TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
MATEMAATIKA INSTITUUT

Tauri Viil

Normi säilitavate jätkude ühesus

Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad : prof Eve Oja, füüs-mat kand
dots Märt Põldvere, *PhD*

Tartu 2015

Normi säilitavate jätkude ühesus

Magistritöö

Tauri Viil

Lühikokkuvõte. Magistritöös tõestatakse omnibuss-teoreem, mis annab uusi samaväärseid tingimusi Banachi ruumi kinnise alamruumi totaalseks sileduseks.

Samuti vaadeldakse normeeritud ruumide ranget kumerust ja siledust ning esitatakse detailsed tõestused Taylor–Fogueli teoreemile ja hästituntud teoreemile, mis kirjeldab normeeritud ruumi siledust kerajadade omaduste terminites.

Märksõnad. Normeeritud ruum, Banachi ruum, U-omadus, range kumerus, siledus, totaalne siledus, üksteisesse sisestatud kerade jadad.

Uniqueness of norm preserving extensions

Master's Thesis

Tauri Viil

Abstract. The main objective of this master's thesis is to prove an omnibus theorem giving conditions equivalent to the total smoothness of a closed subspace of a Banach space.

Also, strict convexity and smoothness of normed spaces is considered, and detailed proofs of the Taylor–Foguel theorem and a well-known theorem describing smoothness in terms of properties of nested sequences of balls are given.

Key words. Normed space, Banach space, property U, strict convexity, smoothness, total smoothness, sequences of nested balls.

Sisukord

Sissejuhatus

Olgu Y normeeritud ruumi X kinnine alamruum. Vastavalt Hahn–Banachi teoreemile leidub igal funktsionaalil $g \in Y^*$ normi säilitav jätk $f \in X^*$ ruumile X. See jätk ei ole üldiselt üheselt määratud. Öeldakse (vt [Ph]), et alamruumil Y on *U-omadus* (sõnast "uniqueness") ruumis X, kui igal funktsionaalil $g \in Y^*$ leidub parajasti üks normi säilitav jätk $f \in X^*$. Sel puhul öeldakse ka, et Y on *Hahn–Banachi mõttes sile* ("Hahn–Banach smooth") ruumis X (vt nt [S], [SS] ja [L]).

Liao ja Wong tõid oma 2010. aasta artiklis [LW] sisse totaalselt sileda alamruumi mõiste.

Definitsioon (vt [LW])**.** Öeldakse, et alamruum Y on *totaalselt sile* normeeritud ruumis X, kui alamruumi Y igal kinnisel alamruumil Z on U-omadus ruumis X.

Artiklis [LW] pannakse tähele, et alamruumi totaalset siledust saab iseloomustada tema kaasruumi range kumeruse abil.

Lause 0.1 (vt [LW], lk 1630)**.** *Olgu Y normeeritud ruumi X kinnine alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *alamruum Y on totaalselt sile ruumis X;*

(ii) *alamruumil Y on U-omadus ruumis X ja kaasruum Y^* on rangelt kumer.*

Artikli [LW] põhitulemuseks on järgnev teoreem, mis iseloomustab alamruumi totaalset siledust üksteisesse sisestatud kerade terminites.

Teoreem 0.2 (vt [LW, teoreem 3])**.** *Olgu X reaalne Banachi ruum ja Y tema kinnine alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Y on totaalselt sile ruumis X;*

(ii) *mis tahes lahtiste kerade $B_n = B(y_n, r_n) \subset X$, kus $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, korral, mis rahuldavad tingimusi*

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \qquad \textit{ja} \qquad r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

on ühend $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ lahtine poolruum ruumis X või võrdne kogu ruumiga X.

Selle teoreemi prototüüp on järgnev Vlassovile kuuluv hästituntud teoreem (vt [Вл, lause 3.5]).

Teoreem 0.3 (Vlassovi teoreem). *Olgu X reaalne Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *X^* on rangelt kumer;*

(ii) *mis tahes lahtiste kerade $B_n = B(x_n, r_n) \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, korral, mis rahuldavad tingimusi*

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \qquad ja \qquad r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

on ühend $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ lahtine poolruum ruumis X või võrdne kogu ruumiga X.

Teoreem 0.2 on Vlassovi teoreemi üldistus: Vlassovi teoreem on teoreemi 0.2 erijuht, kus $Y = X$.

Teoreemi 0.2 tõestus artiklis [LW] tugineb oluliselt Vlassovi teoreemile 0.3. Käesoleva magistritöö põhieesmärk on anda teoreemile 0.2 niisugune tõestus, mis Vlassovi teoreemi ei kasuta ning sobib nii reaalsete kui ka kompleksete ruumide jaoks. (Märgime, et nii Vlassovi teoreemi 0.3 kui ka teoreemi 0.2 kompleksne versioon järelduvad lihtsasti ka vastavast reaalsest versioonist, kui kasutada seost pideva komplekslineaarse funktsionaali ja tema reaalosa vahel (vt teoreemi 1.4).) Teine eesmärk on tuletada erinevaid tarvilikke ja piisavaid tingimusi selleks, et Y oleks totaalselt sile. Kolmas eesmärk on uurida ruumi (range kumerusega duaalse mõiste) sileduse kirjeldust kerajadade kaudu ning tema vahekorda alamruumi U-omadusega nii reaalsel kui ka komplekssel juhul.

Magistritöö koosneb seitsmest paragrahvist.

Esimeses paragrahvis kirjeldame hüperalamruume ning lineaarsete funktsionaalide lineaarset sõltuvust nende tuumade kaudu. Samuti selgitame pideva lineaarse funktsionaali vahekorda tema reaalosaga.

Teises paragrahvis esitame kumerate hulkade omadusi ning sõnastame Hahn–Banachi eraldamisteoreemi.

Kolmandas paragrahvis tutvume poolruumidega. Muuhulgas anname tarvilikke (ja piisavaid) tingimusi selleks, et teatavate kasvavalt sisestatud kerajada kerade ühend sisalduks etteantud poolruumis või oleks sellega võrdne.

Neljas paragrahv käsitleb ruumide ranget kumerust ning U-omadust. Nende mõistete vahelise seose paneb paika Taylor–Fogueli teoreem, mille me esitame selles paragrahvis koos tõestusega.

Viiendas paragrahvis sõnastame ja tõestame magistritöö põhiteoreemi, milles anname alamruumi totaalsele siledusele seitse samaväärset tingimust.

Kuuendas paragrahvis käsitleme normeeritud ruumi siledust. Muuhulgas esitame siledate ruumide hästituntud kirjelduse kerajadade omaduste kaudu, mis on hästi võrreldav Vlassovi teoreemiga.

Seitsmendas paragrahvis uurime ruumi sileduse seost U-omaduse nõrga variandiga ning anname sileduse kirjeldusele kerajadade kaudu uue, geomeetrilise tõestuse.

Kõikjal magistritöös vaatleme me normeeritud ruume (ja vektorruume) üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K}$ on kas reaalarvude korpus $\mathbb{R}$ või kompleksarvude korpus $\mathbb{C}$.

Töös on kasutatud järgmisi tähistusi.

Kui X on vektorruum, siis elemendi $x \in X$ lineaarset katet ja reaallineaarset katet tähistame vastavalt sümbolitega $\langle x \rangle$ ja $\langle x \rangle_{\mathbb{R}}$, s.t

$$\langle x \rangle := \big\{ \alpha x\colon\ \alpha \in \mathbb{K} \big\} \quad \text{ja} \quad \langle x \rangle_{\mathbb{R}} := \big\{ \alpha x\colon\ \alpha \in \mathbb{R} \big\}.$$

Sümbol $\ker f$ tähistab (lineaarse) funktsionaali $f\colon X \to \mathbb{K}$ tuuma, s.t

$$\ker f := \big\{ x \in X\colon\ f(x) = 0 \big\}$$

ning sümbol $f|_Y$ tema ahendit ruumi X alamruumile Y.

Normeeritud ruumi X *kaasruumiks* nimetatakse pidevate lineaarsete funktsionaalide $f : X \to \mathbb{K}$ Banachi ruumi, mida tähistatakse sümboliga X^*. Lahtist ja kinnist kera keskpunktiga $a \in X$ ja raadiusega $r > 0$ tähistame vastavalt sümbolitega $B(a, r)$ ja $\overline{B}(a, r)$, s.t

$$B(a, r) := \big\{ x \in X\colon\ \|x - a\| < r \big\} \quad \text{ja} \quad \overline{B}(a, r) := \big\{ x \in X\colon\ \|x - a\| \leqslant r \big\},$$

ning ruumi X ühiksfääri ning lahtist ja kinnist ühikkera vastavalt sümbolitega S_X ning B_X° ja B_X, s.t

$$\begin{aligned} S_X &:= \big\{ x \in X\colon\ \|x\| = 1 \big\}, \\ B_X^\circ &:= B(0, 1) = \big\{ x \in X\colon\ \|x\| < 1 \big\}, \\ B_X &:= \overline{B}(0, 1) = \big\{ x \in X\colon\ \|x\| \leqslant 1 \big\}. \end{aligned}$$

Sümbolid $\overline{A}$, ∂A ja $\operatorname{conv} A$ tähistavad vastavalt hulga A sulundit, tema raja ja tema kumerat katet.

§ 1. Lineaarsed funktsionaalid

Selles paragrahvis toome sisse hüperalamruumi mõiste ja näitame, et kinnised hüperalamruumid normeeritud ruumis on parajasti pidevate lineaarsete funktsionaalide tuumad, tõestame piisava tingimuse kahe funktsionaali lineaarseks sõltuvuseks nende funktsionaalide tuumade sisalduvuse kaudu ning selgitame (pideva) lineaarse funktsionaali ja tema reaalosa vahekorda.

Definitsioon. Vektorruumi X pärisalamruumi Y nimetatakse *hüperalamruumiks*, kui leidub $z \in X$ nii, et

$$X = Y \oplus \langle z \rangle, \tag{1.1}$$

s.t iga $x \in X$ esitub ühesel viisil kujul

$$x = y + \alpha z, \quad \text{kus } y \in Y \text{ ja } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Järgnevalt näitame, et (kinnised) hüperalamruumid on parajasti nullist erinevate (pidevate) lineaarsete funktsionaalide tuumad. Kõigepealt tõestame

Lause 1.1. *Olgu X vektorruum, olgu $f\colon X \to \mathbb{K}$ lineaarne funktsionaal ning olgu $z \in X$ selline, et $f(z) \neq 0$. Siis*

$$X = \ker f \oplus \langle z \rangle;$$

seejuures iga $x \in X$ korral

$$x = \left(x - \frac{f(x)}{f(z)}\, z \right) + \frac{f(x)}{f(z)}\, z, \quad \textit{kusjuures } x - \frac{f(x)}{f(z)}\, z \in \ker f. \tag{1.2}$$

TÕESTUS. Kuna (1.2) on ilmne, siis, eeldades, et $x = y + \alpha z$, kus $y \in \ker f$ ja $\alpha \in \mathbb{K}$, jääb lause tõestuseks näidata, et

$$y = x - \frac{f(x)}{f(z)}\, z \quad \text{ja} \quad \alpha = \frac{f(x)}{f(z)}.$$

Selleks märgime, et

$$f(x) = f(y) + f(\alpha z) = f(\alpha z) = \alpha f(z),$$

millest $\alpha = \dfrac{f(x)}{f(z)}$ ning seega ka $y = x - \alpha z = x - \dfrac{f(x)}{f(z)}\, z$, nagu soovitud. $\square$

Järeldus 1.2. (a) *Olgu Y vektorruumi X alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Y on hüperalamruum;*

(ii) *$Y = \ker f$ mingi nullist erineva lineaarse funktsionaali $f\colon X \to \mathbb{K}$ korral.*

(b) *Olgu Y normeeritud ruumi X alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Y on kinnine hüperalamruum;*

(ii) *$Y = \ker f$ mingi $f \in X^* \setminus \{0\}$ korral.*

Tõestus. (a). (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu Y hüperalamruum, s.t Y on alamruum, kusjuures leidub element $z \in X \setminus \{0\}$ nii, et kehtib (1.1). Defineerime funktsionaali $f\colon X \to \mathbb{K}$,

$$f(x) = \alpha, \quad x = y + \alpha z \in X,\ y \in Y,\ \alpha \in \mathbb{K}.$$

Vahetult on kontrollitav, et f on lineaarne ja $f \neq 0$ (sest $f(z) = 1$) ning $\ker f = Y$.

(ii)$\Rightarrow$(i) järeldub vahetult lausest 1.1

(b). (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu Y kinnine hüperalamruum, s.t Y on kinnine alamruum, kusjuures leidub element $z \in X \setminus \{0\}$ nii, et kehtib (1.1). Kuna $z \notin Y$, siis Hahn–Banachi teoreemi põhjal (punkti ja kinnise alamruumi eraldamisest) leidub $f \in X^*$ nii, et $f|_Y = 0$ ja $f(z) = 1$. Aga nüüd on vahetult kontrollitav, et $\ker f = Y$.

(ii)$\Rightarrow$(i) järeldub kohe lausest 1.1, sest pideva lineaarse funktsionaali tuum on kinnine. $\square$

Järgnev lemma annab piisavaid tingimusi kahe lineaarse funktsionaali lineaarseks sõltuvuseks.

Lemma 1.3. *Olgu X vektorruum ning olgu $f, g\colon X \to \mathbb{K}$ lineaarsed funktsionaalid.*

(a) *Kui $\ker g \subset \ker f$, siis leidub $c \in \mathbb{K}$ nii, et $f = cg$.*

(b) *Kui mingi $\alpha \in \mathbb{R}$ korral*

$$\ker g \subset \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) \geqslant \alpha\big\}, \tag{1.3}$$

siis leidub $c \in \mathbb{K}$ nii, et $f = cg$.

Märkus 1.1. Kasutades matemaatilist induktsiooni, saab tõestada väitest (a) üldisema väite (vt nt [M, lk 78]): *kui X on vektorruum ja $f, f_1, \dots, f_n\colon X \to \mathbb{K}$ on lineaarsed funktsionaalid, siis funktsionaal f esitub funktsionaalide $f_1, \dots, f_n$ lineaarse kombinatsioonina parajasti siis, kui $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \ker f_j \subset \ker f$.*

Lemma 1.3 tõestus. (a). Olgu $\ker g \subset \ker f$. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $f \neq 0$ (sest kui $f = 0$, siis $f = 0g$), s.t mingi $x \in X$ korral $f(x) \neq 0$. Nüüd ka $g(x) \neq 0$ (sest vastasel korral $x \in \ker g \subset \ker f$; niisiis $f(x) = 0$ – vastuolu). Mis tahes $z \in X$ korral, arvestades, et

$$z = \left(z - \frac{g(z)}{g(x)}\,x\right) + \frac{g(z)}{g(x)}\,x = y + \frac{g(z)}{g(x)}\,x,$$

kus $y := z - \dfrac{g(z)}{g(x)}\,x \in \ker g \subset \ker f$,

$$f(z) = f(y) + f\!\left(\frac{g(z)}{g(x)}\,x\right) = f\!\left(\frac{g(z)}{g(x)}\,x\right) = \frac{g(z)}{g(x)}\,f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\,g(z);$$

seega $f = cg$, kus $c = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(b). Leidugu $\alpha \in \mathbb{R}$ nii, et kehtib (1.3). Väite (a) põhjal piisab näidata, et $\ker g \subset \ker f$. Oletame vastuväiteliselt, et mingi $u \in \ker g$ korral $f(u) \neq 0$. Valides $\beta \in \mathbb{R}$ nii, et $\beta < \alpha$, paneme tähele, et $v := \beta\,\dfrac{\overline{f(u)}}{|f(u)|^2}\,u \in \ker g$, kuid

$$\operatorname{Re} f(v) = \operatorname{Re}\bigl(f(v)\bigr) = \operatorname{Re}\!\left(\beta\,\frac{\overline{f(u)}}{|f(u)|^2}\,f(u)\right) = \operatorname{Re}\beta = \beta < \alpha;$$

niisiis $v \in \bigl\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) < \alpha\bigr\}$; seega $v \in \ker g \setminus \bigl\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) \geqslant \alpha\bigr\}$ – vastuolu. $\square$

Olgu X kompleksne vektorruum (s.t vektorruum üle korpuse $\mathbb{C}$). Siis X on loomulikul viisil tõlgendatav reaalse vektorruumina, defineerides seal liitmise ja reaalarvuga korrutamise nagu kompleksse ruumi X puhul – kompleksarvude korpus sisaldab reaalarvude korpuse, seega on elemendi korrutamine reaalarvuga ruumis X defineeritud. Ruumi X, tõlgendatuna sel viisil reaalse ruumina, nimetatakse (kompleksse) ruumiga X *assotsieeruvaks reaalseks (vektor)ruumiks* ja tähistatakse sümboliga $X_{\mathbb{R}}$. Rõhutame, et kui $X \neq \{0\}$, siis ruumid X ja $X_{\mathbb{R}}$ on algebralises mõttes erinevad: näiteks kui $x \neq 0$, siis elemendid x ja ja ix on ruumis X lineaarselt sõltuvad, ruumis $X_{\mathbb{R}}$ aga lineaarselt sõltumatud.

Öeldakse, et funktsionaal $u\colon X \to \mathbb{R}$ on *reaallineaarne,* kui mis tahes $x, y \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral

1° $u(x + y) = u(x) + u(y)$,

2° $u(\alpha x) = \alpha u(x)$.

Teisisõnu, reaallineaarseteks funktsionaalideks kompleksel vektorruumil X nimetatakse lineaarseid funktsionaale assotsieeruval reaalsel ruumil $X_{\mathbb{R}}$.

Lineaarseid funktsionaale $X \to \mathbb{C}$ nimetame edaspidi ka *komplekslineaarseteks* funktsionaalideks.

Komplekslineaarse funktsionaali $f\colon X \to \mathbb{C}$ reaal- ja imaginaarosa $\operatorname{Re} f$ ja $\operatorname{Im} f$ defineeritakse loomulikul viisil:

$$(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}\big(f(x)\big) \quad \text{ja} \quad (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}\big(f(x)\big), \quad x \in X.$$

Edasises jätame avaldistes $\operatorname{Re} f(x)$ ja $\operatorname{Im} f(x)$ täiendavad sulud panemata, sest sõltumata nende asukohast on avaldise tähendus sama.

Kui X on normeeritud ruum, siis ka $X_{\mathbb{R}}$ on normeeritud ruum sama normi suhtes. (Juhime tähelepanu sellele, et meetriliste ruumidena on X ja $X_{\mathbb{R}}$ identsed, kuid normeeritud ruumidena juhul $X \neq \{0\}$ mitte, sest nad on vektorruumidena erinevad.)

Järgnev lause selgitab komplekslineaarse funktsionaali ja tema reaalosa vahekorda.

Teoreem 1.4 (vt nt [M, lk 72])**.** *Olgu X kompleksne vektorruum.*

(a) *Olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ komplekslineaarne funktsionaal. Siis* $\operatorname{Re} f\colon X \to \mathbb{R}$ *on reaallineaarne. Seejuures*

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(b) *Olgu $u\colon X \to \mathbb{R}$ reaallineaarne funktsionaal. Siis leidub parajasti üks komplekslineaarne funktsionaal $f\colon X \to \mathbb{C}$ nii, et $u = \operatorname{Re} f$. Seejuures*

$$f(x) = u(x) - iu(ix) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(c) *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ komplekslineaarne funktsionaal. Siis $f \in X^*$ parajasti siis, kui $\operatorname{Re} f \in X_{\mathbb{R}}^*$. Seejuures $\|f\| = \|\operatorname{Re} f\|$.*

Edasises, kui X on reaalne vektorruum, mõistame temaga assotsieeruva reaalse ruumi $X_{\mathbb{R}}$ all ruumi X ennast.

§ 2. Kumerad hulgad ja kerad

Selles paragrahvis toome sisse hulga kumeruse mõiste ja tõestame mõned kumerate hulkade ja kerade omadused. Samuti sõnastame kumeratele hulkadele rakendatava Hahn–Banachi eraldamisteoreemi.

Definitsioon. Olgu X vektorruum ning olgu $B \subset X$. Öeldakse, et hulk B on *kumer,* kui mis tahes $x, y \in B$ ja $\lambda \in [0, 1]$ korral

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in B.$$

Hulga B kumerusel on lihtne geomeetriline tõlgendus: koos mis tahes kahe punktiga $x, y \in B$ sisaldab hulk B ka neid punkte ühendava sirglõigu

$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y \colon\ \lambda \in [0, 1]\}.$$

Joonisel 1 on vasakul pool kumer hulk – see hulk sisaldab mis tahes tema kahte punkti ühendava sirglõigu. Paremal pool on näide mittekumerast hulgast – selle hulga teatavate punktide vahelised sirglõigud ei sisaldu selles hulgas.

Joonis 1: Näide kumerast ja mittekumerast hulgast

Lause 2.1. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $B_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, kumerad hulgad, kusjuures $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ Siis ka ühend $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ on kumer hulk.*

Tõestus. Olgu $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n =: B$ ning olgu $\lambda \in [0, 1]$. Siis mingite $n, m \in \mathbb{N}$ korral $x \in B_n$ ja $y \in B_m$. Tähistame $l := \max\{n, m\}$; siis $x, y \in B_l$. Hulga B_l kumeruse tõttu $\lambda x + (1 - \lambda)y \in B_l \subset B$. Järelikult on B kumer hulk. $\square$

Teoreem 2.2 (Hahn–Banachi eraldamisteoreem (vt [W], lk 103)). *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $U, V \subset X$ kumerad hulgad, kusjuures U on lahtine ja $U \cap V = \emptyset$. Siis leidub $f \in X^*$ nii, et*

$$\operatorname{Re} f(u) < \operatorname{Re} f(v) \quad \textit{kõikide } u \in U, v \in V \textit{ korral.}$$

Järgnev abitulemus on esitatud juba Banachi doktoridissertatsioonis [B1, lk 141, teoreem 10].

Lemma 2.3. *Olgu $X \neq \{0\}$ normeeritud ruum ning olgu $a_1, a_2 \in X$ ja $r_1, r_2 > 0$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $B(a_1, r_1) \subset B(a_2, r_2)$;

(ii) $\|a_2 - a_1\| \leqslant r_2 - r_1$.

TÕESTUS. (i)⇒(ii). Olgu $B(a_1, r_1) \subset B(a_2, r_2)$. Kui $a_1 = a_2$, siis ilmselt $r_2 \geqslant r_1$, seega $\|a_2 - a_1\| = 0 \leqslant r_2 - r_1$.

Olgu $a_1 \neq a_2$. Kui $0 < t < r_1$, siis $a_1 + t\,\dfrac{a_1 - a_2}{\|a_1 - a_2\|} \in B(a_1, r_1) \subset B(a_2, r_2)$, seega

$$\left\| a_1 + t\frac{a_1 - a_2}{\|a_1 - a_2\|} - a_2 \right\| < r_2$$

ehk

$$\left\| \left(1 + \frac{t}{\|a_1 - a_2\|}\right)(a_1 - a_2) \right\| < r_2$$

ehk

$$\|a_1 - a_2\| + t < r_2.$$

Protsessis $t \to r_1-$ järeldub siit, et $\|a_1 - a_2\| + r_1 \leqslant r_2$ ehk $\|a_1 - a_2\| \leqslant r_2 - r_1$.

(ii)⇒(i). Olgu $\|a_2 - a_1\| \leqslant r_2 - r_1$. Mis tahes $x \in B(a_1, r_1)$ korral $\|x - a_1\| < r_1$, seega

$$\|x - a_2\| = \|a_2 - a_1 + a_1 - x\| \leqslant \|a_2 - a_1\| + \|a_1 - x\| < (r_2 - r_1) + r_1 = r_2,$$

järelikult $x \in B(a_2, r_2)$. Niisiis $B(a_1, r_1) \subset B(a_2, r_2)$. □

Pideva linaarse funktsionaali väärtusi etteantud keral võimaldab hinnata järgmine folkloorne tulemus, mis osutub kasulikuks juba järgmises osas poolruumide uurimisel.

Lemma 2.4. *Olgu X normeeritud ruum, olgu $y \in X$, olgu $f \in X^*$ ja olgu $r > 0$. Siis*

$$\sup\bigl\{\operatorname{Re} f(x)\colon\ x \in B(y, r)\bigr\} = \operatorname{Re} f(y) + r\,\|f\|$$

ja

$$\inf\big\{\operatorname{Re} f(x)\colon\ x \in B(y,r)\big\} = \operatorname{Re} f(y) - r\,\|f\|\,.$$

TÕESTUS. Teame, et $B(y,r) = y + B(0,r) = y + rB(0,1)$. Seega

$$\begin{aligned}
\sup\big\{\operatorname{Re} f(x)\colon\ x \in B(y,r)\big\} &= \sup\big\{\operatorname{Re} f(x)\colon\ x \in y + rB(0,1)\big\}\\
&= \sup\big\{\operatorname{Re} f(y+rz)\colon\ z \in B(0,1)\big\}\\
&= \sup\big\{\operatorname{Re} f(y) + r\operatorname{Re} f(z)\colon\ z \in B(0,1)\big\}\\
&= \operatorname{Re} f(y) + r\sup\big\{\operatorname{Re} f(z)\colon\ z \in B(0,1)\big\}\\
&= \operatorname{Re} f(y) + r\,\|f\|\,.
\end{aligned}$$

Nüüd

$$\begin{aligned}
\inf\big\{\operatorname{Re} f(x)\colon\ x \in B(y,r)\big\} &= -\sup\big\{-\operatorname{Re} f(x)\colon\ x \in B(y,r)\big\}\\
&= -\Big(-\operatorname{Re} f(y) + r\,\|-\operatorname{Re} f\|\Big)\\
&= \operatorname{Re} f(y) - r\,\|f\|\,.
\end{aligned}$$

□

Järgnev lause annab tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et üksteisesse sisestatud kerade ühend ei oleks võrdne kogu ruumiga, ning näitab, kuidas mõjutab sellist kerajada iga üksiku kera raadiuse suurendamine ühe ja sama konstandi võrra.

Lause 2.5. *Olgu $B_n := B(y_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, lahtised kerad normeeritud ruumis X, mis rahuldavad tingimusi*

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \qquad ja \qquad r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$

ning olgu $\varepsilon > 0$. Tähistame $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B(y_n, r_n)$.

(a) *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$B \neq X$;*

(ii) *leiduvad $\delta \geqslant 0$ ja $N \in \mathbb{N}$ nii, et $\|y_n\| \geqslant r_n - \delta$ iga $n \geqslant N$ korral.*

(b) $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(y_n, r_n + \varepsilon) = \big\{x \in X\colon\ d(x,B) < \varepsilon\big\}$.

TÕESTUS. (a). (i)⇒(ii). Olgu $B \neq X$, s.t leidub $x \in X \setminus B$. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\|x - y_n\| \geqslant r_n$, seega

$$\|y_n\| = \big\|(y_n - x) + x\big\| \geqslant \|y_n - x\| - \|x\| \geqslant r_n - \|x\|.$$

(ii)⇒(i). Kehtigu (ii). Kuna $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, siis mingi $m \in \mathbb{N}$ korral $r_m \geqslant 2\delta$. Fikseerides vabalt $n \geqslant \max\{N, m\}$, piisab implikatsiooni tõestuseks näidata, et $-y_m \notin B_n$, s.t $\|y_n + y_m\| \geqslant r_n$. Arvestades, et sisalduvuse $B_m \subset B_n$ tõttu lemma 2.3 põhjal $\|y_n - y_m\| \leqslant r_n - r_m$,

$$\begin{aligned}\|y_n + y_m\| &= \big\|2y_n - (y_n - y_m)\big\| \geqslant 2\|y_n\| - \|y_n - y_m\| \\ &\geqslant 2r_n - 2\delta - (r_n - r_m) = r_n + r_m - 2\delta \geqslant r_n.\end{aligned}$$

(b). Olgu $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(y_n, r_n+\varepsilon)$, s.t mingi $n \in \mathbb{N}$ korral $\|x-y_n\| < r_n+\varepsilon$. Kui $x = y_n$, siis $d(x, B) = 0$, seega jääb vaadelda juhtu, kus $x \neq y_n$. Kuna $\theta := \dfrac{\|x - y_n\|}{r_n + \varepsilon} < 1$, siis ilmselt

$$z := y_n + \theta r_n \,\frac{x - y_n}{\|x - y_n\|} \in B(y_n, r_n) \subset B;$$

seejuures, arvestades, et

$$x = y_n + \theta(r_n + \varepsilon)\,\frac{x - y_n}{\|x - y_n\|},$$

$\|x - z\| = \theta\varepsilon < \varepsilon$; niisiis $d(x, B) < \varepsilon$.

Teiselt poolt, olgu $d(x, B) < \varepsilon$. Siis $\|x - z\| < \varepsilon$ mingi $z \in B$ korral. Olgu $m \in \mathbb{N}$ selline, et $z \in B(y_m, r_m)$; siis

$$\|x - y_m\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y_m\| < r_m + \varepsilon;$$

seega $x \in B(y_m, r_m + \varepsilon) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(y_n, r_n + \varepsilon)$. □

Järgevalt esitame ühe jällegi hästi tuntud kumerate hulkade omaduse.

Lause 2.6. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $A \subset X$ lahtine kumer hulk. Siis $(\overline{A})^\circ = A$.*

TÕESTUS. Ühelt poolt (sisemuse monotoonsuse tõttu) $A = A^\circ \subset (\overline{A})^\circ$.

Teiselt poolt, olgu $x \in (\overline{A})^\circ$. Siis mingi $r > 0$ korral $B(x, r) \subset \overline{A}$. Kuna $x \in \overline{A}$, siis leidub $y \in B(x, r) \cap A$. Ühisosa $B(x, r) \cap A$ lahtisuse tõttu leidub $\rho > 0$ nii, et $B(y, \rho) \subset B(x, r) \cap A$. Tähistame $z := x + (x - y) = 2x - y$; siis (lemma 2.3 põhjal) $B(z, \rho) \subset B(x, r)$, sest (jällegi lemma 2.3 põhjal)

$$\|x - z\| = \|y - x\| = \|x - y\| \leqslant r - \rho.$$

Kuna $z \in B(z, \rho) \subset B(x, r) \subset \overline{A}$, siis leidub $u \in B(z, \rho) \cap A$. Nüüd $v := x + (x - u) = 2x - u \in B(y, \rho)$, sest

$$\|v - y\| = \|2x - u - y\| = \|2x - y - u\| = \|z - u\| < \rho;$$

seega, arvestades, et $u \in A$ ja $v \in B(y, \rho) \subset A$, hulga A kumeruse tõttu

$$x = \frac{1}{2}\, u + \frac{1}{2}\,(2x - u) = \frac{1}{2}\, u + \frac{1}{2}\, v \in A;$$

niisiis $(\overline{A})^\circ \subset A$. $\square$

§ 3. Poolruumid

Selles paragrahvis defineerime poolruumi mõiste ning uurime poolruumide omadusi. Muuhulgas anname tarvilikke ja piisavaid tingimusi selleks, et teatavate kasvavalt sisestatud kerade ühend sisalduks etteantud poolruumis või oleks sellega võrdne.

Definitsioon. *Poolruumiks* normeeritud ruumis X nimetatakse hulka, mis esitub kujul $\big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) < \alpha\big\}$ või $\big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) \leqslant \alpha\big\}$, kus $f \in X^* \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Siin esimest tüüpi poolruume nimetatakse *lahtisteks poolruumideks* ja teist tüüpi poolruume *kinnisteks poolruumideks.*

Märgime, et lahtised ja kinnised poolruumid on esitatavad ka vastavalt kujul

$$\big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) > \alpha\big\} \quad \text{ja} \quad \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) \geqslant \alpha\big\} \tag{3.1}$$

ning, teiselt poolt, hulgad kujul (3.1) on vastavalt lahtised ja kinnised poolruumid, sest

$$\big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) > \alpha\big\} = \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re}(-f(x)) < -\alpha\big\}$$

ja

$$\big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) \geqslant \alpha\big\} = \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re}(-f(x)) \leqslant -\alpha\big\}.$$

Lause 3.1. *Lahtine poolruum on lahtine hulk ja kinnine poolruum on kinnine hulk. Seejuures $f \in X^* \setminus \{0\}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral*

$$\partial\big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) < \alpha\big\} = \partial\big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) \leqslant \alpha\big\} = \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) = \alpha\big\};$$

niisiis

$$\overline{\big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) < \alpha\big\}} = \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) \leqslant \alpha\big\}.$$

Tõestus. Olgu $x_n \in \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) \leqslant \alpha\big\}, n \in \mathbb{N}$, sellised, et $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ mingi $x \in X$ korral. Kinnise poolruumi kinnisuseks piisab näidata, et $\operatorname{Re} f(x) \leqslant \alpha$. Kuna f on pidev, siis ka $\operatorname{Re} f$ on pidev. Seega $\operatorname{Re} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re} f(x_n) \leqslant \alpha$.

Lahtise poolruumi lahtisus järeldub asjaolust, et lahtise poolruumi täiend on kinnine poolruum, seega kinnine.

Olgu nüüd $x \in X$ selline, et $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$, ning olgu $\delta > 0$. Lause tõestuseks jääb näidata, et $B(x,\delta) \cap \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) < \alpha\big\} \neq \emptyset$ ja $B(x,\delta) \cap \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) > \alpha\big\} \neq \emptyset$ ehk, teisisõnu, $\inf\limits_{z\in B(x,\delta)} \operatorname{Re} f(z) < \alpha$ ja $\sup\limits_{z\in B(x,\delta)} \operatorname{Re} f(z) > \alpha$. Veendume selles: lemma 2.4

põhjal
$$\inf_{z\in B(x,\delta)} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x) - \delta \|f\| = \alpha - \delta \|f\| < \alpha$$
ja
$$\sup_{z\in B(x,\delta)} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x) + \delta \|f\| = \alpha + \delta \|f\| > \alpha.$$
$\square$

Lause 3.2. *Olgu X normeeritud ruum, olgu $f \in X^*\setminus\{0\}$, olgu $\alpha \in \mathbb{R}$ ning olgu $y \in X$. Siis*
$$y + \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) < \alpha\big\} = \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(y) + \alpha\big\}.$$

TÕESTUS. Paneme tähele, et
$$\begin{aligned} y + \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) < \alpha\big\} &= \big\{y + x\colon\ x \in X, \operatorname{Re} f(x) < \alpha\big\} \\ &= \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(y) + \alpha\big\}. \end{aligned}$$
$\square$

Lemma 3.3. *Olgu X normeeritud ruum, olgu $B \subset X$ mittetühi lahtine hulk ning olgu $f \in X^* \setminus \{0\}$. Siis*
$$\operatorname{Re} f(x) < \sup_{z\in B} \operatorname{Re} f(z) \quad \textit{iga } x \in B \textit{ korral.}$$
Muuhulgas, kui $\alpha := \sup\limits_{z\in B} \operatorname{Re} f(z) < \infty$, siis $B \subset \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) < \alpha\big\}$.

TÕESTUS. Olgu $x \in B$. Kuna B on lahtine, siis leidub $\delta > 0$ nii, et $B(x,\delta) \subset B$. Aga nüüd lemma 2.4 põhjal
$$\operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(x) + \delta \|f\| = \sup\big\{\operatorname{Re} f(z)\colon\ z \in B(x,\delta)\big\} \leqslant \sup_{z\in B} \operatorname{Re} f(z).$$
$\square$

Lemma 3.4. *Olgu X normeeritud ruum, olgu $B_n := B(y_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, lahtised kerad ruumis X, mis rahuldavad tingimusi*
$$B_1 \subset B_2 \subset \dots \quad \textit{ja} \quad r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty,$$
olgu $f \in X^*\setminus\{0\}$ ning olgu $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Tähistame
$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B(y_n, r_n) \quad \textit{ja} \quad A := \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) < \alpha\big\}.$$

(a) *Olgu $B \subset A$. Siis*

(a1) $\operatorname{Re} f\left(\dfrac{y_1 - y_n}{r_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|$;

(a2) *$B = A$ parajasti siis, kui $\partial A = \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) = \alpha\big\} \subset \overline{B}$.*

(b) $A_\varepsilon := \big\{x \in X\colon\ d(x, A) < \varepsilon\big\} = \big\{x \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) < \alpha + \varepsilon\,\|f\|\big\}$.

TÕESTUS. (a1). Lemma 2.4 põhjal iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\operatorname{Re} f(y_n) + r_n\,\|f\| = \sup_{x\in B_n} \operatorname{Re} f(x) \leqslant \sup_{x\in B} \operatorname{Re} f(x) \leqslant \alpha; \tag{3.2}$$

kuna $y_1 \in B_n$, s.t $\|y_1 - y_n\| \leqslant r_n$ ehk, teisisõnu, $\left\|\dfrac{y_1 - y_n}{r_n}\right\| \leqslant 1$, siis

$$\|f\| - \frac{\alpha}{r_n} + \frac{\operatorname{Re} f(y_1)}{r_n} \leqslant \operatorname{Re} f\left(\frac{y_1 - y_n}{r_n}\right) \leqslant \|f\|\,.$$

Siit järeldub, et $\operatorname{Re} f\left(\dfrac{y_1 - y_n}{r_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\|$.

(a2). *Tarvilikkus* on ilmne, sest kui $B = A$, siis $\partial A = \partial B \subset \overline{B}$.

Piisavus. Olgu $\partial A \subset \overline{B}$. Võrduseks $A = B$ jääb näidata, et $A \subset B$, milleks piisab näidata, et $A \subset \overline{B}$ (sest niisugusel juhul, arvestades, et A on lahtine ja B on lahtine kumer hulk, sisemuse monotoonsuse ja lause 2.6 põhjal $A = A^\circ \subset (\overline{B})^\circ = B$).

Olgu $x \in A$, s.t $\beta := \operatorname{Re} f(x) < \alpha$. Valime $u \in B$ nii, et $\gamma := \operatorname{Re} f(u) < \operatorname{Re} f(x) = \beta$ (selline valik on võimalik, sest kuna $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, siis võrratustest (3.2) järeldub, et $\operatorname{Re} f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$). Tähistame $v := \dfrac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}\,x - \dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}\,u$; siis

$$\operatorname{Re} f(v) = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}\operatorname{Re} f(x) - \frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}\operatorname{Re} f(u) = \frac{(\alpha - \gamma)\,\beta - (\alpha - \beta)\,\gamma}{\beta - \gamma} = \alpha,$$

s.t $v \in \delta A \subset \overline{B}$; seejuures (arvestades, et sulund $\overline{B}$ on kumer)

$$x = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}\,u + \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}\,v \in \operatorname{conv}\overline{B} = \overline{B}.$$

Niisiis, $A \subset \overline{B}$, nagu soovitud.

(b). Ühelt poolt, kui $x \in A_\varepsilon$, siis mingi $z \in A$ korral $\|x - z\| < \varepsilon$, seega

$$\operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(x - z) + \operatorname{Re} f(z) \leqslant \|f\|\,\|x - z\| + \operatorname{Re} f(z) < \alpha + \varepsilon\,\|f\|.$$

Teiselt poolt, olgu $x \in X$ selline, et $\operatorname{Re} f(x) < \alpha + \varepsilon\,\|f\|$. Kui $\operatorname{Re} f(x) \leqslant \alpha$, siis $x \in \overline{A}$ ja seega $d(x, A) = 0$. Olgu $\alpha < \operatorname{Re} f(x) < \alpha + \varepsilon\,\|f\|$; siis $\operatorname{Re} f(x) = \alpha + \varepsilon_0\,\|f\|$

mingi $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ korral. Väite tõestuseks piisab leida $u \in X$ nii, et $\operatorname{Re} f(u) = \alpha$ ja $\|x - u\| < \varepsilon$, sest sel juhul $u \in \overline{A}$ ning seega $d(x, A) = d(x, \overline{A}) \leqslant \|x - u\| < \varepsilon$.

Valime $x_0 \in S_X$ nii, et $\operatorname{Re} f(x_0) \neq 0$; siis $y := x - \dfrac{\operatorname{Re} f(x)}{\operatorname{Re} f(x_0)} x_0 \in \ker \operatorname{Re} f$, kusjuures $x = y + \dfrac{\operatorname{Re} f(x)}{\operatorname{Re} f(x_0)} x_0$. Tähistame $u := y + \dfrac{\alpha}{\operatorname{Re} f(x_0)} x_0$; siis $\operatorname{Re} f(u) = \alpha$, kusjuures

$$\|x - u\| = \frac{\left|\operatorname{Re} f(x) - \alpha\right|}{\operatorname{Re} f(x_0)} \|x_0\| = \frac{\varepsilon_0 \|f\|}{\operatorname{Re} f(x_0)};$$

seega jääb väite tõestuseks märkida, et me saame elemendi $x_0 \in S_X$ valida nii, et $\operatorname{Re} f(x_0) > \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \|f\|$ (elemendi x_0 niisuguse valiku korral $\|x - u\| < \varepsilon$, nagu soovitud). $\square$

Selle paragrahvi lõpetuseks uurime kerasid $B(nx, n)$, $n \in \mathbb{N}$, normeeritud ruumis X, kus $x \in S_X$ on fikseeritud element. Kõigepealt veendume, et sellised kerad moodustavad kasvavalt sisestatud jada (ning seega on sellistele keradele rakendatavad lemma 3.4 tulemused).

Lemma 3.5. *Olgu X normeeritud ruum, olgu $x \in B_X$ ning olgu $0 < r_1 < r_2$. Siis $B(r_1 x, r_1) \subset B(r_2 x, r_2)$.*

TÕESTUS. Lemma 2.3 põhjal piisab tõestuseks märkida, et

$$\|r_2 x - r_1 x\| = (r_2 - r_1)\|x\| \leqslant r_2 - r_1.$$

$\square$

Teoreem 3.6. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $x \in S_X$. Tähistame*

$$B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B(nx, n).$$

(a) *Olgu $f \in X^* \setminus \{0\}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

 (i) $\operatorname{Re} f(x) = -\|f\|$;

 (ii) $\sup_{z \in B} \operatorname{Re} f(x) = 0$;

 (iii) $B \subset \{z \in X \colon \operatorname{Re} f(x) < 0\}$;

 (iv) *funktsionaal* $\operatorname{Re} f(x)$ *on ülalt tõkestatud ühendil* B.

 Seejuures niisuguseid funktsionaale $f \in S_{X^*}$, mis rahuldavad tingimust (i) *ning seega kõiki tingimusi* (i)–(iv)*, eksisteerib.*

(b) *Olgu $g \in X^* \setminus \{0\}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

 (i) $\operatorname{Re} g(x) = \|g\|$;

(ii) $\inf\limits_{z\in B} \operatorname{Re} g(x) = 0$;

(iii) $B \subset \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} g(x) > 0\big\}$;

(iv) *funktsionaal* $\operatorname{Re} g(x)$ *on alt tõkestatud ühendil* B.

Seejuures niisuguseid funktsionaale $g \in S_{X^*}$, *mis rahuldavad tingimust* (i) *ning seega kõiki tingimusi* (i)–(iv), *eksisteerib.*

Tõestus. Tõestame ainult väite (a) (väide (b) järeldub vahetult väitest (a), kui seal võtta $f = -g$).

(i)⇒(ii). Kehtigu (i). Implikatsiooni tõestuseks piisab tähele panna, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral (lemma 2.4 põhjal)

$$\sup_{z\in B(nx,n)} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(nx) + n\,\|f\| = n \operatorname{Re} f(x) + n\,\|f\| = -n\,\|f\| + n\,\|f\| = 0.$$

(ii)⇒(iii) järeldub vahetult lemmast 3.3.

(iii)⇒(iv) on ilmne.

(iv)⇒(i). Kui funktsionaal $\operatorname{Re} f(x)$ on ülalt tõkestatud ühendil B, siis mingi $\alpha \in \mathbb{R}$ korral $B \subset \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(x) < \alpha\big\}$; seega lemma 3.4, (a1), põhjal

$$\operatorname{Re} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)\operatorname{Re} f(x)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re} f\big(nx - x\big)}{n} = -\|f\|.$$

Jääb tõestada tingimust (i) rahuldava funktsionaali $f \in S_{X^*}$ olemasolu. See järeldub teoreemist piisavast arvust funktsionaalidest. □

§ 4. Range kumerus ja U-omadus

Selles paragrahvis toome sisse normeeritud ruumi range kumeruse ja tema alamruumi U-omaduse mõiste ning tõestame U-omaduse transitiivsuse ja Taylor–Fogueli teoreemi, mille kohaselt normeeritud ruumi X kaasruum on rangelt kumer parajasti siis, kui ruumi X igal alamruumil on U-omadus ruumis X. Järeldusena nimetatud kahest tulemusest tõestame sissejuhatuses esitatud lause 0.1, mille kohaselt alamruum Y on totaalselt sile normeeritud ruumis X parajasti siis, kui alamruumil Y on U-omadus ruumis X ja selle alamruumi kaasruum Y^* on rangelt kumer.

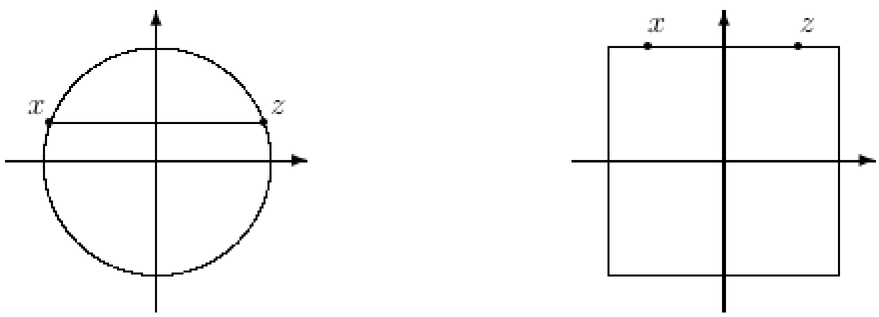
Definitsioon. Öeldakse, et normeeritud ruum X on *rangelt kumer*, kui mis tahes $x, z \in S_X$, $x \neq z$, ja $\lambda \in (0,1)$ korral $\lambda x + (1-\lambda)z \notin S_X$, s.t

$$\big\|\lambda x + (1-\lambda)\big\| < 1.$$

Ruumi X rangel kumerusel on lihtne geomeetriline tõlgendus: mis tahes kahe erineva punkti $x, z \in S_X$ korral ruumi X ühiksfäär ei sisalda neid punkte ühendavat sirglõiku

$$[x,z] = \big\{\lambda x + (1-\lambda)z\colon\ \lambda \in [0,1]\big\}.$$

Joonisel 2 on vasakul pool kujutatud rangelt kumera ruumi $X = \ell_2^2$ ühiksfääri, mille puhul kahe erineva ühiksfääri punkti vaheline sirglõik ei sisaldu ühiksfääris. Paremal pool on ruumi $X = \ell_\infty^2$ ühiksfäär; kuna see ühiksfäär sisaldab ka oma punktide vahelisi sirglõike, siis ei ole ruum $X = \ell_\infty^2$ rangelt kumer.



Joonis 2: Ruumide ℓ_2^2 ja ℓ_∞^2 ühiksfäärid

Lause 4.1. *Olgu X normeeritud ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *X on rangelt kumer;*

(ii) *mis tahes $x, z \in S_X$, $x \neq z$, korral $\left\| \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} z \right\| < 1$;*

(iii) *mis tahes $x, z \in S_X$, $x \neq z$, korral leidub $\lambda \in (0,1)$ nii, et $\big\|\lambda x + (1-\lambda)z\big\| < 1$.*

Tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii) järeldub vahetult definitsioonist.

(ii)$\Rightarrow$(iii) on ilmne.

(iii)$\Rightarrow$(i). Olgu $x, z \in S_X$, $x \neq z$, olgu $\lambda_0 \in (0,1)$ selline, et $\big\|\lambda_0 x + (1-\lambda_0)z\big\| < 1$, ning olgu $\lambda \in (0,1) \setminus \{\lambda_0\}$ suvaline. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et $\big\|\lambda x + (1-\lambda)z\big\| < 1$. Selleks, tähistades $y := \lambda_0 x + (1-\lambda_0)z = z + \lambda_0(x-z)$ ja $u := \lambda x + (1-\lambda)z = z + \lambda(x-z)$, piisab leida $\mu \in (0,1)$ nii, et

$$u = \mu x + (1-\mu)y \quad \text{või} \quad u = \mu y + (1-\mu)z.$$

Tõepoolest, sel juhul, arvestades, et $\|y\| < 1$, esimesel juhul,

$$\|u\| \leqslant \mu\|x\| + (1-\mu)\,\|y\| < \mu + (1-\mu) = 1$$

ja teisel juhul

$$\|u\| \leqslant \mu\|y\| + (1-\mu)\,\|z\| < \mu + (1-\mu) = 1.$$

Kui $\lambda > \lambda_0$, siis, tähstades $\mu := \dfrac{\lambda - \lambda_0}{1-\lambda_0}$,

$$\begin{aligned}\mu x + (1-\mu)y = y + \mu(x-y) &= z + \lambda_0(x-z) + \frac{\lambda-\lambda_0}{1-\lambda_0}\Big(x - \big(z + \lambda_0(x-z)\big)\Big)\\ &= z + \lambda_0(x-z) + \frac{\lambda-\lambda_0}{1-\lambda_0}\,(1-\lambda_0)(x-z) = z + \lambda(x-z) = u;\end{aligned}$$

kui aga $\lambda < \lambda_0$, siis, tähistades $\mu = \dfrac{\lambda}{\lambda_0}$,

$$\mu y + (1-\mu)z = z + \mu(y-z) = z + \frac{\lambda}{\lambda_0}\big(z + \lambda_0(x-z) - z\big) = z + \lambda(x-z) = u,$$

nagu soovitud $\square$

Definitsioon (Phelps, 1960 [Ph]). Öeldakse, et normeeritud ruumi X alamruumil Y on *U-omadus* (sõnast “uniqueness”) ruumis X, kui igal funktsionaalil $g \in Y^*$ leidub parajasti üks normi säilitav jätk $f \in X^*$.

Järgnev lause järeldub vahetult definitsioonist.

Lause 4.2. *Olgu Y normeeritud ruumi X alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *alamruumil Y on U-omadus ruumis X;*

(ii) *iga $g \in S_{Y^*}$ korral leidub parajasti üks $f \in S_{X^*}$ nii, et $f|_Y = g$.*

Lause 4.3 (U-omaduse transitiivsus)**.** *Olgu Z normeeritud ruumi X alamruumi Y alamruum. Kui alamruumil Z on U-omadus alamruumis Y ja alamruumil Y on U-omadus ruumis X, siis alamruumil Z on U-omadus ruumis X.*

TÕESTUS. Olgu alamruumil Z U-omadus alamruumis Y ning olgu alamruumil Y U-omadus ruumis X. Olgu $h \in Z^*$ ning olgu $f_1, f_2 \in X^*$ funktsionaali h normi säilitavad jätkud, s.t $f_1|_Z = f_2|_Z = h$ ja $\|f_1\| = \|f_2\| = \|h\|$. Lause tõestuseks piisab näidata, et $f_1 = f_2$. Selleks märgime, et funktsionaalid $f_1|_Y, f_2|_Y \in Y^*$ on funktsionaali h normi säilitavad jätkud, seega alamruumi Z U-omaduse tõttu ruumis Y kehtib $f_1|_Y = f_2|_Y$. Edasi, f_1 ja f_2 on funktsionaali $g := f_1|_Y = f_2|_Y$ normi säilitavad jätkud ruumile X, seega alamruumi Y U-omaduse tõttu $f_1 = f_2$, nagu soovitud. □

Järgnev teoreem annab seose alamruumide U-omaduse ja ruumi X^* range kumeruse vahel. Selle teoreemi implikatsioon (i)⇒(ii) pärineb Taylori 1939. aasta artiklist [T] ja implikatsioon (iii)⇒(i) Fogueli 1958. aasta artiklist [F].

Teoreem 4.4 (Taylor–Fogueli teoreem)**.** *Olgu X normeeritud ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *kaasruum X^* on rangelt kumer;*

(ii) *ruumi X igal alamruumil on U-omadus ruumis X;*

(iii) *ruumi X igal kinnisel hüperalamruumil on U-omadus ruumis X.*

Implikatsiooni (iii)⇒(i) tõestus kasutab järgnevat lihtsat lemmat, mida me siinkohal ei tõesta.

Lemma 4.5. *Olgu arvud $a_n, b_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et*

$$|a_n|, |b_n| \leqslant 1 \quad \textit{iga } n \in \mathbb{N} \textit{ korral} \qquad \textit{ja} \qquad a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2.$$

Siis $a_n, b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

TEOREEMI 4.4 TÕESTUS. (i)⇒(ii). Olgu kaasruum X^* rangelt kumer, olgu Y ruumi X alamruum, olgu $g \in S_{Y^*}$ ning olgu $f_1, f_2 \in S_{X^*}$ sellised, et $f_1|_Y = f_2|_Y = g$.

Alamruumi Y U-omaduseks piisab näidata, et $f_1 = f_2$. Selleks paneme tähele, et $\left(\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right)\Big|_Y = g$, seega

$$1 = \|g\| \leqslant \left\|\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right\| \leqslant \frac{1}{2} \|f_1\| + \frac{1}{2} \|f_2\| = 1,$$

s.t $\left\|\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2\right\| = 1$; järelikult kaasruumi X^* range kumeruse tõttu $f_1 = f_2$, nagu soovitud.

(ii)$\Rightarrow$(iii) on ilmne.

(iii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (iii). Oletame vastuväiteliselt, et kaasruum X^* ei ole rangelt kumer. Siis leiduvad $f_1, f_2 \in S_{X^*}$, $f_1 \neq f_2$, nii, et $\frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2 \in S_{X^*}$. Tähistame

$$Y = \big\{x \in X\colon\ f_1(x) = f_2(x)\big\} = \ker(f_1 - f_2)$$

(siis Y on järelduse 1.2 põhjal kinnine hüperalamruum) ja $g := f_1|_Y = f_2|_Y$. Implikatsiooni tõestuseks piisab nüüd näidata, et $\|g\| = 1$ (sest sel juhul on $f_1, f_2 \in X^*$ funktsionaali $g \in Y^*$ erinevad normi säilitavad jätkud, mis on vastuolus hüpertasandi Y U-omadusega ruumis X).

Olgu $z \in X$ selline, et $f_1(z) - f_2(z) = 1$. Siis iga element $x \in X$ esitub üheselt kujul $x = y + az$, kus $y \in \ker(f_1 - f_2) = Y$ ja $a = f_1(x) - f_2(x) \in \mathbb{K}$ (vt lauset 1.1). Olgu $x_n \in S_X$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $\frac{1}{2} f_1(x_n) + \frac{1}{2} f_2(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Siis (lemma 4.5 põhjal) $f_1(x_n), f_2(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$; seega, kui $x_n = y_n + a_n z$, kus $y_n \in Y$ ja $a_n = f_1(x_n) - f_2(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, siis $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ja seetõttu

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} g(y_n) = \lim_{n\to\infty} f_1(y_n) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = 1.$$

Siit järeldub, et $\|g\| \geqslant 1$ ja seega $\|g\| = 1$, nagu soovitud. □

U-omaduse transitiivsuse ning Taylor–Fogueli teoreemi 4.4 abil saame me nüüd tõestada sissejuhatuses esitatud lause 0.1, mis kirjeldab U-omadusega alamruumi totaalset siledust tema kaasruumi range kumeruse kaudu.

Lause 0.1 tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu alamruum Y totaalselt sile ruumis X. Siis alamruumi Y igal kinnisel alamruumil Z on U-omadus ruumis X. Muuhulgas ka alamruumil Y on U-omadus ruumis X. Kuna alamruumi Y igal kinnisel alamruumil on U-omadus ruumis Y (vastasel korral poleks ruumi Y mingil alamruumil Z U-omadust ruumis X), siis Taylor–Fogueli teoreemi 4.4 põhjal on kaasruum Y^* rangelt kumer.

(ii)$\Rightarrow$(i). Olgu alamruumil Y U-omadus ruumis X ja olgu Y^* rangelt kumer. Taylor–Fogueli teoreemi 4.4 põhjal on alamruumi Y igal alamruumil Z U-omadus ruumis Y.

Sellest ja eeldusest, et alamruumil Y on U-omadus ruumis X, järeldub U-omaduse transitiivsuse (lause 4.3) tõttu, et alamruumi Y igal alamruumil Z on U-omadus ruumis X. Teisisõnu, alamruum Y on totaalselt sile ruumis X. $\square$

Selle paragrahvi lõpetuseks sõnastame ühe artiklis [OP, teoreem 1] sisalduva samaväärsuse, mida me kasutame töö põhiteoreemi 5.1 tõestamisel.

Teoreem 4.6 (vt [OP, teoreem 1])**.** *Olgu Y Banachi ruumi X kinnine alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *alamruumil Y on U-omadus ruumis X;*

(b) *leidub konstant $\delta > 0$ nii, et iga $\varepsilon \in (0, \delta)$, iga $x \in S_X$ ja iga alamruumi Y elementide jada $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ korral, mis rahuldab tingimusi*

$$\|y_1\| = \|y_{n+1} - y_n\| = 1 \quad \textit{ja} \quad \|y_n\| \geqslant n - \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N},$$

leiduvad $y \in Y$ ja $n_0 \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\|x \pm y_{n_0} - y\| \leqslant n_0 + \varepsilon.$$

§ 5. Totaalne siledus ja kerajadad – põhiteoreem

Selles paragrahvis tõestame käesoleva magistritöö põhiteoreemi, mis annab Banachi ruumi kinnise alamruumi Y totaalsele siledusele seitse tarvilikku ja piisavat tingimust.

Teoreem 5.1. *Olgu X Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{K}$ ning olgu Y ruumi X kinnine alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Y on totaalselt sile;*

(ii) *ühiksfääri S_Y mis tahes elementide jada (y_n) korral leidub ülimalt üks funktsionaal $f \in S_{X^*}$, mis rahuldab tingimust*

$$\operatorname{Re} f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\| = 1; \tag{5.1}$$

(ii') *ühikkera B_Y mis tahes elementide jada (y_n) korral leidub ülimalt üks funktsionaal $f \in S_{X^*}$, mis rahuldab tingimust* (5.1)*;*

(iii) *mis tahes lahtiste kerade $B_n := B(y_n, r_n) \subset X$, kus $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, korral, mis rahuldavad tingimusi*

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \qquad \textit{ja} \qquad r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \tag{5.2}$$

leidub ülimalt üks funktsionaal $f \in S_{X^*}$, mille reaalosa $\operatorname{Re} f$ on ühendil $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ ülalt tõkesatud;

(iv) *mis tahes lahtiste kerade $B_n := B(y_n, r_n) \subset X$, kus $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, korral, mis rahuldavad tingimusi* (5.2)*, on ühend $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ lahtine poolruum ruumis X või võrdne kogu ruumiga X;*

(iv') *mis tahes lahtiste kerade $B_n := B(y_n, r_n) \subset X$, kus $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, korral, mis rahuldavad tingimusi* (5.2) *ning mingi reaalarvu $\delta > 0$ puhul*

$$\|y_n\| \geqslant r_n - \delta, \quad n \in \mathbb{N},$$

on ühend $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ lahtine poolruum ruumis X;

(v) *alamruumi Y mis tahes elementide jada $(y_n)_{n=1}^\infty$ korral, mis mingi reaalarvu $\delta > 0$ korral rahuldab tingimusi*

$$\|y_1\| = \|y_{n+1} - y_n\| = 1, \quad \|y_n\| \geqslant n - \delta, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{5.3}$$

on ühend $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(y_n, n)$ *lahtine poolruum ruumis X;*

(v') *leidub reaalarv $\delta > 0$ nii, et alamruumi Y mis tahes elementide jada $(y_n)_{n=1}^\infty$ korral, mis rahuldab tingimusi (5.3), on ühend* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(y_n, n)$ *lahtine poolruum ruumis X.*

TÕESTUS. (i)$\Rightarrow$(ii). Olgu Y totaalselt sile. Lause 0.1 põhjal on alamruumil Y U-omadus ruumis X ning kaasruum Y^* on rangelt kumer.

Olgu ühiksfääri S_Y elementide jada (y_n) ja funktsionaalid $f, g \in S_{X^*}$ sellised, et $\operatorname{Re} f(y_n), \operatorname{Re} g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Implikatsiooni tõestuseks peame näitame, et $f = g$. Kuna $\operatorname{Re} \frac{1}{2}(f+g)(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, siis $\frac{1}{2} f|_Y + \frac{1}{2} g|_Y \in S_{Y^*}$, seega alamruumi Y^* range kumeruse tõttu $f|_Y = g|_Y$. Kuna f ja g on funktsionaali $h := f|_Y = g|_Y \in S_{Y^*}$ normi säilitavad jätkud, siis alamruumi Y U-omaduse tõttu $f = g$, nagu soovitud.

(ii)$\Rightarrow$(ii'). Olgu ühikkera B_Y elementide jada (y_n) ja funktsionaalid $f, g \in S_{X^*}$ sellised, et $\operatorname{Re} f(y_n), \operatorname{Re} g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Implikatsiooni tõestuseks peame näitame, et $f = g$. Selleks paneme tähele, et $\|y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ (sest vastasel korral leiduksid $\varepsilon > 0$ ja osajada $(y_{k_n})_{n=1}^\infty$ nii, et $\operatorname{Re} f(y_{k_n}) \leqslant \|y_{k_n}\| \leqslant 1 - \varepsilon$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral, aga sel juhul $\operatorname{Re} f(y_{k_n}) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 1$). Nüüd alates mingist indeksist $\frac{y_n}{\|y_n\|} \in S_Y$, kusjuures

$$\operatorname{Re} f\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right) = \frac{1}{\|y_n\|} \operatorname{Re} f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{ja} \quad \operatorname{Re} g\left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right) = \frac{1}{\|y_n\|} \operatorname{Re} g(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

seega eelduse (ii) põhjal $f = g$, nagu soovitud.

(ii')$\Rightarrow$(iii). Kehtigu (ii') ning olgu funktsionaalide $f, g \in S_{X^*}$ reaalosad ühendil $B := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ ülalt tõkestatud, s.t mingite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ korral $B \subset \{x \in X \colon \operatorname{Re} f(x) < \alpha\}$ ja $B \subset \{x \in X \colon \operatorname{Re} g(x) < \beta\}$. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et $f = g$.

Lemma 3.4, (a1), põhjal

$$\operatorname{Re} f\left(\frac{y_1 - y_n}{r_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \|f\| = 1 \quad \text{ning} \quad \operatorname{Re} g\left(\frac{y_1 - y_n}{r_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \|g\| = 1.$$

Kuna iga $n \in N$ korral $\frac{y_1 - y_n}{r_n} \in B_Y$, siis eelduse (ii') põhjal $f = g$, nagu soovitud.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Kehtigu (iii) ning olgu kerad $B_n := B(y_n, r_n)$, kus $y_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, ning

$B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ ja $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, sellised, et ühend $B := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \neq X$. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et B on lahtine poolruum.

Kuna $B \neq X$, siis leidub $v \in X \setminus B$. Kuna ühepunktiline hulk $\{v\}$ on kumer ning B on lahtine ja lause 2.1 põhjal kumer, kusjuures $B \cap \{v\} = \emptyset$, siis Hahn–Banachi eraldamisteoreemi 2.2 põhjal (võttes seal $U = B$ ja $V = \{v\}$) leidub $f \in S_{X^*}$ nii, et

$$\operatorname{Re} f(x) < \operatorname{Re} f(v) \quad \text{iga } x \in B \text{ korral.}$$

Nüüd funktsionaal $\operatorname{Re} f$ on tõkestatud ühendil B; seega, tähistades $\alpha := \sup\limits_{x\in B} \operatorname{Re} f(x)$, lemma 3.3 põhjal

$$B \subset \{x \in X \colon \operatorname{Re} f(x) < \alpha\} =: A.$$

Implikatsiooni tõestuseks piisab nüüd näidata, et $A \subset B$, mis on samaväärne sisalduvusega $X \setminus B \subset X \setminus A$.

Olgu $z \in X \setminus B$. Jääb näidata, et $z \in X \setminus A$, s.t $\operatorname{Re} f(z) \geqslant \alpha$. Kuna ühepunktiline hulk $\{z\}$ on kumer, saame taas rakendada Hahn–Banachi eraldamisteoreemi 2.2: võttes seal $U = B$ ja $V = \{z\}$, leidub $g \in S_{X^*}$ nii, et

$$\operatorname{Re} g(x) < \operatorname{Re} g(z) =: \beta \quad \text{iga } x \in B \text{ korral.}$$

Funktsionaal g on tõkestatud ühendil B, järelikult eelduse (iii) põhjal $f = g$; niisiis

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z) \geqslant \sup_{x\in B} \operatorname{Re} g(x) = \sup_{x\in B} \operatorname{Re} f(x) = \alpha,$$

nagu soovitud.

(iv)$\Rightarrow$(iv') järeldub lausest 2.5, (a).

(iv')$\Rightarrow$(v) järeldub, kui võtta tingimuses (iv') $r_n = n$.

(v)$\Rightarrow$(v') on ilmne.

(v') $\Rightarrow$ (i). Kehtigu (v') ning olgu Z alamruumi Y kinnine alamruum. Olgu $0 < \varepsilon < \delta$ ja $x \in S_X$ ning olgu $y_n \in Z$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et

$$\|y_1\| = \|y_{n+1} - y_n\| = 1 \quad \text{ja} \quad \|y_n\| \geqslant n - \varepsilon \qquad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Teoreemi 4.6 põhjal piisab implikatsiooni tõestuseks näidata, et

$$Z \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x + y_n, n + \varepsilon) \right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x - y_n, n + \varepsilon) \right) \neq \emptyset. \tag{5.4}$$

Kuna $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(y_n, n)$ on lahtine poolruum, siis lause 2.5, (b), ja lemma 3.4, (b), põhjal ka

$B_\varepsilon := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(y_n, n+\varepsilon)$ on lahtine poolruum, s.t $B_\varepsilon = \{u \in X\colon\ \operatorname{Re} f(u) < \alpha\}$ mingite $f \in S_{X^*}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral. Kuna $0 \in B_\varepsilon$, siis $\alpha > 0$. Nüüd lause 3.2 põhjal

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x+y_n, n+\varepsilon) = x + B_\varepsilon = \{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(x) + \alpha\},$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x-y_n, n+\varepsilon) = x - B_\varepsilon = \{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) > \operatorname{Re} f(x) - \alpha\}.$$

Seega tingimus (5.4) on samaväärne tingimusega

$$\{z \in Z\colon\ \operatorname{Re} f(x) - \alpha < \operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(x) + \alpha\} \neq \emptyset,$$

mille kehtivuseks piisab veenduda, et $f|_Z \neq 0$. Viimane tingimus järeldub lemmast 3.4, (a1). $\square$

Märkus 5.1. Teoreem 5.1 annab uue tõestuse Vlassovi teoreemile 0.3 (mida ta üldistab). See uus tõestus on artiklis [OP] antud tõestuse oluline parendus: tõestus on muutunud selgemaks tänu tingimuste (ii) ja (ii') eraldi välja toomisele ja teoreemi 4.6 kasutamisele implikatsiooni (v')⇒(i) tõestuses; samuti on lause 2.5, (a), kaudu selgitatud konstandi $\delta > 0$ rolli selles teoreemis. Vlassovi enda tõestus ning tema teoreemi lokaalse versiooni – kaasruumi kinnise ühikkera kumeruspunktide ("rotund points") kirjelduse kerajadade omaduste kaudu – tõestus Gilesi artiklist [G] tuginesid kaasruumi range kumeruse samaväärsusele lähteruumi kõigi kahemõõtmeliste faktorruumide siledusega. Bandyopadhyay, Da Huangi, Bor-Luh Lini ja Trojanski artiklis [BHLT], Bandyopadhyay, Da Huangi ja Bor-Luh Lini artiklis [BHL] ning Bandyopadhyay ja Bor-Luh Lini artiklis [BL] on kumeruspunktide kirjeldust edasi arendatud: muuhulgas on artiklis [BHL] kumeruspunktide kirjelduse kaudu esitatud Taylor–Fogueli teoreemi 4.4 lokaalne versioon ning artiklis [BL] Vlassovi teoreemi 0.3 lokaalse versiooni tõestus, mis (erinevalt teoreemi 5.1 tõestusest ja artiklis [OP] esitatud tõestusest) ei kasuta Taylor–Fogueli teoreemi.

§ 6. Siledus ja kerajadad

Selles paragrahvis toome sisse range kumerusega duaalse mõiste – sileduse – ning esitame ruumi sileduse kirjelduse kerajadade omaduste kaudu, mis on hästi võrreldav rangelt kumera kaasruumiga ruumide kirjeldusega kerajadade kaudu (Vlassovi teoreemiga 0.3).

Definitsioon. Olgu X normeeritud ruum. Punkti $x \in S_X$ nimetatakse *siledusspunktiks,* kui leidub parajasti üks $f \in S_{X^*}$ nii, et $f(x) = \|x\| = 1$. Öeldakse, et normeeritud ruum X on *sile,* kui kõik ühiksfääri S_X punktid on siledusspunktid.

Vahetult definitsioonist järeldub

Lause 6.1. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $x \in S_X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *x on siledusspunkt;*

(ii) *θx on siledusspunkt iga $\theta \in \mathbb{K}$, $|\theta| = 1$, korral.*

Lause 6.2. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $x \in X$ ja $f \in X^*$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$f(x) = \|f\|\,\|x\|$;*

(ii) $\operatorname{Re} f(x) = \|f\|\,\|x\|$.

Tõestus. (i)⇒(ii) on ilmne.

(ii)⇒(i). Kehtigu (ii). Siis

$$\|f\|\,\|x\| \geqslant \big|f(x)\big| = \sqrt{\big(\operatorname{Re} f(x)\big)^2 + \big(\operatorname{Im} f(x)\big)^2} = \sqrt{\big(\|f\|\,\|x\|\big)^2 + \big(\operatorname{Im} f(x)\big)^2},$$

seega $\operatorname{Im} f(x) = 0$, niisiis $f(x) = \operatorname{Re}\, f(x) = \|f\|\,\|x\|$. □

Eelnevast lausest järeldub vahetult (teoreemi 1.4 kaudu)

Järeldus 6.3. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $x \in S_X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *x on siledusspunkt (ruumis X);*

(ii) *x on sileduspunkt ruumiga X assotsieeruvas reaalses ruumis $X_{\mathbb{R}}$;*

(iii) *leidub parajasti üks $f \in S_{X^*}$ nii, et $\operatorname{Re} f(x) = 1$.*

Teoreem 6.4 (Banach, 1932 [B2, lk 168-170]; vt nt [M, lk 486])**.** *Olgu X normeeritud ruum ja olgu $x \in S_X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *x on sileduspunkt;*

(ii) *ruumi X norm on Gâteaux' mõttes diferentseeruv punktis x, s.t iga $y \in X$ korral eksisteerib piirväärtus*

$$G(x,y) := \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t}.$$

Seejuures, kui $x \in S_X$ on sileduspunkt ja $f \in S_{X^*}$ on ainus funktsionaal kaasruumi X^* ühiksfäärilt, mille korral $f(x) = 1$, siis $G(x,y) = \operatorname{Re} f(y)$.

Järgnev tulemus näitab, et range kumerus ja siledus on teatavas mõttes duaalsed mõisted.

Lause 6.5 (vt nt [M, lk 481])**.** *Olgu X normeeritud ruum.*

(a) *Kui X^* on rangelt kumer, siis X on sile.*

(b) *Kui X^* on sile, siis X on rangelt kumer.*

Märkus 6.1. Lause 6.5 ei ole pööratav: näiteks ruumi ℓ_1 ekvivalentne ümbernormeering Trojanski artiklist [Tp] on sile ja seda ümbernormeeringut defineeriva funktsiooni diferentseeruvuse korral ka rangelt kumer (vt [P]), kuid tema kaasruum pole ei sile ega rangelt kumer.

Lause 6.5 tõestus. (a). Olgu X^* rangelt kumer ning olgu $x \in S_X$ ja $f_1, f_2 \in S_{X^*}$ sellised, et $f_1(x) = f_2(x) = 1$. Ruumi X sileduseks piisab näidata, et $f_1 = f_2$. Kuna

$$1 = \frac{1}{2}(f_1+f_2)(x) \leqslant \left\|\frac{1}{2}(f_1+f_2)\right\| \leqslant \frac{1}{2}\big(\|f_1\| + \|f_2\|\big) = 1,$$

siis $\left\|\frac{1}{2}(f_1+f_2)\right\| = 1$, järelikult kaasruumi X^* range kumeruse tõttu $f_1 = f_2$, nagu soovitud.

(b). Olgu X^* sile ning olgu $x_1, x_2 \in S_X$ sellised, et $\left\|\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right\| = 1$. Ruumi X rangeks kumeruseks piisab näidata, et $x_1 = x_2$. Hahn–Banachi teoreemi põhjal leidub $f \in S_{X^*}$ nii, et

$$1 = f\Big(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\Big) = \operatorname{Re} f\Big(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\Big) = \frac{1}{2}\operatorname{Re} f(x_1) + \frac{1}{2}\operatorname{Re} f(x_2).$$

Kuna $\operatorname{Re} f(x_1), \operatorname{Re} f(x_2) \leqslant 1$, siis $\operatorname{Re} f(x_1) = \operatorname{Re} f(x_2) = 1$ ning järelikult (lause 6.2 põhjal) ka

$$(j_X x_1)(f) = f(x_1) = \operatorname{Re} f(x_1) = 1 \quad \text{ja} \quad (j_X x_2)(f) = f(x_2) = \operatorname{Re} f(x_2) = 1$$

(siin $j_X \colon X \to X^{**}$ on loomulik sisestus); niisiis kaasruumi X^* sileduse tõttu $j_X x_1 = j_X x_2$ ning seega ka $x_1 = x_2$, nagu soovitud. $\square$

Järgnev sileduse kriteerium on hästi tuntud (vt nt [Beau, lk 183] (vt ka märkust 6.4) või [L, lk 101]).

Teoreem 6.6 (vt nt [L, lk 101])**.** *Olgu X normeeritud ruum Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruum X on sile;*

(ii) *iga $x \in S_X$ korral on ühend $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(nx, n)$ lahtine poolruum ruumis X.*

Teoreem 6.6 järeldub vahetult tema järgnevast lokaalsest versioonist.

Teoreem 6.7. *Olgu $x \in S_X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *x on sileduspunkt;*

(ii) *leidub parajasti üks funktsionaal $f \in S_{X^*}$, mille reaalosa $\operatorname{Re} f$ on ühendil $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(nx, n)$ ülalt tõkestatud;*

(iii) *leidub ülimalt üks funktsionaal $f \in S_{X^*}$, mille reaalosa $\operatorname{Re} f$ on ühendil $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(nx, n)$ ülalt tõkestatud;*

(iv) *ühend $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(nx, n)$ on lahtine poolruum ruumis X.*

Tõestus. Tähistame $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B(nx, n)$.

(i)$\Leftrightarrow$(ii) järeldub vahetult järeldusest 6.3 ja teoreemist 3.6, (a).

(ii)$\Leftrightarrow$(iii) järeldub teoreemist 3.6, (a).

(iii)$\Rightarrow$(iv). Kehtigu (iii). Teoreemi 3.6, (a), põhjal leidub funktsionaal $f \in S_{X^*}$ nii, et $B \subset \{z \in X \colon \operatorname{Re} f(z) < 0\} =: A$. Implikatsiooni tõestuseks piisab nüüd näidata, et $A \subset B$, mis on samaväärne sisalduvusega $X \setminus B \subset X \setminus A$.

Olgu $v \in X \setminus B$. Implikatsiooni tõestuseks jääb näidata, et $v \notin A$, s.t $\operatorname{Re} f(v) \geqslant 0$. Kuna ühepunktiline hulk $\{v\}$ on kumer ja B on lahtine ja lause 2.1 põhjal kumer, kusjuures $B \cap \{v\} = \emptyset$, siis Hahn–Banachi eraldamisteoreemi 2.2 põhjal (võttes seal $U = B$ ja $V = \{v\}$) leidub $g \in S_{X^*}$ nii, et

$$\operatorname{Re} g(z) < \operatorname{Re} g(v) \quad \text{iga } z \in B \text{ korral.} \tag{6.1}$$

Funktsionaali g reaalosa $\operatorname{Re} g$ on ühendil B ülalt tõkestatud, seega eelduse (iii) põhjal $g = f$. Arvestades, et teoreemi 3.6, (a), põhjal $\sup\limits_{z \in B} \operatorname{Re} g(z) = 0$, järeldub võrratusest (6.1), et

$$\operatorname{Re} f(v) = \operatorname{Re} g(v) \geqslant \sup_{z \in B} \operatorname{Re} g(z) = 0.$$

(iv)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (iv), s.t mingite $f \in S_{X^*}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral

$$B = \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) < \alpha\big\},$$

ning olgu $g \in S_{X^*}$ selline, et $\operatorname{Re} g(x) = 1$. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et $g = -f$.

Teoreemi 3.6, (b), põhjal $B \subset \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} g(z) > 0\big\}$; seega

$$\ker \operatorname{Re} g \subset \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} g(z) \leqslant 0\big\} \subset X \setminus B = \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) \geqslant \alpha\big\}.$$

Lemma 1.3 põhjal järeldub siit, et mingi $c \in \mathbb{R}$ korral $\operatorname{Re} f = c \operatorname{Re} g$. Kuna

$$c = c \operatorname{Re} g(x) = \operatorname{Re} f(x) = -1$$

(siin viimane võrdus järeldub teoreemist 3.6, (a)), siis $\operatorname{Re} g = -\operatorname{Re} f$, nagu soovitud. $\square$

Märkus 6.2. Artiklis [BM, lk 126, lemma 3] on teoreemi 6.7 implikatsioon (i)$\Rightarrow$(iv) tõestatud üldisemas (kumerate hulkade homoteetiate) kontekstis.

Märkus 6.3. Artiklis [G, lk 307] mainitakse, et teoreemi 6.7 tingimuse (i) ($x \in S_X$ on sileduspunkt) samaväärsus järgmise tingimusega (iv') on ilmne:

(iv') *leidub funktsionaal $f \in S_{X^*}$ nii, et*

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}\big((n-1)x, n\big)} = \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) \leqslant 1\big\}. \tag{6.2}$$

Märgime, et tingimus (iv') on lihtsalt teoreemi 6.7 tingimuse (iv) ümbersõnastus.

Tõepoolest, tähistades $B := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(nx, n)$, näeme, et

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B}\big((n-1)x, n\big)} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B\big((n-1)x, n\big)} = -x + \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} B(nx, n)} = -x + \overline{B};$$

seega võrdus (6.2) on samaväärne tingimusega

$$\overline{B} = x + \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) \leqslant 1\big\} = \big\{u \in X\colon\ \operatorname{Re} f(u) \leqslant 1 + \operatorname{Re} f(x)\big\},$$

mis lausete 3.1 ja 2.6 põhjal on samaväärne võrdusega

$$B = \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) < 1 + \operatorname{Re} f(x)\big\}. \tag{6.3}$$

Siit järeldub implikatsioon (iv')⇒(iv).

Teiselt poolt, kui kehtib (iv), siis mingite $f \in S_{X^*}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral

$$B = \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) < \alpha\big\},$$

kusjuures teoreemi 3.6, (a), põhjal $\alpha = 0$ ja $\operatorname{Re} f(x) = -1$, s.t kehtib (6.3); niisiis kehtib ka (iv').

Märkus 6.4. Monograafias [Beau, lk 183] on tõestatud teoreemi 6.7 tingimuse (i) ($x \in S_X$ on sileduspunkt) samaväärsus järgmise tingimusega:

(iv") *leidub funktsionaal $g \in S_{X^*}$ nii, et*

$$C := \big\{x + t(y - x)\colon\ y \in B_X^\circ,\, t > 0\big\} = \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} g(z) < 1\big\} =: H. \tag{6.4}$$

Märgime, et tingimus (iv") on lihtsalt teoreemi 6.7 tingimuse (iv) ümbersõnastus.

Tõepoolest,

$$C = x - \big\{t(x - y)\colon\ y \in B_X^\circ,\, t > 0\big\} = x - \bigcup_{t>0} t\big\{x - y\colon\ y \in B_X^\circ\big\}.$$

Kuna

$$\big\{x - y\colon\ y \in B_X^\circ\big\} = \big\{x + y\colon\ y \in B_X^\circ\big\} = B(x, 1),$$

siis

$$C = x - \bigcup_{t>0} tB(x, 1) = x - \bigcup_{t>0} B(tx, t) = x - \bigcup_{n=1}^{\infty} B(nx, n).$$

Seega, tähistades $B := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(nx, n)$, näeme, et võrdus (6.4) on samaväärne võrdusega

$B = x - H$ ehk, arvestades, et

$$\begin{aligned} x - H &= x - \{z \in X\colon\ \operatorname{Re} g(z) < 1\} = x + \{u \in X\colon\ \operatorname{Re}(-g)(u) < 1\} \\ &= \{z \in X\colon\ \operatorname{Re}(-g)(z) < \operatorname{Re}(-g)(x) + 1\}, \end{aligned}$$

tingimus (6.4) on samaväärne tingimusega (6.3), kus $f = -g$. Märkuses 6.3 veendusime, et tingimust (6.3) rahuldava funktsionaali f olemasolu (ehk siis ka soovitud funktsionaali g olemasolu ehk, teisisõnu, tingimus (iv")) on samaväärne teoreemi 6.7 tingimusega (iv).

Selle paragrahvi lõpetuseks esitame implikatsiooni (i)⇒(iv') tõestuse monograafiast [Beau, lk 183]. Eelneva märkuse põhjal esitab see tõestus (mis tugineb sileduse ja Gâteaux' mõttes diferentseeruvuse samaväärsusele) uue tõestuse teoreemi 6.7 implikatsioonile (i)⇒(iv). Järgmises paragrahvis esitame samaväärsusele (i)⇔(iv) veel ühe tõestuse (vt teoreemi 7.6 koos sellele eelneva lõiguga).

Implikatsiooni (i)⇒(iv") tõestus monograafiast [Beau, lk 183]. Olgu $x \in S_X$ sileduspunkt ning olgu $g \in S_{X^*}$ selline, et $g(x) = 1$. Ilmselt $C \subset H$, sest mis tahes $y \in B_X^\circ$ ja $t > 0$ korral (arvestades, et $\operatorname{Re} g(y) < 1$)

$$\operatorname{Re} g\big(x + t(y-x)\big) = \operatorname{Re} g(x) + t\big(\operatorname{Re} g(y) - \operatorname{Re} g(x)\big) = 1 - t\big(1 - \operatorname{Re} g(y)\big) < 1.$$

Niisiis jääb näidata, et $H \subset C$. Olgu $z \in X$ selline, et $\operatorname{Re} g(z) < 1$. Peame näitama, et $z \in C$, milleks piisab näidata, et mingi $\lambda \in (0,1)$ korral $u := (1-\lambda)x + \lambda z \in B_X^\circ$ (sest sel juhul $z = x + \dfrac{1}{\lambda}(u - x) \in C$). Selleks märgime, et

$$\|u\| = \lambda\, \frac{\big\|x + \lambda(z-x)\big\| - \|x\|}{\lambda} + 1.$$

Kuna teoreemi 6.4 põhjal

$$\frac{\big\|x + \lambda(z-x)\big\| - \|x\|}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to 0+]{} \operatorname{Re} g(z - x) = \operatorname{Re} g(z) - 1 < 0,$$

siis piisavalt väikeste arvude $\lambda \in (0,1)$ korral $\dfrac{\big\|x + \lambda(z-x)\big\| - \|x\|}{\lambda} < 0$ ning seega $\|u\| < 1$, s.t $u \in B_X^\circ$, nagu soovitud. $\square$

§ 7. Siledus ja nõrk U-omadus

Selles paragrahvis toome sisse U-omaduse nõrgendatud variandi – nõrga U-omaduse, uurime ruumi sileduse ja alamruumide nõrga U-omaduse vahekorda ning anname sileduse kirjeldusele kerajadade kaudu uue, geomeetrilise tõestuse, mis tugineb Lima nõrga U-omaduse kriteeriumile aastast 1983.

Definitsioon (vt [SS] ja [L])**.** Öeldakse, et normeeritud ruumi X alamruumil Y on *nõrk U-omadus* ruumis X, kui igal funktsionaalil $g \in Y^*$, *mis saavutab oma normi* (s.t leidub $y \in S_Y$ nii, et $g(y) = \|g\|$), leidub parajasti üks normi säilitav jätk $f \in X^*$.

Märkus 7.1. Üldjuhul on alamruumi nõrk U-omadus ja U-omadus erinevad mõisted (vt märkust 7.3 allpool).

Märkus 7.2. Lõplikumõõtmelise alamruumi jaoks on nõrk U-omadus samaväärne U-omadusega, sest iga funktsionaal lõplikumõõtmelise normeeritud ruumi kaasruumist saavutab oma normi.

Järgnev lause järeldub vahetult definitsioonist.

Lause 7.1. *Olgu Y normeeritud ruumi X alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *alamruumil Y on nõrk U-omadus ruumis X;*

(ii) *iga $g \in S_{Y^*}$ korral, mis saavutab oma normi, leidub parajasti üks $f \in S_{X^*}$ nii, et $f|_Y = g$.*

Lause 7.2. *Olgu Y normeeritud ruumi X alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *alamruumil Y on nõrk U-omadus ruumis X;*

(ii) *alamruumiga Y assotsieeruval reaalsel alamruumil $Y_{\mathbb{R}}$ on nõrk U-omadus ruumiga X assotsieeruvas reaalses ruumis $X_{\mathbb{R}}$.*

Tõestus. Kui X on normeeritud ruum üle reaalarvude korpuse $\mathbb{R}$, on lause ilmne. Eeldame, et X on normeeritud ruum üle kompleksarvude korpuse $\mathbb{C}$.

(i)$\Rightarrow$(ii). Eeldame, et alamruumil Y on nõrk U-omadus ruumis X. Olgu $v \in Y_{\mathbb{R}}^*$ selline, et $v(y) = \|v\|$ mingi $y \in S_Y$ korral, ning olgu $u_1, u_2 \in X_{\mathbb{R}}^*$ funktsionaali v normi säilitavad jätkud, s.t $\|u_1\| = \|u_2\| = \|v\|$ ja $u_1|_Y = u_2|_Y = v$. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et $u_1 = u_2$.

Olgu $g \in Y^*$ ja $f_1, f_2 \in X^*$ sellised (teoreemi 1.4 põhjal üheselt määratud) funktsionaalid, et $v = \operatorname{Re} g$, $u_1 = \operatorname{Re} f_1$, $u_2 = \operatorname{Re} f_2$. Implikatsiooni tõestuseks jääb nüüd näidata, et $f_1 = f_2$. Selleks, arvestades, et funktsionaal g saavutab oma normi (sest lause 6.2 põhjal $g(y) = \operatorname{Re} g(y) = \|\operatorname{Re} g\| = \|g\|$), piisab alamruumi Y nõrga U-omaduse tõttu näidata, et f_1 ja f_2 on funktsionaali g normi säilitavad jätkud, s.t

$$f_1|_Y = f_2|_Y = g \quad \text{ja} \quad \|f_1\| = \|f_2\| = \|g\|.$$

Veendume selles: $i \in \{1, 2\}$ korral

$$\|f_i\| = \|\operatorname{Re} f_i\| = \|u_i\| = \|v\| = \|\operatorname{Re} g\| = \|g\|$$

ning

$$\operatorname{Re}(f_i|_Y) = (\operatorname{Re} f_i)|_Y = u_i|_Y = v = \operatorname{Re} g,$$

seega (teoreemi 1.4 põhjal) ka $f_i|_Y = g$.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Eeldame, et alamruumil $Y_\mathbb{R}$ on nõrk U-omadus ruumis $X_\mathbb{R}$. Olgu $g \in Y^*$ selline, et mingi $y \in S_Y$ korral $g(y) = \|g\|$ ning olgu $f_1, f_2 \in X^*$ funktsionaali g normi säilitavad jätkud, s.t $\|f_1\| = \|f_2\| = \|g\|$ ja $f_1|_Y = f_2|_Y = g$. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et $f_1 = f_2$.

Tähistame $v := \operatorname{Re} g \in Y_\mathbb{R}^*$ ja $u_1 := \operatorname{Re} f_1, u_2 := \operatorname{Re} f_2 \in X_\mathbb{R}^*$. Implikatsiooni tõestuseks piisab nüüd (teoreemi 1.4 põhjal) näidata, et $u_1 = u_2$. Selleks, arvestades, et funktsionaal v saavutab oma normi (sest lause 6.2 põhjal $v(y) = \operatorname{Re} g(y) = \|\operatorname{Re} g\| = \|v\|$), piisab alamruumi $Y_\mathbb{R}$ nõrga U-omaduse tõttu näidata, et u_1 ja u_2 on funktsionaali v normi säilitavad jätkud, s.t

$$u_1|_Y = u_2|_Y = v \quad \text{ja} \quad \|u_1\| = \|u_2\| = \|v\|.$$

Veendume selles: $i \in \{1, 2\}$ korral

$$u_i|_Y = (\operatorname{Re} f_i)|_Y = \operatorname{Re}(f_i|_Y) = \operatorname{Re} g = v$$

ning

$$\|u_i\| = \|\operatorname{Re} f_i\| = \|f_i\| = \|g\| = \|\operatorname{Re} g\| = \|v\|.$$

□

Järgnev hästituntud teoreem kirjeldab normeeritud ruumi siledust alamruumide nõrga U-omaduse terminites.

Teoreem 7.3 (vt nt [L, Teoreem 2.4]). *Olgu X normeeritud ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruum X on sile;*

(ii) *ruumi X igal alamruumil on nõrk U-omadus ruumis X;*

(iii) *ruumi X igal ühemõõtmelisel alamruumil on nõrk U-omadus ruumis X;*

(iv) *ruumi X igal kinnisel hüperalamruumil on nõrk U-omadus ruumis X.*

Märkus 7.3. Teoreemidest 7.3 ja 4.4 järeldub, et üldjuhul on alamruumi nõrk U-omadus ja U-omadus erinevad mõisted: kui X on sile normeeritud ruum, mille kaasruum pole rangelt kumer (selliseid ruume leidub – vt märkust 6.1), siis teoreemi 7.3 põhjal on ruumi X igal alamruumil nõrk U-omadus ruumis X, kuid teoreemi 4.4 põhjal leidub ruumi X alamruum, millel pole U-omadust ruumis X.

Tõestame kõigepealt teoreemi 7.3 samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(iii) lokaalse versiooni.

Lause 7.4. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $x \in S_X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *x on sileduspunkt;*

(ii) *elemendi x lineaarsel kattel $\langle x \rangle$ on nõrk U-omadus ruumis X;*

(ii') *elemendi x reaallineaarsel kattel $\langle x \rangle_{\mathbb{R}}$ on nõrk U-omadus ruumiga X assotsieeruvas reaalses ruumis $X_{\mathbb{R}}$.*

Tõestus. Tähistame $Y := \langle x \rangle$.

(i)$\Rightarrow$(ii). Olgu x sileduspunkt ning olgu $g \in S_{Y^*}$. Kui $f \in S_{X^*}$ on funktsionaali g jätk, siis, valides $\theta \in \mathbb{K}$, $|\theta| = 1$, nii, et $g(\theta x) = 1$, ka $f(\theta x) = 1$; seega (arvestades, et θx on lause 6.1 põhjal sileduspunkt) funktsionaalil g eksisteerib parajasti üks normi säilitav jätk $f \in X^*$; niisiis, alamruumil Y on (nõrk) U-omadus ruumis X.

(ii)$\Rightarrow$(i). Olgu alamruumil Y (nõrk) U-omadus ruumis X ning olgu funktsionaalid $f_1, f_2 \in S_{X^*}$ sellised, et $f_1(x) = f_2(x) = 1$. Siis f_1 ja f_2 on funktsionaali $g := f_1|_Y = f_2|_Y \in S_{Y^*}$ (mis saavutab oma normi punktis $x \in S_Y$) normi säilitavad jätkud; seega (alamruumi Y (nõrga) U-omaduse tõttu ruumis X) $f_1 = f_2$, aga siit järeldub, et x on sileduspunkt.

(i)$\Leftrightarrow$(ii') järeldub nüüd (järelduse 6.3 põhjal) juba tõestatud samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(ii) reaalsest juhust. $\square$

Teoreemi 7.3 tõestus. (i)$\Rightarrow$(ii). Eeldame, et X on sile. Olgu Y ruumi X alamruum, olgu $g \in S_{Y^*}$ selline, et $g(y) = 1$ mingi $y \in S_Y$ korral, ning olgu $f_1, f_2 \in S_{X^*}$ funktsionaali g jätkud, s.t $f_1|_Y = f_2|_Y = g$. Alamruumi Y nõrgaks U-omaduseks piisab näidata, et $f_1 = f_2$. Kuna $f_1(y) = f_2(y) = g(y) = 1$, siis, arvestades, et eelduse põhjal y on sileduspunkt, $f_1 = f_2$, nagu soovitud

(ii)$\Rightarrow$(iii) ja (ii)$\Rightarrow$(iv) on ilmsed ning (i)$\Leftrightarrow$(iii) järeldub lausest 7.4.

(iv)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (iv), olgu $x \in S_X$ ning olgu $f_1, f_2 \in S_{X^*}$ sellised, et $f_1(x) = f_2(x) = 1$. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et $f_1 = f_2$.

Tähistame

$$Y := \{z \in X\colon\ f_1(z) = f_2(z)\} = \ker(f_1 - f_2).$$

Kui $f_1 \neq f_2$, siis Y on ruumi X kinnine hüperalamruum, kusjuures f_1 ja f_2 on funktsionaali $h := f_1|_Y = f_2|_Y \in S_{Y^*}$ (mis saavutab oma normi punktis $x \in S_Y$) erinevad normi sälitavad jätkud, mis on vastuolus hüperalamruumi Y nõrga U-omadusega. Seega $f_1 = f_2$, nagu soovitud. □

Järgnev nõrga U-omaduse geomeetriline iseloomustus pärineb Lima 1983. aasta artiklist [L, teoreem 2.2].

Teoreem 7.5 (vt [L, teoreem 2.2]). *Olgu Y normeeritud ruumi X kinnine alamruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *alamruumil Y on nõrk U-omadus ruumis X;*

(ii) *mis tahes $x \in S_X$, $y \in S_Y$ ja $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $r > 0$ ja $z \in Y$ nii, et*

$$\|x \pm ry - z\| \leqslant r + \varepsilon; \tag{7.1}$$

(ii') *mis tahes $x \in S_X$, $y \in S_Y$ ja $\varepsilon > 0$ korral*

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x + ny, n + \varepsilon)\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x - ny, n + \varepsilon)\right) \cap Y \neq \emptyset; \tag{7.2}$$

(iii) *mis tahes $x \in X$, $y \in S_Y$ ja $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $r > 0$ ja $z \in Y$ nii, et kehtib* (7.1)*;*

(iii') *mis tahes $x \in X$, $y \in S_Y$ ja $\varepsilon > 0$ korral kehtib* (7.2)*.*

Märkus 7.4. Artiklis [L, teoreem 2.2] on tõestatud ainult samaväärsus (i)$\Leftrightarrow$(ii), kusjuures on piirdutud vaid reaalse Banachi ruumi juhuga. Kuna iga funktsionaal on üheselt viisil jätkatav alamruumilt selle alamruumi sulundile, siis on lihtne näha (vaadeldes mittetäielikku normeeritud ruumi tema täieldi alamruumina), et see samaväärsus kehtib ka normeeritud ruumide jaoks. Lausest 7.2 nähtub, et samaväärsus (i)$\Leftrightarrow$(ii) kehtib ka komplekssel juhul. Implikatsioon (iii)$\Rightarrow$(ii) on ilmne. Kuna tingimused (ii') ja (iii') on lihtsalt vastavalt tingimuste (ii) ja (iii) ümberformuleeringud, siis jääb teoreemi 7.5 kehtivuseks tõestada implikatsioon (ii)$\Rightarrow$(iii).

TEOREEMI 7.5 IMPLIKATSIOONI (ii)$\Rightarrow$(iii) TÕESTUS. Kehtigu (ii). Kui $x = 0$, siis mis tahes $y \in S_Y$ ja $\varepsilon > 0$ korral $\|x \pm 1y - 0\| = \|y\| \leqslant 1 + \varepsilon$.

Olgu $x \in X\setminus\{0\}, y \in S_Y$ ja $\varepsilon > 0$. Siis $\frac{x}{\|x\|} \in S_X$ ja $\frac{\varepsilon}{\|x\|} > 0$, seega (ii) põhjal leiduvad $\rho > 0$ ja $u \in Y$ nii, et

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm \rho y - u \right\| \leqslant \rho + \frac{\varepsilon}{\|x\|}$$

ehk, teisisõnu,

$$\frac{1}{\|x\|} \Big\| x \pm \|x\|\rho y - \|x\|u \Big\| < \frac{1}{\|x\|} \big(\|x\|\rho + \varepsilon \big)$$

ehk

$$\Big\| x \pm \|x\|\rho y - \|x\|u \Big\| < \|x\|\rho + \varepsilon,$$

s.t kehtib (7.1), kus $r := \|x\|\rho > 0$ ja $z := \|x\|u \in Y$. $\square$

Järgnev teoreem järeldub vahetult teoreemist 6.7 ja lausest 7.4. Allpool anname sellele teoreemile ühe geomeetrilise tõestuse, mis toetub nõrga U-omaduse kriteeriumile teoreemist 7.5. Lause 7.4 (mis on triviaalne) kaudu, annab see veel ühe tõestuse teoreemi 6.7 samaväärsusele (i)$\Leftrightarrow$(iv).

Teoreem 7.6. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $y \in S_X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *elemendi y lineaarsel kattel $\langle y \rangle$ on nõrk U-omadus ruumis X;*

(i') *elemendi y reaallineaarsel kattel $\langle y \rangle_{\mathbb{R}}$ on nõrk U-omadus ruumiga X assotsieeruvas reaalses ruumis $X_{\mathbb{R}}$;*

(ii) *ühend $\bigcup_{n=1}^{\infty} B(ny, n)$ on lahtine poolruum ruumis X.*

TÕESTUS. Lauses 7.4 juba tõestatud samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(i') põhjal piisab piirduda vaid samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(ii) tõestamisega.

(i)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (i). Tänu juba tõestatud samaväärsusele (i)$\Leftrightarrow$(i') võime eeldada, et X on reaalne ruum. Tähistame $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B(ny, n)$. Teoreemi 3.6, (a), põhjal leidub funktsionaal $f \in S_{X^*}$ nii, et

$$B \subset \big\{ z \in X : \ f(z) < 0 \big\} =: A.$$

Lemma 3.4, (a2), põhjal piisab implikatsiooni tõestuseks näidata, et $\partial A \subset \overline{B}$, s.t fikseerides vabalt $x \in \partial A$ (siis $f(x)=0$) ja $\varepsilon > 0$, jääb näidata, et

$$x \in B_\varepsilon := \big\{z \in X\colon\ d(z,B) < \varepsilon\big\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(ny, n+\varepsilon)$$

(siin viimane võrdus kehtib lause 2.5, (b), põhjal). Arvestades, et alamruumil $Y := \langle y \rangle$ on eelduse põhjal nõrk U-omadus ruumis X, leidub teoreemi 7.5 põhjal

$$z \in Y \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B\Big(x+ny, n+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B\Big(x-ny, n+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\right).$$

Nüüd lemma 3.4, (b), ja lause 3.2 põhjal

$$z \in (x + B_{\frac{\varepsilon}{2}}) \cap (x - B_{\frac{\varepsilon}{2}}) \subset \big(x + A_{\frac{\varepsilon}{2}}\big) \cap \big(x - A_{\frac{\varepsilon}{2}}\big) = \Big\{u \in X\colon\ -\frac{\varepsilon}{2} < f(u) < \frac{\varepsilon}{2}\Big\}.$$

Olgu $\alpha \in \mathbb{R}$ selline, et $z = \alpha y$; siis (arvestades, et teoreemi 3.6, (a), põhjal $|f(y)| = 1$)

$$\frac{\varepsilon}{2} > \big|f(z)\big| = \big|f(\alpha y)\big| = \big|\alpha f(y)\big| = |\alpha|\,\big|f(y)\big| = |\alpha| = |\alpha|\,\|y\| = \|\alpha y\| = \|z\|;$$

seega, valides $n \in \mathbb{N}$ nii, et $z \in B\left(x - ny, n + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$,

$$\|x - ny\| = \|x - ny - z + z\| \leqslant \|x - ny - z\| + \|z\| < n + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = n + \varepsilon,$$

s.t $x \in B(ny, n+\varepsilon) \subset B_\varepsilon$, nagu soovitud.

(ii)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (ii) ning olgu $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Teoreemi 7.5 samaväärsuse (i)$\Leftrightarrow$(ii') põhjal piisab alamruumi $Y := \langle y \rangle$ nõrgaks U-omaduseks ruumis X näidata, et

$$Y \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x+ny, n+\varepsilon)\right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x-ny, n+\varepsilon)\right) \neq \emptyset. \tag{7.3}$$

Kuna eelduse põhjal on $B := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(ny, n)$ lahtine poolruum, siis lause 2.5 põhjal on ka $B_\varepsilon := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B(ny, n+\varepsilon)$ lahtine poolruum, s.t mingite $f \in S_{X^*}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral $B_\varepsilon = \big\{u \in X\colon\ \operatorname{Re} f(u) < \alpha\big\}$. Kuna $0 \in B_\varepsilon$, siis $\alpha > 0$. Nüüd

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x+ny, n+\varepsilon) = x + B_\varepsilon = \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(x) + \alpha\big\},$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x-ny, n+\varepsilon) = x - B_\varepsilon = \big\{z \in X\colon\ \operatorname{Re} f(z) > \operatorname{Re} f(x) - \alpha\big\};$$

niisiis (7.3) on samaväärne tingimusega

$$\{z \in Y\colon\ \operatorname{Re} f(x) - \alpha < \operatorname{Re} f(z) < \operatorname{Re} f(x) + \alpha\} \neq \emptyset,$$

mille kehtivuseks piisab veenduda, et $f|_Y \neq 0$; see aga järeldub lausest 2.5, (a). $\square$

Kirjandus

[B1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales,* Fund. Math. **3** (1922), 133–181.

[B2] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires,* Monografje Matematyczne, Warsaw, 1932.

[BHL] P. Bandyopadhyay, Da Huang ja Bor-Luh Lin, *Rotund points, nested sequence of balls and smoothness in Banach spaces,* Comment. Math. Prace Mat. **44** (2004), 163–186.

[BHLT] P. Bandyopadhyay, Da Huang, Bor-Luh Lin ja S. L. Troyanski, *Some generalizations of locally uniform rotundity,* J. Math. Anal. Appl. **252** (2000), 906—916.

[BL] P. Bandyopadhyay ja Bor-Luh Lin, *Some properties related to nested sequence of balls in Banach spaces,* International Conference on Mathematical Analysis and its Applications (Kaohsiung, 2000), Taiwanese J. Math. **5** (2001), 19–34.

[Beau] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and Their Geometry,* North-Holland Math. Stud., 68, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[BM] B. Beauzamy ja B. Maurey, *Points minimaux et ensembles optimaux dans les espaces de Banach,* J. Funct. Anal. **24** (1977), 107–139.

[F] S. R. Foguel, *On a theorem by A. E. Taylor,* Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 325.

[G] J. R. Giles, *Strong differentiability of the norm and rotundity of the dual,* J. Austral. Math. Soc. Ser. A **26** (1978), 302–308.

[LW] C.-J. Liao ja N.-C. Wong, *Smoothly embedded subspaces of a Banach space,* Taiwanese J. Math. **14** (2010), 1629–1634.

[L] Å. Lima, *Uniqueness of Hahn–Banach extensions and liftings of linear dependences,* Math. Scand. **53** (1983), 97–113.

[M] R. E. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory,* Graduate Texts in Mathematics, 183, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1998.

[OP] E. Oja ja M. Põldvere, *On subspaces of Banach spaces where every functional has a unique norm-preserving extension,* Studia Math. **117** (1996), 289–306.

[Ph] R. R. Phelps, *Uniqueness of Hahn-Banach extensions and unique best approximation,* Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 238–255.

[P] M. Põldvere, *Strict convexity of a smoothly renormed ℓ_1,* Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. **45** (1996), 211–215.

[SS] M. A. Smith ja F. Sullivan, *Extremely smooth Banach spaces,* in: J. Baker, C. Cleaver, and J. Diestel (eds.), *Banach Spaces of Analytic Functions,* Proc. Pełczyński Conf., Kent, Ohio, 1976, Lecture Notes in Math. 604, Springer, Berlin, 1977, 125–137.

[S] F. Sullivan, *Geometrical properties determined by the higher duals of a Banach space,* Illinois J. Math. **21** (1977), 315–331.

[T] A. E. Taylor, *The extension of linear functionals,* Duke Math. J. **5** (1939), 538–547.

[W] D. Werner, *Funktionalanalysis,* 6. Aufl., Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2007.

[Тр] С. Л. Троянски, *Пример гладкого пространства, сопряженное к которому не ябляется строго нормированным,* Studia Math. **35** (1970), 305–309.

[Вл] Л. П. Власов, *Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных простпанствах,* Успехи Мат. Наук **28**, вып. 6 (174) (1973), 3–66.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Tauri Viil (sünnikuupäev 05.02.1989),

1) annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Normi säilitavate jätkude ühesus “, mille juhendajad on professor Eve Oja ja dotsent Märt Põldvere,

    1.1) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

    1.2) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2) olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3) kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **03.06.2015**