполне непрерывно и $\{T^n x - T^{n+1} x\}$ почти псевдосходится к нулю, то последовательность итераций $\{T^n x\}$ почти псевдосходится к точке $p \in F(T)$.

Литература

1. Власов Л.П., Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах. Успехи мат. наук, 1973, 28, № 6, 4-55.
2. Иванов А.А., Неподвижные точки отображений метрических пространств. Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. мат. ин-та, 1976, 66, 5-102.
3. Рудаков С.А., Суммируемость слабо сходящихся последовательностей в банаховых пространствах. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1975, 9, № 2, 103-110.
4. Buck, R., A note on subsequences. Bull. Amer. Math. Soc., 1943, 49, 898-899.

Уральский государственный университет

Кафедра теории функций

ИЗОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Е.Горин

1. Ряд классических дифференциально-разностных неравенств (С.Н.Бернштейна, С.М.Никольского, С.Б.Стечкина, Боаса, Бора—Фавара и др.), играющих важную роль в теории приближений, теоремах вложения и т.д., имеет, как оказывается, простой алгебраический смысл, заключающийся в том, что нормы некоторых операторов, связанных с оператором дифференцирования, совпадают с их спектральными радиусами. К числу таких неравенств относится, например, неравенство

$$\sup_{\mathbb{R}} |f(x+\tfrac{1}{2}h) - f(x-\tfrac{1}{2}h)| \leq 2\sin\tfrac{1}{2}\sigma h \ \sup_{\mathbb{R}} |f(x)|,$$

справедливое при $\sigma h \leq \pi$ для ограниченных на вещественной оси $\mathbb{R}$ целых функций f экспоненциального типа $\leq \sigma$, в частности, для тригонометрических полиномов степени $\leq \sigma$, предельный случай $\sup_{\mathbb{R}} |f'(x)| \leq \sigma \sup_{\mathbb{R}} |f(x)|$ этого неравенства, его многомерные варианты и L^p-аналоги. Для некоторых случаев это обстоятельство отмечалось раньше (см., в частности, [3-6]). В данном сообщении мы опишем дальнейшие продвижения.

2. Рассматриваемые в дальнейшем банаховы алгебры A суть комплексные банаховы алгебры с единицей и нормой, подчиненной условиям $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ и $\|1\| = 1$. Через $|a|$ обозначается спектральный радиус элемента $a \in A$, а через $\mathrm{Spec}\,(a)$ - его спектр. Если алгебра A коммутативна, то $\hat{a}$ - преобразование Гельфанда (или преобразование Фурье). Если G - локально компактная абелева группа, то $\hat{G}$ - группа унитарных характеров, $M(G)$ - банахова алгебра регулярных борелевских мер на G со сверткой в качестве умножения. Известно, что алгебра $M(G)$ полупроста, но, вообще говоря, не регулярна по Шилову и не симметрична. Если X - банахово пространство, то через $L(X)$ обозначается алгебра всех ограниченных линейных операторов на X с обычной нормой.

3. Пусть $T: g \to T_g$ - сильно непрерывное изометрическое ($\|T_g\| = 1$) представление локально компактной абелевой группы G (обратимыми) операторами банахова пространства X. Такое представление по формуле

$$T_\mu x = \int_G T_g x \, d\mu(g), \qquad \mu \in M(G), \ x \in X,$$

индуцирует представление $T: M(G) \to L(X)$ алгебры $M(G)$. Интересующий нас вопрос в своей общей постановке заключается в выяснении условий, при которых $\|T_\mu\| = |T_\mu|$.

Пусть $\mathrm{Spec}(T)$ - оболочка идеала $\mathrm{Ker}\, T$ в пространстве максимальных идеалов алгебры $M(G)$. Аналогично ([2], стр.59) легко показать, что исходное представление тогда и только тогда равномерно непрерывно, когда $\mathrm{Spec}(T) \subset \hat{G}$. Заметим, что при $G = \mathbb{R}^n$ равномерно непрерывному представлению T отвечают такие однозначно определенные коммутирующие элементы $a_1, \dots, a_n \in L(X)$, что

$$T_t = \exp \sum_1^n i t_k a_k, \qquad t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

При этом, если преобразование Фурье $\hat{\mu}$ меры $\mu \in M(G)$ в некоторой окрестности компакта $\mathrm{Spec}(T) \subset \hat{G} = \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ совпадает с полиномом p, то $p(a_1, \dots, a_n) = T_\mu$.

4. Следующая лемма аналогична теореме об отображении спектров из [2].

<u>Лемма.</u> Если A - такая замкнутая подалгебра в алгебре $M(G)$, что $(A / A \cap \mathrm{Ker}\, T)^\wedge$ регулярна по Шилову, то для всех $\mu \in A$

$$\mathrm{Spec}(T_\mu) = \hat{\mu}(\mathrm{Spec}(T)).$$

Очевидно, что в лемме можно положить $A = L^1(G)$. Далее, если представление равномерно непрерывно, то лемма выполняется для всей алгебры $M(G)$, так как в этом случае сужения $M(G)^\wedge$ и $L^1(G)^\wedge$ на $\mathrm{Spec}(T)$ совпадают.

<u>Теорема 1</u>. Предположим, что выполняются условия леммы и $\mu \in A$. Пусть

$$\max_{\mathrm{Spec}(T)} |\hat{\mu}(x)| = |\hat{\mu}(x_0)|, \qquad x_0 \in \mathrm{Spec}(T).$$

Если существует такая мера μ_0, что $\|\mu_0\| = 1$ и $\mu - \hat{\mu}(x_0)\mu_0 \in \mathrm{Ker}\, T$, то $\|T_\mu\| = |T_\mu|$.

Сформулированная теорема при всей своей простоте удобна в приложениях. Если, например, $\operatorname{Spec}(T)\subset\hat{G}$, $x_0=0$, $\hat{\mu}(0)=1$ и $\operatorname{Spec}(T)$ есть множество спектрального синтеза, то достаточно убедиться, что $\hat{\mu}$ продолжается со $\operatorname{Spec}(T)$ до положительно определенной функции на $\hat{G}$ (т.е.характеристической функции вероятностного распределения), а это позволяет использовать вероятностные критерии типа критерия Пойя. Упомянутые вначале классические неравенства легко получаются на этом пути.

5. Любопытно, что теорема 1 имеет некоторое обращение, к которому мы теперь переходим.

Рассмотрим равномерно непрерывное представление $T: G\to L(X)$. Пусть $\mathcal{B}$ – замкнутая подалгебра в $L(X)$, порожденная операторами T_g. Совокупность функций на G вида $g\to\psi(T_g)$, $\psi\in\mathcal{B}^*$, образует подпространство $E\subset CL^\infty(G)$, инвариантное относительно сдвигов. Это подпространство наделяется нормой из $\mathcal{B}^*$. Алгебра $\mathcal{B}$ изоморфна аналогичной алгебре, индуцированной сужением регулярного представления на E. Очевидно, что E содержит все характеры, соответствующие точкам $\operatorname{Spec}(T)$ (гомоморфизмам $\mathcal{B}$ в поле комплексных чисел). Представление T будем называть достаточным, если нормы линейных комбинаций таких характеров в E совпадают с их $\sup$-нормами на G.

<u>Теорема 2</u>. Пусть T – равномерно непрерывное достаточное представление, $\mu\in M(G)$, $0\in\operatorname{Spec}(T)$ и $\|T_\mu\| = |T_\mu| = \hat{\mu}(0) = 1$.

Тогда $\hat{\mu}|\operatorname{Spec}(T)=\hat{\mu}_0|\operatorname{Spec}(T)$, где μ_0 – подходящая вероятностная мера.

6. Пример. Рассмотрим пространство целых функций $f(z)$, $z\in\mathbb{C}^n$, ограниченных на $\mathbb{R}^n$, для которых

$$|f(z)|\leqslant C\exp\Big(\sum_1^n|y_k|^p\Big)^{1/p},\qquad y=\operatorname{Im} z,$$

с $\sup$-нормой по $\mathbb{R}^n$. Пусть Δ – оператор Лапласа. При $n\geqslant 2$ совпадение $\|\Delta\|=|\Delta|$ имеет место тогда и только тогда, когда $p=1$ или $p=\infty$.

Литература

1. Горин Е.А., Об исследованиях Г.Е.Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии. Успехи мат. наук, 1978, 33, № 4, 169-188.

2. Кацнельсон В.Э., У консервативного оператора норма равна спектральному радиусу. Мат. исследования, 1970, 5, № 3, 186-189.

3. Любич Ю.И., Мацаев В.И., Фельдман Г.М., О представлениях с отделимым спектром. Функц. анализ и его прил., 1973, 7, № 2, 52-61.

4. Browder, A., On Bernsteins inequality and the norm of Hermitian operators. Amer. Math. Monthly, 1971, 78, 871-873.

5. König, H., A functional calculus for Hermitian elements of complex Banach algebras. Arch. Math., 1977, 28, № 4, 422-430.

6. Sinclair, A.M., The norm of a Hermitian element in a Banach algebra. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 28, 446-450.

Московский государственный университет

Кафедра теории функций и функционального анализа

ОПИСАНИЕ ЗАМКНУТЫХ РЕГУЛЯРНЫХ ИДЕАЛОВ В АЛГЕБРАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

М.Абель

1. Пусть A - локально выпуклая алгебра над $\mathbb{C}$. Через $J_l(A)$, $J_r(A)$ и $J(A)$ будем обозначать множество всех замкнутых регулярных соответственно левых, правых и двусторонних идеалов алгебры A, а через $\mathfrak{M}_l(A)$, $\mathfrak{M}_r(A)$ и $\mathfrak{M}(A)$ - соответственно подмножества максимальных идеалов в них. Далее, пусть X - топологическое пространство, $C(X,A)$ - алгебра всех непрерывных A-значных функций, определенных на X, а $C_b(X,A)$ и $C_c(X,A)$ - соответственно алгебра всех ограниченных функций в $C(X,A)$ и алгебра тех функций $f \in C(X,A)$, для которых образ $f(X)$ относительно компактен в A. В частном случае, когда $A=\mathbb{C}$ через $C(X)$ обозначим алгебру $C(X,\mathbb{C})$, а через $C_b(X)$ - алгебру $C_b(X,\mathbb{C}) = C_c(X,\mathbb{C})$. Алгебраические операции на $C(X,A)$, $C_b(X,A)$ и $C_c(X,A)$ определим поточечно, алгебра $C(X,A)$ наделим топологией компактной сходимости на X, а алгебры $C_b(X,A)$ и $C_c(X,A)$ - топологией равномерной сходимости на X.

В статье [2] дается описание всех замкнутых односторонних и двусторонних идеалов алгебры $C(X,A)$, если X - отделимый компакт, и алгебры $C_c(X,A)$, если X - вполне регулярное T_1-пространство, предполагая A локально выпуклой алгеброй с непрерывным обратным. Кроме того, дается описание всех замкнутых максимальных односторонних и двусторонних идеалов алгебр $C(X,A)$ и $C_c(X,A)$ для вполне регулярного пространства (соответственно T_1-пространства) X и локально выпуклой алгебры A с непрерывным обращением. Целью данной заметки является обобщение результатов статьи [2] на случай алгебр без единицы.

2. Пусть A' - алгебра, полученная из алгебры A без единицы топологическим присоединением единицы.

<u>Лемма 1</u>. Пусть X - топологическое пространство и A - локально выпуклая алгебра без единицы. Пусть далее J_1, J_2

и J_3 – замкнутые регулярные левый $C(X)$-идеал, правый $C(X)$-идеал и двусторонний идеал алгебры $C(X,A)$, а u_k – единица в $C(X,A)$ по идеалу J_k при $k=1,2,3$. Тогда множества

$$\tilde{J}_1 = \{f \in C(X,\tilde{A}) : fu_1 \in J_1\},$$

$$\tilde{J}_2 = \{f \in C(X,\tilde{A}) : u_2 f \in J_2\}$$

и

$$\tilde{J}_3 = \{f \in C(X,\tilde{A}) : u_3 f, fu_3 \in J_3\}$$

образуют в $C(X,\tilde{A})$ замкнутые соответственно левый, правый и двусторонний идеалы, причем u_k является в $C(X,\tilde{A})$ единицей по идеалу $\tilde{J}_k$ при $k=1,2,3$.

По следствию 1 и теореме 2 статьи [2], применяя лемму 1, убеждается в том, что справедлива

Теорема 1. Пусть X – отделимый компакт и A – локально выпуклая алгебра с непрерывным квазиобратным. Тогда

а) каждый замкнутый регулярный левый $C(X)$-идеал (правый $C(X)$-идеал и двусторонний идеал) J алгебры $C(X,A)$ определяет непустое замкнутое подмножество $S(J) \subseteq X$ и идеалы $I(x) \in \mathcal{J}_\ell(A)$ (соответственно $I(x) \in \mathcal{J}_r(A)$ и $I(x) \in \mathcal{J}(A)$) такие, что[2]

$$J = \bigcap \{J(x, I(x)) : x \in S(J)\};$$

б) каждый замкнутый регулярный максимальный левый $C(X)$-идеал (правый $C(X)$-идеал, двусторонний идеал) $\mathcal{M}$ определяет $x \in X$ и $M \in \mathfrak{M}_\ell(A)$ (соответственно $M \in \mathfrak{M}_r(A)$ и $M \in \mathfrak{M}(A)$) такие, что $\mathcal{M} = J(x, M)$.

Замечание 1. Если локально выпуклая алгебра A обладает свойством

(α) для каждого $a \in A$ и окрестности нуля O алгебры A существуют элементы b_1 и b_2 такие, что $b_1 a, ab_2 \in a + O$,

то каждый замкнутый односторонний идеал алгебры $C(X,A)$ является $C(X)$-идеалом. Поэтому теорема 1 дает описание всех

---

[1] Левый (правый) идеал J алгебры A называется B-идеалом, если J является двусторонним B-модулем.

[2] Здесь $J(x,B) = \{f \in C(X,A) : f(x) \in B\}$ при каждом $B \subset A$.

замкнутых регулярных (в частности, максимальных) идеалов алгебры $C(X,A)$, если алгебра[3] A обладает свойством (α).

3. Пусть теперь X - вполне регулярное T_1-пространство и ν - всюду плотное вложение X в стоун-чеховское расширение βX пространства X. Как известно, каждая функция $f \in C_c(X,A)$ имеет такое продолжение $f^\beta \in C(\beta X,A)$, что $f = f^\beta \circ \nu$. В статье [1], стр. 19, показано, что отображение $f \to f^\beta$ является топологическим изоморфизмом алгебр $C_c(X,A)$ и $C(\beta X,A)$ для любой локально выпуклой алгебры A. Учитывая это по теореме 1 справедлива

Теорема 2. Пусть X - вполне регулярное T_1-пространство и A - локально выпуклая алгебра с непрерывным квазиобратным. Тогда

а) каждый замкнутый регулярный левый $C_b(X)$-идеал (правый $C_b(X)$-идеал, двусторонний идеал) J алгебры $C_c(X,A)$ определяет непустое замкнутое подмножество $S(J) \subseteq \beta X$ и идеалы $I(x) \in \mathcal{J}_\ell(A)$ (соответственно $I(x) \in \mathcal{J}_r(A)$ и $I(x) \in \mathcal{J}(A)$) такие, что[4]

$$J = \bigcap \{ \mathcal{J}(x, I(x)) \; : \; x \in S(J) \};$$

б) каждый замкнутый регулярный максимальный левый $C_b(X)$-идеал (правый $C_b(X)$-идеал, двусторонний идеал) $\mathcal{M}$ определяет $x \in \beta X$ и $M \in \mathfrak{M}_\ell(A)$ (соответственно $M \in \mathfrak{M}_r(A)$ и $M \in \mathfrak{M}(A)$) такие, что $\mathcal{M} = \mathcal{J}(x, M)$.

Замечание 2. Если локально выпуклая алгебра A обладает свойством (α), то каждый замкнутый односторонний идеал алгебры $C_c(X,A)$ является $C_b(X)$-идеалом. В силу этого, теорема 2 дает описание всех замкнутых (в частности, максимальных) идеалов алгебры $C_c(X,A)$, если алгебра A обладает свойством (α).

4. Будем говорить, что топологическая алгебра обладает свойством ядерной оболочности, если каждый замкнутый регулярный левый (правый и двусторонний) идеал этой алгебры яв-

[3] В случае, когда A - банахова алгебра, обладающая свойством (α), теорема 1 частично известна (см.[3], стр.397).

[4] Здесь $\mathcal{J}(x, B) = \{ f \in C_c(X,A) : f^\beta(x) \in B \}$ при любом $B \subset A$.

ляется пересечением всех содержащих его замкнутых регулярных максимальных левых (соответственно правых и двусторонних) идеалов.

Учитывая замечания 1 и 2, при помощи теорем 1 и 2 получаем

Следствие. Пусть A – локально выпуклая алгебра с непрерывным квазиобратным, обладающая свойством (α). Тогда алгебры $C(X,A)$, где X – отделимый компакт, и $C_c(X,A)$, где X – вполне регулярное T_1-пространство, обладают свойством ядерной оболочности тогда и только тогда, когда этим свойством обладает алгебра A.

Литература

1. Абель М., Описание линейных мультипликативных функционалов в алгебрах непрерывных функций.. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 14–21.
2. Абель М., Описание замкнутых идеалов в алгебрах непрерывных векторнозначных функций (в печати).
3. Наймарк М.А., Нормированные кольца. Москва, 1968.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

ТОЧЕЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ЛИФТИНГАМИ

А.Монаков-Роговкин

Пусть (T,Σ,μ) - пространство с мерой, обладающее свойством прямой суммы ([1], стр.70), $M=M(T,\Sigma,\mu)$ - пространство всех измеримых вещественных функций на T с поточечными алгебраическими операциями и поточечным отношением порядка, а $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N}_0$ соответственно - идеалы всех μ-пренебрежимых функций из M и множеств из Σ. Факторпространства $M/\mathcal{N}$ и $\Sigma/\mathcal{N}_0$, снабженные естественными операциями и отношением порядка, обозначим соответственно через $S = S(T,\Sigma,\mu)$ и Ω. Пусть $\pi: M \to S$ и $\pi_0: \Sigma \to \Omega$ - канонические гомоморфизмы; мы полагаем $\pi(f)=\tilde{f}$ и $\pi_0(A)=\hat{A}$. Лифтингом векторной подрешетки X пространства S называется такой решеточный гомоморфизм $\rho: X \to \pi^{-1}(X)$, что $\pi\circ\rho$ - тождественное отображение. Под лифтингом пространства (T,Σ,μ) понимается пара: лифтинг ρ пространства $L^\infty(T,\Sigma,\mu)$ всех ограниченных функций из S, удовлетворяющий условию $\rho(\tilde{\chi}_T)=\chi_T$ (где χ_T - характеристическая функция множества T), и лифтинг на множествах, определенный соотношением

$$\chi_{\rho(\hat{A})} = \rho(\tilde{\chi}_A), \tag{1}$$

где $A\in\Sigma$. Обозначим через $\Lambda(T,\Sigma,\mu)$ совокупность всех лифтингов пространства (T,Σ,μ).

Пусть Q - стоуновский бикомпакт булевой алгебры Ω, $\mathfrak{A}$ - алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств Q, $\mathcal{M}_0$ - совокупность всех множеств первой категории в Q и Ξ - совокупность всех симметрических разностей $E\Delta H$, где $E\in\mathfrak{A}$ и $H\in\mathcal{M}_0$. Обозначим через $\lambda_0:\Omega\to\mathfrak{A}$ и $\lambda: L^\infty(T,\Sigma,\mu)\to C(Q)$ канонические изоморфизмы и пусть (Q,Ξ,ν) есть пространство с мерой, полученное путем естественного перенесения меры μ на σ-алгебру Ξ.

Если $\rho\in\Lambda(T,\Sigma,\mu)$, то отображение

$$\varphi_{(\rho,t)} : \check{f} \mapsto \rho(\tilde{f})(t),$$

3

где $\tilde{f} \in L^\infty(T,\Sigma,\mu)$, $t \in T$, есть характер алгебры L^∞, который мы отождествим с единственным элементом z из Q, для которого $\varphi_{(\rho,t)}(\tilde{f}) = \lambda(\tilde{f})(z)$ при всех $\tilde{f} \in L^\infty$. Тогда отображение $\varphi_\rho : t \mapsto \varphi_{(\rho,t)}$ есть измеримое отображение T в Q такое, что $\rho(\tilde{f}) = \lambda(\tilde{f}) \circ \varphi_\rho$ для всех $\tilde{f} \in L^\infty(T,\Sigma,\mu)$ (относительно свойств отображений φ_ρ см.[2]).

Теорема 1. Пусть $\varphi : T \to Q$ есть отображение со следующими свойствами: 1) $\varphi^{-1}(E) \in \Sigma$ для любого $E \in \mathfrak{A}$; 2) если $A \in \Sigma$, $\tilde{A} \neq \tilde{\emptyset}$, то $A \cap \varphi^{-1}(\lambda_0(\tilde{A})) \neq \emptyset$. Тогда $\varphi = \varphi_\rho$ для некоторого $\rho \in \Lambda(T,\Sigma,\mu)$.

Теорема 2. Пусть $\rho \in \Lambda(T,\Sigma,\mu)$. Если $\varphi = \varphi_\rho$, то соотношение

$$\omega(\tilde{E}) = \widetilde{\varphi^{-1}(E)}, \tag{2}$$

где $E \in \Xi$, определяет изоморфное отображение $\Xi/\mathcal{M}_0$ на Ω. Обратно, если $\varphi : T \to Q$ есть точечное отображение, индуцирующее по формуле (2) некоторый изоморфизм $\Xi/\mathcal{M}_0$ на Ω, то существуют $\rho \in \Lambda(T,\Sigma,\mu)$ и гомеоморфизм δ бикомпакта Q на себя такие, что $\varphi = \delta \circ \varphi_\rho$.

Теорема 3. Для любых $\rho \in \Lambda(T,\Sigma,\mu)$ и $\sigma \in \Lambda(Q,\Xi,\nu)$ существует единственное $\tau \in \Lambda(T,\Sigma,\mu)$, для которого $\varphi_\tau = \varphi_\sigma \circ \varphi_\rho$.

Если T есть бикомпактное отделимое пространство и μ - существенная мера на T, порожденная положительной мерой Радона μ_0 с носителем $Supp\, \mu_0 = T$, то существует отображение $w : Q \to T$ со следующими свойствами: 1) если $A \in \Sigma$, то $w^{-1}(A) \in \Xi$; 2) множество $F \in \Sigma$ принадлежит $\mathcal{N}_0$ тогда и только тогда, когда $w^{-1}(F) \in \mathcal{M}_0$; 3) для любого $E \in \Xi$ существует $A \in \Sigma$ такое, что $\widetilde{w^{-1}(A)} = \tilde{E}$ (см.[3]). Таким образом, точечное отображение w индуцирует изоморфизм Ω на $\Xi/\mathcal{M}_0$.

Теорема 4. Пусть $\rho \in \Lambda(T,\Sigma,\mu)$, где T - бикомпактное пространство с существенной мерой Радона μ. Тогда существует единственное $\sigma \in \Lambda(Q,\Xi,\nu)$, для которого $\varphi_\sigma = \varphi_\rho \circ w$.

Теорема 5. Если T есть бикомпактное пространство с существенной мерой Радона μ и $\rho, \sigma \in \Lambda(T,\Sigma,\mu)$, то существует единственное $\tau \in \Lambda(T,\Sigma,\mu)$, для которого $\varphi_\tau = \varphi_\sigma \circ w \circ \varphi_\rho$.

Теорема 6. Пусть P - плотное подмножество в Q. Рассмотрим следующие утверждения:

(1) Существует $\rho \in \Lambda(T,\Sigma,\mu)$, для которого $\varphi_\rho(T) \subset P$.

(2) Существует $\sigma \in \Lambda(Q,\Xi,\nu)$, для которого $\varphi_\sigma(Q) \subset P$.

Тогда $(2) \Rightarrow (1)$. Кроме того, если T - бикомпактное пространство с мерой Радона, то утверждения (1) и (2) равносильны.

Пусть $\eta : S(T,\Sigma,\mu) \to S(Q,\Xi,\nu)$ есть канонический изоморфизм.

Теорема 7. Пусть X - порядковый идеал пространства $S(T,\Sigma,\mu)$. Рассмотрим следующие утверждения:

(1) Существует лифтинг пространства X.

(2) Существует лифтинг пространства $\eta(X)$.

Тогда $(2) \Rightarrow (1)$. Кроме того, если T - бикомпактное пространство с мерой Радона, то утверждения (1) и (2) равносильны.

В заключение приводится ряд нерешенных проблем.

Литература

1. Канторович Л.В., Акилов Г.П., Функциональный анализ. Москва, 1977.
2. Монаков-Роговкин А.К., Об одном способе сравнения лифтингов. В сб.: "Работы по мат. и физ.", Таллин, 1974, 15 - 34.
3. Ionescu Tulcea, A., Ionescu Tulcea, C., Topics in the theory of lifting. Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

Таллинский педагогический институт
Кафедра математики

О СУММИРУЕМОСТИ ПО МЕРЕ

Т.Лейгер

1. Рассматриваются обобщенные матричные методы суммирования $A=(A_{nk})$, заданные преобразованием[1]

$$\eta_n = \sum_k A_{nk}\xi_k , \tag{1}$$

где $\xi_k \in X$ и $\eta_n \in Y$, а A_{nk} - непрерывные линейные операторы из F-пространства X в F-пространство Y, т.е. $A_{nk} \in L(X,Y)$. Пусть $c(X)=\{x=(\xi_k):\ \exists \lim \xi_k = \xi\}$ и $c_A(X)=\{x=(\xi_k):\ \exists \lim \eta_n = \eta\}$. Метод A называется консервативным, если $c_A(X)\supset c(X)$, и L-регулярным, если $\eta = L\xi$ для всех $x\in c(X)$ и некоторого $L\in L(X,Y)$. В $c(X)$ и $c_A(X)$ естественным образом определяется FK-топология, т.е. полная метризуемая линейная топология с покоординатной сходимостью.

Теорема 1. Оператор $F\in L(c(X),Y)$ в точности тогда, когда

$$Fx = \phi\xi + \sum \phi_k(\xi_k - \xi),$$

где $\phi,\ \phi_k \in L(X,Y)$ и

$$\Big\{\sum_{k=0}^{m} \phi_k \zeta_k:\ m=0,1,\dots;\ \zeta_k\in B\Big\}\in \mathrm{bd}\,Y \quad \forall B\in \mathrm{bd}\,X,$$

а $\mathrm{bd}\,X$ - класс всех ограниченных подмножеств пространства X.

Теорема 2. Метод суммирования $A=(A_{nk})$ является консервативным в точности тогда, когда выполняются условия

$$\exists \lim_n A_{nk}\xi = a_k\xi \qquad \forall \xi\in X, \tag{2}$$

$$\exists \lim_n \sum_k A_{nk}\xi = a\xi \qquad \forall \xi\in X, \tag{3}$$

$$\Big\{\sum_{k=0}^{m} A_{nk}\zeta_k:\ m,n=0,1,\dots;\ \zeta_k\in B\Big\}\in \mathrm{bd}\,Y \qquad \forall B\in \mathrm{bd}\,X \tag{4}$$

Метод $A=(A_{nk})$ является L-регулярным, если выполняются условия (2),(3) и (4) с $a_k=\theta$ и $a=L$.

Метод $A=(A_{nk})$ называется обратимым на $c(Y)$, если для каждой $y \in c(Y)$ система уравнений (1) имеет единственное решение.

2. Пусть (S, Σ, μ) - пространство с конечной мерой μ и $\xi_k = \xi_k(t)$ - измеримые функции на S. Мы говорим, что последовательность $x=(\xi_k)$ суммируема по мере методом $A=(a_{nk})$ с $a_{nk} \in \mathbb{R}$, если последовательность $y=(\eta_n)$ сходится по мере μ. В случае $S=[0,1]$ и μ - мера Лебега Вихманн [1] показал, что

1) метод $A=(a_{nk})$ суммирует все сходящиеся по мере последовательности в точности тогда, когда A суммирует все сходящиеся числовые последовательности (т.е. $c_A \supset c$) и (a_{nk}) - матрица конечного типа, т.е. существует $N > 0$, что число ненулевых элементов в каждой строке матрицы (a_{nk}) не больше чем N;

2) ряд $\sum a_k \xi_k$ сходится для всех сходящихся последовательностей $x=(\xi_k)$ в точности тогда, когда $(a_k) \in E^\infty$, т.е. $a_k \neq 0$ для конечного числа индексов k.

Пусть X - некоторое F-пространство, а обобщенный метод суммирования задан преобразованием (1), где $A_{nk} = a_{nk} \in \mathbb{R}$. Какими свойствами должно обладать X, чтобы из включения $c_A(X) \supset c(X)$ следовало, что (a_{nk}) - матрица конечного типа?

Пусть $\zeta_k \in X$. . Рассмотрим следующие условия

$$(\lambda_k \zeta_k) \in bd\, X \qquad \forall\, (\lambda_k) \subset \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$(\lambda_{ik} \zeta_k) \in bd\, X \qquad \forall\, (\lambda_{ik}) \subset \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$\zeta_0 + \cdots + \zeta_n \notin bd\, X. \tag{7}$$

Из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. Если в F-пространстве X существует последовательность (ζ_k) с $\zeta_k \neq \theta$, которая удовлетворяет условиям (5) и (7), то ряд $\sum a_k \xi_k$ сходится при всех $x \in c(X)$ в точности тогда, когда $(a_k) \in E^\infty$. Если (ζ_k) удовлетворяет еще условию (6), то $c_A(X) \supset c(X)$ в точности тогда, когда $c_A \supset c$ и (a_{nk}) - матрица конечного типа.

3. Так как пространство $TM(S,\Sigma,\mu)$ всех вполне измеримых на (S,Σ,μ) функций является F-пространством, сходимость в котором равносильна сходимости по мере, то суммируемость по мере является, с одной стороны, конкретным примером обобщенной суммируемости, где $X = Y = TM = TM(S,\Sigma,\mu)$ и (A_{nk}) - числовая матрица (a_{nk}), а, с другой стороны, обобщением понятия сходимости по мере. Допустим, что (S,Σ,μ) удовлетворяет следующему условию

(W) для любого числа $\varepsilon>0$ существуют n и $E_k\in E$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ с $\mu(E_k)<\varepsilon$ и $S = E_0\cup\ldots\cup E_{n-1}$.

Например, если $S=[0,1]$ и μ - мера Лебега, то для $\varepsilon>0$ положим $E_0=[0,1/n)$, $E_1=[1/n, 2/n),\ldots$ $\ldots, E_{n-1}=[1-1/n, 1]$, где $n=[1/\varepsilon]+1$.

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. Если (S,Σ,μ) удовлетворяет условию (W), то ряд $\sum a_k\xi_k$ сходится при всех $x\in c(TM)$ в точности тогда, когда $(a_k)\in E^\infty$, а $c_A(TM)\supset c(TM)$ в точности тогда, когда $c_A\supset c$ и (a_{nk}) является матрицей конечного типа.

В частном случае $S=[0,1]$ и μ - мера Лебега, из теоремы 4 получаем результаты Вихманна ([1], лемма и теорема 2).

Теорема 5. Пусть (S,Σ,μ) удовлетворяет условию (W), метод $A=(a_{nk})$ обратим на $c(TM)$ и $\lim a_{nk}=0$ при всех k, а $B=(b_{nk})$ - произвольный метод. Включение $c_A(TM)\subset c_B(TM)$ справедливо в точности тогда, когда $c_A\subset c_B$ и существует матрица $T=(t_{nk})$ конечного типа с $B=TA$.

Литература

1. Вихманн Ф., О консервативности матриц относительно сходимости по мере. Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1971, 20, № 3, 275-278.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЯДРА И ЯДЕРНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ α-МЕТОДОВ

Л.Лооне

Пусть $A_m = (a_{mnk})$ - матричные методы суммирования для любого $m = 0,1,\dots$. Говорят (ср.[4]), что числовая последовательность $x = (\xi_k)$ суммируема α-методом $\{A_m\}$ к числу a, если равномерно относительно n существует предел

$$\lim_m \sum_k a_{mnk} \xi_k = a .$$

Ядро α-метода можно определить так, чтобы сходимость по ядру совпадала с α-суммируемостью (см.[3]).

Пусть Q - множество всевозможных операторов $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и пусть α - множество всех матричных методов вида $\mathcal{B}_q = (a_{mq(m)k})$, где $q \in Q$. Пусть фильтр $\mathcal{F}^\circ$ определяет ядро Кноппа $\mathcal{K}^\circ(x)$ и фильтр $\mathcal{F}_q$ определяет ядро $\mathcal{K}^\circ(\mathcal{B}_q x)$ (см.[1,2]).

Определение. Ядром α-метода называется ядро, определяемое фильтром

$$\mathcal{F}_\alpha = \operatorname{cl}\operatorname{co}\inf\{\mathcal{F}_q : \ q \in Q\}.$$

Оказывается, что это ядро имеет следующие свойства:

1. Множеством сходящихся элементов по ядру α-метода является множество c_α всех α-суммируемых последовательностей.

2. В пространстве m ядро α-метода определяется одним множеством $\mathcal{K}_\alpha$, где

$$\mathcal{K}_\alpha = \operatorname{cl}\operatorname{co}\bigcup\{{}^t\mathcal{B}_q(\mathcal{K}^\circ) : \ q \in Q\}.$$

Здесь символ $\mathcal{K}^\circ$ обозначает множество, определяющее ядро Кноппа в m (ср.[2]).

3. Ядро почти-сходимости является ядром α-метода $\{A_m\}$ с

$$a_{mnk} = \begin{cases} \dfrac{1}{m+1} & \text{при} \quad n \le k \le n+m, \\ 0 & \text{при} \quad n > k \ \text{ если } \ k > n+m. \end{cases}$$

4. Включение

$$\mathcal{K}_\alpha(x) \subset \mathcal{K}^0(x) \qquad \forall\, x \in m$$

имеет место тогда и только тогда, когда

1^0 α-метод является регулярным,

2^0 $\lim \|A_m\| = 1.$

5. Пусть $F(x)$ - ядро почти-сходимости элемента x. Включение

$$\mathcal{K}_\alpha(x) \subset F(x) \qquad \forall x \in m$$

имеет место тогда и только тогда, когда, кроме 1^0 и 2^0, выполнено условие

3^0 $\lim \|A_m(S-E)\| = 0,$

где S - оператор левого сдвига.

Литература

1. Лооне Л., О ядрах элемента отделимого локально выпуклого пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 125-135.

2. Лооне Л., Ядро Кноппа и ядро почти-сходимости в пространстве m. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 131-144, и 1975, 355, 148-156.

3. Лооне Л., Ядро α-метода Питерсена. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 46-51.

4. Petersen, G.M., Almost Convergence and the Buck-Pollard property. Proc. Amer. Math. Soc., 1960, 11, 469-477.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

СУММИРУЕМОСТЬ РЯДА-ПРОИЗВЕДЕНИЯ В BN-ПРОСТРАНСТВЕ

Х. Эспенберг

Пусть E — неархимедово банахово пространство (BN-пространство) над полем K. Пусть дан ряд $\sum x_k$ с частичными суммами X_n. Мы будем иметь дело с рядами, членами которых являются элементы пространства E , а также с рядами, членами которых являются элементы поля K. Мы скажем, что $\sum x_k \in \alpha$, если $\{X_n\} \in \alpha$.

Рассмотрим треугольный метод суммирования A , который определяется матрицей $A=(a_{nk})$, где $a_{nk} \in K$. Преобразуем последовательность $X=\{X_n\}$ в последовательность $\{A_n(X)\}$, где

$$A_n(X)=\sum_{k=0}^{n} a_{nk} X_k .$$

Ряд $\sum x_k$ называется A_α-суммируемым, если $\{A_n(X)\} \in \alpha$.

Обозначим через αA множество всех тех рядов или последовательностей, которые являются A_α-суммируемыми. Запись $(a_{nk}) \in (\alpha \to \beta)$ означает, что из $\sum x_k \in \alpha$ следует $\{A_n(X)\} \in \beta$.

Метод A называется α-транслятивным слева для X , если из $X \in \alpha A$ следует $X^r \in \alpha A$, где

$$X^r=\{\underbrace{0,\ldots,0}_{r \text{ нулей}},X_0,X_1,\ldots\}.$$

Метод A называется абсолютно α-транслятивным для X , если последовательности X^r и X^{r+1} одновременно A_α-суммируемы, или ни одна из них не является A_α-суммируемой, а их разность A_α-суммируема. В обоих случаях транслятивность называется равномерной, если существует такое число $M(X)$, что

$$\sup_{r,n} \| A_n(X^r) \| \leq M(X)$$

и регулярной, если $\lim_n A_n(X^r - X^{r+1})=0$ для всех r .

Пусть даны ряды $\sum u_k$ с $u_k \in E$ и $\sum v_k$ с $v_k \in K$. Составим из этих рядов по правилу Коши ряд-произведение $\sum w_k$,

4

где

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} v_{n-k} u_k ,$$

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} V_{n-k} U_k .$$

Мы рассмотрим следующую проблему: если $\sum u_k \in \alpha$, то каким условиям должен удовлетворять ряд $\sum v_k$, чтобы ряд-произведение $\sum w_k$ был A_β-суммируемым. Эта проблема связана с преобразованием

$$A_n(W) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} W_k = \sum_{m=0}^{n} h_{nm} U_m ,$$

где

$$h_{nm} = \sum_{k=m}^{n} a_{nk} V_{k-m} .$$

Следовательно, если $\sum u_k \in \alpha$, то $\sum w_k \in \beta A$ тогда и только тогда, когда $H = (h_{nm}) \in (\alpha \to \beta)$. Используя необходимые и достаточные условия для того, чтобы $(h_{nm}) \in (\alpha \to \beta)$, можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. Ряд $\sum w_k \in cA$ при любом $\sum u_k \in c_0$ тогда и только тогда, когда метод A равномерно абсолютно -транслятивен для V.

Теорема 2. Ряд $\sum w_k \in cA$ при любом $\sum u_k \in c$ тогда и только тогда, когда

1^0 $\sum v_k \in cA$,

2^0 метод A равномерно c-транслятивен слева для V.

Теорема 3. Ряд $\sum w_k \in c_0 A$ при любом $\sum u_k \in c_0$ тогда и только тогда, когда метод A равномерно регулярно абсолютно c-транслятивен для V.

Теорема 4. Ряд $\sum w_k \in c_0 A$ при любом $\sum u_k \in c$ тогда и только тогда, когда

1^0 $\sum v_k \in c_0 A$,

2^0 метод A равномерно регулярно c_0-транслятивен слева для V .

Эстонская сельскохозяйственная академия
Кафедра математики

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМ ВЫПУКЛОСТИ К СУММИРОВАНИЮ СО СКОРОСТЬЮ

А. Тали

Пусть $A_\alpha=(a_{nk}^\alpha)$ - семейство[1] совместных матричных методов суммирования, переводящих последовательности $x=\{s_n\}$ в последовательности $A_\alpha x=\{t_n^\alpha\}$. На семейство A_α зачастую полезно налагать следующее ограничение:

$$mA_\alpha \subset mA_\beta \quad \text{и} \quad cA_\alpha \subset cA_\beta \quad \text{при } \alpha<\beta. \tag{1}$$

Теоремы, в которых для семейства A_α, удовлетворяющего условию (1), выводится справедливость импликации

$$A_\alpha x \in m,\ A_\beta x \in c,\ \alpha<\mu<\beta \implies A_\mu x \in c \tag{2}$$

при любых α и β с $\alpha<\beta$, называются теоремами о выпуклости (см. [1]). Семейство A_α, удовлетворяющее условиям (1) и (2), мы называем выпуклым (см. [2]). Если же условия (1) и (2) выполняются с заменой в них c на c_0, то будем говорить, что семейство A_α нуль-выпукло. Ниже приводится теорема, позволяющая применять теоремы о нуль-выпуклости к суммированию со скоростью[2] и, тем самым, выводить оценки на скорость приближения преобразованной последовательности к пределу.

Введем семейство матричных методов B_α с $B_\alpha x=\{\lambda_n^\alpha t_n^\alpha\}$, где $\{t_n^\alpha\}=A_\alpha x$, а $\lambda_\alpha=\{\lambda_n^\alpha\}$ - некоторые последовательности с $\lambda_n^\alpha>0$.

Теорема 1. Если семейство B_α нуль-выпукло, а методы A_α удовлетворяют условию

$$\sum_k a_{nk}^\alpha = 1, \tag{3}$$

---

[1] Непрерывный параметр α принимает вещественные значения $\alpha \geqslant \alpha_0$ или же $\alpha>\alpha_0$.

[2] Говоря о суммируемости со скоростью, мы придерживаемся обозначений, введенных Г.Кангро (см., например, [1]).

то при любых[3] t, α и β с $\alpha<\beta$ справедливы импликации:

$$\lambda_n^\alpha(t_n^\alpha - t) = O(1) \quad \Rightarrow \quad \lambda_n^\beta(t_n^\beta - t) = O(1), \tag{4}$$

$$\lambda_n^\alpha(t_n^\alpha - t) = o(1) \quad \Rightarrow \quad \lambda_n^\beta(t_n^\beta - t) = o(1), \tag{5}$$

$$\lambda_n^\alpha(t_n^\alpha - t) = O(1),\ \lambda_n^\beta(t_n^\beta - t) = o(1),\ \alpha<\mu<\beta \Rightarrow \lambda_n^\mu(t_n^\mu - t) = o(1). \tag{6}$$

Примечание 1. В импликациях (4)-(6) можно заменить последовательности λ_α на $\mu_\alpha = \{\mu_n^\alpha\}$, удовлетворяющие условию[4]

$$K_1\mu_n^\alpha \le \lambda_n^\alpha \le K_2\mu_n^\alpha .$$

Далее отметим, что если $\lambda_n^\alpha \uparrow$ при некотором α, то импликации (4)-(6) дают нам теоремы о A_α-суммируемости со скоростью λ_α.

Например, если $\lambda_n^\alpha \uparrow \infty$ при любом α, то в символике теории суммируемости со скоростью импликации (4)-(6) переписываются соответственно в виде:

$$A_\alpha x \in m^{\lambda_\alpha} \quad \Rightarrow \quad A_\beta x \in m^{\lambda_\beta}, \tag{4'}$$

$$A_\alpha x \in c_*^{\lambda_\alpha} \quad \Rightarrow \quad A_\beta x \in c_*^{\lambda_\beta}, \tag{5'}$$

$$A_\alpha x \in m^{\lambda_\alpha},\ A_\beta x \in c_*^{\lambda_\beta},\ \alpha<\mu<\beta \Rightarrow A_\mu x \in c_*^{\lambda_\mu}, \tag{6'}$$

где $c_*^{\lambda_\alpha} = \{x \in c:\ \lambda_n^\alpha(s_n - \lim s_n) = o(1)\} \subset c^{\lambda_\alpha}$.

Если же $\lambda_n^\alpha \uparrow$ и $\lambda_n^\alpha = O(1)$ при всех α, то импликации (4)-(6) совпадают с условиями выпуклости (1) и (2) для семейства A_α.

Более конкретные результаты получаются для треугольных методов A_α, если (как и в работе [2]) предположить, что методы A_α и $A_{\alpha+\delta}$ с $\delta > 0$ связаны соотношением

$$t_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^\alpha t_k^\alpha , \tag{7}$$

где $(d_{nk}^{\alpha\delta})$ - треугольные матрицы с $d_{nk}^{\alpha 1} = 1/M_\alpha$, причем M_α не зависят от n и k, а $\{b_n^\alpha\}$ - последовательности с $b_n^\alpha \neq 0$. При помощи теоремы 3 работы [2] получим следующую теорему о нуль-выпуклости.

[3] Число t может быть как вещественным так и комплексным.

[4] Постоянные в условиях ограниченности нигде не зависят от n или k.

Теорема 2. Пусть треугольные методы A_α связаны соотношением (7). Пусть, далее, $\{c_n^\alpha\}$ – некоторые последовательности с $c_n^\alpha \neq 0$. Если при любом α и $0<\delta<1$ выполнены условия

1^0 последовательности $\{|c_n^\alpha|\}$ монотонно возрастают и

$$L_1 n^\delta \leq |c_n^{\alpha+\delta}/c_n^\alpha| \leq L_2 n^\delta,$$

$2^0 \quad d_{nk}^{\alpha\delta} = O\{(n-k+1)^{\delta-1}\} \quad (0 \leq k \leq n),$

$3^0 \quad \Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta} = O\{(n-k+1)^{\delta-2}\} \quad (0 \leq k < n),$

то семейство B_α с $\lambda_n^\alpha = |t_n^\alpha/c_n^\alpha|$ является нуль-выпуклым.

Для примера возьмем семейство обобщенных методов Нёрлунда (N, p_n^α, q_n) (см. [3]), где

$$t_n^\alpha = \frac{1}{P_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}^\alpha q_k s_k$$

с $\alpha > -1$, $P_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}^\alpha q_k$, $p_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} p_k$, $A_n^{\alpha-1} = \binom{\alpha-1+n}{n}$, $p_0 > 0$, $p_n \geq 0$ и $q_n > 0$. Из теорем 1 и 2 непосредственно вытекает

Следствие. Если последовательности $\{c_n^\alpha\}$ с $\alpha \geq \alpha_0 > -1$ (или с $\alpha > \alpha_0 \geq -1$) удовлетворяют условиям теоремы 2, то для методов $A_\alpha = (N, p_n^\alpha, q_n)$ справедливы импликации (4)-(6) с $\alpha \geq \alpha_0 > -1$ (или с $\alpha > \alpha_0 \geq -1$) и $\lambda_n^\alpha = |P_n^\alpha / c_n^\alpha|$.

Примечание 2. Семействами (N, p_n^α, q_n) являются, в частности, семейства Нёрлунда (N, p_n^α) (см., например, [2]), а также семейство обобщенных методов Чезаро (C, α, β_0) с $\alpha > -1$ и $\beta_0 \geq 0$.

Литература

1. Кангро Г., Теория суммируемости последовательностей и рядов. В сб. "Мат.анализ. Т. 12. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР". М., 1974, 5-70.
2. Тали А., Один способ для построения выпуклых семейств методов суммирования. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 55-65.
3. Sinha, R., Convexity theorem for (N,p,q) summability. Kyungpook Math. J., 1973, 13, 37-40.

Таллинский педагогический институт
Кафедра математики

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ С ОСТАТКОМ

И.Таммерайд

Известна роль, которую играют абелевы и тауберовы теоремы с остатком в теории приближения функции [2] . Кроме того, интересна роль, которую играют результаты наилучшего приближения в теории суммируемости. Настоящий доклад посвящен одному такому вопросу. В докладе изучается вопрос применения результатов Кангро [1] и результатов наилучшего приближения [3], связанных с геометрической формой теоремы Хана—Банаха при тауберовых теоремах с остатком.

Основным результатом этой работы является следующая

Теорема. Пусть A — реверсивный матричный метод суммирования, $\lambda=\{\lambda_n\}$, $0<\lambda_n\uparrow\infty$, $\mu=\{\mu_n\}$, $0<\mu_n\uparrow\infty$,

$$A(c^{\mu})\subset c^{\lambda}$$

и

$$z=\{\zeta_n\}\in c_A^{\lambda}.$$

Если существуют действительные решения t, d, d_k $(k\in N_0)$ системы

$$d\vartheta+t\varkappa+\sum_k d_k\varkappa_k=1, \qquad (1)$$

$$d\eta+t\gamma+\sum_k d_k\gamma_k=0, \quad \forall x=\{\xi_n\}\in c^{\mu}, \qquad (2)$$

причем

$$\sum_k |d_k|<\infty$$

и величины η, γ_k, γ, ϑ, $\varkappa_k$ и $\varkappa$ определены формулами

$$\eta_n=\sum_k a_{nk}\xi_k \quad , \qquad \eta=\lim_n \eta_n ,$$

$$\gamma_n=\lambda_n(\eta_n-\eta) \quad , \qquad \gamma=\lim_n \gamma_n ,$$

$$\vartheta_n = \sum_k a_{nk}\zeta_k\ , \qquad \vartheta = \lim_n \vartheta_n$$

$$\varkappa_n = \lambda_n(\vartheta_n - \vartheta), \quad \varkappa = \lim_n \varkappa_n\ ,$$

то

$$z \bar{\in} c^\mu,$$

причем

$$\rho(z, c^\mu) = \inf_{x \in c^\mu} \| z - x \|_{c_A^\lambda} = \max \left(|d| + |t| + \sum_k |d_k|\right)^{-1},$$

где max берется по всем решениям системы (1),(2), или

$$\rho(z, c^\mu) = \max\ |d\vartheta + t\varkappa + \sum_k d_k \varkappa_k|,$$

где max берется, по всем решениям системы (1),(2) при дополнительном условии

$$|d| + |t| + \sum_k |d_k| = 1.$$

Имеются некоторые приложения этой теоремы при конкретных методов суммирования.

Литература

1. Кангро Г., О λ-совершенности методов суммирования и ее прменениях.I. Изв.АН ЭстССР. Физ.,матем.,1971, 20, № 2, 111 - 120.
2. Таммерайд И., Приближение функций и теоремы абелева и тауберова типа с остаточным членом. Тр. Таллинск. политехн. ин-та,сер. А, 1971, № 312, 39 - 53.
3. Хавинсон С.Я., Чацкая Е.Ш., Соотношения двойственности и критерии элементов наилучшего приближения. Москва, 1976.

Таллинский политехнический институт

Кафедра математики

МНОЖИТЕЛИ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ
В ДВОЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

С.Барон

Пусть X и Y - банаховы пространства. Непрерывные линейные операторы $\varepsilon_{mn}: X \to Y$ называются множителями суммируемости в последовательности типа (A_ℓ, B_ℓ) (соответственно (A_ω, B_ℓ)), если для любой абсолютно A-суммируемой (соответственно A_ω-суммируемой) двойной последовательности $(\mathcal{U}_{mn}) \in X$ двойная последовательность $(\varepsilon_{mn}\mathcal{U}_{mn})$ абсолютно B-суммируема. При этом двойную последовательность $(\mathcal{U}_{mn})$ называем A_ω-суммируемой, если она A-ограничена, или ограниченно A-суммируема, или вполне A-суммируема, или вполне A-суммируема к нулю.

В то время, как для множителей суммируемости в ряде (см. [2], §§ 21-25) известны много результатов и для их нахождения разработаны даже некоторые общие методы (например, методы Мура—Кангро, Пейеримхоффа и др.), множители суммируемости в последовательности сравнительно мало изучены (см. [2], § 26). Что же касается множителей суммируемости в двойные последовательности, то, насколько нам известно, они вовсе не исследовались.

В следующих теоремах рассматриваются названные типы множителей суммируемости для методов суммирования[1] $A^{\alpha,\beta} = (a_{mnk\ell})$, если $B = (b_{mnk\ell})$ - факторизируемый нормальный метод суммирования, удовлетворяющий условию[2]

$$\sum_{m,n=k,\ell}^{\infty} |b_{mnk\ell}| = O(b_{k\ell k\ell}).$$

Методом $A^{\alpha,\beta}$ называем произвольный факторизируемый нормальный метод, факторы (a'_{mk}) и $(a''_{n\ell})$ которого имеют

---

[1] Обозначаем $\bar{b}_{mnk\ell} = \bar{b}'_{mk}\bar{b}''_{n\ell}$, где $\bar{b}'_{mk} = b'_{mk} - b'_{m-1,k}$ и $b''_{n\ell} = b''_{n\ell} - b''_{n-1,\ell}$, а (b'_{mk}) и $(b''_{n\ell})$ - факторы метода B.

[2] Свободные индексы принимают все значения $0,1,\dots$.

в своих обратных матрицах (ξ'_{mk}) и $(\xi''_{n\ell})$ преобразования последовательности в последовательность соответственно $\alpha+1$ и $\beta+1$ ненулевых диагоналей, т.е. $\xi'_{mk}=0$ при $k<m-\alpha$ и $\xi''_{n\ell}=0$ при $\ell<n-\beta$. Обозначим

$$\mathcal{D}'_m=\sup_k|a'_{m+k,m+k}\xi'_{m+k,k}|,\quad \mathcal{D}''_n=\sup_\ell|a''_{n+\ell,n+\ell}\xi''_{n+\ell,\ell}|$$

Аналогично как для простых рядов (см.[3], теоремы 7 и 8) при помощи теоремы Кулля ([4], стр. 203) доказывается

Теорема 1. Пусть метод $A^{\alpha,\beta}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k,\ell=0}^{m,n} a_{mnk\ell}=1$$

и сохраняет абсолютную сходимость, а также существуют конечные $\mathcal{D}'_m$ при $m=1,\dots,\alpha-1$ и $\mathcal{D}''_n$ при $n=1,\dots,\beta-1$. Для того, чтобы непрерывные линейные операторы ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(A_\ell^{\alpha,\beta}, B_\ell)$, необходимо и достаточно выполнение при любом $x\in X$ следующих условий[3]:

1^0 последовательность $(\varepsilon_{mn}x)$ абсолютно B-суммируема;

$$2^0\ \sum_{m,n}\Big\|\sum_{\mu,\nu=0}^{m,\ell}\bar{b}_{mn\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}x\Big\|=O(\|x\|),$$

$$\sum_{m,n}\Big\|\sum_{\mu,\nu=0}^{k,n}\bar{b}_{mn\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}x\Big\|=O(\|x\|);$$

$$3^0\ \sum_{m,n}\Big\|\sum_{\mu,\nu=0}^{k,\ell}\bar{b}_{mn\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}x\Big\|=O(\|x\|);$$

$$4^0\ \|\varepsilon_{mn}\|=O(a_{mnmn}/b_{mnmn});$$

$$5^0\ \sum_n\Big\|\sum_{\nu=0}^{n}\bar{b}''_{n\nu}\varepsilon_{m\nu}x\Big\|=O(a'_{mm}\|x\|/b'_{mm}),$$

$$\sum_m\Big\|\sum_{\mu=0}^{m}\bar{b}'_{m\mu}\varepsilon_{\mu n}x\Big\|=O(a''_{nn}\|x\|/b''_{nn});$$

$$6^0\ \sum_n\Big\|\sum_{\nu=0}^{\ell}\bar{b}''_{n\nu}\varepsilon_{m\nu}x\Big\|=O(a'_{mm}\|x\|/b'_{mm});$$

$$\sum_m\Big\|\sum_{\mu=0}^{k}\bar{b}'_{m\mu}\varepsilon_{\mu n}x\Big\|=O(a''_{nn}\|x\|/b''_{nn}).$$

[3] Если пределы суммирования у знака суммы не указаны, то они принимают все значения $0,1,\dots$.

Отметим, что необходимость условий 1^0, 2^0 и 3^0 вытекает из их необходимости для множителей типа (E_ℓ, B_ℓ), где E - метод сходимости. Например, необходимость условия 3^0 получаем из разложения

$$\sum_{\mu,\nu=k,\ell}^{m,n} = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} - \sum_{\mu,\nu=0}^{m,\ell-1} - \sum_{\mu,\nu=0}^{k-1,n} + \sum_{\mu,\nu=0}^{k-1,\ell-1}$$

ввиду необходимости условий 1^0, 2^0 и

$$\sum_{\mu,\nu=k,\ell}^{m,n} b_{mn\mu\nu}\, \varepsilon_{\mu\nu}\, x = O(\|x\|).$$

Что касается условий 5^0 и 6^0, то они необходимы для множителей типов (Z'_ℓ, B_ℓ) и (Z''_ℓ, B_ℓ), где $Z' = A' \odot E''$ и $Z'' = E' \odot A''$, а $E' \odot E'' = E$.

В случае $X = Y = \mathbb{C}$, применяя теорему 2 из [1] к матрице чисел

$$\sum_{\mu,\nu=k,\ell}^{m,n} b_{mn\mu\nu}\, \xi'_{\mu k}\, \xi''_{n\ell}\, \varepsilon_{\mu\nu},$$

получаем, что имеет место

<u>Теорема 2</u>. Пусть для метода $A^{\alpha,\beta}$ существуют конечные $\mathcal{D}'_m$ при $m = 1,\ldots,\alpha$ и $\mathcal{D}''_n$ при $n = 1,\ldots,\beta$. Для того, чтобы комплексные числа ε_{mn} были множителями суммируемости типов (A_ω, B_ℓ), необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{m,n} \left| \frac{b_{mnmn}}{a_{mnmn}} \varepsilon_{mn} \right| < \infty.$$

Литература

1. Барон С., Об одном матричном преобразовании двойных последовательностей. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 183-193.

2. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.

3. Кангро Г., Тыннов М., Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 249-262.

4. Кулль И.Г., Матричные преобразования классов двойных последовательностей в банаховых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 193-208.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОЖИТЕЛЕЙ СУММИРУЕМОСТИ

М.Тынов

Пусть в банаховом пространстве X существует T-базис, где T - регулярный матричный метод суммирования.

Множества

$$(X,T)=\{(y_k):\ \exists \lim \sum_k \tau_{nk} x_k y_k \ \ \forall x\in X\},$$

$$(X,T_0)=\{(y_k):\ \sum_k \tau_{nk} x_k y_k = O(1) \ \forall x\in X\}$$

называются соответственно T-дополнительным и T_0-дополнительным пространством пространства X, где $x=(x_k)$ - последовательность коэффициентов разложения по T-базису.

1. Если X является BK-пространством, тогда (X,T) и (X,T_0) являются BK-пространствами при $(\delta_{nk})\in X$,

$$\|y\|_{(X,T_0)} = \sup_n \sup_{\|x\|_X\le 1} \Big|\sum_k \tau_{nk} x_k y_k\Big|$$

и

$$\|y\|_{(X,T)} = \|y\|_{(X,T_0)}.$$

2. Имеют место соотношения:

$$X\subset((X,T),T), \qquad X\subset((X,T_0),T_0),$$

$$\|x\|_X \le \|x\|_{((X,T_0),T_0)},$$

однако

$$(X,T_0)=(((X,T_0),T_0),T_0), \qquad (X,T)=(((X,T),T),T)$$

и

$$\|y\|_{(X,T_0)}=\|y\|_{(((X,T_0),T_0),T_0)}, \quad \|y\|_{(X,T)}=\|y\|_{(((X,T),T),T)}$$

даже тогда, когда T-базис не является полным в X.

3. Почему дополнительные пространства удовлетворяют таким условиям, присущим сопряженным пространствам - это объясняется равенством $(X,T)=(X,T_0)=X^*$, выполняющимся при наличии T-базиса в X (см.[2]).

Изучение таких свойств дополнительных пространств полезно, поскольку:

1) если X - поле суммируемости метода T, поле ограниченности метода T или поле $|T|$-суммируемости, то (X, T) и $(X, \bar{\Gamma}_0)$ становятся классами множителей суммируемости (см. [4]);

2) для ортогональных рядов эта проблема связана с проблемой мультипликаторов и проблемой принадлежности ортогонального ряда заданному классу (см. [3,1]);

3) оно помогает исследовать матричные преобразования коэффициентов Фурье (см. [5]).

Литература

1. Тыннов М., Коэффициенты Фурье и множителей суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 194-201.
2. Тыннов М., Сопряженные и дополнительные пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 202-204.
3. Тяхт Т., Мультипликаторы BK-пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 29-43.
4. Gavin Lloyd, A., Some remarks on summability factors. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, 56, 130-134.
5. Goes, G., Complementary spaces of Fourier coefficients, convolutions and generalized matrix transformations and operators between BK-spaces. J. Math. Mechan. 1961, 10, № 1, 135-157.

Тартуский государственный университет

Кафедра математического анализа

КОСИНУС-КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ КЛАССА ФУНКЦИЙ $W^i Lip(\alpha,1)$ И МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ

Я. Сикк

Пусть X и Y — банаховы пространства функций f действительного переменного, определенные почти всюду на $(-\infty,\infty)$, периодические с периодом 2π и интегрируемые по Лебегу. Обозначим ряд Фурье функций $f\in X$ через

$$f^0=\sum_{k=1}^{\infty}(c_k\cos kx+d_k\sin kx)=(c_k,d_k).$$

Последовательность $a=(a_k)$ называется мультипликатором класса (X,Y), коротко $a\in(X,Y)$, если для каждого ряда $(c_k,d_k)\in X$ ряд $(a_kc_k,a_kd_k)\in Y$.

Пусть $Lip(\alpha,1)$ класс всех тех $f\in L$, для которых

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+h)-f(x)|dx=O(|h|^{\alpha}),$$

где $\alpha\in(0,1)$ и $h\in\mathbb{R}$. Через $W^iLip(\alpha,1)$ обозначим класс всех тех f, для которых i-тая производная $f^{(i)}\in Lip(\alpha,1)$, где $i=0,1,2,\ldots$, считая $f^{(0)}=f$. Также обозначим $K^0=\sum a_k\cos kx$.

Мы рассмотрим следующую проблему: при каких условиях косинус-ряд $K^0\in W^iLip(\alpha,1)$. Мы установим, что имеет место следующая

Теорема 1. Если a удовлетворяет условиям

$$a_n\log n=o(1),\tag{1}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty}(k+1)|\Delta^2a_k|=O(n^{i+\alpha})\tag{2}$$

то $K^0\in W^iLip(\alpha,1)$.

Используя методику нахожденя мультипликаторов, выработанную в статьях [1,2], из теоремы 1 вытекают следующие результаты для мультипликаторов.

Теорема 2. Пусть для a выполнены условия (I) и (2). Тогда

$$a \in (L, W^i \operatorname{Lip}(\alpha, 1))$$

и

$$a \in (C, W^i \operatorname{Lip} \alpha).$$

Примечание. В теоремах 1 и 2 можно условие (2) заменить условием

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k| \log k = O(n^{\alpha+i}).$$

Литература

1. Сикк Я., Мультипликаторы, T^{λ}-дополнительные пространства и коэффициенты Фурье некоторых классов функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 180-185.
2. Сикк Я., Мультипликаторы классов $(X_{T\lambda}, Y_{u\mu})$. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 70-74.

Эстонская сельскохозяйственная академия

Кафедра математики

О МНОЖИТЕЛЯХ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ В СРЕДНЕМ

Ю. Липпус

Пусть $\omega(t)$ — некоторый модуль непрерывности. Через X обозначаем пространство L или C периодических функций, через X_ω множество тех функций f из X, модуль непрерывности которых удовлетворяет оценке $\omega(f,t)_X = O(\omega(t))$, и через x_ω - множество тех функций из X, для модуля непрерывности которых справедлива оценка $\omega(f,t)_X = o(\omega(t))$. Пусть X_F обозначает класс тех функций из X, ряд Фурье которых сходится в метрике пространства X, и X_{BF} - класс тех функций из X, последовательность частичных сумм ряда Фурье которых ограничена в метрике пространства X.

Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ - некоторая числовая последовательность и

$$\Lambda_n(t) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \cos \nu t .$$

Говорят, что λ принадлежит классу (X_ω, X_F), если для каждой функции f из X_ω

$$\frac{\lambda_0 a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t),$$

где a_ν и b_ν - коэффициенты Фурье функции f, является рядом Фурье функции из X_F. Аналогично определяются классы (x_ω, X_F), (X_ω, X_{BF}) и т.д.

Пусть еще S обозначает класс последовательностей косинус-коэффициентов Фурье—Стильтеса.

Карамата [5] показал, что для того, чтобы $\lambda \in (C, C_F)$, необходимо и достаточно, чтобы $\|\Lambda_n\|_L = O(1)$. Гёс [4] нашел аналогичные необходимые и достаточные критерии для принадлежности λ классам (L^p, C_F),(L, L^p_F) при $1<p<\infty$ и (L, C_F). ДеВор [3] показал, что $\lambda \in (C_\omega, C_F)$ тогда и только тогда, когда

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right) \|\Lambda_n\|_L = O(1). \qquad (1)$$

Относительно класса (C_ω , C_F) последний результат принадлежит С.А.Теляковскому [2], который показал, что если $\lambda \in S$, то $\lambda \in (C_\omega, C_F)$ тогда и только тогда, когда

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right)\|\Lambda_n\|_L = o(1). \qquad (2)$$

В.Р.Почуев [1] получил необходимые и достаточные условия для принадлежности λ к (L_ω , C_F),(ℓ_ω , C_F),(L_ω , C_{BF}) и (ℓ_ω , C_{BF}) при условии, что λ является последовательностью косинус-коэффициентов ограниченной функции.

В настоящей работе при $\lambda \in S$ доказывается:

для того, чтобы $\lambda \in$ (L_ω , L_F), необходимо и достаточно выполнение условия (2);

для того, чтобы $\lambda \in$ (ℓ_ω , L_F), необходимо и достаточно выполнение условия (1);

для того, чтобы $\lambda \in$ (L_ω , L_{BF}) или $\lambda \in$ (ℓ_ω , L_{BF}), необходимо и достаточно выполнение условия (1).

Литература

1. Почуев В.Р., О множителях равномерной сходимости и множителях равномерной ограниченности частных сумм рядов Фурье. Изв. ВУЗ. Математика, 1977, № 1, 74-81.
2. Теляковский С.А., О множителях равномерной сходимости рядов Фурье функций с заданным модулем непрерывности. Мат. заметки, 1971, 10, № 1, 33-40.
3. DeVore, R., Multipliers of uniform convergence. Enseign. math., 1969, 14, № 2, 175-188.
4. Goes, G., Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen I, II. Studia math., 1958, 17, № 3, 299-311.
5. Karamata, J., Suite de fonctionelles linéaires et facteurs de convergence des séries de Fourier. J. math. pures et appl., 1965, 35, № 1, 87-95.

Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР

Отдел теории функций

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМ СУММИРУЕМОСТИ

Х. Тюрнпу

1. Рассмотрим ортонормальную на отрезке $e=[a,b]$ систему функций $\varphi=(\varphi_k(t))$, удовлетворяющая для некоторой подпоследовательности натуральных чисел (ν_n) условию

$$L_{\nu_n}(\varphi,t)=O(1), \tag{1}$$

где

$$L_m(\varphi,t)=\int_e \left|\sum_{k=0}^{m}\varphi_k(t)\varphi_k(\tau)\right| d\tau.$$

Пусть $\Gamma=(\gamma_{k\nu})$ - некоторая конечнострочная матрица вещественных чисел. Положим

$$\psi_k(t)=\sum_{\nu=0}^{s_k}\gamma_{k\nu}\varphi_\nu(t)$$

и обозначим полученную систему $\psi=(\psi_k(t))$ через $\Gamma\varphi$. Далее, обозначим через $F(\varphi,Y)$ множество коэффициентов Фурье интегрируемых функций из некоторого класса Y. Пусть $x\in F(\varphi,Y)$, где $x=(\xi_k)$. Через Γx обозначим последовательность $y=(\eta_k)$ с

$$\eta_k=\sum_{\nu=0}^{s_k}\gamma_{k\nu}\xi_\nu.$$

Так как

$$\xi_\nu=\int_e f(\tau)\,\varphi_\nu(\tau)\,d\tau=(f,\varphi_\nu),$$

то

$$\eta_k=(f,\psi_k) \tag{2}$$

являются моментами (или формальными коэффициентами Фурье) функции $f\in Y$ по системе $\psi=\Gamma\varphi$.

Если $\Gamma x\in F(\varphi,Y)$ для каждой $x\in F(\varphi,Y)$, то из равенства (2) вытекает, что $F(\Gamma\varphi,Y)\subset F(\varphi,Y)$.

Рассмотрим ортогональный ряд

$$\sum c_k\varphi_k(t), \tag{3}$$

где $\sum c_k^2\lambda_k^2<\infty$ и $0<\lambda_k\uparrow$.

Пусть ряд (3) суммируем конечнострочным методом $A=(a_{nk})$ со скоростью $\lambda=(\lambda_n)$, коротко A^λ-суммируем, почти всюду (п.в.) на e к $f(\tau)$, т.е. для некоторой последовательности натуральных чисел (μ_n) п.в. на e существует

6

$$\lim \lambda_n \Big[\sum_{k=0}^{\mu_n} \alpha_{nk} c_k \varphi_k(t) - f(t) \Big].$$

Если, кроме того,

$$\int_e \sup \lambda_n \Big| \sum_{k=0}^{\mu_n} \alpha_{nk} c_k \varphi_k(t) - f(t) \Big| dt < \infty,$$

то говорят, что ряд (3) максимально A^λ-суммируем п.в.

Ниже мы исследуем максимальную A^λ-суммируемость рядов

$$\sum c_k \psi_k(t) \tag{4}$$

с $\sum c_k^2 \lambda_k^2 < \infty$, где $\psi = \Gamma \varphi$. Сформулируем некоторые результаты.

Теорема 1. Пусть система φ удовлетворяет условию (1) и матрица Γ такова, что $\Gamma x \in F(\varphi, L^\infty)$ для всех $x \in F(\varphi, L^\infty)$. Если ряд (3) максимально A^λ-суммируем п.в., то ряд (4) также п.в. максимально A^λ-суммируем.

Следствие 1. Пусть система φ и матрица Γ удовлетворяют условиям теоремы 1. Если φ - система максимальной сходимости в ℓ^2, то и ψ - система максимальной сходимости в ℓ^2.

Теорема 2. Пусть система φ удовлетворяет условию (1). Если найдется такая матрица Γ, что

1^0 $\Gamma\varphi$ - ортонормальная система на e,

2^0 $\Gamma x \in F(\varphi, L^1)$ для всех $x \in F(\varphi, L^1)$,

3^0 ряд (4) максимально A^λ-суммируем п.в.,

то ряд (3) п.в. максимально A^λ-суммируем.

Следствие 2. Пусть система φ удовлетворяет условию (1). Если найдется такая перестановка $\Gamma\varphi$ системы φ, что $\Gamma x \in F(\varphi, L^1)$ для всех $x \in F(\varphi, L^1)$ и переставленная система $\Gamma\varphi$ является системой максимальной сходимости в ℓ^2, то и φ является системой максимальной сходимости в ℓ^2.

Из следствия 2 вытекают некоторые результаты работы [1].

Литература

1. Шипп Ф., О некоторых перестановках рядов по системе Уолша Мат. заметки, 1975, 18, № 2, 193-201.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ТИПА ПУАССОНА—АБЕЛЯ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ

Ф.Вихманн

Г.Харди доказана с помощью интегрального представления теорема о включении двух методов суммирования Пуассона—Абеля $PA(\ln \lambda_k)$ и $PA(\lambda_k)$ ([4], теорема 28). Аналогичные теоремы получил Ю.И.Худак [5] для метода обобщенного суммирования $T(\lambda_k)$, который применялся, например, в работах [2,3].

Автором [1] по аналогии с методами Пуассона—Абеля и $T(\lambda_k)$ введен метод суммирования рядов $AT_s(\lambda_k)$.

Пусть задана числовая последовательность $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющая условию $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Ряд

$$\sum z_k \qquad (1)$$

называется суммируемым методом $AT_s(\lambda_k)$ к сумме z, если при всех $\alpha > 0$ ряд

$$\sum (1 + \alpha\lambda_k)^{-s} e^{-\alpha\lambda_k} z_k = \rho_s(\alpha)$$

сходится и $\rho_s(\alpha) \to z$ при $\alpha \to 0$.

Получены две теоремы включения для методов Пуассона—Абеля и $AT_s(\lambda_k)$, причем соответствующие доказательства в существенном опираются на интегральные представления сумм переобразованных рядов.

Теорема 1. Если ряд

$$\sum e^{-\alpha\lambda_k} z_k = \varphi(\alpha)$$

сходится для всех $\alpha > 0$, то при $s \geq 1$

$$\rho_s(\alpha) = \frac{1}{\alpha^s \Gamma(\alpha)} \int_\alpha^\infty (t-\alpha)^{s-1} e^{1-t/\alpha} \varphi(t)\, dt.$$

Пусть $W\dots$ - функция Уиттекера.

Теорема 2. Если ряд

$$\sum \lambda_k^{-\alpha} z_k = \chi(\alpha) \qquad (2)$$

сходится при всех $\alpha > 0$, то

$$\chi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{e}\,\Gamma(\alpha)\, W_{\frac{1-\alpha-s}{2}, \frac{s-\alpha}{2}}(1)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \rho_s(t)\, dt.$$

Теорема 3. Если ряд (1) суммируем методом $PA(\lambda_k)$ к сумме z, то он суммируем методом $AT_s(\lambda_k)$ к той же сумме.

Теорема 4. Если $\lambda_0 \geq 1$ и ряд (2) сходится при всех $\alpha > 0$, то из суммируемости ряда (1) методом $AT_s(\lambda_k)$ следует его суммируемость методом $PA(\ln \lambda_k)$ к той же сумме.

Литература

1. Вихманн Ф., Об одном методе суммирования рядов. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1975, А, 373, 27-35.
2. Иванов В.К., Об интегральных уравнениях Фредгольма первого рода. Дифференц. уравнения, 1967, 3, № 3, 410-421.
3. Тихонов А.Н., Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье. Докл. АН СССР, 1964, 156, № 2, 268-271.
4. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
5. Худак Ю.И., Две теоремы включения для метода обобщенного суммирования рядов $T(\lambda_k)$. Докл. АН СССР, 1972, 202, № 6, 1284-1287.

Таллинский политехнический институт

Кафедра математики

СУММИРУЕМОСТЬ МЕТОДОМ АБЕЛЯ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

И.Горюк

В гильбертовом пространстве H рассматривается пучок $L(\lambda)=E+\lambda B+\lambda^2 C$, где B - ограниченный положительный оператор в H, C - вполне непрерывный оператор, E - единичный оператор.

Число λ_0 называется собственным числом пучка $L(\lambda)$, если существует ненулевой вектор $\varphi_0 \in H$ такой, что $L(\lambda_0)\varphi_0 = 0$. Вектор φ_0 называется собственным вектором пучка $L(\lambda)$.

Векторы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ называются присоединенными к собственному вектору φ_0, если

$$L(\lambda_0)\varphi_j + \frac{dL(\lambda_0)}{d\lambda}\varphi_{j-1} + \frac{1}{2}\frac{d^2L(\lambda_0)}{d\lambda^2}\varphi_{j-2} = 0,$$

где $j = 1,2,\dots,k$ и $\varphi_{-1}=0$.

Для пучка $L(\lambda)$ справедлива

Лемма. Пусть

1) $|\arg(Cf, f)| < \alpha < \pi/2$,

2) Оператор $B>0$ имеет ограниченный обратный.

Тогда резольвента $L^{-1}(\lambda)$ пучка $L(\lambda)$ ограничена в области

$$F_\varepsilon = \{\lambda : |\arg\lambda - \pi| \geq \alpha+\varepsilon, \quad |\lambda| > \|B^{-1/2}\|^2/\sin\varepsilon\},$$

где ε - произвольное положительное число.

В [1] было доказано, что если

$$\|B^{-1}\| \|B^{-1}C\| < \frac{1}{4}, \qquad (1)$$

то существуют операторы Z_1 и Z_2 такие, что

$$L(\lambda) = (E-\lambda Z_1)(E-\lambda Z_2).$$

Очевидно, что собственные и присоединенные векторы оператора Z_2, соответствующих его собственному числу λ_0, являются собственными и присоединенными векторами пучка $L(\lambda)$ (см. [2]).

В дальнейшем мы будем придерживаться обозначений статьи [2]. Суммируемость собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$ понимаем в смысле определения, приводимого Лидским в [3], стр. 17.

Теорема 1. Пусть

1) $|\arg(Cf,f)| < \alpha \leqslant \alpha_0 < \pi/2 \qquad (f \in H)$,

2) $C \in \sigma_p$, где $2\alpha_0 p < \pi$, и нигде не аннулируется,

3) $B > 0$ — ограниченный оператор, удовлетворяющий неравенству (1).

Тогда для каждого вектора $f \in R(Z_2)$ с $\overline{R(Z_2)} = H$ соответствующий ряд Фурье по системе собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$, отвечающий его собственным числам, по модулю превосходящим число $(2\|B^{-1}C\|)^{-1}$ суммируем к f методом Абеля порядка β при $p \leq \beta < \pi/2^{-\alpha}$.

Теорема 2. Если операторы B и C удовлетворяют условиям

1) $B^{-1}C \in \sigma_p$, $p > 0$,

2) $|\arg(B^{-1}Cf,f)| < \gamma\pi/2$ для всех $f \in H$ с $\gamma < \min\{p^{-1}, 2\}$,

3) $\overline{R(B^{-1}C)} = H$ и выполняется (1),

то для любого вектора $f \in R(Z_2)$ с $\overline{R(Z_2)} = H$ его ряд Фурье по системе собственных и присоединенных векторов пучка $L(\lambda)$, отвещающих его собственным числам, по модулю превосходящим число $(2\|B^{-1}C\|)^{-1}$ суммируем к f методом Абеля порядка α при $\gamma > \alpha \geqslant p$.

В этой теореме не требуется самосопряженности и даже ограниченности оператора B.

Литература

1. Горюк И.В., О факторизации квадратичного операторного пучка. Вестн. Моск. ун-та, 1970, № 5, 28-35.
2. Крейн М.Г., Лангер Г.К., О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. Прилож. теории функций в механ. сплошн. среды. т.2, Москва, 1965, 283-322.
3. Лидский В.Б., О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов. Тр. Моск. мат.о-ва,1962, 2, 3-35.

Кишиневский политехнический институт

Кафедра высшей математики

О ПРИВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.Олейников

Линейный дифференциальный оператор порядка $n \geq 2$

$$L(y) = y^{(n)} + p_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + p_1 y' + p_0 y$$

с коэффициентами p_i - рациональными функциями от z — называется приводимым над полем $R(z)$ рациональных функций, если

$$L(y) = P(Q(y)),$$

где P и Q - линейные дифференциальные операторы порядка $< n$ с коэффициентами из $R(z)$.

Линейное дифференциальное уравнение $L(y) = 0$ называется линейно приводимым над $R(z)$, если оно имеет решение $y_0(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющее линейному дифференциальному уравнению порядка $< n$ с коэффициентами из $R(z)$.

Легко показать, что уравнение линейно приводимо тогда и только тогда, когда приводим соответствующий дифференциальный оператор.

Уравнение $L(y) = 0$ называется дифференциально приводимым, если оно имеет решение $y_0(z) \not\equiv 0$ удовлетворяющее алгебраическому дифференциальному уравнению порядка $< n$, т.е. уравнению вида $Q(y) = 0$, где Q - многочлен над $R(z)$ (не обязательно линейный) от $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.

<u>Теорема</u>. Линейное уравнение $L(y) = 0$ является дифференциально приводимым тогда и только тогда, когда, по крайней мере, одно из следующих (нелинейных) уравнений в частных производных относительно f

$$L(z_1, \dots, z_{k-1}, f, G_k f, \dots, G_k^{n-k+1} f) = 0 \qquad (k = 2, 3, \dots, n)$$

имеет среди решений алгебраическую функцию $f = f(z, z_1, \dots, z_{k-1})$. Левые части выписанных уравнений получены заменой в многочлене $L(y, y', \dots, y^{(n)})$ соответственно y на z_1, y' на $z_2, \dots, y^{(k-1)}$ на z_k, $y^{(k)}$ на f, $y^{(k+1)}$ на

$$G_k f = \frac{\partial f}{\partial z_{k-1}} f + \frac{\partial f}{\partial z_{k-2}} z_{k-1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_1} z_2 + \frac{\partial f}{\partial z},$$

$y^{(k+2)}$ на $G_k^2 f$ и т.д.

Сформулированная теорема позволяет, в частности, устанавливать эквивалентность дифференциальной и линейной приводимости в широком классе линейных дифференциальных уравнений над $R(z)$. Метод перехода от алгебраических дифференциальных уравнений к линейным основывается на некоторых специфических свойствах алгебраических функций многих переменных (см. [1,2]).

Эти результаты находят применения в аналитической теории трансцендентных чисел. Именно, в сочетании с теоремой Шидловского [3] они позволяют устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений ряда E-функций.

Литература

1. Олейников В.А., О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых целых функций. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, 32, № 1, 63-92.
2. Салехов В.Х., О дифференциальной неприводимости одного класса дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1977, 235, № 1, 30-33.
3. Шидловский А.Б.,О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций. Изв. АН СССР, сер. матем., 1959, 23, № 1, 35-66.

Московский государственный университет
Кафедра теории функций и функционального анализа

С СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

А.Зарубин и М.Тиунчик

В гильбертовом пространстве H рассмотрим уравнение

$$Au + \lambda u + Ku = h. \tag{1}$$

Здесь A – линейный неограниченный замкнутый оператор с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A)$; K – нелинейный оператор, который имеет вид $Ku = K(u,u)$, где $K(u,v)$ линейно зависит от v ; λ – неотрицательный параметр. Предположим еще, что A – симметричный положительно определенный оператор. Тогда [1] можно ввести энергетическое пространство H_0, в котором норма определяется равенством $\|u\|_0 = (Au,u)^{1/2}$ и на области определения $\mathfrak{D}(A)$ можно ввести норму графика (см. [2])

$$\|u\|_1 = \|u\|_{H_1} = \|Au\|.$$

Пространство $H_1 = \mathfrak{D}(A)$ будет банаховым пространством.

Для уравнения (1) рассмотрим итерационный процесс

$$Au_{n+1} + \lambda u_{n+1} + K(u_n, u_{n+1}) = h \qquad (n = 0,1,\ldots), \tag{2}$$

где u_0 – произвольный элемент из H_1 . Изучим вопросы быстроты сходимости последовательных приближений u_n к одному из точных решений уравнения (1) по норме пространства H_1. Предполагаем, что линейные уравнения (2) разрешимы в H_1.

<u>Теорема 1</u>. Пусть для любых $u, v \in H_1$ выполнены условия

$$(K(u,v), v) \geqslant 0,$$

$$\|K(u,v)\| \leq \mu(\|u\|_0)\,\|v\|_0^{\tau}\,\|Av\|^{1-\tau} \qquad (0<\tau<1),$$

7

где μ – неотрицательная неубывающая непрерывная функция. Тогда

$$\|u_{n+1}\|_1 \leq C_2 \equiv [2^{3/2} + 2^{3/2\tau}\, \tau(1-\tau)^{\frac{1-\tau}{\tau}} (\mu(C_1\|h\|))^{1/\tau} C_1]\|h\|,$$

где C_1 – норма оператора вложения H_0 в H.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и

$$\|K(u,v) - K(w,v)\| \leq \mu_1(\|u\|_0 + \|w\|_0)\|v\|_0^{\tau}\|Av\|^{1-\tau}\|u-w\|_0 .$$

Тогда при

$$\lambda > [2^{1/2}\mu_1(2C_1\|h\|)C_1^{\tau}\|h\|^{\tau}C_2^{1-\tau} + \tau(2-2\tau)^{\frac{1-\tau}{\tau}} 2^{\frac{1}{2\tau}}(\mu(C_1\|h\|))^{1/\tau}]^2$$

последовательные приближения сходятся по норме H_1 к элементу u, который является решением уравнения (1) и

$$\|u_n - u\|_1 \leq 2C_4 \frac{(q(\lambda))^{n-1}}{1-q(\lambda)}\|u_1 - u_0\|_0 .$$

Здесь

$$C_4 = 2^{1/2}\mu_1(2C_1\|h\|)(C_1\|h\|)^{\tau}C_2^{1-\tau},$$

$$0 < q(\lambda) \equiv \frac{C_4}{\lambda^{1/2} - \tau(2-2\tau)^{\frac{1-\tau}{\tau}}(2^{1/2}\mu(C_1\|h\|))^{1/\tau}} < 1.$$

Замечание. Если в условиях предыдущих теорем $\tau = 1$, то теорема 2 будет справедлива при

$$\lambda > 2[\mu(C_1\|h\|) + \mu_1(2C_1\|h\|)C_1\|h\|]^2$$

и

$$0 < q(\lambda) = \frac{2^{1/2}\mu_1(2C_1\|h\|)C_1\|h\|}{\lambda^{1/2} - 2^{1/2}\mu(C_1\|h\|)} .$$

В качестве примера рассмотрим прогиб шарнирно опертой по контуру квадратной пластинки, лежащей на сплошном нелинейно упругом основании (см. [3]):

$$D\Delta^2 u + \lambda u + \beta u^3 = h \qquad ((x_1, x_2) \in \Omega) \qquad (3)$$

$$u = \Delta u = 0 \qquad ((x_1, x_2) \in \partial\Omega). \qquad (4)$$

Здесь Ω – квадрат $\{0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1\}$ и $\partial\Omega$ – граница этого квадрата. Все постоянные $\mathcal{D}, \lambda, \beta$ положительны.

Положим $H = L_2(\Omega)$, тогда $H_1 = \overset{\circ}{W}{}_2^4(\Omega)$ и $H_0 = \overline{W}{}_2^2(\Omega)$. Обозначим $Au = \mathcal{D}\Delta^2 u$ и $K(u,v) = \beta u^2 v$. Нормы в соответствующих пространствах таковы

$$\|u\|_1 = \mathcal{D}\|\Delta^2 u\|, \quad \|u\|_0 = \mathcal{D}^{1/2}\|\Delta u\|.$$

Итерационный процесс

$$\mathcal{D}\Delta^2 u_{n+1} + \lambda u_{n+1} + \beta u_n^2 u_{n+1} = h, \quad u_{n+1} = \Delta u_{n+1} = 0$$

будет сходиться в H_1, если

$$\lambda > 18\beta^2 \mathcal{D}^{-5}\|h\|^4.$$

Тогда

$$0 < q(\lambda) \equiv \frac{2^{3/2}\beta\|h\|^2\mathcal{D}^{-5/2}}{\lambda^{1/2} - 2^{1/2}\beta\|h\|^2\mathcal{D}^{-5/2}}.$$

Литература

1. Михлин С.Г., Вариационные методы в математической физике. Москва, 1970.
2. Крейн С.Г., Линейные уравнения в банаховом пространстве. Москва, 1971.
3. Бондарь Н.Г., Нелинейные автономные задачи механики упругих систем. Москва, 1971.

Хабаровский институт народного хозяйства
Кафедра математики

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ФАЭДО—ГАЛЕРКИНА

А. Зарубин

В монографии Крейна [1] рассматриваются уравнения с возмущенными операторами. Здесь исследуются вопросы быстроты сходимости метода Фаэдо—Галеркина в пространствах Бохнера.

Рассмотрим задачу

$$u'(t) + Au(t) + Ku(t) = f(t), \quad u(0) = 0 \tag{1}$$

в произвольном гильбертовом пространстве H. Здесь u и f – искомая и заданная функции, определенные на $[0,1]$ со значениями в H; A – замкнутый неограниченный оператор с плотной в H областью определения; K – линейный оператор с областью определения $D(K) \subset D(A)$. Если на множестве $D(A)$ ввести норму графика

$$\|u\| = \|u\|_H + \|Au\|_H ,$$

то оно превращается в гильбертово пространство, обозночаемое через . Будем считать, что H_1 компактно вложено в H. Через $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2([0,1], H)$ как обычно, обозначим гильбертово пространство всех сильно измеримых на $[0,1]$ со значениями в H функций, для которых конечна норма

$$\|u\|_{\mathcal{B}_2} = \left(\int_0^1 \|u(t)\|_H^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Рассматриваются функции со значениями в гильбертовом пространстве H_1 и имеющие непрерывную производную первого порядка в пространстве H. В множестве всех таких функций вводится норма

$$\|u\|_{\mathcal{B}_2^1} = \left(\int_0^1 \left(\|u(t)\|_{H_1}^2 + \|u'(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}$$

Пространство $\mathcal{B}_2^1$ пополняется по этой норме. Пусть оператор

B сходен с A в гильбертовом пространстве H (см. [2]). Более того, пусть операторы A и B образуют острый угол $(Au, Bu) \geq m \|Au\| \|Bu\|$. Предположим, что операторы A^{-1} и B^{-1} существуют и вполне непрерывны в H. Обозначим через $\{\omega_i\}$ и $\{\varphi_i\}$ полные ортонормированные системы собственных элементов данных операторов таких, что

$$A\omega_i = \mu_i \omega_i \quad , \quad 0<\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots , \quad \mu_n \to \infty , \; n \to \infty ,$$
$$B\varphi_i = \lambda_i \varphi_i \quad , \quad 0<\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots , \quad \lambda_n \to \infty , \; n \to \infty .$$

Линейную оболочку элементов $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ обозначим через H^n. Пусть P_r – оператор ортогонального проектирования H на H^n. В подпространстве $H^n = P^n H$ рассмотрим задачу

$$u'(t) + P_n A u(t) + P_n K u(t) = P_n f(t) \quad , \quad u(0) = 0. \qquad (2)$$

Ее решения $u_n(t)$ называются приближенными решениями задачи (1), построенными по методу Фаэдо—Галеркина. Следуя М.В.Келдышу (см., например, [3]), говорят, что оператор A^{-1} имеет конечный порядок p, если $\sum \mu_i^{-p} < \infty$ при некотором p, $0<p<\infty$.

Теорема 1. Пусть $f \in \mathfrak{B}_2$. Тогда задача (1) имеет единственное решение $u(t)$ из $\mathfrak{B}_2^1$, если A^{-1} имеет конечный порядок p $(0<p<1)$ а оператор K подчинен оператору A с порядком τ

$$\|Kv\|_H \leq c \, \|Av\|_H^{\tau} \, \|v\|_H^{1-\tau} \quad , \qquad \forall \, v \in H_1 \; ,$$

где $\quad 0 \leq \tau < \frac{1-p}{2}$.

Теорема 2. Пусть операторы A и B образуют острый угол и выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (2) при каждом n имеет единственное решение. Приближенные решения $u_n(t)$ сходятся в $\mathfrak{B}_2^1$. Предельный элемент $u(t)$ есть решение задачи (1). Имеет место оценка скорости сходимости

$$\|u_n - u\|_{\mathfrak{B}_2} = O\left(\lambda_{n+1}^{\frac{p-1}{2}+\tau} \right) .$$

Метод Фаэдо—Галеркина для абстрактных параболических уравнений вида (1) изучался в ряде работ П.Е. Соболевского и его учеников.

Литература

1. Крейн С.Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва, 1967.
2. Михлин С.Г., Вариационные методы в математической физике. Москва, 1970.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Москва, 1965.

Хабаровский институт народного хозяйства
Кафедра математики

ОПТИМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б.Габдулхаев

1. В банаховом пространстве X рассмотрим класс однозначно разрешимых линейных интегральных уравнений

$$x(t) + \int_{-1}^{1} h(t,s)\,x(s)\,ds = y(t), \tag{1}$$

определяемый классом коэффициентов $F_0 = \{h, y\}$. Пусть $X_n \subset X$ – произвольно фиксированное подпространство размерности n, а $\mathcal{P}_n = \{P_n\}$ – некоторое множество линейных (т.е. аддитивных и однородных) операторов из X на X_n. Тогда приближенное решение уравнения (1) будем искать как точное решение $x_n^* \in X_n$ приближенного уравнения вида

$$x_n(t) + P_n \int_{-1}^{1} h(t,s)\,x_n(s)\,ds = P_n\, y(t). \tag{2}$$

Задача состоит в том, чтобы среди приближенных уравнений (2) выбрать то, решение которого в том или ином смысле наилучшим (оптимальным) образом аппроксимирует решение $x^* \in X$ точного уравнения (1). Эта задача эквивалентна оптимальному выбору подпространств $X_n \subset X$ и операторов $P_n \in \mathcal{P}_n$.

Ниже рассматривается оптимизация на классе однозначно разрешимых уравнений (1) при $F_0 = W^r H_\omega$, где r – целое неотрицательное число, а $\omega = \omega(\delta)$ – известный модуль непрерывности. Тогда, как известно, $F = \{x^*\} = W^r H_{c\omega}$, где c – положительная постоянная, и можно говорить об оптимизации на классе F.

Введем оптимальную оценку погрешности класса методов (2) на классе F:

$$V_n(F) = \inf_{X_n} \inf_{P_n: X \to X_n} \sup_{x^* \in F} \| x^* - x_n^* \|_X , \tag{3}$$

где inf берется по всевозможным подпространствам $X_n \subset X$ размерности n. Приближенный метод (1),(2) при $X_n = X_n^o \subset X$ и $P_n^o = P_n \in \mathcal{P}_n$ будем называть оптимальным, асимптотически оптимальным, оптимальным по порядку на классе F, если выполняются условия соответственно $\alpha_n = 1$, $\alpha_n \sim 1$, $\alpha_n \asymp 1$, где

$$\alpha_n = V_n(F) / \sup\{\|x^* - x_n^o\| : x^* \in F\},$$

а x_n^o – решение уравнения (2) при $X_n = X_n^o$, $P_n = P_n^o$.

В следующих трех пунктах приводятся некоторые результаты автора (см., например, [2 - 5]), полученные при решении поставленной выше задачи. Отметим, что эти результаты основаны на общей теории приближенных методов и на теории поперечников компактов в функциональных пространствах.

2. Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(1)}$ – множество всех линейных ограниченных операторов из $C[-1,1]$ с обычной нормой на n-мерные подпространства $X_n \subset C[-1,1]$.

Теорема 1. Пусть $X = C[-1,1]$ и $F = W^r H_\omega$. Тогда

$$V_n(F) \asymp \frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{h}\right), \tag{4}$$

и оптимальными по порядку на классе F являются:

а) метод сплайн-коллокации порядка $m \geqslant r$ с равноотстоящими узлами $t_k = -1 + 2k/n$, $k = \overline{0,n}$;

б) полиномиальный метод (1),(2) при $X_n = \mathcal{H}_n = X_n^o$ и $P_n = P_n^o \in \mathcal{P}_n^{(1)}$,

$$P_n^o\,\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\varphi)\{1 - (1 - \lambda_k^{(n)})^{r+1}\}\,T_k(t),\quad \lambda_0^{(n)} = 1, \tag{5}$$

где $\mathcal{H}_n$ – множество всех алгебраических многочленов степени не выше $n-1$, $c_k(\varphi)$ – коэффициенты Фурье или же Фурье—Лагранжа функции $\varphi \in C[-1,1]$ по системе полиномов Чебышева первого рода $T_k(t)$, а треугольная матрица $\lambda_k^{(n)}$ $(k = \overline{1,n-1})$ может иметь значения

$$\lambda_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{2n-1}\ ; \quad \lambda_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n}\,\mathrm{ctg}\,\frac{k\pi}{2n}\ ;$$

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{n-k}{n+1}\cos\frac{k\pi}{n+1} + \frac{\sin(k+1)\pi/(n+1)}{(n+1)\sin\pi/(n+1)}.$$

3. Пусть $X_n = \mathcal{H}_n \subset C[-1,1]$, а $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(2)}$ – класс всех линейных ограниченных проекционных операторов из $C[-1,1]$ на $\mathcal{H}_n$, удовлетворяющих условию $\|P_n\| n^{-r}\omega(1/n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2. Пусть $X = C[-1,1]$ и $F = W^r H_\omega$. Тогда

$$V_n(F) \asymp \frac{\ln n}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6}$$

и оптимальными по порядку являются:

а) метод коллокации по узлам Чебышева как первого, так и второго родов;

б) метод моментов по системе полиномов Чебышева первого рода;

в) метод подобластей по точкам $t_k = \cos(k\pi/n)$, $k = \overline{0,n}$.

4. Пусть теперь $X = \mathcal{L}_{2,\rho}$ с обычной нормой, где $\rho=\rho(t)$ – весовая функция, такая, что $1/\rho(t)$ – тоже весовая функция, а $X_n = \mathcal{H}_n$. Пусть $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(3)}$ – множество всех линейных операторов из $\mathcal{L}_{2,\rho}$ на $\mathcal{H}_n$, таких, что $P_n : \mathcal{L}_{2,\rho} \to \mathcal{L}_{2,\rho}$ неограничены, а $P_n : C \to \mathcal{L}_{2,\rho}$ ограничены. Обозначим через $\{\omega_n(t)\}$ систему ортогональных полиномов с весом $\rho(t)$ на $(-1,1)$, а через $t_k^{(n)}$ $(k=\overline{1,n})$ – корни полинома $\omega_n(t) \in \mathcal{H}_n$.

Теорема 3. Пусть $X = \mathcal{L}_{2,\rho}$ и $F = W^r H_\omega$. Тогда

$$V_n(F) \asymp \frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{\omega}\right), \tag{7}$$

и оптимальным по порядку на классе F является полиномиальный метод коллокации по узлам $t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$.

Заметим, что при доказательстве теоремы 3 существенным образом использован результат Г.М.Вайникко по коллокационному методу (см., например, [1]).

Литература

1. Вайникко Г.М., О сходимости и устойчивости метода коллокации. Дифференц. уравнения, 1965, № 2, 244–254.

2. Габдулхаев Б.Г., Оптимальные методы решения некоторых классов линейных задач. Изв. ВУЗ. Математика, 1976, №6, 20–35.

3. Габдулхаев Б.Г., Поперечники и оптимизация численных методов решения сингулярных интегральных уравнений. Изв. ВУЗ. Математика, 1977, № 8, 95–98.

4. Габдулхаев Б.Г., Оптимизация численных методов решения линейных задач. Изв. ВУЗ. Математика, 1977, № 10, 37–49.

5. Габдулхаев Б.Г., Оптимизация проекционных методов решения дифференциальных уравнений. Дифференц. уравнения, 1978, № 10, 1288–1298.

Казанский государственный университет
Кафедра математического анализа

О МЕТОДЕ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР ДЛЯ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Г. Вайникко и А. Педас

1. Формулировка основного результата. Рассмотрим линейное интегральное уравнение вида

$$u(t) = \int_0^1 \varkappa(|t-s|)u(s)ds + f(t), \quad 0 \le t \le 1. \qquad (1)$$

Переписав (1) в виде (см. [3], стр. 115)

$$u(t) = \int_0^1 \varkappa(|t-s|)[u(s)-u(t)]ds + \int_0^1 \varkappa(|t-s|)ds \cdot u(t) + f(t),$$

применим метод механических квадратур с формулой средних прямоугольников:

$$\xi_i = h \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \varkappa(|i-j|h)(\xi_j - \xi_i) + \int_0^1 \varkappa(|(i-\tfrac{1}{2})h - s|)ds \cdot \xi_i +$$
$$+ f((i-\tfrac{1}{2})h), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2)$$

Здесь $\xi_i \equiv \xi_i^{(n)} \approx u^*((i-\frac{1}{2})h)$ – приближенные значения искомого решения $u^*(t)$ уравнения (1), $h = 1/n$.

Теорема 1. Пусть ядро $\varkappa(\tau)$ интегрального уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируемо при $0 < \tau \le 1$, удовлетворяет оценкам

$$|\varkappa(\tau)| \le b(\tau^{-\beta}|\ln\tau|^m + 1) \quad (0<\tau\le 1;\ b=\mathrm{const}); \qquad (3)$$

$$\left|\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)\right| \le b'(\tau^{-(\beta+1)}|\ln\tau|^m + 1) \quad (0<\tau\le 1;\ b'=\mathrm{const}); \qquad (4)$$

$$\left|\frac{d^2}{d\tau^2}\varkappa(\tau)\right| \le b''(\tau^{-(\beta+2)}|\ln\tau|^m + 1) \quad (0<\tau\le 1;\ b''=\mathrm{const}), \qquad (5)$$

где $0 \le \beta = \mathrm{const} < 1$, а $m \ge 0$ – некоторое целое число, и пусть существуют конечные пределы

$$\lim_{\tau\to 0+} \frac{\tau^{\beta}}{|\ln\tau|^m}\,\varkappa(\tau)\ ;\quad \lim_{\tau\to 0+} \frac{\tau^{\beta+1}}{|\ln\tau|^m}\,\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau).$$

Пусть свободный член $f(t)$ уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируем при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть, наконец, уравнение (1) имеет единственное решение $u^*(t)$.

Тогда система уравнений (2) имеет при достаточно больших n единственное решение $(\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*)$ и справедлива оценка

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} \left|\xi_i^* - u^*((i-\tfrac{1}{2})h)\right| \leqslant C h^{2(1-\beta)}\left(|\ln h|^{2m}+1\right) \quad (C=\mathrm{const}). \qquad (6)$$

В условиях теоремы 1 решение $u^*(t)$ уравнения (1) негладко. Точнее (см. [4]), $u^* \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, причем

$$\left|\frac{d}{dt}u^*(t)\right| \leqslant C_1\left(\frac{|\ln t|^m}{t^{\beta}} + \frac{|\ln(1-t)|^m}{(1-t)^{\beta}}\right) \quad (0<t<1;\ C_1=\mathrm{const}); \qquad (7)$$

$$\left|\frac{d^2}{dt^2}u^*(t)\right| \leqslant C_2\left(\frac{|\ln t|^m}{t^{\beta+1}} + \frac{|\ln(1-t)|^m}{(1-t)^{\beta+1}}\right) \quad (0<t<1;\ C_2=\mathrm{const}). \qquad (8)$$

Если $u^*(0) \neq 0$, $u^*(1) \neq 0$, то эти оценки неулучшаемы в смысле порядка. Поэтому добиться высокой степени точности приближенных методов в условиях теоремы 1 довольно сложно. Для сравнения напомним, что в случае применения метода механических квадратур с формулой средних прямоугольников непосредственно к уравнению (1) получается лишь оценка (ср., например, [2, 4]) порядка $O(h^{1-\beta}|\ln h|^m)$.

2. <u>Схема доказательства теоремы 1</u>. Положим $t_i = (i-\frac{1}{2})h$ и обозначим через $C_h[0,1]$ пространство сеточных функций $u_n(t)$ на сетке t_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) с нормой

$$\|u_n\|_{C_h} = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |u_n(t_i)|.$$

Уравнение (1) и систему (2) рассмотрим как операторные уравнения $u = Tu + f$ и

$$u_n = T_n u_n + p_n f \qquad (9)$$

в банаховых пространствах $E = C[0,1]$ и $E_n = C_h[0,1]$ соответственно. Здесь операторы $p_n : E \to E_n$ определены формулой

$(p_n u)(t_i) = u(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Стандартными рассуждениями (ср. [1, 2, 4]) устанавливается, что $T_n \to T$ компактно относительно связывающих отображений p_n. По теореме сходимости для операторных уравнений (см. [1], стр. 49) получаем, что при достаточно больших n уравнение (9) имеет единственное решение u_n^* и

$$\|u_n^* - p_n u^*\|_{C_h} \leq c_3 \|p_n T u^* - T_n p_n u^*\|_{C_h} \quad (c_3 = \text{const}).$$

В нашем случае эта оценка примет вид

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \xi_i^* - u^*(t_i) \right| \leq c_3 \max_{1 \leq i \leq n} \left| \int_0^1 v_i(s)\,ds - h \sum_{j=1}^{n} v_i(t_j) \right|, \quad (10)$$

где

$$v_i(s) = \varkappa(|s - t_i|)(u^*(s) - u^*(t_i)).$$

Оценка правой части неравенства (10) проводится на основании неравенств (3)-(5), (7)-(8) и

$$\left| \int_{kh}^{\ell h} x(s)\,ds - h \sum_{j=k+1}^{\ell} x(t_j) \right| \leq$$

$$\leq \min \left\{ h \int_{kh}^{\ell h} \left| \frac{d}{ds} x(s) \right| ds, \frac{1}{8} h^2 \int_{kh}^{\ell h} \left| \frac{d^2}{ds^2} x(s) \right| ds \right\},$$

и в результате дает оценку (6). Подробные выкладки будут опубликованы в дальнейшем.

Литература

1. Вайникко Г.М., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. Вайникко Г., Педас А., О решении интегральных уравнений с логарифмической особенностью методом механических квадратур. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 201-210.
3. Канторович Л.В., Крылов В.И., Приближенные методы высшего анализа. Москва-Ленинград, 1962.
4. Педас А.А., О приближенном решении интегральных уравнений со слабой особенностью. Канд. дисс., Тарту, 1978.

Тартуский государственный университет

Кафедра вычислительной математики

ОБ АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

О. Карма

1 (постановка задачи). Рассмотрим следующие задачи оптимального управления:

задача (I): найти $F^0 = \min\{F(w,u) : w \in W,\ A(w)u = v(w)\}$,

задача (II): найти $w^0 \in W$, реализующий минимум в задаче (I).

Здесь W — некоторое множество (множество допустимых управлений); $A(\cdot)$ — заданная на W оператор-функция, $A(w): \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, где $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — банаховы пространства; $v(\cdot)$ — заданная на W функция, $v(w) \in \mathcal{V}$; $F(\cdot,\cdot)$ — заданный на $W \times \mathcal{U}$ функционал (критерий управления). Пусть решения задач (I), (II) ищутся приближенно как решения (при подходящем значении индекса $i \in J$) следующих задач:

задача (I_i): найти $\Phi_i^0 = \min\{\Phi_i(z_i, x_i) : z_i \in Z_i,\ B_i(z_i)x_i = y_i(z_i)\}$,

задача (II_i): найти $z_i^0 \in Z_i$, реализующий минимум в задаче (I_i).

Здесь J — некоторая бесконечная последовательность индексов (полуупорядоченное соотношением $\succcurlyeq$ направленное множество); Z_i $(i \in J)$ — некоторые множества; $B_i(\cdot): Z_i \to (\mathcal{X}_i \to \mathcal{Y}_i)$, где $\mathcal{X}_i$, $\mathcal{Y}_i$ — банаховы пространства; $y_i(\cdot): Z_i \to \mathcal{V}$; $\Phi_i(\cdot,\cdot): Z_i \times \mathcal{X}_i \to R$.

Оказывается, что при определенных условиях имеет место сходимость $\Phi_i^0 \to F^0$ $(i \in J)$, а также сходимость в некотором смысле z_i^0 к w^0 (при $i \in J$). Для доказательства мы налагаем добавочные требования на величины, встречающиеся в постановке задач (I) и (I_i), а также требования, связывающие задачи (I) и (I_i).

2 (дискретная сходимость). Пусть M и M_i $(i \in J)$ — некоторые множества. Мы будем говорить [3], что задана сходимость $\xrightarrow[M_i, M]{}$, если задано однозначное отображение lim, определенное на последовательностях вида[1] $\{m_i, i \in J'\}$ с $m_i \in M_i$ $(i \in J')$ и со значениями в M, причем[2] :

(1) $\forall m \in M \ \exists \{m_i, i \in J\} \in \mathcal{D}(\lim): \lim \{m_i, i \in J\} = m$,

(2) $\lim \{m_i, i \in J'\} = m \Rightarrow \lim \{m_i, i \in J''\} = m, \quad \forall J'' \subset J'$,

(3) $\lim \{m_i, i \in J'\} \neq m \Rightarrow \exists J'' \subset J' : \neg \exists J''' \subset J'' : \lim \{m_i, i \in J'''\} = m$.

Последовательности $\{m_i, i \in J'\} \in \mathcal{D}(\lim)$ будем называть сходящимися (в M). Запись $m_i \xrightarrow[M_i, M]{} m$ $(i \in J')$ означает, что $\{m_i, i \in J'\} \in \mathcal{D}(\lim)$, $\lim \{m_i, i \in J'\} = m$. Если ясно, о какой сходимости идет речь, то будем писать просто $m_i \to m$ $(i \in J')$. Последовательность $\{m_i, i \in J'\}$ с $m_i \in M_i$ будем называть компактной (относительно сходимости $\xrightarrow[M_i, M]{}$), если из каждой ее подпоследовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

3 (предположения). Мы будем предполагать, что выполнены следующие требования[3] :

A1) $A(w) \in \mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathcal{V}), \quad \forall w \in \mathcal{W}$;

A2) $A(w) u = 0 \Rightarrow u = 0, \quad \forall w \in \mathcal{W}$;

B1) $B_i(z_i) \in \mathcal{C}(X_i, Y_i)$, $\mathcal{D}(B_i(z_i)) = \mathcal{D}_i \subset X_i$ не зависит от $z_i \in Z_i$;

B2) $B_i(z_i) X_i \neq Y_i \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_i \in \mathcal{D}_i : \|x_i\| = 1, \ \|B_i(z_i) x_i\| \leq \varepsilon$
(например, $B_i(z_i)$ — фредгольмовы с индексом 0);

B3) Z_i, $(i \in J)$ — бикомпактные топологические пространства;

---

[1] Через $J', J'', \ldots$ будем обозначать конфинальные подмножества множества J, наделенные индуцированной топологией.

[2] Через $\mathcal{D}(\lim)$ будем обозначать область определения отображения lim.

[3] Через $\mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ будем обозначать пространство линейных замкнутых операторов, действующих из $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$; $\mathcal{D}(A)$ — область определения оператора $A \in \mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$. Через $\mathcal{B}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ будем обозначать пространство линейных ограниченных операторов с $\mathcal{D}(A) = \mathcal{U}$.

В4) $B_i(\cdot)x_i$, $y_i(\cdot)$ — непрерывные функции на Z_i при каждом $x_i \in \mathcal{D}_i$, $i \in J$, $\quad (B_i(\cdot)x_i : Z_i \to X_i, \quad y_i(\cdot): Z_i \to Y_i)$;

В5) $\Phi_i(\cdot,\cdot): Z_i \times X_i \to R$, $i \in J$ — непрерывные по совокупности переменных функционалы;

С1) заданы две сходимости[4] $\xrightarrow[z_i, w]{}$ и $\overset{-\,-\,\to}{\scriptstyle z_i, w}$, причем

(1) $z_i \longrightarrow w \quad (i \in J) \Rightarrow z_i \dashrightarrow w \quad (i \in J)$

(эти сходимости могут и совпадать),

(2) каждая последовательность $\{z_i, i \in J\}$ компактна относительно сходимости $\overset{-\,-\,\to}{\scriptstyle z_i, w}$;

С2) заданы сходимости $\xrightarrow[x_i, u]{}$ и $\xrightarrow[y_i, v]{}$ со свойствами[5] :

(1) $x_i \to u \neq 0 \quad (i \in J) \Rightarrow \exists i_1 \in J: \quad 0 < c_1(u) \le \|x_i\| \le c_2(u), \quad i \geq i_1$,

(2) $y_i \to v \neq 0 \quad (i \in J) \Rightarrow \exists i_1' \in J: \quad 0 < c_1'(v) \le \|y_i\| \le c_2'(v), \quad i \geq i_1'$,

(3) $x_i \to 0 \quad (i \in J) \Leftrightarrow \|x_i\| \to 0 \quad (i \in J)$,

(4) $y_i \to 0 \quad (i \in J) \Leftrightarrow \|y_i\| \to 0 \quad (i \in J)$;

С3) пара $(A(\cdot), (B_i(\cdot), i \in J))$ — a-регулярна [2] относительно сходимостей $\overset{-\,-\,\to}{\scriptstyle z_i, w}$, $\xrightarrow[x_i, u]{}$, $\xrightarrow[y_i, v]{}$, т.е.

$$z_i \dashrightarrow w, \ \|x_i\| \le 1, \ x_i \in \mathcal{D}_i, \ B_i(z_i)x_i \to v \quad (i \in J') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists J'' \subset J', \ u \in \mathcal{D}(A(w)): \ x_i \to u \ (i \in J''), \ A(w)u = v;$$

С4) функции $y_i(\cdot)$ сходятся к $v(\cdot)$ относительно сходимостей $\overset{-\,-\,\to}{\scriptstyle z_i, w}$ и $\xrightarrow[y_i, v]{}$, т.е. $z_i \dashrightarrow w \ (i \in J') \Rightarrow y_i(z_i) \to v(w) \ (i \in J')$;

С5) функционалы $\Phi_i(\cdot,\cdot)$, $i \in J$ удовлетворяют следующим требованиям:

(1) $z_i \to w, \ x_i \to u \ (i \in J) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists i_\varepsilon: \ \Phi_i(z_i, x_i) \le F(w, u) + \varepsilon, \quad i \geq i_\varepsilon$,

(2) $z_i \dashrightarrow w, \ x_i \to u \ (i \in J) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists i_\varepsilon': \ \Phi_i(z_i, x_i) \ge F(w, u) - \varepsilon, \quad i \geq i_\varepsilon'$.

---

[4] Элементы пространства W обозначены через $w, w', w_1, \ldots$, элементы пространства Z_i — через $z_i, z_i', \ldots$, элементы пространства U — через $u, u', u_1, \ldots$ и т.д.

[5] Через $c, c', \ldots$ будем обозначать константы, в разных местах, вообще говоря, разные. Запись $c(t)$ означает, что константа может зависеть от величины t.

4 (утверждения). Пусть выполнены все требования, перечисленные в п. 3. Тогда

1) $\mathcal{D}(A(w)) = \mathcal{D} \subset \mathcal{U}$ не зависит от w и при всех w существуют обратные $A(w)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$,
2) задачи (I), (II) имеют решения,
3) начиная с некоторого индекса i_0 при всех $z_i \in Z_i$ существуют операторы $B_i(z_i)^{-1} \in \mathcal{B}(Y_i, X_i)$, причем $\| B_i(z_i)^{-1} \| \le C$, $\forall z_i \in Z_i$, $i \ge i_0$; обозначим $J_0 = \{ i \in J : i \ge i_0 \}$,
4) задачи (I_i), (II_i), $i \in J_0$ имеют решения,
5) $\Phi_i^0 \to F^0$ $(i \in J_0)$,
6) каждая последовательность $\{z_i^0, i \in J\}$ решений задач (II_i) компактна относительно сходимости $\overrightarrow{Z_i, W}$ и
   $z_i^0 \dashrightarrow w^0$ $(i \in J') \Rightarrow w^0$ — решение задачи(II),
   $x_i(z_i^0) = B_i(z_i^0)^{-1} y_i(z_i^0) \to A(w^0)^{-1} v(w^0) = u(w^0)$ $(i \in J')$,
7) пусть $\{x_i(z_i), i \in J\}$ — некоторая последовательность функций $Z_i \to X_i$ таких, что $\| B_i(z_i) x_i(z_i) - y_i(z_i) \| \le \delta_i$ и пусть $\tilde{z}_i, i \in J$ найдены так, что $| \Phi_i(\tilde{z}_i, x_i(\tilde{z}_i)) - \inf_{z_i} \Phi_i(z_i, x_i(z_i)) | \le$ $\le \delta_i'$; если $\delta_i, \delta_i' \to 0$ $(i \in J)$, то последовательности $\{\tilde{z}_i, i \in J\}$ и $\{x_i(\tilde{z}_i), i \in J\}$ компактны относительно сходимостей $\overrightarrow{Z_i, W}$ и $\overrightarrow{X_i, \mathcal{U}}$, и
   $\tilde{z}_i \dashrightarrow w^0 (i \in J') \Rightarrow w^0$ — решение задачи (II),
   $x_i(\tilde{z}_i) \to A(w^0)^{-1} v(w^0) = u(w^0)$ $(i \in J')$.

Литература

1. Вайникко Г., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. Grigorieff, R. D., Zur Theorie approximations-regulärer Operatoren. Math. Nachr., 1973, 55, 233-263.
3. Stummel, F., Discrete convergence of mappings. Top. Numer. Anal., London-New-York, 1973, 285-310.

Тартуский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

МЕТОД ПОДОБЛАСТЕЙ В ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Р. Керге

Рассмотрим проблему собственных значений для краевой задачи с нелинейным вхождением параметра:

$$A(\lambda)x \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t,\lambda)\, x^{(j)}(t) = 0,$$
$$\varphi_k(\lambda)x \equiv \sum_{j=0}^{m-1} [\alpha_{kj}(\lambda)\, x^{(j)}(a) + \beta_{kj}(\lambda)\, x^{(j)}(b)] = 0, \quad k=1,\dots,m.$$

Приближенное решение ищется в виде

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{n+m} a_j t^j ,$$

коэффициенты a_j определяются из условий (t_i -узлы Чебышева)

$$\int_{t_i}^{t_i+1} A(\lambda)\, x_n\, dt = 0 , \quad i = 0,1,\dots,n ,$$
$$\varphi_k(\lambda)\, x_n = 0 , \quad k = 1,\dots,m . \tag{2}$$

Задачи (1) и (2) равносильны (см. [3]), соответственно, уравнениям $L(\lambda)x=0$ и $L_n(\lambda)x_n=0$, где $L(\lambda), L_n(\lambda)$ при фиксированном λ - линейные операторы из $E = C^{m-1}[a,b]$ в $F = C_0[a,b]\times \mathbb{C}^m$ (здесь $C_0[a,b] = \{y\in C[a,b] : y(a)=0\}$) и действуют по формулам

$$L(\lambda)x = (\mathcal{J} A(\lambda)x ,\ \varphi_1(\lambda)x, \dots, \varphi_m(\lambda)x) ,$$
$$L_n(\lambda)x = (A_n(\lambda)x ,\ \varphi_1(\lambda)x, \dots, \varphi_m(\lambda)x) ;$$

здесь

$$(\mathcal{J} y)(t) = \int_a^t y(s)\, ds ,$$

$$A_n(\lambda)x_n = x_n^{(m-1)}(t) - x_n^{(m-1)}(a) + $$
$$+ P_{n+1}\mathcal{J}\sum_{j=0}^{m-1} p_j(t,\lambda)\, x_n^{(j)}(t) -$$
$$-\Big(P_{n+1}\mathcal{J}\sum_{j=0}^{m-1} p_j(t,\lambda)\, x_n^{(j)}(t)\Big)(a) ,$$

P_{n+1} - проектор Лагранжа.

9

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$ - некоторая область; обозначим через $S(L)$ и $S(L_n)$ спектры задач (1) и (2) в Λ.

Теорема. Пусть

1) существует $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{C}$, при котором задача (1) имеет в $C^m[a,b]$ лишь нулевое решение;

2) коэффициенты $p_j(t,\lambda):[a,b]\times\Lambda \to \mathbb{C}$ $(j=0,1,\ldots,m-1)$ непрерывны по t и λ и голоморфны по λ при каждом $t\in[a,b]$;

3) выполнены условия

$$\max_{a\le t\le b}\left|\frac{p_j(t,\lambda+\Delta\lambda)-p_j(t,\lambda)}{\Delta\lambda}-\frac{\partial p_j(t,\lambda)}{\partial\lambda}\right|\to 0 \text{ при } \Delta\lambda\to 0,$$

$(j=0,1,\ldots,m-1)$;

4) коэффициенты $\alpha_{kj}(\lambda), \beta_{kj}(\lambda):\Lambda\to\mathbb{C}$ голоморфны.

Тогда для каждого $\lambda_0\in S(L)$ существует последовательность $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n\in S(L_n)$, $\lambda_n\to\lambda_0$ $(n\geqslant n_0)$, и справедливы оценки

$$|\lambda_n-\lambda_0|\le c\;\varepsilon_n^{1/\varkappa},$$

$$|\hat\lambda_n-\lambda_0|\le c\cdot\varepsilon_n,$$

$$d(x_n^0, N(L(\lambda_0)))\le c\cdot\varepsilon_n^{1/\varkappa},$$

где $\varepsilon_n=\max\limits_{|\lambda-\lambda_0|\le\delta}\ \max\limits_{\substack{x\in W\\ \|x\|=1}}\|L_n(\lambda)x-L(\lambda)x\|_C\le c'\max\limits_{\substack{x\in W\\ \|x\|=1}}(1+\ln n)e_{n+1}(x^{(m-1)})$,

δ - достаточно малое положительное число, $c=c(\delta)=const$, $\hat\lambda_n$ - взвешенные арифметические средние $\lambda_n\in S(L_n)$, сходящихся к λ_0, $\varkappa$ - наибольшая длина корневых цепочек, W - корневое подпространство задачи (1), соответствующее λ_0,

$$N(L(\lambda_0))=\{x\in E: L(\lambda_0)x=0\},\quad e_n(x)=\inf_{b_0,\ldots,b_n}\|x-\sum_{k=0}^{n}b_k t^k\|_C.$$

Если коэффициенты $p_j(t,\lambda)$ $(j=0,\ldots,m-1)$ непрерывны дифференцируемы r $(r\geqslant 0)$ раз по t, то $W\subset C^{m+r}$ и

$\varepsilon_n\le c\,(1+\ln n)\cdot n^{-(r+1)}$.

Доказательство теоремы основано на проверке условий общих теорем из [1], стр. 69-72, и [2]. Условия теоремы 2)-4) обеспечивают голоморфность оператор-функции $L(\cdot): \Lambda \to \mathcal{L}(C^{m-1}, C)$ и выполнение условия $\max_{\lambda \in \Lambda_0} \|L_n(\lambda)\| \leq$ $\leq c(\Lambda_0) = const \quad (n \geq n_0)$ для любого замкнутого ограниченного множества $\Lambda_0 \subset \Lambda$. Регулярная сходимость $L_n(\lambda) \to L(\lambda)$ установлена в [3].

Замечание. Теорема переносима на случай

$$A(\lambda)x \equiv x^{(m)}(t) + B(\lambda)x(t) = 0,$$

где $B(\lambda)$ при фиксированном λ - произвольная голоморфная оператор-функция со значениям в $\mathcal{L}(C^{m-1}, L^p)$, $p > 1$. В частности, $B(\lambda)$ может быть дифференциальным оператором

$$B(\lambda)x \equiv \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t,\lambda)\, x^{(j)}, \quad p_j(t,\lambda) \in L^p(a,b), \quad p > 1,$$

или интегро-дифференциальным оператором

$$B(\lambda)x \equiv \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t,\lambda)\, x^{(j)} + \sum_{j=0}^{m-1} \int_a^b K_j(t,s,\lambda)\, x^{(j)}(s)\, ds$$

с какими-нибудь условиями на ядра $K_j(t,s,\lambda)$, гарантирующими действие и ограниченность интегральных операторов из C в L^p.

Литература

1. Вайникко Г., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. Карма О., Асимптотические оценки скорости сходимости собственных значений при регулярной аппроксимации. Республиканский симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Тезисы докладов, Таллин, 1978, 37-38.
3. Керге Р., К оценке погрешности метода подобластей. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1978, 18, № 3, 628-633.

Тартуский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

О СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИОННО-ИТЕРАТИВНОГО МЕТОДА

И. Саарнийт

Пусть в метрическом пространстве E с метрикой $|.,.|$ дано уравнение

$$x = Tx \tag{1}$$

с оператором $T \in (E \to E)$, имеющее решение x^*. Для приближенного нахождения этого решения построим последовательность метрических (как правило, конечномерных) пространств E_n, $n = 1, 2, \ldots$, с метриками $|.,.|_n$, которые свяжем с пространством E операторами $r_n \in (E \to E_n)$. Исходную задачу (1) заменим в пространстве E_n задачей

$$x_n = T_n x_n . \tag{2}$$

Пусть уравнение (2) имеет решение $x_n^* \in E_n$. Пространства E_n и операторы $T_n \in (E_n \to E_n)$ подберем так, чтобы x_n^* аппроксимировали $x^* \in E$ в следующем смысле (см. [1]):

$$|x_n^*, r_n x^*|_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Приближенные решения $z_n \in E_n$ задачи (1) будем строить при помощи аппроксимационно-итеративного метода (АИМ)

$$z_n = (T_n)^{\alpha_n} \vartheta_n z_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Здесь $\vartheta_1 z_0 \in E_1$ – начальное приближение, $\vartheta_n \in (E_{n-1}, E_n)$, $n > 1$, – операторы перехода, $\alpha_n \geq 0$ - целые числа. Рассматриваемый метод является обобщением АИМ, описанного в [2].

Пусть операторы T_n удовлетворяют неравенству

$$|T_n x_n, T_n x_n^*|_n \leq \mu_n(|x_n, x_n^*|_n), \tag{4}$$

где μ_n - определенные на интервале $[0, \rho_n)$, $\rho_n = const > 0$, неотрицательные неубывающие функции такие, что

$$\mu_n^i(s) \to 0, \ i \to \infty, \quad \text{при} \quad \forall s \in [0, \rho_n). \tag{5}$$

В условии (5) через $\mu_n^i(s)$ обозначена i-я суперпозиция функции μ_n, т.е. $\mu_n^1(s) = \mu_n(s)$, $\mu_n^i(s) = \mu_n(\mu_n^{i-1}(s))$, $i > 1$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (4) и (5), а также неравенства

$$|\vartheta_n x_{n-1}, \vartheta_n y_{n-1}|_n \leq L_n |x_{n-1}, y_{n-1}|_{n-1},\ x_{n-1}, y_{n-1} \in E_{n-1},\ L_n = const, n>1; \quad (6)$$

$$|x_n^*, \vartheta_n x_{n-1}^*|_n < \rho_n,\ n \geq 1.$$

Тогда при достаточно близком к x_1^* начальном приближении $\vartheta_1 z_0$ существует последовательность $\{\alpha_n\}, n \geq 1$, такая, что АИМ (3) сходится, т.е.

$$|z_n, \tau_n x^*|_n \to 0,\ n \to \infty.$$

Более того, для любой последовательности $\varepsilon_n \to 0, n \to \infty$, существует такая последовательность $\{\alpha_n\}, n \geq 1$, что

$$|z_n, \tau_n x^*|_n \leq |x_n^*, \tau_n x^*|_n + \varepsilon_n.$$

Усилим требования, налагаемые на операторы T_n. Пусть на интервале $[0, \rho)$ имеет место неравенство

$$\mu_n(s) \leq \mu(s),\ n \geq 1,$$

где μ - определенная на этом интервале неотрицательная неубывающая функция, удовлетворяющая условию, аналогичному (5). Кроме того, пусть для любой невозрастающей последовательности $\{s_i\}$, имеющей предел s, т.е. такой, что $s_i \searrow s,\ i \to \infty$, выполняется условие

$$s_i \searrow s,\ i \to \infty \implies \mu(s_i) \searrow \mu(s),\ i \to \infty,\ s_i, s \in [0, \rho), \quad (7)$$

а в неравенстве (6) числа $L_n \leq L = const,\ n > 1$.

Замечание 1. Если функция μ удовлетворяет условию (7), то условие (5) будет равносильно условию

$$\mu(s) < s \text{ при } \forall s \in (0, \rho).$$

При сделанных предположениях справедлива

Теорема 2. Пусть имеет место сходимость

$$|x_n^*, \vartheta_n x_{n-1}^*|_n \to 0,\ n \to \infty, \quad (8)$$

и существуют числа $\rho' \leq \rho$ и $\alpha' \geq 1$ такие, что

$$L\mu^{\alpha'}(s) < s \text{ при } s \in (0, \rho').$$

Тогда при достаточно близком к x_1^* начальном приближении существует целое число $\alpha \geq \alpha'$, что АИМ (3) сходится при любых $\alpha_n \geq \alpha,\ n \geq 1$.

Если последовательность $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, удовлетворяет условиям

$$|x_n^*, \vartheta_n x_{n-1}^*|_n \leq \gamma \varepsilon_n, \quad \gamma - const,$$

и

$$\varepsilon_n \geq \delta \varepsilon_{n-1}, \quad n > 1, \quad \delta = const,$$

и существуют числа $\rho'' \leq \rho$ и $\alpha'' \geq 1$ такие, что

$$\left(\gamma + \frac{L}{\delta}\right) \mu^{\alpha''}(s) \leq s \quad \text{при} \quad s \in [0, \rho''),$$

то при $\alpha_n \geq \alpha''$

$$|z_n, z_n x^*|_n \leq |x_n^*, z_n x^*|_n + \varepsilon_n, \quad n \geq 1.$$

Замечание 2. Ввиду неравенства

$$|x_n^*, \vartheta_n x_{n-1}^*|_n \leq |x_n^*, z_n x^*|_n + |z_n x^*, \vartheta_n z_{n-1} x^*|_n + L |z_{n-1} x^*, x_{n-1}^*|_{n-1}$$

сходимость (8) вытекает из условия

$$|z_n x^*, \vartheta_n z_{n-1} x^*|_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Литература

1. Вайникко Г., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. Kluge, R., On a class of iteration methods. "Math. Nachr.", 1976, 73, 7–18.

Тартуский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

О КОМПАКТНОЙ СХОДИМОСТИ РЕЗОЛЬВЕНТ И ПОЛУГРУПП

С. Пискарев

§ 1. Аппроксимация спектра

Будем пользоваться понятиями и обозначениями [1,2].

Теорема 1. Пусть $A \in C(E)$, $A_n \in C(E_n)$, операторы A_n имеют компактные резольвенты и $\mathcal{R}(\lambda; A_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathcal{R}(\lambda; A)$ компактно при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда область регулярности

$$\Delta_r(A, A_n) = \mathbb{C}.$$

Доказательство. Рассмотрим тождество Гильберта

$$\mathcal{R}(\lambda;A) - \mathcal{R}(\mu;A) = (\lambda-\mu)\mathcal{R}(\lambda;A)\mathcal{R}(\mu;A), \quad \lambda,\mu \in \rho(A).$$

Из него следует, что $1-(\lambda-\mu)\mathcal{R}(\lambda;A)$ обратим для любого $\lambda \in \rho(A)$. Компактная сходимость резольвент дает (см. [1]) регулярную сходимость

$$1-(\lambda-\mu)\mathcal{R}(\lambda;A_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} 1-(\lambda-\mu)\mathcal{R}(\lambda;A)$$

и, значит, учитывая тот факт, что $\operatorname{ind}\left(1-(\lambda-\mu)\mathcal{R}(\lambda;A_n)\right) = 0$, получим (см. [1], стр. 35)

$$\left[1-(\lambda-\mu)\mathcal{R}(\lambda;A_n)\right]^{-1} \xrightarrow{\mathcal{PP}} \left[1-(\lambda-\mu)\mathcal{R}(\lambda;A)\right]^{-1}.$$

Отсюда и из тождества Гильберта следует компактная сходимость $\mathcal{R}(\mu;A_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathcal{R}(\mu;A)$ для любого $\mu \in \rho(A)$. По теореме из [2] имеем $\mu \in \Delta_r$, т.е. справедливо включение $\rho(A) \subset \Delta_r$.

Пусть теперь $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Покажем, что $A_n+\lambda_0$ и $A+\lambda_0$ регулярно согласованы. Предположим, что $\|x_n\|=1$ и $(A_n+\lambda_0)x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} y$, $n \in N' \subset N$. Выберем $\mu \in \rho(A)$, тогда

$$\mathcal{R}(\mu;A_n)(A_n+\lambda_0)x_n = x_n + (\lambda_0-\mu)\mathcal{R}(\mu;A_n)x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{R}(\mu;A)y \in \mathcal{D}(A).$$

Ввиду $\mathcal{P}$-компактности $\{\mathcal{R}(\mu;A_n)x_n\}$ отсюда следует, что последовательность $\{x_n\}$ $\mathcal{P}$-компактна. Пусть $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, а также $\mathcal{R}(\mu;A_n)x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} z$, $n \in N'' \subset N'$, тогда

$$(\lambda_0-\mu)\mathcal{R}(\mu;A_n)x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} (\lambda_0-\mu)\mathcal{R}(\mu;A)x = (\lambda_0-\mu)z \in \mathcal{D}(A).$$

Отсюда $x+(\lambda_0-\mu)\mathcal{R}(\mu;A)x = \mathcal{R}(\mu;A)y$, поэтому $x \in \mathcal{D}(A)$, причем $\mathcal{R}(\mu;A)[(A+\lambda_0)x-y]=0$. Таким образом, $y=(A+\lambda_0)x$, следовательно, $\sigma(A)\subset\Delta_t$. Теорема доказана.

Покажем теперь как можно переформулировать одно из условий теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $\Delta_c \cap \rho(A) \neq \phi$. Для компактной сходимости резольвент $\mathcal{R}(\lambda;A_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathcal{R}(\lambda;A)$ необходимо, чтобы для каждого $\zeta \in \Delta_c \cap \rho(A)$ выполнялась импликация

$$\|x_n\| = O(1),\ \|(A_n+\zeta)x_n\| = O(1) \Rightarrow \{x_n\}\ \mathcal{P}\text{-компактна}, \quad (1)$$

и достаточно, чтобы импликация (1) имела место хотя бы при одном $\zeta \in \Delta_c \cap \rho(A)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}(\mu;A_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathcal{R}(\mu;A)$ компактно для некоторого $\mu \in \Delta_c \cap \rho(A)$, тогда при $\|x_n\| = O(1)$ и $\|(A_n+\zeta)x_n\| = O(1)$ из равенства

$$x_n = \mathcal{R}(\mu;A_n)(A_n+\zeta)x_n - (\zeta-\mu)\mathcal{R}(\mu;A_n)x_n$$

следует, что $\{x_n\}$ $\mathcal{P}$-компактна.

Пусть, наоборот, выполнена импликация (1). Покажем, что из $\|x_n\| = 1$ $(n \in N)$ следует $\mathcal{P}$-компактность последовательности $\{\mathcal{R}(\zeta;A_n)x_n\}$. Множество $\{\mathcal{R}(\zeta;A_n)x_n\}$ ограничено и $\{(A_n+\zeta)\mathcal{R}(\zeta;A_n)x_n\}$ также ограничено, и по (1) $\{\mathcal{R}(\zeta;A_n)x_n\}$ $\mathcal{P}$-компактно. Сам факт $\mathcal{P}$-сходимости резольвент содержится в условии $\Delta_c \cap \rho(A) \neq \phi$. Теорема доказана.

Замечание 1. Равенство $\Delta_t = \mathbb{C}$ дает возможность доказать сходимость спектров и корневых подпространств, а также оценки этих сходимостей. Для получения количественной информации см. [1,2].

Замечание 2. Компактную сходимость резольвент можно усмотреть, например, в случае аппроксимации оператора Лапласа в ограниченной области с помощью конечно-разностных операторов.

§ 2. Сходимость полугрупп

Определим условия

(A) Существует число $\lambda \in \bigcap_n \rho(A_n) \cap \rho(A)$ такое, что

$$\mathcal{R}(\lambda; A_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathcal{R}(\lambda; A) ;$$

(B) существуют число $M > 0$ и действительное число ω такие, что $\|\mathcal{R}(\lambda; A_n)\| \leq M/|\lambda - \omega|$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega;$

(C) Для некоторого $\theta \in (0, \pi/2)$, любого $\mu > 0$ и любого $x \dot{\in} E$ имеет место сходимость

$$\max_{\zeta \in \Sigma(\theta,\mu)} \| e^{-\zeta A_n} x_n - p_n e^{-\zeta A} x \| \to 0$$

как только $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, где $\Sigma(\theta,\mu) = \{ z : |\arg z| \leq \theta, |z| \leq \mu \}$.

Теорема ABC. Пусть A_n и A генерируют C_0 полугруппы, тогда условия (A) и (B) эквивалентны (C).

Теорема 3. Пусть выполнено условие (B) и операторы A и A_n генерируют C_0-полугруппы. Тогда компактная сходимость резольвент необходима и достаточна для того, чтобы

$$e^{-tA_n} \xrightarrow{\mathcal{PP}} e^{-tA} \text{ компактно при } t > 0.$$

Доказательство. Достаточность. Ввиду теоремы ABC нужно установить лишь $\mathcal{P}$-компактность $\{e^{-tA_n} x_n\}$ при любой ограниченной последовательности $\{x_n\}$. Из оценки $\| A_n e^{-tA_n} x_n \| \leq M \frac{e^{\omega t}}{t} \|x_n\|$, установленной в [3,4] имеем $\| e^{-tA_n} x_n \| = O(1)$ и $\|(A_n + \zeta) e^{-tA_n} x_n \| = O(1)$, $t > 0$. По теореме 2 последовательность $\{e^{-tA_n} x_n\}$ $\mathcal{P}$-компактна.

Необходимость будет доказана, если мы покажем, что $\mathcal{R}(\lambda; A_n) \xrightarrow{\mathcal{PP}} \mathcal{R}(\lambda; A)$ хоть для некоторого $\lambda \in \Delta_c \cap \rho(A)$ и для любой ограниченной $\{x_n\}$ следует $\mu((\mathcal{R}(\lambda; A_n) x_n)) = 0$, где μ - дискретная мера некомпактности (см. [1], стр. 17). Учитывая представление $\mathcal{R}(\lambda; A_n) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-tA_n} dt$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, в силу условия (B), по теореме Лебега устанавливаем сходимость резольвент. Взяв $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ и $\|x_n\| = 1$, имеем

$$\mu((R(\lambda; A_n)x_n)) = \mu((\int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-tA_n} x_n dt)) \le$$

$$\le \mu((\int_\varepsilon^K e^{-t\lambda} e^{-tA_n} x_n dt)) + \|\int_0^\varepsilon e^{-\lambda t} e^{-tA_n} x_n dt\| +$$

$$+ \|\int_K^\infty e^{-\lambda t} e^{-tA_n} x_n dt\|.$$

Последние два члена справа за счет выбора ε и K можно сделать сколь угодно малыми. Последовательность $\{e^{-tA_n}x_n\}$ $\mathcal{P}$-компактна при любом $t \in [\varepsilon, K]$, поэтому для доказательства равенства

$$\mu((\int_\varepsilon^K e^{-\lambda t} e^{-tA_n} x_n dt)) = 0$$

достаточно показать, что семейство $\{e^{-tA_n}x_n\}$ равномерно непрерывно. Последнее утверждение выполняется в силу тождества

$$(e^{-t_1 A_n} - e^{-t_2 A_n})x_n = \int_{t_1}^{t_2} A_n e^{-\xi A_n} x_n d\xi$$

и равномерной ограниченности

$$\|A_n e^{-\xi A_n}\| \le c \cdot \frac{e^{\omega \xi}}{\xi}, \quad \xi \in [\varepsilon, K].$$

Теорема доказана.

Литература

1. Вайникко Г., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. Вайникко Г.М., Пискарев С.И., О регулярно согласованных операторах. Изв. ВУЗ., Математика, 1977, 10, 25-36.
3. Като Т., Теория возмущений линейных операторов. Москва, 1972.
4. Крейн С.Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва, 1967.

Тартуский государственный университет

Кафедра вычислительной математики

О МНОГОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРАХ ВИНЕРА—ХОПФА

Р. Лепик

Определим линейный и ограниченный оператор, действующий в пространстве $\ell^2(Z^n)$, соотношением

$$A=\sum_{j\in Z^n} a_j \mathcal{U}^j ,$$

где a_j — заданные комплексные числа, такие что

$$\sum_{j\in Z^n} |a_j| < \infty ,$$

операторы сдвига $\mathcal{U}^j$ $(j\in Z^n)$ действуют по правилу

$$(\mathcal{U}^j x)(k) = x(k-j), \quad k\in Z^n, \quad x\in \ell^2(Z^n),$$

Z^n - челочисленная сетка в R^n. Для любого множества $D\subset Z^n$ под $\ell^2(D)$ понимается подпространство сеточных функций, имеющих носитель в D, для которых конечна норма

$$\| x\|_{\ell^2(D)} = \Big(\sum_{j\in D} |x(j)|^2\Big)^{1/2};$$

соответствующий естественный проектор обозначим через P_D. Определим функцию (так называемый символ оператора A)

$$a(t)=\sum_{j\in Z^n} a_j e^{ijt} \qquad (t\in R^n;\ jt=j_1t_1+\ldots+j_nt_n),$$

которая будет непрерывной по совокупности переменных $t_1,\ldots,t_n$ и 2π—периодической по каждому из них. Определим также множество

$$Z_+^n=\{j=(j_1,\ldots,j_n)\in Z^n:\quad 0\le j_i<\infty,\ \ i=1,\ldots,n\},$$

соответствующий ему проектор будем писать в сокращенном виде

$$P_+=P_{Z_+^n}.$$

Пользуясь введенными обозначениями, запишем оператор Винера—Хопфа в виде $P_+A:\ \ell^2(Z_+^n)\longrightarrow \ell^2(Z_+^n)$.

Теорема 1. Для того, чтобы оператор P_+A был фредгольмовым с нулевым индексом, необходимы и достаточны следующие условия:

1⁰ $a(t)=a(t_1,\dots,t_n)\neq 0, \quad t\in R^n$;

2⁰ $ind\ a_1=\frac{1}{2\pi}[\arg a(t_1,0,\dots,0)]_{t_1=0}^{2\pi}=0,$

. . . .

$ind\ a_n=\frac{1}{2\pi}[\arg a(0,\dots,0,t_n)]_{t_n=0}^{2\pi}=0$;

3⁰ при любом разбении множества индексов $\{1,\dots,n\}$ на два непересекающиеся подмножества $\{k_1,\dots,k_r\}$ и $\{\ell_1,\dots,\ell_s\}$ с $r>1$, $s\geq 2$ и $r+s=n$ и при любых $t_{k_1},\dots,t_{k_r}$ из $\mathbb{R}$ s-мерное однородное уравнение Винера—Хопфа

$$\hat{A}_{k_1\dots k_r}(t_{k_1},\dots,t_{k_r})x\equiv$$

$$\equiv P_{Z_+^s}\sum_{j\in Z^n}a_j e^{ij_{k_1}t_{k_1}}\dots e^{ij_{k_r}t_{k_r}}\mathcal{U}_{\ell_1}^{j_{\ell_1}}\dots\mathcal{U}_{\ell_s}^{j_{\ell_s}}x=0$$

имеет в пространстве $\ell^2(Z_+^s)$ лишь нулевое решение.

При $n=1$ и $n=2$ условие 3⁰ отпадает (формально это соответствует тому, что при $n=1$ и $n=2$ не существует разбиений $\{1,\dots,n\}$ с указанными в 3⁰ свойствами). Отметим еще, что для $n=1$ и $n=2$ теорема 1 известна, а в случае $n\geq 3$ мы не встречали в литературе формулировки этой теоремы.

При изучении многомерного дискретного оператора Винера—Хопфа P_+A мы естественным образом сталкивались с дискретными операторами Винера—Хопфа с операторными коэффициентами. Будем обозначать их через $\mathcal{A}$. Повидимому такие операторы представляют и самостоятельный интерес.

Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}x=\sum_k \mathcal{A}_k\mathcal{U}^k x,$$

где $\sum_k\|\mathcal{A}_k\|<\infty$ и $x\in\ell^2(Z,H)$, т.е. $x=(x(i))$, $x(i)\in H$, $\sum_i\|x(i)\|_H^2<\infty$.

Операторы $\mathcal{A}_k\in\mathcal{L}(H,H)$ действуют в комплексном гильбертовом пространстве H, оператор сдвига $\mathcal{U}^k$ $(k\in Z)$ линеен и изометричен в $\ell^2(Z,H)$, он действует по формуле

$$(\mathcal{U}^k x)(j)=x(j-k),\quad j\in Z,\quad x\in\ell^2(Z,H).$$

Введем зависящий от параметра $t\in\mathbb{R}$ оператор $\hat{\mathcal{A}}(t)\in\mathcal{L}(H,H)$ (так называемый символ оператора $\mathcal{A}$) соотношением

$$\hat{\mathcal{A}}(t)=\sum_k\mathcal{A}_k e^{ikt}\qquad(t\in\mathbb{R}).$$

Теорема 2. Для оператора $\mathcal{A}$ справедливы равенства

$$\inf_{\|x\|=1} \|\mathcal{A}x\|_{\ell^2(\mathbb{Z},H)} = \inf_{t\in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\hat{\mathcal{A}}(t)\xi\|_H ,$$

$$\|\mathcal{A}\| = \sup_{t\in R} \|\hat{\mathcal{A}}(t)\| .$$

Пусть $\mathcal{N}(\hat{\mathcal{A}}(t))$ – нулевое подпространство оператора $\hat{\mathcal{A}}(t)$.

Теорема 3. Пусть для оператора $\mathcal{A}$ выполнены следующие условия:

1^0 оператор $\hat{\mathcal{A}}(t)$ при каждом $t\in R$ фредгольмов с нулевым индексом;

2^0 $\mathcal{N}(\hat{\mathcal{A}}(t))=0$ при каждом $t\in R$.

Тогда оператор $\mathcal{A}$ имеет ограниченный обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{Z},H),\ell^2(\mathbb{Z},H))$. Если выполнено условие 1^0, то условие 2^0 необходимо для обратимости оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 3 распространяется и на кольцо $\mathfrak{A}^m$ операторов, действующих в $\ell^2(\mathbb{Z}^m,H)$ и обладающих свойством: для каждого $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}^m$ и каждого $\varepsilon>0$ найдутся $\mathcal{N}=\mathcal{N}(\varepsilon)$ и $\mathcal{A}_k = \mathcal{A}_k(\varepsilon,\mathcal{N})$ такие, что

$$\|\mathcal{A}-\sum_{|k|\le\mathcal{N}} \mathcal{A}_k\mathcal{U}^k\| < \varepsilon ,$$

где $\mathcal{U}^k=\mathcal{U}_1^{k_1}\ldots\mathcal{U}_m^{k_m}$, $\mathcal{A}_k=\mathcal{A}_{k_1\ldots k_m}\in\mathcal{L}(H,H)$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_m|$. Символ оператора $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}^m$, который обозначим через $\hat{\mathcal{A}}(t)$, определим с помощью предельного процесса символов $\sum_{|k|\le\mathcal{N}}\mathcal{A}_k e^{ikt}$ $(t\in R^m)$ таких операторов $\sum_{|k|\le\mathcal{N}}\mathcal{A}_k\mathcal{U}^k$, для которых $\|\mathcal{A}-\sum_{|k|\le\mathcal{N}}\mathcal{A}_k\mathcal{U}^k\|\longrightarrow 0$.

Тартуский государственный университет
Кафедра вычислительной математики

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПОСТРОЕНИЮ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Роозе

В связи с появлением многопроцессорных вычислительных устройств и созданием сетей ЭВМ встал вопрос о разработке таких вычислительных схем, которые позволяют распараллеливать расчеты. Можно выделить два основных подхода к построению параллельных методов вычислений. Первый подход - создание вычислительных методов, учитывающих возможность параллельной работы нескольких вычислительных устройств, не принимая при этом во внимание возможности декомпозиции исходной задачи [3]. Второй подход опирается, в первую очередь, на возможность декомпозиции исходной задачи. Настоящая работа посвящена второму подходу.

В качестве примера рассмотрим один класс задач решения систем нелинейных уравнений - решение уравнений материального баланса (т.н. модели) химико-технологических систем (ХТС) в статике. Эта модель в самой общей постановке может быть выписана в виде

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где

$$P(x) = \begin{cases} F_1\left(\sum_{j=1}^{N} x_{1j} + v_1 \mid x_{11}, \dots, x_{N1}, x_{v1}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_N\left(\sum_{j=1}^{N} x_{Nj} + v_N \mid x_{1N}, \dots, x_{NN}, x_{vN}\right), \end{cases} \tag{2}$$

$x = \{x_{kj}, x_{vj}\}_{j,k=1}^{N}$, x_{kj}, x_{vk}, x_k - c-мерные векторы, физической природы которых здесь объяснять не будем, N - число аппаратов в ХТС, $F_k(x_k \mid \bar{x}_k) = 0$ - система в общем случае нелинейных уравнений, которая определяет зависимость выхода $\bar{x}_k$ аппарата k от его входа x_k (модель аппарата k). Структура ХТС описывается соотношениями

$$x_k = \sum_{j=1}^{N} x_{kj} + v_k, \quad k = 1, \dots, N, \tag{3}$$

которые определяют, как связан вход x_k k-го аппарата с выходами всех аппаратов. Задача состоит в решении системы (1) при фиксированных $\{v_k\}_{k=1}^{N}$ (входные потоки сырья). Так как система (1), как правило, имеет большую размерность, то для её решения чаще всего применяются методы типа Гаусса—Зейделя [2,4]. Мы же предлагаем выделить в модели (1)-(2) в отдельные группы структурные соотношения и модели аппаратов и переписать модель ХТС в виде

$$\begin{cases} x_k = \sum_{j=1}^{N} x_{kj} + v_k , \\ F_k(x_k \mid x_{1k}, \ldots, x_{Nk}, x_{vk}) = 0, \end{cases} \qquad k=1,\ldots,N. \tag{4}$$

Далее для решения системы (4) можно применить, например, итерационный процесс

$$\begin{cases} x_k^{n+1} = \sum_{j=1}^{N} x_{kj}^{n} + v_k , & \text{(5а)} \\ F_k(x_k^n \mid x_{1k}^n, \ldots, x_{Nk}^n, x_{vk}^n) = 0, & \text{(5б)} \end{cases}$$

$$k=1,\ldots,N, \quad n=0,1,\ldots,$$

где x_k^0 $(k=1,\ldots,N)$ – начальные приближения. Нетрудно заметить, что системы нелинейных уравнений моделей аппаратов теперь можно решать параллельно на отдельных процессорах. Процесс (5) можно рассматривать как блочный метод Гаусса—Зейделя. Блоками здесь являются структурные соотношения (5а), с одной стороны, и совокупность нелинейных уравнений моделей аппаратов (5б), с другой стороны. Разумеется, возможны различные варианты и развития приведенного подхода, зависящие как от специфики представления моделей аппаратов, так и от различных способов модификации вычислительного процесса. Условия сходимости процессов типа (5) можно вывести неконструктивным или конструктивным (с учетом методов решения уравнений аппаратов) путями, например, как это описано в работе [1].

Отметим, что приведенная идея декомпозиции применима, по-видимому, и к нелинейным уравнениям вообще, если их рассматривать в виде

$$F(x) = f(\ell_1(x), \ldots, \ell_N(x), x) = 0, \tag{6}$$

где ради простоты представления $F: R^1 \to R^1$. Вместо (6) можно писать

$$\begin{cases} f(y, x) = 0 , & \text{(7а)} \\ y - \ell(x) = 0 , & \text{(7б)} \end{cases}$$

где $\ell(x)=(\ell_1(x),\dots,\ell_N(x))$. Прменяя к уравнению (6) или к системе (7) различные численные методы, за счет учета структуры уравнения (6) получаем возможность распараллеливать расчеты. Применив в качестве простейшего примера к уравнениям (6) и (7) метод простой итерации, получаем соответственно процессы

$$\begin{cases} x^{n+1}=x^n-f(y^n,x^n), & (8а)\\ y^n=\ell(x^n)\ , \quad n=0,1,\dots\ , & (8б)\end{cases}$$

где x^0—начальное приближение, и

$$x^{n+1}=x^n-f(y^n,x^n), \tag{9а}$$

$$y^{n+1}=\ell(x^n)\ ,\quad n=0,1,\dots\ , \tag{9б}$$

где x^0, y^0 - начальные приближения. Нетрудно заметить, что в методе (8) параллельно можно проводить вычисления выражений (8б), а в методе (9) существует полный параллелизм вычислений. Метод (8), по существу, является лишь видоизмененной записью метода простой итерации для решения уравнения (6), и способ выбора $\ell(x)$ не влияет, в принципе, на свойства этого метода. Сходимость же процесса (9) существенно зависит от выбора $\ell(x)$. Условия сходимости этого процесса определяют требования, которым должен удовлетворять выбор вектора $\ell(x)$.

Литература

1. Роозе А., Условия сходимости одной двухуровневой итерационной схемы для вычисления установившихся режимов химико-технологических систем. Изв. АН ЭстССР, Физ., мат., 1978, 27, № 2, 227-229.
2. Kevorkian, A.K., Snoek, J., Decomposition in Large Scale Systems. Theory and Applications of Structural Analysis in Partitioning, Disjointing and Constructing Hierarchical Systems. Decomposition of Large-Scale Problems, Amsterdam, 1973, 467-489.
3. Miranker, W.L., Parallel Methods for Approximating the Root of the Function. IBM J.Res.Develop., 1969, 13, 297-301.
4. Rheinboldt, W.C., On M-Functions and Their Application to Nonlinear Gauss-Seidel Iterations and to Network Flows. J. Math. Anal. Appl., 1970, 32, 274-307.

Таллинский научно-производственный центр

ПРИНЦИП МАЖОРАНТ ДЛЯ ОДНОГО ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА ЭЙТКЕНА

Х.Коппель

Для решения нелинейного операторного уравнения

$$x = \Phi(x) \tag{1}$$

в полуупорядоченном банаховом пространстве $\mathcal{X}$ рассмотрим обобщенный метод Эйткена в виде (ср. [1])

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_n (x_n - U(x_n)) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

где $\Lambda_n = [J - U(U(x_n)x_n)]^{-1}$; $x_{n+1} = U(x_n)$ – некоторый итеративный или проекционно-итеративный метод m-ого порядка; $U(x' x'')$ – разделенная разность оператора (см.[3]).

Вместе с уравнением (1) рассмотрим вещественное мажорантное уравнение

$$t = \varphi(t) \tag{3}$$

и для его решения метод

$$t_{n+1} = t_n - c_n (t_n - u(t_n)) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{4}$$

где $c_n = [1 - u(u(t_n)t_n)]^{-1}$; $t_{n+1} = u(t_n)$ – некоторый итеративный метод m-ого порядка для решения уравнения (3).

Приводим теорему о сходимости метода (2) при помощи мажорантного уравнения (3), предполагая непрерывность операторов $U(x)$ и $\Phi(x)$ (соответственно $u(t)$ и $\varphi(t)$) в окрестности решения x^* уравнения (1) (соответственно решения t^* уравнения (3)).

Теорема. Пусть выполнены условия

1° $x_0 - U(x_0) \geqslant 0$, причем $\|x_0 - U(x_0)\| \leq t_0 - u(t_0)$;

2° $\|\Lambda_0\| \leq -c_0$;

3° а) $0 \leq \Gamma_1 = U(x''x''') - U(x'x''') \leq J$, причем $\|\Gamma_1\| \leq u(t''t''') - u(t't''')$;

II

б) $\Gamma_2 = U(x'x''') - U(x'x'') \geq 0$, причем $\|\Gamma_2\| \leq u(t't''') - u(t't'')$;

в) $\|J - \Gamma_1\| \leq 1 + u(t't''') - u(t''t''')$,

если x', x'', x''' принадлежат сфере

$$\|x - U(x_0)\| \leq t^* - u(t_0) \qquad (5)$$

и $\|x' - x''\| \leq t' - t''$, $\|x'' - x'''\| \leq t'' - t'''$, $x'' \leq x'$, $x''' \leq x''$, $U(x_0) \leq x$, $u(t_0) \leq t$, $t'', t' \leq t^*$;

4⁰ уравнение (3) имеет положительное решение.

Тогда уравнение (1) имеет в сфере (5) решение X^*, к которому сходится монотонно возрастающая последовательность (вычисленная по методу (2))

$$U(x_0) \leq x_0 \leq U(x_1) \leq x_1 \leq \ldots \leq U(x_n) \leq x_n \leq \ldots \leq x^* \qquad (6)$$

со скоростью

$$\|x^* - x_n\| \leq t^* - t_n \qquad (n = 0, 1, \ldots), \qquad (7)$$

где t^* – наименьшее положительное решение уравнения (3); t_n – n-ое приближение по методу (4) к t^*.

Взяв в качестве мажорантного уравнения (3) уравнение

$$t - u(t) \equiv Kt^2 - (1/B_0 - K\eta_0)t + \eta_0 = 0, \qquad (8)$$

получим, что справедливо

Следствие. Пусть

1⁰ $\|x_0 - U(x_0)\| \leq \eta_0$;

2⁰ $\|\Lambda_0\| \leq B_0$;

3⁰ а) $\|\Gamma_1\| \leq K\|x' - x''\|$;

б) $\|\Gamma_2\| \leq K\|x'' - x'''\|$;

в) $\|J - \Gamma_1\| \leq 1 - K\|x' - x''\|$,

если x', x'', x''' принадлежат сфере

$$\|x - U(x_0)\| \leq t^* + \eta_0 ; \qquad (9)$$

4⁰ $K\eta_0 + 2\sqrt{K\eta_0} \leq 1/B_0$.

Тогда уравнение (1) имеет в сфере (9) решение X^*, к которому сходится последовательность (6) со скоростью (7), где $t^* = \left(1/B_0 - K\eta_0 - \sqrt{(1/B_0 - K\eta_0)^2 - 4K\eta_0}\right)/2K$ – наименьшее положительное решение уравнения (8);

Отметим, что легко получить соответствующие результаты также для случаев $X^* \downarrow X_n \leq U(X_n)$ и $X_n \leq U(X_n) \uparrow X^*$, $X^* \downarrow U(X_n) \leq X_n$ $(n=0,1,\ldots)$ (ср. [1]). Большое значение имеет построение монотонных сходящихся последовательностей (6) и $X^* \downarrow X_n \leq U(X_n)$ в случае, если метод $X_{n+1} = U(X_n)$ расходится, начиная с какого-то начального решения X_0.

В статье [2] было доказано, что метод (2) имеет скорость сходимости $2m-1$. Этот факт гораздо легче установить, исходя из оценки (7), чем в работе [2].

Литература

1. Коппель Х.К., Монотонность для одного обобщения метода Эйткена. Республ. симп. по методам решения нелинейн. ур-й и задач оптимизации, Тезисы докл., Таллин, 1978, 45-46.

2. Коппель Х.К., Обобщение метода Эйткена для решения нелинейных операторных уравнений. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1968, А, № 261, 17-34.

3. Ульм С.Ю., Об обобщенных разностях 1. Изв. АН ЭстССР. Физ., мат., 1967, 16, № 1, 13-26.

Таллинский политехнический институт
Кафедра математики

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. Перадзе

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$x = Ax + b, \tag{1}$$

где b – заданный, а x – искомый векторы n-мерного пространства R_n, A – вещественная матрица, спектральный радиус которой меньше, чем 1. Тогда, как известно, к точному решению x^* системы (1) сходится метод последовательных приближений

$$x_{i+1} = Ax_i + b \qquad (i = 0, 1, 2, \dots) \tag{2}$$

при любом начальном приближении $x_0 \in R_n$. При реализации итерационного метода (2) на каждом шаге появляется случайная ошибка l_i. Поэтому фактически вычисления ведутся по равенствам

$$x_{i+1} = Ax_i + b + l_i \qquad (i = 0, 1, 2, \dots). \tag{3}$$

Разность $\delta_i = x^* - x_i$ будем называть погрешностью приближения x_i, вектор $\varepsilon_i = x_{i+1} - x_i$ – невязкой. Пусть последовательные приближения (3) ищутся до такого номера i_0, при котором невязка ε_{i_0} удовлетворяет неравенству

$$\| \varepsilon_{i_0} \| \le \varepsilon^*,$$

где ε^* – заданное положительное число. Вектор $\Delta = \delta_{i_0}$ будем называть окончательной погрешностью. Будем считать, что

$$\| l_i \| \le l^* \qquad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad l^* < \varepsilon^*.$$

Пусть собственные значения матрица A отличны от нуля и не все равны по модулю. Пусть $П$ —подпространство R_n, натянутое на действительные и мнимые части собственных и присоединенных векторов матрицы A, отвечающих наибольшим по модулю ее собственным значениям. Обозначим

$$\mathcal{U}(d)=\{x\in R_n:\ \rho(x,\Pi)<d\},\quad d>0,$$

$$G_0=(I-A)^{-1}S(0,\ell^*+\varepsilon^*),\qquad G_{-1}=(I-A)^{-1}S(0,\varepsilon^*-\ell^*),$$

где $S(0,r_0)$ – шар $\|x\|\le r_0$. Наконец, пусть G_{-2} – такое множество в R_n, ℓ^*–окрестность которого совпадает с эллипсоидом AG_{-1} (предполагается, что ε^* настолько велико по сравнению с ℓ^*, что G_{-2} определено).

Так как по предположению $\lim_{i\to\infty}\|A^i\|^{1/i}<1$, то определена и конечна величина $a=1+\|A\|+\|A^2\|+\ldots$. Через $\Omega(h)$ обозначим множество $\mathcal{U}(h+a\ell^*)\cap[G_0\setminus(G_{-1}\cap G_{-2})]$. Пусть $P(h,n)$ – вероятность того, что окончательная погрешность Δ лежит в множестве Ω_h, если начальное приближение x_0 равномерно распределено в шаре $\|x-x^*\|\le r$.

Теорема 1. При любом $h>0$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}P(h,n)=1.$$

Доказательство. Имеют место равенства

$$\delta_i=(I-A)^{-1}(\varepsilon_i-\ell_i),\qquad \delta_i=A\,\delta_{i-1}+\ell_{i-1}$$

Отсюда нетрудно усмотреть, что при любой начальной погрешности δ_0 окончательная погрешность Δ будет принадлежать области G_0, а в область $G_{-1}\cap G_{-2}$ погрешность Δ попадет только в том случае, когда $\delta_0\in G_{-1}\cap G_{-2}$, причем тогда $\Delta=\delta_0$. Теперь ясно, что вероятность того, что окончательная погрешность лежит в области $G_0\setminus(G_{-1}\cap G_{-2})$, стремится к единице при $n\to\infty$ Далее, обозначим

$$\delta_i'=A^i\delta_0,\qquad \delta_i''=-\sum_{k=0}^{i-1}A^{i-k-1}\ell_k.$$

С помощью (3) получаем $\delta_i=\delta_i'+\delta_i''$. Из результата [1] вытекает, что, каково бы ни было $h>0$, при достаточно большом n слагаемое δ' окончательной погрешности с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, принадлежит области $\mathcal{U}(h)$. Очевидно, что δ'' входит в сферу $\|x\|\le a\ell^*$ Следовательно, окончательная погрешность для достаточно больших, со сколь угодно близкой к единице вероятностью принадлежит области $\mathcal{U}(h+a\ell^*)$. Это завершает доказательство теоремы.

Из теоремы 1 можно получить более обозримые следствия для различных частных классов систем.

Теорема 1 допускает обобщение на уравнения в гильбертовых пространствах (ср. [2]); вместо равномерного распределения начальной погрешности используется распределение по мере Винера с дисперсией $\sigma \to \infty$.

Отметим, что постановка задачи данной статьи была выдвинута на одном из семинаров М.А. Красносельского. В [1-3] аналогичный вопрос изучен для точных вычислений (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Перадзе Д.Г. О распределении ошибок при решении системы линейных алгебраических уравнений методом итерации. Сообщ. АН ГрузССР, 50, № 2, 1968, 289-294.
2. Перадзе Д.Г. О распределении ошибок при решении методом итерации линейных уравнений в гильбертовом пространстве. Сообщ. АН ГрузССР, 51, № 2, 1968, 263-268.
3. Yamamoto Tetsuro. On the distribution of errors in the iterative solution of a system of linear equations. Numer. Math., 1975, 24, №1, 71-79.

Тбилисский государственный университет
Институт прикладной математики

РЕАЛИЗУЕМОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ ФОРМУЛ В ПСЕВДОБУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ

А. Таутс

Определим семантическую модель, которая является обобщением модели Бета.

Пусть задано некоторое частично упорядоченное множество S, элементы которого будем называть аспектами. Пусть каждому аспекту x поставлено в соответствие некоторое непустое множество N_x, т.н. множество направлений, а каждому направлению из множества N_x поставлено в соответствие некоторое непустое множество аспектов, строго больших аспекта x, которых мы будем называть конкретизациями x в данном направлении. Выбором направлений будем называть функцию $\mathfrak{R}$, ставящую каждому $x \in S$ в соответствие некоторое направление $\mathfrak{R}(x) \in N_x$. Цепью, согласующейся с выбором $\mathfrak{R}$, будем называть последовательность аспектов $x_0, \ldots, x_n, \ldots$, такую, что при каждом n аспект x_{n+1} является конкретизацией аспекта x_n в направлении $\mathfrak{R}(x_n)$. Если $A \subseteq S$, то будем говорить, что A исчерпывает x, если существует выбор направлений $\mathfrak{R}$ такой, что каждая цепь, начинающаяся с x и согласующаяся с $\mathfrak{R}$, содержит аспекты, которые больше некоторого аспекта из множества A.

Семантическая модель называется правильной, если

а) $x \leq y$ в точности тогда, если существует цепь, начинающаяся с x и проходящая через y.

б) Если A - одноэлементное множество, то A исчерпывает только те аспекты, которые больше или равны единственному элементу множества A.

в) Если A исчерпывает x и $x \leq y$, то A исчерпывает y.

Множество $A \leq S$ будем называть значением истинности, если A исчерпывает только свои элементы.

Доказывается, что множество значений истинности всякой правильной семантической модели, если их упорядочить по включению, образует полную псевдобулевую алгебру.

Хотя не всякую полную псевдобулевую алгебру можно получить таким образом, но всякую полную псевдобулевую алгебру можно получить как подалгебру алгебры значений истинности некоторой правильной семантической структуры.

Именно, пусть M - некоторая полная псевдобулевая алгебра. Будем называть буквой каждый отличный от нуля элемент алгебры M вместе с некоторым, может быть, пустым кортежом знаков + и –. Данный элемент из M будем называть основой буквы, а кортеж - приложением букви. Мы будем говорить, что буква a проще буква b, а буква b сложнее буквы a, если основы этих букв одинаковые, а приложение буквы a есть начальный отрезок приложения буквы b.

Будем считать аспектами все непустые кортежи букв, основа первой буквы которых есть единица алгебры M, а основы букв, считая справа налево, строго убывают в смысле алгебры M.

Аспект считается больше другого аспекта, если его можно получить из этого другого аспекта усложнением существующих и прибавлением новых букв.

Если x есть основа последней буквы некоторого аспекта, то аспект снабжается одним т.н. экстранаправлением и еще по одному направлению для каждого случая, когда x в алгебре M является дизъюнкцией элементов, строго меньших x. Конкретизациями в экстранаправлении считаются все аспекты, непосредственно следующие данному аспекту, а если направление характеризовано равенством $x = V_i x_i$, то конкретизациями в этом направлении считаются все аспекты, получаемые из данного аспекта прибавлением к концу одной буквы, основа которой меньше или равна некоторой x_i, а приложение пустое.

Каждый $x \in M$ отождествляется с множеством всех аспектов, основа последней буквы которых меньше или равна x.

Таким образом, при интерпретации формул можно ограничиваться семантическими моделями.

При интерпретации формул надо указать каждому высказыванию его значение истинности, а для каждого обьекта - значение истинности его существования. Операции логики высказываний интерпретируются операциями псевдобулевой алгебры, а кванторы общности и существования следующим образом:

значения истинности $\forall x\, P(x)$ есть $\bigwedge_x (x^* \to P^*(x))$, а значения истинности $\exists x\, P(x)$ есть $\bigvee_x P^*(x)$, где x^* есть значение истинности существования x, а $P^*(x)$ есть значение истинности $P(x)$.

Для вывода формул используем систему Генцена, приспособленную для бесконечных формул.

Каждая выводимая формула тождественно равна единице.

Если формула не выводима, то препятствием к построению контрамодели при исчислении высших порядков может оказаться обстоятельство, что модель окажется не множеством, а собственным классом.

Доказывается, что если $\mathfrak{A}$ - невыводимая формула, для которой не существует такой контрамодели, где аспекты и объекты образуют множество, то существует невыводимая формула $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ такая, что именно аспекты любой ее контрамодели образуют собственный класс. При этом вид формулы $\mathfrak{B}$ зависит только от мощности формулы $\mathfrak{A}$, а не от вида формулы $\mathfrak{A}$.

Тартуский государственный университет
Кафедра математического анализа

12

АЛГЕБРЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

И.Валуцэ

В абстрактной теории универсальных алгебр и других математических образованиях, как и во многих приложениях, важное место занимает изучение их эндоморфизмов. Наряду с полугруппами эндоморфизмов рассматриваются и различные их обобщения. Можно указать три направления таких обобщений.

1. Вместо эндоморфизмов рассматриваются соответствия, т. е. бинарные отношения, стабильные на универсальной алгебре [4]. Полугрупповая теория более развита для таких частных случаев соответствий как частичные эндоморфизмы, частичные автоморфизмы [1,2] и др.

При изучении полугрупп эндоморфизмов и их обобщений помимо структурных свойств изучаются вопросы определяемости основных систем своими полугруппами эндоморфизмов (что можно сказать об основных системах, если их полугруппы эндоморфизмов, соответствий находятся в некотором отношении, например, изоморфны, гомоморфны и т.п.) и характеризации соответствующих полугрупп (какие полугруппы изоморфны полугруппам эндоморфизмов, соответствий алгебр данного класса). В этих направлениях имеется большое число работ (Е.С.Ляпин, Л.М.Глускин, А.В.Михалев и др.)

Один из путей характеризации полугрупп всех отображений данного множества в себя указан Мальцевым в [3]. Подход Мальцева может быть применен и в некоторых более сложных случаях, например, к характеризации полугрупп и эндоморфизмов алгебр свободных в себе (см. [1]), а также полугрупп всех бинарных отношений данного множества.

2. Внимание многих алгебраистов обращено к изучению различных алгебр эндоморфизмов в числе основных операций которых фигурируют операции, отличные от умножения эндоморфизмов. В частности, рассматривается перенесение над эндоморфизмами

алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$ операций $\omega \in \Omega$. Классическим объектом, получающимся на этом пути, является кольцо эндоморфизмов абелевой группы. Хотя операции $\omega \in \Omega$ можно естественным образом переносить над произвольными отображениями множества G в себя (см., например, [7]) особый интерес представляет тот случай, когда операции $\omega \in \Omega$ определяются так, что множество эндоморфизмов замкнуто относительно них. Плодотворность этого подхода для общей теории групп показана в [8]. В [1] некоторые результаты работы [8] перенесены на свободные в себя унитарно-поляризованные алгебры. Класс алгебр называется унитарно-поляризованным (ср. [5]), если имеются такие основные или производные операции $e(x)$ и ω_0, арности не менее двух, что выполняются тождества $e(x) = e(y) = e$ и $e \dots e\omega = e$ для любой операции $\omega \in \Omega$ и $e \dots exe \dots e\omega_0 = x$ на каком бы месте не стоял x.

3. Учитывая, что каждый эндоморфизм является унарной операцией на G, согласованной со всеми основными операциями алгебры $\mathcal{G} = \langle G, \Omega \rangle$, естественно перейти к рассмотрению полиэндоморфизмов, т.е. к многоместным операциям перестановочных со всеми операциями из Ω. Понятие полиэндоморфизма тесно связано с понятием параметрической выразимости операций, введенной А.В.Кузнецовым (см., например, [1], стр. 133).

Полиэндоморфизмы групп описаны Хионом в работе [6]. Подобным образом получается описание полиэндоморфизмов унитарно-поляризованных алгебр [1]. Используя это описание, можно характеризовать полиэндоморфизмы свободных в себя унитарно-поляризованных алгебр.

Литература

1. Валуцэ И.И., Отображения. Алгебраические аспекты теории. Кишинев, 1976.

2. Глускин Л.М., О плотных вложениях. Мат. сб., 1963, 61, 175-206.

3. Мальцев А.И., Симметрические группоиды. Мат. сб., 1952, 31, 136-151.

4. Мальцев А.И., Алгебраические системы. Москва, 1970.

5. Мальцев А.И., Об умножении классов алгебраических систем. Сиб. мат. ж., 1967, 8, № 2, 346-365.

6. Хион Я.В., m-арные кольцоиды. Сиб. мат. ж., 1967, 8, № 1, 174-194.

7. Bruck R.H., A survey of binary systems. Berlin - Heidelberg - New York, 1971.

8. Neumann,H. On varieties of groups and their associated near-rings. Math. Z., 1956, 65, 36-69.

Кишиневский государственный университет
Кафедра высшей алгебры

СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ В МНОГООСНОВНЫХ АЛГЕБРАХ

Я. Хенне

С вычислениями часто связана задача оценки сложности вычисления при помощи операций из Ω производных операций данной универсальной алгебры $\langle A,\Omega\rangle$ (см. [1,4-9]). Чаще всего рассматривается алгебра логики, т.е. $A=\{0,1\}$, а Ω - некоторый набор логических связок, например, $\Omega=\{\&,\vee,\neg\}$ (см. [6-9]). Исследовался и случай $2<|A|<\infty$, где $|A|$ - мощность множества A (см. [4,5]). В связи с развитием теории программирования и технологии ЭВМ [3] становится актуальным изучение сложности производных операций многоосновных алгебр.

Пусть $\mathcal{A}=\{A_i, i\in I\}$ - система непустых множеств A_i (случай $A_i\cap A_j\neq\emptyset$ не исключается). Всякое отображение f: $A_{i1}\times A_{i2}\times\ldots$ $\ldots\times A_{in}\to A_j$ называется n-арной операцией на $\mathcal{A}$ типа $(i1,\ldots$ $\ldots,in,j)$. Пусть Ω - некоторая совокупность операций на $\mathcal{A}$. Пара $\mathfrak{A}=\langle\mathcal{A},\Omega\rangle$ называется многоосновной алгеброй (или просто алгеброй).

Подставляя на место аргументов операций из Ω или операции из Ω подходящего типа, или переменные, принимающие значения из определенного множества A_i, получим производные операции алгебры $\mathfrak{A}$ (в случае $|I|=1$ см., например, [2], стр. 131-141). С каждой производной операцией f алгебры $\mathfrak{A}$ связываются две меры сложности: глубина $d_{\mathfrak{A}}(f)$ и размер $c_{\mathfrak{A}}(f)$ (или $d(f)$ и $c(f)$, если $\mathfrak{A}$ известна). Положим, что

1. $d(x)=c(x)=0$ для всякой переменной x,
2. $d(\omega)=c(\omega)=1$ для всякой операции $\omega\in\Omega$,
3. если ω является n-арной операцией из Ω, причем $w_1,\ldots,w_n$ - уже определенные производные операции или переменные соответствующих типов (так что операция $\omega(w_1,\ldots,w_n)$ определена) и если операцию f, которую выражает формула $\omega(w_1,\ldots,w_n)$ нельзя представить формулой меньшей сложности, то $d(f)=\max d(w_i)+1$, $c(f)=\sum_i c(w_i)+1$.

Другими словами, $d(f)$ – это минимум глубины формулы, а $c(f)$ – минимальное число операции из Ω в формуле, представляющей операцию f при помощи операции из Ω. Если Ω состоит только из бинарных операций, то $c(f)\leq 2^{d(f)}-1$ и методом из [7] можно доказать, что $c(f)\geq (d(f)\log_2 d(f))/4$.

В многоосновных алгебрах упрощается представление многих операций. Пусть $I=\{1,2\}$, $A_1=\{0,1,\ldots,m-1\}$, $A_2=\{0,1,\ldots,m\}$, $m\geq 2$ и пусть функция равенства $f\colon A_1^n\to A_1$ определена при помощи

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}1, & x_1=x_2=\ldots=x_n\\ 0, & \exists i\exists j\ x_i\neq x_j.\end{cases}$$

Если Ω состоит из бинарных операции $h\colon A_2^2\to A_2$, $g\colon A_2^2\to A_1$, где

$$h(x,y)=\begin{cases}x, & x=y\\ m, & x\neq y\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}1, & x=y\neq m\\ 0, & x\neq y \text{ или } x=y=m,\end{cases}$$

то при четном $n>2$ (изменения при n нечетном очевидны) $f(x_1,\ldots,x_n) = g(h(x_1,\ldots,x_{n/2}),\ h(x_{n/2+1},\ldots,x_n))$ (запись $h(x_1,\ldots,x_k)$ имеет естественный смысл ввиду ассоциативности h). Отсюда следует, что $c(f)=n-1$, $d(f)=\lceil\log_2 n\rceil$, где через $\lceil x\rceil$ обозначено наименьшее целое число $\geq x$. Известно [9], что в алгебре логики $\mathcal{L}=\langle B,\Sigma\rangle$, где Σ состоит из всех бинарных операций на множестве $B=\{0,1\}$, имеем $c_{\mathcal{L}}(f)=2n-3$, $d_{\mathcal{L}}(f)=\lceil\log_2(n-1)\rceil+1$.

Аналогично упрощается представление пороговой функции $t\colon A_1^n\to A_1$, где

$$t(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}1, & \Sigma x_i\geq m,\\ 0, & \Sigma x_i< m.\end{cases}$$

Если $h\colon A_2^2\to A_2$ и $g\colon A_2^2\to A_1$ определены формулами

$$h(x,y)=\begin{cases}x+y, & x+y<m\\ m, & x+y\geq m,\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}0, & x+y<m,\\ 1, & x+y\geq m,\end{cases}$$

то $t(x_1,\ldots,x_n)=g(h(x_1,\ldots,x_{n/2}),h(x_{n/2+1},\ldots,x_n))$, откуда $c(f)=n-1$, $d(f)=\lceil\log_2 n\rceil$. В то же время (см. [6]) $c_{\mathcal{L}}(f)\geq 2n-3$.

В обоих примерах $A_1 \subset A_2$ и рассматриваемые функции получены как ограничения соответствующих представлений на A_1. Если требовать $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то в Ω надо прибавить одну операцию.

Верхние оценки сложности в общем случае не упрощаются. Пусть $D_\alpha(n) = \max d_\alpha(f)$, $C_\alpha(n) = \max c_\alpha(f)$, где максимум ищется на множестве всех n-арных операций на $\mathcal{A}$.

Теорема. Пусть $\mathfrak{A} = \langle \mathcal{A}, \Omega \rangle$ – конечная (т.е. $|I| < \infty$, $|A_i| < \infty$ для всех $i \in I$) многоосновная алгебра, где Ω состоит из всех бинарных операций на системе множеств $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$. Пусть $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ – одноосновная алгебра, где Σ состоит из всех бинарных операций на множестве B и $|B| = \max |A_i|$. Тогда при всех $n > 2$ имеем $D_\alpha(n) = D_{\mathcal{B}}(n)$, $C_\alpha(n) = C_{\mathcal{B}}(n)$.

Доказательство производится построением эпиморфизма $\mathfrak{A} \to \mathcal{B}$, сохраняющего сложность операции.

Можно показать[5], что для одноосновной алгебры $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$, где $|B| = m$ и Σ состоит из всех бинарных операций на множестве B, имеем $D_{\mathcal{B}}(n) \leqslant (n-2)\lceil \log_2 m \rceil + 3$, $D_{\mathcal{B}}(n) \geqslant (n-2)\lceil \log_2 m \rceil + 1$.

Следствие. Если $\mathfrak{A} = \langle \mathcal{A}, \Omega \rangle$ – конечная многоосновная алгебра, в которой Ω состоит из всех бинарных операций на системе множеств $\mathcal{A} = \{A_i, i \in I\}$ и $\max |A_i| = m$, то

$$(n-2)\lceil \log_2 m \rceil + 1 \leqslant D_\alpha(n) \leqslant (n-2)\lceil \log_2 m \rceil + 3.$$

Литература

1. Глушков В.М., О полноте систем операции в электронных вычислительных машинах. Кибернетика, 1968, № 2, 1-5.
2. Кон П., Универсальная алгебра. Москва, 1968.
3. Многозначные элементы и системы. Киев, 1977.
4. Henno, J., On the complexity of multiplaced functions. Elektr. Inf. u. Kybernetik, 1977, 13, 561-570.
5. Henno, J., The depth of functions in multivalued logic. Elektr. Inf. u. Kybernetik (в печати).
6. Paterson, M., An introduction to boolean function complexity. Asterisque, 1976, 38/39, 183-201.

7. Paterson, M.,,Valiant, L., Circuit size is nonlinear in depth. Univ. Warwick. Theory of Comp. Rep., Sept. 1975.

8. Savage, J., The complexity of Computing. Wiley Interscience, 1976.

9. Schnorr, C., The combinational complexity of equivalence. Univ. Frankfurt Prepr., 1975.

Таллинский политехнический институт
Кафедра математики

О ПЛОТНО ВЛОЖЕННЫХ ПРАВЫХ ИДЕАЛАХ ПОЛИКАТЕГОРИЙ

Э. Реди

В работе обобщаются на поликатегории результаты статьи [5] о плотно вложенных правых идеалах полугрупп. Я.Хенно [4] дал обобщение этих же результатов на системы Менгера.

Введем сперва необходимые понятия. Пусть $(J, \mathcal{J})$ – полиграф (т.е. $\mathcal{J}$ является непустым подмножеством в $\bar{J} = \bigcup_{m=1}^{\infty} J^m$ – объединении всех декартовых степеней множества J) и обладает свойством: из того, что $(i_1^m; j_u) = (i_1, i_2, \ldots, i_m; j_u) \in \mathcal{J}$, $(j_1^p; k) = (j_1, j_2, \ldots, j_p; k) \in \mathcal{J}$, $1 \le u \le p$, вытекает, что $(j_1^{u-1}, i_1^m, j_{u+1}^p; k) = (j_1, j_2, \ldots, j_{u-1}, i_1, i_2, \ldots, i_m, j_{u+1}, \ldots, j_p; k) \in \mathcal{J}$.

<u>Определение 1</u>. Поликатегорией над полиграфом $(J, \mathcal{J})$ называется набор

$$\mathcal{A} = (J, \mathcal{J}, A^j_{i_1^m}, \Pi),$$

где

1) каждой грани $(i_1^m; j)$ из $\mathcal{J}$ взаимно однозначно сопоставлено непустое множество $A^j_{i_1^m}$, причем они все разные и не пересекаются;

2) Π состоит из операций $\overset{1}{\times}, \overset{2}{\times}, \ldots, \overset{u}{\times}, \ldots$, где $\overset{u}{\times}$ применима ко всем элементам $a \in A^{j_u}_{i_1^m}$, $b \in A^k_{j_1^p}$ при $1 \le u \le p$ и

$$a \overset{u}{\times} b \in A^k_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p};$$

3) при $1 \le u < v \le r$ для всех $a \in A^{k_u}_{i_1^m}$, $b \in A^{k_v}_{j_1^p}$, $e \in A^{\ell}_{k_1^r}$ выполняется равенство частичной коммутативности

$$a \overset{u}{\times} (b \overset{v}{\times} e) = b \overset{m+v-1}{\times} (a \overset{u}{\times} e);$$

4) для всех $a \in A^{j_u}_{i_1^m}$, $b \in A^{k_v}_{j_1^p}$, $c \in A^{\ell}_{k_1^r}$ при $1 \le u \le p$, $1 \le v \le r$ выполняется равенство ассоциативности

$$(a \overset{u}{\times} b) \overset{v}{\times} c = a \overset{u+v-1}{\times} (b \overset{v}{\times} c).$$

Определение 2. Набор $\mathcal{B} = (\mathcal{J}', \mathcal{J}', B^{j}_{i_1^m}, \Pi)$ называется правым идеалом поликатегории $\mathcal{A}$, если имеем включения

$$\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J}, \quad \mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J} \cap \bar{\mathcal{J}}', \quad B^{j}_{i_1^m} \subseteq A^{j}_{i_1^m} \ (\forall (i_1^m; j) \in \mathcal{J})$$

и, кроме того,

$$b_1 \overset{1}{\times} b_2 \overset{2}{\times} \ldots \overset{p-1}{\times} b_p \overset{p}{\times} a = b_1 \overset{1}{\times} \{ b_2 \overset{2}{\times} [\ldots \overset{p-1}{\times} (b_p \overset{p}{\times} a) \ldots] \} \in B^{k}_{i_{11}^{1m_1} \ldots i_{p1}^{pm_p}}$$

при всех $b_1 \in B^{j_1}_{i_{11}^{1m_1}}$, $b_2 \in B^{j_2}_{i_{21}^{2m_2}}$, ..., $b_p \in B^{j_p}_{i_{p1}^{pm_p}}$, $a \in A^{k}_{j_1^p}$.

Определение 3. Пусть полиграф $(\mathcal{J}, \mathcal{H})$ таков, что $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{H}$. Правый идеал $\mathcal{B}$ поликатегории $\mathcal{A}$ называется плотно вложенным правым идеалом в классе $\mathcal{K}_{(\mathcal{J},\mathcal{H})}$ (всех поликатегорий над $(\mathcal{J}, \mathcal{H})$), если

1) всякая ненулевая конгруэнция поликатегории $\mathcal{A}$ индуцирует на $\mathcal{B}$ ненулевую конгруэнцию,

2) всякая собственная надполикатегория поликатегории $\mathcal{A}$ из класса $\mathcal{K}_{(\mathcal{J},\mathcal{H})}$ имеет ненулевую конгруэнцию, индуцирующую на $\mathcal{B}$ нулевую конгруэнцию.

Определение 4. Поликатегория $\mathcal{A}$ называется унитарной поликатегорией, если $\mathcal{A}$ имеет все единицы e^j, $j \in \mathcal{J}$, т.е. элементы $e^j \in A^j_j$, для которых

$$a \overset{1}{\times} e^j = a, \quad e^j \overset{u}{\times} b = b$$

при всех $a \in A^{j}_{i_1^m}$, $b \in A^{k}_{j_1^{u-1}\, j\, j_{u+1}^p}$, $(i_1^m; j) \in \mathcal{J}$, $(j_1^{u-1}, j, j_{u+1}^p; k) \in \mathcal{J}$.

Определения понятий, которые здесь не приведены, можно найти в статьях [1,3].

Теорема 1. Всякую поликатегорию $\mathcal{A}$ можно вложить в такую унитарную поликатегорию $C = (\mathcal{J}, \hat{\mathcal{J}}, C^{j}_{i_1^m}, \Pi)$, что все правые идеалы поликатегории $\mathcal{A}$ являются правыми идеалами и в поликатегории C (здесь $\hat{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \cup (\bigcup_{i \in \mathcal{J}} \{(i;i)\})$).

Теорема 2. Если поликатегория $\mathcal{A}$ содержит плотно вложенный в классе $\mathcal{K}_{(\mathcal{J},\mathcal{H})}$ (где $\hat{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{H}$) правый идеал $\mathcal{B} = (\mathcal{J}, \mathcal{J}', B^{j}_{i_1^m}, \Pi)$, то $\mathcal{J} = \hat{\mathcal{J}}$ и $\mathcal{A}$ является унитарной поликатегорией.

Назовем элементы $b, b' \in A^{k}_{j}$ равнодействующими справа унарными элементами поликатегории $\mathcal{A}$, если

$$a \overset{1}{\times} b = a \overset{1}{\times} b'$$

при всех $a \in A^{j}_{i_1^m}$, $(i_1^m; j) \in \mathcal{J}$.

Теорема 3. Поликатегория над полиграфом $(J, \mathcal{J})$ с равнодействующими справа унарными элементами не может быть плотно вложенной в классе $\mathcal{K}_{(J,\mathcal{H})}$ правым идеалом какой-нибудь поликатегории из $\mathcal{K}_{(J,\mathcal{H})}$ (где $\hat{\mathcal{J}} \subsetneq \mathcal{H}$).

Исследование плотно вложенных левых идеалов поликатегорий проведено автором в статье [3].

Все правые идеалы поликатегории частичных многоместных функций $\mathcal{W}_J$, описанные в статье [2], оказываются плотно вложенными.

Литература

1. Реди Э., Односторонние идеалы симметрических поликатегорий. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 31-62.
2. Реди Э., О поликатегории многоместных отношений и поликольцоиде частичных многоместных функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366, 3-25.
3. Реди Э., О представлении поликольцоидов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, 390, 43-55.
4. Хенно Я., Плотно вложенные правые идеалы систем Менгера. Изв. АН ЭстССР. Физ., мат., 1972, 21, №2, 131-141.
5. Шеврин Л.Н., Плотно вложенные идеалы полугрупп. Мат. сб., 1969, 79, № 3, 425-432.

Таллинский педагогический институт
Кафедра математики

АНАЛОГИ КВАЗИФРОБЕНИУСОВЫХ КОЛЕЦ ДЛЯ МОНОИДОВ

П. Нормак

В теории колец и модулей важную роль играют квазифробениусовые кольца. Разными авторами найдены различные условия – большинство из которых имеют гомологический характер –, эквивалентные квазифробениусовости кольца.

В настоящей работе описаны моноиды, соответствующие различным условиям квазифробениусовости кольца.

Моноид S называется совершенным слева, если для любого левого S-полигона существует его проективное накрытие. Полигон A называется вполне проективным (вполне инъективным), если A – проективный образующий (инъективный кообразующий) в категории левых S-полигонов. Назовем полигон Σ-инъективным, если он инъективен и копроизведение любого бесконечного множества его копий также инъективно. Назовем полигон A простым, если он подпрямо неразложим и если его подполигонами являются сам A и, может быть, еще одноэлементный полигон θ. Полигон A называется абсолютно чистым, если он чист в своей инъективной оболочке $E(A)$. Все полигоны предполагаются левыми.

<u>Предложение 1</u>. Если полигон $\coprod_I A_i$ абсолютно чист и каждый полигон A_i содержит нулевой подполигон, то имеет место изоморфизм $E(\coprod_I A_i) \simeq \coprod_I E(A_i)$.

<u>Предложение 2</u>. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

1) Копроизведение любого множества инъективных (слабо инъективных, слабо f-инъективных, абсолютно чистых) S-полигонов инъективно (слабо инъективно, слабо f-инъективно, абсолютно чисто, соответственно).

2) Существуют инъективные S-полигоны A и B такие, что полигон $A \coprod B$ инъективен.

3) Существует инъективный (абсолютно чистый) S-полигон $A \coprod B$, где полигоны A и B содержат нулевые подполигоны.

4) Существует S-полигон A (содержащий нулевой подполигон) такой, что полигон $A \amalg A$ инъективен (абсолютно чист).

5) Любые два левые идеала моноида S имеют непустое пересечение.

Теорема 1. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

1) Все свободные (вполне проективные, проективные, счетно-порожденно проективные) S-полигоны инъективны.

2) Инъективная оболочка любого свободного S-полигона инъективна.

3) Моноид S является Σ-инъективным.

4) S – самоинъективный слева моноид с нулем.

Предложение 3. Пусть моноид S коммутативен. Тогда A – кообразующий в категории S-полигонов в том и только в том случае, если A содержит инъективную оболочку любого простого S-полигона.

Теорема 2. Пусть моноид S коммутативен. Тогда все свободные (вполне проективные) S-полигоны вполне инъективны в том и только в том случае, если S самоинъективен с нулем и любой простой S-полигон изоморфен некоторому идеалу моноида S.

Теорема 3. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

1) Все инъективные S-полигоны проективны.

2) Все вполне инъективные S-полигоны (вполне) проективны.

3) Любой S-полигон является подполигоном некоторого свободного S-полигона.

4) S – совершенный слева моноид и любой конечно порожденный S-полигон изоморфен подполигону некоторого проективного S-полигона.

5) S – единичная группа.

Заметим, что в категории R-модулей условия, соответствующие условиям 1)-3) теоремы 1, 1)-4) теоремы 3 и первой части теоремы 2, эквивалентны квазифробениусовости кольца R.

Московский государственный университет
Кафедра высшей алгебры

СИЛЬНАЯ ПЛОСКОСТЬ И ПРОЕКТИВНОСТЬ СПЛЕТЕНИЯ ПОЛИГОНОВ

П. Нормак

Пусть S и T – моноиды и A и B – левые S- и T-полигоны, соответственно. Для элементов $f, g \in T^A$ и $s \in S$ определим элементы $fg, {}^s f \in T^A$ формулами $(fg)(a) = f(a)g(a)$ и ${}^s f(a) = f(sa)$, $a \in A$. Для элементов $(s_1, f_1)(s_2, f_2) \in S \times T^A$ определим их произведение формулой $(s_1, f_1)(s_2, f_2) = (s_1 s_2, {}^{s_2} f_1 f_2)$. Полученный таким образом моноид называется сплетением моноидов S и T и обозначается через $S \operatorname{wr} T | A$. Сплетением $A \operatorname{wr} B$ полигонов A и B называется $(S \operatorname{wr} T | A)$-полигон, определенный на множестве $A \times B$, где $(s, f)[a, b] = [sa, f(a)b]$, $(s, f) \in (S \operatorname{wr} T | A)$, $[a, b] \in A \times B$.

Полигон A называется сильно плоским, если функтор $- \otimes A$ сохраняет уравнители и коуниверсальные квадраты.

<u>Теорема 1</u>. Левый $(S \operatorname{wr} T / A)$-полигон $A \operatorname{wr} B$ сильно плоский тогда и только тогда, когда полигоны A и B сильно плоские и выполняется одно из следующих условий:

1) Для любых двух элементов $t_1, t_2 \in T$ существует элемент $t \in T$ такой, что $t_1 t = t_2 t$.

2) Из равенства $s_1 a_1 = s_2 a_2$ следует существование элементов $u_1, u_2 \in S$ таких, что $s_1 u_1 = s_2 u_2$ и $u_1 A = a_1$, $u_2 A = a_2$, причем если $a_1 = a_2$, то можно выбрать $u_1 = u_2$.

3) Для любых двух элементов $t_1, t_2 \in T$ существуют элементы $v_1, v_2 \in T$ такие, что $t_1 v_1 = t_2 v_2$ и из равенства $s_1 a_1 = s_2 a_1$, $s_1 s_2 \in S$, $a_1 \in A$, всегда следует существование элемента $s \in S$ такого, что $s_1 s = s_2 s$ и $sA = a_1$.

<u>Теорема 2</u>. Левый $(S \operatorname{wr} T / A)$-полигон $A \operatorname{wr} B$ проективен тогда и только тогда, когда B – проективен и либо моноид T содержит правый нуль и A проективен либо $A \cong Sv$, $v \in S$, и существует элемент $s \in S$ такой, что $v = sSv$.

Московский государственный университет
Кафедра высшей алгебры

ПРОСТЫЕ СПРАВА ПОЛУКОЛЬЦА

В. Фляйшер

Рассматриваются полукольца с мультипликативным нулем и единицей. Множество A называется полукольцом с мультипликативным нулем и единицей (в дальнейшем просто полукольцом), если на нем определены две бинарные операции "+", "." так, что $(A, +)$ – коммутативная полугруппа, $(A, \cdot)$ – полугруппа с нулем 0 и единицей. Полукольцо называется простым справа, если на нем отсутствуют нетривиальные правые конгруэнции. Рассмотрение простых справа полуколец связано с вопросами гомологической классификации полуколец. Как показано в ([1], теорема 1) все правые циклические полумодули над полукольцом A свободны тогда и только тогда, когда A – простое справа полукольцо. Следующая теорема дает полное описание простых справа полуколец.

Теорема. Пусть A – простое справа полукольцо. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:

1) A – тело,

2) $A = \{1,0\}$ – двухэлементная дистрибутивная структура,

3) $A = \{1,0\}$ – двухэлементный моноид с нулевым сложением,

4) $A = G \cup 0$ – мультипликативная группа G с внешне присоединенным нулем, где сложение задается следующим правилом:

$$x + y = \begin{cases} x, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Литература

1. Фляйшер В., Ω-кольца, над которыми все полигоны n-свободны. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, 390, 56-83.

Тартуский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии

О РАДИКАЛЕ J_0 ПОЧТИ-КОЛЬЦА

К. Каарли

В теории почти-колец определено несколько аналогов радикала Джекобсона J из теории колец. Одним из наиболее удачных среди них является J_0. По определению $J_0(R)$ - это пересечение ядер всех простых циклических модулей над почти-кольцом R.

В [1] доказано, что J_0 является радикалом в смысле Куроша - Амицура тогда и только тогда, когда

$$J_0(J_0(R)) = J_0(R) \tag{1}$$

во всяком почти-кольце R. Проблема о существовани почти-колец, в которых (1) не выполняется, остается до сих пор открытой. Кроме того известно, что J_0 не является идеально наследственным.

В силу изложенного высше представляет интерес изучать следующие классы почти-колец

$$\mathcal{R} = \{R \mid J_0(R) = J_0(J_0(R))\},$$

$$\mathcal{H} = \{R \mid J_0(S) = S \cap J_0(R) \text{ для каждого идеала } S \text{ в } R\}.$$

В [1] доказано, что $\mathcal{R}$ содержит классы полупримарных, слабо артиновых и дистрибутивно порожденных (д.п.) почти-колец. Из [2] следует, что $\mathcal{H}$ содержит класс д.п. почти-колец.

Теперь удалось улучшить последние результаты. А именно, класс $\mathcal{R} \cap \mathcal{H}$ содержит всякое почти-кольцо R, для которого найдутся почти-кольца $R_1, R_2, \ldots, R_n = R$ такие, что R_1 - д.п. и R_{i+1} - идеал в R_i, $i = 1, \ldots, n-1$. Улучшение является существенным, так как идеал д.п. почти-кольца не обязан быть д.п. почти-кольцом.

Литература

1. Каарли К., Радикалы в почти-кольцах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, 390, 134-171.
2. Каарли К., Специальные $\mathcal{D}$-радикалы почти-колец. Третий всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщений, Тарту, 1976.

Тартуский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии

ЗАМЕЧАНИЕ О БАЗИСЕ ТОЖДЕСТВ АЛГЕБРЫ ВЕРХНИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

У.Кальюлайд

Идеал тождеств алгебры $\mathcal{T}(n)$ верхних треугольных матриц порядка n над полем нулевой характеристики найден Ю.Н.Мальцевым [3], а для полей положительной характеристики, как автору стало известно, ответ был недавно найден П.Сидеровым. В данной заметке идеал тождеств для $\mathcal{T}(n)$ находится не зависящим от характеристики поля способом, основанным на результатах работы [2] автора.

1. Пусть K – поле и L – векторное пространство над K. Фиксируем в L флаг подпространств

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_s = L \tag{1}$$

и пусть $\mathcal{T}$ - некоторая алгебра эндоморфизмов пространства L, для которых флаг (1) является инвариантным рядом, такая, что аннулятор ряда (1) в $\mathcal{T}$ совпадает с аннулятором для (1) в $End_K L$. Далее, пусть $\mathcal{T}_i$ $(i=1,2,\dots,s)$ - подалгебра в $End_K(L_i/L_{i-1})$ всех тех эндоморфизмов, которые могут быть индуцированы действием $\mathcal{T}$ в факторе L_i/L_{i-1}. В остальном придерживаемся определений и обозначений заметки [2] и обзора [5].

Естественные представления $(L_i/L_{i-1}, \mathcal{T}_i)$ точны и имеется изоморфизм представлений

$$(L,\mathcal{T}) \cong (L_1/L_0, \mathcal{T}_1) \nabla (L_2/L_1, \mathcal{T}_2) \nabla \dots \nabla (L_s/L_{s-1}, \mathcal{T}_s). \tag{2}$$

Согласно основной теореме работы [2] из (2) следует равенство

$$Var(L,\mathcal{T}) = Var(L_1,\mathcal{T}_1)\cdot Var(L_2/L_1,\mathcal{T}_2)\cdot\ldots\cdot Var(L/L_{s-1},\mathcal{T}_s). \tag{3}$$

Пусть $(M,\mathcal{S})$ – любое точное представление K-алгебры $\mathcal{S}$. Заметим, что вербальный идеал по многообразию $var\,\mathcal{S}$ в свободной счетнопорожденной K-алгебре $\mathcal{F}$ совпадает с T-идеалом, который в $\mathcal{F}$ соответствует многообразию представлений $Var(M, \mathcal{S})$. Это проверяется развертыванием определений.

Обозначим через T идеал тождеств для многообразия алгебр $var\,\mathcal{T}$, а через T_i – идеал тождеств многообразия $var\,\mathcal{T}_i$, $i=1,2,\ldots,s$. Приведенное выше замечание и антиизоморфизм полугруппы многообразий представлений с полугруппой T-идеалов алгебры $\mathcal{F}$ позволяют (3) переписать в виде формулы

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot \ldots \cdot T_s . \qquad (4)$$

2. Рассмотрим одно приложение формулы (4). Пусть алгебра $\mathcal{T}$ содержит все эндоморфизмы из $End_K L$, относительно которых флаг (1) инвариантен, а пространство L конечномерно; скажем, $dim_K L = n$. Обозначим также $n_i = dim_K L_i$, $i=0, 1, 2, \ldots, s$. Фиксируем в L базис, согласованный с флагом (1). Тогда $\mathcal{T}$ – алгебра всех верхних блочно-треугольных матриц над K с размерами диагональных блоков, соответственно, $n_i - n_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,s$, а $\mathcal{T}_i$ – полная матричная алгебра порядка $n_i - n_{i-1}$ над K. Формула (4) дает возможность найти идеал тождеств матричной алгебры $\mathcal{T}$ через идеалы тождеств матричных алгебр $\mathcal{T}_i$. В частности, имеет место

<u>Теорема</u>. Идеал тождеств T алгебры верхних треугольных матриц порядка n над полем K совпадает с T_1^n, где T_1 – идеал тождеств алгебры K.

При $char\,K = 0$ эта теорема превращается в отмеченный выше результат Ю.Н.Мальцева о том, что идеал T порождается многочленом $[x_1, x_2]\cdot[x_3, x_4]\cdot \ldots \cdot[x_{2n-1}, x_{2n}]$, где обозначено $[x,y] = xy - yx$, а в случае $char\,K > 0$ она является ответом на вопрос 109 из [1].

Из формулы (4) может быть найден также базис тождеств алгебры $\mathcal{T}$ верхних блочно-треугольных матриц в случае, если размеры диагональных блоков матриц из $\mathcal{T}$ не превышают числа 2, а поле K либо конечно, либо имеет характеристику нуль, ибо благодаря работам [4,6] известен базис тождеств алгебры матриц второго порядка над такими полями.

Литература

1. Днестровская тетрадь. Новосибирск, 1976.
2. Кальюлайд У.Э., Треугольные произведения представлений полугрупп и алгебр. Успехи мат. наук, 1977, 32, № 4, 253-254.
3. Мальцев Ю.Н., Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц. Алгебра и Логика, 1971, 10, № 4, 393-400.
4. Мальцев Ю.Н., Кузьмин Е.Н., Базис тождеств алгебры матриц второго порядка над конечным полем. Алгебра и Логика, 1978, 17, № 1, 28-32.
5. Плоткин Б.И., Многообразия представлений групп. Успехи мат. наук, 1977, 32, № 5, 3-68.
6. Размыслов Ю.П., О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль. Алгебра и Логика, 1973, 12, № 1, 83-113.

Тартуский государственный университет
Кафедра алгебры и геометрии

СВОБОДНЫЕ ЛУПЫ И БАЗИСНЫЙ РАНГ МНОГООБРАЗИЯ k-НИЛЬПОТЕНТНЫХ TS-ЛУП

П.Горинчой

Коммутативный группоид с единицей 1, удовлетворяющей тождествам $x^2=1$, $x(xy)=y$ называется TS-лупой.

Ассоциатором кратности 1 элементов a, b, c данной TS-лупы L называется элемент $(a,b,c)=a(b(c(a(bc))))$. Ассоциатор кратности $k\geqslant 2$ определяется индуктивно. Произвольная TS-лупа L называется k-нильпотентной, если в L имеет место тождество

$$(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{2k+1})=((x_1,x_2,x_3,\dots,x_{2k-1}),x_{2k},x_{2k+1})=1.$$

Символом $\mathfrak{N}^{(k)}$ обозначается многообразие всех k-нильпотентных TS-луп.

В силу результатов работы [1], любая лупа $L\in\mathfrak{N}^{(2)}$ есть некоторое ξ-произведение $L=B\times A=\{(x,a)\mid x\in B,\ a\in A\}$, где A и B - группы показателя два. Операция в ξ-произведении определяется правилом

$$(x,a)*(y,b)=(x+y,\ a+b+\xi(x,y)), \tag{1}$$

где $(+)$ - групповая операция в линейных пространствах[1] A и B. Отображение $\xi: B\times B\to A$ удовлетворяет условиям

$$\xi(x,y)=\xi(y,x)=\xi(x,x+y),\ \xi(x,0)=0. \tag{2}$$

С другой стороны, любое ξ-произведение пространства A и пространства B при условиях (1) и (2) является 2-нильпотентной TS-лупой.

Пусть $\mathcal{L}$ - линейное пространство, имеющее счетный базис $X=\{x_n \mid n$ - целое, $n\geqslant 1\}$. С каждым ненулевым элементом $u\in\mathcal{L}$ свяжем его вес $\|u\|$ по правилу

---

[1] Группы, являющиеся TS-лупами, это в точности группы показателя 2, т.е. линейные пространства над двухэлементным полем Z_2. Все рассматриваемые ниже пространства - линейные пространства над Z_2

$$u=\sum \varepsilon_i x_i = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots) \to \|u\| = \max\{i \mid \varepsilon_i \neq 0\}. \quad (3)$$

По определению полагаем, что вес нулевого элемента равен 0.

По линейному пространству $\mathcal{L}$ строим множество

$$\mathfrak{M} = \{(u,v) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \mid 0 < \|u\| < \|v\|,\ v \neq x_{\|v\|} \neq u+v\}. \quad (4)$$

Из (3) и (4) вытекает, что $(u,v) \in \mathfrak{M} \leftrightarrow (u, u+v) \in \mathfrak{M}$. Но тогда бинарное отношение на множестве $\mathfrak{M}$, определенное правилом

$$(u_1,v_1) \sim (u_2,v_2) \longleftrightarrow \begin{cases} \text{либо } u_1 = u_2 \text{ и } v_1 = v_2, \\ \text{либо } u_1 = v_1 + v_2 = u_2, \end{cases} \quad (5)$$

является эквивалентностью, причем классы эквивалентности - двухэлементные множества $\{(u,v), (u,u+v)\}$. Выписанный класс эквивалентности будем обозначать символом $\xi(u,v)$, а множество всех классов эквивалентности, т.е. фактор-множество $\mathfrak{M}/\sim$ - символом $\mathcal{Y}$.

Пусть A - линейное пространство с базисом $\mathcal{Y}$. Строим отображение $\xi : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to A$, продолжающее уже построенное отображение $\xi : \mathfrak{M} \to \mathcal{Y} = \mathfrak{M}/\sim$ с помощью следующих правил:

а) если $(u,v) \in \mathfrak{M}$, то $\xi(u,v) = \xi(u,v)$;

б) если $(v,u) \in \mathfrak{M}$, то $\xi(u,v) = \xi(v,u)$;

в) если $\|u\| \leq n$, то $\xi(u, x_n) = \xi(x_n, u) = \xi(x_n + u, u) = \xi(u, x_n + u) = \xi(x_n, x_n + u) = \xi(x_n + u, x_n) = 0$;

г) $\xi(u,u) = \xi(u,0) = \xi(0,u) = 0$ для всех $u \in \mathcal{L}$;

д) если $u \neq 0 = v$, $\|u\| = \|v\|$, $\{u,v\} \cap X = \varnothing$, то в этом случае, в силу (3), (4) и (5), легко получаем, что $(u+v, u) \in \mathfrak{M}$, $(u+v, v) \in \mathfrak{M}$, причем $(u+v, u) \sim (u+v, v)$, что позволяет положить

$$\xi(u,v) = \xi(v,u) = \xi(u+v, u) = \xi(u, u+v) = \xi(u+v, v) = \xi(v, u+v). \quad (6)$$

Анализируя отображение $\xi : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to A$, получаем, что равенства (6) верны для всех $(u,v) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L}$. Это позволяет построить ξ-произведение

$$S = \mathcal{L} \underset{\xi}{\times} A = \{(u,\alpha) \mid u \in \mathcal{L},\ \alpha \in A\},$$

являющееся 2-нильпотентной TS-лупой.

Для любого натурального $n \geqslant 1$ положим $X_n = \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$. Полагая $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} \cap (\mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_n)$ и $\mathcal{Y}_n = \xi(\mathfrak{M}_n)$, получаем, что $\mathcal{Y}_n$ порождает в пространстве A некоторое подпространство A_n.

Из указанных выше построений ξ-произведение $S_n = \mathcal{B}_n \times A_n$ является подлупой лупы $S = \mathcal{B} \underset{\xi}{\times} A$ для любого $n \geqslant 1$.

Теорема 1. Лупы S_n и S являются свободными 2-нильпотентными TS-лупами с множествами свободных образующих X_n и X соответственно.

Возьмем любое целое число $n \geqslant 1$. В свободной 2-нильпотентной TS-лупе $S = \mathcal{B} \underset{\xi}{\times} A$ выделим элемент

$$s_n = \sum_{g \in \mathcal{B}} (x_{n+1}, g, x_{n+2}),$$

где $\mathcal{B}_n$ – подпространство пространства $\mathcal{B}$ с базисом X_n.

Теорема 2. Для любого $n \geqslant 1$ в любой $(n+1)$-порожденной 2-нильпотентной TS-лупе выполняется тождество $s_n = 1$.

Теорема 3. В свободной $(n+2)$-порожденной 2-нильпотентной TS-лупе S_{n+2} тождество $s_n = 1$ не выполняется.

Теорема 4. Многообразие всех $(k+1)$-нильпотентных TS-луп имеет бесконечный базисный ранг.

Литература

1. Горинчой П.В., Рябухин Ю.М., О некоторых многообразиях TS-луп. Мат. исследования, 1974, 9, № 4, 42-57.

Тираспольский государственный педагогический институт
Кафедра алгебры

ПОЛУПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУППЫ И ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

П.Пуусемп

При изучении вопроса об определяемости группы G ее полугруппой всех эндоморфизмов $\mathrm{End}\,G$ полезно знать зависимость между свойствами группы G и полугруппы $\mathrm{End}\,G$. Некоторые примеры такого типа приведены в работах [1-2]. В данной работе мы дадим характеристику полупрямому разложению

$$G = H\lambda[(G_1\times\ldots\times G_n)\lambda K], \qquad \langle G_i, K\rangle = G_i\lambda K,$$

при помощи свойств полугруппы $\mathrm{End}\,G$.

Будем придерживаться следующих обозначений:

$J(G)$ - совокупность всех идемпотентов полугруппы $\mathrm{End}\,G$;

$K(x) = \{y\in \mathrm{End}\,G \mid yx = xy = y\}$, где $x\in \mathrm{End}\,G$;

$K(x)^*$ - группа всех обратимых элементов полугруппы $K(x)$ с единицей x ($x\in J(G)$);

$C(x) = \{y\in \mathrm{End}\,G \mid yx = xy\}$, где $x\in \mathrm{End}\,G$;

$V_{K(x)^*}(y) = \{z\in K(x)^* \mid zy = y\}$.

Если $G = H\lambda K$, $x\in J(G)$, $\mathrm{Jm}\,x = K$ и $\mathrm{Ker}\,x = H$, то будем говорить, что идемпотент x соответствует полупрямому разложению $G = H\lambda K$.

<u>Теорема</u>. Если группа G разлагается в полупрямое произведение

$$G = H\lambda[(G_1\times\ldots\times G_n)\lambda K], \tag{1}$$

где $\langle G_i, K\rangle = G_i\lambda K$ ($i = 1,\ldots,n$), то существуют $x, x_1,\ldots,x_n\in J(G)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\mathrm{Jm}\,x_i = G_i\lambda K$, $\mathrm{Ker}\,x_i = H\lambda \prod_{j=1, j\neq i}^{n} G_j$ ($i = 1,\ldots,n$);

2) $\mathrm{Jm}\,x = K$, $\mathrm{Ker}\,x = H\lambda(G_1\times\ldots\times G_n)$;

3) $G_i = \mathrm{Ker}\,x \cap \mathrm{Jm}\,x_i$, $H = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\,x_i$;

4) $x_i x_j = x_j x_i = x$, $i\neq j$ ($i,j\in\{1,\ldots,n\}$);

5) для каждой пары $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, $i\neq j$, существует $z_{ij}\in J(G)$, для которого $x_i, x_j\in K(z_{ij})$ и в группе $K(z_{ij})^*$ существует единственная пара V_i, V_j ее подгрупп, удовлетворяющая условиям:

а) $V_i \leq C(x_i)$; $V_j \leq C(x_j)$;

б) $V_i \cdot x_i = V_{K(x_i)^*}(x)$; $V_j \cdot x_j = V_{K(x_j)^*}(x)$;

в) $x_i v x_i = x_i$ для каждого $v \in V_j$;

г) $x_j u x_j = x_j$ для каждого $u \in V_i$.

Наоборот, если существуют $x, x_1, \ldots, x_n \in J(G)$, обладающие свойствами 4) и 5), то группа G разлагается в полупрямое произведение (1), где $\langle G_i, K \rangle = G_i \lambda K$ и имеет место равенства 1) - 3).

Теорема является обобщением теоремы 1.7 работы [1].

Следствие 1. Если существуют $x, x_1, \ldots, x_n \in J(G)$ обладающие свойствами 4) и 5) теоремы, то существует $y \in J(G)$, для которого $x_i y = y x_i = x_i$ при каждом $i \in \{1, \ldots, n\}$, и совокупность всех таких $y \in J(G)$ имеет свой двусторонний нуль. Этот нуль является идемпотентом, соответствующим полупрямому разложению (1).

Следствие 2. Пусть группа G конечна, $G = \langle a \rangle \lambda \langle b \rangle$ и полугруппы всех эндоморфизмов групп G и L изоморфны. Тогда группа L разлагается в полупрямое произведение $L = \langle c \rangle \lambda \langle d \rangle$, где $o(a) = o(c)$, $o(b) = o(d)$.

В следствии 2 нельзя утверждать, что группы G и L изоморфны (см. [3] , теорема 3).

Литература

1. Пуусемп П., Идемпотенты полугрупп эндоморфизмов групп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366, 76-104.

2. Пуусемп П., Полугруппы эндоморфизмов обобщенных групп кватернионов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1976, 390, 84-103.

3. Пуусемп П., Об определяемости полупрямого произведения циклических групп своей полугруппой эндоморфизмов. В сб. "2-ой всесоюзной симпозиум по теории полугрупп", Свердловск, 1978, стр. 75.

Таллинский политехнический институт

Кафедра экономической математики

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕРИАЛЫ КОНФЕРЕНЦИИ "МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ СЕМЕЙСТВ ОПЕРАТОРОВ" 24-26 ноября 1978. На русском языке. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18. Ответственный редактор С. Барон. Сдано в печать 04.XI.78. Бумага писчая 30x42 1/4. Печ. листов 7,25 (условных 6,74). Учетно-издат. листов 5,12. Тираж 400. МВ 07364. Типография ТГУ, ЭССР, г. Тарту, ул. Пялсони, 14. Зак. № 1412. Цена 35 коп.