TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
Matemaatika ja statistika instituut
Finants- ja kindlustusmatemaatika eriala

Mailis Metsalu

Barjääriga optsiooni hinna määramine binoom- ja trinoommeetodi modifikatsioonidega

Magistritöö (30 EAP)

Juhendaja Toomas Raus

TARTU 2016

Barjääriga optsiooni hinna määramine binoom- ja trinoommeetodi modifikatsioonidega

Magistritöö

Mailis Metsalu

Lühikokkuvõte. Optsioon annab optsiooni omanikule võimaluse alusvara osta või müüa eelnevalt kindlaksmääratud ajahetkel tulevikus fikseeritud hinnaga. Käesolevas töös vaatleme bino–trinoommeetodit ja adaptiivsete võrede meetodit (AVM) barjääriga optsiooni hinna leidmiseks. Bino–trinoommeetod on kombinatsioon binoom- ja trinoommeetodist, mille korral konstrueeritakse alusvara hinnapuu selliselt, et barjäär või barjäärid läbivad hinnapuu tippe. Adaptiivsete võrede meetodi korral konstrueeritakse lisaks tavalisele trinoompuule üks või mitu tihedamat võret nii, et barjäär läbiks hinnapuu tippe. Töös on toodud programmid barjääriga optsiooni hinna leidmiseks trinoommeetodi, bino–trinoommeetodi ja adaptiivsete võrede meetodi abil.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonanalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika.

Märksõnad: tuletisväärtpaberid, optsioonid, finantsmatemaatika.

Pricing barrier options with modifications of binomial and trinomial method

Master‘s Thesis

Mailis Metsalu

Abstract. An option gives the holder of the option the right to buy or sell an asset at a certain time in the future with fixed price. In this thesis we consider bino–trinomial method and adaptive mesh model (AMM) to price the barrier option. The bino–trinomial method is a combination of binomial and trinomial method which allows to construct underlying asset's price tree so that barrier or barriers go through the price tree's nodes. The AMM described in this thesis involves constructing coarser mesh and one or more layers of fine mesh near the price level of a barrier option so that barrier goes through the price tree's nodes. This thesis contains programs to price a barrier option with trinomial method, bino–trinomial method and adaptive mesh model.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operation research, programming, actuarial mathematics.

Keywords: derivative instruments, options, financial mathematics.

Sisukord

Sissejuhatus

Optsioon on kahepoolne kokkulepe, mis annab võimaluse alusvara osta või müüa kindlaksmääratud ajahetkel tulevikus fikseeritud hinnaga. Optsioonide õiglase hinna määramine on optsiooniteooria põhiline probleem. Käesolevas töös keskendume barjääriga optsiooni hindamisele adaptiivsete võrede ja bino–trinoommeetodiga, mida võib vaadelda kui binoom- ja trinoommeetodi modifikatsioone barjääriga optsioonide hindamisel. Barjääriga optsioon erineb tavalisest optsioonist selle poolest, et optsioon hakkab kehtima või muutub tähtsusetuks, kui alusvara hind jõuab eelnevalt kindlaksmääratud hinnatasemeni. Ette võib anda alumise barjääri, ülemise barjääri või mõlemad.

Töö esimeses alapeatükis anname ülevaate optsioonidega seotud mõistetest. Alapeatükkides 1.2 ja 1.3 kirjeldame kõige lihtsamaid võremeetodeid optsiooni hinna leidmiseks: binoom- ja trinoommeetodit. Lähemalt võib optsioonide ja optsiooni hinda mõjutavate tegurite kohta lugeda bakalaureustööst [4].

Töö teises peatükis toome sisse barjääriga optsiooni mõiste ning vaatleme lähemalt probleeme, miks tavaline trinoommeetod ei sobi barjääriga optsiooni hinna leidmiseks. Osutub, et tavalise trinoommeetodi korral ostsilleerub optsiooni hind oluliselt ning optsiooni hinna koondumine on väga aeglane, kui barjäär asub alusvara alghinna lähedal.

Töö kolmandas peatükis vaatleme adaptiivsete võrede meetodit ühe barjääriga optsiooni hindamisel, mis sobib juhul, kui barjäär asub alusvara alghinna lähedal. Selle meetodi korral konstrueeritakse trinoompuu nii, et barjäär läbiks hinnapuu tippe ning barjääri ümbruses konstrueeritakse üks või mitu tihedamat võret. Adaptiivsete võrede meetodit saab kasutada ühe barjääriga Euroopa ja Ameerika optsiooni hinna määramisel.

Töö neljandas peatükis kirjeldame bino–trinoommeetodit, mille korral konstrueeritakse hinnapuu esimesel ajaperioodil vastavalt trinoommeetodile ja kõikidel järgnevatel ajahetkedel nagu binoommeetodi korral. Sealjuures konstrueeritakse hinnapuu selliselt, et barjäär(id) läbiks(id) hinnapuu tippe. Bino–trinoommeetodit saab kasutada nii alumise, ülemise kui ka kahe barjääriga optsiooni hinna määramiseks. Optsiooni hinna arvutamiseks binoompuu algustipus vaatleme lisaks optsiooni hinna rekursiivsele arvutamisele ka optsiooni hinna leidmist kombinaatorika valemeid kasutades. Viimasel juhul on arvutusmaht tunduvalt väiksem ning see võimaldab optsiooni hinda arvutada ka juhul, kui perioodide arv on väga suur.

Töö viimases peatükis toome välja numbriliste eksperimentide tulemused nii ühe kui kahe barjääriga optsiooni hinna määramisel tavalise trinoommeetodiga, bino–trinoommeetodiga ja adaptiivsete võrede meetodiga. Programmid numbriliste eksperimentide jaoks on koostatud programmeerimiskeele Python abil ning on toodud lisades.

1 Põhimõisted. Binoom- ja trinoommeetod

Selle peatüki kirjutamisel on kasutatud bakalaureusetööd [7] ja allikat [9].

1.1 Optsioonidega seotud põhimõisted

Tuletisväärtpaber ehk derivatiiv on finantsinstrument, mille väärtus tuleneb mingist teisest varast, mida edaspidi nimetame alusvaraks. Enamlevinud alusvaraks on aktsiad, kuid alusvaraks võivad olla ka valuuta, metallid, põllumajandussaadused ja muu. Levinumateks tuletisväärtpaberiteks on optsioonid, forwardid (kohustab tulevikus müüma ja ostma mingit finantsvara varem kokku lepitud ajal fikseeritud hinnaga), futuurid (sarnane forwardile, aga futuuri saab enne lepingu lõppemist finantsturgudel ostja olemasolu korral maha müüa) ja vahetustehingud ehk swapid (tehing, kus osapooled vahetavad nt erinevat valuutat tingimusel sooritada vastupidine operatsioon tulevikus).

Kõige levinumaks derivatiiviks on optsioonid. Optsioon on võimalus osta või müüa alusvara kindlal ajahetkel tulevikus fikseeritud hinnaga. Optsiooni õige hinna määramine on optsioonide teooria üks tähtsamaid probleeme. Optsioone jagatakse enamasti kaheks: ostu- ja müügioptsioon. Ostuoptsioon annab omanikule võimaluse osta mingit alusvara kuni kindlaksmääratud ajahetkeni (täitmisaeg) tulevikus fikseeritud hinnaga, müügioptsioon aga võimaluse müüa. Optsioone võib jagada ka realiseerimise aja järgi. Näiteks Euroopa optsiooni saab realiseerida vaid täitmisajal eelnevalt fikseeritud hinnaga, Ameerika optsiooni aga mistahes ajahetkel kuni täitmishetkeni. Käesolevas töös keskendume Euroopa tüüpi barjääri(de)ga optsiooni hinna leidmisele. Barjääriga optsioonide puhul hakkab optsioon kehtima või kaotab kehtivuse, kui alusvara hind ületab teatud hinnataset ehk barjääri.

Toome sisse järgmised tähistused:

- V – optsiooni hind;
- S_0 – optsiooni ostmise hetkel $t = 0$ kehtiv alusvara hind;
- $S(t)$ – alusvara hind ajahetkel t;
- T – täitmisaeg, realiseerimisaeg ehk optsiooni eluiga;
- E – optsiooni täitmishind;
- r – riskivaba intressimäär;

- σ – alusvara hinna volatiilsus (varieeruvus).

Maksefunktsioon näitab tulu, mida omanik võib teenida realiseerimisaja lõpus. Euroopa optsiooni omanik saab ostuoptsiooni korral realiseerimispäeval tulu

$$P_T = \max\{S_T - E, 0\}$$

ning müügioptsiooni korral on võimaliku tulu suurus

$$P_T = \max\{E - S_T, 0\},$$

kus S_T on alusvara hind ajahetkel T. Seega Euroopa optsiooni maksefunktsioon avaldub kujul

$$P_T = \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, \tag{1.1}$$

kus $\Theta = 1$ ostuoptsiooni ja $\Theta = -1$ müügioptsiooni korral.

Finantsturgude uurimisel eeldatakse, et kehtib efektiivse turu hüpotees. See väidab, et mineviku sündmused kajastuvad täielikult alusvara käesolevas hinnas, aga ei hõlma endas tulevikuga seotud informatsiooni, ning turud reageerivad koheselt igasugusele uuele informatsioonile alusvara hinna kohta. Efektiivse turu hüpoteesi kohaselt liiguvad alusvara hinnad juhuslikult ning hinnamuutused järgivad Markovi protsessi. Alusvara hinna käitumist kirjeldab stohhastiline diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sigma dW, \tag{1.2}$$

Suurus αdt kirjeldab ennustatavat tulu, kusjuures suurus α on alusvara tulususe keskmine kasv ja r on riskivaba intressimäär. Suurust σ nimetatakse aktsia hinna volatiilsuseks ja see iseloomustab aktsia hinna tulususe standardhälvet. Liidetav σdW on juhuslik suurus, mis kirjeldab alusvara hinnamuutusi, mis on tingitud mingitest juhuslikest alusvara hinda mõjutavatest välisteguritest.

Suurust dW nimetatakse Wieneri protsessiks. Wieneri protsess on juhuslik protsess, millel on järgmised omadused:

- dW on normaaljaotusega juhuslik suurus,
- dW keskväärtus on 0 ehk $\mathcal{E}(dW) = 0$,
- dW dispersioon on dt ehk $\mathrm{Var}(dW) = dt$.

1973. aastal töötasid Fisher Black ja Myron Scholes välja Black–Scholesi diferentsiaalvõrrandi optsiooni hinna leidmiseks, mille siinkohal ilma tuletuskäiguta ära toome.

Black–Scholesi võrrandi korral eeldatakse, et

- Alusvara hind käitub vastavalt lognormaalse juhusliku ekslemise protsessile (1.2).
- Riskivaba intressimäär r ja vara volatiilsus σ on ajast sõltuvad funktsioonid, mis on optsiooni väljastamisel teada kogu optsiooni eluea ajaks.
- Aktsia ostu-müügiga seotud tehingukulud puuduvad.
- Alusvara eest ei maksta dividende terve optsiooni eluea jooksul.
- Alusvaraga kauplemisel puudub arbitraaži võimalus. See tähendab, et alusvaraga kaubeldes ei ole võimalik teenida riskivabalt suuremat tulu raha riskivabal paigutamisel panka või ostes valitsuse võlakirju.
- Alusvaraga kauplemine toimub pidevalt.
- Alusvara lühikeseks müümine on lubatud ja alusvara on osadeks jagatav. Alusvara jagatavus tähendab, et meil on võimalik osta või müüa suvalist reaalarvulist kogust alusvara. Lühikeseks müümine tähendab, et me saame müüa aktsiaid, mille omanikuks me pole. Seega lühikeseks müümise korral saame müüa eelnevalt laenatud aktsiaid.

Eeldame edaspidi, et investorid on riskineutraalsed. See tähendab et juhusliku rahavoo väärtus on riskineutraalsete investorite jaoks võrdne selle juhusliku tulu keskväärtusega. Nendel eeldustel avaldub optsiooni hind Black–Scholesi diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

lahendina, kus $V = V(S(t), t)$ on optsiooni hind, $S = S(t)$ on alusvara hind, $\sigma = \sigma(t)$ on alusvara volatiilsus ja $r = r(t)$ on riskivaba intressimäär. Black–Scholesi diferentsiaalvõrrandil on ühene lahend, kui anname ette lõputingimused $V(S(T), T) = P_T$ (st optsiooni hind ajahetkel T on võrdne maksefunktsiooni väärtusega) ning rajatingimused ($V(0,t) = 0$ ostuoptsiooni korral ning $V(0,t) = Ee^{-r(T-t)}$ müügioptsiooni korral). Analüütiliselt saab optsiooni hinna Black–Scholesi võrrandi lahendina leida vaid Euroopa optsiooni korral ning keerulisemate optsioonide hindamiseks tuleb kasutada erinevaid numbrilisi meetodeid.

Meetodeid, millega saab optsioone hinnata, on mitmeid: võremeetodid (näiteks binoommeetod, trinoommeetod), diferentsmeetodid (Black–Scholesi lahendamine numbriliste meetoditega), simulatsioonimeetodid (Monte Carlo meetod). Kõiki neid saab kasutada ka barjääriga optsioonide hinna määramisel, aga käesolevas töös vaatleme lähemalt võremeetodeid. Võremeetodite korral konstrueeritakse alusvara hinnapuu, mis koosneb kõikvõimalikest alusvara hinna liikumise teedest kuni optsiooni täitmisajani. Tuntuimad võremeetodid on binoom- ja trinoommeetod ning neid vaatleme järgmistes alapeatükkides. Mõlema meetodi korral arvutatakse optsiooni hinnad alusvara hinnapuus tagant ettepoole liikudes ehk kõigepealt leitakse optsiooni hinnad täitmishetkel T, siis ajahetkel $T-1$ jne.

1.2 Binoommeetod

Binoommeetodi töötasid välja Cox, Ross ja Rubinstein 1979. aastal. Esitame binoommeetodi idee Euroopa tüüpi optsiooni hinna leidmiseks. Olgu S_0 alusvara hind ajahetkel $t = 0$. Jagame optsiooni eluea $[0, T]$ diskreetseteks ajavahemikeks. Olgu ajavahemike arv M ja olgu ajaperioodi pikkus $\Delta t = T/M$. Igal ajahetkel $m\Delta t$, $m = 0, 1, \dots, M$ saab alusvara hind S_m liikuda üles tõenäosusega p või alla tõenäosusega $1-p$. Eeldame, et hinna üles- ja allaliikumise konstandid u ja d on kõikidel ajahetkedel samad, kusjuures $u > d$. Seega binoommeetodi korral saab alusvara hind omada igal järgmisel ajahetkel kahte erinevat väärtust. Näiteks kolmandal ajahetkel $3\Delta t$ on neli võimalikku vara hinda u^3S_0, u^2dS_0, ud^2S_0 ja d^3S_0. Kokkuvõttes saab ajahetkel $m\Delta t$ alusvara hind omada $m+1$ erinevat väärtust:

$$S_m = S_0 u^{m-j} d^j, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Joonisel 1 on toodud binoommeetodi hinnapuu, kui $ud = 1$. Binoommeetodi parameetrid u, d, p määratakse nii, et oleks täidetud järgmised kaks tingimust. Esiteks, arbitraaživabas mudelis peab riskineutraalsete investorite jaoks alusvara keskmine väärtus perioodi lõpus olema $Se^{r\Delta t}$, kus r on riskivaba intressimäär. Seega

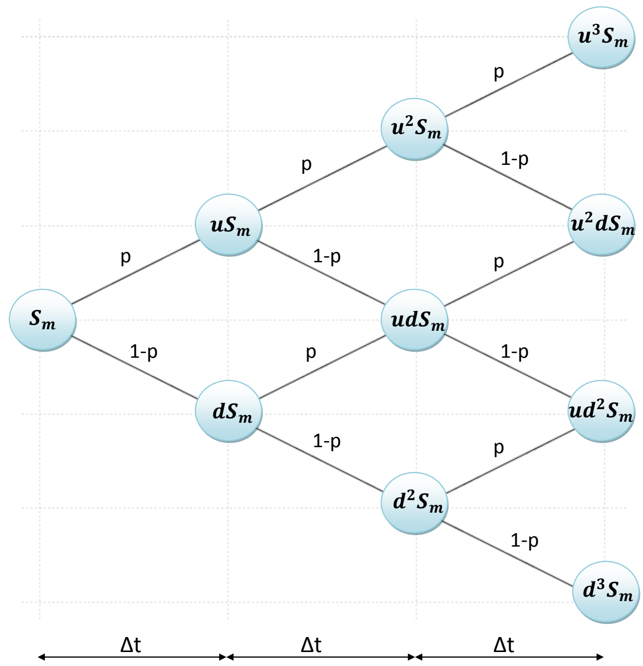
$$S_m e^{r\Delta t} = \mathcal{E}[S_{m+1}] = S_m[pu + (1-p)d], \tag{1.3}$$

kus $\mathcal{E}$ tähistab keskväärtust.

Teiseks, punktis 1.1. tehtud eeldustel alusvara hinna käitumisele on hinna dispersioon võrdeline ajaga ning seega $\mathrm{Var}(S_{m+1}) = S_m^2\sigma^2\Delta t$. Saame

$$\begin{aligned} S_m^2\sigma^2\Delta t &= \mathrm{Var}(S_{m+1}) = \mathcal{E}[(S_{m+1})^2] - (\mathcal{E}[S_{m+1}])^2 \\ &= S_m^2[pu^2 + (1-p)d^2 - \big(pu + (1-p)d\big)^2], \end{aligned} \tag{1.4}$$

kus σ on alusvara hinna volatiilsus. Tingimuste (1.3) ja (1.4) põhjal saame võrrandi-



Joonis 1: Binoommeetodi hinnapuu, kui $u = \frac{1}{d}$.

süsteemi

$$\begin{aligned} pu + (1-p)d &= e^{r\Delta t}, \\ pu^2 + (1-p)d^2 &= \sigma^2 \Delta t + e^{2r\Delta t}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Selleks, et üheselt määrata kolme tundmatu p, u ja d väärtusi, on lisaks võrrandisüsteemile (1.5) vaja veel üht lisatingimust, milleks sageli võetakse tingimus $ud = 1$. Sel juhul on võrrandisüsteemi lahendiks täpsusega $o(\Delta t)$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{1.6}$$

Euroopa optsiooni hinnad $V_{M,j}$ ajahetkel $M\Delta t = T$ saame leida valemiga

$$V_{M,j} = \max\{\Theta(S_{M,j} - E), 0\}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, M,$$

kasutades maksefunktsiooni (1.1). Kui me teame optsiooni hindu ajahetkel $M\Delta t$, saame arvutada optsiooni hinnad ajahetkel $(M-1)\Delta t$, seejärel saame leida optsiooni hinnad ajahetkel $(M-2)\Delta t$ ja nii edasi, kuni leiame optsiooni hinna V_0 ajahetkel $t = 0$. Seega saame optsiooni hinna ajaperioodil $t = 0$ leida ajas tagant ettepoole liikudes valemiga

$$V_{m,j} = e^{-r\Delta t}[pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j}], \quad j = 0, 1, \ldots, m,$$

kus $0 \leq j \leq m < M$.

Ameerika optsiooni korral saame optsiooni hinna leida vastavalt valemile

$$V_{m,j} = e^{-r\Delta t}[pV^*_{m+1,j+1} + (1-p)V^*_{m+1,j}], \quad j = 0, 1, \ldots, m, \tag{1.7}$$

kus $V^*_{m,j} = \max\{V_{m,j}, \max\{\Theta(S_{m,j} - E), 0\}\}$. Seega saame binoommeetodit lihtsalt kasutada ka Ameerika optsiooni hindamiseks.

Euroopa optsiooni hinna ajahetkel $t = 0$ saame leida ka kombinatoorika valemeid kasutades. Sel juhul on optsiooni hind alghetkel leitav valemiga

$$V_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^{M} C_M^j p^{M-j}(1-p)^j \max\{\Theta(S_0 u^{M-j} d^j - E), 0\}, \tag{1.8}$$

kus $C_M^j = \frac{M!}{j!(M-j)!}$ tähistab erinevate hinnaliikumise teede arvu tipust S_0 tipuni $S_{M,j} = S_0 u^{M-j} d^j$, mille korral suurus $j = 0, 1, 2, \ldots, M$ märgib hinna allaliikumiste arvu ja $p^{M-j}(1-p)^j$ on ühe tee tõenäosus.

1.3 Trinoommeetod

Binoommeetod on suhteliselt ressursinõudlik keerulisemate optsioonide hindamisel. Seda seetõttu, et optsiooni hinna koondumine on aeglane ja täpsema hinna saamiseks on vajalik ajaperioodide arv väga suur. Trinoommeetodil on parameetrite valikul rohkem vabadusastmeid ja seda on keerulisemate optsioonide korral tunduvalt lihtsam kasutada. Olgu ajahetkede arvuks M ja $\Delta t = T/M$. Trinoommeetodi korral saab alusvara hind järgmisel ajahetkel omada kolme erinevat väärtust. Olgu ajahetkel $m\Delta t$ alusvara hinnaks S_m, kus $m = 0, 1, \ldots, M$. Ajahetkel $(m+1)\Delta t$ saab alusvara hind olla uS_m, qS_m või dS_m, kus $u > q > d > 0$. Olgu jagunemise tõenäosused vastavalt p_u, p_q ja p_d, kusjuures

$$p_u + p_q + p_d = 1; \quad 0 < p_u < 1,\ 0 < p_q < 1,\ 0 < p_d < 1. \tag{1.9}$$

Analoogiliselt binoommeetodiga (vt (1.5)) saame parameetrite u, d, q, p_u, p_d ja p_q leidmiseks võrrandisüsteemi:

$$\begin{aligned} S_m e^{r\Delta t} &= \mathcal{E}[S_{m+1}] = S_m\big(p_u u + p_q q + p_d d\big), \\ S_m^2 \sigma^2 \Delta t &= \mathrm{Var}(S_{m+1}) = \mathcal{E}[(S_{m+1})^2] - (\mathcal{E}[S_{m+1}])^2 \\ &= S_m^2[(p_u u^2 + p_q q^2 + p_d d^2 - \big(p_u u + p_q q + p_d d\big)^2]. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Võrrandite (1.9) ja (1.10) abil saame kolm võrrandit suuruste p_u, p_q, p_d, u, q ja d leidmiseks. Seega on meil kuue tundmatu leidmiseks 3 võrrandit:

$$\begin{aligned} p_u u + p_q q + p_d d &= e^{r\Delta t}, \\ p_u u^2 + p_q q^2 + p_d d^2 &= \sigma^2 \Delta t - e^{2r\Delta t}, \\ p_u + p_q + p_d &= 1. \end{aligned}$$

Vaatame lähemalt ühte võimalust, kuidas valida trinoommeetodi parameetreid. Võtame trinoommeetodi ühe ajahetke võrdseks binoommeetodi kahe ajahetkega. Binoommeetodi korral on võimalikeks alusvara hindadeks pärast kahte esimest ajahetke

$$\begin{aligned} u^2 S_0, &\quad \text{tõenäosusega } p^2; \\ S_0, &\quad \text{tõenäosusega } 2p(1-p); \\ d^2 S_0, &\quad \text{tõenäosusega } (1-p)^2. \end{aligned}$$

Asendame Δt suurusega $\Delta t/2$ ja võtame parameetriteks u, d, q vastavad suurused:

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \quad q = 1, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

Tõenäosusteks võtame

$$p_u = p^2, \quad p_q = 2p(1-p), \quad p_d = (1-p)^2,$$

kus

$$p = \frac{e^{r\Delta t/2} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}}.$$

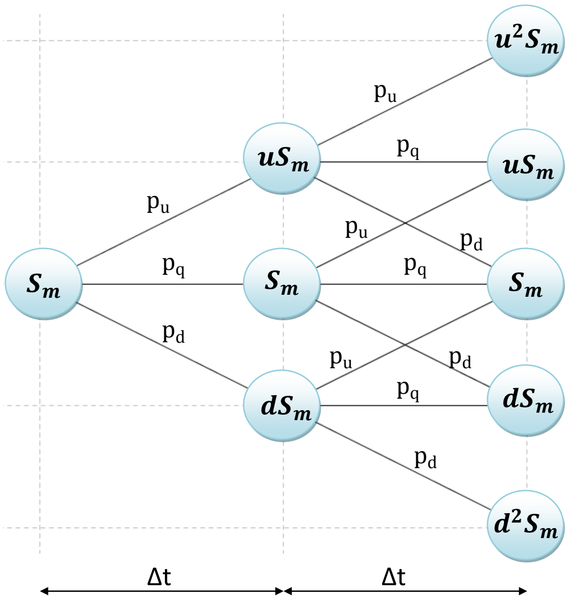
Joonisel 2 on toodud trinoommeetodi hinnapuu $q = 1$ korral.

Sarnaselt binoommeetodile, saame optsiooni hinna ajahetkel $t = 0$ leida, arvutades tagant ettepoole. Kui meil on teada optsiooni hinnad ajahetkel $(m+1)\Delta t$, saame Euroopa optsiooni hinna ajahetkel $m\Delta t$ leida vastavalt valemile

$$V_{m,j} = e^{-r\Delta t}(p_u V_{m+1,j+1} + p_q V_{m+1,j} + p_d V_{m+1,j-1}), \tag{1.11}$$

kus $V_{m+1,j+1}$, $V_{m+1,j}$ ja $V_{m+1,j-1}$ on ajahetke $(m+1)\Delta t$ vastavad optsiooni hinnad.

Analoogiliselt binoommeetodiga on trinoommeetod rakendatav ka Ameerika optsioonide hinna määramiseks. Saame Ameerika optsiooni hinna ajaperioodil $t = 0$ leida



Joonis 2: Trinoommeetodi hinnapuu $q = 1$ korral.

ajas tagant ettepoole liikudes sarnaselt valemiga (1.7)

$$V_{m,j} = e^{-r\Delta t}[p_u V^*_{m+1,j+1} + p_q V^*_{m+1,j} + p_d V^*_{m+1,j-1}],$$

kus $V^*_{m,j} = \max\{V_{m,j}, \max\{\Theta(S_{m,j} - E), 0\}\}$.

2 Barjääriga optsioonid

Käesolev peatükk tugineb materjalidel [3]-[7], [9].

2.1 Barjääriga optsioonide liigitus

Tavalisteks optsioonideks nimetame Euroopa ning Ameerika ostu- ja müügioptsiooni. Tavaliste optsioonide korral sõltub optsiooniga seotud väljamakse alusvara hinnast realiseerimis- ehk täitmispäeval. Lisaks tavalistele optsioonidele kasutatakse finantsturgudel ka eksootilisi optsioone, kus optsiooniga seotud väljamakse tingimused erinevad tavaliste optsioonide omadest. Tuntumad eksootilised optsioonid on barjääriga, Aasia ja tagasivaatavad (*lookback*) optsioonid. Aasia optsioonide korral sõltub väljamakse alusvara keskmisest hinnast optsiooni eluajal, tagasivaatavate optsioonide korral aga alusvara maksimaalsest või minimaalsest hinnast. Vaatleme edaspidi barjääriga optsioone, mille korral väljamakse sõltub sellest, kas alusvara hind jõuab eelnevalt kokkulepitud hinnatasemeni ehk -barjäärini kindlaksmääratud ajahetkel või mitte. Eksootiliste optsioonide hindu ei saa leida tavalise Black–Scholesi diferentsiaalvõrrandi abil ning nende hindamiseks kasutatakse erinevaid numbrilisi meetodeid. [7]

Barjääriga optsioone võime jagada kaheks: *knock–out* ja *knock–in*. Kui tegemist on *knock–out* optsiooniga, siis optsioon kaotab kehtivuse, kui alusvara hind jõuab etteantud hinnatasemeni enne realiseerimisaega. *Knock–in* optsioon hakkab kehtima, kui vara hind ületab etteantud hinnabarjääri enne täitmisaega. Barjääriga optsiooni korral võib ette anda alumise barjääri $L < S_0$, ülemise barjääri $H > S_0$ või mõlemad. Kui etteantud barjäär asub ülalpool alusvara alghinda, on meil tegemist *up*- optsiooniga. Kui aga barjäär asub alusvara alghinnast allpool, nimetame optsiooni *down*- optsiooniks. Selle põhjal võime nii *knock–out* kui ka *knock–in* optsiooni jagada omakorda kaheks:

- *Up-and-in* optsiooni saab realiseerida vaid juhul, kui alusvara hind ületab ülemist barjääri.
- *Down-and-in* optsiooni saab realiseerida ainult siis, kui alusvara hind langeb allapoole alumist barjääri.
- *Up-and-out* optsioon kaotab kehtivuse, kui ülemisest barjäärist H jõutakse ülespoole enne eluea lõppu.
- *Down-and-out* optsioon kaotab kehtivuse, kui alumisest barjäärist L jõutakse allapoole enne eluea lõppu.

Barjääriga optsioone võime jälgitavuse järgi jagada pidevateks ja diskreetseteks. Pidevaks barjääriga optsiooniks nimetatakse optsiooni siis, kui alusvara hinna jõudmist barjäärini kontrollitakse kogu optsiooni eluea jooksul. Diskreetselt jälgitava barjääriga optsiooni korral kontrollitakse barjäärini jõudmist vaid fikseeritud ajahetkedel, näiteks kord päevas, kord kuus, kord kvartalis, kord aastas. Diskreetse barjääriga optsiooni hinda ei saa leida ilmutatud kujul hindamise võrrandiga, mistõttu on hinna määramine keerulisem kui pideva barjääriga optsiooni korral. Eeldame edaspidi, et tegu on pidevalt jälgitava optsiooniga. Barjääriga optsiooni maksefunktsioon sõltub sellest, kas alusvara hind ületab barjääri või mitte. Olgu $L < S_0 < H$. Pideva *up-and-in* optsiooni korral (barjääriks H) on maksefunktsioon

$$P_T := \begin{cases} \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, & \text{kui } S_{sup} \geq H, \\ 0, & \text{vastupidisel juhul,} \end{cases}$$

kus $S_{sup} = \sup\limits_{0 \leq t \leq T} S(t)$, S_T on aktsia hind ajahetkel T ning $\Theta = 1$ ostuoptsiooni korral ja $\Theta = -1$ müügioptsiooni korral. *Down-and-in* ühe barjääriga (barjääriks L) Euroopa optsiooni korral on maksefunktsioon kujul

$$P_T := \begin{cases} \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, & \text{kui } S_{inf} \leq L, \\ 0, & \text{vastupidisel juhul,} \end{cases}$$

kus $S_{inf} = \inf\limits_{0 \leq t \leq T} S(t)$.

Down-and-out ja *up-and-out* optsioonide maksefunktsioonid on analoogilised, kuid väljamakse toimub vastupidisel juhul võrreldes *in*-optsioonidega. Seega *up-and-out* ja *down-and-out* maksefunktsioonid on vastavalt

$$P_T := \begin{cases} \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, & \text{kui } S_{sup} < H, \\ 0, & \text{vastupidisel juhul,} \end{cases}$$

ja

$$P_T := \begin{cases} \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, & \text{kui } S_{inf} > L, \\ 0, & \text{vastupidisel juhul.} \end{cases} \tag{2.1}$$

Kui ette antakse mõlemad barjäärid L ja H, siis pideva kahe barjääriga *out*-optsiooni korral on maksefunktsioon kujul

$$P_T := \begin{cases} \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, & \text{kui } S_{sup} < H \text{ ja } S_{inf} > L, \\ 0, & \text{vastupidisel juhul.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Pideva kahe barjääriga *in*-optsiooni maksefunktsioon avaldub analoogselt

$$P_T := \begin{cases} \max\{\Theta(S_T - E), 0\}, & \text{kui } S_{sup} \geq H \text{ ja } S_{inf} \leq L, \\ 0, & \text{vastupidisel juhul.} \end{cases}$$

Kui meil on teada *knock–out* optsiooni hind ja Euroopa tüüpi optsiooni hind (samade parameetritega), saame leida *knock–in* optsiooni hinna. Samade parameetritega *out*- ja *in*-optsioonide hindade summa on võrdne tavalise Euroopa tüüpi optsiooni hinnaga:

$$V_{down-and-out} + V_{down-and-in} = V,$$
$$V_{up-and-out} + V_{up-and-in} = V,$$

kus V on Euroopa tüüpi optsiooni hind. Seda vastavust nimetatakse *in-out*-pariteediks. Seega barjääriga optsiooni hind on väiksem või võrdne samade parameetritega leitud Euroopa optsiooni hinnast. Samuti paneme tähele, et kui võtta alumine barjäär piisavalt väike ja/või ülemine barjäär piisavalt suur, siis *out*-optsiooni hind peab võrduma vastava Euroopa tüüpi optsiooni hinnaga ning *in*-optsiooni hind on võrdne nulliga.

2.2 Probleemid barjääriga optsiooni hinna leidmisel tavalist trinoommeetodit rakendades

Käesolevas alapeatükis on optsiooni täpsed hinnad arvutatud veebitööriista [6] abil. Enamus tuletisväärtpabereid tuleb hinnata numbriliste meetoditega. Nendega aga kaasnevad jaotusviga ja mittelineaarsuse viga. Jaotusviga tekib, lähendades aktsia hinna pidevat jaotust diskreetsega, ning koondub nulliks perioodide arvu kasvamisel. Kuna optsiooni hind on mittelineaarne funktsioon alusvara hinnast, siis võivad optsiooni hindamisel tekkida ka mittelineaarsusest tulenevad vead. Need vead tekivad näiteks siis, kui aktsia hind on täitmishetkel barjääri lähedal või kui barjäär(id) ei läbi hinnapuu tippu (tippe). Mittelineaarsuse viga tekib kindlates kriitilistes kohtades nagu kriitiline punkt, kriitiline hinnatase ja kriitiline ajapunkt. Neid kriitilise kohti on lihtne ära tunda. Näiteks Euroopa optsiooni korral on kriitiline punkt realiseerimispäeval aktsia hind, mis on võrdne alusvara hinnaga. Ameerika optsiooni korral tuleneb märkimisväärne mittelineaarsuse viga viimase ajahetke veast, mille tekitavad täitmishinda ümbritsevad hinnad. Pidevalt jälgitava barjääriga optsiooni puhul ühtib kriitiline hinnatase barjääriga.

Optsioonide hindamisel binoom- ja trinoommeetodiga on probleemiks, et kuigi nende meetodite abil leitud optsiooni hind koondub ajaperioodide kasvades optsiooni täpseks hinnaks, siis koondumine võib teatavatel juhtudel olla aeglane ning optsiooni hind võib sõltuvalt ajaperioodide arvust ostsilleeruda. Näiteks tavalise Euroopa optsiooni korral on koondumine aeglane, kui alusvara alghind on ligikaudu võrdne täitmishinnaga. Barjääriga optsiooni korral on koondumine aeglane juhtudel, kui barjäär või barjäärid asuvad hinnapuu tippude lähedal, kuid ei võrdu alusvara hinnaga üheski hinnapuu tipus. Samuti on koondumine aeglane juhul, kui alusvara alghind asub barjäärile lähedal.

Vaatleme lähemalt probleeme, mis tekivad *down-and-out* ostuoptsiooni hinna leidmisel trinoommeetodiga. Selleks koostasime programmid (programmeerimiskeele Python abil), mis on lisades ära toodud. Kasutame optsiooni hinna arvutamiseks valemit (1.11), kus

$$\begin{cases} V_{m,j} = e^{-r\Delta t}(p_u V_{m+1,j+1} + p_q V_{m+1,j} + p_d V_{m+1,j-1}), & \text{kui } S_{m,j} > L, \\ V_{m,j} = 0, & \text{vastupidisel juhul,} \end{cases}$$

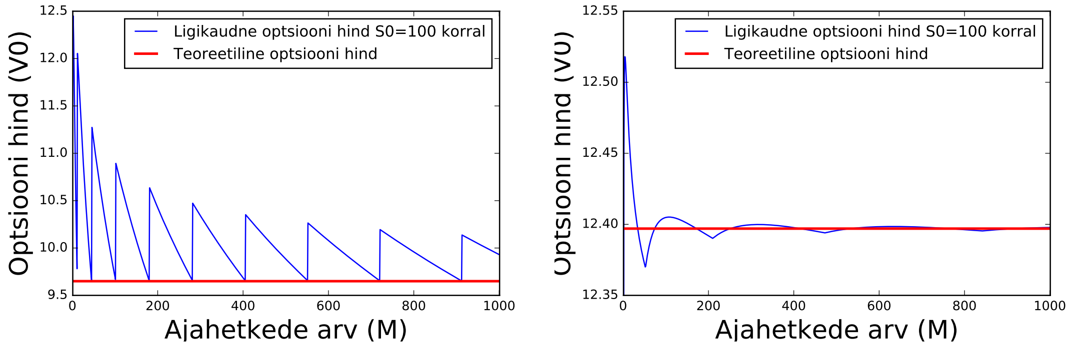
kus $S_{m,j}$ on alusvara hind vastavas sõlmes.

Kõigil juhtudel võtame ajaperioodide arvuks $M = 1, 2, \ldots, 1000$. Toome kõigepealt ära joonise, kus on leitud *down-and-out* ostuoptsiooni hind, kasutades parameetreid:

- alusvara alghind $S_0 = 100$,
- täitmishind $E = 105$,
- riskivaba intressimäär $r = 0.1$,
- volatiilsus $\sigma = 0.25$,
- täitmisaeg $T = 1$ aasta,
- alumine barjäär $L = 90$.

Võrdleme seda samade parameetritega Euroopa ostuoptsiooni joonisega, mille korral on optsiooni hinna leidmiseks kasutatud tavalist trinoommeetodit (vt joonis 3). Optsioonide täpsed hinnad, mis on arvutatud nende parameetritega, on vastavalt 9.6523 ja 12.397 (joonisel punasega), kusjuures Euroopa ostuoptsiooni hind on leitud veebitööriista [5] abil.

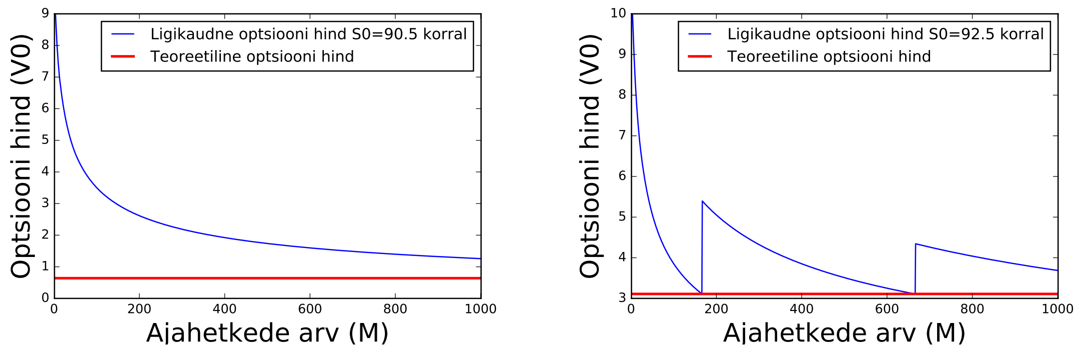
Näeme, et barjääriga optsiooni hinna leidmisel on ostsilleeruvuse ehk võnkumise ulatus oluliselt suurem kui Euroopa optsiooni korral. *Down-and-out* ostuoptsiooni hinna leidmisel trinoommeetodiga optsiooni hind läheneb täpsele hinnale, aga siis hüppab



Joonis 3: *Down-and-out* ostuoptsiooni (vasakul) ja Euroopa ostuoptsiooni (paremal) hinna leidmine trinoommeetodiga.

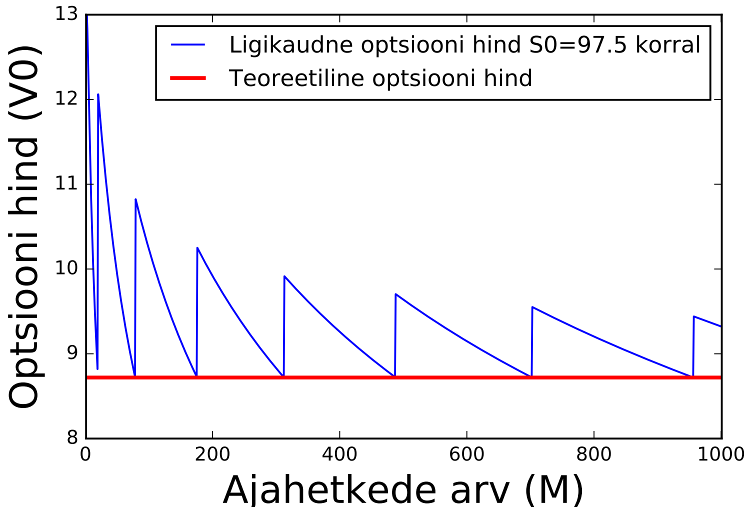
eemale. Seega toimuvad mitmed lähenemised ja kaugenemised optsiooni täpsest hinnast.

Eeldame edaspidi, et $E = 100$ (ülejäänud parameetrite väärtused jäävad endiseks). Vaatleme olukorda, kus algne alusvara hind S_0 asub barjääri läheduses. Olgu esimesel juhul $S_0 = 90.5$, teisel juhul $S_0 = 92.5$ (vt joonis 4), kusjuures täpsed hinnad on vastavalt 0.6424 ja 3.1084. Märkame, et alghinna $S_0 = 90.5$ korral erineb trinoommeetodiga leitud optsiooni hind täpsest hinnast üle kahe korra ka $M = 1000$ korral. Alghinna $S_0 = 92.5$ korral on trinoommeetodiga leitud ja täpse hinna suhteline erinevus väiksem, kuid hinna ostsilleeruvus on üsna suur.



Joonis 4: Optsiooni hinna leidmine trinoommeetodiga $S_0 = 90.5$ (vasakul) ja $S_0 = 92.5$ (paremal) korral.

Toome ka joonise, kui $S_0 = 97.5$ (vt joonis 5). Täpne hind on 8.7207. Märkame, et mida kaugemal on S_0 alumisest barjäärist, seda väiksem on ostsilleeruvuse ulatus ja seda kiiremini optsiooni hind koondub. Näeme eelnevatelt joonistelt, et leitud optsiooni hinna ja täpse hinna vahe küll keskmiselt väheneb ajahetkede möödudes, kuid kõikidel nendel juhtudel on erinevus täpsest optsiooni hinnast suur ka $M = 1000$ korral.



Joonis 5: Optsiooni hinna leidmine trinoommeetodiga $S_0 = 97.5$ korral.

Tabelis 1 on toodud trinoommeetodiga leitud hinna suhteline varieeruvus sõltuvalt alusvara alghinnast S_0. Suhteline varieeruvus

$$\frac{V_{max} - V_{min}}{V_{\text{täpne}}},$$

on leitud kui optsiooni maksimaalse ja minimaalse hinna vahe suhe optsiooni täpsesse hinda, kusjuures suurused V_{max} ja V_{min} on leitud vastavalt valemitele

$$V_{max} = \max_{100 \leq M \leq 1000} V(M),$$

$$V_{min} = \min_{100 \leq M \leq 1000} V(M).$$

Näeme, et mida kaugemal on alghind S_0 barjäärist, seda väiksem on suhteline varieeruvus.

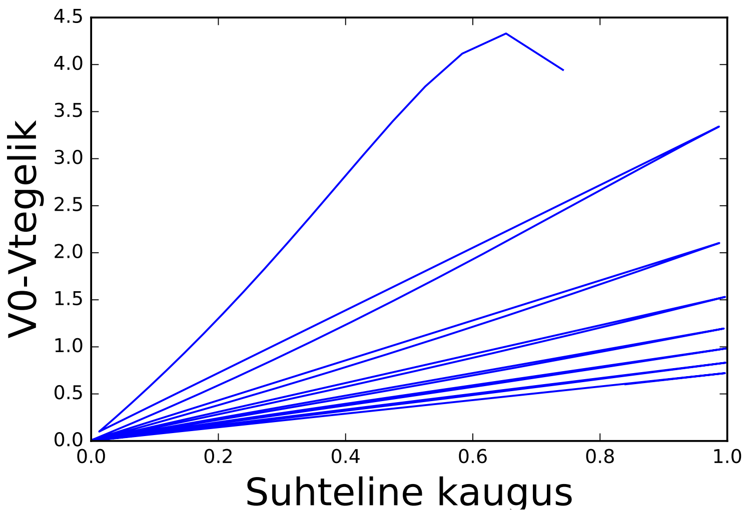
Alusvara alghind	Optsiooni täpne hind	Suhteline varieeruvus
90.5	0.64	3.505
92.5	3.11	0.736
97.5	8.72	0.175

Tabel 1: Optsiooni hinna suhteline varieeruvus.

Optsiooni hinna varieeruvus sõltuvalt perioodide arvust M on tingitud sellest, et barjääri kaugus lähimast alusvara hinnast $S_{M,j}$, mis on väiksem alumisest barjäärist L, on erinevate perioodide arvu M korral erinev. Olgu $S_{M,j}$ barjäärile lähim alusvara hind, mis asub barjäärist allpool või on sellega võrdne ning leiame barjääri suhtelise kauguse alusvara hinnast vastavalt valemile

$$K_M^{suht} = \frac{L - S_{M,j}}{S_{M,j+1} - S_{M,j}},$$

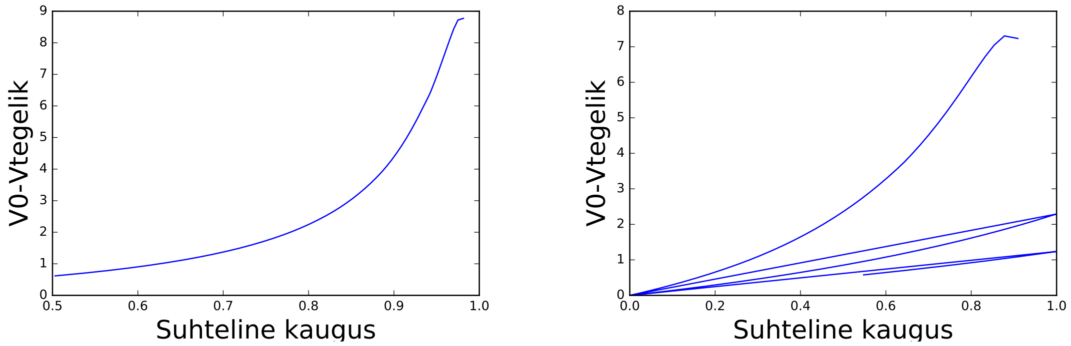
kus $M = 1, 2, \ldots, 1000$. Paneme tähele, et $0 \leq K_M^{suht} < 1$. Joonisel 6 on toodud trinoommeetodiga leitud ja täpse optsiooni hinna vahe sõltuvalt barjääri suhtelisest kaugusest K_M^{suht} alusvara alghinna $S_0 = 97.5$ korral. Näeme, et kui barjäär langeb alusvara hinnaga $S_{M,j}$ kokku ($K_M^{suht} = 0$), siis on erinevus täpse ja leitud optsiooni hinna vahel väike, kuid see hakkab suurenema suhtelise kauguse kasvades. Kui suhteline kaugus on ligikaudu võrdne ühega, siis alumine barjäär L on vaid pisut väiksem kui $S_{M,j+1}$, mistõttu optsiooni hinnatakse täpsest väärtusest oluliselt suuremaks. Sarnane olukord kehtib ka müügioptsiooni korral. Näeme ka, et perioodide arvu kasvades maksimaalne erinevus arvutatud ja täpse optsiooni hinna vahel väheneb. Näiteks kõige väiksema tõusunurgaga joon graafikul näitab suhtelise kauguse ja optsiooni hindade erinevuse seost perioodidel $M \in [702, 956)$.



Joonis 6: Suhteline kaugus $S_0 = 97.5$ korral.

Toome ka suhteliste kauguste graafikud $S_0 = 90.5$ ja $S_0 = 92.5$ korral. Märkame, et mida lähemal S_0 alumisele barjäärile paikneb, seda suuremad on suhteliste kauguste kõverate tõusunurgad. Mida kaugemal asub S_0 barjäärist, seda rohkem esineb optsiooni hinna graafikul nn hüppeid.

Kokkuvõttes võime öelda, et optsiooni hinna ostsilleeruvuse vähendamiseks tuleks trinoompuu konstrueerida selliselt, et barjäär läbiks hinnapuu tippusid. Võimaluse, kuidas valida trinoommeetodi parameetreid nii, et barjäär läbiks alati trinoompuu tippusid, pakkus välja P. Ritchken 1995. aastal [8]. Ühe barjääriga optsiooni korral vaadeldakse sellist lähenemist peatükis 3 kui adaptiivsete võrede meetodi üht osa. Kuid



Joonis 7: Suhtelised kaugused $S_0 = 90.5$ (vasakul) ja $S_0 = 92.5$ (paremal) korral.

kui barjäär asub alusvara alghinna lähedal, siis selleks, et barjäär läbiks hinnapuu tippe, tuleb trinoompuu perioodide arv M valida väga suur ning optsiooni hinna leidmine osutub arvutuslikult väga töömahukaks. Artiklis [4] on välja pakutud adaptiivsete võrede meetod, mis võimaldab mõistliku arvutusmahuga leida optsiooni hinda ka juhul, kui barjäär asub alusvara alghinna S_0 lähedal.

3 Adaptiivsete võrede meetod

Selle osa kirjutamisel on kasutatud artiklit [4]. Adaptiivsete võrede meetodi ühe barjääriga optsiooni hindamiseks töötasid välja Figlewski ja Gao 1999. aastal. Kõige levinum, aga ka raskeim probleem on barjääriga optsioonide hindamisel see, kui algne alusvara hind paikneb barjääri lähedal. Sellises olukorras on otstarbekas kasutada adaptiivsete võrede meetodit (AVM), mis vähendab mittelineaarsusest tulenevat viga. Adaptiivsete võrede meetodi korral modifitseeritakse trinoommeetodit nii, et barjäär läbiks hinnapuu tippe, kusjuures barjääri läheduses konstrueeritakse täiendavalt üks või mitu tihedamat võret optsiooni hinna leidmiseks nii, et alusvara log-hind $\ln(S_0)$ ajahetkel $t = 0$ asub kõige tihedamal võrel.

Vaatame lähemalt AVM kasutamist alumise barjääriga (*down-and-out*) optsiooni hinna leidmisel. *Up-and-out* optsiooni korral leitakse optsiooni hind analoogselt. Esmalt konstrueerime trinoompuu selliselt, et barjäär läbiks hinnapuu tippe. Sealjuures adaptiivsete võrede meetodi korral, erinevalt tavalisest trinoommeetodist, ei pruugi trinoompuu alata tipust S_0. Tähistame alusvara log-hinna tähisega $X(t) := \ln[S(t)]$ ning konstrueerime trinoommeetodi hinnapuu alusvara log-hindadest lähtuvalt. Olgu trinoommeetodi ajaperioodide arv M ja ajaperioodi pikkus $\Delta t = T/M$. Olgu ajahetkel $m\Delta t$ alusvara log-hind X_m ning eeldame, et ajahetkel $(m+1)\Delta t$ saab alusvara log-hind olla $X_m + l$, X_m, $X_m - l$, kus l on üles- ja allaliikumise suurus kihtide vahel ehk hinnataseme pikkus. Leiame nüüd, millised peaksid olema hinna üles- ja allaliikumise ning samaks jäämise tõenäosused p_u, p_d ning p_q. Kui alusvara hind käitub võrrandi (1.2) järgi, siis $dX(t) = \alpha dt + \sigma dW$, kus riskineutraalsuse korral $\alpha = r - \sigma^2/2$. Tõenäosuste p_u, p_q ja p_d leidmiseks saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} p_u l + p_q 0 + p_d(-l) = \alpha\Delta t, \\ p_u l^2 + p_q 0 + p_d l^2 = \alpha^2\Delta t^2 + \sigma^2\Delta t, \\ p_u + p_q + p_d = 1, \end{cases}$$

kuna

$$\mathcal{E}[X(t+\Delta t) - X(t)] = \alpha\Delta t,$$
$$\mathcal{E}[X(t+\Delta t) - X(t)]^2 = \alpha^2\Delta t^2 + \sigma^2\Delta t.$$

Võrrandisüsteemi esimesest võrrandist saame avaldada $p_u = p_d + \frac{\alpha\Delta t}{l}$, ning asendades selle teise võrrandisse, saame

$$p_d = \frac{\alpha^2\Delta t^2 + \sigma^2\Delta t - \alpha l\Delta t}{2l^2}.$$

Järelikult ülesliikumise tõenäosus on

$$p_u = \frac{\alpha^2 \Delta t^2 + \sigma^2 \Delta t + \alpha l \Delta t}{2l^2}.$$

Kuna tõenäosused p_u, p_q, p_d sõltuvad hinnaliikumise suurusest l ning ajaperioodist Δt, siis kokkuvõttes saame

$$\begin{cases} p_u(l, \Delta t) = \dfrac{1}{2}\left(\sigma^2 \dfrac{\Delta t}{l^2} + \alpha^2 \dfrac{\Delta t^2}{l^2} + \alpha \dfrac{\Delta t}{l}\right), \\ p_d(l, \Delta t) = \dfrac{1}{2}\left(\sigma^2 \dfrac{\Delta t}{l^2} + \alpha^2 \dfrac{\Delta t^2}{l^2} - \alpha \dfrac{\Delta t}{l}\right), \\ p_q(l, \Delta t) = 1 - p_u(l, \Delta t) - p_d(l, \Delta t). \end{cases} \tag{3.1}$$

Fikseeritud Δt korral tuleb suurus l valida nii, et tõenäosused p_u, p_q ja p_d jääksid 0 ja 1 vahele. Osutub, et kui valida

$$l = \lambda \sigma \sqrt{\Delta t},$$

kus $\lambda > 1$, siis küllalt väikese Δt korral on see nõue täidetud:

$$\begin{aligned} p_u(l, \Delta t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2 \sigma^2} \Delta t + \frac{\alpha}{\lambda \sigma} \sqrt{\Delta t}\right) > 0, \\ p_d(l, \Delta t) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2 \sigma^2} \Delta t - \frac{\alpha}{\lambda \sigma} \sqrt{\Delta t}\right) > 0, \\ p_q(l, \Delta t) &= 1 - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2 \sigma^2} \Delta t > 0. \end{aligned}$$

Seega peab l olema sama järku, mis $\sqrt{\Delta t}$. Kirjanduses on välja pakutud sobivaks λ väärtuseks $\sqrt{3}$ (vt artikkel [4]).

Vaatleme nüüd, kuidas valida suurus l nii, et barjäär läbiks konstrueeritava hinnapuu tippe. Anname ette perioodide arvu M_0 ning leiame $\Delta t_0 = T/M_0$ ning suurused

$$\begin{aligned} l_0 &= \sqrt{3} \sigma \sqrt{\Delta t_0}, \\ x &= \frac{\ln(S_0) - \ln(L)}{l_0}. \end{aligned}$$

Üldjuhul suurus x ei ole täisarv ning barjäär ei asu hinnasammu l_0 korral trinoompuu tippudes. Kui arvu x täisosa on positiivne ehk $\mathrm{int}(x) > 0$, siis leiame uue hinnaliikumise sammu l vastavalt valemile

$$l = \frac{\ln(S_0) - \ln(L)}{x}$$

ning sel juhul barjäär läbib hinnapuu tippe ja täiendavaid võresid konstrueerida pole vaja. Paneme ka tähele, et

$$\lambda = \frac{l}{\sigma\sqrt{\Delta t_0}} \geq \sqrt{3}.$$

Kui $\mathrm{int}(x) = 0$, siis üheks võimaluseks on suurendada perioodide arvu M_0, aga kui barjäär asub alghinna S_0 lähedal, siis perioodide arv võib osutuda väga suureks. Näiteks, kui $S_0 = 90.5$ ning $L = 90$, siis selleks, et barjäär asuks hinnapuu tippudes, peaks hinnaliikumise samm l olema

$$l = \ln(S_0) - \ln(L) = 0.00554.$$

Kui võtta $\lambda = \sqrt{3}$ ja $\sigma = 0.25$, siis

$$\Delta t = \frac{l^2}{3\sigma^2} = 0.000164,$$

mis annab $T = 1$ korral perioodide arvuks $M = \mathrm{int}(1/\Delta t) = 6108$. Kui aga näiteks $S_0 = 90.1$ ja $L = 90$, siis perioodide arv on $M = 152044$.

Seetõttu pakutakse adaptiivsete võrede meetodi korral selle probleemi lahenduseks välja täiendavate tihedamate võrede konstrueerimine ülalpool alumist barjääri. Erinevalt tavalisest trinoommeetodist ei paigutata AVM korral trinoompuu algustippu punkti $(0, \ln(S_0))$, vaid punkti $(0, \ln(L) + l)$, mis garanteerib selle, et barjäär läbiks hinnapuu tippe. Suurus l leitakse valemi

$$l = 2^N[\ln(S_0) - \ln(L)] \tag{3.2}$$

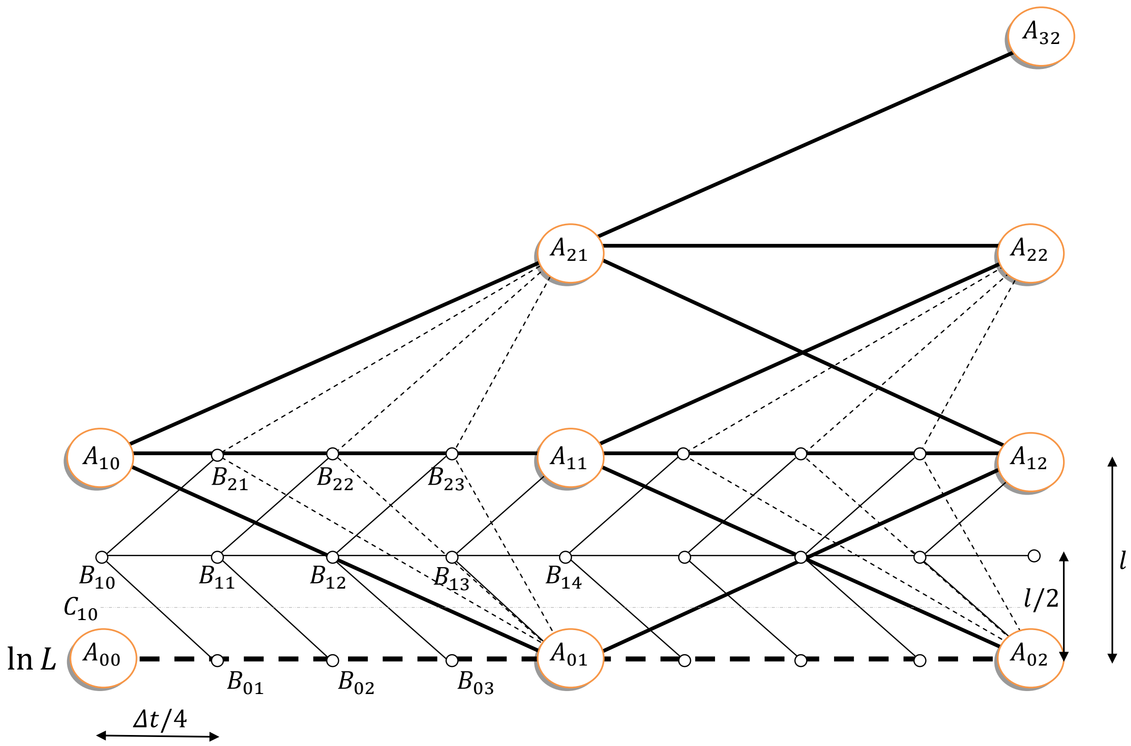
põhjal, kus $N \geq 1$ on tihedamate võrede arv. K- järku tihedama võre korral on alusvara log-hindadel kolm võimalikku väärtust: $\ln(L)$, $\ln(L) + \frac{l}{2^k}$ ja $\ln(L) + \frac{l}{2^{k-1}}$ ning ajahetke pikkuseks on $\Delta t/4^k$, kus Δt on jämedama võre ajaperiood. Kui hinnasamm l on määratud valemiga (3.2), siis alusvara log-hind $\ln(S_0)$ on võrdne log-hinnaga kõige tihedama võre punktis $(0, \ln(L) + \frac{l}{2^N})$ ning seega peame leidma optsiooni hinna selles punktis.

Leiame nüüd trinoompuu ajaperioodi Δt. Selleks võtame $\lambda = \sqrt{3}$ ning leiame esialgse ajaperioodi pikkuse $\Delta t_0 = l^2/3\sigma^2$ ja perioodide arvu $M_{alg} = T/\Delta t_0$. Kuna üldjuhul pole M_{alg} täisarv, siis võtame perioodide arvuks $M = \mathrm{int}(M_{alg})$ ning lõplikuks ajaperioodiks $\Delta t = T/M$. Seega saame suurused Δt ja M leida valemite

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{T}{\mathrm{int}[(3\sigma^2/l^2)T]}, \\ M &= \frac{T}{\Delta t} \end{aligned} \tag{3.3}$$

põhjal.

Küsimuseks on veel, kuidas leida tihedamate võrede arvu N, kui esialgne ajaperioodide arv M_0 on ette antud. Üheks võimaluseks on valida tihedamate võrede arv N nii, et suurus $\left|\frac{M(N)}{M_0} - 1\right|$ oleks minimaalne, kus $M(N)$ on perioodide arv tihedamate kihtide arvu N korral.



Joonis 8: Adaptiivsete võrede meetod.

Vaatleme nüüd täpsemalt, kuidas leida optsiooni hinda tihedama võre sõlmedes. Uurime edaspidi olukorda, kus $N = 1$ ehk konstrueerime ühe tihedama võre barjääri L ümbrusesse. Joonis 8 näitab, kuidas konstrueerida AVM puud. Jämedamad jooned tähistavad võre jämedamat osa ehk esialgset trinoompuud. Selle võre tippude tähistuseks on A_{ij}, kus i on jämedama võre hinnaliikumise indeks (ülalpool barjääri) ja j tähistab jämedama võre ajaperioodi indeksit. Seega tipp A_{00} asub ajahetkel $t = 0$ alumisel barjääril ja A_{10} asub ajahetkel $t = 0$ tipust A_{00} ühe sammu võrra ülalpool. Olgu tihedama võre tipud tähistatud tähega B. Soovime leida optsiooni hinda tipus B_{10}, mis asub tipust A_{00} suuruse $l/2$ võrra üleval ehk $B_{10} = \ln(L) + l/2$.

Vaatleme, kuidas leida optsiooni hinda tipus B_{10}. Esiteks tuleb konstrueerida jämedam võre kõikides A tippudes (joonisel tähistatud jämedama pideva joonega). Järgmisena kasutame jämedama võre tippe, et leida optsiooni hinnad tippudes B_{2j} ja B_{0j}, $j = 1, 2, 3$, kusjuures tihedama võre ajaperioodi pikkus on $\Delta t/4$. Optsiooni hinnad tippudes B_{0j} on võrdsed nulliga, kuna optsioon muutub barjääri puutudes kehtetuks.

Seega

$$V(B_{0j}) = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Tippudes B_{2j}, $j = 1, 2, 3$, optsiooni hinna leidmiseks kasutatakse jämedama võre sõlmi. Näiteks tippudes B_{21}, B_{22}, B_{23} optsiooni hinna leidmiseks kasutatakse optsiooni hindu tippudes A_{01}, A_{11} ja A_{21}. Paneme tähele, et tipud B_{2j}, mis kattuvad tippudega A, on teada jämedamast võrest. Näiteks optsiooni hinnad tippudes B_{20} ja B_{24} võrduvad optsiooni hindadega tippudes A_{10} ning A_{11}.

Kirjeldame nüüd optsiooni hinna arvutuskäiku veidi täpsemalt. Vaatleme lähemalt optsiooni hindade leidmist esimesel ajahetkel (teistel ajahetkedel arvutatakse optsiooni hinnad analoogselt). Tipud B_{2j} asuvad tippudest B_{0j} suuruse l võrra ülalpool, kusjuures ajaperioodi pikkuseks on $\Delta t/4$. Optsiooni hinnad tippudes B_{21}, B_{22} ja B_{23} leitakse optsiooni hindade kaudu tippudes A_{01}, A_{11} ja A_{21} abil. Hinnad leitakse rekursiivselt tagant ettepoole arvutades, sarnaselt võrrandile (1.11):

$$\begin{aligned} V(X_m, t) = e^{-r\Delta t}[&p_u(l, \Delta t)V(X_m + l, t + \Delta t) + p_m(l, \Delta t)V(X_m, t + \Delta t) + \\ &+ p_d(l, \Delta t)V(X_m - l, t + \Delta t)]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tippudes B_{2j} olevate optsiooni hindade leidmiseks vajalikud jagunemise tõenäosused saame, kui asendame Δt võrrandites (3.1) vastavalt suurusega $\Delta t/4$, $2\Delta t/4$ ja $3\Delta t/4$.

Toome siinkohal optsiooni hinna arvutamiseks vajalike tõenäosuste leidmise võrrandid tipus B_{23}. Võrrandite (3.1) abil saame

$$\begin{cases} p_u(l, \Delta t/4) = \dfrac{1}{2}\left(\sigma^2 \dfrac{\Delta t}{4l^2} + \alpha^2 \dfrac{\Delta t^2}{16l^2} + \alpha \dfrac{\Delta t}{4l}\right), \\ p_d(l, \Delta t/4) = \dfrac{1}{2}\left(\sigma^2 \dfrac{\Delta t}{4l^2} + \alpha^2 \dfrac{\Delta t^2}{16l^2} - \alpha \dfrac{\Delta t}{4l}\right), \\ p_q(l, \Delta t/4) = 1 - p_u(l, \Delta t/4) - p_d(l, \Delta t/4). \end{cases}$$

Asendades võrrandisse (3.4), saame optsiooni hinna tipus B_{23} arvutada, kasutades valemit

$$V(B_{23}) = e^{-r\Delta t/4}[p_u(l, \Delta t/4)V(A_{21}) + p_m(l, \Delta t/4)V(A_{11}) + p_d(l, \Delta t/4)V(A_{01})].$$

Teiste tippude B_{2j}, $j = 1, 2$, korral saame optsioonide hinnad arvutada analoogselt. Üldised võrrandid tõenäosuste leidmiseks, mida kasutame optsiooni hindade leidmiseks tippudes B_{2j}, on

$$\begin{cases} p_u\left(l, \dfrac{j\Delta t}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sigma^2 \dfrac{j\Delta t}{4l^2} + \alpha^2 \dfrac{(j\Delta t)^2}{16l^2} + \alpha \dfrac{j\Delta t}{4l}\right), \\ p_d\left(l, \dfrac{j\Delta t}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sigma^2 \dfrac{j\Delta t}{4l^2} + \alpha^2 \dfrac{(j\Delta t)^2}{16l^2} - \alpha \dfrac{j\Delta t}{4l}\right), \\ p_q\left(l, \dfrac{j\Delta t}{4}\right) = 1 - p_u\left(l, \dfrac{j\Delta t}{4}\right) - p_d\left(l, \dfrac{j\Delta t}{4}\right), \end{cases} \tag{3.5}$$

kus $j = 1, 2, 3$. Paneme tähele, et kui võtame $j = 4$, siis võrrandites (3.5) olevate tõenäosuste väärtused ühtivad jämedama võre tõenäosuste väärtustega. Optsiooni hinnad tippudes B_{2j} saame arvutada valemi

$$\begin{aligned} V(B_{2j}) = e^{-r\Delta t/4}[&p_u(l, (4-j)\Delta t/4)V(A_{21}) + p_q(l, (4-j)\Delta t/4)V(A_{11}) + \\ &+ p_d(l, (4-j)\Delta t/4)V(A_{01})], \end{aligned} \tag{3.6}$$

$j = 1, 2, 3$, abil. Kui optsiooni hinnad tippudes B_{0j} ja B_{2j} on leitud iga j korral, siis saame leida optsiooni hinnad tippudes B_{1j}, $j = 0, 1, 2, 3$. Tipus B_{1j} optsiooni hinna leidmiseks kasutame optsiooni hindu tippudes $B_{0,j+1}$, $B_{1,j+1}$ ja $B_{2,j+1}$. Jagunemise tõenäosused saame leida valemite (3.1) abil, kui võtame ajaperioodi pikkuseks $\Delta t/4$ ja hinnasammu pikkuseks $l/2$:

$$\begin{cases} p_u\left(\dfrac{l}{2}, \dfrac{\Delta t}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sigma^2 \dfrac{\Delta t}{l^2} + \alpha^2 \dfrac{\Delta t^2}{4l^2} + \alpha \dfrac{\Delta t}{2l}\right), \\ p_d\left(\dfrac{l}{2}, \dfrac{\Delta t}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sigma^2 \dfrac{\Delta t}{l^2} + \alpha^2 \dfrac{\Delta t^2}{4l^2} - \alpha \dfrac{\Delta t}{2l}\right), \\ p_q\left(\dfrac{l}{2}, \dfrac{\Delta t}{4}\right) = 1 - p_u\left(\dfrac{l}{2}, \dfrac{\Delta t}{4}\right) - p_d\left(\dfrac{l}{2}, \dfrac{\Delta t}{4}\right). \end{cases}$$

Optsiooni hinnad vastavates tippudes on leitavad valemiga

$$\begin{aligned} V(B_{1j}) = e^{-r\Delta t/4}[&p_u(l/2, \Delta t/4)V(B_{2,j+1}) + p_q(l/2, \Delta t/4)V(B_{1,j+1}) + \\ &+ p_d(l/2, \Delta t/4)V(B_{0,j+1})], \end{aligned} \tag{3.7}$$

kus $j = 0, 1, 2, 3$. Olgu mainitud, et leiame optsiooni hinnad tippudes B_{1j} ajas tagant ettepoole liikudes, kuni jõuame esimese tipuni B_{10}.

Kui tihedamate võrede arv $N = 2$, siis konstrueeritakse uus tihedam võre. Sel juhul tuleb leida optsiooni hind tipus C_{10}. Seejärel võib konstrueerida taas uue tihedama võre jne.

AVM meetodi numbrilisel realiseerimisel kasutatakse seega järgmist algoritmi:

1. Fikseerime tihedamate võrede arvu N.

2. Arvutame hinnaliikumise sammu l ja ajaperioodi pikkuse Δt vastavalt võrranditele (3.2) ning (3.3).

3. Leiame ajahetkel T alusvara ja optsiooni hinnad nii põhivõrel kui ka tihedamatel võredel. Põhivõrel saame alusvara log-hinnad ajahetkel T leida valemi

$$X_{T,i} = \ln(L) + (i+1)l$$

abil, kus $i = -M, -M+1, \ldots, 0, \ldots, M-1, M$. Optsiooni hinnad on leitavad maksefunktsiooniga (2.1), kus alusvara hind $S_{T,i}$ leitakse kui $\exp(X_{T,i})$. Tihedamate võrede alusvara log-hinnad ajahetkel T leiame barjääri ümbruses vastavalt valemile

$$X_{T,j}^n = \ln(L) + j(l/2^n),$$

kus $j = 0, 1, 2,$ ja $n = 1, 2, \ldots, N$. Optsiooni hinnad saame leida eelnevalt toodud maksefunktsiooni abil.

4. Edasi arvutatakse optsiooni hinnad rekursiivselt $m = M-1, M-2, \ldots, 1$ korral:

   (a) Leiame optsiooni hinnad põhivõrel ajaperioodidel $m\Delta t$ vastavalt valemile

   $$V_{m,j} = e^{-r\Delta t}(p_u V_{m+1,j+1} + p_q V_{m+1,j} + p_d V_{m+1,j-1}),$$

   kus $j = -m, -m+1, \ldots, m-1, m$.

   (b) Leiame optsiooni hinnad lisavõredel ajahetkedel $m\Delta t + k\Delta t/4$, kus $k = 0, 1, 2, 3$. Teame, et tippude B_{0j} optsiooni hinnad võrduvad nulliga. Tippude B_{2j} ja B_{1j} hindade leidmiseks kasutame valemeid (3.6) ja (3.7). Kusjuures arvutame optsiooni hinnad alustades kõige jämedamast lisavõrest, seejärel leiame veidi tihedama lisavõre optsiooni hinnad jne.

Märgime, et adaptiivsete võrede meetodit saab ühe barjääri korral kasutada ka Ameerika optsiooni hindamisel. Autorile teadaolevalt ei ole adaptiivsete võrede meetodit välja pakutud kahe barjääriga optsiooni hindamiseks.

4 Bino–trinoommeetod barjääriga optsiooni hindamiseks

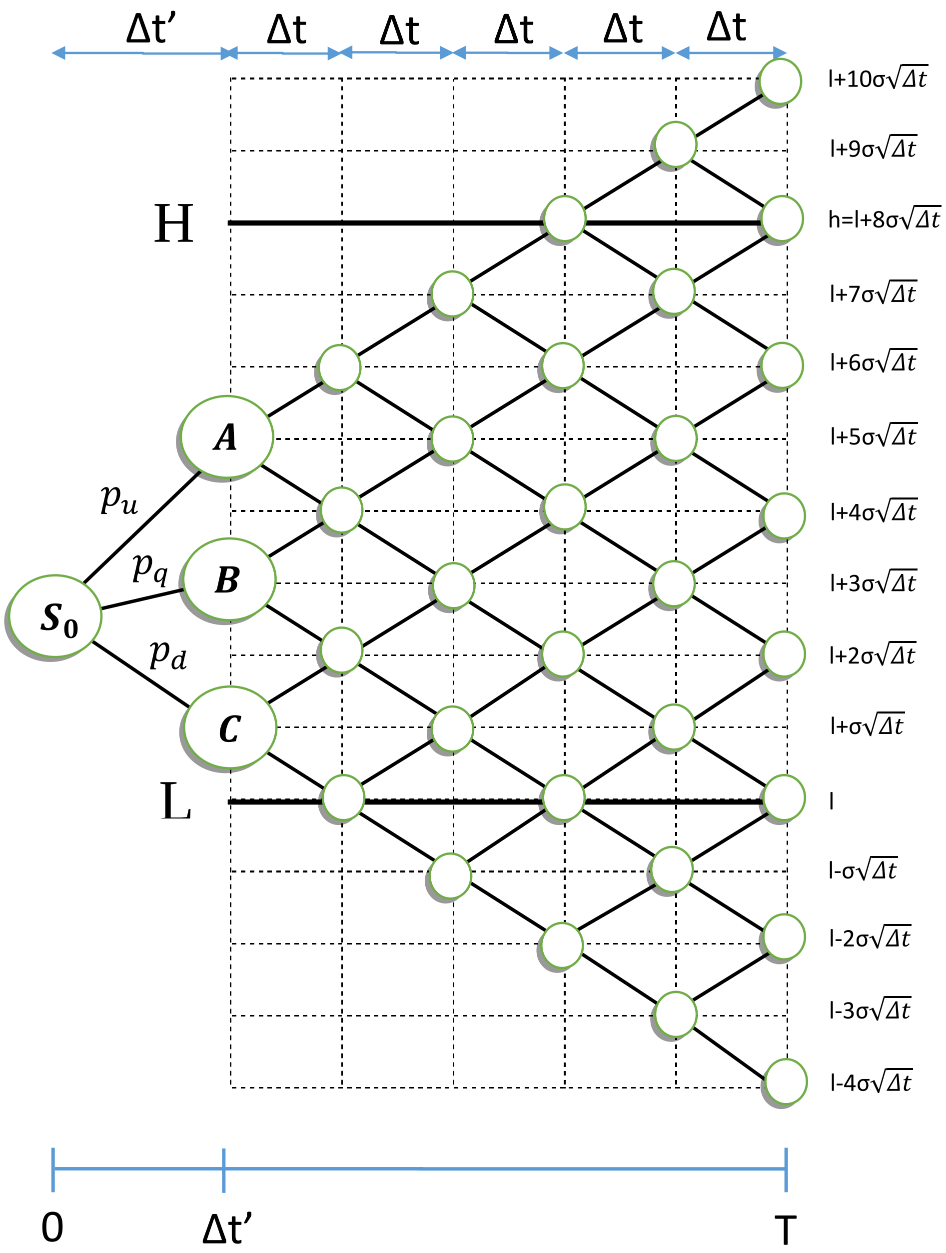
Eelmises peatükis kirjeldasime adaptiivsete võrede meetodit, mille korral puu koosneb jämedamast võrest ja tihedama(te)st võre(de)st. Paraku on selle meetodi hinnapuu üsna keeruline. Vaatleme artiklis [3] väljapakutud bino–trinoommeetodit pidevalt jälgitava barjääriga optsiooni hinna leidmiseks. Seda meetodit saab lihtsa struktuuri tõttu hõlpsasti kasutada ka keerulisemate optsioonide hindamisel. Bino–trinoommeetodit on vaadeldud ka bakalaureusetöös [7]. Bino–trinoommeetodi korral konstrueeritakse esimesel ajaperioodil hinnapuu nagu trinoommeetodis ning järgmistel ajahetkedel vastavalt binoommeetodile. Seetõttu on meil võimalik konstrueerida alusvara hinnapuu selliselt, et barjäär (vastavalt alumine või ülemine) või mõlemad barjäärid läbiksid hinnapuu tippusid, mis vähendab oluliselt mittelineaarsusest tulenevaid vigu optsiooni hinna leidmisel.

4.1 Bino–trinoommeetodi hinnapuu

Vaatleme esmalt pidevat kahe barjääriga optsiooni. Esitame bino–trinoommeetodi idee. Eeldame, et alusvara hind $S(t)$ on lognormaalse jaotusega juhuslik protsess (vt valem (1.2)). Olgu optsiooni eluiga $[0, T]$. Olgu S_0 alusvara hind ajahetkel $t = 0$. Anname ette ülemise barjääri H ning alumise barjääri L. Esimene ajaperiood $\Delta t'$ valitakse selliselt, et see on järgnevatest ajaperioodidest pisut suurem. Bino–trinoommeetodi korral konstrueeritakse esimesel ajaperioodil trinoommeetodi hinnapuu ja järgnevatel ajaperioodidel binoompuu. Olgu alusvara hind ajahetkel $\Delta t'$ võrdne väärtusega S_A (tõenäosusega p_u), väärtusega S_B (tõenäosusega p_q) või väärtusega S_C (tõenäosusega p_d). Tipud A, B ja C (joonisel 9 helesinistes ringides) võetakse kolme binoompuu algustippudeks ning nad valitakse selliselt, et barjäärid läbiksid binoommeetodi hinnapuu tippe. Binoommeetodi parameetrid u, d ja p võetakse vastavalt valemitele (1.6)

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Vaatleme nüüd lähemalt, kuidas leida bino–trinoommeetodi parameetreid. Olgu S_m, $m = 0, 1, \ldots, M$, alusvara hind ajaperioodil $m\Delta t$. Nimetame alusvara log-hinnaks suurust $s_m := \ln\big(S_m/S_0\big)$. Paneme tähele, et tegemist on suhtelise log-hinnaga. Vaatleme edaspidi alusvara hinnapuud log-hindades, mille korral leitakse logaritmid vastava tipu alusvara hinna ja alghinna suhtest. Ajahetkel $t = 0$ on log-hind $s_0 = \ln(S_0/S_0) = 0$.



Joonis 9: Bino–trinoommeetodi hinnapuu.

Kui ajahetkel $m\Delta t$ on log-hind $s_m = \ln\left(S_m/S_0\right)$, siis ajahetkel $m\Delta t + \Delta t = (m+1)\Delta t$ korral on log-hind binoompuus üles liikudes $\ln\left(uS_m/S_0\right) = \ln u + \ln\left(S_m/S_0\right) = \ln(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}) + s_m = \sigma\sqrt{\Delta t} + s_m$ ja alla liikudes $-\sigma\sqrt{\Delta t} + s_m$. Barjääride log-hinnad on vastavalt $h = \ln(H/S_0)$ ja $l = \ln(L/S_0)$. Binoompuu ajaperioodi pikkus on Δt, mis on ühtlasi binoompuu võre laiuseks. Binoompuu kahe kõrvuti asetseva tipu vahe on $2\sigma\sqrt{\Delta t}$, kuna log-hindade üles- ja allaliikumise kordajad on vastavalt $\sigma\sqrt{\Delta t}$ ja $-\sigma\sqrt{\Delta t}$. Järelikult võre lahtri kõrgus on $\sigma\sqrt{\Delta t}$.

Vaatleme nüüd, kuidas valida ajaperioodi pikkust Δt selliselt, et mõlemad barjäärid läbiksid hinnapuu tippe. Selleks peab suurus $\frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$ olema täisarv. Joonisel 9 on vastava suuruse väärtus 4. Loomulik valik ajaperioodi pikkuse leidmiseks on $\Delta\tau := T/M$. Kui anname ette perioodide arvu M ja leiame suuruse $\Delta\tau$, siis tavaliselt ei ole suurus $\frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau}}$ täisarv. Seepärast leiame suuruse Δt, mis on ligilähedaselt võrdne suurusega $\Delta\tau$, kuid ei ületa seda, ning mille korral suurus $\frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$ on täisarv. Leiame suuruse

$$\kappa = \left\lceil \frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau}} \right\rceil, \tag{4.1}$$

kus $\lceil x \rceil$ tähistab vähimat täisarvu, mis on arvust x suurem või võrdne, ning leiame

$$\Delta t = \left(\frac{h-l}{2\kappa\sigma} \right)^2. \tag{4.2}$$

Selle valemi korral $\Delta t \leq \Delta\tau$, sest $\kappa \geq \frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta\tau}}$. Vaatleme puu moodustumist barjäärist L ülespoole. Nagu mainisime, langeb üks kiht automaatselt ülemise barjääriga kokku. Ajaperioodide arv bino–trinoommeetodi puus on $M_1 = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor$, kus $\lfloor x \rfloor$ tähistab suurimat täisarvu, mis on arvust x väiksem või arvuga x võrdne. Binoompuus on $M = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1$ ajahetke. Joonisel 9 on kogu bino–trinoompuus 6 ajaperioodi ja binoompuus 5 ajaperioodi ehk $M_1 = 6$ ja $M = 5$. Esimese ajaperioodi pikkus on veidi pikem järgnevatest, et ajaperioodide summa oleks T. Leiame esimese ajaperioodi pikkuse vastavalt valemile

$$\Delta t' = T - \left(\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1 \right) \Delta t.$$

On selge, et $\Delta t \leq \Delta t' < 2\Delta t$ ning sellise Δt ja $\Delta t'$ valiku korral $\Delta t' + M \cdot \Delta t = T$. Leiame nüüd trinoommeetodi parameetrid. Kui alusvara hind on lognormaalse jaotusega, siis riskineutraalsuse eeldusel on ajahetkel $\Delta t'$ log-hindade keskväärtuseks

$$\mu := (r - \sigma^2/2)\Delta t' \tag{4.3}$$

ja dispersiooniks

$$\overline{\sigma}^2 := \sigma^2 \Delta t'. \tag{4.4}$$

Trinoompuu tippude A, B ja C asukoha määramiseks paneme tähele, et kui binoompuus on paarisarv ajaperioode, siis tipus B peab alusvara log-hind võrduma avaldisega $l + 2j\sigma\sqrt{\Delta t}$ mingi indeksi j korral, ning kui binoompuus on paaritu arv ajaperioode, siis tipus B peab log-hind võrduma avaldisega $l + (2j+1)\sigma\sqrt{\Delta t}$ mingi indeksi j korral.

Teame, et kahe kõrvuti oleva tipu log-hindade vaheline kaugus on $2\sigma\sqrt{\Delta t}$. Seega võime väita, et peab eksisteerima üks tipp, mille korral log-hind asub poollõigus

$\big[\mu - \sigma\sqrt{\Delta t}, \mu + \sigma\sqrt{\Delta t}\big)$. Selle tipu võtame trinoompuu tipuks B ning tähistame tipus B alusvara log-hinna suurusega $\hat{\mu}$. Paarisarvulise M korral on $\hat{\mu} := l + 2j^*\sigma\sqrt{\Delta t}$, kus $j = j^*$ on indeks, mille korral $\mu - \sigma\sqrt{\Delta t} \le l + 2j^*\sigma\sqrt{\Delta t} < \mu + \sigma\sqrt{\Delta t}$. Paarituarvulise M korral $\hat{\mu} := l + (2j^* + 1)\sigma\sqrt{\Delta t}$, kus $j = j^*$ on indeks, mille korral $\mu - \sigma\sqrt{\Delta t} \le l + (2j^* + 1)\sigma\sqrt{\Delta t} < \mu + \sigma\sqrt{\Delta t}$. Seega saame

$$\hat{\mu} := \begin{cases} l + 2j^*\sigma\sqrt{\Delta t}, & \text{paarisarvulise } M \text{ korral,} \\ l + (2j^* + 1)\sigma\sqrt{\Delta t}, & \text{paarituarvulise } M \text{ korral.} \end{cases} \tag{4.5}$$

Tipud A ja C valime nii, et nad oleks binoompuus tipu B kõrvaltipud. Seega tippudes A ja C on log-hinnad vastavalt $\hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ja $\hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$. Defineerime

$$\begin{aligned} &\beta := \hat{\mu} - \mu, \\ &\alpha := \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}, \\ &\gamma := \hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Esimesest võrrandist saame, et $\beta \in [-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t})$. Paneme tähele, et $\alpha > \beta > \gamma$. Järgneva võrrandisüsteemi lahendamisel saame trinoommeetodi tõenäosused:

$$\begin{cases} p_u\alpha + p_q\beta + p_d\gamma = 0, \\ p_u\alpha^2 + p_q\beta^2 + p_d\gamma^2 = \overline{\sigma}^2, \\ p_u + p_q + p_d = 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Neist esimene ja teine võrrand vastavad kahele esimesele logaritmilise aktsia hinna momendile (keskväärtus ja dispersioon) ja kolmas võrrand kindlustab selle, et tõenäosuste summa võrduks ühega. Näitame, et võrrandisüsteemi (4.7) lahendid p_u, p_q, p_d rahuldavad võrratust $p_u, p_q, p_d \ge 0$. Selleks lahendame võrrandisüsteemi, kasutades determinante:

$$\det = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 + \beta\gamma^2 + \alpha^2\gamma - \gamma\beta^2 - \gamma^2\alpha - \alpha^2\beta$$

$$= -\alpha(-\alpha\gamma - \beta\gamma + \gamma^2 + \alpha\beta) + \beta(-\alpha\gamma - \beta\gamma + \gamma^2 + \alpha\beta)$$

$$= (\beta - \alpha)(\gamma^2 + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma) = (\beta - \alpha)[\gamma(\gamma - \alpha)(-\beta)(\gamma - \alpha)]$$

$$= (\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha),$$

$$\det(u) = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ \overline{\sigma}^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \beta\gamma^2 + \gamma\overline{\sigma}^2 - \beta^2\gamma - \beta\overline{\sigma}^2$$

$$= (\beta\gamma + \overline{\sigma}^2)(\gamma - \beta),$$

$$\det(q) = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ \alpha^2 & \overline{\sigma}^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\overline{\sigma}^2 + \alpha^2\gamma - \alpha\gamma^2 - \gamma\overline{\sigma}^2$$

$$= (\alpha\gamma + \overline{\sigma}^2)(\alpha - \gamma),$$

$$\det(d) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha^2 & \beta^2 & \overline{\sigma}^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha\beta^2 + \beta\overline{\sigma}^2 - \alpha^2\beta\alpha\overline{\sigma}^2$$

$$= (\alpha\beta + \overline{\sigma}^2)(\beta - \alpha).$$

Crameri reegli põhjal saame kirjutada

$$p_u = \det(u)/\det, \quad p_q = \det(q)/\det \quad ja \quad p_d = \det(d)/\det.$$

Märkame, et peab kehtima $\det < 0$, sest $\alpha > \beta > \gamma$. Jagunemise tõenäosuste mittenegatiivsuse tõestamiseks on vaja näidata, et $\det(u) \leq 0$, $\det(q) \leq 0$ ja $\det(d) \leq 0$. Kuna $\alpha > \beta > \gamma$, piisab näidata, et $\beta\gamma + \overline{\sigma}^2 \geq 0$, $\alpha\gamma + \overline{\sigma}^2 \leq 0$ ja $\alpha\beta + \overline{\sigma}^2 \geq 0$ eeldustel, et $\Delta t \leq \Delta t' < 2\Delta t$ ja $\beta \in [-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t})$. Tõestame need järgnevalt:

$$
\begin{aligned}
\beta\gamma + \overline{\sigma}^2 &= \beta^2 - 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t' \geq \beta^2 - 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t \\
&= (\beta - \sigma\sqrt{\Delta t})^2 \geq 0, \\
\alpha\gamma + \overline{\sigma}^2 &= \beta^2 - 4\sigma^2\Delta t + \sigma^2\Delta t' \leq \beta^2 - 4\sigma^2\Delta t + 2\sigma^2\Delta t \\
&= \beta^2 - 2\sigma^2\Delta t \leq 0, \\
\alpha\beta + \overline{\sigma}^2 &= \beta^2 + 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t' \geq \beta^2 + 2\beta\sigma\sqrt{\Delta t} + \sigma^2\Delta t \\
&= (\beta + \sigma\sqrt{\Delta t})^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Seega leiduvad tõesti sellised p_u, p_q ja p_d, mis vastavad tingimustele $p_u \geq 0$, $p_q \geq 0$ ja $p_d \geq 0$. Nüüd, kui meil on olemas jagunemise tõenäosused ja optsiooni hinnad tippudes A, B ja C, saame optsiooni hinna tipus S_0 leida, kasutades valemit

$$V_0 = e^{-r\Delta t'}(p_u V_A + p_q V_B + p_d V_C),$$

kus V_A, V_B ja V_C tähistavad vastavalt optsiooni hindu tippudes A, B ja C. Seda, kuidas leida optsiooni hindu V_A, V_B, V_C, vaatame alapeatüki lõpus. [7]

Pideva ühe barjääriga optsiooni hind leitakse sarnaselt, nagu eespool kirjeldatud kahe barjääriga optsiooni korral. Vaatleme hinnapuu konstrueerimist alumise barjääri L korral. Ülemise barjääri H puhul kehtib sarnane olukord, aga seda me lähemalt siin ei kirjelda. Kahe barjääriga optsiooni hinna määramisel pidime binoompuu ajaperioodi Δt kohandama. Ühe barjääriga optsiooni korral pole kohandamine vajalik, kuna ainult üks hinnatase (alumine barjäär L) peab võre tippe läbima. Seega võime võtta $\Delta t = T/M$. Paneme tähele, et ka trinoommeetodi ajaperioodi pikkuseks on Δt, kuna suurus $T/\Delta t$ on täisarv M. Vaatame nüüd, kuidas määrata tippude A, B ja C asukohti ning trinoommeetodi tõenäosusi. Alusvara hinna lognormaalsuse omaduse tõttu, tippude A, B ja C log-hindade keskväärtus ja dispersioon avalduvad nagu võrrandites (4.3) ja (4.4), kus $\Delta t'$ asemel on Δt. Ajahetkel Δt saame tipu B log-hinna leida vastavalt võrrandile (4.5), kusjuures log-hind peab asuma poollõigus $\left[\mu - \sigma\sqrt{\Delta t}, \mu + \sigma\sqrt{\Delta t}\right)$. Tippude A ja C log-hinnad saame taas vastavalt $\hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ja $\hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t}$. Defineerime α, β ja γ nagu võrrandites (4.6). [7]

Esimesest võrrandist saame taas, et $\beta \in [-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t})$. Paneme tähele, et $\alpha > \beta > \gamma$. Leiame alusvara hinnad ajahetkel T, seejärel aga optsiooni hinnad samades tippudes. Selleks kasutame maksefunktsiooni (2.1). Edasi peame arvutama optsiooni hinna eelnevatel ajahetkedel, kuni jõuame esimese ajahetkeni Δt. Oleme kätte saanud optsiooni hinnad binoompuu algustippudes A, B ja C. Nüüd peame leidma jagunemise tõenäosused, et nende abil arvutada optsiooni hind tipus S_0. [7]

Saame jagunemise tõenäosused, lahendades võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} p_u\alpha + p_q\beta + p_d\gamma = 0, \\ p_u\alpha^2 + p_q\beta^2 + p_d\gamma^2 = \overline{\sigma}^2, \\ p_u + p_q + p_d = 1. \end{cases}$$

Optsiooni hinna ajahetkel $t = 0$ saame leida valemiga

$$V_0 = e^{-r\Delta t}(p_u V_A + p_q V_B + p_d V_C),$$

kus V_A, V_B ja V_C tähistavad vastavalt optsiooni hindu tippudes A, B ja C.

Optsiooni hinda saame tippudes A, B ja C leida kahel viisil: rekursiivselt binoompuus tagant ettepoole liikudes või kombinatoorika valemeid kasutades. Vaatleme lähemalt esimest juhtu. Anname ette perioodide arvu M ja leiame suuruse $\Delta\tau$. Võrrandi (4.1) abil leiame suuruse κ, mida kasutame Δt leidmisel valemiga (4.2). Nende suuruste abil leiame

$$\Delta t' = T - \left(\left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor - 1 \right) \Delta t.$$

Suuruse Δt abil leiame binoompuu parameetrid

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}, \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{4.8}$$

Ajahetkel $\Delta t'$ on log-hindade keskväärtuseks $\mu = (r - \sigma^2/2)\Delta t'$ ja dispersiooniks on $\overline{\sigma}^2 = \sigma^2 \Delta t'$. Nagu eelnevalt mainitud, saame leida üheselt tipu B log-hinna (vt valem (4.5)) ning seejärel tippude A ja C log-hinnad. Nüüd, kui teame tippude A, B ja C log-hindu, saame leida nende tippude optsiooni hinnad rekursiivselt tagant ettepoole liikudes ehk leiame optsiooni hinnad ajahetkel $M\Delta t$, seejärel $(M-1)\Delta t$ jne. Selleks konstrueerime iga tipu jaoks eraldi binoompuud ehk binoompuude alusvara alghinnad on vastavalt S_A, S_B ja S_C. Kusjuures igal ajahetkel arvestame, kas alusvara hind jääb barjääride vahele. Optsiooni hinna saame leida valemiga

$$\begin{cases} V_{m,j} = e^{-r\Delta t}[pV_{m+1,j+1} + (1-p)V_{m+1,j}], & \text{kui } S_{m,j} > L \text{ ja } S_{m,j} < H, \\ V_{m,j} = 0, & \text{vastupidisel juhul,} \end{cases} \tag{4.9}$$

kus $j = 0, 1, \ldots, m$ ja $0 \leq j \leq m \leq M$ ning $S_{m,j}$ on alusvara hind vastavas sõlmes. Kui oleme leidnud tippude A, B ja C optsioonide hinnad, saame leida optsiooni hinna alghetkel. Selleks leiame jagunemise tõenäosused trinoompuus ehk esimesel ajahetkel. Trinoompuu tõenäosused saame leida eelnevate valemite põhjal (alapeatükk

4.1). Leiame optsiooni hinna alghetkel, kasutades valemit

$$V_0 = e^{-r\Delta t'}(p_u V_A + p_q V_B + p_d V_C),$$

kus $\Delta t'$ tähistab esimese ajaperioodi pikkust.

Paneme tähele, et rekurrentset arvutusskeemi kasutades saame leida ka barjääri(de)ga Ameerika optsiooni hinna, kuid käesolevas töös vaatleme lähemalt Euroopa tüüpi optsiooni hinna määramist.

Optsiooni hinna leidmiseks rekursiivselt valemi (4.9) abil on vajalik teha suurusjärgus M^2 tehet. Järgmises osas vaatleme, kuidas kombinatoorika valemeid ja peegeldusprintsiipi kasutades on võimalik leida Euroopa tüüpi optsiooni hinda tippudes A, B ja C suurusjärgus M tehtega ehk $o(M)$ tehte abil.

4.2 Barjääriga optsiooni hinna leidmine kombinatoorika valemeid kasutades

Antud osa kirjutamisel on kasutatud materjali [2]. Optsiooni hind bino–trinoommeetodi korral leitakse järgmiselt. Olgu P_T optsiooniga seotud väljamakse ajahetkel $t = T$. Kasutades valemit

$$V_0 = e^{-rT}\mathcal{E}[P_T], \tag{4.10}$$

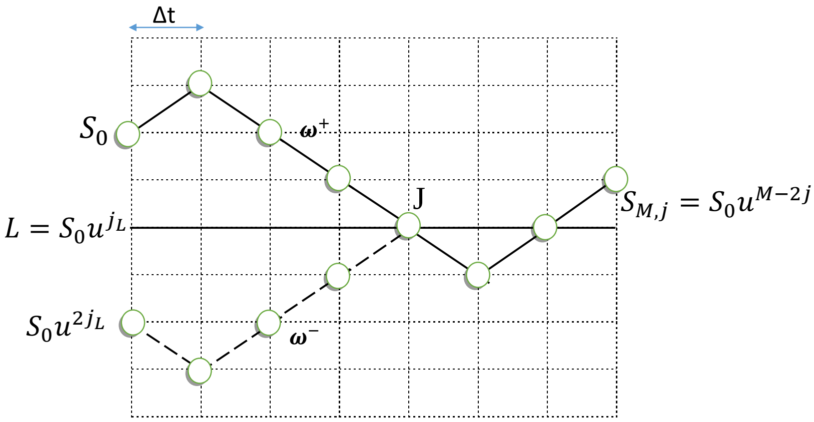
kus $\mathcal{E}$ tähistab keskväärtust, leitakse esmalt optsiooni hinnad tippudes A, B ja C ajahetkel $\Delta t'$ ning seejärel leitakse optsiooni hind ajahetkel $t = 0$ vastavalt valemile

$$V_0 = e^{-r\Delta t'}(p_u V_A + p_q V_B + p_d V_C).$$

Vaatleme esmalt, kuidas valemi (4.10) põhjal leida ühe barjääriga optsiooni hinda binoompuu korral, kui barjäär läbib hinnapuu tippusid. Olgu optsiooni eluiga jagatud M võrdseks osaks $\Delta t = T/M$. Olgu S_0 alusvara hind ajahetkel $t = 0$, siis alusvara hind ajahetkel $t = T$ saab omada väärtusi $S_{M,j} = S_0 u^{M-j} d^j = S_0 u^{M-2j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, M$. Barjääriga optsiooni puhul saab optsiooni hinna V_0 leidmiseks kasutada valemit (1.8), kuid selle kasutamisel peame kõikvõimalike teede arvust C_M^j tipust S_0 tipuni $S_{M,j}$ maha lahutama nende teede arvu, mille korral alusvara hind jõuab barjäärini. Olgu meil tegemist alumise barjääriga L. Eeldame järgnevalt, et $S_0 d^M \leq L \leq S_0$. Kui $L \geq S_0$, siis optsiooni hind on 0, kui aga $L < S_0 d^M$, siis optsiooni hind on võrdne tavalise Euroopa optsiooni hinnaga.

Kuna barjäär läbib binoompuu tippusid, siis alumine barjäär L on esitatav kujul $L = S_0 u^{j_L}$, kus $-M \leq j_L \leq -1$. Kui alusvara hind ajahetkel T on barjääriga L võrdne või sellest väiksem, siis *down-and-out* optsioon kaotab kehtivuse ning seega optsiooni hind on 0. Järelikult, kui $u^{M-2j} \leq u^{j_L}$ ehk $j \geq (M - j_L)/2$, siis optsiooni hind on 0.

Vaatleme nüüd juhtu, kus $S_{M,j} > L$, st $j < (M - j_L)/2$. Leiame nende teede arvu, mille korral alusvara hind puutub barjääri L või saab sellest väiksemaks. Selleks kasutame nn. peegelpildi printsiipi (*reflection principle*).



Joonis 10: Peegelpildi printsiip.

Vaatleme alusvara hinna teed tipust S_0 tippu $S_{M,j}$, mille korral alusvara hind puutub barjääri L või saab sellest väiksemaks. Olgu alusvara hind esmakordselt võrdne barjääri väärtusega tipus J (vt joonis 10). Igale hinnaliikumise teele ω^+ tipust S_0 tipuni J saame ajas tagant ette liikudes üksüheselt vastavusse seada tee ω^- järgmiselt: igal ajaperioodil, kui tee ω^+ korral toimub liikumine üles, siis tee ω^- korral toimub liikumine alla.

Kuna kõikide teede ω^+ korral on hinna allapoole liikumisi $|j_L|$ võrra rohkem kui ülespoole liikumisi, siis kõigi teede ω^- korral on hinna ülespoole liikumisi $|j_L|$ võrra rohkem kui allaliikumisi ning kõik teed ω^- algavad tipust $S_0 u^{2j_L}$. Seega nende teede arv, mis tipust S_0 tippu $S_{M,j}$ liikudes jõuavad alumise barjäärini L, on võrdne teede arvuga tipust $S_0 u^{2j_L}$ tippu $S_{M,j}$. Leiame nüüd üles- ja allaliikumiste arvu tipust $S_0 u^{2j_L}$ tippu $S_{M,j}$ liikudes. Olgu x ülesliikumiste arv ja y allaliikumiste arv. Siis peavad kehtima järgmised seosed:

$$\begin{cases} x + y = M, \\ x - y = M - 2j - 2j_L, \end{cases}$$

kuna üles- ja allaliikumiste koguarv peab võrduma perioodide arvuga ja tipust $S_0 u^{2j_L}$

tippu $S_{M,j} = S_0 u^{M-2j}$ liikudes peab ülesliikumisi allaliikumistest olema rohkem suuruse $M - 2j - 2j_L$ võrra. Nendest seostest saame, et ülesliikumiste arv $x = M - j - j_L$ ning allaliikumiste arv $y = j + j_L$. Seega kokku on erinevate teede arv tipust $S_0 u^{2j_L}$ tippu $S_{M,j} = S_0 u^{M-2j}$ liikudes $C_M^{j+j_L}$. Nüüd saame välja kirjutada alumise barjääriga *down-and-out* ostuoptsiooni hinna valemi

$$V_0 = e^{-rT} \sum_{0 \leq j < (M-j_L)/2} (C_M^j - C_M^{j+j_L}) p^{M-j} (1-p)^j \max\{S_0 u^{M-j} d^j - E, 0\}. \tag{4.11}$$

Esitame nüüd valemid optsiooni hinna leidmiseks bino–trinoompuu tippudes A, B ja C alumise barjääriga *down-and-out* ostuoptsiooni korral. Bino–trinoommeetodi korral on binoompuu perioodide arv M. Olgu tipu B log-hind $\hat{\mu}$ esitatav kujul $\hat{\mu} = l + k_0 \sigma \sqrt{\Delta t}$. Siis tipus B on alusvara hind $S_B = S_0 e^{\hat{\mu}} = S_0 e^{l + k_0 \sigma \sqrt{\Delta t}} = S_0 e^l u^{k_0}$ ning alumine barjäär $L = S_0 e^l$. Seega valemis (4.11) $j_0 = k_0$ ning tipus B on optsiooni hind

$$V_B = e^{-r(T-\Delta t)} \sum_{0 \leq j < (M-j_L)/2} (C_M^j - C_M^{j+j_L}) p^{M-j} (1-p)^j \max\{S_B u^{M-j} d^j - E, 0\}. \tag{4.12}$$

Tippudes A ja C on indeks vastavalt $j_L - 2$ ning $j_L + 2$. Saame

$$V_A = e^{-r(T-\Delta t)} \sum_{0 \leq j < (M-j_L+2)/2} (C_M^j - C_M^{j+j_L-2}) p^{M-j} (1-p)^j \max\{S_A u^{M-j} d^j - E, 0\},$$

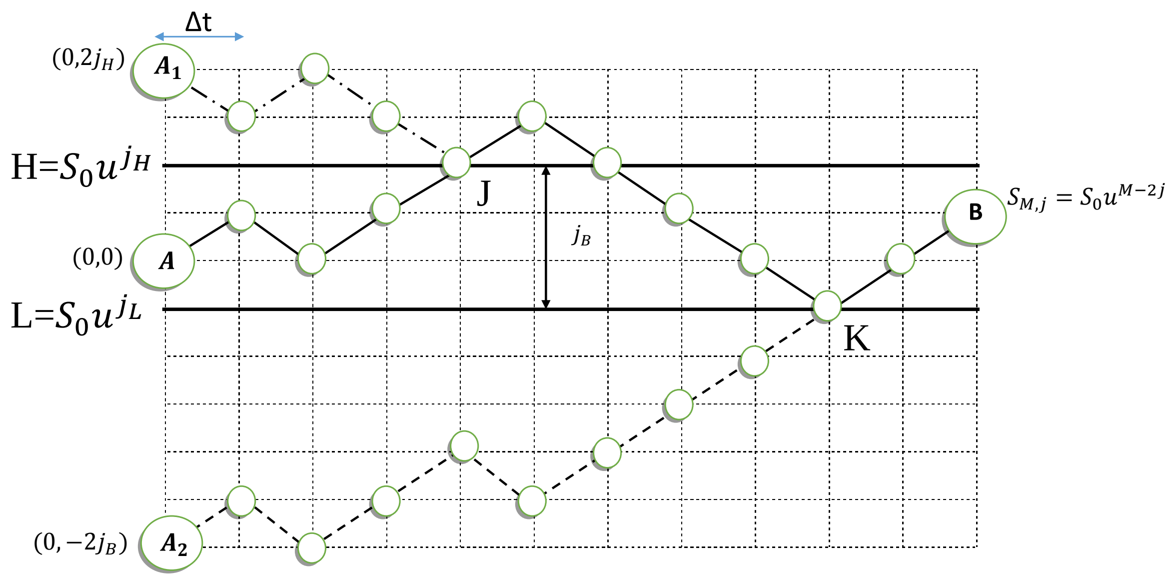
$$V_C = e^{-r(T-\Delta t)} \sum_{0 \leq j < (M-j_L-2)/2} (C_M^j - C_M^{j+j_L+2}) p^{M-j} (1-p)^j \max\{S_C u^{M-j} d^j - E, 0\}.$$

Esitame nüüd kahe barjääriga optsiooni hinna arvutamise valemid, kui mõlemad barjäärid läbivad binoompuu tippusid. Olgu meil tegemist *knock–out* optsiooniga. Sel juhul saame väljamakse arvutada valemi 2.2 abil. Optsiooni hinna V_0 leidmiseks kombinatoorika valemeid kasutades peame kõikvõimalike teede arvust C_M^j tipust S_0 tipuni $S_{M,j}$ maha lahutama nende teede arvu, mille korral alusvara hind jõuab barjäärini L või barjäärini H. Olgu alumine barjäär L esitatav kujul $L = S_0 u^{j_L}$ ning olgu ülemine barjäär $H = S_0 u^{j_H}$. Kuna $L < S_0 < H$, siis $j_H > 0$ ja $j_L < 0$. Olgu $j_B := j_H - j_L$ barjääride vaheline kaugus. Teame, et *knock-and-out* optsioon on kaotanud oma kehtivuse, kui alusvara hind $S_{M,j}$ ajahetkel T on väiksem või võrdne alumisest barjäärist L või vastavalt suurem või võrdne ülemisest barjäärist H. Võrratustest $S_0 u^{M-2j} \geq S_0 u^{j_H}$ ning $S_0 u^{M-2j} \leq S_0 u^{j_L}$ saame, et optsioon on kaotanud kehtivuse, kui $j \leq (M - j_H)/2$ või $j \geq (M - j_M)/2 = (M - j_H + j_B)/2$. Seega optsiooni hind ajahetkel $t = 0$ on leitav valemiga

$$V_0 = e^{-rT} \sum_{(M-j_H)/2<j<(M-j_H+j_B)/2} [C_M^j - N(j, j_H, j_B)] p^{M-j} (1-p)^j \max\{S_0 u^{M-j} d^j - E, 0\},$$

kus $N(j, j_H, j_B)$ on nende teede arv tipust S_0 tipuni $S_{M,j}$ liikudes, mille korral alusvara hind jõuab barjäärideni H või L.

Vaatleme nüüd juhtu, kus alusvara hind $S_{M,j}$ asub barjääride vahel, st $(M - j_H)/2 < j < (M - j_H + j_B)/2$ ning eesmärgiks on kokku lugeda nende teede arv, mille korral alusvara hind puutub barjääre enne, kui jõuab tippu $S_{M,j}$. Selleks kasutame taas peegelpildi printsiipi.



Joonis 11: Peegelpildi printsiibi kasutamine kahe barjääriga optsiooni korral.

Vaatleme alusvara hinna teed tipust A tipuni B (vt joonis 11), kus tee läbib esmalt ülemist barjääri ja seejärel alumist barjääri. Olgu alusvara hind esmakordselt võrdne ülemise barjääri väärtusega tipus J. Peegeldame hinna teed tipust A tipuni J ülemise barjääri suhtes. Saame, et peegeldatud teed algavad tipust A_1, mis asub sõlmes $(0, 2j_H)$. Olgu alusvara hind esmakordselt võrdne alumise barjääri väärtusega tipus K. Peegeldame nüüd hinna teed tipust A_1 tipuni K barjääri L suhtes. Kõik peegeldatud teed algavad siin tipust A_2, mille koordinaadid on $(0, -2j_B)$, kuna $j_L - (2j_H - j_L) = -2j_H + 2j_L = -2j_B$. Seega nende teede arv, mis tipust A jõuavad tipuni B nii, et barjääri H puututakse enne barjääri L, on võrdne teede arvuga tipust A_2 tippu B. Leiame hinna üles- ja allaliikumiste arvu teel tipust A_2 tippu B. Olgu x hinna ülesliikumiste arv ja y allaliikumiste arv. Siis kehtivad seosed:

$$\begin{cases} x + y = M, \\ x - y = M - 2j + 2j_B, \end{cases}$$

kuna tipust A_2 tippu B liikudes peab ülesliikumisi allaliikumistest olema rohkem suuruse $M-2j+2j_B$ võrra. Saame, et ülesliikumiste arv on $x = M-j+j_B$ ja allaliikumiste arv $y = M - x = j - j_B$, kus $0 \leq y \leq M$. Seega teede, mis jõuavad barjäärini H enne kui puutuvad barjääri L, arv on $C_M^{j-j_B}$, tingimusel $0 \leq j - j_B \leq M$.

Tähistagu α_i nende teede hulka, mille korral tees sisalduv barjääride puutumise järjestus on $\overbrace{H^+L^+H^+\ldots}^{i}$, kus $i \geq 1$, H^+ tähistab ülemise barjääri ja L^+ alumise barjääri järjestikuseid puutumisi. Näiteks hinna tee, mis on barjääride puutumise mustriga $LHHLLH$, kuulub hulkadesse α_1, α_2 ja α_3. Joonisel 11 toodud tee tipust A tippu B kuulub nii hulka α_1 kui ka α_2. Sarnaselt, tähistagu β_i nende teede hulka, mille korral tees sisalduv barjääride puutumise järjestus on $\overbrace{L^+H^+L^+\ldots}^{i}$, kus $i \geq 1$. Seega tee tipust A tippu B kuulub ka hulka β_1. Märkame, et iga tee, mis puutub barjääri, võib kuuluda rohkem kui ühte hulka ja seega võib $\alpha_i \bigcap \beta_i$ mitte olla tühi. Samuti paneme tähele, et $\alpha_{i+1} \subseteq \alpha_i$ ning $\beta_{i+1} \subseteq \beta_i$ iga $i \geq 1$ korral. Leiame hulkade α_i ja β_i elementide arvu. Eelnevalt leidsime hulga α_i elementide arvu, kui $i = 2$.

Olgu $|\alpha_i|$, $|\beta_i|$ vastavalt hulkade α_i ning β_i elementide arv. Paneme tähele, et $|\alpha_i| = |\beta_i| = 0$ selliste täisarvuliste i-de korral, mis on suuremad kui $\lceil \frac{M}{j_B} \rceil$. Teiste sõnadega öeldes, mitte ükski tee ei puutu barjääre H ja L rohkem kui $\lceil \frac{M}{j_B} \rceil$ korda, kuna iga tee korral on ajahetki vaid M ja kahe barjääri vaheline kaugus on j_B. Olgu Γ hulk, mille moodustavad teed tipust A tippu B, mis jõuavad barjäärini L või H. Leiame hulga Γ elementide arvu. Selleks kasutame hulgateooriast tuntud seost

$$|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|.$$

Märkame, et $\Gamma = \alpha_1 \bigcup \beta_1$, kuna kõik teed hulgas Γ puutuvad alumist barjääri L (kuulub hulka β_1) või ülemist barjääri H (kuulub hulka α_1). Seega $|\Gamma| = |\alpha_1| + |\beta_1| - |\alpha_1 \bigcap \beta_1|$. Hulk $\alpha_1 \bigcap \beta_1$ koosneb teedest, mis jõuavad nii alumise kui ka ülemise barjäärini. Saame $\alpha_1 \bigcap \beta_1 = \alpha_2 \bigcup \beta_2$ ning $|\alpha_2 \bigcup \beta_2| = |\alpha_2| + |\beta_2| - |\alpha_2 \bigcap \beta_2|$. Iteratiivselt jätkates saame

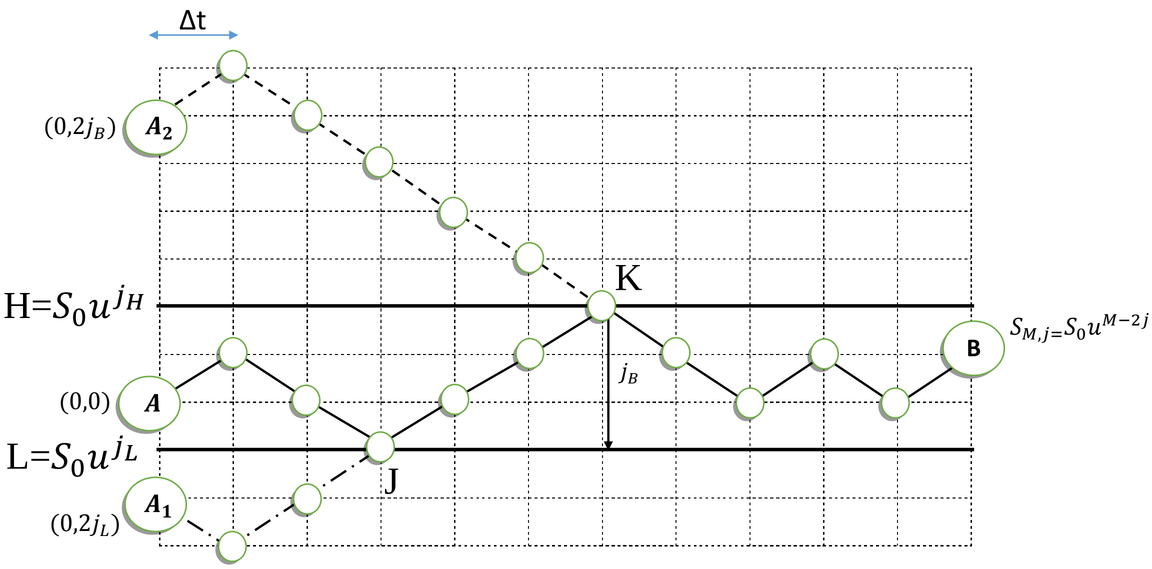
$$\begin{aligned} |\Gamma| &= |\alpha_1 \bigcup \beta_1| = |\alpha_1| + |\beta_1| - |\alpha_1 \bigcap \beta_1| = \\ &= |\alpha_1| + |\beta_1| - |\alpha_2| - |\beta_2| + |\alpha_2 \bigcap \beta_2| = \ldots \end{aligned}$$

Seega suuruse $N(j, j_H, j_B)$ saame leida vastavalt valemile

$$N(j, j_H, j_B) = \sum_{i=1}^{\lceil M/j_B \rceil} (-1)^{i+1}(|\alpha_i| + |\beta_i|)$$

ning selle rakendamiseks on vajalik teada hulkade α_i ja β_i elementide arvu suvalise i korral.

Eespool leidsime hulga α_2 elementide arvu. Leiame nüüd hulga β_2 elementide arvu. Hulka β_2 kuuluvad need teed, mille korral puututakse esmalt barjääri L ja seejärel barjääri H, kusjuures tähtis on barjääride puutumise järjestus mitte see, mitu korda vastavaid barjääre puututakse. Seega barjääride puutumise järjestus on L^+H^+. Toome joonise (vt joonis 12).



Joonis 12: Peegelpildi printsiibi kasutamine kahe barjääriga optsiooni korral.

Olgu alusvara hind võrdne alumise barjääri väärtusega tipus J. Peegeldame alusvara hinna teed tipust A tipuni J alumise barjääri suhtes. Peegeldatud teed algavad tipust $(0, 2j_L)$. Edasi peegeldame saadud teed ülemise barjääri suhtes tipust A_1 tipuni K. Uueks tipuks, kust peegeldatud teed algavad, on $(0, 2j_B)$, kuna $j_H + (j_H - 2j_L) = 2j_H - 2j_L = 2j_B$. Hinna üles- ja allaliikumiste arvu leidmiseks tipust A_2 tippu B saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = M, \\ x - y = M - 2j - 2j_B, \end{cases}$$

mille lahendiks on $x = M - j - j_B$ ja allaliikumiste arvuks $y = j + j_B$. Teede, mis jõuavad barjäärini L enne kui puutuvad barjääri H, arv on $C_M^{j+j_B}$, kusjuures $0 \leq j + j_B \leq M$.

Kui hulkade α_2 ja β_2 elementide arvud on leitud, siis on lihtne leida ka hulkade α_1 ja β_1 elementide arvu. Kui tee puutub vaid ülemist barjääri H, siis võrrandisüsteem hinna üles- ja allaliikumiste arvu leidmiseks on kujul

$$\begin{cases} x + y = M, \\ x - y = M - 2j - 2j_H, \end{cases}$$

millest saame $x = M - j - j_H$ ja $y = j + j_H$ ning hulga α_1 elementide arv on $C_M^{j+j_H}$, kui $0 \leq j + j_H \leq M$. Kui tee puutub vaid alumist barjääri L, siis üles- ja allaliikumiste arvu leiame võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x + y = M, \\ x - y = M - 2j - (2j_H - 2j_B). \end{cases}$$

Saame $x = M - j - j_H + j_B$ ja $y = j + j_H - j_B$ ning hulga β_1 elementide arv on $C_M^{j+j_H-j_B}$, kui $0 \leq j + j_H - j_B \leq M$.

Vaatleme nüüd, kuidas leida hulkade α_i ja β_i elementide arvu, kui $i \geq 2$. Selleks vaatleme, kuidas muutub hinna üles- ja allaliikumiste arv ning peegeldame teed kaks korda. Eeldame esmalt, et peegeldatud tee alguspunkt asub sõlmes $(0, a)$, kus $a > j_H$. Sel juhul on hinna üles- ja allaliikumiste arv määratud võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x + y = M, \\ x - y = M - 2j - a, \end{cases}$$

millest saame, et $x = M - j - a/2$, $y = j + a/2$. Kui $a > j_H$, siis peegeldame teed kõigepealt alumise barjääri suhtes ning siis ülemise barjääri suhtes. Alumise barjääri suhtes peegeldades asub peegeldatud tee alguspunkt sõlmes $(0, 2j_H - 2j_B - a)$, kuna $j_L - (a - j_L) = 2j_L - a = 2j_H - 2j_B - a$. Peegeldades saadud teed ülemise barjääri suhtes, saame, et peegeldatud tee alguspunkt asub sõlmes $(0, 2j_B + a)$, kuna $j_H + [j_H - (2j_H - 2j_B - a)] = 2j_B + a$. Seega hinna üles- ja allaliikumiste arv on määratud võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x + y = M, \\ x - y = M - 2j - a - 2j_B. \end{cases}$$

Saame $x = M - j - a/2 - j_B$ ja $y = j + a/2 + j_B$. Seega, kui tee alguspunkt asub ülalpool ülemist barjääri ning me peegeldame teed kaks korda (alguses alumise ja seejärel ülemise barjääri suhtes), siis hinna allaliikumiste arv kasvab suuruse j_B võrra.

Vaatleme nüüd juhtu, kus peegeldatud tee alguspunkt asub sõlmes $(0, a)$, mille korral $a < j_L$. Peegeldame teed kõigepealt ülemise barjääri ning seejärel alumise barjääri suhtes. Ülemise barjääri suhtes peegeldades asub peegeldatud tee alguspunkt sõlmes $(0, 2j_H - a)$, kuna $j_H + (j_H - a) = 2j_H - a$. Peegeldades saadud teed alumise barjääri suhtes. Saame, et peegeldatud tee alguspunkt asub sõlmes $(0, a - 2j_B)$, kuna $j_L - (2j_H - a - j_L) = 2j_L - 2j_H + a = a - 2j_B$. Seega hinna üles- ja allaliikumiste arvu saame leida võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} x + y = M, \\ x - y = M - 2j - a + 2j_B, \end{cases}$$

millest saame $x = M - j - a/2 + j_B$, $y = j + a/2 - j_B$. Seega, kui tee alguspunkt asub allpool alumist barjääri ning me peegeldame teed kaks korda (kõigepealt ülemise ja seejärel alumise barjääri suhtes), siis hinna allaliikumiste arv väheneb suuruse j_B võrra. Arvestades, et hulkade α_1 ja β_2 elementide arvu leidmisel asus peegeldatud tee ülalpool ülemist barjääri ning hulkade α_2 ja β_1 elementide arvu leidmisel asus peegeldatud tee allpool alumist barjääri, siis hulkade α_i ja β_i elementide arvu suvalise i korral saame vastavalt peegeldusprintsiibile leida järgmiselt

$$|\alpha_i| = \begin{cases} C_M^{j + j_H + (i-1)j_B/2}, & \text{paarituarvulise } i \text{ korral}, \\ C_M^{j - ij_H/2}, & \text{paarisarvulise } i \text{ korral}, \end{cases} \tag{4.13}$$

tingimustel $0 \le j + j_H + (i-1)j_B/2 \le M$ ja $0 \le j - ij_H/2 \le M$,

$$|\beta_i| = \begin{cases} C_M^{j + j_H - (i+1)j_H/2}, & \text{paarituarvulise } i \text{ korral}, \\ C_M^{j + ij_H/2}, & \text{paarisarvulise } i \text{ korral}, \end{cases} \tag{4.14}$$

kui $0 \le j + j_H - (i+1)j_H/2 \le M$ ja $0 \le j + ij_H/2 \le M$. Paneme tähele, et kui vastavad suurused pole vahemikus $[0, M]$, on teede arv võrdne nulliga. Nüüd saame välja kirjutada valemid optsiooni hindade leidmiseks bino–trinoompuu tippudes A, B ja C. Tipus B on optsiooni hind

$$V_B = e^{-r(T - \Delta t')} \sum_{(M - j_H)/2 < j < (M - j_H + j_B)/2} c_b(j) \max\{S_B u^{M-j} d^j - E, 0\}, \tag{4.15}$$

kus $c_b(j) = [C_M^j - N(j, j_H, j_B)] p^{M-j} (1-p)^j$. Tippudes A ja C on optsiooni hinnad vastavalt

$$V_A = e^{-r(T - \Delta t')} \sum_{(M - j_H + 2)/2 < j < (M - j_H + j_B + 2)/2} c_a(j) \max\{S_A u^{M-j} d^j - E, 0\},$$

kus $c_a(j) = [C_M^j - N(j, j_H + 2, j_B)]p^{M-j}(1-p)^j$ ja

$$V_C = e^{-r(T-\Delta t')} \sum_{(M-j_H-2)/2<j<(M-j_H+j_B-2)/2} c_c(j) \max\{S_C u^{M-j} d^j - E, 0\},$$

kus $c_c(j) = [C_M^j - N(j, j_H - 2, j_B)]p^{M-j}(1-p)^j$.

Paneme tähele, et tipu B kaugus alumisest barjäärist on $j_L = 2j^*$, kui M on paarisarv, ja $j_L = 2j^* + 1$, kui M on paaritu (suurus j^* leitakse alapeatükis 4.1). Tipu A kaugus alumisest barjäärist on vastavalt $j_L + 2$ ja tipu C kaugus $j_L - 2$. Defineerisime alumise ja ülemise barjääri indeksite vahe kui $j_B = j_H - j_L$, seega $j_H = j_L + j_B$. Barjääridevahelise kauguse j_B saame arvutada valemiga

$$j_B = \frac{h - l}{\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Kui tipu B ja ülemise barjääri indeksite vahe on j_H, siis tipu A ja ülemise barjääri indeksite vahe on $j_H - 2$ ning tipu C ja ülemise barjääri indeksite vahe on $j_H + 2$.

Näitame, et optsiooni hinna leidmiseks tipus A, B ja C läheb vaja suurusjärgus M tehet. Vaatame lähemalt optsiooni hinna leidmist tipus B, mille saame leida valemit (4.15) kasutades. Suurused C_M^j, $P_j := p^{M-j}(1-p)^j$ ja $D_j := u^{M-j}d^j$ saame leida rekursiivselt vastavalt valemitele

$$\begin{aligned} C_M^j &= C_M^{j-1}\frac{M-j+1}{j}, \\ P_j &= P_{j-1}\frac{1-p}{p}, \\ D_j &= D_{j-1}\frac{d}{u}, \end{aligned} \tag{4.16}$$

kus $j = 1, 2, \dots, M$ ning $C_M^0 = 1$, $P_0 = p^M$ ning $D_0 = u^M$. Nende suuruste leidmiseks valemite (4.16) abil läheb vaja suurusjärgus M tehet. Kuna suurused $|\alpha_i|$ ja $|\beta_i|$ (vt (4.13), (4.14)) on samuti leitavad kombinatsioonide arvu põhjal, siis suurusi $|\alpha_i|$ ja $|\beta_i|$ saab leida konstantse ajaga, kui C_M^j on eelnevalt salvestatud. Seega suuruse $N(j, j_H, j_B)$ saame leida $o\left(\lceil \frac{M}{j_B} \rceil\right)$ tehtega ning kõik suurused $N(j, j_H, j_B)$, kus $(M - j_H)/2 < j < (M - j_H + j_B)/2$, suurusjärku $o\left(\lceil \frac{M}{j_B} \rceil\right) \frac{j_B}{2} = o(M)$ tehtega. Järelikult kokkuvõttes läheb optsiooni hinna arvutamiseks vaja suurusjärgus M tehet.

Valemite (4.15) numbrilisel realiseerimisel tuleb arvestada ka võimaliku ala- ja ületäitumisega suuruste P_j ja C_M^j arvutamisel suurte perioodide arvu M korral. Seetõttu on valemeid (4.16) kasutades võimalik optsiooni hinda arvutada vaid suhteliselt väikese perioodide arvu M korral (tarkvaraga Python $M \leq 1000$ korral). Alljärgnevalt pakume välja algoritmi valemite (4.16) numbriliseks realiseerimiseks, mis võimaldab leida optsiooni hinda ka suurema perioodide arvu korral.

Leiame esmalt suurused $\bar{C}_M^j := \ln(C_M^j)$ ja $\bar{P}_j := \ln(P_j)$ vastavalt valemitele

$$\begin{aligned}\bar{C}_M^j &= \bar{C}_M^{j-1} + \ln\left(\frac{M-j+1}{j}\right),\\ \bar{P}_j &= \bar{P}_{j-1} + \ln\left(\frac{1-p}{p}\right),\end{aligned}$$

kus $j = 1, 2, \ldots, M$ ning $\bar{C}_M^0 = 0$, $\bar{P}_0 = M\ln(p)$. Suuruse $c_b(j) = [C_M^j - N(j, j_H, j_B)]P_j$ arvutame suuruste $\bar{C}_M^j$ ja $\bar{P}_j$ põhjal järgmiselt

$$\begin{aligned}c_b(j) = C_M^j P_j - &\sum_{i=1}^{\lceil M/jB \rceil}(-1)^{i+1}(|\alpha_i| + |\beta_i|)P_j =\\ &= \exp(\bar{C}_M^j + \bar{P}_j) - \sum_{i=1}^{\lceil M/jB \rceil}(-1)^{i+1}[\exp(\ln(|\alpha_i|) + \bar{P}_j) + \exp(\ln(|\beta_i|) + \bar{P}_j)] =\\ &= \exp(\bar{C}_M^j + \bar{P}_j) - \sum_{i=1}^{\lceil M/jB \rceil}(-1)^{i+1}[\exp(\bar{C}_M^{g_1(i)} + \bar{P}_j) + \exp(\bar{C}_M^{g_2(i)} + \bar{P}_j)],\end{aligned}$$

kus funktsioonid $g_1(i)$ ja $g_2(i)$ on määratud vastavalt valemitele (4.13) ja (4.14). Selline arvutusalgoritm võimaldab leida optsiooni hinda ka näiteks perioodide arvu $M = 100000$ korral.

5 Numbrilised eksperimendid

Selles peatükis on kasutatud allikaid [2]-[4], [6]-[9]. Programmid on koostatud programmeerimiskeele Python abil ning need on ära toodud lisades. Kasutame tavalist sülearvutit (2 GB RAM; 2 x 2.1 GHz protsessor; Windows 7). Selles peatükis võrdleme optsiooni hinna koonduvust ja optsiooni hinna leidmise kiirust (meetodite rakendamiseks kuluvad ajad on toodud sekundites) nii ühe kui kahe barjääriga *knock–out* optsiooni korral. Leiame esmalt *down-and-out* müügioptsiooni hinna tavalist trinoommeetodit ja bino–trinoommeetodit kasutades. Bino–trinoommeetodi korral arvutame optsiooni hinnad nii rekursiivselt kui ka kombinatoorika valemeid kasutades. Kombinatoorikat kasutav bino–trinoommeetodi programm *down-and-out* optsiooni hinna arvutamiseks on toodud bakalaureusetöös [7]. Müügioptsiooni korral kasutame artiklis [9] toodud parameetreid:

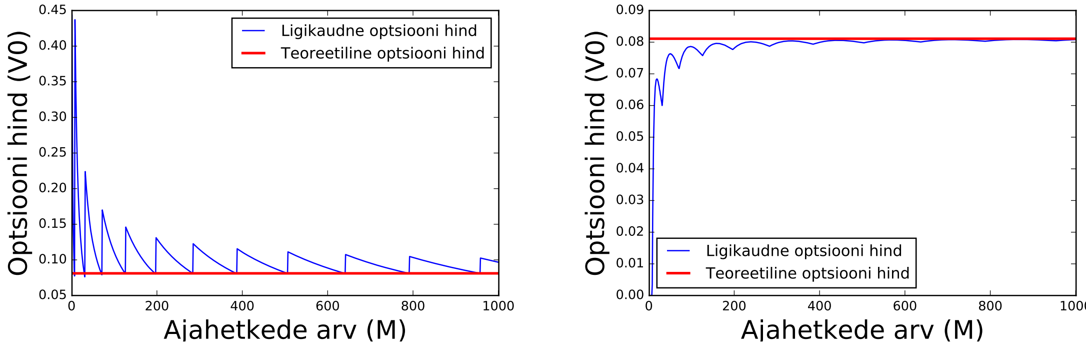
- alusvara alghind $S = 9$,
- täitmishind $E = 10$,
- riskivaba intressimäär $r = 0.12$,
- volatiilsus $\sigma = 0.5$,
- täitmisaeg $T = 1$ aasta.

Olgu alumise barjääri väärtus $L = 7$. Täpne optsiooni hind on 0.0811 [6].

Ajaperioodide arv	Trinoommeetod		Bino–trinoommeetod (kombinatoorika)		Bino–trinoommeetod (rekursiivne)	
	Hind	Aeg	Hind	Aeg	Hind	Aeg
20	0.1402	0.003	0.0683	0.002	0.0683	0.050
50	0.1235	0.017	0.0763	0.005	0.0818	0.029
100	0.1103	0.068	0.0786	0.012	0.0786	0.110
200	0.1294	0.266	0.0781	0.040	0.0781	0.427
400	0.1108	0.975	0.0799	0.131	0.0799	1.749
600	0.0886	2.228	0.0806	0.294	0.1005	3.819
800	0.1033	3.981	0.0805	0.582	0.0805	6.725
1000	0.0968	6.419	0.0808	1.003	0.0811	10.515

Tabel 2: Müügioptsiooni hinna leidmine trinoommeetodiga ja bino–trinoommeetodiga alumise barjääri $L = 7$ korral.

Tabelis 2 märkame, et trinoommeetodit kasutades on ostsilleeruvuse ulatus kõige suurem. Tavalise trinoommeetodiga optsiooni hindamist uurisime põhjalikult alapeatükis 2.2. Toome võrdluseks joonised, millel on näha tavalise trinoommeetodiga (vasakul) ja bino–trinoommeetodiga (paremal) müügioptsiooni hinna sõltuvus ajaperioodide arvust, kusjuures bino–trinoommeetodi korral kasutame optsiooni hinna leidmiseks kombinatoorika valemeid.



Joonis 13: Tavalise trinoommeetodiga (vasakul) ja bino–trinoommeetodiga (paremal) *down-and-out* müügioptsiooni hinna sõltuvus sammude arvust alumise barjääri $L = 7$ korral.

Alapeatükis 2.2 vaatlesime, mis juhtub ostuoptsiooni hinna koonduvusega, kui alusvara alghind barjäärile lähemale nihutada. Võtame alumiseks barjääriks $L = 2$, et näha, kuidas müügioptsiooni korral optsiooni hind käitub, kui barjääri alusvara alghinnast kaugemale nihutada. Optsiooni täpseks hinnaks on 1.6800 [6].

Ajaperioodide arv	Trinoommeetod		Bino–trinoommeetod (kombinatoorika)		Bino–trinoommeetod (rekursiivne)	
	Hind	Aeg	Hind	Aeg	Hind	Aeg
20	1.6954	0.003	1.6855	0.001	1.6855	0.005
50	1.6861	0.017	1.6873	0.005	1.6873	0.025
100	1.6874	0.067	1.6784	0.013	1.6784	0.135
200	1.6846	0.264	1.6809	0.041	1.6809	0.510
400	1.6814	1.036	1.6802	0.135	1.6802	1.886
600	1.6832	2.234	1.6807	0.316	1.6831	4.340
800	1.6825	4.262	1.6805	0.610	1.6805	7.688
1000	1.6820	6.099	1.6799	1.117	1.6799	11.764

Tabel 3: Müügioptsiooni hinna leidmine trinoommeetodiga ja bino–trinoommeetodiga alumise barjääri $L = 2$ korral.

Näeme tabelist 3, et kui barjäär asub alusvara alghinnast kaugemal, siis optsiooni ostsilleeruvuse ulatus on väiksem ja optsiooni hind koondub kiiremini, seda ka tavalise trinoommeetodi korral. Selline tulemus oli ette aimatav. Leiame veel ühe barjääriga *down-and-out* ostuoptsiooni hinnad nii tavalise trinoommeetodiga rekursiivselt arvutades kui ka bino–trinoommeetodiga. Ostuoptsiooni hindamiseks kasutame parameetreid:

- alusvara alghind $S_0 = 100$,
- täitmishind $E = 100$,
- riskivaba intressimäär $r = 0.1$,
- volatiilsus $\sigma = 0.25$,
- täitmisaeg $T = 1$ aasta,
- alumise barjääri hind $L = 90$.

Optsiooni täpne hind on 11.3234 [6]. Tabelist 4 märkame, et bino–trinoommeetod, mil-

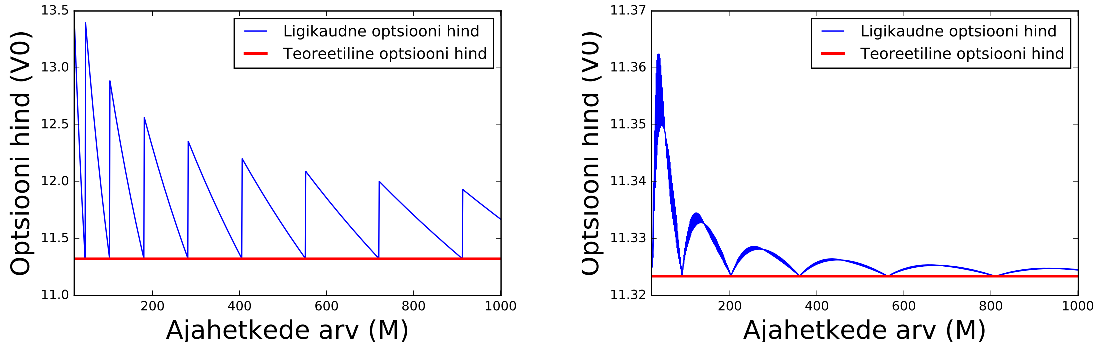
Ajaperioodide arv	Trinoommeetod		Bino–trinoommeetod (kombinatoorika)		Bino–trinoommeetod (rekursiivne)	
	Hind	Aeg	Hind	Aeg	Hind	Aeg
20	13.4362	0.003	11.3442	0.001	12.0578	0.005
50	13.2111	0.017	11.3489	0.004	11.3489	0.034
100	11.3623	0.068	11.3279	0.015	11.3279	0.117
200	12.2980	0.247	11.3240	0.039	11.3240	0.414
400	11.3629	0.948	11.3255	0.139	11.9751	1.598
600	11.8566	2.153	11.3245	0.306	11.8626	3.620
800	11.7071	3.793	11.3237	0.586	11.3328	6.388
1000	11.6712	6.028	11.3246	0.979	11.3246	10.159

Tabel 4: Ostuoptsiooni hinna leidmine trinoommeetodiga ja bino–trinoommeetodiga (nii kombinatoorika valemeid kasutades kui ka rekursiivselt arvutades).

le optsiooni hinna arvutamisel kasutatakse kombinatoorika valemeid, koondub kõige kiiremini. Selle meetodi korral pole isegi $M = 20$ korral erinevus leitud optsiooni hinna ja täpse hinna vahel eriti suur (teisest komakohast alates erinev). Samas tavalise trinoommeetodi korral erineb optsiooni hind täpsest ligikaudu kahe võrra, kui ajaperioodide arv $M = 20$. Kõige suurema ostsilleeruvuse ulatusega on trinoommeetod, samas bino–trinoommeetod, mille korral arvutatakse optsiooni hinnad rekursiivselt, on kõige ajamahukam.

Toome joonised, kus on leitud optsiooni hind samade parameetritega (vt joonis 14). Ajaperioodide arvuks on $M = 20, 21, \ldots, 1000$. Bino–trinoommeetod koondub tavalisest trinoommeetodist kiiremini ja ostsilleeruvuse ulatus on tunduvalt väiksem.

Näeme, et nii ostu- kui ka müügioptsiooni hinna leidmisel on kombinatoorika valemeid kasutav bino–trinoommeetod tunduvalt kiirem kui rekursiivselt optsiooni hindu arvutav. Valime nüüd alusvara alghinnad sellised, et nad asuksid barjääri läheduses. Võrdleme omavahel kolme meetodit: tavalist trinoommeetodit, bino–trinoommeetodit



Joonis 14: Tavalise trinoommeetodiga (vasakul) ja bino–trinoommeetodiga (paremal) *down-and-out* ostuoptsiooni hinna sõltuvus sammude arvust alumise barjääri $L = 90$ korral.

ja adaptiivsete võrede meetodit, kusjuures bino–trinoommeetodit kasutades on meil taas optsiooni hindade leidmiseks kaks võimalust: võime optsiooni hinnad binoompuus arvutada rekursiivselt või kombinatoorika valemeid kasutades. Parameetrid valime samad, nagu eelnevalt ostuoptsiooni korral, kusjuures alusvara alghinda S_0 muudame. Tabelites 5-7 on optsioonide täpsed hinnad leitud veebitööriista [6] abil.

S_0	Täpne hind	Ajaperioodide arv	Trinoommeetod		Bino–trinoommeetod (rekursiivne)	
			Hind	Aeg	Hind	Aeg
92.000	2.5063	400	3.7628	1.098	3.1462	1.781
91.000	1.2738	383	2.0077	0.946	1.7976	1.550
90.500	0.6424	381	1.9656	0.968	1.0006	1.870
90.250	0.3226	380	1.9444	0.940	1.6922	1.557
90.125	0.1616	380	1.9327	1.042	0.9718	1.621
90.062	0.0803	386	1.9132	0.957	0.8532	1.571
90.031	0.0389	385	1.9125	0.963	0.3919	1.610

Tabel 5: Optsiooni hinna leidmine trinoommeetodiga ja bino–trinoommeetodiga (rekursiivsel juhul).

Näeme, et tavaline trinoommeetod hindab optsiooni tugevalt üle. Antud parameetritega töötab bino–trinoommeetod, mis kasutab kombinatoorika valemeid, paremini kui AVM: seda nii ajaliselt kui ka täpsuse poolest. Samas adaptiivsete võrede meetod annab täpsema tulemuse kui bino–trinoommeetod, mille korral arvutame optsiooni hinnad rekursiivselt. Toome tabeli *down-and-out* ostuoptsiooni hindamise kohta, kus valime trinoompuu parameetrid nii, et barjäär läbiks hinnapuu tippe (vt [8]), kusjuures me ei konstrueeri täiendavaid võresid (ehk $N = 0$). Sellist lähenemist nimetatakse Ritchkeni meetodiks. Võrdleme antud meetodit bino–trinoommeetodiga.

S_0	Täpne hind	Ajaperioodide arv	Bino–trinoommeetod (kombinatoorika)		AVM		
			Hind	Aeg	Tase	Hind	Aeg
92.000	2.5063	400	2.5072	0.132	0	2.5062	1.271
91.000	1.2738	383	1.2742	0.123	1	1.2692	1.162
90.500	0.6424	381	0.6428	0.138	2	0.6450	1.164
90.250	0.3226	380	0.3224	0.158	3	0.3274	1.180
90.125	0.1616	380	0.1615	0.108	4	0.1660	1.304
90.062	0.0803	386	0.0802	0.116	5	0.0835	1.234
90.031	0.0389	385	0.0402	0.118	6	0.0423	1.357

Tabel 6: Optsiooni hinna määramine bino–trinoommeetodiga (kombinatoorika valemitega) ja adaptiivsete võrede meetodiga.

S_0	Täpne hind	Ajaperioodide arv	Bino–trinoommeetod (rekursiivne)		Bino–trinoommeetod (kombinatoorika)		Ritchken	
			Hind	Aeg	Hind	Aeg	Hind	Aeg
92.0	2.506	388	3.1462	1.731	2.5072	0.132	2.5072	1.298
91.0	1.274	1536	1.9433	25.530	1.2738	0.123	1.2738	17.213
90.5	0.642	6109	0.6424	393.002	0.6424	0.138	0.6424	274.616

Tabel 7: Optsiooni hinna leidmine bino–trinoommeetodiga ja adaptiivsete võrede meetodiga, kui tihedamate võrede arv on $N = 0$.

Märkame tabelist 7, et Ritchkeni meetod annab täpsema tulemuse ja optsiooni hinna leidmiseks kulub vähem aega kui bino–trinoommeetodi korral, kus arvutatakse optsiooni hinnad tagant ettepoole liikudes. Samas on taas kõige kiirem ja täpsem neist kolmest bino–trinoommeetod, mille korral kasutatakse optsiooni hinna leidmiseks kombinatoorika valemeid.

Vaatleme nüüd bino–trinoommeetodiga kahe barjääriga *knock–out* ostuoptsiooni hindamist. Optsiooni hinna leidmiseks on kaks võimalust: kombinatoorika valemite abil või binoompuus tagant ettepoole arvutades. Kasutame kahe barjääriga ostuoptsiooni hinna määramiseks parameetreid:

- alusvara alghind $S_0 = 95$,
- täitmishind $E = 100$,
- riskivaba intressimäär $r = 0.1$,
- volatiilsus $\sigma = 0.25$,
- täitmisaeg $T = 1$ aasta,

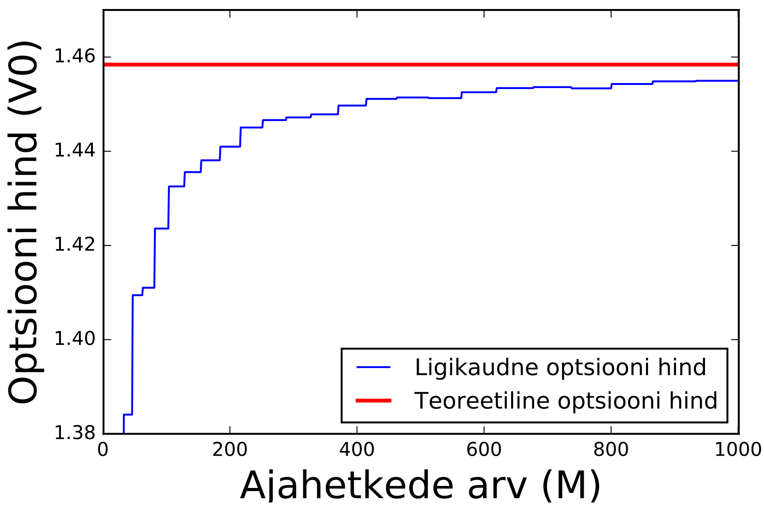
- alumise barjääri hind $L = 90$,
- ülemise barjääri hind $L = 140$.

Nende parameetritega arvutatud optsiooni täpne hind on 1.458435 (vt [1]). Paneme tähele, et rekursiivselt arvutatud optsiooni hinnad tabelites 8-10 langevad kokku artiklis [1] toodud tulemustega. Tabelist 8 näeme, et mõlemad bino–trinoommeetodi versioonid annavad sama hinna, kuid taas on kombinatoorika valemeid kasutav versioon kiirem.

Ajaperioodide arv	Bino–trinoommeetod (rekursiivne)		Bino–trinoommeetod (kombinatoorika)	
	Hind	Aeg	Hind	Aeg
100	1.4236	0.055	1.4236	0.007
200	1.4410	0.235	1.4410	0.021
400	1.4497	0.871	1.4497	0.038
600	1.4525	1.874	1.4525	0.058
800	1.4534	3.044	1.4534	0.081
1000	1.4550	5.028	1.4550	0.095

Tabel 8: Kahe barjääriga ostuoptsiooni hinna leidmine bino–trinoommeetodiga (rekursiivselt vs kombinatoorika valemitega) $S_0 = 95$ korral.

Joonisel 15 on toodud kahe barjääriga *knock–out* ostuoptsiooni hinna koondumine juhul, kui optsiooni hindamiseks on kasutatud bino–trinoommeetodit (vt joonis 15). Ajaperioodide arv on $M = 20, 21, \ldots, 1000$.



Joonis 15: Kahe barjääriga ostuoptsiooni hinna sõltuvus sammude arvust alghinna $S_0 = 95$, alumise barjääri $L = 90$ ja ülemise barjääri $H = 140$ korral.

Vaatleme nüüd optsiooni hinna leidmist juhul, kui alusvara alghind asub barjääri lähedal. Leiame kahe barjääriga optsiooni hinna $S_0 = 90.05$ ja $S_0 = 139.95$ korral (ülejäänud parameetrid jäävad samaks). Optsiooni täpseteks hindadeks on vastavalt 0.016268 ja 0.006656 (vt [1]). Tulemused on toodud tabelites 9 ja 10. Märkame, et lisaks kiirusele on kombinatoorika valemeid kasutav versioon ka oluliselt täpsem ning rekursiivsel juhul optsiooni hindu arvutades toimub optsiooni ülehindamine. Mainime, et ajaperioodide arvu $M = 100000$ korral saime kombinatoorika valemeid kasutades alusvara alghindade $S_0 = 95$, $S_0 = 90.05$ ja $S_0 = 139.95$ korral optsiooni hindadeks vastavalt 1.458350, 0.016268 ja 0.006657, mis langevad täpsete hindadega praktiliselt kokku. Sealhulgas $M = 100000$ korral kulus optsiooni hinna arvutamiseks vaid ligikaudu 1.5 korda rohkem aega kui rekursiivselt optsiooni hinda arvutades $M = 1000$ korral.

Ajaperioodide arv	Bino–trinoommeetod (rekursiivne)		Bino–trinoommeetod (kombinatoorika)	
	Hind	Aeg	Hind	Aeg
100	0.3138	0.083	0.0159	0.010
200	0.2798	0.346	0.0149	0.019
400	0.2269	1.281	0.0152	0.037
600	0.1423	2.748	0.0162	0.060
800	0.1498	4.467	0.0161	0.073
1000	0.1241	6.847	0.0162	0.097

Tabel 9: Kahe barjääriga ostuoptsiooni hinna leidmine bino–trinoommeetodiga (rekursiivselt vs kombinatoorika valemitega) $S_0 = 90.05$ korral.

Ajaperioodide arv	Bino–trinoommeetod (rekursiivne)		Bino–trinoommeetod (kombinatoorika)	
	Hind	Aeg	Hind	Aeg
100	0.1968	0.086	0.0065	0.010
200	0.1766	0.326	0.0075	0.020
400	0.1443	1.124	0.0058	0.042
600	0.0885	2.443	0.0066	0.058
800	0.0937	4.088	0.0065	0.082
1000	0.0770	6.236	0.0066	0.097

Tabel 10: Kahe barjääriga ostuoptsiooni hinna leidmine bino–trinoommeetodiga (rekursiivselt vs kombinatoorika valemitega) $S_0 = 139.95$ korral.

Tuleb märkida, et juhul, kui alusvara alghind asub barjääri lähedal, on tabelites 9 ja 10 toodud arvutustulemused mõneti üllatavad. Teoreetiliselt peaks bino–trinoommeetod sõltumata sellest, kas optsiooni hind leitakse rekursiivselt või kombinatoorika valemeid kasutades, andma sama tulemuse ning erinevus peaks olema vaid meetodi kiiruses. Antud juhul õnnestub aga kombinatoorika valemeid kasutades leida optsiooni hind tunduvalt täpsemalt. Miks see nii on, vajab veel täiendavat uurimist.

Kokkuvõttes näeme, et tavaline trinoommeetod on kõige ajamahukam ning optsiooni hind ostsilleerub bino–trinoommeetodiga ja adaptiivsete võrede meetodiga võrreldes enim. Kõige kiiremini töötab bino–trinoommeetod, mis kasutab kombinatoorika valemeid. Samas märgime, et bino–trinoommeetod töötati välja pärast adaptiivsete võrede meetodit. Paneme tähele, et Ameerika optsiooni ei saa hinnata bino–trinoommeetodiga, mis kasutab kombinatoorika valemeid. Seega ühe barjääriga Ameerika optsiooni hindamiseks on parem kasutada adaptiivsete võrede meetodit.

Viited

[1] E. Apolloni, G. Marcellino, A. Zanette. *The binomial interpolated lattice method for step double barrier options.* International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol. 17 (6), lk 1-19, 2014.

[2] T.-S. Dai, L.-M. Liu, Y.-D. Lyuu. *Linear-Time Option Pricing Algorithms by Combinatorics.* Computers and Mathematics with Applications, Vol. 55 (9), lk 2142-2157, 2008.

[3] T.-S. Dai, Y.-D. Lyuu. *The Bino–Trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing.* The Journal of Derivatives, Vol. 17 (4), lk 7-24, 2010.

[4] S. Figlewski, B. Gao. *The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing.* Journal of Financial Economics, Vol 53 (3), lk 313-351, 1999.

[5] *Hoadley Trading & Investment Tools: Black–Scholes Pricing Analysis.* http://www.hoadley.net/options/optiongraphs.aspx?, 20.04.2016.

[6] *Hoadley Trading & Investment Tools: Trinomial Barrier Option Calculator.* http://www.hoadley.net/options/trinomialbarrier.aspx?, 20.04.2016.

[7] M. Rannaveer. *Barjääriga optsiooni hinna leidmine bino–trinoommeetodi abil.* Bakalaureusetöö, lk 1-32, 2014, Tartu.

[8] P. Ritchken. *On pricing barrier options.* The Journal of Derivatives, Vol 12, lk 19-28, 1995.

[9] P. Wilmott, J. Dewynne, S. Howison. *Option Pricing: Mathematical Models and Computation.* Oxford Financial Press, lk 18-52, lk 384-409, 1993.

Lisa A *Down-and-out* optsiooni hinna leidmine tavalise trinoommeetodiga

```
from math import*
import math
from pylab import*
import pylab
import numpy as np
import os
# andmete salvestamise asukoha määramine
os.chdir('C:/Users/Mailis/Dropbox/Magistritöö/Python/Andmed')
import pickle

S = 100       # alusvara alghind
volat = 0.25  # alusvara volatiilsus
r = 0.1       # riskivaba intressimäär
E = 105       # täitmishind
T = 1         # optsiooni eluaeg (aastates)
theta = 1     # theta = 1 ostuoptsiooni korral,
              # theta = -1 müügioptsiooni korral
L = 90        # alumine barjäär
def payoff(f):               # maksefunktsioon
    if theta == 1:           # ostuoptsioon
        pay_off_func = max(f-E,0)
        return pay_off_func
    elif theta == -1:        # müügioptsioon
        pay_off_func = max(E-f,0)
        return pay_off_func

from time import*
t0 = time()
V0_s=[]    # optsiooni hindade (hetkel t=0) vektor erinevate
           # ajahetkede korral
M_algus=1  # ajahetkede arv
M_kuni=1001
for M in range(M_algus,M_kuni):
```

```
delta_t = T/M                     # ajaperioodi pikkus
u = exp(volat*sqrt(2*delta_t))  # ülesliikumine
d = 1/u                           # allaliikumine
q = 1                             # samale tasemele jäämine
p1 = exp(r*delta_t/2)-exp(-volat*sqrt(delta_t/2))
p2 = exp(volat*sqrt(delta_t/2))-exp(-volat*sqrt(delta_t/2))
p = p1/p2    # tõenäosus, mida kasutame üles- ja allaliikumise
# ning samale tasemele jäämise tõenäosuste leidmiseks
p_u = p**2      # ülesliikumise tõenäosus
p_q = 2*p*(1-p) # samale tasemele jäämise tõenäosus
p_d = (1-p)**2  # allaliikumise tõenäosus
# kontroll: p_u+p_q+p_d
a_hinnad=[]     # alusvara hindade vektor
opt_hinnad=[]   # optsiooni hindade vektor
# arvutame alusvara ja optsiooni hinnad viimasel ajahetkel
for j in range (-M,M+1):
    hind=S*u**j
    if S*u**j>L:
        hind2=payoff(hind)
    else:
        hind2=0
    a_hinnad.append(hind)
    opt_hinnad.append(hind2)
y = range(0,M)
opt2_hinnad=[]
a_hinnad2=[]
# leiame alusvara ja optsiooni hinnad ajahetkedel T-1,...,0
for l in reversed(y):
    for k in range(0,2*l+1):
        a_hind=e**(-r*delta_t)*(p_d*a_hinnad[k]+p_q*
        a_hinnad[k+1]+p_u*a_hinnad[k+2])
        if a_hind>L:
            hind=e**(-r*delta_t)*(p_d*opt_hinnad[k]+p_q*
            opt_hinnad[k+1]+p_u*opt_hinnad[k+2])
        else:
            hind=0
        opt2_hinnad.append(hind)
```

```
            a_hinnad2.append(a_hind)
        a_hinnad=a_hinnad2
        opt_hinnad=opt2_hinnad
        opt2_hinnad=[]
        a_hinnad2=[]
    V0_s.append(opt_hinnad) # optsiooni hinnad ajahetkel t=0
t1=time()
X=range(M_algus,M_kuni) # ajahetkede arv
Y=V0_s                  # optsiooni hinnad ajahetkel t=0
t2=t1-t0                # aeg, mis kulub optsiooni hindade leidmiseks
                        # erinevate ajahetkede korral
# Salvestame andmed
with open('alumtrin.pickle', 'wb') as f:
    pickle.dump([X,Y,t2], f)
# Loeme andmed sisse:
with open('alumtrin.pickle','rb') as f:
    X,Y,t2 = pickle.load(f)

Vtäpne=0.0811 # täpne optsiooni hind
pylab.plot(X, Y,color="blue", label='Ligikaudne optsiooni hind')
pylab.plot([M_algus,M_kuni],[Vtäpne,Vtäpne] ,lw=2,color="red",
label='Teoreetiline optsiooni hind')
pylab.legend(loc='upper right')
pylab.xlabel('Ajahetkede arv (M)',size=20)
pylab.ylabel('Optsiooni hind (V0)',size=20)
xlim(M_algus,M_kuni)
#ylim(9.5,12.5)
savefig("alumine_trinoom.pdf")
```

Lisa B Kahe barjääriga optsiooni hinna leidmine binoompuus tagant ettepoole liikudes

```
import math
from math import*
S0 = 95      # alusvara hind ajaperioodil t=0
volat = 0.25 # alusvara volatiilsus
```

```
r = 0.1      # riskivaba intressimäär
E = 100      # täitmishind
T = 1.0      # optsiooni eluiga
M_ette = 100 # ajahetkede arv
theta = 1    # ostuoptsiooni korral theta=1,
             # müügioptsiooni korral theta=-1
H = 140      # ülemine barjäär
L = 90       # alumine barjäär
from time import*
t0=time()
h = log(H/S0) # ülemise barjääri log-hind
l = log(L/S0) # alumise barjääri log-hind
delta_tau = T/M_ette
kapa = math.ceil((h-l)/(2*volat*sqrt(delta_tau)))
delta_t = ((h-l)/(2*kapa*volat))**2   # ajaperioodi pikkus binoompuus
M1 = math.floor(T/delta_t)   # ajahetkede arv bino-trinoommeetodi puus
M=M1-1                       # ajahetkede arv binoompuus
u = exp(volat*sqrt(delta_t)) # ülesliikumise kordaja binoompuus
d = 1/u                      # allaliikumise kordaja binoompuus
p = (exp(r*delta_t)-d)/(u-d) # ülesliikumise tõenäosus binoompuus
delta_t1 = T-M*delta_t       # esimese ajaperioodi pikkus

def payoff(f):      # maksefunktsioon
    if theta==1:    # ostuoptsioon
        pay_off_func=max(f-E,0)
    elif theta==-1: # müügioptsioon
        pay_off_func = max(E-f,0)
    return pay_off_func

# leiame alusvara hinnad tippudes A, B ja C
muu=(r-volat**2/2)*delta_t1
var=volat**2*delta_t1

if M%2==0:
    for j in range(0,M+1):
        if l+2*j*volat*sqrt(delta_t)>=(muu-volat*sqrt(delta_t) and
        l+2*j*volat*sqrt(delta_t))<muu+volat*sqrt(delta_t):
```

```
            j_tarn = j
    muu1 = l+2*j_tarn*volat*sqrt(delta_t)
    k0b = 2*j_tarn
else:
    for j in range(0,M+1):
        if l+(2*j+1)*volat*sqrt(delta_t)>=muu-volat*sqrt(delta_t) and
        l+(2*j+1)*volat*sqrt(delta_t)< muu+volat*sqrt(delta_t):
            j_tarn = j
    muu1 = l+(2*j_tarn+1)*volat*sqrt(delta_t)
    k0b = 2*j_tarn+1
k0a=k0b+2
k0c=k0b-2

S_A = S0*u**k0a*e**l
S_B = S0*u**k0b*e**l
S_C = S0*u**k0c*e**l
S1=[]
S1.append(S_C)
S1.append(S_B)
S1.append(S_A)

# leiame optsiooni hinnad tippudes A, B ja C
V=[]
for k in range(-1,2):
    S=S1[k+1]
    h1=round(log(H/S)/(volat*sqrt(delta_t)))
    l1=round(log(L/S)/(volat*sqrt(delta_t)))
    Vvana=[]
    for j in range (0,M+1):
        ST=S*u**(M-j)*d**j
        if M-2*j<h1 and M-2*j>l1:
            V_vana=payoff(ST)
        else:
            V_vana=0
        Vvana.append(V_vana)
    y = range(0,M)
    for i in reversed(y):
```

```
        Vuus=[]
        for j in range(0,i+1):
            ST=S*u**(i-j)*d**j
            if i-2*j<h1 and i-2*j>l1:
                V_uus=exp(-r*delta_t)*(p*Vvana[j]+(1-p)*Vvana[j+1])
            else:
                V_uus=0
            Vuus.append(V_uus)
        for j in range(0,i+1):
            Vvana=Vuus
    V=V+Vuus
V_C = V[0]
V_B = V[1]
V_A = V[2]

# leiame trinoompuu tõenäosused ning optsiooni hinna ajahetkel t=0
beeta = muu1-muu
alfa = beeta+2*volat*sqrt(delta_t)
gamma = beeta-2*volat*sqrt(delta_t)
det = (beeta-alfa)*(gamma-beeta)*(gamma-alfa)
det_u = (beeta*gamma+var)*(gamma-beeta)
det_d = (alfa*beeta+var)*(beeta-alfa)
pu = det_u/det
pd = det_d/det
pq = 1-pu-pd
V_0 = e**(-r*delta_t1)*(pu*V_A+pq*V_B+pd*V_C)
print(V_0)
t1=time()
print(t1-t0)
```

Lisa C Kahe barjääriga optsiooni hinna leidmine kombinatoorika valemeid kasutades

```
import math
from math import*
import pickle
```

```
from pylab import*
import numpy as np
import os
print(os.getcwd())
# andmete salvestamise asukoha määramine
os.chdir('C:/Users/Mailis/Dropbox/Magistritöö/Python/Andmed')

S0 = 95      # alusvara hind ajahetkel t=0
volat = 0.25 # alusvara volatiilsus
r = 0.1      # riskivaba intressimäär
E = 100      # täitmishind
T = 1.0      # optsiooni eluiga
theta = 1    # ostuoptsiooni korral theta=1,
             # müügioptsiooni korral theta=-1
H = 140      # ülemine barjäär
L = 90       # alumine barjäär
h = log(H/S0) # ülemise barjääri log-hind
l = log(L/S0) # alumise barjääri log-hind

from time import*
t0=time()
def payoff(f):      # maksefunktsioon
    if theta==1:    # ostuoptsioon
        pay_off_func=max(f-E,0)
    elif theta==-1: # müügioptsioon
        pay_off_func = max(E-f,0)
    return pay_off_func

M_algus=1
M_kuni=1001
V0_s=[]
for m in range(M_algus,M_kuni):
    delta_tau = T/m
    kapa = math.ceil((h-l)/(2*volat*sqrt(delta_tau)))
    delta_t = ((h-l)/(2*kapa*volat))**2 # ajaperioodi pikkus binoompuus
    # ajahetkede arv bino-trinoommeetodi puus
    M1 = math.floor(T/delta_t)
```

```
M=M1-1                        # ajahetkede arv binoompuus
u = exp(volat*sqrt(delta_t)) # ülesliikumise kordaja binoompuus
d = 1/u                       # allaliikumise kordaja binoompuus
p = (exp(r*delta_t)-d)/(u-d) # ülesliikumise tõenäosus binoompuus
delta_t1 = T-M*delta_t       # esimese ajaperioodi pikkus
jB=round((h-l)/(volat*sqrt(delta_t))) # barjääride vaheline kaugus

# leiame alusvara hinnad tippudes A, B ja C
muu=(r-volat**2/2)*delta_t1
var=volat**2*delta_t1
if M%2==0:
    for j in range(0,M+1):
        if l+2*j*volat*sqrt(delta_t)>=(muu-volat*sqrt(delta_t)
        and l+2*j*volat*sqrt(delta_t))<muu+volat*sqrt(delta_t):
            j_tarn = j
    muu1 = l+2*j_tarn*volat*sqrt(delta_t)
    k0b = 2*j_tarn
else:
    for j in range(0,M+1):
        if l+(2*j+1)*volat*sqrt(delta_t)>=muu-volat*sqrt(delta_t)
        and l+(2*j+1)*volat*sqrt(delta_t)< muu+volat*sqrt(delta_t):
            j_tarn = j
    muu1 = l+(2*j_tarn+1)*volat*sqrt(delta_t)
    k0b = 2*j_tarn+1
k0a=k0b+2
k0c=k0b-2

S_B = S0*u**k0b*e**l
S_A = S0*u**k0a*e**l
S_C = S0*u**k0c*e**l
S1=[]
S1.append(S_C)
S1.append(S_B)
S1.append(S_A)

C=[]
D=[]
```

```
P=[]
C0=0
C.append(C0)
D0=u**M
D.append(D0)
P0=M*log(p)
P.append(P0)
for j in range(1,M+1):
    Cj=C[j-1]+log((M-j+1)/j)
    Dj=D[j-1]*d/u
    Pj=P[j-1]+log((1-p)/p)
    C.append(Cj)
    D.append(Dj)
    P.append(Pj)

# leiame optsiooni hinnad tippudes A, B ja C
V=[]
Vsum=[]
Nsum=[]
#hinnad=[]
for k in range(-1,2):
    # tipu kaugus ülemisest barjäärist
    jH=round(log(H/S1[k+1])/(volat*sqrt(delta_t)))
    Vsumma=0
    for j in range (0,M+1):
        Nsumma=0
        if j>round((M-jH)/2) and round(j<(M-jH+jB)/2):
            for i in range(1,int(math.ceil(M/jB)+1)):
                if i%2==0: # paarisarvulise i korral
                    if (j-i*jB/2)>=0 and (j-i*jB/2)<=M:
                        Nsumma=Nsumma+((-1)**(i+1))*
                        e**(C[int(j-i*jB/2)]+P[j])
                    if (j+i*jB/2)>=0 and (j+i*jB/2)<=M:
                        Nsumma=Nsumma+((-1)**(i+1))*
                        e**(C[int(j+i*jB/2)]+P[j])
                else: # paaritu i korral
                    if (j+jH+(i-1)*jB/2)>=0
```

```
                    and (j+jH+(i-1)*jB/2)<=M:
                        Nsumma=Nsumma+((-1)**(i+1))*
                        e**(C[int(j+jH+(i-1)*jB/2)]+P[j])
                    if (j+jH-(i+1)*jB/2)>=0
                    and (j+jH-(i+1)*jB/2)<=M:
                        Nsumma=Nsumma+((-1)**(i+1))*
                        e**(C[int(j+jH-(i+1)*jB/2)]+P[j])
                Vsumma=Vsumma+(e**(C[j]+P[j])-Nsumma)
                *payoff(S1[k+1]*D[j])
        Vk=exp(-r*(T-delta_t1))*Vsumma
        V.append(Vk)
    V_C = V[0]
    V_B = V[1]
    V_A = V[2]

    # leiame trinoompuu tõenäosused ning optsiooni hinna ajahetkel t=0
    beeta = muu1-muu
    alfa = beeta+2*volat*sqrt(delta_t)
    gamma = beeta-2*volat*sqrt(delta_t)
    det = (beeta-alfa)*(gamma-beeta)*(gamma-alfa)
    det_u = (beeta*gamma+var)*(gamma-beeta)
    det_d = (alfa*beeta+var)*(beeta-alfa)
    pu = det_u/det
    pd = det_d/det
    pq = 1-pu-pd
    V_0 = e**(-r*delta_t1)*(pu*V_A+pq*V_B+pd*V_C)
    V0_s.append(V_0)
t1=time()
t2=t1-t0
X=range(M_algus,M_kuni)
Y=V0_s
# Salvestame andmed:
with open('binotrKomb'+'.pickle', 'wb') as f:
    pickle.dump([X,Y,t2], f)
# Loeme andmed sisse:
with open('binotrKomb'+'.pickle','rb') as f:
    X,Y,t2 = pickle.load(f)
```

```
Vtegelik=1.4584
plot(X, Y,color="blue", label='Ligikaudne optsiooni hind')
plot([M_algus,M_kuni],[Vtegelik,Vtegelik] ,lw=2,color="red",
label='Teoreetiline optsiooni hind')
legend(loc='best')
xlabel('Ajahetkede arv (M)',size=20)
ylabel('Optsiooni hind (V0)',size=20)
xlim(M_algus,M_kuni)
ylim(1.38,1.47)
savefig(binotrinoom_kaks.pdf)
```

Lisa D Adaptiivsete võrede meetod

```
from math import*
from scipy import *
from scipy import linalg

S0 = 92      # alusvara alghind (kõige tihedamal võrel)
X0 = log(S0) # log-hind ajahetkel t=0
volat = 0.25 # alusvara volatiilsus
r = 0.1      # riskivaba intressimäär
E = 100      # täitmishind
T = 1.0      # optsiooni eluiga (aastates)
theta = 1    # ostuoptsiooni korral theta=1,
             # theta=-1 muugioptsiooni korral
L = 90       # alumine barjäär
lambda1 = 3  # konstant

from time import*
t0=time()
def payoff(f):                  # maksefunktsioon
    if theta == 1:              # ostuoptsioon
        pay_off_func = max(f-E,0)
        return pay_off_func
    elif theta == -1:           # müügioptsioon
        pay_off_func = max(E-f,0)
```

```
        return pay_off_func

# leiame tihedamate võrede arvu, hinnasammu pikkuse ja ajahetke pikkuse
M0=400 # anname ette ajaperioodide arvu
delta_t0=T/M0
l0=sqrt(lambda1)*volat*sqrt(delta_t0)
x=(log(S0)-log(L))/l0
xtais=int(x)
if xtais>=1:
    l=(log(S0)-log(L))/xtais # hinnaliikumise samm
    N=0                      # tihedamate võrede arv
    delta_t=delta_t0         # ajahetke pikkus
    M=M0
    lambda2=(l/(volat*sqrt(delta_t0)))**2
else:
    smin=10**10
    for N in range(1,11):
        l=(2**N)*(log(S0)-log(L)) # hinnaliikumise samm
        delta_t=(l**2)/(lambda1*volat**2) # ajahetke pikkus
        M=int(T/delta_t)
        if abs(M/M0-1)<=smin:
            smin=abs(M/M0-1)
            sN=N
    N=sN
    l=(2**N)*(log(S0)-log(L)) # hinnaliikumise samm
    # ajahetke pikkus:
    delta_t=T/math.floor((lambda1*(volat**2)/(l**2))*T)
    M=int(T/delta_t)
    lambda2=(l/(volat*sqrt(delta_t)))**2

alpha=r-volat**2/2    # trend
u = exp(l)            # ülesliikumine
d = 1/u               # allaliikumine
q = 1                 # samale tasemele jäämine

# jämedama võre jagunemise tõenäosused
pu=(volat**2*delta_t/(l**2)+alpha**2*(delta_t**2/(l**2))+
```

```
alpha*delta_t/l)/2
pd=(volat**2*delta_t/(l**2)+alpha**2*(delta_t**2/(l**2))-
alpha*delta_t/l)/2
pq=1-pu-pd

pu1=[]
pd1=[]
pq1=[]
# tippude B_2j leidmiseks vajalikud jagunemise tõenäosused
for t1 in range(1,5):
    c=t1/4
    pu_1=(volat**2*delta_t*c/(l**2)+alpha**2*
    ((c*delta_t)**2/(l**2))+alpha*delta_t*c/l)/2
    pd_1=(volat**2*delta_t*c/(l**2)+alpha**2*
    ((c*delta_t)**2/(l**2))-alpha*delta_t*c/l)/2
    pq_1=1-pu_1-pd_1
    pu1.append(pu_1)
    pd1.append(pd_1)
    pq1.append(pq_1)

# tippude B_1j jagunemise tõenäosused
pu2=(volat**2*delta_t/(l**2)+alpha**2*(delta_t**2/(4*l**2))+
alpha*delta_t/(2*l))/2
pd2=(volat**2*delta_t/(l**2)+alpha**2*(delta_t**2/(4*l**2))-
alpha*delta_t/(2*l))/2
pq2=1-pu2-pd2

y=range(1,M+1)
V1vana=[] # optsiooni hinnad põhivõrel
a_hinnad=[]
V1uus=[]  # optsiooni hinnad põhivõrel
Vvana=zeros(shape=(N+1,3)) # optsiooni hinnad tihedamal võrel
Vuus2=zeros(shape=(N,4))   # tippude B_2j hinnad tihedamal võrel
Vuus1=zeros(shape=(N,4))   # tippude B_1j hinnad tihedamal võrel
Vuus0=zeros(shape=(N,4))   # tippude B_0j hinnad tihedamal võrel
for t in reversed(y): # M-st 1-ni
# arvutame põhivõre optsiooni ja alusvara hinnad viimasel ajahetkel
```

```
if t==M:
    X1j=[]
    for j in range(-M,M+1):
        X1=log(L)+(j+1)*l # kui N=1, siis S0=log(L)+l/2
        X1j.append(X1)
        if exp(X1)>L:
            V1_vana=payoff(exp(X1))
        else:
            V1_vana=0
        V1vana.append(V1_vana)
        if X1j[j+M]==log(L):
            # indeks, mille korral alumine barjäär läbib
            # jämedama võre hinnapuu tippe
            jbarjaar=j+M
    # log-hinnad viimasel ajahetkel barjääri ümbruses N=0 korral
    # (põhivõre), N=1 jne (hinnad alt üles):
    for k1 in range(0,N+1):
        for i in range (1,4):
            # alumise barjääri indeks on X1j vektoris M-1
            # (täpselt vektori 0,...,2*M keskpaigast
            # ühe võrra allpool)
            X=X1j[jbarjaar]+(i-1)*l/(2**k1)
            Vvana[k1,i-1]=payoff(exp(X)) #Vvana[k1,i]
else:
    V1alam=[]
    # tsükkel optsiooni hinna leidmiseks põhivõrel,
    # ajahetkedel (M-1)*delta_t,...,1
    for j in range(0,2*t+1):
        V1_uus=exp(-r*delta_t)*(pu*V1vana[j+2]+
        pq*V1vana[j+1]+pd*V1vana[j])
        jbarjaar=t-1 # barjääri hinna indeks vektoris
        if j<=jbarjaar:
            V1_uus=0
        V1alam.append(V1_uus)
    V1uus.append(V1alam)
    if N>0:
        for k1 in range(1,N+1):
```

```
                # iga jämedama võre ajahetk koosneb 4-st tihedama
                # võre ajahetkest
                for t1 in range(1,5):
                    Vuus2[k1-1,t1-1]=exp(-r*(delta_t/4))*(pu1[t1-1]*
                    Vvana[k1-1,2]+pq1[t1-1]*Vvana[k1-1,1]+pd1[t1-1]*
                    Vvana[k1-1,0]) # B_2j hinnad
                    Vuus1[k1-1,t1-1]=exp(-r*(delta_t/4))*
                    (pu2*Vvana[k1,2]+pq2*Vvana[k1,1]+
                    pd2*Vvana[k1,0]) # B_1j hinnad
                    Vuus0[k1-1,t1-1]=0 # B_0j hinnad
                    # võtame uuteks "vanadeks" hindadeks eelmise aja-
                    #  hetke uued hinnad (ajahetkel m*delta_t,
                    # m=1,...,M-1)
                    for i in range(0,3):
                        Vvana[k1,0]=Vuus0[k1-1,3]
                        Vvana[k1,1]=Vuus1[k1-1,3]
                        Vvana[k1,2]=Vuus2[k1-1,3]
            Vvana[0,2]=V1uus[M-1-t][jbarjaar+2]
            Vvana[0,1]=V1uus[M-1-t][jbarjaar+1]
            Vvana[0,0]=0
            V1vana=V1alam
        else:
            V1vana=V1alam
            V0=exp(-r*delta_t)*(pu*V1vana[2]+pq*V1vana[1]+pd*V1vana[0])
# Optsiooni hind ajahetkel t=0
if N>0:
    print(Vuus1[N-1,4-1])
else:
    print(V0)
t1=time()
print(t1-t0)
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Mailis Metsalu,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Barjääriga optsiooni hinna määramine binoom- ja trinoommeetodi modifikatsioonidega", mille juhendaja on Toomas Raus,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 12.05.2016