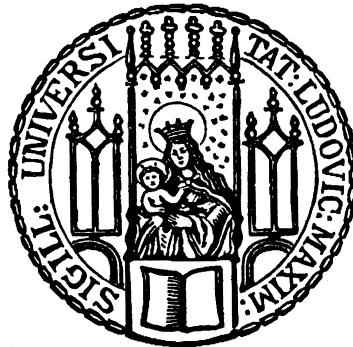


Die Relevanz kohärenter Rückstreuung für die atmosphärische Radarfernerkundung

Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München



vorgelegt von

Christian Pause

München

2016

Erstgutachter: Prof. Dr. Bernhard Mayer

Zweitgutachter: Prof. Dr. Markus Rapp

Datum der mündlichen Prüfung: 12.02.2016

Gewidmet meinem Vater

Danksagung

Mein Dank gilt Dr. Robert Buras, Dr. Claudia Emde und Prof. Dr Mayer für die stets gute und intensive Betreuung, meinen Zimmerkollegen Josef, Marius und Caro, mit denen es nie langweilig wurde, meiner Familie und meinen Freunden für all die moralische Unterstützung während dieser teils stürmischen Zeit, der 12 Uhr-Mittagessens-Gruppe und dem Spielzimmer für all den regen Austausch, Barbara, der guten Seele des Instituts, Heinz, ohne den nichts funktionieren würde, und allen anderen Kollegen und Studenten, die das Institut so großartig machen. Nicht unerwähnt bleiben sollen der Ficus, die Fassade des Brandhorst-Museums, die Krähen und die Tauben.

Zusammenfassung

Die kohärente Rückstreuung elektromagnetischer Strahlung in ungeordneten Medien und an rauen Oberflächen ist innerhalb der meteorologischen Forschung relativ unbekannt, obwohl es sich dabei um ein alltägliches Phänomen handelt, welches in einer Vielzahl von Situationen zu beobachten ist, z.B. bei der Streuung von Licht an einem weißen Blatt Papier oder bei der erhöhten Helligkeit des Vollmondes. Kohärente Rückstreuung spielt in erster Linie dort eine Rolle, wo Sender und Empfänger eines Messgerätes die gleiche Position und Blickrichtung einnehmen.

Monostatische Radargeräte, wie sie in der Fernerkundung von Hydrometeoren eingesetzt werden, erfüllen diese Bedingung. Kohärente Rückstreuung wird in der Auswertung meteorologischer Radarsignale nicht berücksichtigt, daher ist es wichtig, abzuschätzen, wie weit sie das gemessene Radarsignal verstärkt und damit das Ergebnis beeinflusst.

Zu diesem Zweck wurde das 3D Monte Carlo-Strahlungsmodell MYSTIC, das Teil des atmosphärischen Strahlungstransfer-Pakets libRadtran ist, um die Fähigkeit erweitert, kohärente Rückstreuung polarisiert zu berechnen. Hierbei wurden zwei unterschiedliche Methoden zur Berechnung implementiert. Eine Methode leitet die kohärente Rückstreuung implizit aus den Streumatrizen in Rückstreurichtung ab.

Diese Methode funktioniert jedoch nur in exakter Rückstreurichtung, da aber die kohärente Rückstreuung aus der Interferenz von reziproken Mehrfachstreupfaden entsteht, welche in MYSTIC explizit simuliert werden können, konnte eine zweite Methode implementiert werden, welche beide Pfade simuliert und deren Interferenz berechnet. Diese Methode ist vielseitiger einsetzbar, insbesondere kann sie die kohärente Rückstreuung auch abseits der exakten Rückstreurichtung berechnen.

Insgesamt zeigt sich, dass die letztgenannte Methode mit unpolarisierter und linear polarisierter Strahlung zu guten Ergebnissen führt, während die erste Methode bei allen Polarisierungen funktioniert. Die Simulation von meteorologischem Radar mit kohärenter Rückstreuung kommt zu dem Ergebnis, dass kohärente Rückstreuung nur im Fall starker bis extremer Niederschlagsereignisse einen merkbaren Effekt auf das Messergebnis hat. Dennoch führt auch der höchste simulierte Wert des Rückstreuverstärkungsfaktors von 1.45, der unter unrealistisch extremen Bedingungen berechnet wurde, nur zu einer Erhöhung des Radarreflektivitätsfaktors um 1.61 dB . Realistischere Simulationen führen zu kleineren Werten, so dass man schließen kann, dass die kohärente Rückstreuung für meteorologisches Radar keine nennenswerte Rolle spielt, da sich diese Werte im selben Bereich bewegen, wie die Messungenauigkeiten eines Radargerätes.

Abstract

Coherent backscattering of electromagnetic radiation in disordered media and on raw surfaces is relatively unknown in meteorological research. It is however a very common occurrence which can be observed in a multitude of situations, e.g. the scattering of light from a white sheet of paper or in the case of the increased brightness of a full moon. Coherent backscattering is especially relevant where transmitter and detector of a measurement instrument assume the same position and viewing direction.

Monostatic radar devices which are used in the remote sensing of atmospheric hydrometeors meet that requirement. Coherent backscattering is not considered in the analysis of meteorological radar signals, it is therefore important to gauge the importance of coherent backscattering for radar signals to understand how much it influences the results.

To assess this question the 3D Monte Carlo-radiative transfer model MYSTIC which is part of the libRadtran package for atmospheric radiative transfer has been extended with the ability to simulate coherent backscattering. Two different methods of simulation have been devised and implemented, the first one derives the coherent backscatter enhancement simply from the usual scattering matrices in exact backscattering direction using only already available data. However this method only works in the exact backscattering direction.

Since coherent backscattering results from the interference of reciprocal multiscattering photon paths and since MYSTIC explicitly simulates photon paths, a second method has been created which explicitly simulates both photon paths and calculates their interference. This method is much more versatile and works in all directions.

The results show that the second method leads to good results when used with unpolarized and linear polarized radiation while the first method works with all polarisation states. The application on meteorological radar leads to the result that only in the case of severe to extreme precipitation coherent backscattering has a measurable effect on the data. The highest simulated value for the coherent backscattering enhancement is 1.45, this value has been derived under unrealistically extreme conditions. This factor still only leads to an increase of the radar signal of 1.61 dB which is still a rather small increase in signal strength. As more realistic cases will generally lead to lower values than that it can be concluded that coherent backscattering plays no important role for meteorological radar because those values are of the same order as the general measurement uncertainties of a typical radar device.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|----------|
| Zusammenfassung | V |
| Inhaltsverzeichnis | VII |
| 1 Einführung | 1 |
| 1.1 Was ist Kohärente Rückstreuung? | 1 |
| 1.2 Die Geschichte des Radars | 5 |
| 2 Theorie des Strahlungstransfers | 6 |
| 2.1 Grundlegende Streu-Theorie | 6 |
| 2.1.1 Einführung | 6 |
| 2.1.2 Strahlungsgrößen | 7 |
| 2.1.3 Der Stokes-Vektor | 8 |
| 2.1.4 Streufunktion und Streumatrizen | 10 |
| 2.1.5 Rayleigh-Streuung | 10 |
| 2.1.6 Mie-Streuung | 12 |
| 2.1.7 Absorption, Streuung, Extinktion | 12 |
| 2.2 Herleitung der Strahlungstransfergleichung aus dem Maxwell-Gleichungen . | 13 |
| 2.2.1 Von den Maxwell-Gleichungen zur Amplitudenstrematrix | 13 |
| 2.2.2 Die Foldy-Lax-Gleichungen | 17 |
| 2.2.3 Die Twersky-Näherung | 18 |
| 2.2.4 Die Leiter-Näherung | 21 |
| 2.2.5 Die Kohärenzmatrix | 23 |
| 2.2.6 Streumatrix und Extinktionsmatrix | 24 |
| 2.2.7 Das kohärente Feld in Vorwärtsstreuung | 26 |
| 2.2.8 Die Strahlungstransfergleichung | 27 |
| 2.3 Kohärente Rückstreuung | 29 |
| 2.3.1 Einführung | 29 |
| 2.3.2 Die KRS-Reflexionsmatrix | 33 |
| 2.3.3 Der KRS-Stokes-Vektor | 37 |
| 2.3.4 Die Form des Rückstreumaximums | 40 |
| 2.4 Radar-Theorie | 42 |
| 2.4.1 Überblick über Radargeräte und Frequenzen | 42 |
| 2.4.2 Der Radarpuls | 44 |
| 2.4.3 Ableitung der Radargleichung | 45 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Kohärente Rückstreuung und MYSTIC | 49 |
| 3.1 | Überblick über MYSTIC | 49 |
| 3.1.1 | Integrale lösen mit der Monte-Carlo-Methode | 50 |
| 3.1.2 | Bedingte Wahrscheinlichkeit in Markov-Ketten | 51 |
| 3.1.3 | Anwendung auf die integrale Strahlungstransfergleichung | 51 |
| 3.1.4 | Allgemeine Funktionsweise von MYSTIC | 54 |
| 3.1.5 | Local Estimates in MYSTIC | 58 |
| 3.1.6 | Importance Sampling | 61 |
| 3.2 | Kohärente Rückstreuung in MYSTIC | 62 |
| 3.2.1 | Überblick über die Implementierung | 62 |
| 3.2.2 | Implementierung der Matrix-Methode | 65 |
| 3.2.3 | Implementierung der LIDAR-KRSV | 66 |
| 3.2.4 | Numerische Präzision | 69 |
| 3.2.5 | Limitierungen | 72 |
| 3.3 | Die Simulation von Radar in MYSTIC | 77 |
| 3.4 | SSRadar | 80 |
| 4 | Validierung und Ergebnisse | 81 |
| 4.1 | Validierung in exakter Rückstreurichtung | 81 |
| 4.1.1 | Ermittlung der optimalen optischen Dicke für die Validierung | 83 |
| 4.1.2 | Reduzierung von Spikes | 84 |
| 4.1.3 | Ergebnisse | 87 |
| 4.2 | Validierung der Form des Rückstreumaximums | 106 |
| 4.2.1 | Betrachtung eines weiten Winkelbereich | 106 |
| 4.2.2 | Validierung der Halbbreite des Maximums | 107 |
| 4.2.3 | Asymmetrie des Maximums bei linearer Polarisierung und kleinem Größenparameter | 110 |
| 4.2.4 | Fazit | 112 |
| 4.3 | Validierung der Radarsimulatoren | 113 |
| 4.3.1 | Konstanter Radius | 113 |
| 4.3.2 | Modifizierte Gamma-Verteilung | 115 |
| 4.3.3 | Fazit | 117 |
| 4.4 | Ein Anwendungsbeispiel | 117 |
| 4.5 | Kohärente Rückstreuung mit Radar | 118 |
| 4.5.1 | Anteil der Mehrfachstreuung am Radarsignal | 118 |
| 4.5.2 | Simulation der kohärenten Rückstreuverstärkung | 119 |
| 5 | Zusammenfassung und Fazit | 127 |
| | Anhang | 129 |
| | Symbolverzeichnis | 133 |
| | Abbildungsverzeichnis | 138 |
| | Tabellenverzeichnis | 140 |
| | Literaturverzeichnis | 141 |

Kapitel 1

Einführung

Die Fernerkundung der Atmosphäre mit Hilfe elektromagnetischer Strahlung unterschiedlicher Frequenzbereiche ist eine der wichtigsten Säulen der Atmosphärenforschung. Fortlaufende Weiterentwicklung von Technik und Methodik machen dieses Gebiet zu einem sehr aktiven und lebendigen Bereich der meteorologischen Forschung. Die atmosphärische Fernerkundung kann in zwei große Bereiche aufgeteilt werden: Die passive und die aktive Fernerkundung.

Die passive Fernerkundung misst in der Atmosphäre vorkommende Strahlung aus natürlichen Quellen, sowohl von der Sonne als auch thermische Strahlung, welche von Bestandteilen der Atmosphäre selbst abgegeben wird.

Die aktive Fernerkundung nutzt künstliche Quellen, welche technisch genau definiert werden und misst die von der Atmosphäre zurück gestreute Strahlung. Die bekanntesten und wichtigsten Geräte der aktiven meteorologischen Fernerkundung sind das Lidar (Light Detection And Ranging) und das Radar (RAdio Detection And Ranging). Beide basieren auf der Methode, Strahlungspulse im Bereich des sichtbaren Lichts bzw. im Mikrowellenbereich in die Atmosphäre auszusenden und das zurück gestreute Signal zeitabhängig zu messen.

Beim Lidar ist der Sender ein Laser und der Empfänger ein Teleskop, welche im Gerät direkt nebeneinander platziert sind, d.h. das Lidar misst das zurück gestreute Signal ganz knapp neben der exakten Rückstreurichtung. Beim Radar hingegen wird das Signal von derselben Antenne ausgesendet und empfangen, es wird also das Signal in exakter Rückstreurichtung gemessen.

1.1 Was ist Kohärente Rückstreuung?

Elektromagnetische Strahlung zeigt sowohl Teilchen-, als auch Welleneigenschaften. Die Energie elektromagnetischer Strahlung ist gequantelt, d.h. in kleinste unteilbare Energiepakete aufgeteilt, welche sich wie Teilchen verhalten, z.B. bei der Interaktion mit Materie. Gleichzeitig hat diese Strahlung auch Welleneigenschaften, welche sich bei Erscheinungen wie Beugung und Interferenz zeigen.

Aus der räumlichen Überlagerung von Wellen im Raum ergeben sich besondere Muster, sogenannte Interferenzmuster. Sie entstehen durch die Verstärkung oder Auslöschung von Lichtwellen abhängig davon, mit welchem Phasenunterschied sich die Lichtwellen an einem Raumpunkt überlagern. Das bekannteste Beispiel für Interferenz von Lichtwellen ist der berühmte Young'sche Doppelspaltversuch von 1802.

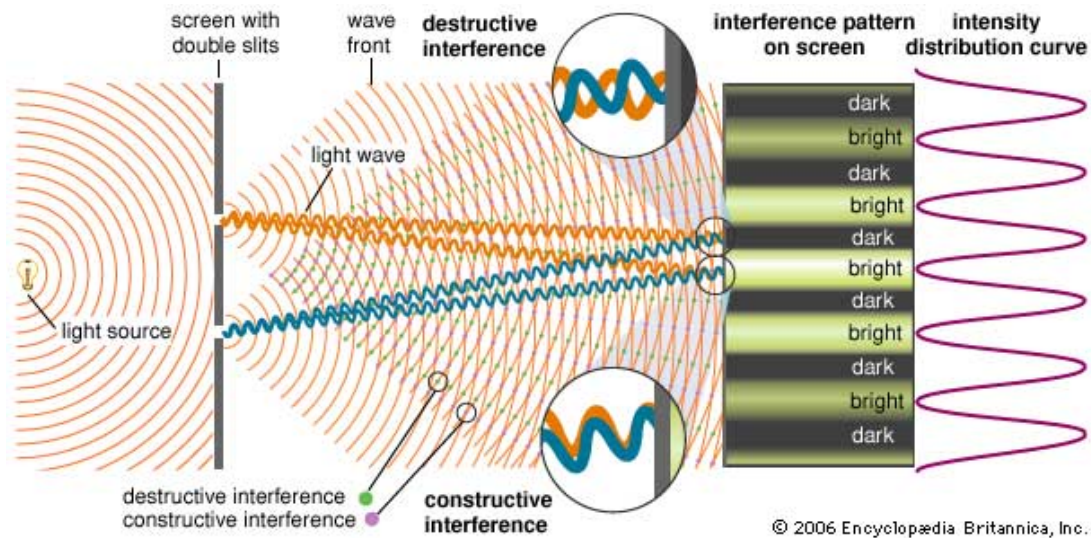


Abbildung 1.1: Entstehung eines Interferenzmusters hinter einem beleuchteten Doppelspalt. (Quelle: Encyclopædia Britannica)

Abb. 1.1 zeigt ein solches Interferenzmuster, welches aus zwei (partiellen) Kugelwellen entsteht, die von zwei Quellen (die beiden Spalte) ausgesendet werden. Derartige Interferenzen entstehen immer, wo sich Wellen überlagern, sie sind ein allgegenwärtiges physikalisches Phänomen.

Die in der aktiven atmosphärischen Fernerkundung gemessenen Objekte, i.d.R. Partikel im Nano- bis Millimeterbereich erzeugen ebenfalls Interferenzmuster. Allerdings sind normalerweise eine große Zahl solcher Partikel zufällig über größere Raumbereiche verteilt. Sind diese auch zufällig orientiert, dann liegt die Annahme nahe, dass sich bei Betrachtung der Überlagerung aller gestreuten Teilfelder im Mittel ein Ausgleich zwischen konstruktiven und destruktiven Interferenzen ergibt (Mishchenko et al [2006] Kap. 1.8). Diese Annahme ist implizit auch in der Theorie des atmosphärischen Strahlungstransfers (Chandrasekhar [1960]) enthalten und stellt für die Simulation von Strahlung in der Atmosphäre in der Regel eine gute Näherung dar.

Dennoch werden dabei sämtliche Interferenzeffekte unberücksichtigt gelassen, was dazu führt, dass auch der Effekt der kohärenten Rückstreuung, der ein fester Bestandteil eben dieser Streuung in chaotischen Medien und auch an rauen Oberflächen ist, vernachlässigt wird.

Beleuchtet man solche Medien oder Oberflächen mit kohärenter Strahlung, entsteht konstruktive Interferenz, welche diese Strahlung in Rückstreurichtung verstärkt. Es wird mehr Strahlungsenergie zum Sender zurück gestreut, als dies bei rein diffuser Streuung zu erwarten wäre. Da diese Interferenz ihren Ursprung in der Mehrfachstreuung hat, hängt die Verstärkung vom Anteil der Mehrfachstreuung am Gesamtsignal ab. Die maximal mögliche Verstärkung ist eine Verdoppelung des diffus zurück gestreuten Signals.

Kohärente Rückstreuung entsteht, wenn zwei Streupfade in entgegengesetzter Richtung über die gleichen Streuer laufen (Abb. 1.3). Jedes Paar von Endstreuern kann als ein Paar von Punktquellen betrachtet werden, deren Strahlung sich zu einem Interferenzmuster überlagert, ähnlich wie beim Doppelspalt in Abb. 1.1. Die Überlagerung dieser Interferenzmuster führt im Falle eines ungeordneten Mediums dazu, dass es in einem engen Bereich um die Rückstreurichtung zu konstruktiver Verstärkung kommt, welche durch

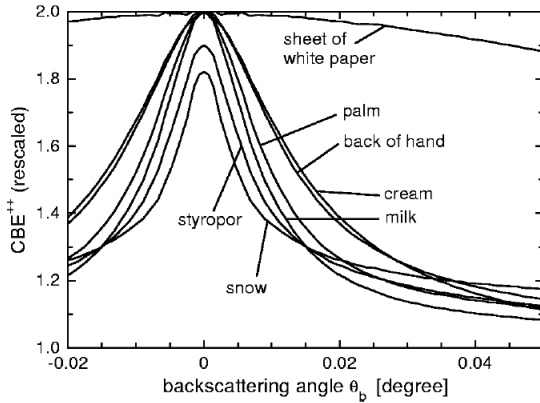


Abbildung 1.2: Beispiele für verschiedene kohärente Rückstreumaxima (aus Lenke et al [2000]). Aufgetragen ist der Verstärkungsfaktor gegen den Winkelabstand zur Rückstreurichtung in Grad. Die Wellenlänge beträgt 514 nm bei zirkulärer Polarisation. Alle Kurven außer Styropor und Snow sind auf einen Faktor von 2 skaliert.

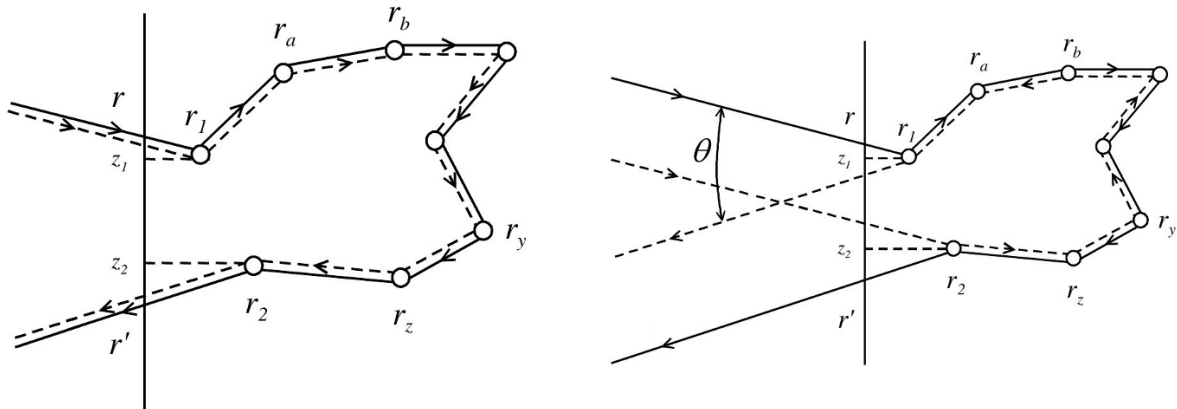


Abbildung 1.3: Entstehung von kohärenter Rückstreuung. Links: Diffuse Streuung in einem Medium als das Produkt zweier identischer Streupfade vom Punkt r_1 zum Punkt r_2 . Rechts: Kohärente Streuung im Winkel θ in einem Medium als das Produkt zweier reziproker und im Medium identischer Streupfade zwischen den Punkten r_1 und r_2 . In exakter Rückstreurichtung ($\theta = 0$) werden die Pfade komplett identisch und interferieren stets maximal konstruktiv. (Graphik modifiziert aus Akkermans et al [2007])

eine sehr schwache destruktive Interferenz in allen Richtungen ausgeglichen wird (Fiebig et al [2008]).

Abb. 1.3 rechts erklärt, wie es dazu kommt: In Rückstreurichtung wird der Winkel θ gleich Null. Solange die beiden Endstreuer r_1 und r_2 vom Empfänger aus sichtbar sind und man ebene Wellen annimmt, sind die Weglängen zwischen dem Sender bzw. Empfänger und den beiden Endstreuern stets gleich lang. Es ist leicht zu sehen, dass dies für beliebige Streupfade innerhalb des Mediums gilt. Beide Streupfade sind für jeden beliebigen Streuweg im Medium gleich lang, was letzten Endes zu deutlich sichtbarer konstruktiver Interferenz führt.

Die Rückstreuverstärkung erscheint in Form eines Kegels (in der englischsprachigen Literatur allgemein als "backscattering cone" bezeichnet) dessen Maximum in der exakten Rückstreurichtung liegt (Abb. 1.2). Ist das Medium nicht absorbierend, nimmt das Rückstreumaximum eine spitz zulaufende Form an, Absorption im Medium führt zu einer Abrundung dieser Spitze (Lenke et al [2000]).

Auch an rauen Oberflächen kann dieses Phänomen beobachtet werden, da die Unebenheiten einer solchen Oberfläche ebenfalls zu Mehrfachstreuung führen (Mendez et al [1987]).

Abb. 1.2 zeigt einige alltägliche Beispiele für solche Oberflächen und Medien. Die Breite dieser Maxima hängt von der Wellenlänge ab, sowie bei ungeordneten Medien von der optischen Dicke und der Asymmetrie der Streufunktion (Lenke et al [2000]), bei rauen Oberflächen entsprechend von der Tiefe und Breite der Oberflächenstrukturen (Mendez et al [1987]), ab.

Kohärente Rückstreuung ist in der Natur allgegenwärtig, entzieht sich jedoch in den meisten Fällen dem Betrachter, denn sobald sich dieser in die Position begibt, von welcher aus die Verstärkung sichtbar wäre, schattet er die Quelle ab.

Dennoch kann kohärente Rückstreuung in der Natur beobachtet werden, z.B. im Falle des Oppositionseffekts, welcher sich u.a. in der erhöhten Reflektivität von Himmelskörpern und in Vegetations-Hotspots zeigt (Hapke et al [1996]). Man vermutete früher, dass dieser allein durch "Shadow-Hiding" erklärbar sei, was den Effekt beschreibt, dass beim Blick aus der Richtung der Strahlungsquelle sämtliche streuenden Objekte ihre eigenen Schatten verdecken und damit der Anteil beleuchteter und damit streuender Flächen maximal ist. Hapke et al [1998] zeigen, dass die erhöhte Helligkeit des Vollmondes jedoch nicht allein durch Shadow-Hiding erklärbar ist, sondern durch eine Kombination dieses Effekts mit kohärenter Rückstreuung des Sonnenlicht an den sehr feinen Partikeln des Mondstaubes. Aufgrund des sehr großen Abstands zwischen Sonne und Mond und des daraus resultierenden kleinen Winkelabstandes zwischen Erde und Sonne bei Vollmond, kommt ein erdgebundener Betrachter so nah an die Rückstreurichtung heran, dass er einen Teil der kohärenten Rückstreuerverstärkung sehen kann, ohne dabei die Quelle abzuschatten.

Die Erkenntnisse zu diesem Phänomen sind noch nicht sehr alt. Barabanenkov [1973] sagte seine Existenz aufgrund von Berechnungen innerhalb der Quantenfeldtheorie vorher, ab Mitte der 1980er Jahre wurde es dann im Zuge von ersten erfolgreichen Laborexperimenten zum Gegenstand intensiver Forschung. Zahlreiche Veröffentlichungen über erste Beobachtungen der kohärenten Rückstreuung innerhalb kurzer Zeit zeugen davon: Kuga et al [1984], Tsang et al [1984], van Albada et al [1985], Wolf et al [1985], Akkermans et al [1986]. Ausführliche theoretische Abhandlungen des Phänomens folgten: Akkermans et al [1988] beleuchteten die kohärente Rückstreuung mit Hilfe der Diffusionstheorie, welche in der mesoskopischen Betrachtung der Interaktion von Strahlung und Materie das Mittel der Wahl ist.

Neben der Diffusionstheorie bietet auch die schon erwähnte Quantenfeldtheorie eine solide und exakte theoretische Grundlage. In beiden Theorien wird die kohärente Rückstreuung auch als "schwache Lokalisierung" bezeichnet, welche die Vorstufe der Anderson- oder "starken" Lokalisierung ist. Diese beschreibt einen Zustand, bei dem Wellen (elektromagnetische oder Materiewellen) in einem genügend dichten ungeordneten Medium durch Interferenzeffekte in geschlossenen Pfaden so stark gebunden (lokalisiert) werden, dass der diffuse Transfer durch das Medium zusammenbricht. Die Wellen werden quasi im Medium gefangen (Akkermans et al [2007]).

Mishchenko [1992] benutzte dagegen die in der atmosphärischen Strahlungstransfertheorie allgemein verbreitete Betrachtung über Streumatrizen. In späteren Arbeiten stellte er des Weiteren eine Verbindung zwischen der Strahlungstransfergleichung, welche alle Kohärenzeffekte ausschließt, und der kohärenten Rückstreuung her (Mishchenko et al [2006]).

Es stellt sich die Frage, ob kohärente Rückstreuung in der aktiven Fernerkundung durch monostatische Radar-Geräte eine nennenswerte Rolle spielt und ob sie bei der Auswertung von Messdaten berücksichtigt werden muss. Es gibt bisher zu dieser Frage nur wenige

Arbeiten, z.B. Mishchenko [1996] und Kobayashi et al [2005]. Letztere errechneten eine Erhöhung des Radarreflektivitätsfaktors um 0.65 dB , daher soll diese Frage in dieser Arbeit mit Hilfe fortgeschrittener 3D-Strahlungstransfer-Simulationen eingehend beleuchtet werden.

Dazu wurde das 3D Monte-Carlo-Strahlungstransfer-Modell MYSTIC (Mayer [2009]) mit Routinen zur Simulation von kohärenter Rückstreuung erweitert, welche für unterschiedliche Radar-Ziele (Wolken, Regen, Hagel) und verschiedene Wellenlängen eine definitive Antwort liefern sollen. Da die Simulation von kohärenter Rückstreuung in einem Monte-Carlo-Strahlungstransfermodell eine komplexe Aufgabe darstellt, ist ein wesentlicher Teil dieser Arbeit der Methodik selbst gewidmet.

Im zweiten Kapitel werden zunächst die zum Verständnis notwendigen Grundlagen der Strahlungstheorie dargestellt und die Strahlungstransfergleichung, welche die theoretische Basis darstellt, aus den Maxwellgleichungen nach Mishchenko et al [2006] abgeleitet. Dann folgen die Einführungen in die kohärente Rückstreuung und - kurz - in die Radar-Theorie. Kapitel drei stellt das Strahlungstransfermodell MYSTIC vor und beschreibt die beiden Methoden, mit denen die kohärente Rückstreuung in MYSTIC implementiert wurde. Außerdem zeigt es die Implementierung der Radar-Simulation in MYSTIC und beschreibt kurz das neu programmierte Modell SSRadar.

Das vierte Kapitel beschreibt die Validierung der beiden Methoden, der Simulation über einen Winkelbereich um die Rückstreurichtung herum, sowie der Radar-Simulationen. Zur Beantwortung der Frage nach der Bedeutung der kohärenten Rückstreuung für die Radar-Fernerkundung folgen Simulationen bei Radar-Wellenlängen.

Ein Fazitkapitel schließt die Arbeit ab.

1.2 Die Geschichte des Radars

Die Grundlagen für die Entwicklung des Radars wurden durch Heinrich Hertz im Jahr 1886 gelegt, als er das physikalische Grundprinzip der Übertragung elektromagnetischer Wellen nachwies. Der Inder Jagadish Chandra Bose und der Deutsche Christian Hülsmeier leisteten in den folgenden Jahrzehnten Pionierarbeit auf diesem Gebiet, zu einem echten Durchbruch kam es aber erst in den 1930er Jahren. Nahezu zeitgleich und unabhängig voneinander wurden in Deutschland, England und der Sowjetunion Radargeräte entwickelt, die bereits im zweiten Weltkrieg eine wichtige Rolle im Bereich der militärischen Flugabwehr spielten.

Nach dem zweiten Weltkrieg verlagerte sich der Schwerpunkt der Forschung in die USA, wo u.a. 1951 das erste Synthetic Aperture Radar entwickelt wurde. Die Geburtsstunde des Wetterradars liegt im zweiten Weltkrieg, als man beobachtete, dass Niederschlagsereignisse Radarechos auslösten. Nach dem Krieg wurde gezielt an Wetterradaren gearbeitet und geforscht. In den 1960er Jahren wurde das Doppler-Radar entwickelt, welches die Messung der Geschwindigkeit von Objekten erlaubt, und in den 1970er Jahren begann man in den USA, Netzwerke aus Radargeräten aufzubauen.

Zwischen 1980 und 2000 wurden Wetterradarnetzwerke zum Standard in vielen Industrieländern wie den USA, Deutschland und Japan. Seit 2000 wird auch zunehmend Dual-Polarisation Radar eingesetzt, welches mit Hilfe von polarisierter Strahlung Informationen über die Form der Niederschlagspartikel liefert. Ebenfalls wurden zunehmend Radargeräte mit kürzeren Wellenlängen (mm -Bereich) entwickelt, welche besonders zur Fernerkundung von Wolken geeignet sind.

Kapitel 2

Theorie des Strahlungstransfers

In diesem Kapitel werden zunächst die notwendigen Grundbegriffe der Strahlungs- und der Streutheorie dargelegt. Der folgende Abschnitt widmet sich der Ableitung der Strahlungstransfergleichung aus den Maxwell-Gleichungen nach Mishchenko et al [2006], um ein Verständnis für die Gründe zu erlangen, warum die kohärente Rückstreuung in der Strahlungstransfergleichung nicht berücksichtigt wird. Als nächstes wird die kohärente Rückstreuung selbst beschrieben und zwei Herangehensweisen entwickelt, mit denen die kohärente Rückstreuung berechnet werden kann. Den Schluss des Kapitels bildet eine kurze Einführung in die Radar-Theorie.

2.1 Grundlegende Streu-Theorie

Zur Einführung in die Theorie des Strahlungstransfers werden zunächst wichtige Grundelemente der Streuung elektromagnetischer Strahlung an Partikeln vorgestellt. Im meteorologischen Bereich reicht die Größenordnung dieser Partikel von Luftmolekülen, deren Größe ungefähr bei 0.3 nm liegt, bis hin zu großen Hagelkörnern, die in Extremfällen 10 cm Durchmesser erreichen können.

2.1.1 Einführung

Streuung von elektromagnetischer Strahlung an Partikeln bezeichnet den Prozess, bei dem ein Partikel einen Teil der Energie der Strahlung aufnimmt und reemittiert. Das dabei ausgesendete Streufeld kann näherungsweise als Kugelwelle mit einer von Teilchengröße, -position und Wellenlänge abhängigen Energieverteilung angesehen werden, und wird beschrieben durch die Streufunktion bzw. der Streumatrix des Teilchens. In dieser Arbeit wird nur elastische Streuung an kugelförmigen Teilchen betrachtet, d.h. Streuung ohne die Anregung von Atomen oder Molekülen und die damit einher gehende Veränderung der Frequenz der gestreuten Strahlung.

Kugelförmige Teilchen sind in der Streutheorie (Rayleigh, Mie) am einfachsten zu beschreiben, daher ist es eine der wesentlichen Vereinfachungen in der Streutheorie, alle Teilchen als Kugeln anzunähern. Natürlich gibt es große Bemühungen, nicht-kugelförmige Teilchen möglichst akkurat in ihrer eigentlichen Form zu beschreiben, das gilt besonders für Aerosole, sowie für Eiskristalle, welche verantwortlich für eine Vielzahl optischer Effekte in der Atmosphäre sind, die bei Annäherung durch Kugeln nicht simulierbar sind. Dieses ist jedoch mathematisch anspruchsvoll und mit großem Rechenaufwand verbunden.

Als erstes wird der Größenparameter a eingeführt, welcher das Verhältnis von Partikelradius und Wellenlänge ausdrückt:

$$a = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (2.1)$$

λ ist die Wellenlänge der Strahlung, r ist der Teilchenradius.

Der Streuquerschnitt σ_s ist gegeben als das Integral der gestreuten Strahlungsenergie Q_s über eine geschlossene Kugelfläche um das Teilchen herum, normiert durch die einfallende Strahlungsenergie Q_i (diese Größe wird in Kap. 2.1.7 detaillierter eingeführt):

$$\sigma_s = \frac{1}{Q_i} \oint_{4\pi r^2} Q_s dA \quad (2.2)$$

Die Streueffizienz ist damit gegeben durch das Verhältnis von Streuquerschnitt und der geometrischen Querschnittsfläche A_Q des Teilchens senkrecht zur einfallenden Strahlung:

$$Q_{as} = \frac{\sigma_s}{A_Q} \quad (2.3)$$

Abhängig vom Größenparameter werden drei Streuregimes unterschieden: Mie-Streuung, Rayleigh-Streuung und geometrische Optik.

1. Ist $a < 0.1$, sind also die Teilchen sehr klein im Vergleich zur Wellenlänge, spricht man von Rayleigh-Streuung. Die Teilchen verhalten sich hier wie Dipole, die im Wechselfeld der EM-Welle angeregt werden und die Streueffizienz ist proportional zu λ^{-4} , d.h. sie nimmt mit zunehmendem Größenparameter stark zu, was z.B. die Blaufärbung des Himmels erklärt (s.u.). Für die meisten in der Meteorologie betrachteten Wellenlängen erreicht die Streueffizienz den Wert 1 im Übergangsbereich vom Rayleigh- zum Mie-Bereich.
2. Liegt der Größenparameter zwischen 0.1 und 100, dann ergeben sich durch Resonanzeffekte und Interferenzen komplexe Streumuster, für deren mathematische Formulierung für kugelförmige Teilchen die Mie-Theorie herangezogen wird (Mie [1908]). Die Streueffizienz steigt aus dem Rayleigh-Bereich kommend zunächst noch weiter an, kann einen Maximalwert von bis über 4 erreichen und oszilliert dann mit kleiner werdender Amplitude um den Wert 2 für größer werdenden Größenparameter. Für sichtbares Licht liegt der Größenparameter des Maximalwertes ungefähr bei 2π , für andere Wellenlängen (Ultraviolett, Infrarot, Mikrowelle) ist er stark variabel und kann Werte von 64.3 (für $\lambda = 10 \text{ nm}$) oder nur 1.2 (für $\lambda = 1 \text{ mm}$) betragen. Die Mie-Theorie ist auch für kleinere Größenparameter gültig, kann dort aber durch die mathematisch einfachere Rayleigh-Theorie gut approximiert werden.
3. Oberhalb des Mie-Bereichs ($a > 100$), liegt der Bereich der geometrischen Optik. Die Streueffizienz ist hier gleich 2 und zur mathematischen Beschreibung der Streuung werden einzelne Strahlengänge innerhalb des Teilchens abhängig von den klassischen Gesetzen der geometrischen Optik betrachtet. Dieser Bereich ist in dieser Arbeit nicht von Belang.

2.1.2 Strahlungsgrößen

Die Strahlungsenergie eines Photons ist gegeben durch $Q_0 = hf$, wobei f die Frequenz und h das Plancksche Wirkungsquantum ist, die Einheit ist Joule. Nimmt man eine spektrale

Verteilung der Photonenzahlen $n(f)$ an, so ist die Strahlungsenergie Q_f allgemein gegeben durch das Integral über alle Frequenzen:

$$Q_f = h \int_0^\infty n(f) f df \quad (2.4)$$

Die wichtigste Strahlungsgröße, welche in dieser Arbeit vorkommt, ist die Strahldichte I . Sie ist definiert als die Strahlungsenergie dQ_f , welche aus einem Raumwinkelintervall $d\Omega$ in einem Zeitintervall dt auf eine Fläche dA trifft, welche gegenüber der Einfallrichtung um den Winkel θ geneigt ist:

$$I = \frac{dQ_f}{\cos \theta d\Omega dt dA} \quad (2.5)$$

Ihre Einheit lautet $W/m^2 sr$. Wird die Strahldichte mit Cosinus-Wichtung über den Raumwinkel integriert, ergibt sich die Strahlungsstromdichte (auch Bestrahlungsstärke genannt) mit der Einheit W/m^2 :

$$L = \int_{\Omega} I \cos \theta d\Omega = \frac{dQ_f}{dt dA} \quad (2.6)$$

Die Integration kann dabei über die gesamte Kugel ($\Omega = 4\pi$) oder, wie in der Meteorologie üblich, über eine Halbkugel ($\Omega = 2\pi$) erfolgen. Diese Größen beschreiben die Energie des Feldes und sind direkt messbar. Allerdings enthalten sie keine Information über die einzelnen Streuprozesse, welche in der Summe die gestreuten Energie ausmachen.

2.1.3 Der Stokes-Vektor

Eine monochromatische elektromagnetische Welle $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta)$ ist durch ihre Amplitude \mathbf{E}_0 , ihre Phase δ , ihre Ausbreitungsrichtung \mathbf{r} und ihre Kreisfrequenz ω bzw. Kreiswellenzahl \mathbf{k} gegeben. Das Schwingungsverhalten dieser Welle im Raum kann zusätzlich über ihren Polarisationszustand beschrieben werden. Blickt man entlang der Ausbreitungsrichtung der Welle, dann schwingt dieser Vektor innerhalb einer Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, in welcher er in eine senkrechte \mathbf{E}_\perp und eine parallele \mathbf{E}_\parallel Komponente aufgeteilt werden kann, zwischen denen außerdem eine Phasendifferenz $\Delta\delta$ besteht. Diese drei Größen definieren den Polarisationszustand der Welle vollständig und sind außerdem direkt messbar.

Zur Beschreibung von polarisierter Strahlung wird der Stokes-Vektor \mathbf{I} verwendet:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\perp^2 + E_\parallel^2 \\ E_\perp^2 - E_\parallel^2 \\ E_\perp E_\parallel \cos(\Delta\delta) \\ -E_\perp E_\parallel \sin(\Delta\delta) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

I ist die Strahldichte der Welle (Gl. 2.5), Q beschreibt die lineare Polarisation, U die schräglineare Polarisation, welche um 45° gegenüber Q geneigt ist, und V beschreibt die zirkuläre Polarisation, bei der der Feldvektor einer Kreisbewegung folgt (siehe Abb. 2.1). In der Literatur findet man die Definition der Q -Komponente auch umgekehrt als wie in Abb. 2.1 dargestellt, daher ist hier erhöhte Vorsicht geboten: Während die I -, U - und V -Komponente beim Vertauschen von \mathbf{E}_\perp und \mathbf{E}_\parallel gleich bleiben, ändert sich das Vorzeichen von Q (siehe Gl. 2.7). Das gilt auch für die Drehrichtung der zirkulären Polarisation, hier

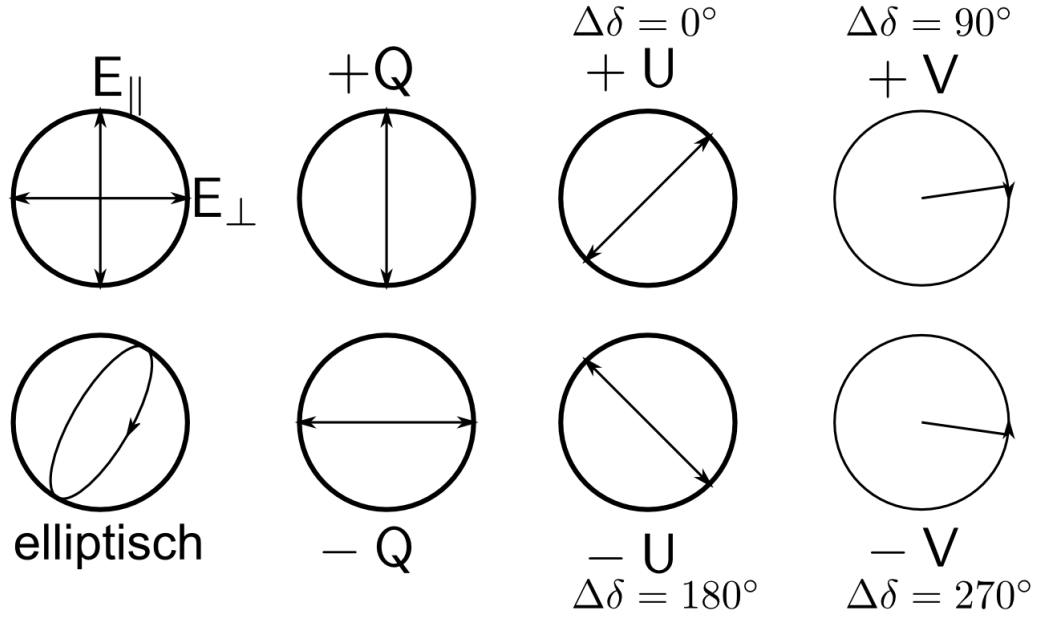


Abbildung 2.1: Links oben: Definition der beiden Komponenten E_{\perp} und E_{\parallel} des Feldvektors. Links unten: Allgemeiner Fall elliptischer Polarisation, Überlagerung aller drei Polarisationskomponenten, die Beträge der Feldkomponenten sind nicht gleich, die Phasendifferenz hat einen beliebigen Wert (Mishchenko et al [2006] Kap. 2.7). Mitte links: Lineare Polarisation, eine der beiden Komponenten ist gleich 0. Mitte rechts: Schräglineare Polarisation, die Beträge der Feldkomponenten sind gleich, Phasendifferenz $\Delta\delta$ von 0° oder 180° . Rechts: Zirkuläre Polarisation, die Beträge der Feldkomponenten sind gleich, Phasendifferenz $\Delta\delta$ von 90° oder 270° , Feldvektor vollführt eine Kreisbewegung.

können beide Drehrichtungen als positiv definiert werden, wodurch sich die Vorzeichen von U und V umkehren.

Der Stokes-Vektor einer einzelnen monochromatischen Welle ist stets vollständig polarisiert, d.h. er erfüllt die folgende Bedingung:

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \quad (2.8)$$

Der beobachtete Polarisationszustand von Strahlung, die aus mehreren monochromatischen Wellen zusammengesetzt ist, ergibt sich aus der Überlagerung solcher monochromatischen Wellen und ist damit nicht mehr an diese Bedingung gebunden. Makroskopisch betrachtet ist unpolarisierte Strahlung daher nichts anderes als eine Überlagerung von monochromatischen Wellen, welche alle Polarisationsformen gleich verteilt aufweisen.

Reale Lichtwellen weisen selbst bei übereinstimmender Polarisation oft Fluktuationen sowohl in der Amplitude als auch in der Phase auf, welche sich jedoch bei einer Messung der Strahlung heraus mitteln, da Messinstrumente nicht den instantanen Zustand des Felds erfassen können, sondern stets über einen gewissen Zeitraum mitteln. Solche Strahlung wird entsprechend als quasi-monochromatische Strahlung bezeichnet (Mishchenko et al [2006] Kap. 2.9) und für sie gilt $I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$.

2.1.4 Streufunktion und Streumatrizen

Die Streufunktion S (aus historischen Gründen auch Phasenfunktion genannt) beschreibt die Abstrahlung von EM-Strahlung durch ein schwingendes Teilchen, welches durch ein äußeres Feld angeregt wird. Im Fall eines kugelförmigen Teilchens ist die abgegebene Strahldichte nur vom Winkel Θ zwischen dem Richtungsvektor des anregenden Felds und dem Richtungsvektor des gestreuten Feldes abhängig ($S = S(\cos \Theta)$). Die Streufunktion ist so normiert, dass bei ihrer Anwendung die Gesamtenergie erhalten bleibt, d.h. das Integral über alle Richtungen (Streuwinkel Θ und Azimutwinkel ϕ) ergibt 1 (Liou [2002]):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{S(\cos \Theta)}{4\pi} \sin \Theta d\Theta d\phi = 1 \quad (2.9)$$

Für die volle Beschreibung der Polarisation der Strahlung wird die Streumatrix \bar{M} (auch Müller- oder Phasenmatrix genannt) verwendet, sie transformiert den Stokes-Vektor der einfallenden Strahlung \mathbf{l}_0 in den der gestreuten Strahlung: $\mathbf{l} = \bar{M}\mathbf{l}_0$. Ihr (1,1)-Element ist die Streufunktion ($M_{11} = S$), sie beschreibt die Verteilung der gestreuten Strahldichte abhängig vom Streuwinkel. Die anderen Elemente beschreiben, wie das Teilchen einfallende Polarisationszustände transformiert. Wie die Streufunktion ist auch diese Matrix nach Gl. 2.9 normiert. Die allgemeine Form der Müller-Matrix für rotationssymmetrische Teilchen in zufälliger Orientierung lautet (Van de Hulst [1957]):

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} & M_{34} \\ 0 & 0 & -M_{34} & M_{44} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Für kugelförmige Teilchen gilt außerdem $M_{22} = M_{11}$ und $M_{44} = M_{33}$.

Abbildung 2.2 zeigt beispielhaft die vier (teilweise normierten) Streumatrixelemente für kugelförmige Teilchen, bzw unregelmäßig geformte Teilchen, die als Kugeln angenähert werden. Hieraus wird ersichtlich, wie unterschiedliche die Verteilung der gestreuten Energie und das Polarisationsverhalten abhängig von der Teilchenform sein kann.

2.1.5 Rayleigh-Streuung

Die Streumatrix für reine Rayleigh-Streuung lautet unter Vernachlässigung der Rayleigh-Depolarisation (Hansen et al [1974]) folgendermaßen:

$$\bar{M}_R = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \Theta) & -\frac{3}{4}\sin^2 \Theta & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4}\sin^2 \Theta & \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \Theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}\cos \Theta \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Eine Visualisierung dieser Matrix findet man in der violetten Kurve in Abbildung 2.2, welche die Rayleigh-Strahlung darstellt. Die Streufunktion M_{11} hat aufgrund der Cosinus-Abhängigkeit ein Minimum im Bereich der Seitwärtsstreuung, während M_{12} , das die lineare Polarisierung beschreibt, dort durch die Sinus-Abhängigkeit betragsmäßig ein Maximum hat. Für einen Streuwinkel von 90° ist $M_{12} = -M_{11}$, das heißt die Strahlung ist 100% linear polarisiert. Dieser Effekt lässt sich bei der Polarisation des Himmelslichtes (d.h. der diffus von Luftmolekülen gestreuten Sonnenstrahlung) beobachten.

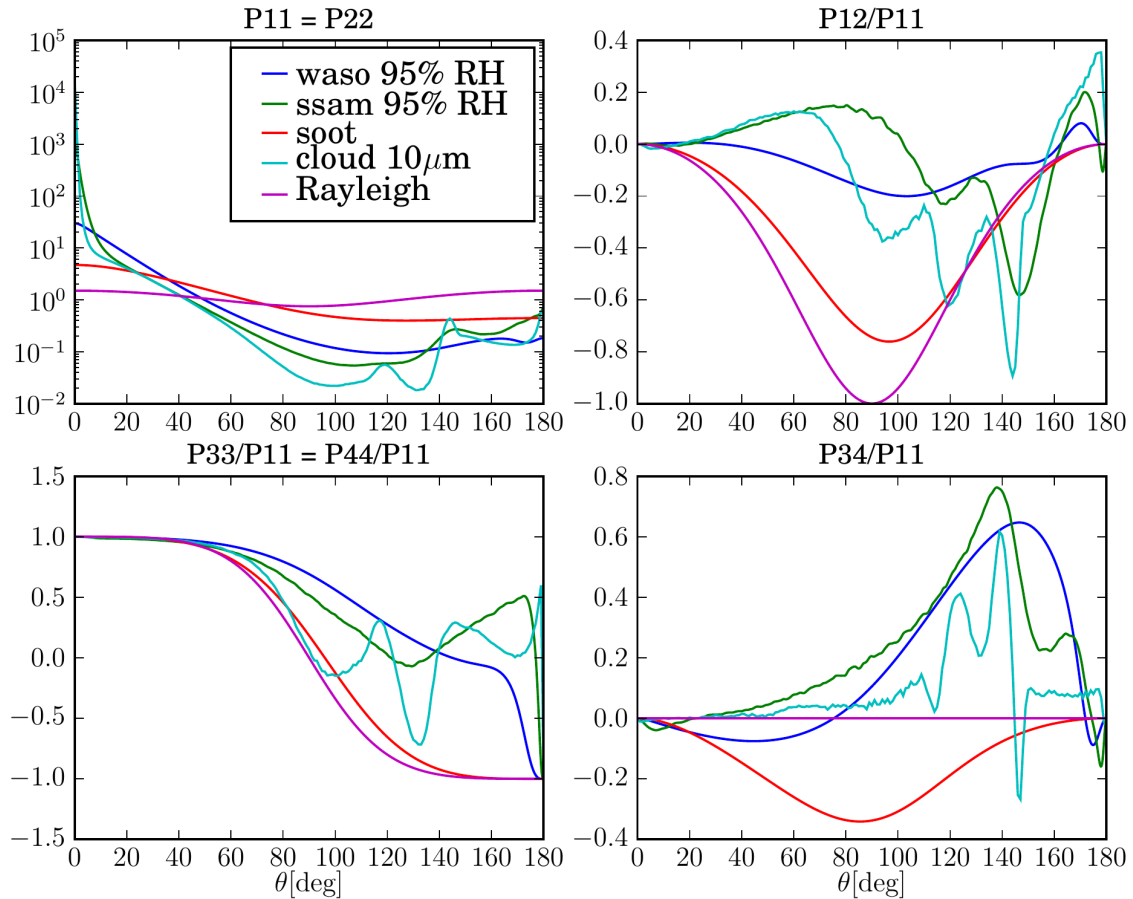


Abbildung 2.2: Streumatrixelemente für OPAC Aerosole der Typen "wasserlöslich" (WASO), "sea salt accumulated mode" (SSAM) und Ruß (SOOT) (Hess [1998]), außerdem für Wolkenröpfchen mit effektivem Radius von $10\mu m$ und für Rayleigh-Streuung. Die Wellenlänge beträgt 350 nm . P_{11} entspricht M_{11} und I, P_{12} entspricht M_{12} und Q, P_{33} entspricht M_{33} und U und P_{34} entspricht M_{34} und V. (Abbildung modifiziert aus Emde et al [2010])

Rayleigh-Streuung des Sonnenlichtes an Luftmolekülen ist zwar aufgrund des Größenparameters sehr gering, aber die große Zahl an Luftmolekülen führt zu der erwähnten Blaufärbung der Atmosphäre, da aufgrund der λ^{-4} -Abhängigkeit der Streueffizienz die Rayleigh-Streuung bei einer Wellenlänge von 400 nm (blau) 16 mal so stark ist, wie bei 800 nm (rot) und damit mehr blaues Licht gestreut wird. Erst bei langen Streuwegen werden auch die roten Anteile ausreichend gestreut (z.B. bei Dämmerung). Der Teil des Himmelslichts, welcher von der Sonne aus im rechten Winkel zum Beobachter gestreut wird ist dazu fast vollständig linear polarisiert, das exakt vorwärts und rückwärts gestreute Licht dagegen ist fast unpolarisiert. Die theoretischen Werte werden in der Realität aufgrund von Mehrfachstreuungseffekten nicht erreicht.

Schräglinare Polarisierung ($M_{33} = M_{44}$) hat ihre Maxima dagegen in Vorwärts- und Rückstreurichtung und ist Null in Seitwärtsstreurichtung. Zirkuläre Polarisierung ist im Rayleigh-Bereich vernachlässigbar, daher ist $M_{34} = 0$ für alle Θ .

2.1.6 Mie-Streuung

Für Mie-Streuung gibt es keine einfache allgemeine Formel für die Streumatrix. Ein Blick auf die türkisfarbene Kurve in Abb. 2.2 zeigt exemplarisch, dass Streuung im Mie-Bereich aufgrund von Resonanz- und Beugungseffekten einem komplexen Muster folgt, das abhängig vom Größenparameter recht unterschiedlich sein kann.

Eine numerische Lösung dieses Streuproblems ist über die Mie-Theorie möglich (Mie [1908]), welche die Streuung direkt aus den Maxwell-Gleichungen ableitet. Die konkrete Anwendung dieser Theorie ist nicht trivial und der Rechenaufwand steigt mit zunehmendem Größenparameter a deutlich an. Im Grenzfall für im Vergleich zur Wellenlänge sehr kleine Teilchen führt die Mie-Theorie zum selben Ergebnis wie die Rayleigh-Theorie.

Allgemein hervorstechende Merkmale der Mie-Streuung sind die dominierende und mit der Größe zunehmende Vorwärtsstreuung, sowie mehrere deutliche Streumaxima zwischen 90° und 180° , insbesondere der primäre Regenbogen um 140° , der sekundäre Regenbogen um 120° und die Rückstreuglorie knapp unterhalb von 180° .

2.1.7 Absorption, Streuung, Extinktion

Bei der Interaktion von Strahlung mit einem Teilchen kann neben Streuung auch Absorption von Strahlungsenergie durch das Teilchen vorkommen, der Effekt beider Mechanismen zusammen wird als Extinktion bezeichnet, welche die Abschwächung der ursprünglichen ungestreuten Strahlung beschreibt.

Eine Größe, diese Prozesse zu quantifizieren ist der Wirkungsquerschnitt, welcher ein Wahrscheinlichkeitsmaß dafür ist, wie stark ein Teilchen Strahlung streut und absorbiert, seine Einheit ist m^2 . Gemessen wird die Strahlungsenergie Q_g eines Strahlungsfeldes auf einer Fläche A , die senkrecht zum Strahlungsfeld steht. Innerhalb des Strahlungsfeldes befindet sich ein streuendes Teilchen so, dass sein "Schatten" vollständig innerhalb der Fläche A liegt. Nach der Messung wird das Teilchen entfernt und erneut die Strahlungsenergie Q_i gemessen. Der Extinktionsquerschnitt σ_e ergibt sich dann durch die Energiedifferenz, welche auf der Fläche A gemessen wird (Zdunkowski et al [2007]):

$$\sigma_e = \frac{1}{Q_i} \int_A (Q_i - Q_g) dA \quad (2.12)$$

Die extinguierte Strahlung enthält sowohl die gestreute als auch die absorbierte Strahlung. Betrachtet man nur die gestreute Strahlung, dann betrachtet man, wie bereits erwähnt, eine Kugelfläche um das Teilchen, deren Radius größer als der Teilchenradius ist (Gl. 2.2):

$$\sigma_s = \frac{1}{Q_i} \oint_{4\pi r^2} Q_s dA$$

Der Absorptionsquerschnitt ergibt sich dann durch:

$$\sigma_a = \sigma_e - \sigma_s \geq 0 \quad (2.13)$$

Befinden sich viele Streuer in einem Einheitsvolumen, so sind Streu-, Absorptions- und Extinktionskoeffizient gegeben als die jeweilige Summe der Einzelquerschnitte multipliziert mit der Teilchenzahldichte pro Einheitsvolumen n_0 :

$$k_s = \sigma_s n_0, \quad k_a = \sigma_a n_0, \quad k_e = \sigma_e n_0 \quad k_e = k_a + k_s \quad (2.14)$$

Die optischen Dicken τ sind gegeben als Wegintegral über die Koeffizienten:

$$\tau_s = \int_0^L k_s(s)dl \quad \tau_a = \int_0^L k_a(s)dl \quad \tau_e = \int_0^L k_e(s)dl \quad \tau_e = \tau_a + \tau_s \quad (2.15)$$

Zum Schluss wird das Bougert-Lambert-Beer-Gesetz vorgestellt. Diese Formel beschreibt die Extinktion der Strahldichte I bei der Durchquerung eines Mediums mit einer optischen Dicke τ_e . I_0 ist die anfängliche Strahldichte bei Eintritt in das Medium:

$$I = I_0 e^{-\tau_e} \quad (2.16)$$

Dieses Gesetz besagt, dass nach einer optischen Dicke von $\tau_e = 1$ noch ein Anteil von $e^{-1} \approx 36.8\%$ Photonen der einfallenden Strahlung übrig ist, also nicht extinguiert wurde. Diese Formel kann ebenfalls auf die optischen Dicken der Absorption und der Streuung angewendet werden.

2.2 Herleitung der Strahlungstransfergleichung aus dem Maxwell-Gleichungen

Die Theorie des Strahlungstransfers befasst sich mit der makroskopischen Beschreibung des Transfers von elektromagnetischer Strahlung durch ungeordnete physikalische Medien, wie z.B. planetare Atmosphären. Erste Grundzüge dieser Theorie entstanden gegen Ende des 19. Jahrhunderts, eine erste umfangreiche mathematische Herleitung gelang Chandrasekhar 1960, welcher die Strahlungstransfergleichung (ab jetzt mit STG abgekürzt) aus Symmetrieargumenten ableitete. Pomraning [1973] leitete die STG über hydrodynamische Argumente ab. Mishchenko et al [2006] gelang die Ableitung der STG aus den der elektromagnetischen Strahlungstheorie zugrunde liegenden Maxwell-Gleichungen.

Die STG beschreibt die diffuse Ausbreitung von Strahlungsenergie durch streuende und absorbierende ungeordnete Medien. Sie wird in Strahlungstransfermodellen wie MYSTIC numerisch gelöst. Da sie den rein diffusen Strahlungstransfer beschreibt, vernachlässigt sie sämtliche Interferenzeffekte inklusive der kohärenten Rückstreuung. Dieses Kapitel zeigt die Ableitung der STG von den Maxwell-Gleichungen nach Mishchenko et al [2006] und die wesentlichen Annahmen, welche zur Vernachlässigung der Interferenzeffekte führen.

2.2.1 Von den Maxwell-Gleichungen zur Amplitudenstreumatrix

Sei $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ ein Ortsvektor in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$ ein harmonisch oszillierendes elektrisches Feld mit $\mathbf{E} \in \mathbb{C}$ und $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ das dazu gehörige magnetische Feld. Die beiden hier relevanten Maxwell-Gleichungen für dieses Feld lauten:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.17)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -i\omega\epsilon(\mathbf{r}, \omega)\mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

$\mathbf{H} \in \mathbb{C}$ ist der magnetische Feldstärkevektor, \mathbf{E} ist der elektrische Feldstärkevektor, ϵ ist die komplexe Permittivität, μ die magnetische Permeabilität und ω die Kreisfrequenz des harmonischen Feldes.

Die komplexe Permittivität ϵ bezieht die reelle Permittivität ε und die Leitfähigkeit σ mit ein:

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) + i \frac{\sigma(\mathbf{r}, \omega)}{\omega} \quad (2.19)$$

Da diese die Inverse des Widerstands ist, beschreibt der Imaginärteil der komplexen Permittivität die Absorption von Feldenergie durch das Medium.

Nun wird ein finites streuendes Volumen V_I in einem infiniten, dreidimensionalen, homogenen, linearen, isotropen, und nicht-absorbierenden leeren Raum (Index E) eingeführt. Das streuende Volumen ist definiert als ein streuendes Objekt, welches groß genug ist, dass dafür optische Materialkonstanten definiert werden können (Mishchenko et al [2006] Kap. 3.1). Der Streuer wird durch eine ebene Welle elektromagnetischer Strahlung beleuchtet und streut in alle Richtungen.

Aus den Gleichungen 2.17 und 2.18 für jeweils das Medium und das umgebende Vakuum lassen sich durch nochmalige Anwendung des Rotationsoperators und Kombination folgende Gleichungen ableiten:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_E^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_E \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_I^2(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in V_I \quad (2.21)$$

Hier sind $k_E = \omega \sqrt{\varepsilon_E \mu_0}$ und $k_I(\mathbf{r}, \omega) = \omega \sqrt{\varepsilon_I(\mathbf{r}, \omega) \mu_0}$ die Kreiswellenzahlen des nicht-absorbierenden leeren Raums bzw. des absorbierenden streuenden Mediums. Die beiden Gleichungen wiederum lassen sich zusammenfassen zu einer Differenzialgleichung:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) - k_E^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = k_E^2 [\tilde{m}^2(\mathbf{r}, \omega) - 1] \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 = V_E \cup V_I \quad (2.22)$$

$$\tilde{m}(\mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in V_E \\ m(\mathbf{r}, \omega) = \frac{k_I(\mathbf{r}, \omega)}{k_E} = \frac{m_I(\mathbf{r}, \omega)}{m_E}, & \mathbf{r} \in V_I \end{cases} \quad (2.23)$$

wobei $m_E = \sqrt{\varepsilon_E \mu_0}$ und $m_I = \sqrt{\varepsilon_I(\mathbf{r}, \omega) \mu_0}$ die komplexen Brechungsindizes des äußeren Raums und des Mediums sind. Die rechte Seite dieser Gleichung stellt dabei eine Forcing-Funktion da, welche nur dort, wo Störungen (Streuobjekte) vorhanden sind, ungleich Null ist.

Die homogene Lösung dieser Gleichung beschreibt das Feld ohne Einfluss des streuenden Volumens \mathbf{E}^{inc} . Die inhomogene Lösung enthält demzufolge das durch das Medium gestreute Feld \mathbf{E}^{sca} . Die Lösung der inhomogenen Gleichung gelingt über die dyadische Green-Funktion des freien Raums:

$$\bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\bar{I} + \frac{1}{k_E^2} \nabla \otimes \nabla \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (2.24)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik_E |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.25)$$

(mit $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$) welche diese Gleichung erfüllt:

$$\nabla \times \nabla \times \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - k_E^2 \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \bar{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.26)$$

δ ist die Dirac-Delta-Funktion und G ist die skalare Green-Funktion, welche auch als Propagatorfunktion bezeichnet wird. Die Green-Funktion beschreibt die Reaktion des Streuers (die Störung) auf die einfallende Welle (die Ursache), d.h. sie propagiert die Störung, bzw. die Auswirkung derselben. Der Operator \otimes bezeichnet das dyadische Produkt, das aus zwei Vektoren eine Matrix (Dyade) erzeugt:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1, b_2, b_3) = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

\bar{I} ist die Einheitsdyade (hier in Kugelkoordinaten):

$$\bar{I} = \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \otimes \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.28)$$

Das gestreute Feld am Punkt \mathbf{r} ist dann gegeben durch das Volumenintegral der Green-Funktion multipliziert mit dem Forcing-Term des Streuobjektes aus Gl. 2.22 über das gesamte Volumen des Streuobjektes. Diese Gleichung drückt das Feld an einem beliebigen Punkt im Raum in Abhängigkeit vom einfallenden Feld und dem Feld innerhalb des Streuobjektes aus:

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = k_E^2 \int_{V_I} \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') [m^2(\mathbf{r}') - 1] d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.29)$$

Das Gesamtfeld ist die Summe der homogenen und der inhomogenen Lösung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.30)$$

Als erste Näherung wird das Gesamtfeld innerhalb des Streuers durch das einfallende Feld ersetzt (Rayleigh-Gans-Debye-Näherung, Mishchenko et al [2006] Kap.3.1). Dadurch lässt sich das gestreute Feld über das einfallende Feld ausdrücken, d.h. mit dem einfallenden Feld kann mit einer Lippmann-Schwinger-Gleichung folgender Lösungsansatz gemacht werden:

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = \int_{V_I} \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \left(\int_{V_I} \bar{T}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' \right) d\mathbf{r}', \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.31)$$

\bar{T} ist der dyadische Transitionsoperator, welcher rekursiv definiert ist:

$$\bar{T}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = k_E^2 [m^2(\mathbf{r}) - 1] \left(\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \bar{I} + \int_{V_I} \bar{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') \cdot \bar{T}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d\mathbf{r}'' \right), \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V_I \quad (2.32)$$

Die beiden Terme in diesem Ausdruck stehen für das ungestreute und das gestreute Feld, letzteres wird über eine Rekursion beschrieben.

Die zweite angewendete Näherung ist die Fernfeldnäherung, welche annimmt, dass jeder Streuer punktförmig ist und sich im Fernfeldbereich jedes anderen Streuers und des Beobachters befindet. Das bedeutet, dass der Abstand zwischen den Streuern untereinander sowie der zwischen Streuern und Beobachter sehr viel größer ist, als der Durchmesser eines Streuers. Dies ist in der Atmosphäre stets gegeben. Nach Ausschreiben der Operatoren folgt:

$$\mathbf{E}^{sca}(\hat{\mathbf{r}}) \approx \frac{\exp(ik_E r)}{r} \frac{k_E^2}{4\pi} (\bar{I} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \int_{V_I} \mathbf{E}(\mathbf{r}') [m^2(\mathbf{r}') - 1] \exp(-ik_E \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.33)$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{r}}$ ist der radiale Einheitsvektor der Kugelwelle, die ihren Ursprung im Mittelpunkt des Streuers hat. Die Bedeutung dieser Gleichung ist, dass sich das gestreute Feld in der Fernfeldnäherung als Kugelwelle schreiben lässt, die ihren Ursprung im Mittelpunkt des Streuers hat. Da es sich um eine Kugelwelle handelt, gilt

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.34)$$

d.h. nur die θ - und ϕ -Komponenten des elektrischen Feldvektors sind ungleich 0 (Abb. 2.3). Zu diesen beiden Winkeln gehören die Richtungsvektoren $\hat{\boldsymbol{\theta}}(x, y, z)$ und $\hat{\boldsymbol{\phi}}(x, y, z)$. Dadurch kann E^{sca} vereinfacht geschrieben werden als

$$\mathbf{E}^{sca}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ik_E r)}{r} \mathbf{E}_1^{sca}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (2.35)$$

wobei $\mathbf{E}_1^{sca}(\hat{\mathbf{r}})$ die gestreute Strahlung im Fernfeldbereich beschreibt, die nur noch abhängig von der Richtung $\hat{\mathbf{r}}$, d.h. von θ und ϕ , ist. Sei das einfallende Feld eine ebene Welle mit Richtung $\hat{\mathbf{n}}^{inc}$:

$$\mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0^{inc} \exp(ik_E \hat{\mathbf{n}}^{inc} \cdot \mathbf{r}) \quad (2.36)$$

Gleichung 2.33 wird dann zu:

$$\mathbf{E}^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca}) = \frac{\exp(ik_E r)}{r} \bar{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{n}}^{sca}, \hat{\mathbf{n}}^{inc}) \cdot \mathbf{E}_0^{inc} \quad (2.37)$$

$\bar{\mathbf{A}}$ ist die 3×3 Streumatrix, welche die Transformation der Welle aus der Richtung $\hat{\mathbf{n}}^{inc}$ in die Richtung $\hat{\mathbf{n}}^{sca}$ beschreibt:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{n}}^{sca}, \hat{\mathbf{n}}^{inc}) &= \frac{1}{4\pi} (\hat{I} - \hat{\mathbf{n}}^{sca} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{inc}) \\ &\times \int_{V_I} \left(\exp(-ik_E \hat{\mathbf{n}}^{sca} \cdot \mathbf{r}') \int_{V_I} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \exp(ik_E \hat{\mathbf{n}}^{inc} \cdot \mathbf{r}'') \cdot (\hat{I} - \hat{\mathbf{n}}^{sca} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{inc}) d\mathbf{r}'' \right) d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.38)$$

Da der Koordinatenursprung der Mittelpunkt des Streuers ist, sind nur vier der neun Komponenten der Streumatrix voneinander unabhängig. Daher lassen sich vier neue Komponenten ableiten, die die Transformation der θ und ϕ -Komponenten der einfallenden Welle in die der gestreuten Welle beschreiben. Diese werden in der 2×2 Amplitudenstreumatrix \mathbf{S} zusammengefasst. Für Größen die in diesem Koordinatensystem definiert sind, werden serifenlose Buchstaben verwendet.

$$\mathbf{E}^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca}) = \frac{\exp(ik_E r)}{r} \mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}^{sca}, \hat{\mathbf{n}}^{inc}) \mathbf{E}_0^{inc} \quad (2.39)$$

\mathbf{E} ist definiert durch $\mathbf{E} = [E_\theta, E_\phi]^T$, die Winkel θ und ϕ durch das lokale Koordinatensystem dessen Ursprung am Streupunkt liegt (Abb. 2.3):

$$\hat{\mathbf{n}}^{inc} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{inc} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}^{inc} \quad (2.40)$$

$$\hat{\mathbf{n}}^{sca} = \hat{\boldsymbol{\theta}}^{sca} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}^{sca} \quad (2.41)$$

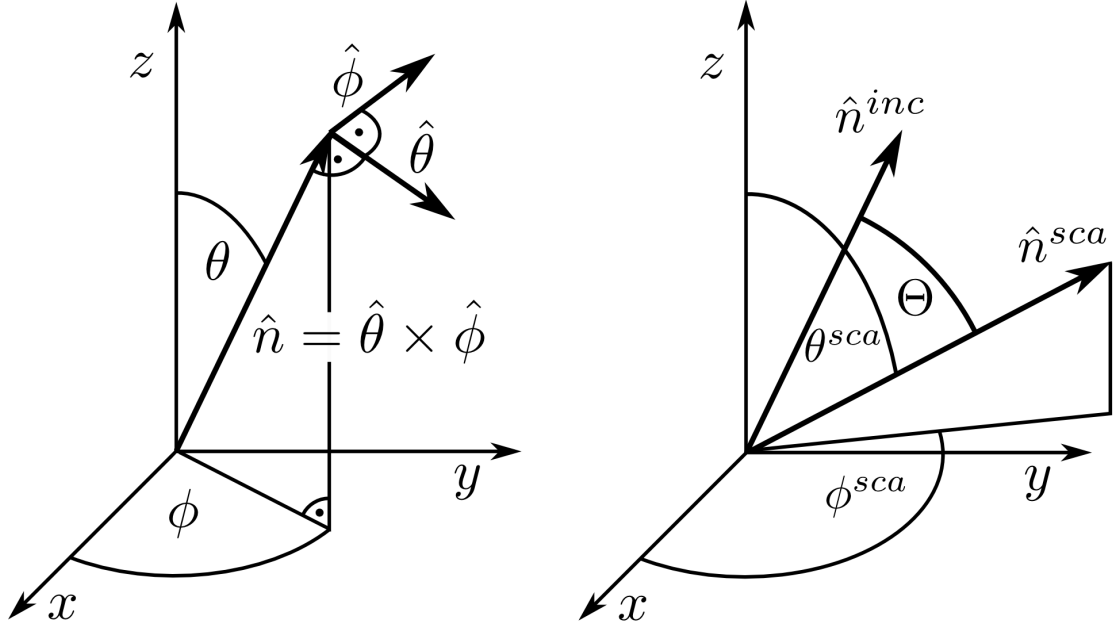


Abbildung 2.3: Lokales Koordinatensystem, dessen Ursprung am Streupunkt liegt. Links: Die Streuwinkel θ und ϕ definieren die Richtungsvektoren $\hat{\theta}$ und $\hat{\phi}$, deren Kreuzprodukt definiert den Richtungsvektor $\hat{\mathbf{n}}$. Rechts: Die Richtungsvektoren $\hat{\mathbf{n}}^{inc}$ und $\hat{\mathbf{n}}^{sca}$ definieren die Richtung der einfallenden und der gestreuten Strahlung und den Streuwinkel Θ zwischen beiden. Der Richtungsvektor $\hat{\mathbf{n}}^{sca}$ ist außerdem gegeben durch die beiden Streuwinkel θ^{sca} und ϕ^{sca} .

Die Elemente von \mathbf{S} sind definiert durch (siehe auch Van de Hulst [1957]):

$$S_{11} = \hat{\theta}^{sca} \cdot \bar{A} \cdot \hat{\theta}^{inc} \quad (2.42)$$

$$S_{12} = \hat{\theta}^{sca} \cdot \bar{A} \cdot \hat{\phi}^{inc} \quad (2.43)$$

$$S_{21} = \hat{\phi}^{sca} \cdot \bar{A} \cdot \hat{\theta}^{inc} \quad (2.44)$$

$$S_{22} = \hat{\phi}^{sca} \cdot \bar{A} \cdot \hat{\phi}^{inc} \quad (2.45)$$

Diese Matrix beschreibt die Streuung von Strahlung in der Fernfeldzone komplett.

2.2.2 Die Foldy-Lax-Gleichungen

Bis jetzt wurde von einem einzelnen Streuer ausgegangen, jetzt wird eine finite Anzahl von N unterschiedlichen diskreten Streuern betrachtet, welche ebenfalls den bisherigen Voraussetzungen genügen (Mishchenko et al [2006] Kap.4).

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \leftarrow a + \sum \leftarrow b + \sum \sum \leftarrow c \\
& + \sum \sum \sum \leftarrow d \\
& + \sum \sum \leftarrow e \\
& + \sum \sum \sum \sum \leftarrow f \\
& + \sum \sum \sum \leftarrow g \\
& + \sum \sum \sum \leftarrow h \\
& + \sum \sum \sum \leftarrow i \\
& + \sum \sum \leftarrow j \\
& + \dots
\end{aligned}$$

Abbildung 2.5: Diagrammatische Darstellung des Felds \mathbf{E} am Punkt \mathbf{r} als Summe über die Summen aller möglichen Streupfade aller möglichen Streuordnungen. Das Pfeilsymbol steht für die einfallende Strahlung, jeder Punkt für eine Streuung, die Summenzeichen stehen für die Summen über alle involvierten Streuer und durch gestrichelte Linien verbundene Punkte repräsentieren identische Streuer. Demzufolge repräsentiert (a) die ungestreute Strahlung, (b) alle Einfachstreuungen, (c) alle Zweifachstreuungen, (d) und (e) alle Dreifachstreuungen, (f) bis (j) alle Vierfachstreuungen, etc.

aller Dreifachstreuungen über drei unterschiedliche Partikel (d), die Summe aller Dreifachstreuungen über zwei unterschiedliche Partikel, die Summe aller Vierfachstreuungen über vier unterschiedliche Partikel (f), die Summe aller Vierfachstreuungen über drei unterschiedliche Partikel (g,h,i), die Summe aller Vierfachstreuungen über zwei unterschiedliche Partikel (j) usw. In der Twersky-Näherung werden die Fälle e,g,h,i und j vernachlässigt. Dazu werden die Foldy-Lax-Gleichungen (Gl. 2.46 und 2.47) in einer kompakten Schreibweise hingeschrieben:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{inc} + \sum_{i=1}^N \bar{B}_{ri0} \cdot \mathbf{E}_i^{inc} + \sum_{i=1}^N \sum_{j(\neq i)=1}^N \bar{B}_{rij} \cdot \mathbf{E}_{ij} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{E}_{ij} = \bar{B}_{ij0} \cdot \mathbf{E}_j^{inc} + \sum_{l(\neq j)=1}^N \bar{B}_{ijl} \cdot \mathbf{E}_{jl} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\
\mathbf{E}^{inc} &= \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) \\
\mathbf{E}_i^{inc} &= \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{R}_i) \\
\bar{B}_{ri0} &= G(r_i) \bar{A}_i(\hat{\mathbf{r}}_i, \hat{\mathbf{s}}) \\
\bar{B}_{rij} &= G(r_i) \bar{A}_i(\hat{\mathbf{r}}_i, \hat{\mathbf{R}}_{ij}) \\
\bar{B}_{ij0} &= G(R_{ij}) \bar{A}_j(\hat{\mathbf{R}}_{ij}, \hat{\mathbf{s}}) \\
\bar{B}_{ijl} &= G(R_{ij}) \bar{A}_j(\hat{\mathbf{R}}_{ij}, \hat{\mathbf{R}}_{jl})
\end{aligned} \quad (2.51)$$

Einsetzen von Gleichung 2.50 in 2.49 führt zu einer Reihe über alle Streuordnungen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}^{inc} \\
&+ \sum_{i=1}^N \bar{B}_{ri0} \cdot \mathbf{E}_i^{inc} \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \bar{B}_{rij} \cdot \bar{B}_{ij0} \cdot \mathbf{E}_j^{inc} \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \bar{B}_{rij} \cdot \bar{B}_{ijl} \cdot \bar{B}_{jl0} \cdot \mathbf{E}_l^{inc} \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq l}}^N \bar{B}_{rij} \cdot \bar{B}_{ijl} \cdot \bar{B}_{jlm} \cdot \bar{B}_{lm0} \cdot \mathbf{E}_m^{inc} \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{2.52}$$

In den Summen wird deutlich, wie eine Streuung nicht zweimal hintereinander über dasselbe Teilchen gehen kann. Es kann aber zu Streuungen zu früheren Streuteilchen kommen. Die Streupfade lassen sich aufteilen in Pfade, welche jeden Streuer nur einmal abklappern und solche, welche mehr als einmal über einen oder mehrere Streuer laufen. Letztere werden in der Twersky-Näherung vernachlässigt und Gleichung 2.52 verändert ihre Form zu:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &\approx \mathbf{E}^{inc} \\
&+ \sum_{i=1}^N \bar{B}_{ri0} \cdot \mathbf{E}_i^{inc} \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \bar{B}_{rij} \cdot \bar{B}_{ij0} \cdot \mathbf{E}_j^{inc} \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^N \bar{B}_{rij} \cdot \bar{B}_{ijl} \cdot \bar{B}_{jl0} \cdot \mathbf{E}_l^{inc} \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i \\ l \neq j}}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i \\ m \neq j \\ m \neq l}}^N \bar{B}_{rij} \cdot \bar{B}_{ijl} \cdot \bar{B}_{jlm} \cdot \bar{B}_{lm0} \cdot \mathbf{E}_m^{inc} \\
&+ \dots
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Jede Streuordnung über der zweiten ignoriert alle bisherigen Streuer auf ihrem Pfad, d.h. alle Partikel, über die einmal gestreut wurde, werden quasi aus dem Teilchenensemble entfernt und beeinflussen höhere Streuordnungen nicht weiter. Für insgesamt N Teilchen und eine L -fache Summe gilt: Ein Summand von Gl. 2.52 enthält $N(N-1)^{L-1}$ Terme, ein

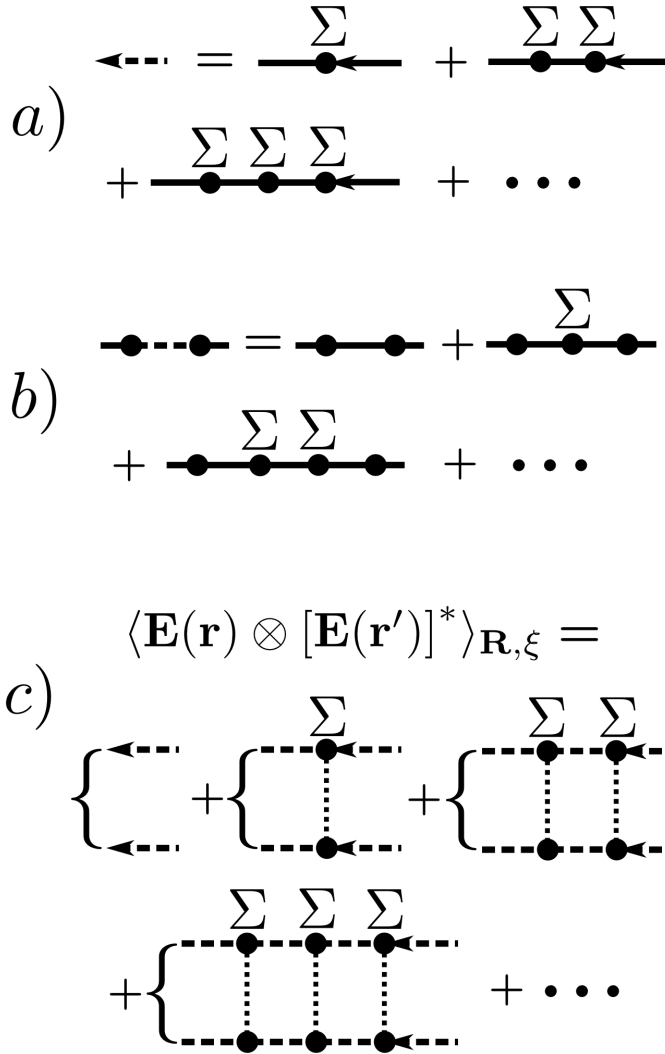


Abbildung 2.8: Diagrammatische Darstellung der Leiternäherung. a) Definition des gestrichelten Pfeils als Summe über alle Streuordnungen und Streuer. b) Definition des gestrichelten horizontalen Konnektors als Summe über alle Streuordnungen und Streuer zwischen zwei definierten Streuern und diese dabei ausschließend. c) Darstellung der vollen Leiternäherung als Summe über alle dyadischen Teilprodukte aller Streuwege aller Streuordnungen und mit jeder möglichen Anzahl beliebiger gemeinsamer und beliebiger individueller Streupunkte ohne kreuzende vertikale Konnektoren. Beide Pfade mit gemeinsamen Streuern gehen in derselben Reihenfolge über die gemeinsamen Streuer. Entgegengesetzt laufende oder zufällige Reihenfolgen werden vernachlässigt.

wird die dyadische Korrelationsfunktion eingeführt, welche diese Mittelung über das dyadische Produkt zweier elektrischer Felder an zwei verschiedenen Punkten \mathbf{r} und \mathbf{r}' darstellt (Mishchenko et al [2006] Kap.8.5, diese Größe hat kein eigenes Symbol):

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \otimes [\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)]^* \rangle_t = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \otimes [\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)]^* \rangle_{\mathbf{R}, \xi} \quad (2.54)$$

Die Größe

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \otimes [\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)]^* \rangle_{\mathbf{R}, \xi}$$

hat die Dimension einer Energieflussdichte (W/m^2).

Anknüpfend an die Diagrammdarstellung aus Abb. 2.5 lässt sich diese Funktion wie in Abbildung 2.6 darstellen. Abbildung 2.7 zeigt als Beispiel das Produkt zweier Dreifachstreupfade. Durch die Twersky-Näherung gehen keine Streupunkte mehr als einmal in die Streupfade ein, jedoch können die beiden miteinander multiplizierten Wege beliebige Streuer gemeinsam haben, welche in den Diagrammen durch gepunktete Konnektoren zwischen den beiden Pfaden dargestellt werden. Die Leiternäherung besteht darin, sämtliche Produkte mit sich kreuzenden Konnektoren zu vernachlässigen, das heißt in diesem

Beispiel die Fälle (e), (f) und (g) (die Konnektoren der übrig gebliebenen Diagramme erinnern an Leitern).

Wie in Kap. 2.3.1 gezeigt werden wird, enthalten Produkte mit kreuzenden Konnektoren stets eine schnell oszillierende Komponente (Gl. 2.96), welche bei der angewendeten Mittelung über die Zeit verschwindet (siehe auch Mishchenko et al [2006] Kap. 8.11), wodurch die Leiternäherung gerechtfertigt ist. Es gibt jedoch eine Ausnahme, nämlich den Spezialfall der maximal gekreuzten Diagramme (Fall (e)), dessen Beitrag sich nicht in alle Richtungen heraus mittelt. Diese Klasse von Diagrammen ist für die kohärente Rückstreuung verantwortlich, und die Leiternäherung ist dafür verantwortlich, dass dieser Effekt in der STG nicht vorkommt.

Die gesamte Leiternäherung lässt sich wie in Abbildung 2.8 darstellen. Damit sind die wesentlichen Näherungen für die STG abgeschlossen. Bevor die STG selbst gezeigt werden kann, müssen in den folgenden drei Unterkapiteln noch einige notwendige Größen definiert werden.

2.2.5 Die Kohärenzmatrix

Sei $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ eine beliebige komplexe elektrische Welle am Punkt \mathbf{r} . Die Größe

$$\bar{\rho} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \otimes [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]^* \quad (2.55)$$

wird Kohärenzmatrix genannt. Im Gegensatz zur dyadischen Korrelationsfunktion (Gl. 2.54) wird hier das ungemittelte Feld an einem einzigen Punkt im Raum betrachtet. Nach Definition eines lokalen Koordinatensystems (vgl. Abb. 2.3) mit den Winkeln θ und ϕ lässt sich mit Hilfe der Richtungsvektoren dieser Winkel aus der Kohärenzmatrix der Kohärenz-Spaltenvektor ableiten:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \bar{\rho} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \bar{\rho} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \bar{\rho} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \bar{\rho} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Die Kohärenzmatrix und die Winkel können sich auf das totale, das einfallende oder das gestreute Feld beziehen. Die Kohärenzmatrix des gestreuten Feldes lässt sich in Abhängigkeit vom einfallenden Feld wie folgt schreiben:

$$\bar{\rho}^{sca}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2} [\bar{A}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{n}}^{inc}) \cdot \mathbf{E}_0^{inc}] \otimes [\bar{A}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{n}}^{inc}) \cdot \mathbf{E}_0^{inc}]^* \quad (2.57)$$

Im Fall einer ebenen Welle $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp(ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$ lautet der Kohärenz-Spaltenvektor beispielsweise:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} E_{0\theta} E_{0\theta}^* \\ E_{0\theta} E_{0\phi}^* \\ E_{0\phi} E_{0\theta}^* \\ E_{0\phi} E_{0\phi}^* \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Aus dem Kohärenz-Spaltenvektor lässt sich mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{D} der Stokes-Vektor \mathbf{I} ableiten (Mishchenko et al [2006] Kap.2.6):

$$\mathbf{I} = \mathbf{D}\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \end{bmatrix} \mathbf{J} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

2.2.6 Streumatrix und Extinktionsmatrix

Wenn man eine messbare Größe betrachtet, muss der Messaufbau ebenfalls in Betracht gezogen werden. Im Fall von elektromagnetischer Strahlung ist das Messgerät ein kollimierter Detektor von elektromagnetischer Strahlung, welcher sich im Abstand r in der Fernfeldzone des streuenden Mediums befindet. Seine endliche kreisförmige Fläche ΔA ist so orientiert, dass die Flächennormale parallel zum Abstandsvektor $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ ist. Der Detektor registriert monochromatische oder quasi-monochromatische elektromagnetische Strahlung welche aus dem Raumwinkel $\Delta\Omega$ auf einem Punkt auf ΔA auftrifft. $\Delta\Omega$ ist zentriert um die Richtung $\hat{\mathbf{r}}$.

Außerdem wird angenommen, dass der Abstand zwischen Detektor und Streuer sehr viel größer als der Durchmesser des Streuers ist (Fernfeldnäherung). Durch Einsatz von Polarisationsfiltern können zudem die im Stokes-Vektor beschriebenen Komponenten des elektrischen Feldes gemessen werden. Gemessene Größen sind i.d.R. über die Fläche des Detektors integriert, d.h. ein gestreutes Signal hat z.B. diese Form:

$$(\text{SIGNAL})^J = \Delta A \mathbf{J}^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca}) \quad (2.60)$$

Zunächst wird der Fall betrachtet, in dem die Streurichtung nicht gleich der Einfallrichtung ist ($\hat{\mathbf{r}} \neq \hat{\mathbf{n}}^{inc}$). Die gemessene gestreute Strahlung (Kugelwellen) wird dann durch den Kohärenz-Spaltenvektor ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca}) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_E}{\mu_0}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\theta^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca}) [\mathbf{E}_\theta^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca})]^* \\ \mathbf{E}_\theta^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca}) [\mathbf{E}_\phi^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca})]^* \\ \mathbf{E}_\phi^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca}) [\mathbf{E}_\theta^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca})]^* \\ \mathbf{E}_\phi^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca}) [\mathbf{E}_\phi^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca})]^* \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2r^2} \sqrt{\frac{\epsilon_E}{\mu_0}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{1\theta}^{sca}(\hat{\mathbf{n}}^{sca}) [\mathbf{E}_{1\theta}^{sca}(\hat{\mathbf{n}}^{sca})]^* \\ \mathbf{E}_{1\theta}^{sca}(\hat{\mathbf{n}}^{sca}) [\mathbf{E}_{1\phi}^{sca}(\hat{\mathbf{n}}^{sca})]^* \\ \mathbf{E}_{1\phi}^{sca}(\hat{\mathbf{n}}^{sca}) [\mathbf{E}_{1\theta}^{sca}(\hat{\mathbf{n}}^{sca})]^* \\ \mathbf{E}_{1\phi}^{sca}(\hat{\mathbf{n}}^{sca}) [\mathbf{E}_{1\phi}^{sca}(\hat{\mathbf{n}}^{sca})]^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Die \mathbf{E}_1 -Komponenten sind dabei analog zu Gleichung 2.35 definiert. Für die Transformation eines einfallenden Kohärenz-Spaltenvektors in einen gestreuten, analog zur Transformation in Gleichung 2.39, wird die 4×4 Kohärenzstreumatrix $\mathbf{Z}^J(\hat{\mathbf{n}}^{sca}, \hat{\mathbf{n}}^{inc})$ eingeführt, welche aus den Elementen der entsprechenden Amplitudenstreumatrix $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{n}}^{sca}, \hat{\mathbf{n}}^{inc})$ zusammengesetzt ist:

$$\mathbf{Z}^J = \begin{bmatrix} |S_{11}|^2 & S_{11}S_{12}^* & S_{12}S_{11}^* & |S_{12}|^2 \\ S_{11}S_{21}^* & S_{11}S_{22}^* & S_{12}S_{21}^* & S_{12}S_{22}^* \\ S_{21}S_{11}^* & S_{21}S_{12}^* & S_{22}S_{11}^* & S_{22}S_{12}^* \\ |S_{21}|^2 & S_{21}S_{22}^* & S_{22}S_{21}^* & |S_{22}|^2 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{J}^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca}) = \frac{1}{r^2} \mathbf{Z}^J(\hat{\mathbf{n}}^{sca}, \hat{\mathbf{n}}^{inc}) \mathbf{J}^{inc} \quad (2.63)$$

Die Stokes-Streumatrix \mathbf{Z} , welche analog zu Gleichung 2.63 einen einfallenden Stokes-Vektor in einen gestreuten transformiert, lässt sich mit Hilfe der Transformationsmatrix \mathbf{D} wie folgt ableiten:

$$\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{n}}^{sca}, \hat{\mathbf{n}}^{inc}) = \mathbf{D} \mathbf{Z}^J(\hat{\mathbf{n}}^{sca}, \hat{\mathbf{n}}^{inc}) \mathbf{D}^{-1} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{I}^{sca}(r\hat{\mathbf{n}}^{sca}) = \frac{1}{r^2} \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{n}}^{sca}, \hat{\mathbf{n}}^{inc}) \mathbf{I}^{inc} \quad (2.65)$$

Die Elemente von \mathbf{Z} sind in Mishchenko et al [2006] in Kap. 3.7 aufgelistet, die Vektoren \mathbf{I}^{inc} und \mathbf{J}^{inc} sind über das einfallende elektrische Feld festgelegt. Die Matrix $\frac{\mathbf{Z}}{r^2}$ entspricht der in Kap. 2.1.4 erwähnten Streumatrix.

Betrachtet wird erneut den Fall von Vorwärtsstreuung. Der hier dominierende Effekt ist die Wechselwirkung der direkt vorwärts gestreuten Strahlung mit der einfallenden Strahlung, vgl. Kap. 2.2.7. Das gesamte Feld ist gegeben durch $(r\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{E}^{inc}(r\hat{\mathbf{r}}) + \mathbf{E}^{sca}(r\hat{\mathbf{r}})$ und der Kohärenz-Spaltenvektor des gesamten Felds durch:

$$\mathbf{J}(r\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_E}{\mu_0}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\theta(r\hat{\mathbf{r}}) [\mathbf{E}_\theta(r\hat{\mathbf{r}})]^* \\ \mathbf{E}_\phi(r\hat{\mathbf{r}}) [\mathbf{E}_\phi(r\hat{\mathbf{r}})]^* \\ \mathbf{E}_\phi(r\hat{\mathbf{r}}) [\mathbf{E}_\theta(r\hat{\mathbf{r}})]^* \\ \mathbf{E}_\theta(r\hat{\mathbf{r}}) [\mathbf{E}_\phi(r\hat{\mathbf{r}})]^* \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Integration von \mathbf{J} über die Detektorfläche ΔA :

$$\begin{aligned} (\text{SIGNAL})^J &= \int_{\Delta A} \mathbf{J}(r\hat{\mathbf{r}}) dA \\ &= \Delta A \mathbf{J}^{inc} - \mathbf{K}^J(\hat{\mathbf{n}}^{inc}) \mathbf{J}^{inc} + \frac{\Delta A}{r^2} \mathbf{Z}^J(\hat{\mathbf{n}}^{inc}, \hat{\mathbf{n}}^{inc}) \mathbf{J}^{inc} \end{aligned} \quad (2.67)$$

Der dritte Term auf der rechten Seite ist $\propto r^{-2}$, während der zweite Term unabhängig von r ist, gleichzeitig gilt die Fernfeldnäherung. Das bedeutet, dass der dritte Term mit der Streumatrix \mathbf{Z}^J im Fernfeld gegenüber dem zweiten Term mit der Matrix \mathbf{K}^J vernachlässigt werden kann. $\mathbf{K}^J(\theta^{inc}, \phi^{inc})$ heißt Extinktionsmatrix, gegeben durch die Elemente der Vorwärts-Amplitudenstreumatrix $\mathbf{S}(\theta^{inc}, \phi^{inc}; \theta^{inc}, \phi^{inc})$:

$$\mathbf{K}^J = \frac{i2\pi}{k_E} \begin{bmatrix} S_{11}^* - S_{11} & S_{12}^* & -S_{12} & 0 \\ S_{21}^* & S_{22}^* - S_{11} & 0 & -S_{12} \\ -S_{21} & 0 & S_{11}^* - S_{22} & S_{12}^* \\ 0 & -S_{21} & S_{21}^* & S_{22}^* - S_{22} \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

Die entsprechende Stokes-Extinktionsmatrix $\mathbf{K}(\hat{\mathbf{n}}^{inc})$ wird wieder abgeleitet über

$$\mathbf{K}(\hat{\mathbf{n}}^{inc}) = \mathbf{D} \mathbf{K}^J(\hat{\mathbf{n}}^{inc}) \mathbf{D}^{-1} \quad (2.69)$$

und ihre Elemente sind in Mishchenko et al [2006] in Kap. 3.8 aufgelistet. Die Bedeutung der Extinktionsmatrix ist, dass im Allgemeinen die Extinktion in Vorwärtsrichtung an einem streuenden Objekt auch den Polarisationszustand einer Welle verändern kann, dies

trifft jedoch nur auf nicht-kugelförmige Partikel zu. Die Anwendung der Fernfeldnäherung und Vernachlässigen des letzten Terms machen die Extinktionsmatrix zu einer direkt beobachtbaren Größe.

2.2.7 Das kohärente Feld in Vorwärtsstreurichtung

In Richtung des einfallenden Feldes ergibt sich eine Überlagerung des einfallenden Feldes und der in diese Richtung gestreuten Felder. Wendet man die in Kap. 2.2.4 beschriebene Mittelung, welche die dyadische Korrelationsfunktion definiert, auf diese Überlagerung an, erhält man eine spezielle Größe \mathbf{E}_v , das kohärente Feld in Vorwärtsstreurichtung. Da dieses Konstrukt in der Ableitung der STG nach Mishchenko et al [2006] eine Rolle spielt, muss hier kurz darauf eingegangen werden. Das Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ in Vorwärtsstreurichtung kann unter den Voraussetzungen aus Kap. 2.2.4 aufgeteilt werden in einen langsam $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ und einen schnell fluktuierenden Teil $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$, letzterer wird bei Mittelung über die Zeit bzw. über die Positionen und Teilchenzustände gleich Null:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \quad (2.70)$$

$$\langle \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \rangle_t = \langle \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{R}, \xi} = 0 \quad (2.71)$$

Die Mittelung über den ersten Term führt zu \mathbf{E}_v :

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \rangle_t = \langle \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{R}, \xi} \quad (2.72)$$

Es ist wichtig zu verstehen, dass das kohärente Feld in Vorwärtsstreurichtung \mathbf{E}_v erst durch diese Mittelung über ein Zeitintervall zustande kommt, bei der Betrachtung einzelner Zeitpunkte ist es nicht definiert (siehe Mishchenko et al [2006] Kap.8.3). Im folgenden Kapitel wird klar, dass es sich dabei um das Feld handelt, dessen Strahlungstransfer alleine durch die Extinktionsmatrix (Gl. 2.68) beschrieben wird. Auf dieses Feld wird ebenfalls die Twersky-Näherung angewendet und nach ein paar Umformungen ergibt sich folgender Ausdruck für die Extinktion der exakt vorwärts gestreuten Strahlung:

$$\mathbf{E}_v(\mathbf{r}) = \exp \left[\frac{i2\pi n_0}{k_1} s(\mathbf{r}) \langle \bar{A}(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}) \rangle_{\xi} \right] \cdot \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{r}) \quad (2.73)$$

$\hat{\mathbf{s}}$ ist die Richtung des einfallenden Felds \mathbf{E}^{inc} und definiert die s -Achse, welche durch den Beobachtungspunkt verläuft, wobei $s(\mathbf{r})$ die zurückgelegte Wegstrecke entlang der s -Achse und n_0 die Teilchenzahldichte, d.h. Teilchenzahl pro Volumen, bezeichnet. Die exponentielle Streumatrix ist wie folgt definiert (Mishchenko et al [2006] Kap. 8.3):

$$\exp \bar{A} = \bar{I} + \bar{A} + \frac{1}{2!} \bar{A} \cdot \bar{A} + \frac{1}{3!} \bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} + \dots \quad (2.74)$$

Dieser Ausdruck verdeutlicht, wie das kohärente Feld in Vorwärtsstreurichtung durch die Überlagerung aus dem einfallenden und dem in exakter Vorwärtsrichtung gestreuten Feld zustande kommt. Insbesondere werden hier alle Streuordnungen der Vorwärtsstreuung berücksichtigt. Schließlich kann für dieses Feld auch die dyadische Korrelationsfunktion eingeführt werden, in der Summe in Abb. 2.8 (c) beschreibt dieser Ausdruck das Feld ohne gemeinsame Streupunkte im ersten Summanden:

$$\langle \mathbf{E}_v(\mathbf{r}, t) \otimes [\mathbf{E}_v(\mathbf{r}', t)]^* \rangle_t = \langle \mathbf{E}_v(\mathbf{r}, t) \otimes [\mathbf{E}_v(\mathbf{r}', t)]^* \rangle_{\mathbf{R}, \xi} \quad (2.75)$$

$$\bar{C}_L(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \bar{\Sigma}_L(\mathbf{r}, -\hat{\mathbf{p}}) d\hat{\mathbf{p}} \quad (2.80)$$

Für das kohärente Feld in Vorwärtsstreurichtung ist diese Winkeldekomposition nicht notwendig, da es nur in einer einzigen Richtung definiert ist.

Die diffuse spezifische Kohärenzmatrix ist die spezifische Kohärenzmatrix der Leiternäherung $\bar{\Sigma}_L$ minus die gemittelte Kohärenzmatrix des kohärenten Felds in Vorwärtsstreurichtung \bar{C}_v :

$$\bar{\Sigma}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) = \bar{\Sigma}_L(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) - \delta(\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{s}}) \bar{C}_v(\mathbf{r}) \quad (2.81)$$

Ein Kohärenz-Spaltenvektor \mathbf{J}_v und ein Stokes-Vektor \mathbf{l}_v lassen sich auch für das kohärente Feld in Vorwärtsstreurichtung definieren. Aus Gleichung (2.73) folgt die Transfergleichung (Mishchenko et al [2006] Kap. 8.4.2.):

$$\frac{d\mathbf{J}_v(\mathbf{r})}{ds} = -n_0 \langle \mathbf{K}^J(\hat{\mathbf{s}}) \rangle_\xi \mathbf{J}_v(\mathbf{r}) \quad (2.82)$$

Beziehungweise für den Stokes-Vektor des kohärente Feld in Vorwärtsstreurichtung:

$$\frac{d\mathbf{l}_v(\mathbf{r})}{ds} = -n_0 \langle \mathbf{K}(\hat{\mathbf{s}}) \rangle_\xi \mathbf{l}_v(\mathbf{r}) \quad (2.83)$$

Die neuen Kohärenz-Spaltenvektoren und Stokes-Vektoren werden wie folgt geschrieben:

$$\mathbf{J}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \bar{\Sigma}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) \cdot \hat{\theta}(\hat{\mathbf{q}}) \\ \hat{\theta}(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \bar{\Sigma}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) \cdot \hat{\phi}(\hat{\mathbf{q}}) \\ \hat{\phi}(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \bar{\Sigma}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) \cdot \hat{\theta}(\hat{\mathbf{q}}) \\ \hat{\phi}(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \bar{\Sigma}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) \cdot \hat{\phi}(\hat{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\mathbf{J}_v(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} \hat{\theta}(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \bar{C}_v(\mathbf{r}) \cdot \hat{\theta}(\hat{\mathbf{q}}) \\ \hat{\theta}(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \bar{C}_v(\mathbf{r}) \cdot \hat{\phi}(\hat{\mathbf{q}}) \\ \hat{\phi}(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \bar{C}_v(\mathbf{r}) \cdot \hat{\theta}(\hat{\mathbf{q}}) \\ \hat{\phi}(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \bar{C}_v(\mathbf{r}) \cdot \hat{\phi}(\hat{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{l}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{D} \mathbf{J}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) \quad (2.86)$$

$$\mathbf{l}_v(\mathbf{r}) = \mathbf{D} \mathbf{J}_v(\mathbf{r}) \quad (2.87)$$

Nun wird die Transfergleichung der diffusen Strahlung aufgeschrieben mit der Extinktion als Verlustterm und der Einstreuung aus dem kohärenten Feld in Vorwärtsstreurichtung als Quellterm.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{J}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}})}{dq} &= -n_0 \langle \mathbf{K}^J(\hat{\mathbf{q}}) \rangle_\xi \mathbf{J}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) + n_0 \int_{4\pi} \langle \mathbf{Z}^J(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}') \rangle_\xi \mathbf{J}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) d\hat{\mathbf{q}}' \\ &\quad + n_0 \langle \mathbf{Z}^J(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{s}}) \rangle_\xi \mathbf{J}_v(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.88)$$

Umschreiben der linken Seite und Umwandlung in die Stokes-Vektor-Notation ergibt:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}} \cdot \nabla \mathbf{I}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) = & -n_0 \langle \mathbf{K}(\hat{\mathbf{q}}) \rangle_\xi \mathbf{I}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) + n_0 \int_{4\pi} \langle \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}') \rangle_\xi \mathbf{I}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) d\hat{\mathbf{q}}' \\ & + n_0 \langle \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{s}}) \rangle_\xi \mathbf{I}_v(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (2.89)$$

Die linke Seite von Gleichung 2.83 wird ebenfalls umgeschrieben:

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla \mathbf{I}_v(\mathbf{r}) = -n_0 \langle \mathbf{K}(\hat{\mathbf{s}}) \rangle_\xi \mathbf{I}_v(\mathbf{r}) \quad (2.90)$$

Kombination der letzten beiden Gleichungen mittels $\mathbf{I}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) = \delta(\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{s}}) \mathbf{I}_v(\mathbf{r}) + \mathbf{I}_d(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}})$ führt zur finalen Form der STG (Mishchenko et al [2006] Kap. 8.10.):

$$\hat{\mathbf{q}} \cdot \nabla \mathbf{I}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) = -n_0 \langle \mathbf{K}(\hat{\mathbf{q}}) \rangle_\xi \mathbf{I}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) + n_0 \int_{4\pi} \langle \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}') \rangle_\xi \mathbf{I}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{q}}) d\hat{\mathbf{q}}' \quad (2.91)$$

Integration über q und den Raumwinkel ergibt die integrale STG (ISTG):

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(Q, \hat{\mathbf{q}}) = & \delta(\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{s}}) \mathbf{I}_v(Q) \\ & + n_0 \int_0^Q \int_{4\pi} \exp[-(Q - q)n_0 \langle \mathbf{K}(\hat{\mathbf{q}}) \rangle_\xi] \langle \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}') \rangle_\xi \mathbf{I}(q, \hat{\mathbf{q}}') d\hat{\mathbf{q}}' dq \end{aligned} \quad (2.92)$$

Die STG nach Mishchenko et al [2006] unterscheidet sich ein wenig von den allgemein bekannten Formen. Zunächst enthält sie Polarisation nicht nur für die Streuung sondern auch für die Extinktion in Form der Extinktionsmatrix. Anstelle der einfallenden Strahlung steht hier das kohärente Feld in Vorwärtsstreurichtung, welches die Extinktion der einfallenden Strahlung direkt mit einschließt. Gleichzeitig gilt die Streumatrix \mathbf{Z} explizit nicht in exakter Vorwärtsstreurichtung. Da in den Matrizen \mathbf{K} und \mathbf{Z} normierte Extinktions- bzw. Streukoeffizienten schon enthalten sind, bleibt als Faktor die Teilchenzahldichte n_0 übrig.

Diese Form der STG weist eine explizite Mittelung über alle Teilchenzustände auf. Das bedeutet konkret, dass die Matrizen \mathbf{K} und \mathbf{Z} im Allgemeinen über alle möglichen Drehwinkel der vorkommenden Teilchen gemittelt sind. Das spielt jedoch nur bei nicht kugelförmigen Teilchen eine Rolle, welche in dieser Arbeit nicht von Belang sind.

2.3 Kohärente Rückstreuung

Nachdem die Strahlungstransfergleichung und alle notwendigen theoretischen Grundlagen behandelt wurden, wird nun die kohärente Rückstreuung vorgestellt. Nach der grundlegenden Einführung folgen zwei Möglichkeiten der Berechnung, zum einen über die Reflexionsmatrizen, zum anderen über Stokes-Vektoren, sowie abschließend eine genauere Betrachtung der Form des Rückstreumaximums im umgebenden Winkelbereich.

2.3.1 Einführung

Die bisher angewandte Leiternäherung hat die Ableitung der STG durch Vernachlässigung von Interferenzeffekten ermöglicht. Dabei wurde der Anteil der gestreuten Strahlung vernachlässigt, welcher die Interferenz durch umgekehrte Pfade enthält, und der durch die maximal gekreuzten Diagramme repräsentiert wird (Abb. 2.10).

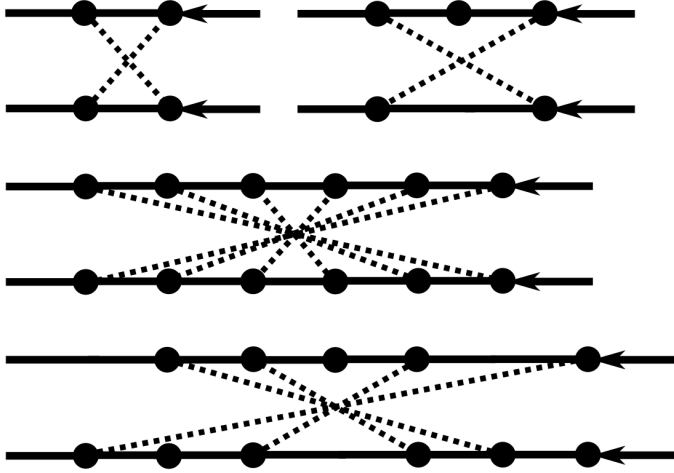


Abbildung 2.10: Beispiele für maximal gekreuzte Diagramme. Die Bedingung besagt lediglich, dass alle vorkommenden diagonalen Konnektoren sich in einem Punkt kreuzen müssen. Nicht gemeinsame Streuer, welche nur auf einem der beiden Wege vorkommen und damit im Diagramm auftretende Leerstellen auf dem anderen Weg, sind erlaubt.

Zunächst werden erneut die gemittelten Kohärenzmatrizen \bar{C} unterschiedlicher Feldkomponenten betrachtet. Die Leiterversion der gemittelten Kohärenzmatrix besteht aus drei Komponenten, die kohärente Vorwärtsstreu-, die Einfachstreu- und die Mehrfachstreu- komponente, die beiden letzteren sind analog zu Gl. 2.77 definiert:

$$\bar{C}_L = \bar{C}_v + \bar{C}_1 + \bar{C}_M \quad (2.93)$$

Außerhalb der Vorwärtsstreurichtung entfällt der kohärente Vorwärtsstreuanteil \bar{C}_v , daher lautet die Kohärenzmatrix, welche die kohärente Rückstreuung (Subskript K) mit einschließt, wie folgt:

$$\bar{C} = \bar{C}_L + \bar{C}_K = \bar{C}_1 + \bar{C}_M + \bar{C}_K \quad (2.94)$$

\bar{C}_K umfasst alle maximal gekreuzten Diagramme und ist in Abb. 2.11 visualisiert. Sie ist ebenfalls analog zu Gl. 2.77 definiert.

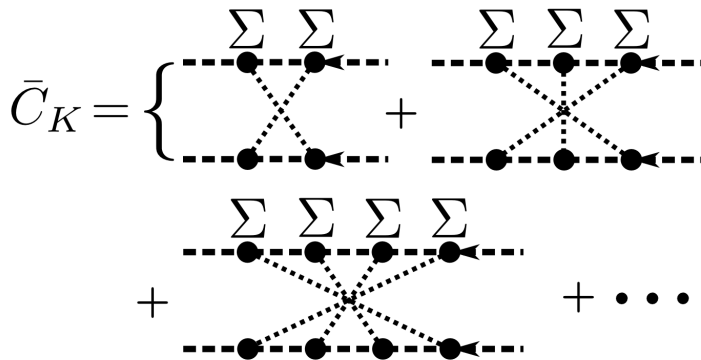


Abbildung 2.11: Kohärenzmatrix aller maximal gekreuzten Pfade, analog zu Abb. 2.8.

Es ist offensichtlich, dass dieser Anteil nur die Streuordnungen zwei und höher enthalten kann, es handelt sich um einen reinen Mehrfachstreuereffekt. Die maximal gekreuzten Diagramme enthalten nicht nur exakt gleiche Hin- und Rückwege, sondern alle Arten von maximal gekreuzten Pfaden, ganz gleich wie viele unterschiedliche Streupunkte die Pfade neben den gemeinsamen gekreuzten Punkten noch ansteuern (Abb. 2.10).

Das bedeutet, dass sich zwischen zwei sich kreuzenden Streupunkten auf einem Weg nahezu beliebige weitere Streuwege einfügen lassen, über die theoretisch summiert werden müsste. Das gilt auch für die Leiter-Diagramme (Abb. 2.8). Die STG beschreibt, wie

dargelegt, den zeitlich gemittelten Fluss elektromagnetischer Energie (Mishchenko et al [2006] Kap. 8.16), die Mittelung über die Zeit ist nach Kap. 2.2.4 gleichbedeutend mit einer Mittelung über alle Teilchenpositionen und Teilchenzustände und damit mit einer Mittelung über alle möglichen Streuwege.

Eine Mittelung über alle zwischen zwei Streupunkten einfügbaren Streuwege führt bei der großen Anzahl an existierenden Streupunkten dazu, dass diese Wege aufgrund des Ausgleichs zwischen konstruktiven und destruktiven Interferenzen im Mittel keinen zusätzlichen Beitrag liefern. Übrig bleiben nur die Beiträge exakt gleicher Pfade in den Leiterdiagrammen (diffuse Streuung, STG) und den maximal gekreuzten Diagrammen (kohärente Rückstreuung). Von den in Abb. 2.10 gezeigten Beispielen müssen demnach nur das Diagramm oben links und das mittlere Diagramm simuliert werden, von den in Abb. 2.7 gezeigten Beispielen nur das Diagramm (d).

Nun wird als Beispiel eine Zweifachstreuung betrachtet, wobei die beiden Streuer mit den Indizes 1 und 2 bezeichnet werden (Mishchenko et al [2006] Kap. 8.11). Für das einfallende Feld gilt $E_1^{inc} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = E_0^{inc} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$. Die Geometrie ist in Abb. 2.12 dargestellt und entspricht im Wesentlichen Abbildung 2.4. Die einfallende Strahlung wird als ebene Welle betrachtet, die gestreute als Kugelwellen, die Green-Funktion G ist definiert durch Gleichung 2.25, die Matrix \bar{A} durch Gleichung 2.38.

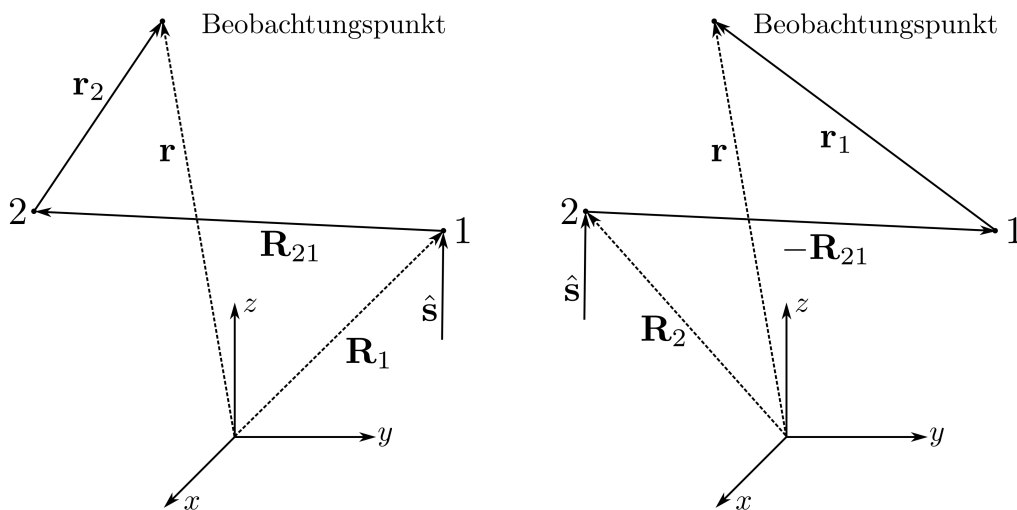


Abbildung 2.12: Geometrie für die Gleichungen 2.95 und 2.96. Durchgezogene Vektoren (das KOSY ausgenommen) kennzeichnen den Streupfad, gestrichelte Linien kennzeichnen Ortsvektoren. Links: "Hinweg" dessen Leiternäherung in Gleichung 2.95 berechnet wird und der eine Hälfte der kohärenten Gleichung 2.96 bildet. Rechts: "Rückweg", welcher die andere Hälfte der kohärenten Gleichung 2.96 bildet.

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{LZ} &= \langle \mathbf{E}_Z(\mathbf{r}, t) \otimes [\mathbf{E}_Z(\mathbf{r}, t)]^* \rangle_{\mathbf{R}, \xi} \\
&= \langle \left((G(r_2) \bar{A}_2(\hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{R}}_{21})) \cdot (G(R_{21}) \bar{A}_1(\hat{\mathbf{R}}_{21}, \hat{\mathbf{s}})) \cdot \mathbf{E}_1^{inc} \exp(ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{R}_1) \right) \\
&\otimes \left((G^*(r_2) \bar{A}_2(\hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{R}}_{21})) \cdot (G^*(R_{21}) \bar{A}_1(\hat{\mathbf{R}}_{21}, \hat{\mathbf{s}})) \cdot \mathbf{E}_1^{inc*} \exp(-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{R}_1) \right) \rangle_{\mathbf{R}, \xi} \quad (2.95) \\
&= \langle \frac{1}{r_1^2 R_{21}^2} \left(\bar{A}_2(\hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{R}}_{21}) \cdot \bar{A}_1(\hat{\mathbf{R}}_{21}, \hat{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{E}_1^{inc} \right) \\
&\otimes \left(\bar{A}_2(\hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{R}}_{21}) \cdot \bar{A}_1(\hat{\mathbf{R}}_{21}, \hat{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{E}_1^{inc*} \right) \rangle_{\mathbf{R}, \xi}
\end{aligned}$$

Das ist die Leiterkomponente der Zweifachstreuung (LZ), bei der beide Streuwege über dieselben Streuer führen. Auflösen der Green-Funktionen führt hier zu einem konstanten Normierungsfaktor.

Nun wird der zweite Streuweg umgedreht, so dass sich ein gekreuztes Diagramm ergibt. Die Komponente, welche das maximal gekreuzte Diagramm der der Zweifachstreuung beschreibt, lautet wie folgt (man beachte das umgekehrte Vorzeichen des Richtungsvektors $\hat{\mathbf{R}}_{21}$):

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{XZ} &= \langle \mathbf{E}_Z(\mathbf{r}, t) \otimes [\mathbf{E}_{Zr}(\mathbf{r}, t)]^* \rangle_{\mathbf{R}, \xi} \\
&= \langle \left((G(r_2) \bar{A}_2(\hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{R}}_{21})) \cdot (G(R_{21}) \bar{A}_1(\hat{\mathbf{R}}_{21}, \hat{\mathbf{s}})) \cdot \mathbf{E}_1^{inc} \exp(ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{R}_1) \right) \\
&\otimes \left((G^*(r_1) \bar{A}_1(\hat{\mathbf{r}}_1, -\hat{\mathbf{R}}_{21})) \cdot (G^*(R_{21}) \bar{A}_2(-\hat{\mathbf{R}}_{21}, \hat{\mathbf{s}})) \cdot \mathbf{E}_1^{inc*} \exp(-ik\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{R}_2) \right) \rangle_{\mathbf{R}, \xi} \quad (2.96) \\
&= \langle \frac{\exp(ik(r_2 - r_1 - (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{R}_{21})))}{r_1 r_2 R_{21}^2} \left(\bar{A}_2(\hat{\mathbf{r}}_2, \hat{\mathbf{R}}_{21}) \cdot \bar{A}_1(\hat{\mathbf{R}}_{21}, \hat{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{E}_1^{inc} \right) \\
&\otimes \left(\bar{A}_1(\hat{\mathbf{r}}_1, -\hat{\mathbf{R}}_{21}) \cdot \bar{A}_2(-\hat{\mathbf{R}}_{21}, \hat{\mathbf{s}}) \cdot \mathbf{E}_1^{inc*} \right) \rangle_{\mathbf{R}, \xi}
\end{aligned}$$

Auflösen der Green-Funktionen führt hier zu einer zusätzlichen Exponentialfunktion im Normierungsfaktor, dies ist der für die gekreuzten Diagramme und damit für die kohärente Rückstreuung charakteristische Term:

$$\exp(ik(r_2 - r_1 - (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{R}_{21}))) = \exp(i\Delta\epsilon) \quad (2.97)$$

$\Delta\epsilon$ ist die Phasenverschiebung zwischen den Streuwegen, gegeben durch die Weglängendifferenz zwischen den Pfaden multipliziert mit der Kreiswellenzahl. Der Term $\exp(i\Delta\epsilon)$ ist in exakter Rückstreurichtung bei exakt gleich langen Pfaden ($\Delta\epsilon = 0$) immer gleich 1 für jede mögliche Konfiguration von Streuwegen.

Bewegt man sich langsam von der Rückstreurichtung fort, so nehmen die Weglängendifferenzen langsam zu, der Wert von $\exp(i\Delta\epsilon)$ entsprechend ab, bis sein Wert in einem von Medium und Wellenlänge abhängigen Winkelabstand (s.u.) gleich Null wird. Das bedeutet, dass der Beitrag der KRS-Komponente in exakter Rückstreurichtung stets maximal ist, und dass dieses Maximum mit mehr oder minder steil abfallenden Flanken umgeben ist, während sich der Beitrag abseits dieser Flanken heraus mittelt.

Die physikalische Erklärung dieses Effektes ist, dass die beiden Lichtpfade im Detektor interferieren. Ist die Weglängendifferenz zwischen beiden Pfaden gleich 0 ist diese Interferenz absolut konstruktiv, die Energie in exakter Rückstreurichtung kann bis zu doppelt so groß sein wie ohne KRS, abhängig vom Anteil der Mehrfachstreuung an der Rückstreuung, sowie von Polarisierungseffekten. In direkter Nachbarschaft zum Rückstreumaximum

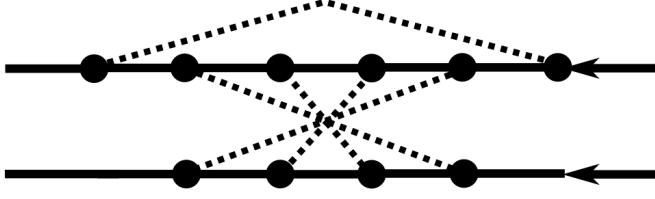


Abbildung 2.13: Beispiel für einen Pfad, welcher destruktive Interferenz bewirkt nach Fiebig et al [2008].

ergeben sich sehr kleine Weglängendifferenzen, durch die noch teilweise konstruktive Interferenz entstehen kann, was zu den abfallenden Flanken des Rückstreumaximums führt. In dieser Betrachtung mitteln sich konstruktive und destruktive Interferenzanteile abseits des Rückstreumaximums exakt heraus. Dies stellt jedoch eine Verletzung der Energieerhaltung dar. Tatsächlich ergibt sich in diesen Bereichen auch eine schwach negative Interferenz, welche die zusätzliche Energie im Rückstreumaximum ausgleicht. Das Zustandekommen dieser negativen Interferenz erklären Fiebig et al [2008] mit quantenmechanischen Argumenten (Quantum Crossing, Hikami-Box, siehe auch Akkermans et al [2007]).

Dabei argumentieren sie, dass es bei Pfaden, bei denen der Abstand der Endstreupunkte größenordnungsmäßig einer Wellenlänge oder weniger entspricht, zu quantenmechanischer Koppelung zwischen den einfallenden und den gestreuten Wellen kommt. Diese Koppelung lässt sich beschreiben durch einen zusätzlichen Streupunkt vor den Endstreupunkten, über den jeweils einer der beiden Wege vor und nach Durchlaufen des gemeinsamen Streuweges streut (Abb. 2.13). Für die destruktive Interferenz ist die Position dieses Streupunkts relativ zu den Endstreupunkten von entscheidender Bedeutung. Solche Streuwege sind aufgrund der Twersky-Näherung (Kap. 2.2.3) nicht in der STG enthalten.

Die Berücksichtigung der Energieerhaltung ist daher in dieser Arbeit und im Rahmen der Berechnungen mit MYSTIC nicht möglich. Da wir es in den Simulationen in dieser Arbeit mit sehr geringen Energieüberschüssen, d.h. mit extrem schmalen Rückstreumaxima zu tun haben, lässt sich die Verletzung der Energieerhaltung hier aber guten Gewissens vernachlässigen (vgl. auch Abb. 2.15). Das Ergebnis der KRSV-Simulationen in dieser Arbeit beruht daher alleine auf der Interferenz von innerhalb des Mediums identischen reziproken Streuwegen.

2.3.2 Die KRS-Reflexionsmatrix

Betrachtet wird ein plan-paralleles horizontal unendlich ausgedehntes Medium, das von oben von einer ebenen Welle angestrahlt wird. Der Beobachtungspunkt befindet sich ebenfalls oberhalb des Mediums und es wird die aus dem Medium zurück reflektierte Strahlung gemessen. Hierfür wird analog zu Gl. 2.94 der entsprechende spezifische Kohärenz-Spaltenvektor definiert, wobei $\mu = \cos\Theta$ und $\hat{\mu} = (\mu, \phi)$ ($-\hat{\mu}$ ist die Rückstreurichtung):

$$\mathbf{J}(-\hat{\mu}) = \mathbf{J}_1(-\hat{\mu}) + \mathbf{J}_M(-\hat{\mu}) + \mathbf{J}_K(-\hat{\mu}) \quad (2.98)$$

Die drei Teile sind Einfachstreu-, Mehrfachstreu- und kohärenter Rückstreu-Anteil, letzterer ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{J}_K = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_0}} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\Sigma}_K(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{n}}) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\Sigma}_K(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}(\hat{\mathbf{n}}) \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\Sigma}_K(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{n}}) \\ \hat{\boldsymbol{\phi}}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\Sigma}_K(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}}(\hat{\mathbf{n}}) \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Die anderen beiden Anteile sind analog zu Gleichung 2.84, Σ_K analog zu Gl. 2.79 definiert. Nun lässt sich die 4×4 Kohärenz-Reflexions-Matrix definieren (Mishchenko et al [2006] Kap.14.2), welche einen in ein Medium einfallenden Kohärenz-Spaltenvektor in einen vom Medium gestreuten transformiert:

$$\mathbf{J}(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \frac{1}{\pi} \mu_0 \mathbf{R}^J(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) \mathbf{J}_0 \quad (2.100)$$

Für diese gilt ebenso die Aufspaltung:

$$\mathbf{R}^J(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) = \mathbf{R}^{J1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) + \mathbf{R}^{JM}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) + \mathbf{R}^{JK}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) \quad (2.101)$$

Analog gibt es die Stokes-Vektor-Darstellung:

$$\mathbf{I}(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{I}^1(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{I}^M(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{I}^K(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (2.102)$$

$$\mathbf{I}(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \mathbf{D}\mathbf{J}(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (2.103)$$

$$\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) = \mathbf{R}^1(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) + \mathbf{R}^M(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) + \mathbf{R}^K(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) \quad (2.104)$$

$$\mathbf{I}(-\hat{\boldsymbol{\mu}}) = \frac{1}{\pi} \mu_0 \mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) \mathbf{I}_0 \quad (2.105)$$

Und die Stokes-Reflexions-Matrix, welche man durch die gemittelte Lösung der STG erhält:

$$\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) = \mathbf{R}^1(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) + \mathbf{R}^M(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) \quad (2.106)$$

Im Fall von zufällig orientierten rotationssymmetrischen Teilchen hat die Matrix \mathbf{R} folgende Form:

$$\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 & 0 \\ R_{12} & R_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} & R_{34} \\ 0 & 0 & -R_{34} & R_{44} \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

In exakter Rückstreurichtung μ_0^π nehmen diese Einzelmatrixen aus Gl. 2.104 folgende Form an (Mishchenko et al [2006] Kap. 11.10 und 14.3):

$$\mathbf{R}^1(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0^\pi, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) = \begin{bmatrix} R_{11}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{22}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{22}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44}^1 \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$R_{44}^1(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0^\pi, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) = R_{11}^1(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0^\pi, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) - 2R_{22}^1(\hat{\boldsymbol{\mu}}_0^\pi, \hat{\boldsymbol{\mu}}_0) \quad (2.109)$$

Die Mehrfachstreu- und KRSV-Matrizen haben dieselbe Struktur, wie Gl. 2.108.

$$\mathbf{R}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) = \begin{bmatrix} R_{11}^M & R_{12}^M & 0 & 0 \\ R_{12}^M & R_{22}^M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{33}^M & R_{34}^M \\ 0 & 0 & -R_{34}^M & R_{44}^M \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

$$\mathbf{R}^K(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) = \begin{bmatrix} R_{11}^K & R_{12}^M & 0 & 0 \\ R_{12}^M & R_{22}^K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{33}^K & R_{34}^M \\ 0 & 0 & -R_{34}^M & R_{44}^K \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

$$R_{11}^K(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) = \frac{1}{2} (R_{11}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) + R_{22}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) - R_{33}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) + R_{44}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0)) \quad (2.112)$$

$$R_{22}^K(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) = \frac{1}{2} (R_{11}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) + R_{22}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) + R_{33}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) - R_{44}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0)) \quad (2.113)$$

$$R_{33}^K(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) = \frac{1}{2} (-R_{11}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) + R_{22}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) + R_{33}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) + R_{44}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0)) \quad (2.114)$$

$$R_{44}^K(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) = \frac{1}{2} (R_{11}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) - R_{22}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) + R_{33}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) + R_{44}^M(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0)) \quad (2.115)$$

Das bedeutet, dass in exakter Rückstreurichtung der Anteil der kohärenten Rückstreuung aus der diffusen Mehrfachstreuung abgeleitet werden kann. Die wichtige Voraussetzung, welche erfüllt sein muss, ist, dass die optische Dicke des Mediums hoch genug sein muss, damit die diffuse Mehrfachstreuung gesättigt ist, das heißt, dass sich das Verhältnis von beobachteter Einfachstreuung und Mehrfachstreuung bei Erhöhung der optischen Dicke nicht mehr erhöht.

Anwendung von Gleichung 2.105 führt zu folgenden Stokes-Vektor-Komponenten:

- Für $\mathbf{l} = [1, 0, 0, 0]^T$:

$$I_K = \frac{\mu_0}{\pi} \left(R_{11}^1 + R_{11}^M + \left[\frac{1}{2} (R_{11}^M + R_{22}^M - R_{33}^M + R_{44}^M) \right] \right) \quad (2.116)$$

- Für $\mathbf{l} = [1, 1, 0, 0]^T$:

$$I_K = \frac{\mu_0}{\pi} \left(R_{11}^1 + R_{11}^M + R_{12}^M + \left[\frac{1}{2} (R_{11}^M + R_{22}^M - R_{33}^M + R_{44}^M) + R_{12}^M \right] \right) \quad (2.117)$$

$$Q_K = \frac{\mu_0}{\pi} \left(R_{22}^1 + R_{22}^M + R_{12}^M + \left[\frac{1}{2} (R_{11}^M + R_{22}^M + R_{33}^M - R_{44}^M) + R_{12}^M \right] \right) \quad (2.118)$$

- Für $\mathbf{l} = [1, 0, 1, 0]^T$:

$$I_K = \frac{\mu_0}{\pi} \left(R_{11}^1 + R_{11}^M + \left[\frac{1}{2} (R_{11}^M + R_{22}^M - R_{33}^M + R_{44}^M) \right] \right) \quad (2.119)$$

$$U_K = \frac{\mu_0}{\pi} \left(R_{33}^1 + R_{33}^M + \left[\frac{1}{2} (-R_{11}^M + R_{22}^M + R_{33}^M + R_{44}^M) \right] \right) \quad (2.120)$$

- Für $\mathbf{l} = [1, 0, 0, 1]^T$:

$$\mathbf{l}_K = \frac{\mu_0}{\pi} \left(R_{11}^1 + R_{11}^M + \left[\frac{1}{2} (R_{11}^M + R_{22}^M - R_{33}^M + R_{44}^M) \right] \right) \quad (2.121)$$

$$\mathbf{v}_K = \frac{\mu_0}{\pi} \left(R_{44}^1 + R_{44}^M + \left[\frac{1}{2} (R_{11}^M - R_{22}^M + R_{33}^M + R_{44}^M) \right] \right) \quad (2.122)$$

Die Beiträge von \mathbf{R}^K sind mit eckigen Klammern gekennzeichnet, lässt man sie weg, erhält man die Ausdrücke für die rein diffuse Rückstreuung \mathbf{l}_d , \mathbf{Q}_d , \mathbf{U}_d und \mathbf{V}_d . Über diese Formeln lassen sich Ausdrücke für die kohärenten Rückstreuverstärkungsfaktoren ζ (KRSV-Faktoren) finden.

Diese sind allgemein definiert als der Quotient des Signals mit KRS und des Signals ohne KRS:

$$\zeta = \frac{\text{Signal mit KRS}}{\text{Signal ohne KRS}} \quad (2.123)$$

Der KRSV-Faktor für unpolarisierte Strahlung lautet:

$$\zeta_{unp} = \frac{\mathbf{l}_K}{\mathbf{l}_d} = \frac{R_{11}^1 + R_{11}^M + \frac{1}{2} (R_{11}^M + R_{22}^M - R_{33}^M + R_{44}^M)}{R_{11}^1 + R_{11}^M} \quad (2.124)$$

Betrachtet man Q-polarisierte Strahlung, dann erhält man für die kopolarisierte Komponente $\zeta_{QP} = \frac{\mathbf{l}+\mathbf{Q}}{2}$ und die kreuzpolarisierte Komponente $\zeta_{QX} = \frac{\mathbf{l}-\mathbf{Q}}{2}$:

$$\zeta_{QP} = \frac{\mathbf{l}_K + \mathbf{Q}_K}{\mathbf{l}_d + \mathbf{Q}_d} = \frac{R_{11}^1 + R_{22}^1 + 2R_{11}^M + 4R_{12}^M + 2R_{22}^M}{R_{11}^1 + R_{22}^1 + R_{11}^M + 2R_{12}^M + R_{22}^M} \quad (2.125)$$

$$\zeta_{QX} = \frac{\mathbf{l}_K - \mathbf{Q}_K}{\mathbf{l}_d - \mathbf{Q}_d} = \frac{R_{11}^1 - R_{22}^1 + R_{11}^M - R_{22}^M - R_{33}^M + R_{44}^M}{R_{11}^1 - R_{22}^1 + R_{11}^M - R_{22}^M} \quad (2.126)$$

Für U-polarisierte Strahlung erhält man für die kopolarisierte Komponente $\zeta_{UP} = \frac{\mathbf{l}+\mathbf{U}}{2}$ und die kreuzpolarisierte Komponente $\zeta_{UX} = \frac{\mathbf{l}-\mathbf{U}}{2}$:

$$\zeta_{UP} = \frac{\mathbf{l}_K + \mathbf{U}_K}{\mathbf{l}_d + \mathbf{U}_d} = \frac{R_{11}^1 + R_{33}^1 + R_{11}^M + R_{22}^M + R_{33}^M + R_{44}^M}{R_{11}^1 + R_{33}^1 + R_{11}^M + R_{33}^M} \quad (2.127)$$

$$\zeta_{UX} = \frac{\mathbf{l}_K - \mathbf{U}_K}{\mathbf{l}_d - \mathbf{U}_d} = \frac{R_{11}^1 - R_{33}^1 + 2R_{11}^M - 2R_{33}^M}{R_{11}^1 - R_{33}^1 + R_{11}^M - R_{33}^M} \quad (2.128)$$

Im Fall von V-polarisierter Strahlung, erhält man für die gleich-drehende Komponente $\zeta_{VP} = \frac{\mathbf{l}+\mathbf{V}}{2}$ und die gegen-drehende Komponente $\zeta_{VX} = \frac{\mathbf{l}-\mathbf{V}}{2}$:

$$\zeta_{VP} = \frac{\mathbf{l}_K + \mathbf{V}_K}{\mathbf{l}_d + \mathbf{V}_d} = \frac{R_{11}^1 + R_{44}^1 + 2R_{11}^M + 2R_{44}^M}{R_{11}^1 + R_{44}^1 + R_{11}^M + R_{44}^M} \quad (2.129)$$

$$\zeta_{VX} = \frac{\mathbf{l}_K - \mathbf{V}_K}{\mathbf{l}_d - \mathbf{V}_d} = \frac{R_{11}^1 - R_{44}^1 + R_{11}^M + R_{22}^M - R_{33}^M - R_{44}^M}{R_{11}^1 - R_{44}^1 + 2R_{11}^M - 2R_{44}^M} \quad (2.130)$$

Im Fall kugelförmiger Teilchen gilt des weiteren (Mishchenko et al [2006] Kap. 14.5.5):

$$R_{22}^1(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) = R_{11}^1(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) \quad (2.131)$$

Zusammen mit Gleichung 2.109 vereinfacht sich $\mathbf{R}^1(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0)$ zu:

$$\mathbf{R}^1(\hat{\mu}_0^\pi, \hat{\mu}_0) = \begin{bmatrix} R_{11}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_{11}^1 \end{bmatrix} \quad (2.132)$$

was zu Vereinfachungen der Gleichungen 2.124 - 2.130 führt:

$$\zeta_{unp} = \frac{R_{11}^1 + R_{11}^M + \frac{1}{2}(R_{11}^M + R_{22}^M - R_{33}^M + R_{44}^M)}{R_{11}^1 + R_{11}^M} \quad (2.133)$$

$$\zeta_{QP} = 2 - \frac{2R_{11}^1}{2R_{11}^1 + R_{11}^M + 2R_{12}^M + R_{22}^M} \quad (2.134)$$

$$\zeta_{QX} = \frac{R_{11}^M - R_{22}^M - R_{33}^M + R_{44}^M}{R_{11}^M - R_{22}^M} \quad (2.135)$$

$$\zeta_{UP} = \frac{R_{11}^M + R_{22}^M + R_{33}^M + R_{44}^M}{R_{11}^M + R_{33}^M} \quad (2.136)$$

$$\zeta_{UX} = \frac{2R_{11}^1 + 2R_{11}^M - 2R_{33}^M}{2R_{11}^1 + R_{11}^M - R_{33}^M} \quad (2.137)$$

$$\zeta_{VP} = 2 \quad (2.138)$$

$$\zeta_{VX} = \frac{2R_{11}^1 + R_{11}^M + R_{22}^M - R_{33}^M - R_{44}^M}{2R_{11}^1 + R_{11}^M - R_{44}^M} \quad (2.139)$$

Der konstante Wert 2 für ζ_{VP} ergibt sich durch die Anwendung von Gl. 2.131 und Gl. 2.109 auf Gl. 2.129. Man beachte außerdem, dass für die Reflexionsmatrizen auch bei kugelförmigen Teilchen nicht die in Kap. 2.1.4 für einzelne Streumatrizen erwähnten Bedingungen $R_{22}^M = R_{11}^M$ und $R_{44}^M = R_{33}^M$ gelten (Mishchenko et al [2006] Kap.14.5.5), da die Reflexionsmatrizen Mittelungen über viele Streumatrizen aus allen Streuordnungen darstellen.

2.3.3 Der KRS-Stokes-Vektor

Die Gleichungen des letzten Kapitels gelten nur für die exakte Rückstreurichtung bei Betrachtung der gesamten zurück gestreuten Strahlung aus einem optisch dichten Medium. Wünschenswert ist aber ein allgemeinerer Ausdruck, der auch für einzelne Paare von Lichtstrahlen in beliebigen Richtungen bei beliebigen optischen Dicken gelten kann. Die Lösung liegt in der Darstellung der kohärenten Rückstreuung mit Hilfe des Stokes-Vektors. Gegeben ist eine elektromagnetische Welle \mathbf{E} in (θ, ϕ) -Koordinaten:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta)) \quad \mathbf{E} \in \mathbb{C} \quad (2.140)$$

Dieses Feld besteht aus den Komponenten $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\theta + \mathbf{E}_\phi$, die senkrecht zueinander orientiert sind.

Die Kohärenzmatrix lautet $\bar{\rho} = \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^*$ woraus sich der Stokes-Vektor in lokalen Koordinaten ergibt (siehe Gleichungen 2.56 - 2.59):

$$\mathbf{I} = \mathbf{D} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} \hat{\theta} \cdot \bar{\rho} \cdot \hat{\theta} \\ \hat{\theta} \cdot \bar{\rho} \cdot \hat{\phi} \\ \hat{\phi} \cdot \bar{\rho} \cdot \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \cdot \bar{\rho} \cdot \hat{\phi} \end{bmatrix} = \mathbf{D} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\theta \mathbf{E}_\theta^* \\ \mathbf{E}_\theta \mathbf{E}_\phi^* \\ \mathbf{E}_\phi \mathbf{E}_\theta^* \\ \mathbf{E}_\phi \mathbf{E}_\phi^* \end{bmatrix} \quad (2.141)$$

Das Feld \mathbf{E} ist eine Überlagerung aus zwei elektromagnetische Wellen, welche mit den Indizes 1 und 2 bezeichnet werden, es gilt $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Diese beiden Wellen sind das Ergebnis eines kohärenten Streuprozesses über einen beliebigen Mehrfachstreupfad und werden vom letzten bzw. ersten Streuer des Pfades kommend an einem Punkt im Raum gemessen, an dem sie auch interferieren. Die Feldkomponenten \mathbf{E}_θ und \mathbf{E}_ϕ können ebenfalls als Summen dieser beiden Felder geschrieben werden:

$$\mathbf{I} = \mathbf{D} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} (\mathbf{E}_{1\theta} + \mathbf{E}_{2\theta})(\mathbf{E}_{1\theta}^* + \mathbf{E}_{2\theta}^*) \\ (\mathbf{E}_{1\theta} + \mathbf{E}_{2\theta})(\mathbf{E}_{1\phi}^* + \mathbf{E}_{2\phi}^*) \\ (\mathbf{E}_{1\phi} + \mathbf{E}_{2\phi})(\mathbf{E}_{1\theta}^* + \mathbf{E}_{2\theta}^*) \\ (\mathbf{E}_{1\phi} + \mathbf{E}_{2\phi})(\mathbf{E}_{1\phi}^* + \mathbf{E}_{2\phi}^*) \end{bmatrix} \quad (2.142)$$

Nach Transformation von \mathbb{C} nach \mathbb{R} und Trennung in die diffusen und den KRS-Stokes-Vektor ergibt sich (Muinonen [2004]):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} = & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{1\theta}^2 + \mathbf{E}_{1\phi}^2 \\ \mathbf{E}_{1\theta}^2 - \mathbf{E}_{1\phi}^2 \\ 2\mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{1\phi} \cos(\delta_{1\theta} - \delta_{1\phi}) \\ -2\mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{1\phi} \sin(\delta_{1\theta} - \delta_{1\phi}) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{2\theta}^2 + \mathbf{E}_{2\phi}^2 \\ \mathbf{E}_{2\theta}^2 - \mathbf{E}_{2\phi}^2 \\ 2\mathbf{E}_{2\theta}\mathbf{E}_{2\phi} \cos(\delta_{2\theta} - \delta_{2\phi}) \\ -2\mathbf{E}_{2\theta}\mathbf{E}_{2\phi} \sin(\delta_{2\theta} - \delta_{2\phi}) \end{bmatrix} \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} 2\mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\theta} \cos(\Delta\epsilon + \delta_{1\theta} - \delta_{2\theta}) + 2\mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\phi} \cos(\Delta\epsilon + \delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}) \\ 2\mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\theta} \cos(\Delta\epsilon + \delta_{1\theta} - \delta_{2\theta}) - 2\mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\phi} \cos(\Delta\epsilon + \delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}) \\ 2\mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\phi} \cos(\Delta\epsilon + \delta_{1\theta} - \delta_{2\phi}) + 2\mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\theta} \cos(\Delta\epsilon + \delta_{1\phi} - \delta_{2\theta}) \\ -2\mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\phi} \sin(\Delta\epsilon + \delta_{1\theta} - \delta_{2\phi}) + 2\mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\theta} \sin(\Delta\epsilon + \delta_{1\phi} - \delta_{2\theta}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.143)$$

δ_{XY} ist die Phase der Y -Komponente des X -ten Feldes, die Weglängendifferenz $\Delta\epsilon = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2$ ergibt sich aus der Definition von \mathbf{E} in Gl. 2.140. Die ersten beiden Terme von Gleichung 2.143 sind die normalen Stokes-Vektoren der beiden Felder, der dritte Term beschreibt die Interferenz, welche zur kohärenten Rückstreuung führt und ist damit der gesuchte Ausdruck. Aus Gleichung 2.7 folgt, dass die Größen $\mathbf{E}_\perp \geq 0$, $\mathbf{E}_\parallel \geq 0$ und $\Delta\delta = \delta_\perp - \delta_\parallel$ eindeutig hergeleitet werden können, wenn \mathbf{I} , \mathbf{Q} , \mathbf{U} und \mathbf{V} bekannt sind und wenn Gleichung 2.8 erfüllt ist. Unter der Voraussetzung, dass $|\mathbf{Q}| \neq \mathbf{I}$, führt die Inversion des Stokes-Vektors zu folgenden Ausdrücken:

$$\mathbf{E}_\perp = \sqrt{\frac{\mathbf{I} + \mathbf{Q}}{2}} \quad \mathbf{E}_\parallel = \sqrt{\frac{\mathbf{I} - \mathbf{Q}}{2}} \quad \Delta\delta = \arccos \frac{\mathbf{U}}{\sqrt{\mathbf{I}^2 - \mathbf{Q}^2}} = \arcsin \frac{-\mathbf{V}}{\sqrt{\mathbf{I}^2 - \mathbf{Q}^2}} \quad (2.144)$$

Alternativ:

$$\Delta\delta = \arccos \frac{\mathbf{U}}{\sqrt{\mathbf{U}^2 + \mathbf{V}^2}} = \arcsin \frac{-\mathbf{V}}{\sqrt{\mathbf{U}^2 + \mathbf{V}^2}} \quad (2.145)$$

$\Delta\delta$ ist dadurch eindeutig auf dem Intervall $(0, 2\pi)$ bestimmt. Der Fall $|Q| = 1$ ist trivial. Dank dieser Gleichungen ist es möglich, bei Kenntnis der Stokes-Vektoren beider Felder, diese Feldgrößen zu extrahieren und mit ihrer Hilfe den kohärente Stokes-Vektor zu berechnen.

Zunächst wird der kohärente Stokes-Vektor etwas umgeschrieben. Dabei werden die internen Phasendifferenzen zwischen senkrechter und paralleler Komponente eingeführt: $\Delta\delta_1 = \delta_{1\theta} - \delta_{1\phi}$ und $\Delta\delta_2 = \delta_{2\theta} - \delta_{2\phi}$, welche, wie eben gezeigt, direkt berechnet werden können. Damit folgt:

$$\mathbf{I}_k = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\theta} \cos(\Delta\epsilon + \Delta\delta_1 - \Delta\delta_2 + \delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}) + \mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\phi} \cos(\Delta\epsilon + \delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}) \\ \mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\theta} \cos(\Delta\epsilon + \Delta\delta_1 - \Delta\delta_2 + \delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}) - \mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\phi} \cos(\Delta\epsilon + \delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}) \\ \mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\phi} \cos(\Delta\epsilon + \Delta\delta_1 + \delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}) + \mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\theta} \cos(\Delta\epsilon - \Delta\delta_2 + \delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}) \\ -\mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\phi} \sin(\Delta\epsilon + \Delta\delta_1 + \delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}) + \mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\theta} \sin(\Delta\epsilon - \Delta\delta_2 + \delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}) \end{bmatrix} \quad (2.146)$$

Nach dieser Transformation ist nur noch der Term $\delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}$ unbekannt. Für diesen Term gibt es unterschiedliche Herangehensweisen (Muinonen [2004]). In den MYSTIC-Simulationen in dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass der Sender eine kohärente homogene Welle erzeugt und dass zwei interferierende Photonenwege stets gleichzeitig als Teil derselben Welle starten. Das bedeutet, dass es keinen initialen Phasenunterschied zwischen den Pfaden gibt und dass sämtliche Phasenverschiebungen erst auf dem Weg durch Veränderung der Polarisation bei Streuungen und durch die erwähnte Weglängendifferenz erworben werden. Aus diesem Grund wird $\delta_{1\phi} - \delta_{2\phi} = 0$ gesetzt. Diese Annahme ist auch für die Simulation von Radar gerechtfertigt, da ein Radar kohärente Strahlungspulse, d.h. Wellenzüge, aussendet.

Nun wird der Phasenunterschied aufgrund der Weglängendifferenz $\Delta\epsilon$ betrachtet, die grundlegende Formel lautet mit konstanter Wellenzahl:

$$\Delta\epsilon = k(\Delta r' + \Delta r'') \quad (2.147)$$

Wegunterschiede können sich sowohl zwischen Quelle und Medium als auch zwischen Medium und Beobachter ergeben. Beide müssen einbezogen werden. Bei Betrachtung des Wegunterschiedes zwischen Medium und Beobachter, ist die Phasendifferenz des Wegunterschiedes zwischen Quelle und Medium bereits auf die Wellen aufgeprägt. Wie die Δr genau zu ermitteln sind, ist ein rein geometrisches Problem. Für Kugelwellen ergibt sich folgender Ausdruck (Abb. 2.14 rechts):

$$\Delta\epsilon = k((\hat{\mathbf{n}}'_1 \cdot \mathbf{r}'_1 - \hat{\mathbf{n}}'_2 \cdot \mathbf{r}'_2) + (\hat{\mathbf{n}}''_1 \cdot \mathbf{r}''_1 - \hat{\mathbf{n}}''_2 \cdot \mathbf{r}''_2)) = k(r'_1 - r'_2 - r''_1 + r''_2) \quad (2.148)$$

Im Fall ebener Wellen kann diese Formel vereinfacht werden, da die Wellenvektoren hier parallel sind, mit $\hat{\mathbf{n}}' \cdot \Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$ und $\hat{\mathbf{n}}'' \cdot \Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}''_1 - \mathbf{r}''_2$ gilt (Abb. 2.14 links):

$$\Delta\epsilon = k(\hat{\mathbf{n}}' + \hat{\mathbf{n}}'') \cdot \Delta\mathbf{r}_{12} \quad (2.149)$$

Die beiden resultierenden Terme können interpretiert werden als die Projektionen von $\Delta\mathbf{r}_{12}$ auf die beiden Richtungen, was den jeweiligen geometrischen Wegunterschieden entspricht. Wenn man in Abb. 2.14 Sender und Empfänger jeweils gleichsetzt, so sieht man sofort, dass der Hin- und der Rückweg identisch werden und die Weglängendifferenzen Null.

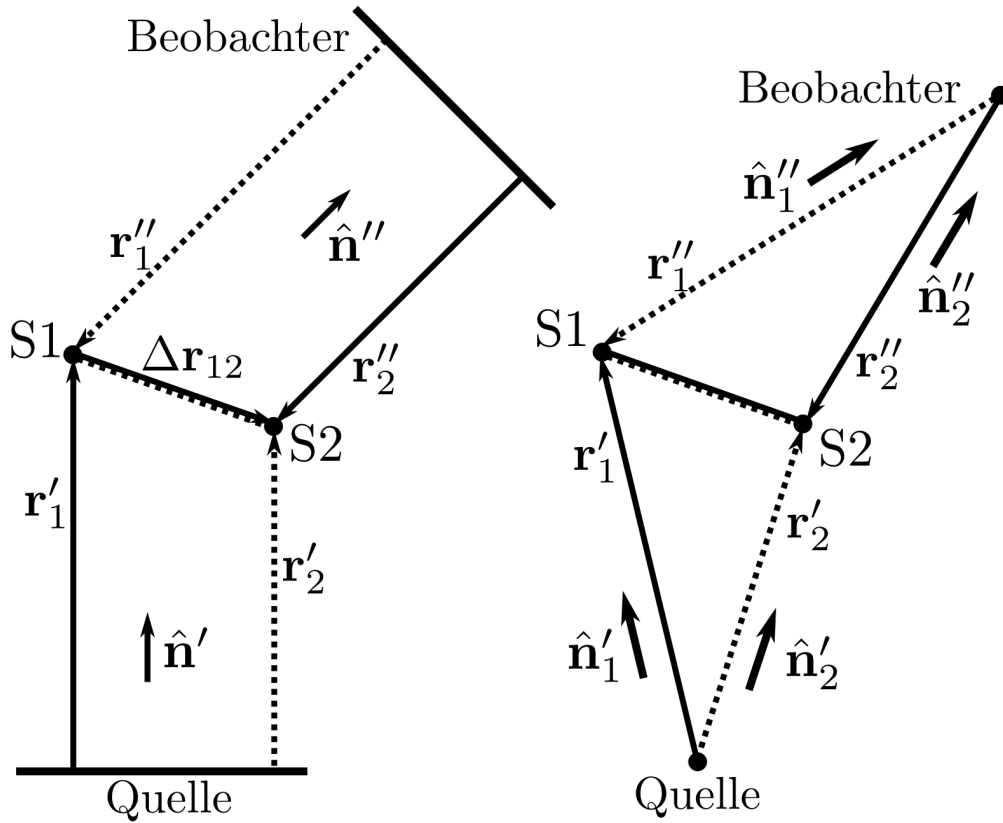


Abbildung 2.14: Vektoren für den Fall von Zweifachstreuung an zwei Streuern S1 und S2 mit ebenen Wellen (links) und mit Kugelwellen (rechts). Durchgezogene und gepunktete Linien symbolisieren die beiden interferierenden Pfade. Die Vektorpfeile dieser Pfade zeigen in Blickrichtung von Quelle bzw. Beobachter aus zu den Streuern.

2.3.4 Die Form des Rückstreumaximums

Neben dem Verstärkungsfaktor in exakter Rückstreurichtung spielt auch die kegelartige Form des Rückstreumaximums eine bedeutende Rolle. Abbildung 2.15 zeigt, wie variabel die Breite der Maxima abhängig von den Materialien sein kann (vgl. auch 1.2). Die Spitze des Maximums in exakter Rückstreurichtung ist in nicht-absorbierenden Medien eine Singularität in Form eines spitzen Dreiecks (Lenke et al [2000]). In absorbierenden Medien verringert sich der Maximalwert der KRSV und das Maximum zeigt einen eher parabolischen Verlauf (Akkermans et al [2007]).

Die Breite des Maximums ist abhängig von der Wellenlänge und der mittleren Transportweglänge l^* , welche von der mittleren freien Streu-Weglänge l (d.h. der mittleren Weglänge zwischen zwei Streueignissen) abhängt und dem gemittelten Cosinus des Streuwinkels $\langle \cos \Theta \rangle$, welcher als Asymmetrieparameter g bekannt ist:

$$l^* = \frac{l}{1 - \langle \cos \Theta \rangle} = \frac{l}{1 - g} \quad (2.150)$$

Laut Fiebig [2010] ist der Winkelabstand α zwischen den Punkten an den Flanken des Maximums, an denen die Werte die Hälfte des Maximums annehmen (FWHM - Full Width

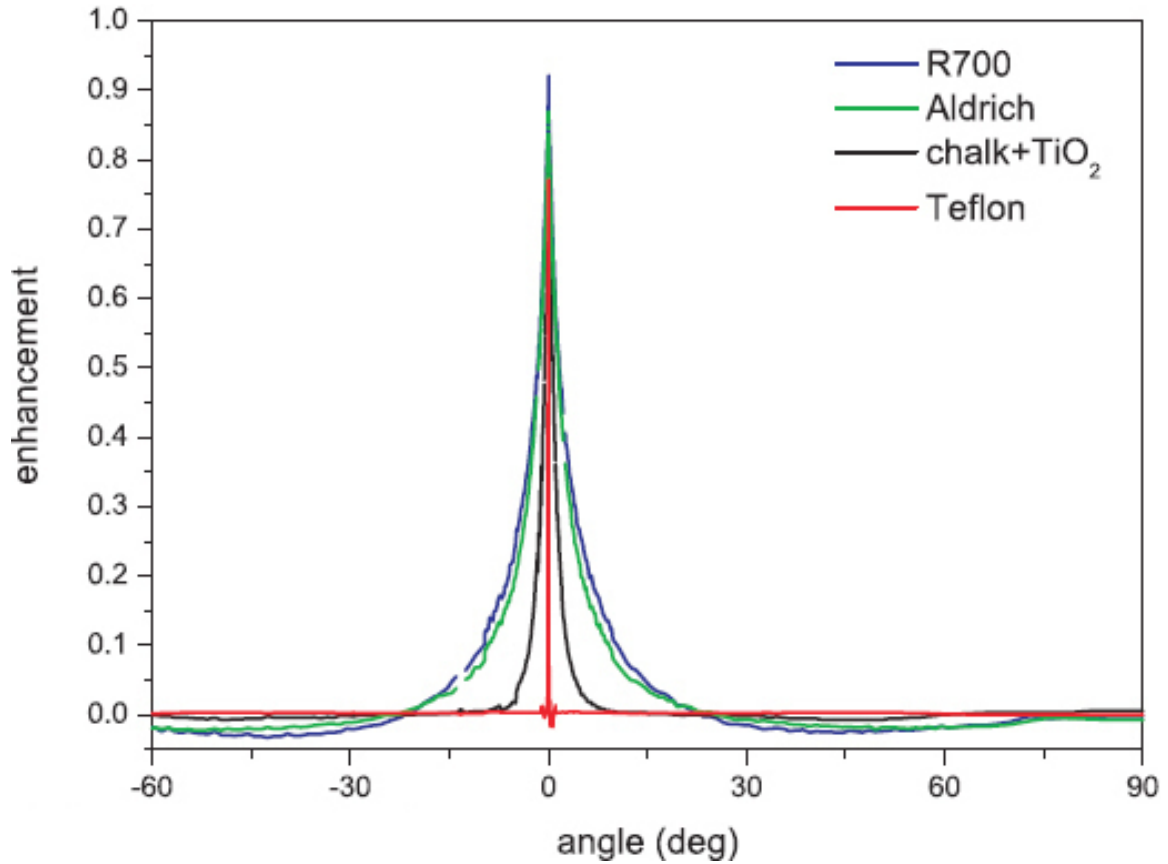


Abbildung 2.15: Verschiedene experimentell gemessene Rückstreumaxima aus Fiebig et al [2008]. Auffällig hier auch die negative KRSV zwischen ca. 25° und 70°, welche Ausdruck der Energieerhaltung ist (siehe Kap. 2.3.1).

Half Maximum), näherungsweise gegeben durch (mit der Kreiswellenzahl k):

$$\alpha = \frac{3\lambda}{8\pi l^*} = \frac{3}{4kl^*} \quad (2.151)$$

Die ältere in der Literatur (Lenke et al [2000]) zu findende Abschätzung $\alpha = (kl^*)^{-1}$ ist weniger genau.

Allgemein impliziert diese Gleichung, dass das Rückstreumaximum umso breiter wird, je geringer die mittlere freie Streu-Weglänge l im Vergleich zur Wellenlänge λ ist. Abb. 2.15 verdeutlicht unterschiedliche Breiten des Maximums. Man sieht, dass mit wachsender Breite des Maximums auch die Bereiche negativer KRSV, die abseits des kegelförmigen Maximums auftreten, ausgeprägter sind. Je breiter das Maximum ist, desto mehr Energie wird im Rahmen der KRSV durch die Interferenz zurück gestreut und muss dem entsprechend ausgeglichen werden.

Wird die mittlere freie Streu-Weglänge so klein, dass $l \approx \lambda$ gilt, geht das System vom Zustand der schwachen Lokalisierung in einen Zustand der starken Lokalisierung oder Anderson-Lokalisierung über, in dem die Strahlungsenergie im Medium gefangen wird (Akkermans et al [2007]). Für sichtbares Licht kommt dieser Fall in der Natur nicht vor (Lagendijk et al [2009]).

Die Wellenlängen von Mikrowellenstrahlung von Radar-Geräten sind zwar wesentlich größer als die von Licht, aber die Streuung von Strahlung solcher Wellenlängen an typischen Hydrometeoren ist sehr schwach, so dass der Wert der mittleren freien Streu-

Weglänge selbst für extreme Niederschlagsereignisse in der Größenordnung von 1000 m liegt, wie später in den Ergebnissen gezeigt werden wird (Tab. 4.15). Nimmt man für Radar-Wellenlängen eine Größenordnung von 1 cm an, so ist das System fünf Größenordnungen von der starken Lokalisierung entfernt und es kann mit Sicherheit schwache Lokalisierung angenommen werden.

2.4 Radar-Theorie



Abbildung 2.16: IEEE- (rote Skala) und NATO-Radar-Bänder mit Frequenzabgrenzungen und Beispielen für verwendete Radargeräte. Meteorologische Radare in dieser Graphik sind das POLDIRAD (Polarization Diversity Doppler Radar) Regenradar des DLR Oberpfaffenhofen (5,45 cm , 5,5 GHz), das MIRA-36 (Millimeter Radar-36) Wolkenradar der Firma METEK (8,5 mm , 35,3 GHz) und das SWACR (Scanning W-Band ARM Cloud Radar) Wolkenradar der Atmospheric Radiation Measurement (ARM) Climate Research Facility des US-Energie-Ministeriums (3,2 mm , 93,7 GHz).

Radar steht für "Radio Detection and Ranging" und bezeichnet eine Technik, bei der elektromagnetische Wellen im Mikrowellenbereich von Richtantennen ausgesendet werden und die durch Objekte verschiedener Größen ausgelösten Streuechos dieser Wellen gemessen werden.

2.4.1 Überblick über Radargeräte und Frequenzen

Abbildung 2.16 zeigt das Radarspektrum mit Bandbezeichnungen der Frequenzbereiche und zahlreichen Beispielen für Radargeräte.

Der Bereich der Mikrowellenstrahlung liegt im Frequenzbereich von 1 bis 300 GHz , bzw. im Wellenlängenbereich von 1 bis 300 mm . Wetterradarfrequenzen liegen dabei unterhalb von 100 GHz , da die Absorption der Strahlung durch Sauerstoff- und Wassermoleküle mit steigender Frequenz zunimmt und die Reichweite von Radargeräten zunehmend limitiert (Abb. 2.17). Allerdings ermöglicht eine kleinere Wellenlänge einem Radargerät die

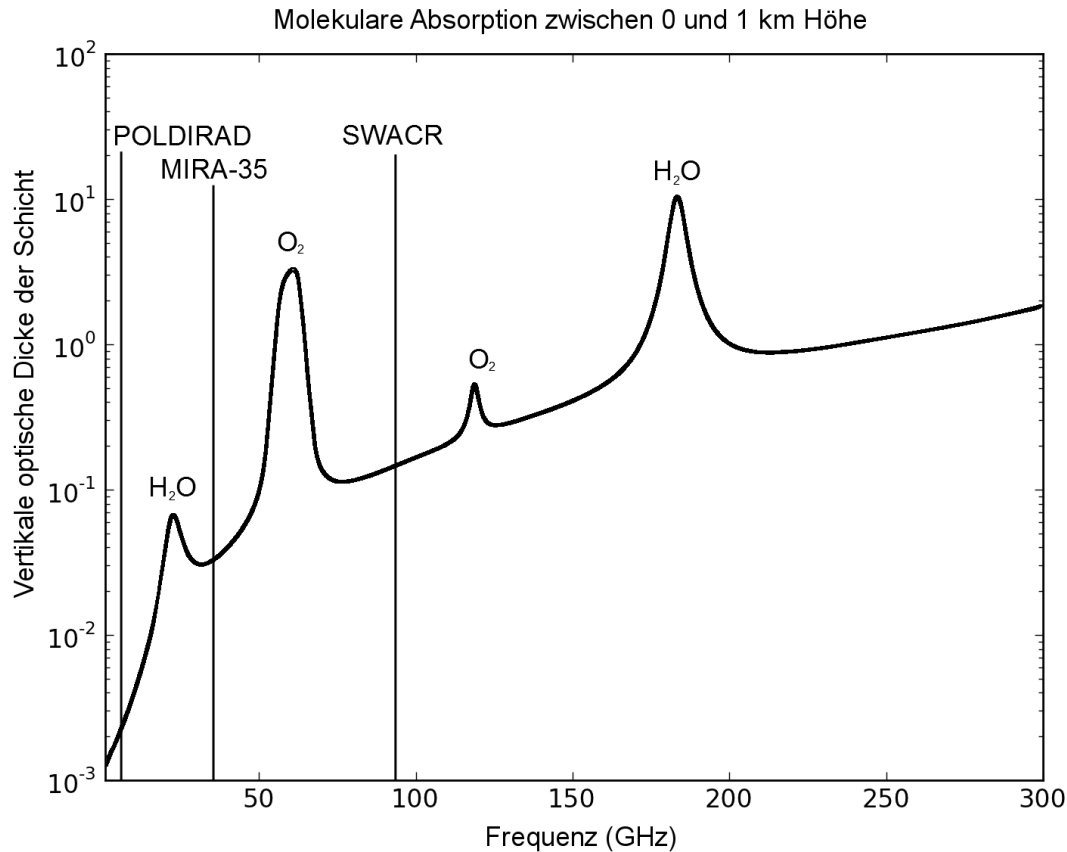


Abbildung 2.17: Absorption durch Moleküle in der Atmosphäre für die unterste Atmosphärenschicht zwischen 0 und 1km Höhe. Geplottet ist die vertikale optische Dicke der Schicht, welche mit dem Programm ARTS (Eriksson et al [2011]) berechnet wurde. Das Atmosphärenprofil ist das Standard Midlatitude Summer-Profil (Anderson et al [1986]). Die vier ausgeprägten Maxima entstehen durch O_2 - und H_2O -Absorption. Die Frequenzen der drei in Abb. 2.16 genannten meteorologischen Radare sind mit senkrechten Linien gekennzeichnet.

Wahrnehmung kleinerer Teilchen, daher muss für jedes meteorologische Radargerät ein Kompromiss aus Reichweite und Wahrnehmungsbereich gefunden werden.

Da beispielsweise die wichtigste nicht-meteorologische Anwendung von Radar, die Luftaufklärung, möglichst große Reichweiten erzielen muss und Ziele erkennen muss, die weit größer als Wolkentropfen sind, finden sich derartige Radargeräte in den untersten Frequenzbereichen: Flughafen-Überwachungs-Radar arbeitet bei Frequenzen von 2.7 GHz bis 2.9 GHz. Die Frequenzen von Wolkenradaren im Ka-Band und im W-Band sind so gewählt, dass sie möglichst wenig molekulare Absorption erfahren, um die Vorteile höherer Frequenzen, d.h. die Detektion kleinerer Teilchen, möglichst optimal nutzen zu können. Bei Wolkenradar wird die Reichweite in der Regel technisch soweit beschränkt, dass der Effekt der molekularen Absorption im Signal nicht deutlich zu Tage tritt.

Typische Darstellungsarten von Radarsignalen sind der A-Scope-Plot (ein linearer Signal-Entfernungs-Plot), sowie verschiedene zweidimensionale Darstellungsweisen, mit denen sich die zeitliche Entwicklung eines statischen Radars ebenso darstellen lassen, wie die Signale von scannenden Geräten. Für letztere existieren der zweidimensionale Plan-Parallel-

Indicator-Plot (PPI), welcher Signale in einer horizontalen Ebene visualisiert (typische Darstellung von Wetterradar-Daten) und der ebenfalls zweidimensionale Range-Height-Indicator-Plot (RHI), welcher Signale in einer vertikalen Ebene visualisiert.

2.4.2 Der Radarpuls

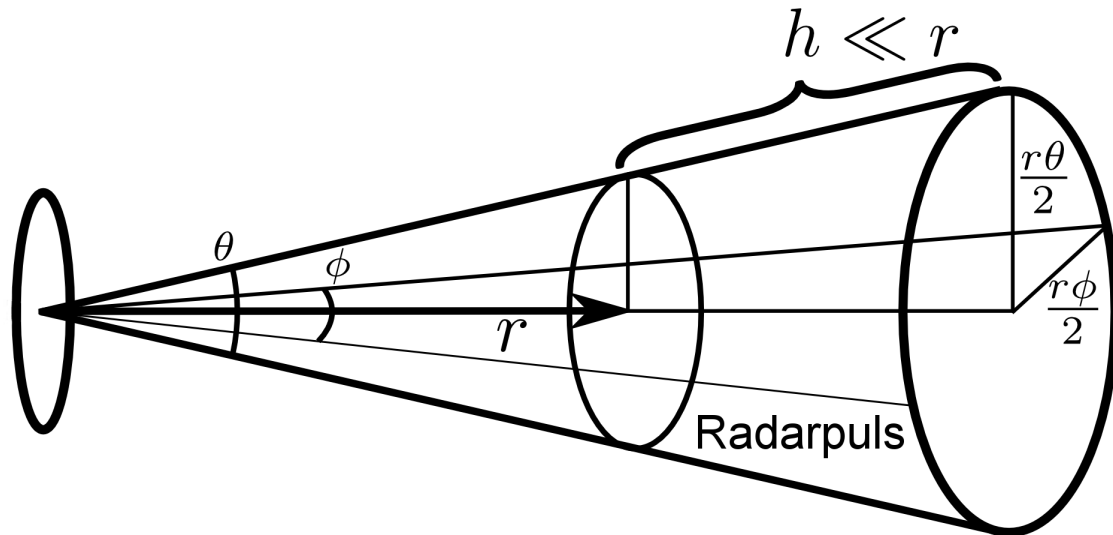


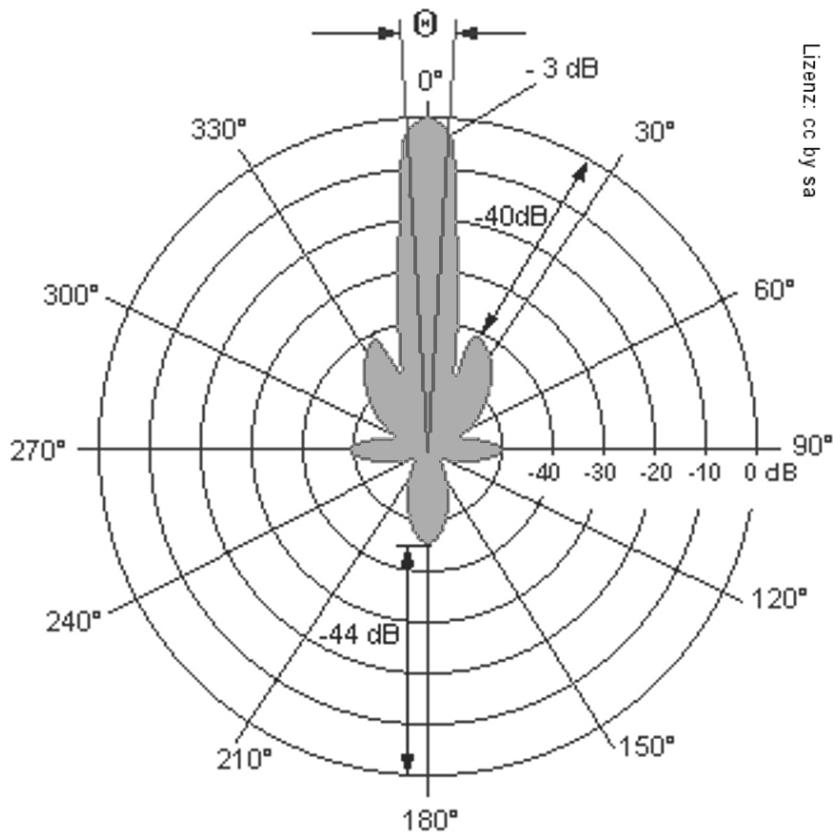
Abbildung 2.18: Volumen eines Radarpulses im Abstand r von der Sendeantenne mit den Öffnungswinkeln θ und ϕ und der Länge h . h ist i.d.R. sehr viel kleiner als r , da ein Radar aufgrund der Verzögerung bei der Umschaltung vom Sender-Modus in den Empfänger-Modus erst Radarpulse ab einer gewissen Entfernung empfangen kann. Da die Öffnungswinkel ebenfalls sehr klein sind, ist die Kleinwinkelnäherung erlaubt und das Volumen darf als Zylinder angesehen werden.

Ein Radarstrahl ist i.d.R. oval oder kreisförmig und wird durch die Öffnungswinkel θ und ϕ beschrieben. Die Antenne sendet Pulse der zeitlichen Länge Δt_h und der räumlichen Länge $h = c\Delta t_h$ aus. Die Entfernung von der Sendeantenne zum hinteren Ende des Pulses wird mit r bezeichnet (Abb. 2.18). Radarantennen sind in der meteorologischen Anwendung normalerweise kreisförmig, so dass $\theta = \phi$ gilt, die folgende Ableitung wird aber dem allgemeineren Fall folgen.

Die Länge eines Radarpulses ist im Vergleich zur gemessenen Entfernung sehr klein. Ebenfalls sehr klein sind die Öffnungswinkel θ und ϕ , so dass das Volumen, das streng genommen die Form eines Kegelstumpfes hat, als Zylinder angenähert werden kann. Ein Radarstrahl hat keine exakt begrenzten Ränder, vielmehr fällt die Intensität der Hauptkeule vom Maximum in der Mitte nach außen hin Gauss-förmig ab. Daher ist das Volumen die Abgrenzung des Bereichs des Radarstrahls, in dem die Energie mindestens die Hälfte des Maximalwertes beträgt, was einer Verringerung um etwa 3 db entspricht (Abb. 2.19). Innerhalb dieses Bereichs sind $(2 \ln 2)^{-1} \approx 72\%$ der gesamten Pulsleistung enthalten (Rinehart [2010]).

Das Sample-Volumen lautet damit (Rinehart [2010]):

$$V = \pi r^2 \frac{\theta}{2} \frac{\phi}{2} \frac{h}{2} = \frac{\pi r^2 \theta \phi h}{8} \quad (2.152)$$



modifiziert von radartutorial.eu
 Lizenz: cc by sa

Abbildung 2.19: Beispiel für eine typische Abstrahlcharakteristik einer gerichteten Radarantenne. Die konzentrischen Kreise geben die Signalstärke in Dezibel an. Der Öffnungswinkel Θ ist definiert durch den Bereich der Hauptkeule, innerhalb dessen die Signalstärke um weniger als 3 dB, d.h. weniger als die Hälfte, abfällt. Die Signalmaxima abseits der Hauptrichtung werden Nebenkeulen genannt.

Abbildung 2.20 zeigt anhand eines Raum-Zeit-Diagramms, wie das reflektierte Signal des Radar-Pulses entsteht. Eingezeichnet sind ein Radarpuls mit räumlicher Ausdehnung h und zeitlicher Ausdehnung Δt_h (hellgraue Fläche) sowie eine Wolkenschicht der Dicke $h/2$ (dunkelgraue Fläche). Die Vorderseite des Pulses liegt auf der mit S bezeichneten Seite, die Rückseite bei E. Das zurück gestreute Radarsignal ist ein kontinuierlicher Strom aus sich überlagernden Streusignalen. Die Aufteilung des gestreuten Signals in Range Gates erfolgt, indem das Signal an Zeitpunkten mit vorgegebenen regelmäßigen Abständen gemessen wird, wobei die Signalanteile zwischen diesen Punkten ignoriert werden.

Ein solches reflektiertes Punktsignal ist am Ort \mathbf{x}_0 zum Zeitpunkt t_G eingezeichnet. Es besteht aus der Überlagerung des zur Zeit t_1 am Ort \mathbf{x}_1 gestreuten Teil des Signals, des zur Zeit t_2 am Ort \mathbf{x}_2 gestreuten Teil des Signals, und so weiter. Alle Teilsignale, welche auf der Linie zwischen dem Punkt (t_1, \mathbf{x}_1) und dem Punkt (t_5, \mathbf{x}_5) gestreut werden, überlagern sich zu einem Punktsignal und werden zur selben Zeit t_G am Ort \mathbf{x}_0 gemessen. Daraus wird ersichtlich, dass ein Signal mit der Pulslänge h einen Abstand von $h/2$ auflösen kann.

2.4.3 Ableitung der Radargleichung

Innerhalb des Pulsvolumens V befindet sich eine finite Anzahl von n Streupartikeln, deren Rückstreuquerschnitte σ_i aufaddiert werden. Für die Radargleichung misst man diese σ_i über ein Einheitsvolumen V_0 , das als repräsentativ für das gesamte Pulsvolumen V angesehen wird, und multipliziert diese Summe mit V :

$$\sigma_V = V \sum_{i=1}^n \sigma_i = V \sum_{V_0} \sigma_i \quad (2.153)$$

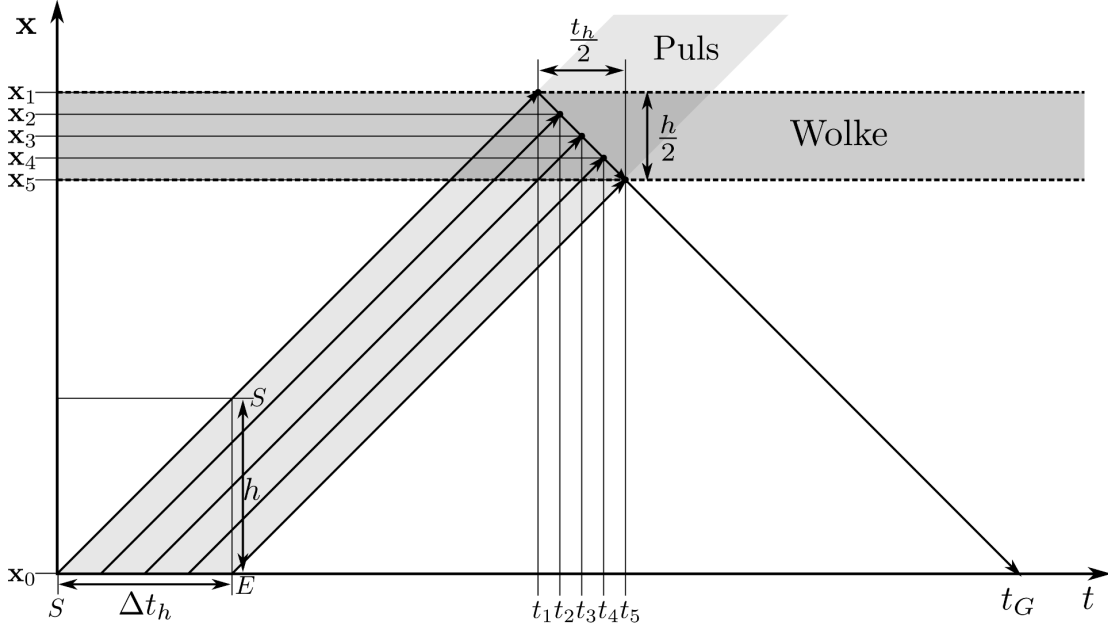


Abbildung 2.20: Raum-Zeit-Diagramm mit einem Radarpuls, der an einer Wolkenschicht streut. Das Diagramm stellt die auf eine Dimension vereinfachte Position im Raum aufgetragen gegen die Zeit dar. Sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegende Objekte werden dadurch zu Diagonalen mit der Steigung 1. Derartige Diagramme werden v.a. in der Relativitätstheorie als Minkowski-Diagramme verwendet.

Das Pulsvolumen ist gegeben durch Gl. 2.152. Wird die oben genannte Korrektur $2 \ln 2$ für die Gauss-Form des Strahls in den Nenner von Gl. 2.152 miteinbezogen, so gilt für den Rückstreuquerschnitt des Messvolumens:

$$\sigma_V = V \sum_{V_0} \sigma_i = \frac{\pi r^2 \theta \phi h}{16 \ln 2} \sum_{V_0} \sigma_i \quad (2.154)$$

Eine gerichtete Radarantenne konzentriert den Großteil ihrer ausgesendeten Energie innerhalb der Hauptkeule (Abb. 2.19). Im Unterschied zu einer isotropen Abstrahlung erfährt das Signal in dieser Richtung eine Verstärkung, welche durch den sog. Gain der Antenne beschrieben wird. Dieser ist im Fall einer kreisförmigen Antenne gegeben durch $g = \frac{\pi^2}{\theta^2}$ (Rinehart [2010]).

Das ausgesendete Radarsignal mit der Energie p_t breitet sich als Kugelwelle aus und seine Energie nimmt mit r^{-2} ab. Die von einem Objekt mit der Fläche A_σ innerhalb des Radarstrahls gestreute Energie p_σ entspricht dann dem Verhältnis dieser Fläche zur gesamten Kugelfläche:

$$p_\sigma = \frac{p_t g A_\sigma}{4\pi r^2} \quad (2.155)$$

Das von dem Objekt gestreute Signal kann ebenfalls als Kugelwelle betrachtet werden, welche von der Radarantenne mit der Fläche A_e empfangen wird. Die von der Antenne empfangene Energie p_r ist dann:

$$p_r = \frac{p_\sigma A_e}{4\pi r^2} = \frac{p_t g A_e A_\sigma}{16\pi^2 r^4} \quad (2.156)$$

Die effektive Fläche der Radarantenne kann mit der Wellenlänge λ geschrieben werden als (Rinehart [2010]):

$$A_e = \frac{g\lambda^2}{4\pi} \quad (2.157)$$

Das führt schließlich zur Radargleichung eines einzelnen Streuobjektes:

$$p_r = \frac{p_t g^2 \lambda^2 A_\sigma}{64\pi^3 r^4} \quad (2.158)$$

Setzt man für A_σ den Rückstreuquerschnitt eines ganzen Messvolumens (Gl. 2.154) ein und berücksichtigt Faktoren, welche den Radarstrahl abschwächen, z.B. Verluste im Radargerät, mittels eines Verlustterms $l \in (0, 1)$, folgt daraus die Radargleichung:

$$p_r = p_t \frac{g^2 \theta \phi h \lambda^2 l}{1024 \ln(2) \pi^2 r^2} \sum_{vol} \sigma_i \quad (2.159)$$

Die Wellenlänge eines meteorologischen Radars wird i.d.R. so gewählt, dass es möglichst im Rayleigh-Bereich arbeitet: *mm*-Wolkenradar ist vor allem dazu gedacht, Wolkentröpfchen zu beobachten, welche die Größenordnung von $10\mu m$ haben. *cm*-Regenradar wird entsprechend zur Beobachtung von Regentropfen eingesetzt. Daher wird für die Radargleichung grundsätzlich die Annahme reiner Rayleigh-Streuung gemacht. Im Rayleigh-Bereich gilt für den Streuquerschnitt eines Teilchens folgender Zusammenhang:

$$\sigma_i = \frac{\pi^5 |K|^2 D_i^6}{\lambda^4} \quad (2.160)$$

$K = \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2 + 2}$ und $\epsilon = \epsilon + i\frac{\sigma}{\omega}$ ist der komplexe Brechungsindex (siehe Kap. 2.2.1), D_i der Durchmesser des i -ten Teilchens. Gleichung 2.160 verdeutlicht die in Kap. 2.1.1 erwähnte λ^{-4} -Abhängigkeit der Rayleigh-Streuung.

Einsetzen von Gl. 2.160 in Gl. 2.159 ergibt:

$$p_r = p_t \frac{\pi^3 g^2 \theta \phi h |K|^2 l}{1024 \ln(2) \lambda^2 r^2} \sum_{vol} D_i^6 = \frac{p_t}{c r^2} \sum_{vol} D_i^6 \quad (2.161)$$

$$c = \frac{1024 \ln(2) \lambda^2}{p_t \pi^3 g^2 \theta \phi h |K|^2 l} \quad (2.162)$$

Fast alle Variablen in Gl. 2.161 sind geräteabhängig und ändern sich während des Radarbetriebes nicht, daher lassen sie sich zur Radarkonstante c zusammenfassen.

Nun wird der äquivalente Radarreflektivitätsfaktor z_e definiert. Das Attribut "äquivalent" kommt daher, dass ein Radar in der Regel auch größere Partikel misst, welche die Rayleigh-Theorie nicht mehr akkurat beschreiben kann. Streuung an solchen Partikeln wird aber aufgrund der Anwendung von Gleichung 2.160 auch als Rayleigh-Streuung betrachtet, was zu Abweichungen im Ergebnis führt. Im Allgemeinen ist mit dem "Radarreflektivitätsfaktor" immer der äquivalente gemeint, den man erhält, wenn man reine Rayleigh-Streuung annimmt:

$$z_e = \sum_{vol} N_i D_i^6 = c p_r r^2 \quad (2.163)$$

Da sich das ausgesendete und das empfangene Signal um bis zu 13 Größenordnungen unterscheiden können, arbeitet man mit dem dekadischen Logarithmus von z_e :

$$Z_e = 10 \log_{10} \left(\frac{z_e}{\frac{1 \text{ mm}^6}{\text{m}^3}} \right) \quad (2.164)$$

$$Z_e = 10 \log_{10}(c) + 10 \log_{10}(p_r) + 20 \log_{10}(r) \quad (2.165)$$

Im Fall von Tröpfchengrößenverteilungen nähert man z_e als Summe über alle N_i Tröpfchen an, welche sich innerhalb des Größenintervalls D_i bis $D_i + \delta D$ befinden:

$$z_e = \sum_{i=1}^n N_i D_i^6 \delta D_i \quad (2.166)$$

Der nicht immer korrekten Annahme reiner Rayleigh-Streuung kann man mit Korrekturen für Mie-Streuung begegnen, indem man die Streueffizienz in Rückstreurichtung

$$Q_{bs} = Q_{as} M_{11}(\pi) = \frac{\sigma_s}{A_Q} M_{11}(\pi) \quad (2.167)$$

verwendet, wie dies z.B. in der Simulations-Software Quickbeam passiert (Haynes [2007]). $M_{11}(\pi)$ ist das 11-Element der Müller-Matrix (Gl. 2.10) in Rückstreurichtung und Q_{as} die Streueffizienz nach Gl. 2.3. Damit lässt sich der äquivalente Reflektivitätsfaktor korrigiert ausdrücken als:

$$z_{eff} = \frac{\lambda^4}{\pi^5 |K|^2} \left(\frac{\pi}{4} \sum_i^K Q_{bs,i} N(D_i) D_i^2 \Delta D_i \right) \quad (2.168)$$

Kapitel 3

Kohärente Rückstreuung und MYSTIC

Um die Frage zu klären, welchen Effekt die kohärente Rückstreuung auf Wetterradarmessungen hat, wurden Algorithmen für die beiden im vorherigen Kapitel vorgestellten Methoden zur Berechnung der KRSV entwickelt und in das Strahlungsmodell MYSTIC implementiert. Im folgenden wird zunächst die grundlegende Funktionsweise von MYSTIC vorgestellt. Anschließend werden die beiden Implementierungen beschrieben, sowie ihre Vor- und Nachteile benannt, und zum Schluss wird die Implementierung der Simulation von Radar-Messungen in MYSTIC dargelegt.

3.1 Überblick über MYSTIC

MYSTIC ist ein dreidimensionales Strahlungstransfermodell, welches die Strahlungstransfergleichung mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode löst (Mayer [1999], Mayer [2009]). Es ist Teil des Strahlungstransfer-Software-Pakets libRadtran, einer Sammlung verschiedener Strahlungstransfer-Solver unter einem gemeinsamen Dach (Mayer et al [2005]) nebst verschiedenen Hilfsprogrammen von denen das Werkzeug zur Berechnung von Streueigenschaften, das sog. "Mie-Tool", am wichtigsten ist.

Neben MYSTIC enthält libRadtran verschiedene Versionen und Abwandlungen des verbreiteten DISORT Solvers (DIScrete Ordinate Radiative Transfer solver), des weiteren verschiedene Two-Stream Solver sowie spezialisierte Solver. Ausführliche Beschreibungen des Monte Carlo-Strahlungstransfers findet man in den Arbeiten von Marshak et al [2005] und Marchuk et al [1980].

MYSTIC simuliert eine dreidimensionale Box, welche in Gitterboxen aufgeteilt ist, denen Streu- und Absorptionseigenschaften von Wasser- oder Eiswolken und Aerosolen zugeordnet werden können. Global enthält diese Box eine Atmosphäre, welche über Temperatur, Druck und Teilchenzahldichten der Luft und ihrer wichtigsten Konstituenten definiert wird. Während das horizontale Gitter regelmäßigen Abständen folgt, können die Höhenlevel individuell und unabhängig von den Atmosphärenleveln angegeben werden. Streueigenschaften werden für jede Box einzeln angegeben und können in einfachen Fällen direkt berechnet werden. Meist werden sie aber extern vorberechnet (z.B. im Mie-Tool) und über Nachschlagetabellen eingelesen.

Die Basisfunktionalität von MYSTIC ist die Berechnung unpolarisierter Strahldichten und Strahlungsflussdichten von in der Atmosphäre gestreuter Sonnenstrahlung. Weitergehend

besteht die Möglichkeit, konkrete Sender und Empfänger innerhalb der Box zu definieren, welche durch Empfangsfläche und Öffnungswinkel definiert sind. Dies ermöglicht die Simulation passiver und aktiver Fernerkundungstechniken.

Standardgemäß wird das Modell für solare und terrestrische Strahlung verwendet, theoretisch ist jedoch jeder beliebige Wellenlängenbereich möglich, solange entsprechende Daten für molekulare Absorption und Streueigenschaften verfügbar sind. Die Möglichkeit, voll polarisierten Strahlungstransfer effizient zu berechnen, ist ebenfalls gegeben (Emde et al [2010]), dazu kommen Local Estimates, Backward Tracing, sowie verschiedene Importance Sampling- und Varianzreduktionsmethoden (Buras et al [2011]).

3.1.1 Integrale lösen mit der Monte-Carlo-Methode

In MYSTIC wird die integrale Strahlungstransfergleichung gelöst, daher wird zunächst die Technik des Lösen von Integralen mittels der Monte Carlo-Methode beschrieben. Sei $P(x)$, $x \in D$ eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und x ein Ereignis aus der Ereignismenge D :

$$1. P(x) \geq 0 \quad \forall x \in D \quad (3.1)$$

$$2. \int_D P(x)dx = 1 \quad (3.2)$$

Der Erwartungswert (Mittelwert) einer kontinuierlichen Zufallsvariable X auf D , welche die Werte x annimmt und welche entsprechend P verteilt ist, ist dann gegeben durch:

$$E[X] = \int_D xP(x)dx \quad (3.3)$$

Analog gilt für eine Funktion $f(x)$:

$$E[f(X)] = \int_D f(x)P(x)dx \quad (3.4)$$

Die Monte-Carlo-Integration ermöglicht die Lösung solcher Integrale. Sei F das Integral einer beliebigen Funktion f über D :

$$F = \int_D f(x)dx \quad (3.5)$$

Erweiterung dieses Integrals mit P und Anwendung von Gleichung 3.4 führt zu:

$$F = \int_D \frac{f(x)}{P(x)}P(x)dx = E \left[\frac{f(X)}{P(X)} \right] \quad (3.6)$$

Eine Abschätzung von F ist gegeben durch den Mittelwert von N zufällig aus der Verteilung P gewählten Werten x_i der Zufallsvariable X eingesetzt in f/P (Gentle [2003]):

$$\hat{F} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{P(x_i)} \quad (3.7)$$

Dabei muss $P(x) > 0 \quad \forall x \in D$ gelten. Um bei der Simulation einer physikalischen Funktion f eine korrekte Verteilung der Zufallswerte zu erhalten, sollte die Wahl von P auf eine Funktion fallen, welche gleich oder proportional zu f ist.

Damit diese Methode im Strahlungstransfer zur Anwendung kommen kann, wird für f die integrale Strahlungstransfergleichung eingesetzt, die Integrale werden durch diskrete Werte $f(x_i)$ ersetzt, welche mittels einer Markov-Kette von geeigneten Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $P(x_i)$ ermittelt werden. Eine Markov-Kette ist eine Aneinanderreihung von stochastischen Ereignissen, wobei jedes Ereignis nur vom direkt vorhergehenden abhängig ist, sie ist wie folgt definiert:

3.1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit in Markov-Ketten

Gegeben sind zwei aufeinander folgende Ereignisse x_1 und x_2 , wobei x_2 von x_1 abhängt. Die Definition für die bedingte Wahrscheinlichkeit des Eintretens von x_2 unter der Voraussetzung dass Ereignis x_1 eingetroffen ist lautet (Gentle [2003]):

$$P(x_2|x_1) = \frac{P(x_2 \cap x_1)}{P(x_1)} \quad (3.8)$$

Die Markov-Eigenschaft besagt nun, dass in einer Aneinanderreihung von mehreren solcher Ereignisse jedes Ereignis nur vom direkt vorhergehenden Ereignis abhängt. Dies lässt sich als Beispiel für drei aufeinander folgende Ereignisse x_1 , x_2 und x_3 wie folgt ausdrücken:

$$P(x_3|(x_2 \cap x_1)) = P(x_3|x_2) \quad (3.9)$$

Die Wahrscheinlichkeit für das n -te Element einer Kette von bedingten Wahrscheinlichkeiten ist gegeben durch den Multiplikationssatz für n Ereignisse x_1, \dots, x_n :

$$P(x_0 \cap x_1 \cap \dots \cap x_n) = P(x_0)P(x_1|x_0)P(x_2|x_0 \cap x_1)\dots P(x_n|x_0 \cap \dots \cap x_{n-1}) \quad (3.10)$$

Handelt es sich bei dieser Kette um eine Markov-Kette, so vereinfacht sich das ganze mit Gleichung 3.9 zu (Marchuk et al [1980]):

$$P(x_0 \cap x_1 \cap \dots \cap x_n) = P(x_0)P(x_1|x_0)P(x_2|x_1)\dots P(x_n|x_{n-1}) \quad (3.11)$$

Sei $P_{0n} = P(\bigcap_{i=0}^n x_i) = P(x_0 \cap x_1 \cap \dots \cap x_n)$, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit nach n Schritten der Markov-Kette beginnend am Punkt 0 mit der Anfangswahrscheinlichkeit $P(x_0)$:

$$P_{0n} = P(x_0) \prod_{i=1}^n P(x_i|x_{i-1}) \quad (3.12)$$

Wird ein Streuprozess mittels der Monte-Carlo-Technik zufällig bestimmt, so sind die Koordinaten eines Streupunkts n nur abhängig von den Koordinaten des vorherigen Streupunkts $n-1$. Damit handelt es sich bei der Folge der zufällig ermittelten Streupunkte um eine Markov-Kette und ihre Gesamtwahrscheinlichkeit ist gegeben durch Gleichung 3.12.

3.1.3 Anwendung auf die integrale Strahlungstransfergleichung

Die Strahlungstransfergleichung nach Mishchenko (Gl. 2.92) kann durch eine Serie von Transformationen, die im Anhang dargestellt wird, ohne Veränderung ihrer Gültigkeit in

folgende Form überführt werden, welche auch in Marchuk et al [1980] und Marshak et al [2005] zu finden ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) &= \mathbf{I}_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) + \int_{\mathbf{X}} \int_{\boldsymbol{\omega}} k_s(\mathbf{x}') \exp[-\tau_e(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \boldsymbol{\omega})] \\ &\times \bar{Z}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}', \boldsymbol{\omega}') \frac{1}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2} \delta\left(\boldsymbol{\omega}' - \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}\right) \mathbf{I}(\mathbf{x}', \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (3.13)$$

Diese Formulierung ist in einem kartesischen Koordinatensystem \mathbf{X} definiert. Anstatt der Koordinate $\hat{\mathbf{q}}$ werden hier die kartesische Koordinate $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ und die Blickrichtungen $\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}$ verwendet, wobei $\boldsymbol{\Omega}$ die Menge aller Raumwinkel darstellt. Dies führt zunächst dazu, dass es sich hier um fünfdimensionale Koordinaten handelt, im Gegensatz zu den dreidimensionalen Koordinaten der Form nach Gl. 2.92.

Bei der fünffachen Integration würde unabhängig von der Richtung $\boldsymbol{\omega}'$ stets über alle drei Raumkoordinaten integriert werden. Die Integration soll aber nur entlang der Raumpunkte erfolgen, welche durch die Richtung $\boldsymbol{\omega}'$ spezifiziert werden (der eindimensionale Streuweg), dies wird mit Hilfe der Delta-Funktion im Integral bewerkstelligt, welche die Integration auf drei Dimensionen reduziert.

Desweiteren sind in der Gleichung der Streukoeffizient k_s , die Streumatrix $\bar{Z} = \mathbf{Z}/\sigma_s$ und die optische Dicke der Extinktion τ_e enthalten. Da die Schreibweise in kartesischen Koordinaten simpler ist, wird diese Form für die weiteren Betrachtungen verwendet. Zur weiteren Simplifizierung wird die Schreibweise $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \in \mathbf{Y} = (\mathbf{X}, \boldsymbol{\Omega})$ eingeführt.

Der Transport-Kernel von Gleichung 3.13 wird folgendermaßen definiert:

$$\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = k_s(\mathbf{x}') \bar{Z}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{y}') \exp[-\tau_e(\mathbf{y}, \mathbf{x}')] \frac{1}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2} \delta\left(\boldsymbol{\Omega}' - \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}\right) \quad (3.14)$$

Die Streuung findet, aus der Richtung $\boldsymbol{\Omega}'$ kommend, am Punkt \mathbf{x}' statt, die Streurichtung ist $\boldsymbol{\Omega}$ und führt zum Punkt \mathbf{x} . Die Funktion \mathbf{I} kann als Neumann-Reihe (Marchuk et al [1980]) dargestellt werden. Sei:

$$[\bar{\mathbf{K}}^n \mathbf{I}_0](\mathbf{y}) = \int_{\mathbf{Y}} \dots \int_{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{n-1}) \dots \bar{\mathbf{k}}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0) \mathbf{I}_0(\mathbf{y}_0) d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_n \quad (3.15)$$

das n -te Integral der ISTG über das gesamte Streuvolumen \mathbf{Y} , welches die einfallende Strahlung \mathbf{I}_0 und die Streuordnungen 1 bis n beschreibt.

Dann gilt für die Gesamtstrahlung aus allen Streuordnungen die Neumann-Reihe:

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} [\bar{\mathbf{K}}^n \mathbf{I}_0](\mathbf{y}) \quad (3.16)$$

Das 0-te Integral ist dabei gleich \mathbf{I}_0 und die Summe ergibt sich durch die rekursive Struktur der IRTE, wodurch alle Streuordnungen abgedeckt werden. Diese Integrale werden in der Monte-Carlo-Integration entsprechend Gleichung 3.6 durch zufällig gewählte Werte \mathbf{y}_i aus dem Integrationsbereich ersetzt.

Die zentrale Frage ist, wie die \mathbf{y}_i ermittelt werden. Zunächst muss entschieden werden, welche Verteilung am geeignetsten ist. Der Regel folgend, dass f und p möglichst ähnlich sein sollten, werden keine fundamental anderen Funktionen in Erwägung gezogen. Dem zufolge wird die Richtung $\boldsymbol{\omega}$ der nächsten Streuung mit Hilfe der Streufunktion, d.h.

dem (1, 1)-Element Z_{11} der Streumatrix \bar{Z} ermittelt. Diese gibt die physikalisch korrekte Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Teilchen in eine bestimmte Richtung streut.

Die Entfernung zum nächsten Streupunkt lässt sich über die optische Dicke des Mediums ermitteln. Eine Wahl der optischen Dicke der Extinktion würde hier aber dazu führen, dass die Absorption explizit behandelt werden müsste, indem man eine bestimmte Anzahl von Photonenpfaden terminiert (Marchuk et al [1980]). Da ein terminierter Photonenpfad nicht mehr zum Ergebnis beitragen kann, ist es von Vorteil, alle Photonenpfade zu behalten und die Absorption stattdessen über einen reduzierenden Gewichtungsfaktor implizit zu behandeln. Aus diesem Grund verwendet man zum Würfeln des nächsten Streupunkts die optische Dicke der Streuung τ_s .

Hier in der Anwendung wird das Integral als Dreifachintegral behandelt. Die Schreibweise bleibt aber in kartesischen Koordinaten, da sich die kartesischen Koordinaten jedes Streupunkts \mathbf{x}_N aus den gewürfelten Richtungen und Abständen direkt ableiten lassen, solange man den Startpunkt \mathbf{x}_0 kennt. Sei $\boldsymbol{\omega} = (\theta, \phi)$ und $s_i = \|x_i - x_{i-1}\|$ der i -te Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Streupunkten:

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^N s_i \begin{bmatrix} \sin \theta_i \cos \phi_i \\ \sin \theta_i \sin \phi_i \\ \cos \phi_i \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Ein Schritt $P(\mathbf{y}, \mathbf{y}')$ in der Markov-Kette muss analog zum Kernel k konstruiert sein, daher wird nach der optischen Dicke und der Streufunktion noch der Streukoeffizient eingefügt, welcher die Streuwahrscheinlichkeit selbst enthält:

$$P(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = k_s(\mathbf{y}') \exp[-\tau_s(\mathbf{y}, \mathbf{y}')] Z_{11}(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \quad (3.18)$$

Für P ergibt sich mit der Anfangsverteilung P_0 für eine Kette von n Schritten die Form:

$$P_n(\mathbf{y}_n) = \prod_{i=2}^n \left[P(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i-1}) \right] P_0(\mathbf{y}_0) \quad (3.19)$$

Die Funktion \mathbf{l} wird ebenfalls diskretisiert. \mathbf{l} weist eine rekursive Struktur auf, welche endet, wenn nur noch ungestreute Strahlung $\mathbf{l}_0(\mathbf{y})$ vorhanden ist. Hier ist wichtig, an welchem Punkt die ungestreute Strahlung betrachtet wird. Betrachtet man die Strahlung an einem Punkt \mathbf{y}_1 und befindet sich auf der Strecke $\mathbf{s}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1)$ zwischen diesem Punkt und der Strahlungsquelle \mathbf{y}_0 ein streuendes Medium, so hat die Strahldichte bereits Extinktion erfahren, d.h. es gilt:

$$\mathbf{l}_0(\mathbf{y}_1) = \mathbf{l}_{00} \exp[-\tau_e(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0)] \quad (3.20)$$

Der Punkt \mathbf{y}_1 ist in den folgenden Betrachtungen als der erste Streupunkt in der STG zu verstehen, während \mathbf{y}_0 die Strahlungsquelle selbst darstellt, alternativ einen Punkt abseits der Strahlungsquelle, an dem die Strahlung noch keine Extinktion erfahren hat, z.B. ToA. \mathbf{l}_{00} ist die Strahldichte der Quelle. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte P ergibt sich analog:

$$P_0(\mathbf{y}_1) = P_{00} \exp[-\tau_s(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0)] \quad (3.21)$$

Das Gesamtsignal für die n -te Streuordnung für einen Pfad über zufällig ausgewählte Streupunkte \mathbf{y}_i ist nach Ersetzen aller Integrale gegeben durch:

$$\mathbf{l}'_n(\mathbf{y}_n) = \prod_{i=2}^n \left[\bar{k}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i-1}) \right] \mathbf{l}_0(\mathbf{y}_1) \approx \mathbf{l}_n(\mathbf{y}_n) P(\mathbf{y}_n) \quad (3.22)$$

Anwendung von Gleichung 3.7 auf 3.19 und 3.22 ergibt den vollständigen Ausdruck für die Lösung der integralen Strahlungstransfergleichung über die Monte-Carlo-Methode:

$$\mathbf{I}_n(\mathbf{y}_n) = \frac{\mathbf{I}'_n(\mathbf{y}_n)}{P_n(\mathbf{y}_n)} = \prod_{i=2}^n \left[\frac{\bar{\mathbf{k}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i-1})}{P(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i-1})} \right] \frac{\mathbf{I}'_0(\mathbf{y}_1)}{P_0(\mathbf{y}_1)} = \frac{\bar{\mathbf{K}}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_1)}{\bar{P}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_1)} \frac{\mathbf{I}'_0(\mathbf{y}_1)}{P_0(\mathbf{y}_1)} \quad (3.23)$$

Diese Gleichung beschreibt das Signal \mathbf{I}'_n auf einem Photonenweg mit n Streuungen am Punkt \mathbf{x}_n in Richtung $\boldsymbol{\omega}_n$.

3.1.4 Allgemeine Funktionsweise von MYSTIC

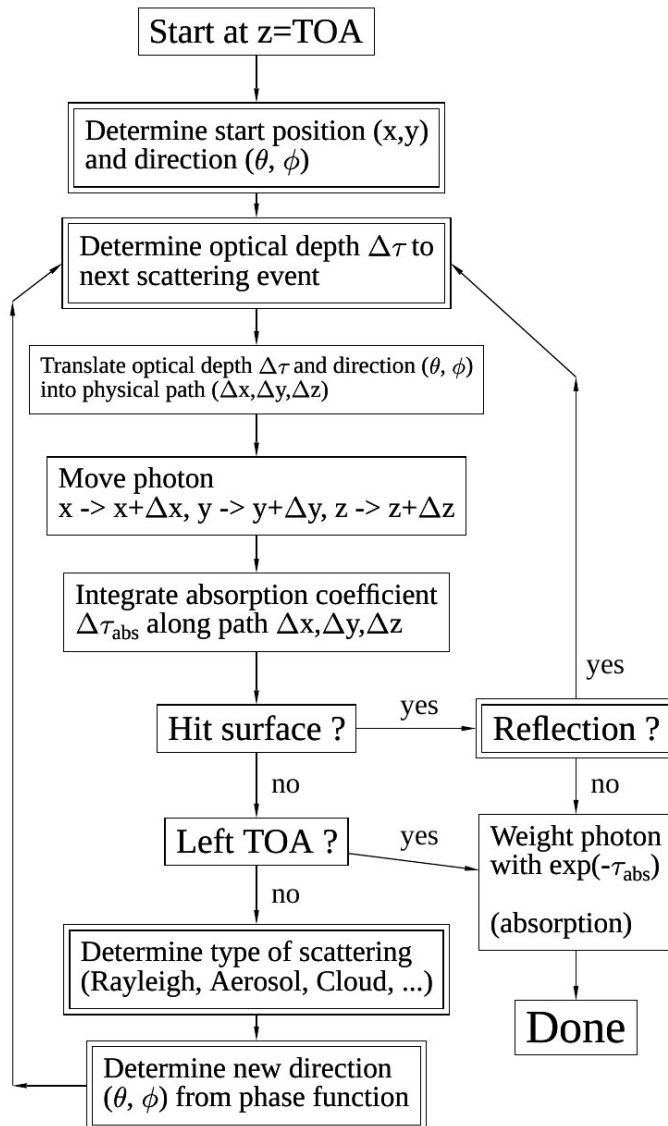


Abbildung 3.1: Ablaufdiagramm eines Photonen-Tracing-Prozesses in MYSTIC zur Berechnung der Strahlungsflussdichte an der Oberfläche ohne Local Estimate- oder Variance Reduction-Techniken. In doppelt umrandeten Schritten werden Zufallswerte gewürfelt (Aus Mayer [2009]).

Abbildung 3.1 zeigt die Funktionsweise von MYSTIC im Fall von Sonneneinstrahlung am oberen Rand der Atmosphäre.

Der Tracing-Prozess

Ein Tracing-Prozess besteht aus einem Startpunkt, einem Endpunkt, und dem Weg dazwischen, auf welchem das Photon Prozesse wie Absorption, Streuung und Reflexion erfahren kann. Reflexionen an Oberflächen werden in dieser Arbeit nicht betrachtet, daher spielen hier nur Absorption und Streuung eine Rolle. Diese beiden Prozesse werden durch den Transport-Kernel der STG beschrieben (siehe Gl. 3.14).

MYSTIC kann Strahlungstransport unpolarisiert oder polarisiert rechnen, der Unterschied liegt darin, ob bei Streuungen die volle Streumatrix oder nur die Streufunktion berechnet wird. In dieser Arbeit wird immer mit Polarisation gerechnet, und alle Formeln beschreiben den polarisierten Fall mit voller Streumatrix.

Startort und -richtung eines Photons werden in Abhängigkeit von der Modellkonfiguration ermittelt: Startpunkt könn z.B. die Sonne, bzw. der Oberrand der Atmosphäre (Top of Atmosphere - TOA) sein oder, wenn man aktive Messgeräte simuliert, eine begrenzte Senderfläche innerhalb der Atmosphäre.

Die Weglänge zwischen zwei Streuungen und die Richtung der Streuungen werden mit einem Pseudo-Zufallszahlengenerator ermittelt. Die optische Dicke der Streuung wird mit Hilfe einer Zufallszahl ρ und einer Formel ermittelt, welche physikalisch korrekt verteilte Werte für die optische Dicke der Streuung liefert (Mayer [2009]):

$$\tau_s = P_s^{-1}(\rho) = -\ln(1 - \rho) \quad (3.24)$$

Wie beschrieben, ermöglicht die Verwendung der optischen Dicke der Streuung für die Ermittlung der Zufallszahl eine implizite Behandlung der Absorption, wie in Mayer [2009] beschrieben. Dabei wird entsprechend der optischen Dicke der Absorption der zurückgelegten Strecke das statistische Gewicht des Photons um $e^{-\tau_a}$ verringert. Da die Absorption im Fall zufällig orientierter Teilchen nicht vom Polarisationszustand des Photons abhängt, ist diese Vorgehensweise auch für polarisierten Strahlungstransfer anwendbar (Emde et al [2010]).

Am Streupunkt wird zunächst gewürfelt, welche Art von Streuung passiert. Für die ausgewählten Streuart wird dann die Streufunktion bzw. Streumatrix ermittelt, welche die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Streuwinkel Θ (siehe Abb. 2.3) festlegt. Die Streufunktion bzw. Streumatrix kann entweder analytisch berechnet werden, wie bei Rayleigh-Streuung, oder über die Interpolation vorberechneter tabellierter Werte, wie bei einer Streufunktion im Mie-Bereich (siehe Kap. 2.1.1).

Bei Rechnung ohne Polarisation entspricht der Wert der Streufunktion für den Streuwinkel $\mu = \cos \Theta$ der Wahrscheinlichkeit, dass die Streuung in die Richtung zwischen μ und $\mu + \delta\mu$ gerichtet ist. Da es sich bei den hier betrachteten Streupartikeln um kugelförmige Teilchen handelt, kann der zweite Streuwinkel ϕ aus einer simplen Gleichverteilung gewürfelt werden, d.h. die Streufunktion ist nur abhängig von μ .

Bei Rechnung mit Polarisation stellt sich die Sache komplexer dar. Der Polarisationszustand des Photons wird in einem lokalen Koordinatensystem dargestellt, welches durch die Bewegungsrichtung des Photons (θ und ϕ in Abb. 2.3) und die z -Achse des allgemeinen Koordinatensystems definiert wird. Bei jeder Streuung kommt es zu einer Drehung des lokalen Koordinatensystems und damit zu einer Koordinatentransformation, die Streuung hängt demnach von den Winkeln θ und ϕ der Einfall- und der Streurichtung ab. In der Streumatrix \mathbf{Z} in den Formeln in diesem Kapitel sind diese Drehungen implizit bereits enthalten, eine nähere Beschreibung ist in Emde et al [2010] zu finden.

Die Streurichtung lässt sich dennoch genauso ermitteln, wie für Rechnungen ohne Polarisation, so dass in der Markov-Kette des Streuprozesses die Streufunktion, d.h. das 11-Element der Streumatrix steht (Gl. 3.18). Dabei handelt es sich um eine Methode des Importance Samplings, welches im folgenden Unterkapitel näher beschrieben wird.

Endpunkt eines Photons kann die vollständige Absorption in der Atmosphäre, das Verlassen der Atmosphäre in den Weltraum, oder das Auftreffen auf einer Detektorfläche sein. Die am häufigsten simulierten Größen sind die Strahlungsstromdichte und die Strahldichte (siehe Kap. 2.1.2), letztere wird entweder auf der waagrecht Fläche eines Höhenlevels, oder bei der Simulation von Messgeräten auf einer begrenzten Detektorfläche gemessen. Eine Messung der Strahlungsstromdichte auf einem Höhenniveau ist eine der simpelsten Anwendungen. Jedes Photon, dass die Niveaufläche kreuzt, geht in das Ergebnis ein. Eine Strahldichtemessung betrachtet nur Photonen, welche die Niveaufläche entlang einer bestimmten Richtung kreuzen, was den Rechenzeit enorm erhöht, wenn man sich ausschließlich auf den Zufall verlässt. Abhilfe für diesen Fall schafft der Einsatz von Local Estimates, welche die Manipulation von Photonenwegen ermöglichen, um das Ergebnis zu verbessern.

Techniken um ein besseres Ergebnis zu erzielen

Simple Monte Carlo ohne weitere Tricks oder varianzreduzierende Methoden gerät sehr schnell an seine Grenzen (Abb. 3.2 l.o.), wie in den letzten Absätzen bereits angedeutet. MYSTIC enthält daher eine Reihe von Methoden, die dieses Problem lösen:

- **Importance Sampling:** Importance Sampling bedeutet einfach gesagt, dass man beim Ziehen der Zufallswerte eine Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung verwendet, welche von der physikalisch korrekten Verteilung abweicht, z.B. um ein eigentlich unwahrscheinliches Ereignis wahrscheinlicher zu machen und damit die Rechenzeit zu reduzieren (Gentle [2003]). Konkret heißt das, dass in den Markov-Termen P in Gl. 3.23 andere Verteilungsfunktionen verwendet werden, als im Kernel der STG. Beispielweise lässt sich damit eine andere Streufunktion, als die physikalisch korrekte, anwenden, um Photonen bevorzugt in bestimmte Richtungen zu schicken, ebenso lässt sich die optische Dicke eines Mediums künstlich erhöhen. Letztere Technik wird bei Radar eingesetzt und weiter unten genauer beschrieben (Kap. 3.1.6).
- **Local Estimates:** Bei dieser Technik wird an jedem Streupunkt die Wahrscheinlichkeit einer Streuung zum Empfänger berechnet, sofern dieser den Streupunkt sehen kann, und zum Ergebnis hinzu addiert (Mayer [2009], Marchuk et al [1980], Marshak et al [2005], siehe auch Abb. 3.2 untere Reihe und oben rechts). Diese Technik wird im folgenden Unterkapitel ausführlich beschrieben.
- **Backward-Monte Carlo:** Das Reziprozitätsprinzip besagt, dass ein Photon, das einen Mehrfachstreupfad von A nach B nimmt, dasselbe Ergebnis liefert, wie eines, das den Pfad von B nach A läuft (Mishchenko et al [2006] Kap.3.4). Im Modell ist daher das Photonen-Tracing vom Empfänger aus zum Sender äquivalent zum normalen Tracing vom Sender zum Empfänger. Diese Technik eignet sich sehr gut, wenn der Sichtbereich des Empfängers sehr klein ist im Vergleich zu Domain und Sender und somit selbst mit Local Estimates keine guten Statistiken erreichbar sind. Dies ist z.B. der Fall, wenn passive Messgeräte simuliert werden, wo die Quelle der gesamte

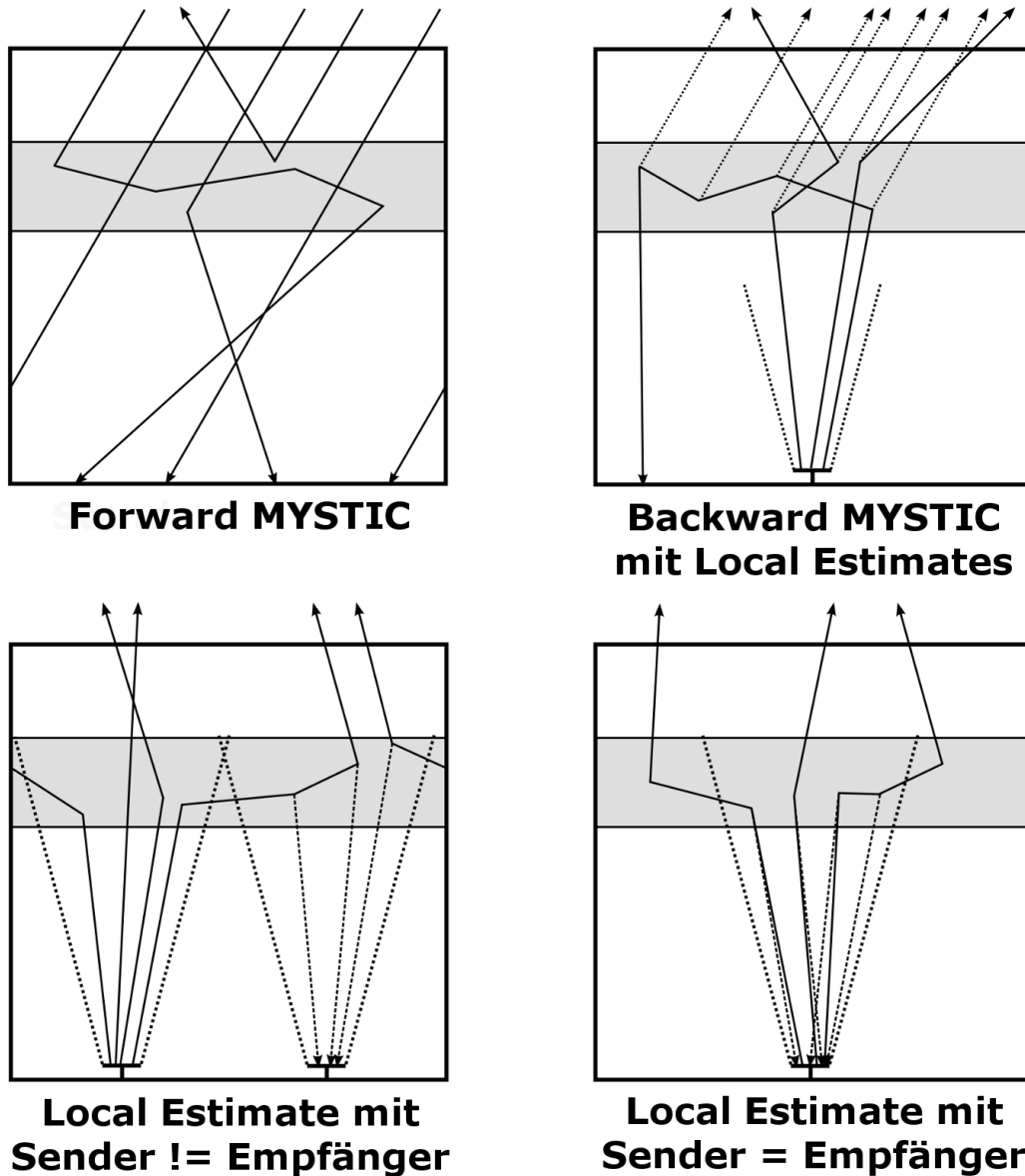


Abbildung 3.2: Funktionsweise von Forward-MYSTIC (l.o.); Backward-MYSTIC mit Local Estimates (r.o.); Local Estimate mit unterschiedlich positioniertem Sender und Empfänger (l.u.); Local Estimate mit identischem Sender und Empfänger (r.u.)

Oberrand der Atmosphäre ist, der Empfänger dagegen eine kleine Fläche am Boden der Domain (Abb. 3.2 r.o.).

- Fortgeschrittene "Variance Reduction"-Techniken: In MYSTIC stehen weitere Techniken zu Verfügung, wie z.B. das Photonen-Splitting, wo ein Photon mit großem Gewicht in viele Photonen mit kleinem Gewicht aufgeteilt wird, welche dann individuell weiter getracet werden (Buras et al [2011]). Aufgrund der Komplexität dieser Methoden wurden sie jedoch nicht mit der kohärenten Rückstreuung kompatibel gemacht und sind daher im weiteren nicht von Belang.

Die Simulation von passiven Messgeräten

Die Simulation von passiven Messgeräten macht es notwendig, statt eines ganzen Höhen-niveaus, eine kleine begrenzte Fläche als Detektor zu betrachten, welche deutlich seltener zufällig von Photonen getroffen wird. Muss diese Fläche bei einer Strahldichtemessung auch noch aus einer bestimmten Richtung heraus getroffen werden, wächst die Rechenzeit nochmal deutlich an, da es sehr lange dauert, bis genug Photonen zufällig diese kleine Fläche aus dem richtigen Winkelbereich treffen, und zum Ergebnis beitragen. Die meisten Photonen sind in diesem Fall purer Ausschuss.

In diesem Fall kann neben Local Estimates zusätzlich Backward-Monte-Carlo eingesetzt werden, dadurch kann der begrenzte Empfänger als Sender fungieren und der Oberrand der Atmosphäre als Empfänger (Abb. 3.2 r.o.). Da letzterer unendlich ausgedehnt ist, ist es sehr viel wahrscheinlicher, dass er von Photonen getroffen wird, wodurch wesentlich schneller ein Ergebnis erreicht werden kann.

Die Simulation von aktiven Messgeräten

Die Simulation von aktiven Fernerkundungstechniken, wie Lidar und Radar, erfordert neben einer begrenzten Empfängerfläche ebenfalls eine begrenzte und innerhalb der Domain variabel positionierbare Senderfläche. Aufgrund des Reziprozitätsprinzips unterscheidet sich diese Senderfläche im Prinzip nicht von einer Empfängerfläche, der Einsatz von Backward-Monte Carlo bringt in der Regel keinen Vorteil, stattdessen verlässt man sich hier vor allem auf Local Estimates, Importance Sampling- und Variance Reduction-Techniken.

Im simpelsten Fall, in dem Sender und Empfänger identisch sind (Abb. 3.2 r.u.) erreicht man bereits nur mit Local Estimates gute Ergebnisse. Bei der Simulation von meteorologischem Radar wird aufgrund der geringen optischen Dicke zusätzlich Importance Sampling benötigt. Im Allgemeinen können die Sender- und die Empfängerfläche jedoch auch ohne Überschneidung der Sichtbereiche in völlig unterschiedliche Richtungen weisen, so dass nur diffuse Mehrfachstreuungen gemessen werden (Abb. 3.2 l.u.).

3.1.5 Local Estimates in MYSTIC

Wie bereits beschrieben, werden Local Estimates angewendet, um ein gewünschtes Ergebnis zu erzwingen, der Photonenweg wird künstlich in die gewünschte Richtung gelenkt, so dass möglichst viele Streuungen zum Ergebnis beitragen können. Ein Local Estimate \mathbf{J}' ist dabei erstmal ein normaler Streuprozess:

$$\mathbf{J}'(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end}) = \sigma_s(\mathbf{y}_n) \bar{\mathbf{Z}}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end}) \exp[-\tau_e(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end})] \quad (3.25)$$

Da in diesem Fall keine Zufallszahlen gezogen werden, um Streurichtung und Weglänge vom Streupunkt \mathbf{y}_n zum Endpunkt \mathbf{y}_{end} auf dem Empfänger zu ermitteln, fallen auch die entsprechenden Terme in p weg (Marchuk et al [1980]). Die Matrix $\bar{\mathbf{Z}}$ muss, wie bei Streuungen, auch im Zuge eines Local Estimates gedreht werden, diesmal in das lokale Koordinatensystem des Empfängers.

Abb. 3.3 zeigt die Geometrie bei einem Local Estimate mit deckungsgleichem Sender und Empfänger. Aufgrund des Öffnungswinkels α ist der Raumbereich, den ein bestimmter Punkt \mathbf{y}_{end} des Empfängers "sehen" kann, auf einen Kegel C mit diesem Öffnungswinkel beschränkt. Das heißt, dass es vorkommt, dass ein bestimmter Streupunkt \mathbf{y}_n nicht von

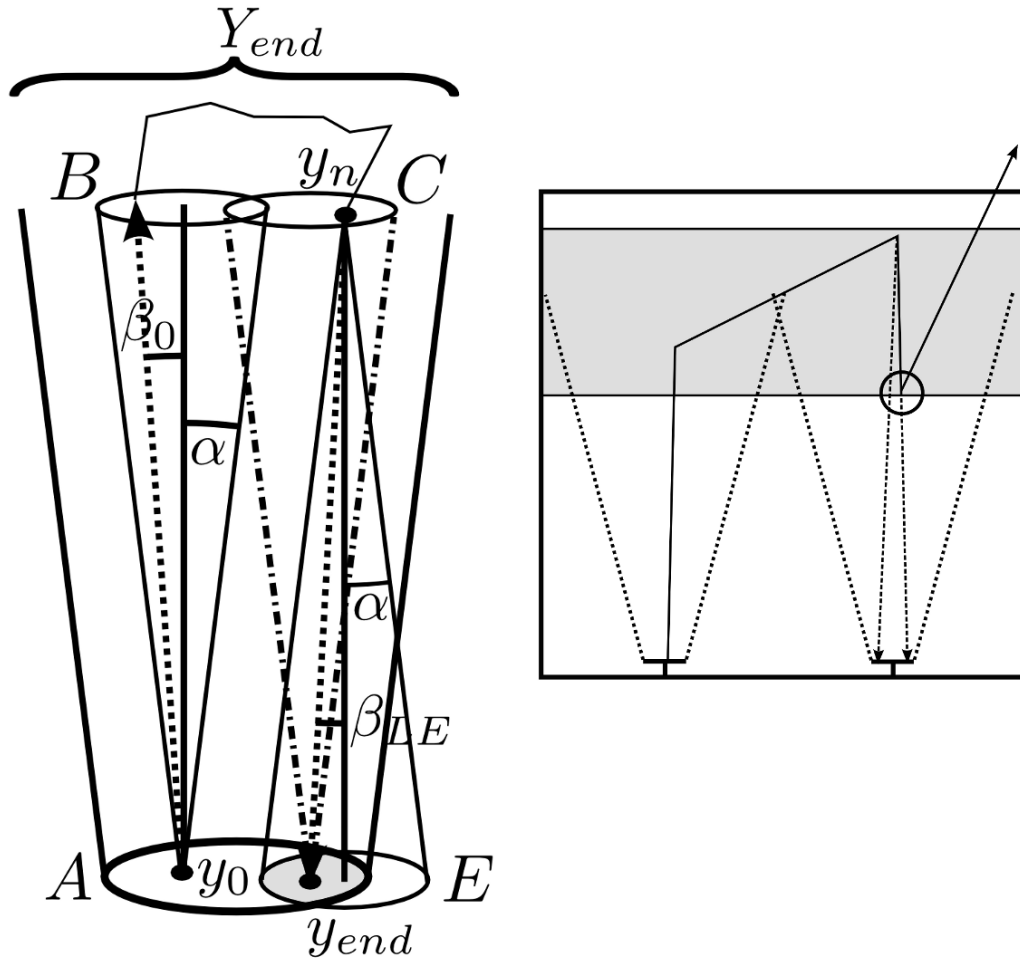


Abbildung 3.3: Links: A ist eine Sender- und Empfängerfläche mit Öffnungswinkel α . Vom Punkt y_0 wird ein Photon innerhalb eines Kegels B mit Öffnungswinkel α mit dem Abstrahlwinkel $\beta_0 \leq \alpha$ ausgesendet (gepunktete Linie) und führt einen beliebigen Streuweg aus. Am Punkt y_n kommt es zu einem Local Estimate. Das Photon kann nur Punkte innerhalb des Kegels E erreichen. Umgekehrt enthält der Kegel C (gestrichpunktet) alle Streupunkte, welche zum Endpunkt y_{end} hin streuen können. Die grau gekennzeichnete Schnittfläche A_s von E und der Empfängerfläche A ist dann der Bereich des Empfängers, welche das von y_{end} kommende Signal messen kann. Y_{end} ist die Menge aller Punkte, welche innerhalb des Öffnungswinkels des gesamten Empfängers liegen. Rechts: Ein Beispiel für einen vorwärts streuenden Local Estimate, der einen Spike auslösen kann (Kreis).

allen Punkten auf dem Empfänger gesehen werden kann. Umgekehrt heißt das, dass ein Photon von seinem Streupunkt y_n innerhalb des Kegels nur zu einem Teil der Punkte auf dem Empfänger einen Local Estimate ausführen kann. Dieser Teilbereich des Empfängers ist begrenzt durch einen umgekehrten Kegel E mit demselben Öffnungswinkel α . Dieser Kegel schneidet die Empfängerfläche A und die Schnittfläche beider Kegel A_s ist der Bereich des Empfängers, welcher den Local Estimate am Punkt y_n sehen kann. Diese Fläche ist in Abb. 3.3 grau gekennzeichnet. Da der Local Estimate mit einem Winkel β_{LE} auf dem Empfänger auftritt, der mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht exakt 90° entspricht, erscheint die Fläche A_s dem ankommenden Photon in den meisten Fällen geneigt. Der

zufällige Endpunkt auf dem Empfänger wird mit einer Gleichverteilung über die Fläche A_s ermittelt.

Der Local-Estimate-Term \mathbf{J} lautet dann:

$$\mathbf{J}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end}) = \frac{\mathbf{J}'(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end})}{P_J(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end})} \eta(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end}) \quad (3.26)$$

$$\eta(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end}) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \mathbf{y}_n \in \mathbf{Y}_{end} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.27)$$

$$P_J(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end}) = \frac{\sigma_s(\mathbf{y}_n)}{A_s(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end}) \cos(\beta_{LE}(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}_{end}))} \quad (3.28)$$

Die Indikatorfunktion η stellt sicher, dass ein Local Estimate nur dann zum Ergebnis beiträgt, wenn der Empfänger den Streupunkt auch sehen kann, d.h. dass der Streupunkt innerhalb der Punktmenge \mathbf{Y}_{end} liegt. Dies ist notwendig, da die Fläche A_s in Gl. 3.28 im Nenner steht, was zu einer Division durch Null führen würde, wenn der Streupunkt vom Empfänger aus nicht sichtbar ist.

Gl. 3.28 ist der Markov-Term des Local Estimates, er enthält neben dem Streuquerschnitt nur die Gleichverteilung über die potentiell um den Winkel β_{LE} geneigte Fläche A_s . Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung einer Gleichverteilung über eine Fläche ist gegeben durch die Inverse der Fläche (Bronstein et al [2000]).

Bei stark vorwärts streuenden Phasenfunktionen bei Größenparametern $a \gg 1$ kann es in \mathbf{J} zum Auftreten sog. Spikes kommen: Wenn das Photon einen Local Estimate in oder nahe der Vorwärtsstreurichtung ausführt, kann der Wert des 11-Elements der Streumatrix \bar{Z} in Gleichung 3.25 sehr groß werden (Abb. 3.3 rechts).

Bei zufällig gewürfelten Streuungen kommt dieser Wert im Zähler von Gl. 3.23 in der Streumatrix und im Nenner in der Streufunktion im Markov-Term vor, er kürzt sich also heraus. Da im Local Estimate die Streurichtung nicht gewürfelt wird, fehlt die Streufunktion im Markov-Term des Local Estimates (Gl. 3.28) und der Wert von Z_{11} im Zähler (Gl. 3.25) geht in das Ergebnis ein. Wenn dieser sehr groß ist, stört er die Konvergenz des Ergebnisses zu einem Mittelwert mit akzeptabler Varianz empfindlich (Mayer [2009]). Zur Lösung dieses Problems gibt es verschiedene Ansätze, welche in Mayer [2009] und Buras et al [2011] beschrieben werden.

Angewendet auf die IRTE wird der Local Estimate wie folgt:

- Eine Streuung der Streuordnung i eines Photons am Punkt \mathbf{y}_{end} :

$$\mathbf{l}_i(\mathbf{y}_{end}) = \left(\frac{\mathbf{J}'(\mathbf{y}_{end}, \mathbf{y}_i) \bar{K}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_1)}{P_J(\mathbf{y}_{end}, \mathbf{y}_i) \bar{P}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_1)} \right) \frac{\mathbf{l}'_0(\mathbf{y}_1)}{P_0(\mathbf{y}_1)} \quad (3.29)$$

Für skalaren Strahlungstransfer ohne Importance Sampling-Methoden reduziert sich der Ausdruck für einen Photonenpfad mit Local Estimate wesentlich:

$$\mathbf{l}_i(\mathbf{y}_{end}) = \prod_{k=2}^i [e^{-\tau_a(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_{k-1})}] \frac{\mathbf{J}'(\mathbf{y}_{end}, \mathbf{y}_i) \mathbf{l}'_0(\mathbf{y}_1)}{P_J(\mathbf{y}_{end}, \mathbf{y}_i) P_0(\mathbf{y}_1)} \quad (3.30)$$

Hier wird die bereits erwähnte implizite Behandlung der Absorption klar. Das einzige, was vom kompletten Photonenweg vor dem Local Estimate in das Ergebnis eingeht ist die Absorption, die das Photon auf seinem Weg bereits erfahren hat.

- Alle N Streuordnungen eines Photons am Punkt \mathbf{y}_{end} :

$$\mathbf{l}(\mathbf{y}_{end}) = \sum_{i=1}^N \left(\left(\frac{\mathbf{J}'(\mathbf{y}_{end}, \mathbf{y}_i) \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_1)}{P_J(\mathbf{y}_{end}, \mathbf{y}_i) \bar{P}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_1)} \right) \frac{\mathbf{l}'_0(\mathbf{y}_1)}{P_0(\mathbf{y}_1)} \right) + \frac{\mathbf{l}'_0(\mathbf{y}_{end})}{P_0(\mathbf{y}_{end})} \quad (3.31)$$

- Das Ergebnis von M Photonen über jeweils N_j Streuordnungen am Punkt \mathbf{y}_{end} :

$$\bar{\mathbf{l}}(\mathbf{y}_{end}) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left(\sum_{i=1}^{N_j} \left(\left(\frac{\mathbf{J}'(\mathbf{y}_{end}, \mathbf{y}_i) \bar{\mathbf{K}}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_1)}{P_J(\mathbf{y}_{end}, \mathbf{y}_i) \bar{P}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_1)} \right) \frac{\mathbf{l}'_0(\mathbf{y}_1)}{P_0(\mathbf{y}_1)} \right) + \frac{\mathbf{l}'_0(\mathbf{y}_{end})}{P_0(\mathbf{y}_{end})} \right) \quad (3.32)$$

3.1.6 Importance Sampling

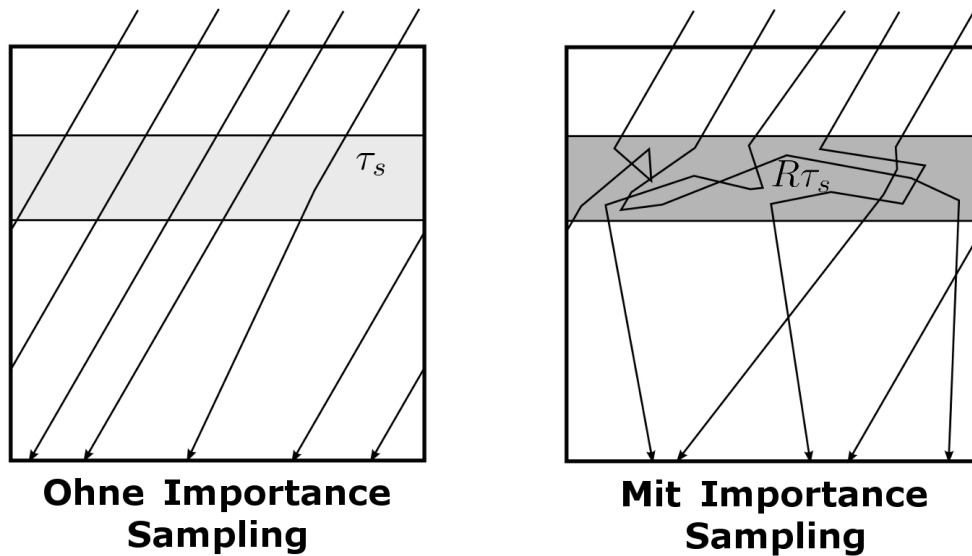


Abbildung 3.4: Importance Sampling mit konstantem Faktor R (siehe Text).

Es kommt vor, dass die zum Würfeln der Zufallsvariablen standardgemäß benutzten Funktionen und damit die in der Markov-Kette P benutzten Verteilungen der Lösung bestimmter Probleme nicht dienlich sind. Wie bereits beschrieben, können problemlos andere Verteilungsfunktionen verwendet werden, welche die Lösung eines Problems wesentlich vereinfachen. P ist über Gl. 3.18 gegeben durch $P = k_s \exp(-\tau_s) Z_{11}$. Jeder dieser Terme kann modifiziert oder durch eine andere passende Funktion ausgetauscht werden.

In Gleichung 3.23 bedeutet das folgendes: Im Zähler werden durch die veränderten Verteilungsfunktionen andere Werte ermittelt, wodurch sich das Ergebnis ändert, i.d.R. ist es dann nicht mehr physikalisch korrekt. Das Vorhandensein der veränderten Verteilungsfunktion im Nenner korrigiert jedoch das Ergebnis automatisch, so dass es wieder physikalisch korrekt ist.

Das Importance Sampling in MYSTIC wird z.B. angewendet, wenn ein optisch sehr dünnes Streumedium betrachtet wird, in dem die Streuwahrscheinlichkeit sehr gering ist. In diesem Fall kann der Streukoeffizient k_s künstlich erhöht werden, was dazu führt, dass Streuungen in sehr viel kürzeren Abständen vorkommen, als physikalisch realistisch wäre.

Das wird mit einem konstanten Faktor $R > 1$ realisiert:

$$k_{s^*} = Rk_s \quad (3.33)$$

$$\tau_{s^*} = R \int_0^L k_s dl = R\tau_s \quad (3.34)$$

Damit lautet $P = k_{s^*} \exp(-\tau_{s^*}) Z_{11}$, die Veränderungen finden Eingang in P , aber nicht in \mathbf{I} . Durch $R > 1$ werden die Werte im Nenner von Gl. 3.23 größer und verringern damit automatisch das statistische Gewicht der nun unphysikalisch häufig vorkommenden Streuungen soweit, dass das Ergebnis wieder physikalisch korrekt ist.

In MYSTIC kann R automatisch so bestimmt werden, dass entlang der Länge einer Box eine gewünschte optische Dicke erreicht wird. Dieses IS ist in der Radarsimulation notwendig, da die Streuwahrscheinlichkeit von Mikrowellen an Wolken- und Regentropfen sehr gering ist. Beispielsweise liefert eine Rechnung ohne IS, welche mit 100 Milliarden Photonen ein Wolkenradar simuliert, bei einer Laufzeit von 33 Stunden nur ca. 20 Local Estimates. Allgemein kommen in MYSTIC noch andere und komplexere IS-Methoden zum Einsatz (Buras et al [2011]).

3.2 Kohärente Rückstreuung in MYSTIC

Bisher wurde in diesem Kapitel dargelegt, auf welche Art und Weise MYSTIC die in Kapitel 2.2 hergeleitete Strahlungstransfergleichung löst. In Kap. 2.2 wurde gezeigt, dass die STG Interferenzeffekte, wie die kohärente Rückstreuung nicht berücksichtigt, so dass auch MYSTIC diesen Effekt standardgemäß nicht simuliert. Da sich die Annahmen, welche die STG ermöglichen, nicht zurücknehmen lassen, muss die kohärente Rückstreuung explizit separat berechnet werden und zum Ergebnis der STG addiert werden.

Die Implementierung wird so erfolgen, dass optional zuschaltbare Algorithmen die Berechnungen der normalen STG-Berechnungen verwenden, um den Anteil der kohärenten Rückstreuung aus diesen abzuleiten. Dafür werden die in Kap. 2.3 vorgestellten Methoden zum Einsatz kommen: Die Matrix-Methode wird mit Standard-MYSTIC laufen und die Streumatrizen in exakter Rückstreurichtung verwenden (siehe Kap. 2.3.2), die Lidar-Methode wird im Lidar-Modus die KRSV aus dem diffusen Stokes-Vektor ableiten (siehe Kap. 2.3.3).

3.2.1 Überblick über die Implementierung

Dieses Kapitel beschreibt, wie die bisher dargelegten Formeln zur Berechnung der KRSV konkret in MYSTIC eingebaut wurden. Abb. 3.5 gibt einen Überblick über die Programmblöcke.

MYSTIC besitzt als Monte Carlo-Modell nicht die Fähigkeit, Interferenzen direkt zu berechnen, da die simulierten Photonenpfade statistisch voneinander unabhängig sind. Stattdessen wird der gewünschte Photonenpfad für die Interferenz künstlich erzeugt und das Ergebnis wird entsprechend modifiziert.

Die KRS-Algorithmen sind Erweiterungen des MYSTIC-Modells, entsprechend wurde der neue Programmcode so gut wie möglich vom bestehenden Code getrennt gehalten. Abb. 3.6 zeigt die detaillierte Struktur von MYSTIC mit dem zusätzlichen Code für Lidar-KRS

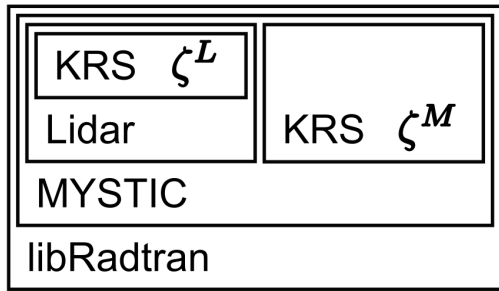


Abbildung 3.5: Schachtelung der Programmblöcke. MYSTIC ist Teil von libRadtran, der Lidar-Algorithmus ist wiederum Teil von MYSTIC und der Lidar-KRS-Algorithmus ist schließlich Teil des Lidar-Algorithmus, während der Mishchenko-KRS-Algorithmus selbst Teil von MYSTIC ist. ζ^L ist der KRSV-Faktor für den Lidar-KRS Algorithmus, ζ^M für die Matrizen-Methode (siehe Gl. 2.3.2

(Gleichung 3.43) und Mishchenko-KRS (Gleichungen 2.133 - 2.139). Durchgezogene Umrisse und Pfeile stehen für normale MYSTIC-Funktionalitäten, gestrichelte Umrisse und Pfeile für KRS mit Lidar und gestrichelpunktete für Matrix-KRS. Graue Kästchen stellen Bedingungen da, Kreise stellen die Weichen dar, an denen der Lidar-KRSV-Algorithmus ansetzt und das Ergebnis modifiziert (KRS), NO steht für das normale MYSTIC-Ergebnis ohne KRSV.

Die Routinen, welche die Daten für die Berechnung der Matrix-KRS abspeichern, sind unabhängig von den Lidar-KRS-Routinen, da Matrix-KRS auch ohne Lidar funktionieren muss. Das ist gekennzeichnet durch den Doppelkasten im Diagramm. Die KRS-Routinen sammeln alle für sie notwendigen Daten aus dem normalen MYSTIC-Programmablauf, diese werden verarbeitet sobald die Matrix-KRSV konkret berechnet wird.

Im Fall von Lidar-KRS passiert dies bei jedem Local Estimate, welcher KRS-Interferenz zulässt, dabei wird jeweils das individuelle Ergebnis dieses Local Estimates verändert. Matrix-KRS sammelt während der Simulation ausschließlich Daten und verarbeitet diese erst am Schluss zu einem Ergebnis. Der Rechenaufwand für Matrix-KRS ist weitaus geringer als für Lidar-KRS.

Der übrige Teil des Diagramms entspricht in etwa dem aus Abb. 3.1. Von der Initialisierung oben links startet das Programm einen Loop, in dem die Photonen simuliert werden. Ein Tracing-Prozess verfolgt ein Photon solange, bis es entweder den Empfänger trifft, die Domain über eine offene Grenze verlässt oder an einer Grenzfläche absorbiert wird. Zusätzlich wird von dort der Local Estimate angesteuert, welcher das Photon künstlich zum Empfänger schickt und ein Ergebnis produziert, ohne den eigentlichen Photonenweg zu unterbrechen.

| | LIDAR-KRSV | Mishchenko-KRSV |
|------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| Modus | LIDAR-MYSTIC | Standard-MYSTIC |
| Aufwand | Zwei Rechnungen Hohe Photonenzahl | Eine Rechnung Geringe Photonenzahl |
| Methode | Explizite Simulation | Implizite Ableitung |
| Winkel | Beliebige Winkel | Nur exakte Rückstreurichtung |
| Sender/Empfänger | Begrenzte Kreisfläche | Kompletter Höhenlevel |
| Zuverlässigkeit | Numerisch fehleranfällig | Robust |

Tabelle 3.1: Übersicht über beide Methoden, ihre Eigenschaften, Vor- und Nachteile.

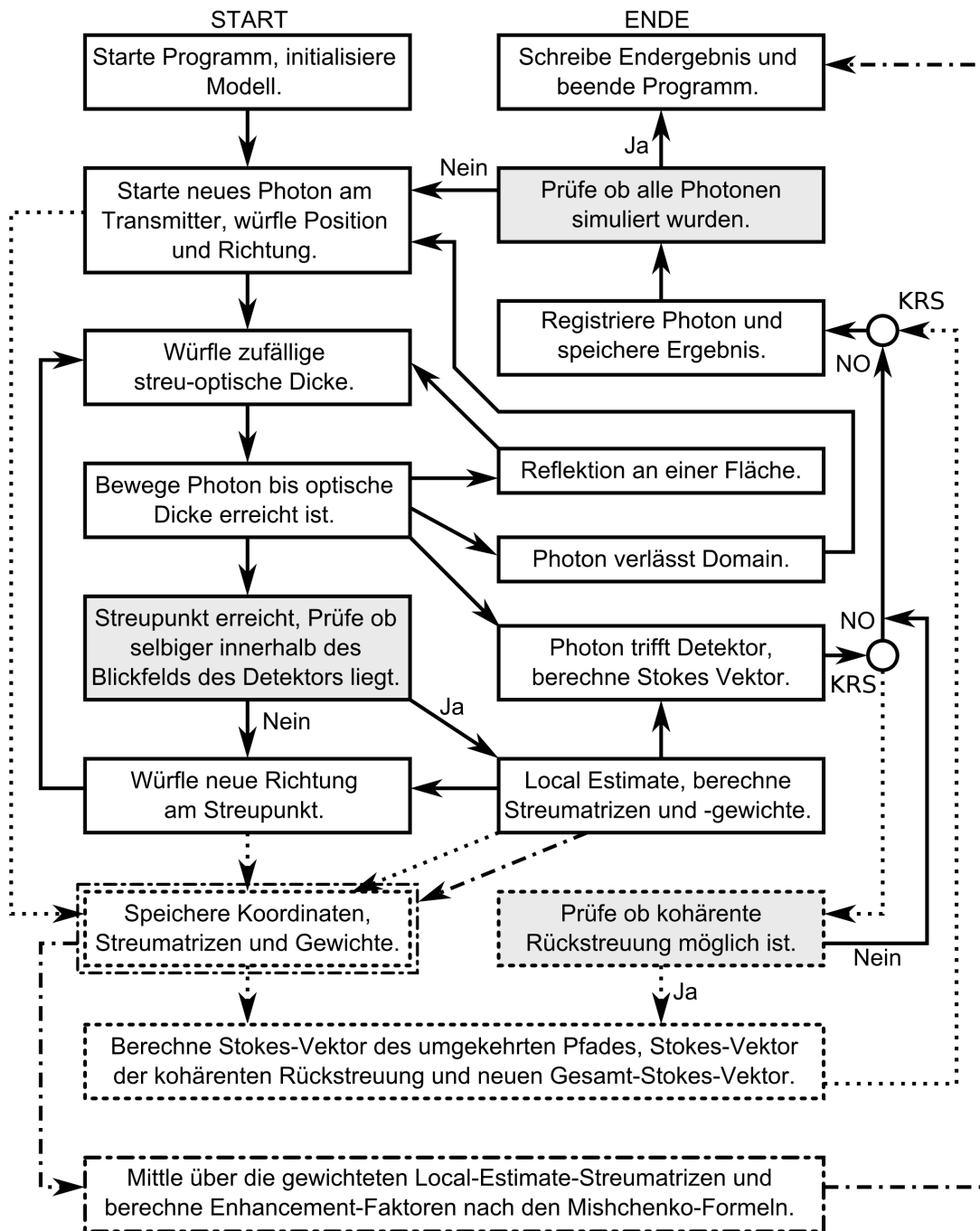


Abbildung 3.6: Überblick über MYSTIC mit KRS-Implementierung. Erläuterungen im Text (vgl. Abb. 3.1).

In Lidar-MYSTIC wird der größte Teil eines Ergebnisses durch Local Estimates erzeugt, Beiträge durch Photonen, die den Empfänger zufällig treffen sind sehr rar. Erst hier am Local Estimate setzen beide KRS-Routinen an.

Tabelle 3.1 gibt einen kurzen Überblick über beide Methoden, ihre Eigenschaften, Vor- und Nachteile.

3.2.2 Implementierung der Matrix-Methode

Im Zuge einer normalen Strahldichtesimulation in direkter Rückstreurichtung wird die ins Koordinatensystem des Empfängers gedrehte Streumatrix jedes Local Estimates in Einzel- und Mehrfachstreumatrizen getrennt und mit dem initialen Stokes-Vektor multipliziert. Dessen Komponenten werden aufaddiert und am Schluss gemittelt, um die finalen Stokes-Vektor-Komponenten \mathbf{X}_d und \mathbf{X}_K zu erhalten.

Die Multiplikation vor der Mittelung ist notwendig, da im Fall zufälliger Polarisierung jeder initiale Stokes-Vektor anders ist. Da diese Stokes-Vektoren und die Streumatrizen der Local Estimates stochastisch voneinander unabhängig sind, ist das Produkt der Mittelwerte gleich dem Mittelwert der Produkte und diese Vorgehensweise ist erlaubt.

Aufgrund der beschriebenen Vorgehensweise, und da sie lediglich Spezialfälle darstellen, können die Formeln 2.133 - 2.139 nicht so, wie sie formuliert sind, verwendet werden. Anstatt dessen wurden sie von Grund auf allgemein formuliert, und zwar mit Hilfe der Gleichungen 2.104 und 2.105.

Daraus erhält man je vier Gleichungen für die diffusen (Subskript d) und die KRSV-Komponenten (Subskript K) für beliebige initiale Stokes-Vektoren, welche wie folgt lauten:

$$\mathbf{l}_K = \frac{\mu_0}{\pi}(R_{11}^1 + R_{11}^M + R_{11}^K)\mathbf{l}_0 + (R_{12}^1 + 2R_{12}^M)\mathbf{Q}_0 \quad (3.35)$$

$$\mathbf{l}_d = \frac{\mu_0}{\pi}(R_{11}^1 + R_{11}^M)\mathbf{l}_0 + (R_{12}^1 + R_{12}^M)\mathbf{Q}_0 \quad (3.36)$$

$$\mathbf{Q}_K = \frac{\mu_0}{\pi}(R_{22}^1 + R_{22}^M + R_{22}^K)\mathbf{Q}_0 + (R_{12}^1 + 2R_{12}^M)\mathbf{l}_0 \quad (3.37)$$

$$\mathbf{Q}_d = \frac{\mu_0}{\pi}(R_{22}^1 + R_{22}^M)\mathbf{Q}_0 + (R_{12}^1 + R_{12}^M)\mathbf{l}_0 \quad (3.38)$$

$$\mathbf{U}_K = \frac{\mu_0}{\pi}(R_{33}^1 + R_{33}^M + R_{33}^K)\mathbf{U}_0 + (R_{34}^1 + 2R_{34}^M)\mathbf{V}_0 \quad (3.39)$$

$$\mathbf{U}_d = \frac{\mu_0}{\pi}(R_{33}^1 + R_{33}^M)\mathbf{U}_0 + (R_{34}^1 + R_{34}^M)\mathbf{V}_0 \quad (3.40)$$

$$\mathbf{V}_K = \frac{\mu_0}{\pi}(R_{44}^1 + R_{44}^M + R_{44}^K)\mathbf{V}_0 - (R_{34}^1 + 2R_{34}^M)\mathbf{U}_0 \quad (3.41)$$

$$\mathbf{V}_d = \frac{\mu_0}{\pi}(R_{44}^1 + R_{44}^M)\mathbf{V}_0 - (R_{34}^1 + R_{34}^M)\mathbf{U}_0 \quad (3.42)$$

Wie beschrieben werden die Multiplikationen der Matrixelemente mit den Stokes-Vektor-Elementen vor der Mittelung vorgenommen, diese Gleichungen werden am Ende nur einmal für diese gemittelten Produkte berechnet.

Mit Hilfe der acht resultierenden Komponenten werden dann in MYSTIC alle gewünschten Verstärkungsfaktoren nach dem Muster $(\mathbf{l}_K \pm \mathbf{X}_K)/(\mathbf{l}_d \pm \mathbf{X}_d)$ berechnet, wobei \mathbf{X} für eine der drei Polarisationskomponenten \mathbf{Q} , \mathbf{U} oder \mathbf{V} steht. Für die entsprechenden Spezialfälle initialer Stokes-Vektoren reduzieren sich diese Formeln wieder auf Gl. 2.124 bis 2.130.

3.2.3 Implementierung der LIDAR-KRSV

Der zweite Ansatz, um in MYSTIC kohärente Rückstreuung zu berechnen, funktioniert über die explizite Simulation beider Photonenwege: Nachdem durch einen Local Estimate nach mindestens zwei Streuungen ein geschlossener Photonenweg vom Sender zum Empfänger entstanden ist, wird derselbe Weg in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, wobei ebenfalls ein Local Estimate ausgeführt wird. Aus Vorwärts- und Rückwärtsweg wird dann jeweils ein Stokes-Vektor berechnet.

Beide Stokes-Vektoren werden invertiert (Gleichungen 2.144 und 2.145) und über Gleichung 2.146 wird der dazugehörige KRS-Stokes-Vektor berechnet. Der KRS-Stokes-Vektor wird schließlich zum Mittelwert der beiden ursprünglichen Stokes-Vektoren hinzu addiert. Da in MYSTIC auch die statistischen Gewichte w der beiden Photonenpfade, welche nur im Fall exakt identischer Pfade gleich sind, berücksichtigt werden müssen, lautet die Gleichung wie folgt (Subskripte: v = vorwärts, r = rückwärts, K = kohärent):

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} (w_v (\mathbf{I}_v + \mathbf{I}_K) + w_r (\mathbf{I}_r + \mathbf{I}_K)) \quad (3.43)$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie der Empfänger mit dem Signal umgeht, entweder wird das Signal an jedem Punkt einzeln erfasst, oder es wird über die gesamte Empfängerfläche gemittelt. Letzterer Fall kommt z.B. bei Radar vor und bedeutet, dass der Weglängenunterschied zwischen beiden Wegen in exakter Rückstreurichtung stets gleich Null ist. Es wird im Folgenden noch genauer auf diese Unterscheidung eingegangen, hier sei vorab festgehalten, dass die Box "Prüfe ob kohärente Rückstreuung möglich ist." in Abb. 3.6 optional ist und bei mittelnden Empfängerflächen immer wahr ist.

Zu beachten ist, dass bei der Berechnung des Rückwärtsweges keine weitere Zufallszahlen gezogen werden, da der Weg bereits bekannt ist. Stattdessen wird für den Rückwärtsweg die Markov-Kette des Vorwärtsweges verwendet. Auch können auf dem Rückweg auftretende Local Estimate-Spikes deutliche Auswirkungen auf das Ergebnis haben, da alle Local Estimates des Rückwegs mit demselben Streuwinkel auf den selben Punkt auf dem Empfänger treffen. Bei Rechnungen mit stark vorwärts-streuenden Streufunktionen und langen Streuwegen (d.h. hoher optischer Dicke) ist daher gewisse Vorsicht geboten.

Aufgrund des Reziprozitätsprinzips gilt außerdem stets für alle Streuungen außer der ersten und dem Local Estimate:

$$\prod_{i=2}^n \left[\frac{\bar{k}(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i-1})}{P(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_{i-1})} \right] = \prod_{i=n}^2 \left[\frac{\bar{k}(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_i)}{P(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_i)} \right] \quad (3.44)$$

Im Fall eines mittelnden Empfängers gilt diese Relation außerdem für alle Streuungen.

Lidar-KRS sammelt bereits in der normalen Photonenschleife notwendige Daten, wird aber erst bei einem Local Estimate aktiv. Im Fall eines nicht-mittelnden Empfängers prüft die Routine erst, ob kohärente Rückstreuung für diesen Local Estimate überhaupt möglich ist, also ob erster und letzter Streupunkt des Photonenweges beide sowohl vom Startpunkt als auch vom Endpunkt aus sichtbar sind. Dies hängt im wesentlichen vom Öffnungswinkel ab, wie im nächsten Abschnitt verdeutlicht wird. Schlägt der Test fehl, ist physikalisch keine Interferenz möglich und KRS wird nicht aufgerufen, stattdessen wird das Ergebnis normal ohne KRS berechnet. Ist der Test erfolgreich, berechnet die Routine mit Hilfe der gesammelten Daten die Streumatrix und die Gewichte, und damit den Stokes-Vektor des umgekehrten Pfades.

Eine zweite Routine berechnet dann mit Hilfe dieses Stokes-Vektors und des Stokes-Vektors des Vorwärtsweges durch Inversion den KRS-Stokes-Vektor. Diese drei werden dann entsprechend Gleichung 3.43 zum neuen Ergebnis kombiniert.

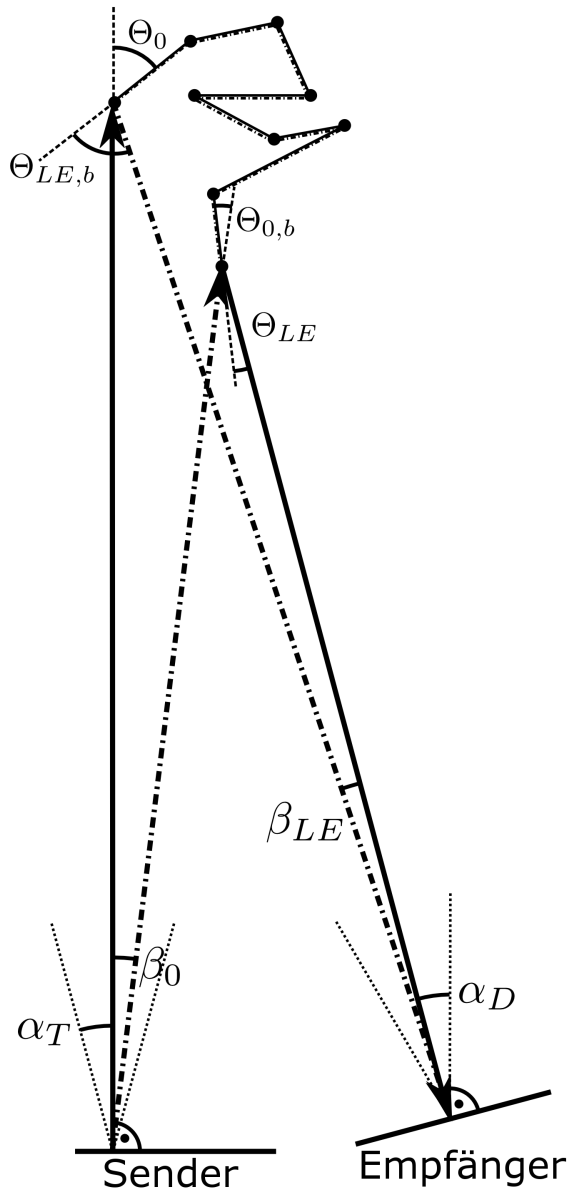


Abbildung 3.7: Ein Streupfad und sein umgekehrtes Pendant, wie sie bei getrenntem Sender und Empfänger ohne Mittelung konstruiert werden, entspricht Fall A in Abb. 3.8. Der normale Streupfad wird durch die durchgezogene Linie repräsentiert. Er steht im rechten Winkel auf Sender und Empfänger um das Kennzeichen der Winkel übersichtlich zu halten (im Allgemeinen kann der Pfad jeden Winkel innerhalb der Öffnungswinkel von Sender und Empfänger annehmen). Der entgegengesetzte Pfad ist mit Strichpunkten gekennzeichnet, er startet zwar vom selben Punkt auf dem Sender und trifft auf demselben Punkt auf dem Empfänger auf, durchläuft den Streupfad aber in entgegengesetzter Richtung. Die Winkel α_T und α_D sind die Öffnungswinkel von Sender und Empfänger, alle Streupfade müssen innerhalb dieser Winkel ausgesandt und empfangen werden. Die Winkel β_0 und β_{LE} sind zugleich die Winkel des Rückwärtspfades zur Flächennormalen und zu den Richtungen des Hinweges. Die Winkel Θ_0 und Θ_{LE} sind die Streuwinkel der ersten und der letzten Streuung des Hinweges. Die Winkel $\Theta_{0,b}$ und $\Theta_{LE,b}$ dagegen die Streuwinkel der ersten und letzten Streuung des Rückwegs. Θ_0 und $\Theta_{LE,b}$ kommen am selben Streupunkt vor, müssen aber nicht gleich sein, dies gilt auch für $\Theta_{0,b}$ und Θ_{LE} .

Implementierung der Geometrie

Neben der Frage, ob die Empfängerfläche das Signal mittelt, wie das bei Radargeräten passiert, oder ob jeder Punkt der Empfängerfläche ein individuelles Signal misst, muss auch die Größenordnung der Messung betrachtet werden. Diese kann von klein dimensionierten Labormessungen mit Lasern bis zur Radarfernerkundung von Eismonden und Asteroiden über planetare Entfernungen reichen. Letzterer Fall impliziert den Empfang von quasi-paralleler Strahlung, bei der der Öffnungswinkel des Empfängers keine Rolle spielt, während z.B. im Fall von Wetterradar das Signal den gesamten Öffnungswinkel

der Radarantenne abdecken kann. Aus diesem Grund wurden drei Fälle identifiziert, welche in dieser Arbeit behandelt werden (Abb. 3.8):

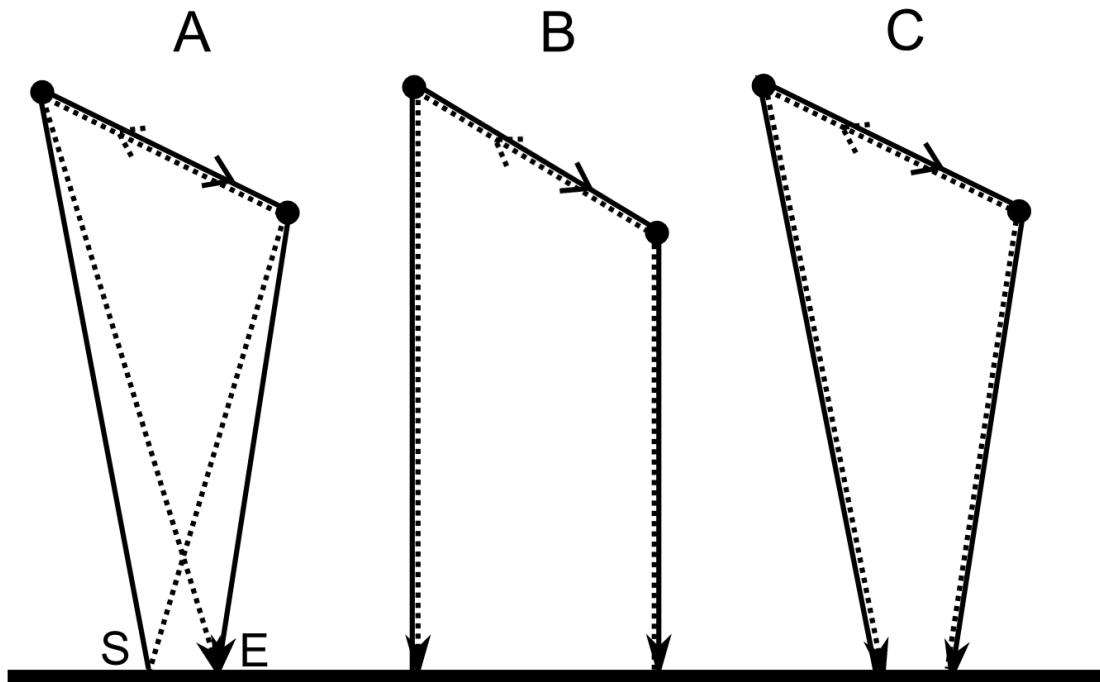


Abbildung 3.8: Drei mögliche Konfigurationen für die entgegengesetzten Streuewege in Rückstreurichtung, d.h. für deckungsgleiche Sender und Empfänger. Fall A zeigt die Wegkonfiguration wenn Sende- und Empfangspunkt auf dem Empfänger getrennt betrachtet werden, d.h. wenn der Empfänger nicht mittelt. Fall B zeigt eine Wegkonfiguration für einen mittelnden Sender/Empfänger, der ausschließlich Photonen senkrecht zur Sendefläche ausstrahlt und empfängt. Fall C ist wie Fall B mittelnd, aber mit finitem Öffnungswinkel wie in Fall A. In den Fällen B und C ist die Weglängendifferenz stets gleich Null.

Fall A, welcher eine nicht-mittelnde Fläche annimmt, so dass beide Start- und Endpunkte jeweils identisch sind, Fall B, welcher eine mittelnde Fläche annimmt, welche ausschließlich Strahlung sendet und empfängt, die exakt senkrecht zu ihr steht, und Fall C, welche eine mittelnde Fläche annimmt, welche ihr Signal innerhalb eines finiten Öffnungswinkels abstrahlt und empfängt. In den beiden mittelnden Fällen ist des jeweils einen Pfades Startpunkt des jeweils anderen Pfades Endpunkt.

- Fall A, nicht-mittelnde Fläche, finiter Öffnungswinkel:
Beide Wege starten am selben Punkt auf dem Sender und enden am selben Punkt auf dem Empfänger. Wie in Abb. 3.8 gezeigt wird, ergeben sich daraus im Allgemeinen Weglängendifferenzen ungleich Null. Fall A ist auch in Abb. 3.7 dargestellt. In diesem Fall muss, wie bereits erwähnt, die Sichtbarkeit der Interferenz vom Endpunkt aus sicher gestellt werden, darauf wird im Folgenden noch genauer eingegangen.
- Fall B, mittelnde Fläche, kein Öffnungswinkel:
Der Empfänger nimmt ausschließlich Streuungen wahr, welche exakt im rechten

Winkel die Fläche treffen. Die Weglängendifferenzen in diesem Fall sind immer gleich Null. Dieser Fall setzt voraus, dass das Ergebnis über die Empfängerfläche gemittelt wird, nur so kann man rechtfertigen, dass es zu einer Interferenz der Signale zweier räumlich getrennter Punkte auf der Empfängerfläche kommt.

Zur Simulation dieser Geometrie wurde MYSTIC um entsprechende Algorithmen erweitert. Problematisch ist, dass das Signal in diesem Fall nicht in die korrekte Größenordnung gebracht werden kann, da der Öffnungswinkel α hier gleich Null gesetzt wird. Dieser aber bestimmt mit die Größe der Fläche A_s in Gl. 3.28, siehe Abb. 3.3 links: Es ist leicht ersichtlich, dass die Schnittfläche A_s der beiden Flächen A und E verschwindet, wenn der Winkel α gleich Null gesetzt wird und die Punkte y_0 und y_{end} nicht identisch sind. Dadurch lässt sich das Gl. 3.28, welche das Ergebnis in die korrekte Größenordnung bringt, nicht anwenden, da das Ergebnis stets null wäre.

Aus diesem Grund können in diesem Fall nur Verhältnisse zwischen Signalen, nicht aber die Signale selbst sinnvoll betrachtet werden. Da A_s immer gleich null ist und alle Local Estimates genau mit dem Winkel $\beta_{LE} = 90^\circ$ (Gl. 3.28) auf der Empfängerfläche auftreten, kann davon ausgegangen werden, dass die Korrektur, welche diese Local Estimates in die richtige Größenordnung bringt, für alle Photonen gleich ist. Damit können die KRSV-Faktoren ζ , welche stets das Verhältnis zweier solcher Signale sind, auch ohne diese Korrektur berechnet werden. Die Signale selbst werden später in Kapitel 4.2 in AU (Arbitrary Units) angegeben.

- Fall C, mittelnnde Fläche, finiter Öffnungswinkel:
Dieser Fall nimmt, wie Fall B, eine mittelnnde Fläche an, sieht aber das Signal aus einem Winkelbereich innerhalb des Öffnungswinkels des Empfängers, wie Fall A. Dadurch spielt das Problem der korrekten Normierung des Signals aus Fall B hier keine Rolle. Dieser Fall ist am einfachsten in MYSTIC realisierbar. Er wird im wesentlichen wie Fall A behandelt, nur dass die KRSV immer für alle Pfade berechnet wird, da die Interferenz stets sichtbar ist.

3.2.4 Numerische Präzision

Numerische Präzision ist in der numerischen Modellierung ein wichtiger Aspekt, der sich meist einfach handhaben lässt. Es gibt jedoch Fälle, in denen diesem Thema besondere Aufmerksamkeit gewidmet werden muss, z.B. bei der Simulation der kohärenten Rückstreuung in MYSTIC-Lidar. Da sich während der Simulationen Abweichungen zwischen den simulierten Werten und den Referenz-Werten herauskristallisierten, wurden die numerische Genauigkeit der Algorithmen und der Simulationen überprüft und optimiert.

Weglängendifferenzen

Die Berechnung des Phasenunterschiedes $\epsilon = k((r_{f1} + r_{fn}) - (r_{b1} + r_{bn}))$ (vgl. Gl. 2.97) ist hier der kritischste Punkt. Er enthält die Differenz zweier sehr ähnlicher Summen. Werden zwei Terme der gleichen Größenordnung voneinander abgezogen, welche sich in den meisten führenden Ziffern exakt gleichen, so führt dies zu einem Verlust an numerischer Präzision. Als Beispiel wird hier ein Weglängenunterschied zwischen zwei fast gleich langen 100 km langen Strecken mit einer Differenz im Bereich von 100 nm angeführt:

$$1.0000000000003148 \cdot 10^5 m - 1.0000000000002723 \cdot 10^5 m = 4.25 \cdot 10^{-7} m$$

Die beiden Zahlen auf der linken Seite sind in doppelter numerischer Präzision, sie haben eine Genauigkeit von sechzehn Stellen, das Ergebnis dagegen hat nur noch eine Genauigkeit von drei Stellen. Da das Ergebnis auch als Zahl mit doppelter Präzision behandelt wird, werden diesen drei gültigen Stellen dreizehn zufällige Ziffern angehängt, d.h. im Computer wäre diese Zahl dann z.B. als $4.252047385946371 \cdot 10^{-7}$ repräsentiert. Wird dann das Ergebnis solch einer Differenz mit einer großen Zahl multipliziert, wandern die zufälligen Stellen entsprechend in höhere Größenordnungen und können damit zu massiven Fehlern führen. Da die Weglängendifferenzen mit der Kreiswellenzahl multipliziert werden (siehe Gl. 2.97), um die resultierende Phasendifferenz zu berechnen, passiert hier genau das (z.B. mit $k = 10^7 m^{-1}$):

$$4.252047385946371 \cdot 10^{-7} m * 1.0000000000000000 \cdot 10^7 m^{-1} = 4.252047385946371$$

Der numerische Fehler ist durch diese Prozedur in die dritte Nachkommastelle der Phasendifferenz aufgerückt und führt damit numerische Fehler in die Berechnung des KRSV-Stokes-Vektors ein. Dieser Effekt spielt allerdings nur eine Rolle bei nicht-mittelndem Empfänger und wächst an Bedeutung, je kleiner die Wellenlänge und damit je größer die Wellenzahl wird, damit ist die Simulation von Radar nicht betroffen.

Kahan-Summation

Die Kahan-Summation ist ein Algorithmus zur Reduzierung von Rundungsfehlern (Kahan [1965]) und wurde an einigen Stellen eingesetzt, um numerische Fehler bei der Summierung von Zahlen unterschiedlicher Größenordnungen zu reduzieren. Sei S_i die Folge aller zu summierenden Summanden, C_i die Folge aller Korrekturen, FS_i die Folge aller Teilsummen, wobei FS_n das Endergebnis darstellt, und CS und CFS temporäre Variablen, welche den jeweiligen aktuellen korrigierten Summanden bzw. die aktuelle korrigierte Summation enthalten. Bei allen Zahlen handelt es sich um Fließkommazahlen beliebiger Größenordnung mit endlicher und für alle Summanden gleicher Präzision. Seien $FS_1 = S_1$ und $C_1 = 0$, dann gilt für $i \in (2, n), n > 2$:

$$CS = S_i - C_{i-1} \tag{3.45}$$

$$CFS = FS_{i-1} + CS \tag{3.46}$$

$$C_i = (CFS - FS_{i-1}) - CS \tag{3.47}$$

$$FS_i = CFS \tag{3.48}$$

Im ersten Schritt wird die Korrektur C_{i-1} aus der letzten Iteration vom aktuellen Summanden S_i abgezogen. Als nächstes wird der so korrigierte Summand CS zur Teilsumme FS_{i-1} der letzten Iteration summiert und beides wird temporär unter CFS gespeichert. Wenn beide Summanden unterschiedliche Größenordnung haben, büßt der kleinere Summand eine Zahl an Nachkommastellen an Genauigkeit ein, welche dem Größenordnungsunterschied entspricht.

Diese verlorenen Nachkommastellen werden im nächsten Schritt wieder hergestellt, wo schrittweise erst der eine, dann der andere Summand von der Summe CFS abgezogen wird und der übrig bleibende Rest als Korrektur C_i gespeichert wird. CFS wird schließlich für die i -te Teilsumme FS_i eingesetzt und die Korrektur C_i wird im nächsten Iterationsschritt subtrahiert. Der Fehler der i -ten Summation wird in der $i + 1$ -ten Summation korrigiert. Diese Korrektur erhöht die Genauigkeit der Summation zur Berechnung der Weglängendifferenz spürbar, sie kommt auch in anderen Bereichen der KRSV-Berechnung zur Anwendung.

Genauigkeit der Streueigenschaften

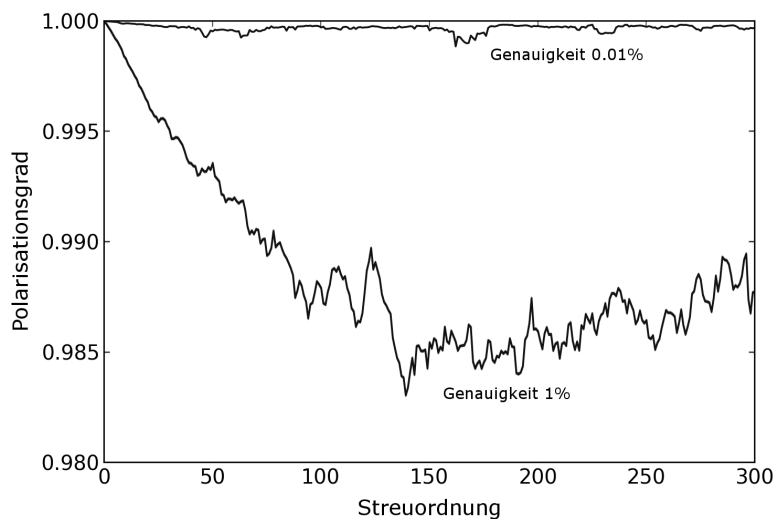


Abbildung 3.9: Gemittelte "numerische Depolarisation" von MYSTIC-Photonen abhängig von der Streuordnung für Genauigkeiten von 1 % und 0.01 %.

Um höchstmögliche numerische Präzision der Berechnungen sicherzustellen, müssen auch die Eingangsdaten, v.a. die Streueigenschaften, welche tabellarisch eingelesen werden, so korrekt wie möglich sein. Die Streueigenschaften für MYSTIC werden mit dem Mie-Tool berechnet, welches hier den Mie-Code von Wiscombe [1979] verwendet. In den Simulationen zeigte sich, dass es mit steigender Streuordnung zu "numerischer Depolarisation" kam.

Im Idealfall bleibt jedes Photon, das zu 100 % polarisiert startet auch vollständig polarisiert, solange keine Mittelungen angewendet werden. Über 100 bis 150 Streuungen zeigte sich jedoch ein Verlust von etwa 1.5 % des Polarisationsgrades. Eine Erhöhung der Genauigkeit der Berechnungen der Streumatrizen im Mie-Tool von 1.0 % auf 0.01 % führte zu einer wesentlichen Verringerung dieser Abweichung (Abb. 3.9).

Weitere Tests zeigten, dass auch die mit erhöhter Präzision berechneten Streumatrizen für einzelne Radien im Mie-Bereich aufgrund numerischer Limitierungen ungenau waren und die SV-Bedingung $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$ für die U und die V-Komponente nicht exakt erfüllt waren: Nachdem eine einzelne Streumatrix auf einen Stokes-Vektor (1, 0, 1, 0) oder (1, 0, 0, 1) angewendet wurde, wich der resultierende Stokes-Vektor je nach Streuwinkel mehr oder minder stark von der SV-Bedingung ab (Abb. 3.10 oben).

Die Abweichungen erreichen stellenweise 2.5 % und mehr, in exakter Rückstreurichtung sogar fast 4 %. Je größer der Größenparameter ist, desto aufwendiger werden die Berechnungen und desto stärker die Abweichungen. Der Grund für dieses Problem lag darin, dass der Wiscombe-Mie-Code in einfacher Präzision lief. Er wurde daher komplett auf doppelte Präzision umgeschrieben, und die Abweichungen konnten signifikant reduziert werden (Abb. 3.10 unten). Dennoch bleiben auch hier leichte Abweichungen von bis zu 1 % bestehen. Die Q-Komponente zeigt keine solchen Abweichungen, Ihre Berechnung ist exakt.

Um Probleme mit numerischer Depolarisation abzufangen, wird im KRSV-Algorithmus jeder Stokes-Vektor auf die SV-Bedingung geprüft, denn nur Stokes-Vektoren, welche diese erfüllen, können korrekt invertiert werden. Ist der Stokes-Vektor numerisch depolarisiert, wird der Grad der Depolarisation ermittelt und als Korrekturfaktor gleichmäßig mit den Komponenten Q, U und V multipliziert.

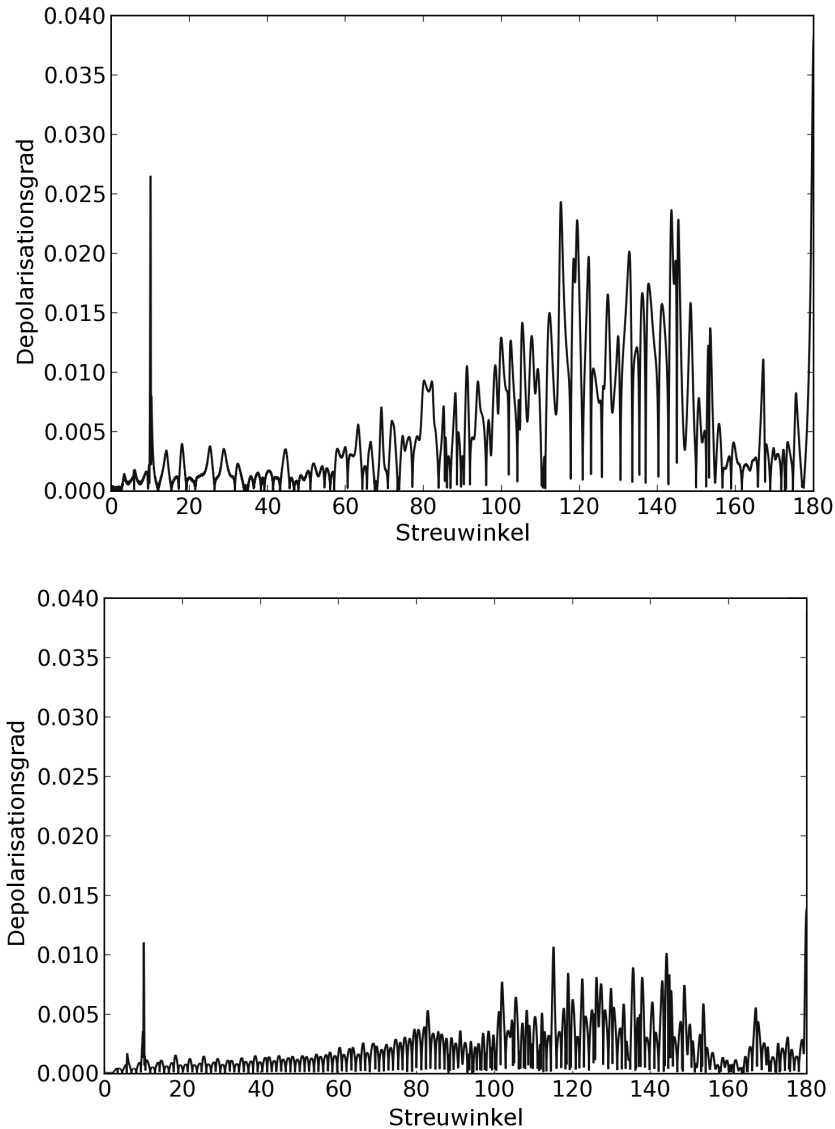


Abbildung 3.10: Depolarisationsgrad abhängig vom Streuwinkel für die V-Komponente einer Streuung mit initialem Stokes-Vektor $(1, 0, 0, 1)$, Größenparameter $a = 66$. Oben: Streufunktion mit einfacher Präzision und Standard-Genauigkeit berechnet. Unten: Streufunktion mit doppelter Präzision und erhöhter Genauigkeit berechnet.

3.2.5 Limitierungen

Sichtbarkeit der Interferenz

Im Fall eines nicht-mittelnden Empfängers ist es notwendig, dass Start- und Endpunkt der beiden Photonenpfade beide den ersten und den letzten Streupunkt des Weges sehen können. Dies kann gerade bei kleinem Öffnungswinkel und großer Empfängerfläche oft nicht erfüllt sein (Abb. 3.11).

Betrachtet man in Abb. 3.3 die beiden sich am oberen Rand überlappenden Kegel B und C, so ist es für eine erfolgreiche Interferenz notwendig, dass der erste und der letzte Streuer des betrachteten Streuweges in diesem Überlappbereich zu finden sind. Daher muss bei solchen Simulationen abgeschätzt werden, wie groß der Anteil des sichtbaren Signals ist, welcher durch KRSV beeinflusst wird. Dies kann unter vereinfachten Bedingungen leicht geometrisch erfolgen, wenn man davon ausgeht, dass jede Richtung innerhalb des Öffnungswinkels gleich wahrscheinlich ist. Für eine genügend große Anzahl an zufälligen Kombinationen aus Start- und Endpunkten wird auf einer bestimmten Ebene im Sicht-

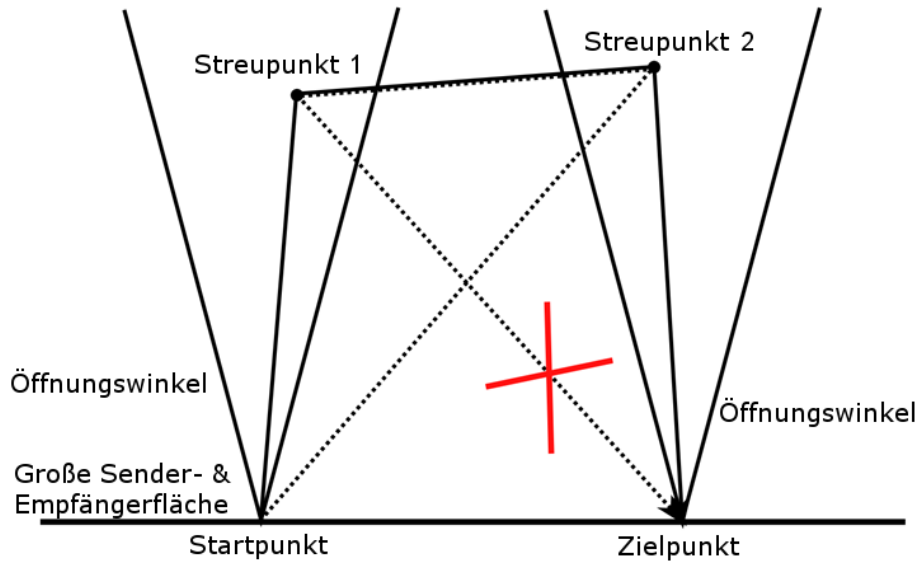


Abbildung 3.11: Beispiel für fehlgeschlagenen KRS-Test bei kleinem Öffnungswinkel und sehr großer Sender-/Empfängerfläche bei nicht-mittelnder Empfängerfläche. Aufgrund des limitierenden Öffnungswinkels ist der Streupunkt 2 vom Startpunkt aus nicht sichtbar, ebenso ist der Streupunkt 1 vom Zielpunkt aus nicht sichtbar. Der gestrichelte Photonenweg ist daher nicht möglich und damit auch keine Interferenz zwischen beiden Pfaden.

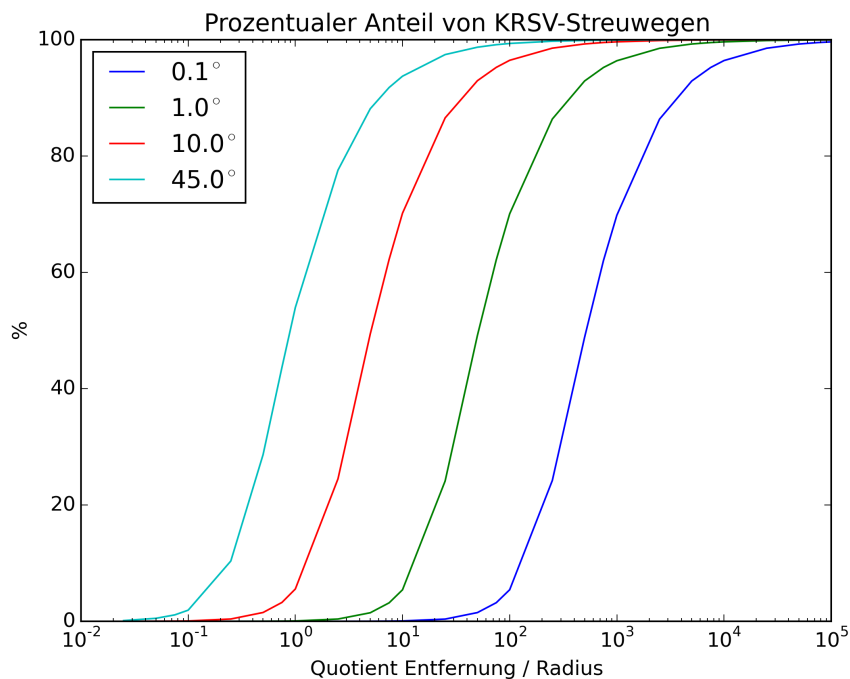


Abbildung 3.12: Geometrische Abschätzung des prozentualen Anteils von Streuwegen, welche ein KRSV-Signal erzeugen können, in Abhängigkeit vom Verhältnis zwischen der Entfernung der streuenden Schicht vom Sender/Empfänger und dem Radius der Sender/Empfängerfläche für vier verschiedene Öffnungswinkel. Für jeden Datenpunkt wurden tausend zufällige Startpunkte mit jeweils tausend zufälligen Endpunkten berechnet.

bereich des Senders/Empfängers der Überlappbereich der beiden Kreise (gleicher Radien) berechnet und zur Gesamtfläche, welche beide Kreise überdecken ins Verhältnis gesetzt. Abb. 3.12 zeigt solch eine geometrische Abschätzung. Um ein maximales KRSV-Signal zu erhalten, muss das Verhältnis zwischen der Entfernung der streuenden Schicht zum Sender/Empfänger und dessen Radius dem jeweiligen Öffnungswinkel entsprechend ausreichend groß sein.

Unpolarisierte Strahlung

Die notwendige Bedingung für die Gültigkeit der Stokes-Vektor-Inversion (Gleichungen 2.144 und 2.145), welche für das korrekte Funktionieren der Lidar-KRSV notwendig ist, ist die Gültigkeit der SV-Bedingung $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$. Natürliche solare und thermische Strahlung in der Atmosphäre ist im Mittel unpolarisiert und wird auch in MYSTIC als gemittelt betrachtet, d.h. es werden "Photonenpakete" anstatt einzelner Photonen simuliert (Emde et al [2010]). Diese mit dem Stokes-Vektor $(1, 0, 0, 0)$ gestartet, was zu einem fehlerhaften Ergebnis in der Stokes-Vektor-Inversion führt. Um dieses Problem zu lösen, wird stattdessen für jedes Photon ein zufälliger Stokes-Vektor ausgewürfelt, welcher der Bedingung genügt.

Zu diesem Zweck werden zwei Zufallszahlen ρ_1 und ρ_2 aus dem Bereich $[0, 2\pi)$ gewürfelt. ρ_1 gibt eine zufällige Richtung der normierten elektrischen Feldstärke A an. Die für den Stokes-Vektor notwendige normierte parallele und senkrechte Komponente werden wie folgt ermittelt:

$$A_{\perp} = |\cos \rho_1| \quad (3.49)$$

$$A_{\parallel} = |\sin \rho_1| \quad (3.50)$$

Die zweite Zufallszahl ρ_2 gibt eine zufällige Phasendifferenz zwischen beiden Feldkomponenten an, für den Stokes-Vektor folgt dann:

$$I = 1 \quad (3.51)$$

$$Q = A_{\perp}^2 - A_{\parallel}^2 \quad (3.52)$$

$$U = 2A_{\perp}A_{\parallel} \cos \rho_2 \quad (3.53)$$

$$V = -2A_{\perp}A_{\parallel} \sin \rho_2 \quad (3.54)$$

Einsetzen dieser Gleichungen in Gleichung 2.8 zeigt, dass die SV-Bedingung erfüllt ist. Das Verhältnis der Ergebnisse von Rechnungen mit zufällig polarisierter und unpolarisierter Strahlung mit Standard-MYSTIC liegt nach einer Beispielrechnung mit je 1 Milliarde Photonen bei 1.00011 ± 0.00074 . Die beiden Ergebnisse sind innerhalb einer Standardabweichung gleich und die zufällige Polarisation kann guten Gewissens verwendet werden.

Teilchengrößenverteilungen

Normalerweise hat man es nur in der Theorie mit Streuung an Medien zu tun, die aus Teilchen der exakt gleichen Größe bestehen. In der Natur existiert immer eine Verteilung von Teilchen unterschiedlicher Größe. Diese Verteilungen können zwar gemessen werden, werden im Modell aber meist durch simple Modelle angenähert, z.B. durch Gamma- oder Lognormalverteilungen.

Streuungsfunktionen und -matrizen solcher Verteilungen entstehen durch Mittelung über alle Größen und deren Konzentration innerhalb der Verteilung und sind daher wesentlich

glatter. Insbesondere im Bereich der Mie-Streufunktionen werden durch diese Mittelung kleine Maxima und Minima ausgeglichen und geglättet, da diese wesentlich vom Größenparameter abhängen und sich mit diesem stark verändern (Abb. 3.13).

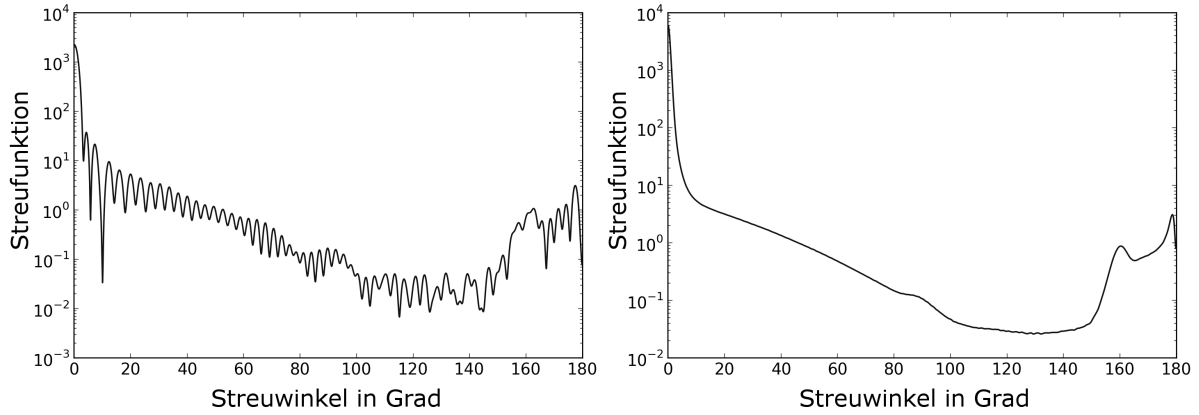


Abbildung 3.13: Streufunktion (M_{11} , vgl Abb. 2.2) im Mie-Bereich (Größenparameter $a = 66$), aufgetragen gegen den Streuwinkel in Grad: Der linke Graph zeigt eine Rechnung mit konstantem Teilchenradius, der rechte zeigt eine Rechnung mit Lognormal-Verteilung mit demselben Effektivradius und die dadurch bedingte Glättung der Streufunktion. Auffällig ist, dass trotz der Glättung bestimmte Maxima übrig bleiben (z.B. Regenbogen und Rückstreuglorie). Nur aufgrund dessen sind diese Effekte auch in der Realität beobachtbar.

Größenverteilungen sind zunächst durch ihren Effektivradius r_{eff} definiert (Hansen et al [1974]):

$$r_{eff} = \frac{\int r^3 n(r) dr}{\int r^2 n(r) dr} \quad (3.55)$$

$n(r)$ ist die Anzahl von Tröpfchen pro Volumeneinheit in Abhängigkeit vom Radius, entspricht also der Größenverteilung. Zweitens werden Verteilungen durch Verteilungsparameter festgelegt. Die Gamma-Verteilung lautet wie folgt (Emde et al [2010]):

$$n(r) = ar^\alpha \exp\left(-\frac{(\alpha + 3)r}{r_{eff}}\right) \quad (3.56)$$

Der Verteilungsparameter ist α und sein typischer Wert für Wolkentröpfchen ist 7, größere Werte ergeben engere Verteilungen. a ist der Normierungsparameter und wird automatisch bestimmt.

Die Lognormal-Verteilung hat folgende Form (Emde et al [2010]):

$$n(r) = \frac{a}{r} \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln(r) - \ln(r_0)}{\ln(\sigma)} \right)^2 \right) \quad (3.57)$$

Der Verteilungsparameter hier ist die Standardabweichung σ , r_0 ist der Modus der Verteilung und a ist wieder der Normierungsparameter. Im Fall polarisierter Strahlung ergibt sich durch die Verwendung einer über eine Teilchengrößenverteilung gemittelten Streumatrix eine Verletzung der SV-Bedingung $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$.

Anstatt dass für jede Radius-Stützstelle der Verteilung die Streueigenschaften berechnet und gespeichert werden, werden alle Streueigenschaften über die Radien gemittelt, so dass nur noch die Streueigenschaften für einen effektiven Radius übrig bleiben, welche dasselbe Ergebnis liefern, jedoch nicht mehr der SV-Bedingung genügen. Dies liegt daran, dass die Polarisationskomponenten Q, U und V sowohl positive als auch negative Werte annehmen können, was in der Mittelung unweigerlich zu Depolarisation führt. Die SV-Bedingung dagegen ist eine quadratische Summe und damit spielen die Vorzeichen der Polarisationskomponenten in ihr keine Rolle.

Als Beispiel betrachte man die Q-Streufunktionen zweier unterschiedlich großer Teilchen, welche an einem gegebenen Winkel die Werte -0.5 und 0.6 aufweisen. Jede Streuung für sich wirkt nicht depolarisierend, eine Mittelung jedoch führt zu einem viel geringeren Wert von 0.1 . Dieser stark verringerte Q-Wert kann in der SV-Bedingung nicht ausgeglichen werden.

Diese Einschränkung ist problematisch, da aufgrund der Anwendung der Stokes-Vektor-Inversion in der Lidar-KRSV eine Bestimmung der kohärenten Rückstreuung nur für Teilchen mit einem konstanten Radius korrekt möglich ist (siehe Kap. 2.3.3). In der Anwendung auf die Atmosphäre hat man es aber in der Regel mit Größenverteilungen zu tun. In Folge dessen wird in dieser Arbeit nur mit singulären Radien gerechnet. Für die Matrizen-Methode nach Mishchenko spielt diese Einschränkung keine Rolle.

Rayleigh-Spikes

Ein Sonderfall tritt ein, wenn mit linearer Polarisation im Rayleigh-Bereich mit sehr hohen optischen Dicken gerechnet wird. Ein Blick auf die Rayleigh-Streukurve (Abb. 2.2) zeigt, dass die Strahlung bei exakter Seitwärtsstreuung vollständig linear polarisiert ist. Man betrachte eine auf das 11-Element normierte vereinfachte Streumatrix für einen Streuwinkel $\Theta = 90^\circ$ (Gl. 2.11) multipliziert mit einem negativ linear polarisierten Stokes-Vektor:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Jede subsequente Streuung im rechten Winkel verdoppelt die I- und Q-Komponente des Stokes-Vektors. Das I-Element geht in das statistische Gewicht des Ergebnisses ein und wird bei N Streuungen im rechten Winkel um 2^N erhöht. Dies stellt den theoretischen Maximalfall dar, der Wert ist i.d.R. ≤ 1 , aber auch Werte, die kleiner als 1 sind, können ausreichen, um das Gewicht in die Höhe zu treiben.

Abbildung 3.14 links zeigt ein Beispiel für ein Photon, welches einen solchen Spike auslöst. Dieses Ergebnis wurde mit einem Größenparameter von $a = 1.4$ errechnet, also nahe der Grenze von Mie- und Rayleigh-Bereich, wo das Betragsmaximum des 12-Elements der Streumatrix nur ca. 0.75 beträgt und der dazu gehörige Winkel bei ca. 70° liegt (Abb. 3.14 rechts). Dennoch erreicht Z_{11} aufgrund des langen Streuweges einen Maximalwert von 13223.98 . Es handelt sich dabei wohlgerne um den normalen unmodifizierten Streupfad, jeder Local Estimate von diesem Pfad nimmt das an der entsprechenden Streuordnung vorhandene Gewicht mit, wodurch eine ganze Reihe von Local Estimates mit Spikes entstehen, ohne dass die einzelnen Local Estimates selbst problematisch wären.

Da diese Rayleigh-Spikes nicht, wie die bereits beschriebenen Spikes, im Local Estimate entstehen, sondern Teil des normalen Photonenweges sind, ist ihre Behandlung an der Quelle weitaus schwieriger und nicht Teil dieser Arbeit. Stattdessen werden Ergebnisse mit solchen Ereignissen in den Simulationen nicht berücksichtigt.

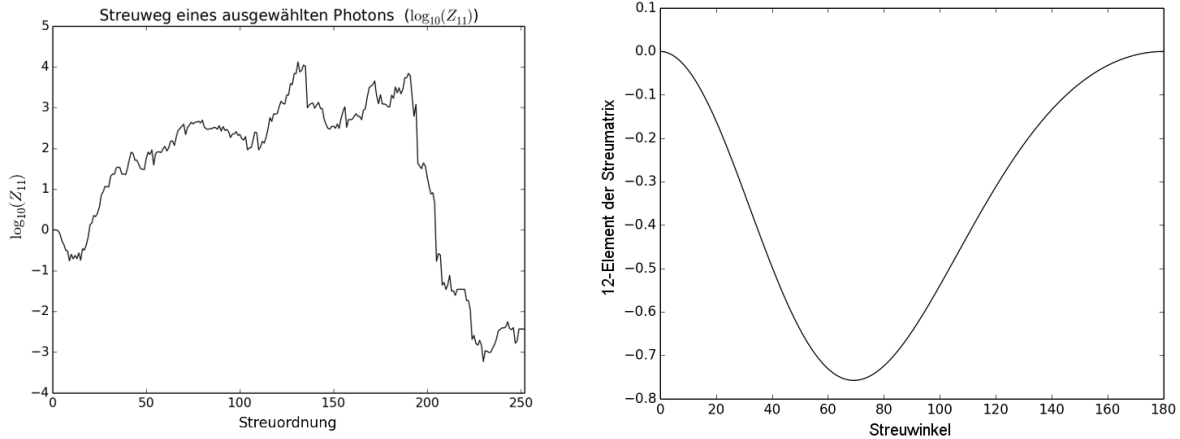


Abbildung 3.14: Links: Dekadischer Logarithmus von Z_{11} eines ausgewählten spikenden Photons aus einer Rechnung mit $a = 1.4$. Rechts 12-Element der Streumatrix aufgetragen gegen den Streuwinkel für $a = 1.4$.

Senkrechte Blickrichtung

Eine Schwierigkeit des polarisierten Monte-Carlo-Strahlungstransfers ist es, dass für die Polarisation die beiden Winkel θ und ϕ eindeutig definiert sein müssen (Abb. 2.3). Entlang der z -Achse, bei $\theta = 0^\circ$ oder 180° jedoch ist ϕ nicht eindeutig definiert. Kommt es zu einer Bewegung entlang der z -Achse, dann geht die Referenzebene, relativ zu welcher der Polarisationszustand definiert ist, verloren und muss künstlich auf einen Vorgabewert zurückgesetzt werden. Daher ist die Simulation in exakter Zenith- oder Nadirrichtung mit Polarisation nicht ratsam, stattdessen sollte mit sehr kleiner Abweichung von der senkrechten Richtung gerechnet werden (z.B. mit 0.001° , wie in den Rechnungen in dieser Arbeit).

3.3 Die Simulation von Radar in MYSTIC

Da die Motivation für diese Arbeit die Frage war, ob kohärente Rückstreuung für Radarsignale wichtig ist, wurde MYSTIC auch mit der Fähigkeit ausgestattet, direkt ein Radar-Signal zu erzeugen, d.h. einen Radarreflektivitätsfaktor auszugeben. Im Verlauf der Arbeit stellte sich heraus, dass mit der Betrachtung der Radarreflektivitäten kein Informationsgewinn für die kohärente Rückstreuung einher geht, stattdessen würde damit eine zusätzliche potentielle Fehlerquelle miteinbezogen. Aus diesem Grund wurde diese Möglichkeit, obwohl sie in MYSTIC integriert wurde, für die Betrachtung der KRSV von Wetterradar nicht verwendet.

Sie wird dennoch im Folgenden dargestellt, da es sich trotz allem um einen Teil dieser Arbeit handelt.

MYSTIC ist von Anfang an als statisches Strahlungstransfermodell konzipiert worden und seine Berechnungsmethode beruht auf dem Teilchencharakter des Lichts. Die Simulation aktiver Messgeräte stellt eine Erweiterung des Modells dar und unterliegt somit den entsprechenden Limitierungen.

Es besteht daher - ohne weitergehende Erweiterungen - keine Möglichkeit, Photonen als Wellenzüge zu simulieren und deren Phasen zu betrachten. Auch die Simulation von Doppler-Effekten würde eine solche Erweiterung des Modells darstellen, welche im Rahmen dieser Arbeit nicht implementiert wurde, da sie für die Simulation der KRS keine Rolle spielt.

Der Standard-Output von MYSTIC bei Benutzung des Lidar/Radar-Simulators ist die Wahrscheinlichkeit, dass es aus einem Entfernungintervall, Range Bin genannt, zu einer Rückstreuung zum Empfänger kommt. Es wird hier von einem Range Bin gesprochen, da in MYSTIC das Signal aus einem kompletten Raumbereich gemessen wird, während das Range Gate eines realen Radars einen sehr kurzen Ausschnitt aus dem Gesamtsignal betrachtet, welcher einem bestimmten Raumbereich entspricht (siehe Abb. 2.20).

Effektiv handelt es sich dabei um das Verhältnis von zurückgestreuter Energie zu ausgesendeter Energie $\frac{p_r}{p_t} = Pr$ pro Range Bin, welches dieser Wahrscheinlichkeit entspricht. Die Radarkonstante (siehe Gl. 2.162) in MYSTIC unterscheidet sich von der Radarkonstante für reale Radargeräte in mehreren Punkten:

- Der Faktor $2 \ln 2$, welcher ursprünglich eingeführt wurde, um die Gauss-Form des Radarstrahls zu korrigieren (siehe Gl. 2.154), entfällt, da der Radarstrahl in MYSTIC gleich verteilt ist.
- Die Radarantenne in MYSTIC ist kreisförmig, daher wird $\phi = \theta$ gesetzt und nur noch letzterer Winkel verwendet. Der Gain einer kreisförmigen Richtantenne ist $\frac{\pi^2}{\theta^2}$ (Probert-Jones [1962]).
- Der Gain g der Antenne (siehe Kap.2.4.3) setzt eine Gauss-förmige Verteilung der abgestrahlten Energie voraus. Da in MYSTIC eine Gleichverteilung verwendet wird, muss hier ein Korrekturfaktor C eingefügt werden. Dieser wird ermittelt, indem die Fläche unter der Gauss-Kurve durch die Fläche unter der Gleichverteilungskurve geteilt wird. Die Fläche unter der Gauss-Kurve ist gegeben durch die Fehlerfunktion erf . Da die Gauss-Funktion symmetrisch um die 0 liegt, reicht es aus, die halbe Fläche zu berechnen, daher wird auch nur der halbe Öffnungswinkel genommen:

$$A_{Gauss} = \frac{1}{2} \left(1 + erf \left(\frac{(\theta/2) - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right) \right) - \frac{1}{2} \quad (3.59)$$

μ der Mittelwert, der hier auf Null gesetzt wird, $\frac{\theta}{2}$ ist der Wert des halben Öffnungswinkels, d.h. des Winkels, an dem das Signal auf die Hälfte seines Wertes abgesunken ist (vgl. Kap. 2.4.2), was der Halbwertsbreite entspricht (Half-Width Half-Mean, *HWHM*). Die Standardabweichung σ ist gegeben durch

$$\sigma = \frac{\theta}{2\sqrt{2 \ln 2}} \quad (3.60)$$

Die Fläche dieser Funktion stellt sich nach Einsetzen von Gl. 3.60 in Gl. 3.59 als Konstante heraus:

$$A_{Gauss} = \frac{1}{2} \operatorname{erf}(\sqrt{\ln 2}) \quad (3.61)$$

Die Fläche der gleichverteilten Funktion stellt sich ebenfalls als Konstante heraus:

$$A_{Gleich} = \frac{\theta}{2\sqrt{2\pi}\sigma} = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \quad (3.62)$$

Damit ergibt sich für C :

$$C = \frac{A_{Gauss}}{A_{Gleich}} = \frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\operatorname{erf}(\sqrt{\ln 2})} \approx 0.8100 \quad (3.63)$$

Der Faktor von ≈ 0.81 ergibt im Modellvergleich (Kap. 4.3) ein korrektes Ergebnis. Jedoch wurde dieser Faktor als Verhältnis zweier Flächen errechnet. Im Vergleich zwischen einem realen Radar und dem MYSTIC-Radar hat man es jedoch mit Volumen zu tun, d.h. es erscheint theoretisch sinnvoller, das Verhältnis des Volumens einer Gauss-Glocke und eines Zylinders ins Verhältnis zu setzen:

Das Rotationsvolumen einer Gauss-Glocke um die y -Achse, welches begrenzt wird durch die x -Achse und die Funktion $f(x)$ im Intervall (a, b) , kann durch die Schalenmethode berechnet werden mit der Formel $V_R = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$. Das Volumen eines Zylinders ist $V_Z = \pi r^2 h$. Nach Einsetzen der Gauss-Funktion für $f(x)$ und Ausrechnen erhält man als Verhältnis zwischen den Volumina:

$$\frac{V_{Gauss}}{V_{Gleich}} = \frac{2\pi \int_0^\theta x f(x) dx}{\pi \theta^2 f(0)} = \frac{2\sigma^2}{\theta^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}\right) \right) \approx 0.7211 \quad (3.64)$$

Dieser Faktor verschlechtert das Ergebnis des Modellvergleichs wesentlich. Da diese Frage noch nicht zufriedenstellend gelöst ist, wäre es auch zu unsicher gewesen, diesen Algorithmus in die Berechnung der KRSV mit einzubeziehen.

- Da hier im Gegensatz zum realen Radar nicht die Hälfte einer Pulslänge als Range Bin definiert wird, entfällt ein weiterer Faktor 2, nämlich der aus $\frac{h}{2}$.

Die in der Radarkonstante enthaltene Pulslänge besagt, innerhalb welches Raumbereichs man die komplette Energie eines Pulses findet. In MYSTIC gibt es keinen Puls, stattdessen werden Photonenwege verfolgt und deren Weglänge bis zur Streuung zum Empfänger gemessen. Diese bestimmt den effektiven Abstand zum Empfänger, welcher vom Radar gemessen wird. Der gesamte Messbereich wird in einzelne Intervalle, d.h. Range Bins, unterteilt.

Die Wahrscheinlichkeit \Pr , dass ein Photon aus einem bestimmten Range Bin zurück gestreut wird, wird für jedes Range Bin auf die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 bezogen, d.h. die aus einem Gate zurück gestreute Energie wird auf die Gesamtenergie des hypothetischen Pulses bezogen. Da die Pulslänge der Länge eines Range Bins entspricht, steckt die Energie des gesamten Pulses in jedem Range Bin. Auf Grund dessen wird in der MYSTIC-Radargleichung die Länge der Range Bins h_{rb} anstelle der nicht existenten Pulslänge h gesetzt.

In MYSTIC werden einzelne Photonen aus allen Bereichen eines Range Bins zurück gestreut, d.h. es gibt für jedes Photon eine individuelle Weglänge $2r$ (doppelter Abstand vom Detektor) und eine Wahrscheinlichkeit Pr , so dass man jedem einzelnen Photon einen Reflektivitätsfaktor zuordnen kann. Der endgültige Reflektivitätsfaktor wäre dann die Mittelung über alle einzelnen z , was eine Mittelung über die r^2 einschließt.

Da außer den Signalen Pr_i , über die separat gemittelt wird, sonst nur Konstanten in der Gleichung vorkommen, kann auch eine gewichtete Mittelung über $(w_i r_i)^2$ erfolgen - wobei w_i das Gewicht des i -ten Photons ist - und dadurch r^2 für die einmalige Anwendung der MYSTIC-Radar-Gleichung vorbereitet werden:

$$r^2 = \frac{\sum_i^N (r_i w_i)^2}{\sum_i^N w_i^2} \quad (3.65)$$

N ist die Anzahl der Local Estimates. Die Wahrscheinlichkeit Pr wird normal in MYSTIC gemittelt, hier muss für das Radar-Ergebnis nichts weiter beachtet werden.

Verluste werden nicht in Betracht gezogen, daher ist $l = 1$. Da die Radargleichung nur einmal angewendet wird, wird $|K|^2 = 0.93$ gesetzt. Mit $\text{Pr} = \langle \text{Pr}_i \rangle$ nimmt die Radargleichung in MYSTIC letztlich diese Form an:

$$z = c_M r^2 = \frac{256 C \lambda^2 \theta^2}{\pi^7 |K|^2 h_{rb}} r^2 \text{Pr} = \frac{512 \lambda^2 \theta^2 \sqrt{\ln 2}}{\pi^7 \sqrt{\pi} \text{erf}(\sqrt{\ln 2}) |K|^2 h_{rb}} r^2 \text{Pr} \quad (3.66)$$

Der Bruch in Gleichung 3.66 enthält, wie im realen Fall, nur Konstanten, welche vor der Simulation bestimmt werden und bildet damit die MYSTIC-Radarkonstante c_M .

3.4 SSRadar

Zusätzlich zu MYSTIC-Radar wurde ein einfacher Radarsimulator programmiert: Single-Scattering Radar, oder SSRadar. Der Name ist analog zu dem ebenfalls zu libRadtran gehörenden Single-Scattering Lidar benannt. SSRadar ist ein standalone 1D-Simulator, welcher den Radar-Reflektivitäts-Faktor direkt aus der Tröpfchengrößenverteilung errechnet, d.h. nach Gleichung 2.166 ($z_e = \sum_{i=1}^n N_i D_i^6 \delta D_i$).

Diese Art der Berechnung nimmt reine Rayleigh-Streuung an. Der Simulator ist in der Lage, variable und beliebig verteilte Schichten in verschiedenen Blickrichtungen $\neq 90^\circ$ zu berechnen. Absorption durch Gase und Abschwächung des Strahls werden vernachlässigt. Eine Rechnung mit diesem Programm ist stets eindimensional, jedoch können mit Hilfe von Skripten problemlos und zügig komplexe zwei- und dreidimensionale Felder erstellt werden.

Kapitel 4

Validierung und Ergebnisse

In diesem Kapitel werden zunächst die Ergebnisse von KRSV-Simulationen in Rückstreuung dargestellt und zur Validierung mit Referenzwerten aus Mishchenko [1992] verglichen. Für den zweiten Teil dieser Validierung wurden Scans über verschiedene Winkelbereiche gerechnet, welche die Form des Rückstreumaximums außerhalb der exakten Rückstreurichtung zeigen (vgl. Abb. 1.2 und 2.15). Schließlich werden die Radar-Simulatoren validiert und die KRSV für Radar-Wellenlängen und verschiedene Fälle von Hydrometeoren simuliert. Damit wird schließlich die Kernfrage dieser Arbeit, welchen Anteil kohärente Rückstreuung am Signal von meteorologischem Radar hat, beantwortet.

4.1 Validierung in exakter Rückstreurichtung

| a | ζ_{ZP}^R | ζ_{QP}^R | ζ_{QX}^R | ζ_{VP}^R | ζ_{VX}^R | τ_s |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------|
| 0.9 | 1.56 | 1.82 | 1.11 | 2.00 | 1.26 | 23.2 |
| 1.4 | 1.59 | 1.92 | 1.10 | 2.00 | 1.25 | 61.5 |
| 2.5 | 1.59 | 1.97 | 1.16 | 2.00 | 1.11 | 155.4 |
| 3.7 | 1.60 | 1.98 | 1.19 | 2.00 | 1.06 | 245.0 |
| 6.5 | 1.61 | 2.00 | 1.22 | 2.00 | 1.05 | 360.3 |
| 7.2 | 1.62 | 2.00 | 1.23 | 2.00 | 1.03 | 368.2 |

Tabelle 4.1: Simulierte Werte der ζ^R aus Mishchenko [1992] für einen unendlichen Halbraum aus nicht-absorbierenden kugelförmigen Teilchen, Brechungsindex 1.2, keine Absorption. a ist der Größenparameter, ζ_{ZP}^R ist ζ^R bei zufällig polarisierter (bzw. unpolarisierter) Strahlung, ζ_{QP}^R ist die ko- und ζ_{QX}^R die kreuzpolarisierte Komponente von ζ^R bei linear polarisierter Strahlung, ζ_{VP}^R ist die drehsinnerhaltende (helicity-preserving) und ζ_{VX}^R die drehsinnbrechende (opposite helicity oder helicity-breaking) Komponente von ζ^R bei zirkulär polarisierter Strahlung (siehe Gleichungen 2.124 bis 2.130). Außerdem aufgelistet ist die im folgenden Kap. 4.1.1 für die MYSTIC-Simulationen ermittelte optische Dicke der Streuung τ_s .

Zur Validierung der Ergebnisse wurden mit MYSTIC berechnete Werte des KRSV-Faktors ($\zeta = (\text{Signal mit KRSV})/(\text{Signal ohne KRSV})$, Gl. 2.3.2) mit Werten aus Tabelle 1 in Mishchenko [1992] verglichen, welche mit einer T-Matrix-Methode berechnet worden sind. Der von Mishchenko verwendete unendliche Halbraum kann in MYSTIC nicht simuliert

werden, daher wurde mit ausreichend großen optischen Dicken gearbeitet, deren Ermittlung im folgenden Unterkapitel beschrieben wird. Diese mit ζ^R bezeichneten Referenzwerte sowie die für die MYSTIC-Simulation verwendeten Parameter sind in Tab. 4.1 dargestellt. Für diese Validierung wurden die in Kap. 3.2.5 und Abb. 3.8 beschriebenen Fälle A bis C mit der Lidar-Methode (Kap. 3.2.3), sowie eine weitere Datenreihe M mit der Matrix-Methode nach Mishchenko (Kap. 3.2.2) berechnet. Die jeweiligen KRSV-Werte wurden entsprechend ζ^A , ζ^B , ζ^C und ζ^M genannt.

Abb. 4.1 zeigt die Domain-Konfigurationen für die Lidar-Fälle. Um eine horizontal unendliche Ausdehnung anzunähern, wurde für ζ^B und ζ^C die horizontale Ausdehnung der Box auf 1000×1000 Kilometer gesetzt und in ihrer Mitte ein kreisförmiger Sender/Empfänger mit einem Radius von 500 km definiert, welcher um 0.001° geneigt nach unten blickt (siehe Kapitel 3.2.5). Die streuende Schicht ist 900 m dick, darunter befindet sich ein absorbierender Erdboden (Albedo 0), dies simuliert den unendlichen Halbraum.

Für ein korrektes KRSV-Signal musste die optische Dicke soweit erhöht werden, dass das Mehrfachstreusignal im Eintrittsbereich der einfallenden Strahlung Sättigung erreicht und eine weitere Erhöhung der optischen Dicke das Mehrfachstreusignal nicht weiter erhöht. Der Abstand der streuenden Schicht zur Sender/Empfängerfläche beträgt 100 m .

Für die Berechnungen der KRSV nach der Matrix-Methode ζ^M wurde diese Konfiguration ebenfalls verwendet. Anstatt der Sender/Empfängerfläche wurde die um 0.001° nach oben gerichtete Strahldichte auf der gesamten Fläche des Höhenlevels von 1 km gemessen und mit Hilfe der Streumatrizen die KRSV berechnet.

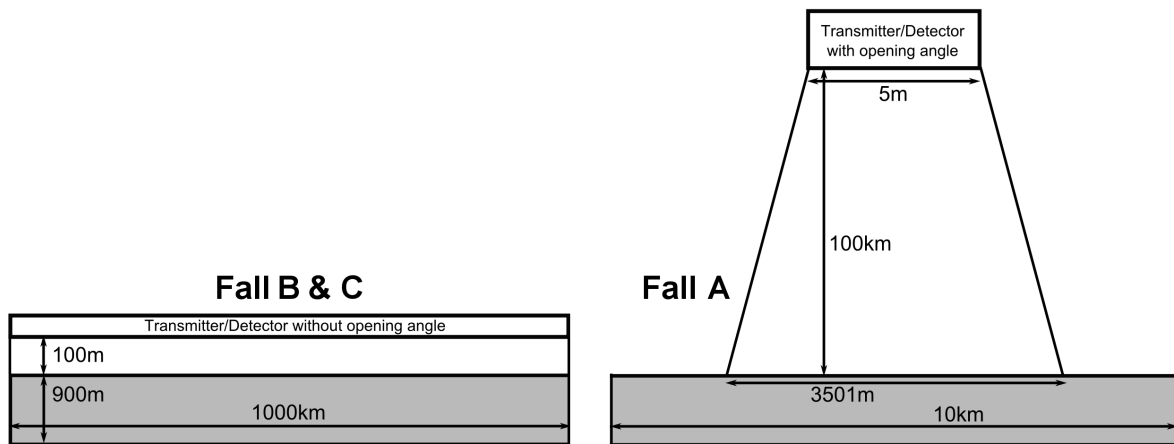


Abbildung 4.1: Konfiguration für die MYSTIC-Simulationen für die Fälle B und C (links) und den Fall A (rechts). Die streuende Schicht ist jeweils grau unterlegt und wird von oben betrachtet.

Da ζ^A der Fall mit nicht-mittelndem Empfänger ist, bei dem beachtet werden muss, dass es einen möglichst großen Überlappbereich der Öffnungswinkelkegel gibt, musste hier eine deutlich veränderte Konfiguration angewendet werden. Der Radius der Sender/Empfängerfläche wurde auf 5 m reduziert, der volle Öffnungswinkel auf 1° gesetzt und die Entfernung zur streuenden Schicht auf 100 km erhöht. Dadurch konnte ein KRSV-Anteil von 99.8% aller Mehrfachstreuewege erreicht werden (Vergl. Abb. 3.12). Die Größe der Box wurde auf eine Seitenlänge von 10 km reduziert, da der Durchmesser des Foot-

prints des Senders an der Oberfläche der streuenden Schicht bei 3501 m liegt (siehe Abb. 4.1 rechts).

Diese Datenreihe ist für die Validierung von untergeordneter Bedeutung, da ihre Konfiguration zu Weglängendifferenzen ungleich Null führt, wodurch sie von vornherein von den Referenzwerten abweicht. Sie dient daher in erster Linie zur Demonstration, welchen Effekt diese Konfiguration im Vergleich zu Simulationen ohne Weglängendifferenzen auf das Ergebnis hat, und wird entsprechend weniger detailliert betrachtet.

In allen Fällen wurden molekulare Strahlungswechselwirkungen vernachlässigt, der Realteil des Brechungsindex wurde auf 1.2 und der Imaginärteil auf 0 gesetzt (siehe Mishchenko [1992]). Das Streumedium ist demnach nicht absorbierend und simulierte Rückstreumaxima erfahren keine Abrundung durch Absorption (siehe Kap. 2.3.4). Der Liquid Water Content (LWC) betrug in allen Rechnungen $0.1 \frac{g}{m^3}$, die verwendeten Größenparameter und die resultierenden optischen Dicken sind in Tab. 4.1 aufgelistet.

Für den Vergleich mit den Referenzwerten ζ^R wurden für die Fälle A-C jeweils zwei Wertreihen gerechnet (siehe u.a. Kap. 3.2.1), einmal mit und einmal ohne KRS. Aus den beiden Ergebnissen wurden dann die KRS-Faktoren durch Quotientenbildung ermittelt.

Für die Lidar-Rechnungen geben die Fehlerbalken die direkt in MYSTIC berechnete einfache Standardabweichung an. Die Standardabweichung der ζ^M -Werte wurde nachträglich aus der Abweichung der Einzelergebnisse vom Mittelwert für jedes a berechnet. Das ist notwendig, da die ζ^M -Werte direkt aus den Streumatrizen ermittelt werden, für welche selbst keine Standardabweichungen gegeben sind.

Die Ermittlung der Standardabweichung bei der Summierung der Matrizen ist ebenfalls nicht möglich, da hier keine ähnlichen Matrizen mit statistischen Abweichungen, von denen erwartet wird, im Idealfall dem Mittelwert zu entsprechen, aufsummiert und gemittelt werden. Stattdessen wird über unterschiedliche Streumatrizen, die alle für sich korrekt sind, gemittelt, und dieser Mittelwert hat eine andere physikalische Bedeutung, als die einzelnen Streumatrizen.

Um den Rechner optimal auszulasten, wurden stets 15 gleiche Simulationen parallel gerechnet. Für ζ^A und ζ^C wurden insgesamt 7.5 Millionen Photonen pro Größenparameter gerechnet, einmal mit KRS, einmal ohne, für ζ^B und ζ^M waren es 6 Millionen Photonen.

4.1.1 Ermittlung der optimalen optischen Dicke für die Validierung

Um einem unendlichem Halbraum nahe zu kommen, müssen die optischen Dicken des Mediums groß genug sein. Allerdings kann die optische Dicke nicht einfach beliebig erhöht werden, denn einerseits muss zwar die Mehrfachstreuung gesättigt sein, andererseits sollte die Rechenzeit nicht höher sein als notwendig. Zusätzlich erhöht sich mit zunehmender optischer Dicke die Gefahr sowohl von Rayleigh- (Kap. 3.2.5) als auch von Local-Estimate-Spikes (Kap. 3.1.5).

Zu diesem Zweck wurden sechs Testreihen mit der Matrix-Methode ζ^M durchgeführt, in denen der LWC variiert wurde, so dass die optische Dicken größenordnungsmäßig zwischen 1 und 10^5 lagen. Zwischen den resultierenden ζ^M -Werten und den ζ^R -Werten nach Mishchenko [1992] (Tab. 4.1) wurden die Differenzen gebildet, welche dann über alle Größenparameter und damit alle optischen Dicken der Streuung gemittelt wurden ($\langle \tau \rangle_a$). Abb. 4.2 zeigt das Ergebnis. Die VP-Komponente wurde nicht mit einbezogen, da sie in allen

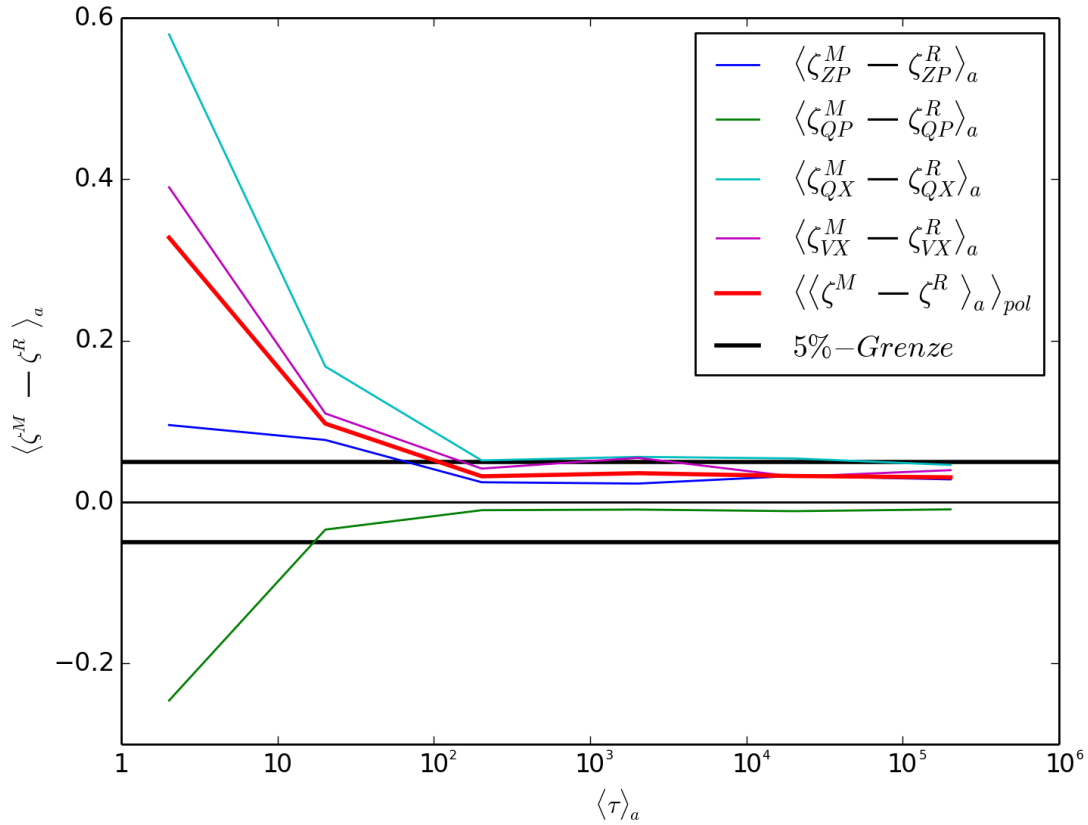


Abbildung 4.2: Gemittelte Differenzen zwischen ζ^M und ζ^R . Ein Datenpunkt der ersten vier Datenreihen entspricht dem Mittelwert der Differenzen gemittelt über alle sechs Größenparameter a für jede der vier Polarisationskomponenten ZP, QP, QX und VX. Die rote Linie stellt dann diese Werte erneut gemittelt über alle Polarisationskomponenten dar, wobei von negativen Werten der Betrag genommen wurde. Die x-Achse ist der dekadische Logarithmus der ebenfalls über alle sechs Größenparameter gemittelten optischen Dicke, die beiden dicken horizontalen schwarzen Linien grenzen den Bereich ein, in dem die Differenzen unter 5 % liegen.

Fällen (d.h. unabhängig von der optischen Dicke und dem Größenparameter) konstant 2 ergibt (siehe Gl. 2.138 und das folgende Kapitel 4.1.3).

Man erkennt, dass der Mittelwert etwas oberhalb von $\langle \tau \rangle_a = 100$ unter eine Marke von 5% fällt und ab dort ungefähr konstant bleibt. Das heißt, Konvergenz der ζ -Werte ist für die Rechnungen, deren optische Dicke zwischen 23.2 für das kleinste a und 368.2 für das größte a liegen, bereits erreicht. Daher wurden alle für den weiter folgenden Vergleich durchgeführten Simulationen mit dieser Reihe an optischen Dicken durchgeführt, welche dem bereits erwähnten LWC von $0.1 \frac{g}{m^3}$ entspricht. Höhere optische Dicken führen laut dieser Graphik zu keiner sichtbaren Verbesserung der Ergebnisse, erhöhen aber den Rechenaufwand zunehmend.

4.1.2 Reduzierung von Spikes

Wie in den Kapiteln 3.1.5 und 3.2.5 beschrieben, können in den Ergebnissen Spikes auftreten. Local-Estimate-Spikes bei Streufunktionen mit starkem Vorwärtspik und bei großen

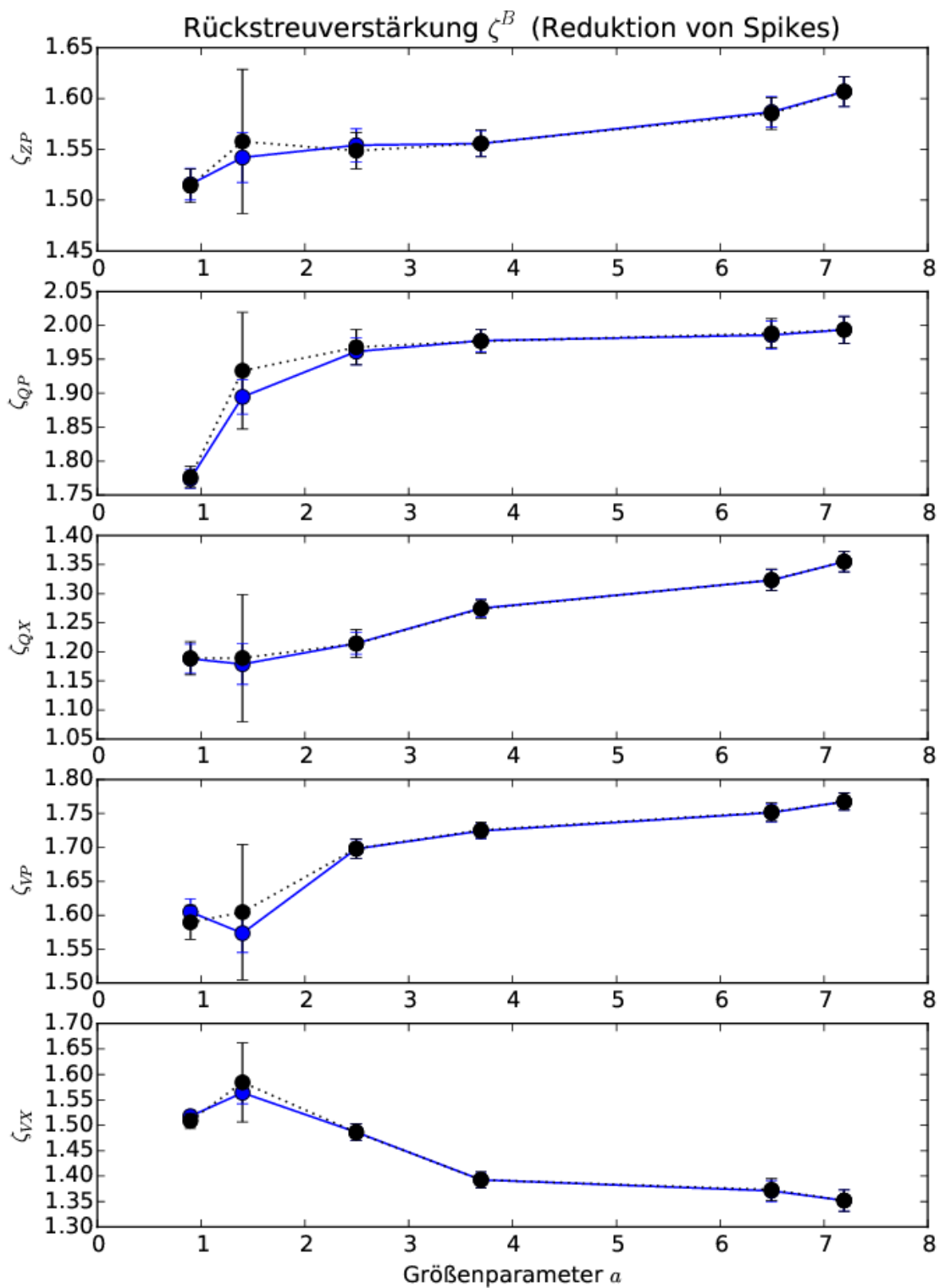


Abbildung 4.3: Datenreihe ζ^B vor der Vernachlässigung von Spikes (schwarz, gestrichelt) und danach (blau, durchgezogen) für alle fünf betrachteten Polarisationskomponenten.

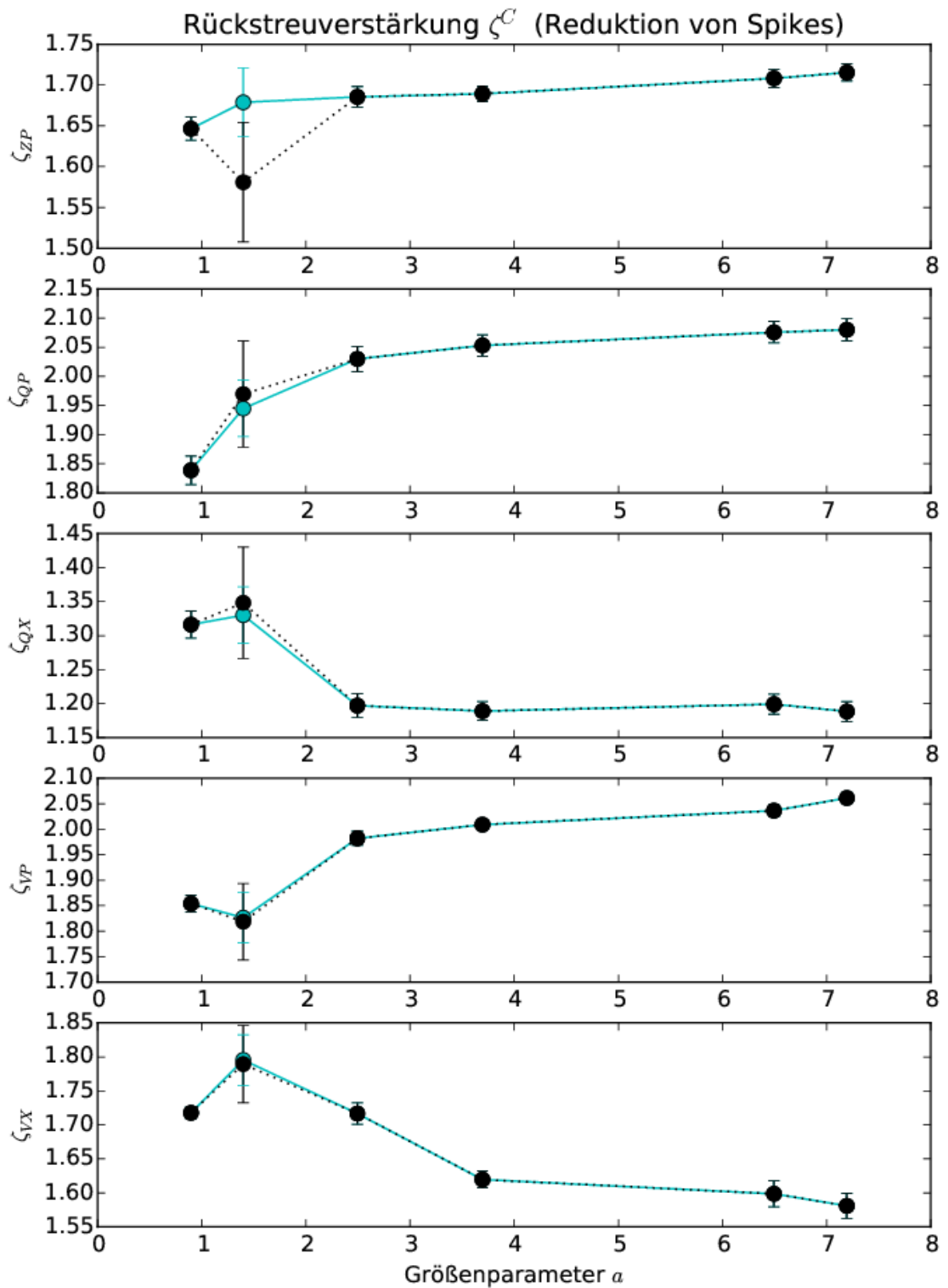


Abbildung 4.4: Datenreihe ζ^C vor der Vernachlässigung von Spikes (schwarz, gestrichelt) und danach (türkis, durchgezogen) für alle fünf betrachteten Polarisationskomponenten.

Größenparametern, und Rayleigh-Spikes bei hohen optischen Dicken und kleinen Größenparametern. Spikes sind unerwünscht und daher wurden die Ergebnisse dieser Rechnungen gefiltert. In die finalen Datenreihen der Lidar-Rechnungen wurden nur ζ -Werte übernommen, deren Standardabweichung den Wert 0.03 nicht übersteigt. Das führt dazu, dass in der Regel weniger Photonen zu den betrachteten Datenpunkten beitragen, als oben angegeben. Da solche ein Vorgehensweise im Grunde einen physikalisch korrekten Teil des Ergebnisses ausschließt, müssen zunächst die Auswirkungen dieses Schritts betrachtet werden.

Abb. 4.3 bis 4.4 zeigen die Datenreihen B und C jeweils vor und nach der Vernachlässigung von Einzelergebnissen mit Spikes. Dabei zeigen sich nur für $a = 1.4$ signifikante Abweichungen, ein Ergebnis, das aufgrund der Kombination aus hoher optischer Dicke und kleinem a auf Rayleigh-Spikes hindeutet. Der Rest der Datenpunkte zeigt eine sehr gute Übereinstimmung, weswegen ab hier guten Gewissens die gefilterten Daten betrachtet werden können. Fall A wird im Folgenden gesondert betrachtet. Die Ergebnisse für ζ^M brauchen keine Filterung, da ihre Ergebnisse aufgrund der Rechenmethode nicht im selben Maße durch Spikes beeinträchtigt werden.

4.1.3 Ergebnisse

Die Abbildungen 4.5, 4.7 und 4.9 zeigen die Ergebnisse der gefilterten Datenreihen ζ^M , ζ^B und ζ^C im Vergleich zu den Referenzwerten ζ^R nach Mishchenko [1992]. Die Abbildungen 4.6, 4.8 und 4.10 zeigen die Differenzen zwischen den gefilterten Datenreihen und den Referenzwerten für diese Fälle. Abbildung 4.11 zeigt die Werte der schräglinearen Polarisationskomponente \mathbf{U} , für die keine Referenzwerte zur Verfügung stehen. Abb. 4.12 zeigt die Ergebnisse ζ^A für den Fall A.

Ergebnisse ζ^M

| a | 0.9 | 1.4 | 2.5 | 3.7 | 6.5 | 7.2 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ζ_{ZP}^M | 1.58 | 1.61 | 1.61 | 1.63 | 1.65 | 1.66 |
| σ | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.005 | 0.006 | 0.005 |
| ζ_{QP}^M | 1.79 | 1.90 | 1.97 | 1.98 | 1.99 | 2.00 |
| σ | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| ζ_{QX}^M | 1.15 | 1.15 | 1.20 | 1.24 | 1.29 | 1.30 |
| σ | 0.011 | 0.008 | 0.008 | 0.010 | 0.012 | 0.010 |
| ζ_{VP}^M | 2.00 | 2.00 | 2.00 | 2.00 | 2.00 | 2.00 |
| σ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| ζ_{VX}^M | 1.32 | 1.32 | 1.14 | 1.10 | 1.09 | 1.07 |
| σ | 0.010 | 0.010 | 0.009 | 0.012 | 0.013 | 0.010 |

Tabelle 4.2: Werte ζ^M und deren Standardabweichungen.

Abb. 4.5 zeigt das Ergebnis der Rechnungen mit der Matrix-Methode nach Mishchenko, Tab. 4.2 enthält die Werte ζ^M , Abb. 4.6 zeigt die Differenzen der Kurven von den Referenzwerten und Tab. 4.3 enthält die dazugehörigen Werte. Die VP-Komponente weist exakte Übereinstimmung auf, wie in der Theorie vorher gesagt. Wie in Kap. 3.2.2 beschrieben, wurden in MYSTIC allgemeingültige Formeln implementiert, d.h. der konstante Wert 2

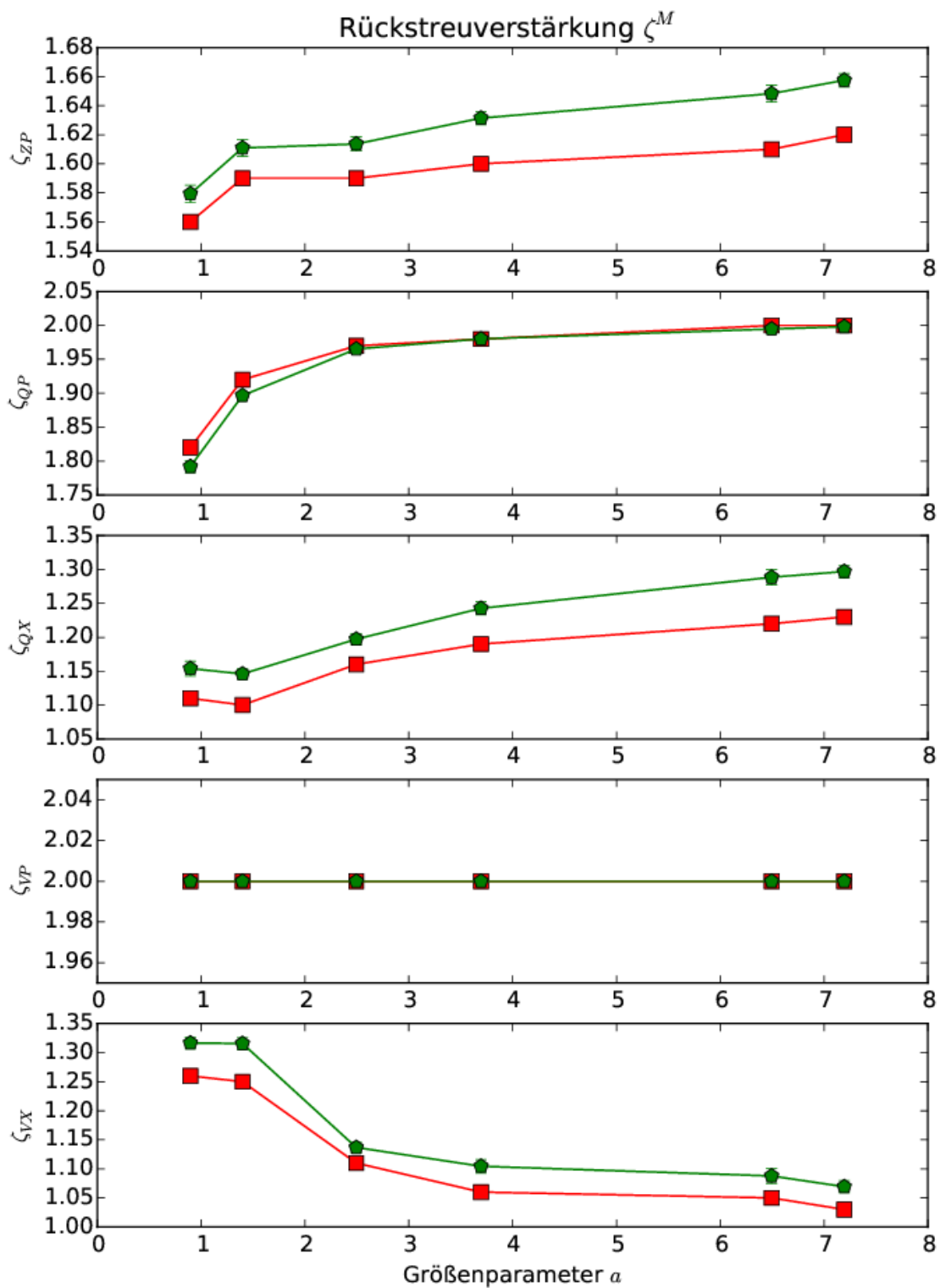


Abbildung 4.5: Gefilterte Datenreihe ζ^M (grün) im Vergleich mit ζ^R (rot) für alle fünf betrachteten Polarisationskomponenten.

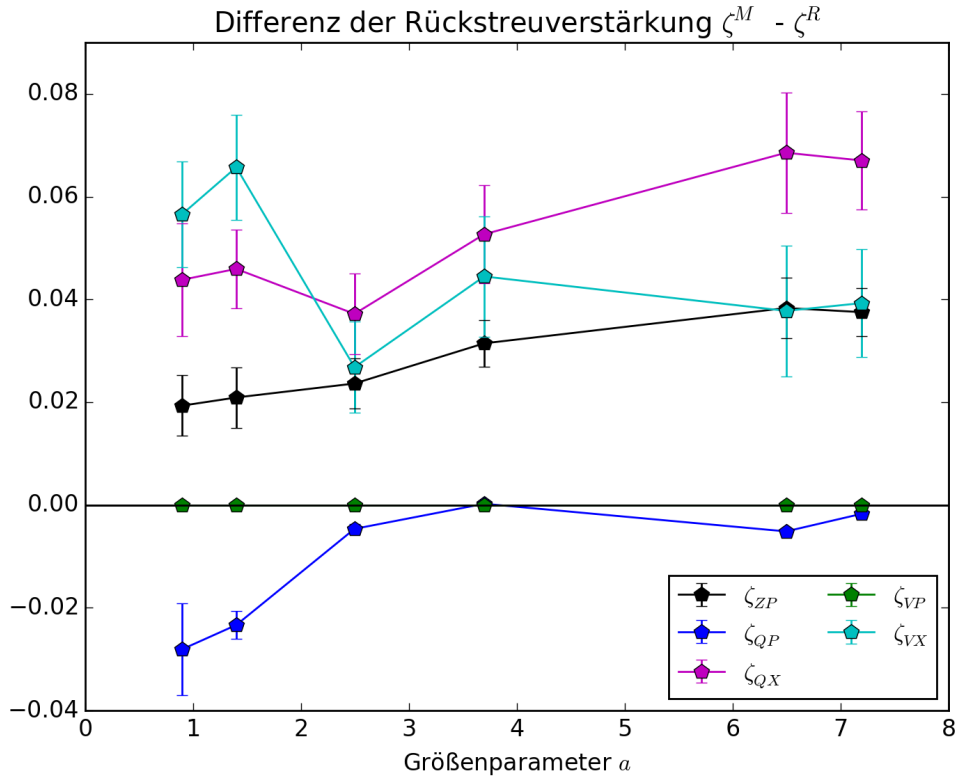


Abbildung 4.6: Differenzen zwischen den gefilterten Datenreihen ζ^M und den Referenzwerten ζ^R für alle fünf betrachteten Polarisationskomponenten.

| a | 0.9 | 1.4 | 2.5 | 3.7 | 6.5 | 7.2 |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\zeta_{ZP}^M - \zeta_{ZP}^R$ | 0.02 | 0.02 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.04 |
| σ | 0.006 | 0.006 | 0.005 | 0.005 | 0.006 | 0.005 |
| $\zeta_{QP}^M - \zeta_{QP}^R$ | -0.03 | -0.02 | -0.00 | 0.00 | -0.01 | -0.00 |
| σ | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| $\zeta_{QX}^M - \zeta_{QX}^R$ | 0.04 | 0.05 | 0.04 | 0.05 | 0.07 | 0.07 |
| σ | 0.011 | 0.008 | 0.008 | 0.010 | 0.012 | 0.010 |
| $\zeta_{VP}^M - \zeta_{VP}^R$ | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| σ | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| $\zeta_{VX}^M - \zeta_{VX}^R$ | 0.06 | 0.07 | 0.03 | 0.04 | 0.04 | 0.04 |
| σ | 0.010 | 0.010 | 0.009 | 0.012 | 0.013 | 0.010 |

Tabelle 4.3: Differenzen $\zeta^M - \zeta^R$ und deren Standardabweichungen.

wird in MYSTIC explizit aus den gemittelten Streumatrixelementen berechnet. Dieses Ergebnis beweist, dass der Ansatz, die Reflexionsmatrixelemente des Mediums aus den einzelnen Streumatrizen zu ermitteln, korrekt funktioniert.

Nach VP zeigt vor allem die QP-Komponente eine sehr gute Übereinstimmung, die nur bei den kleinsten Größenparametern um bis zu -0.03 abweicht. Die ZP-Komponente weicht um 0.02 bis 0.04 ab, wobei die Differenz mit zunehmenden Größenparametern stetig anwächst. Größere Abweichungen finden sich bei den gekreuzten Komponenten.

Die einzelnen Datenpunkt zeigen höhere Standardabweichungen und die Differenzkurven sind ungleichmäßiger. Insgesamt bleiben die Fehler aber größtenteils unterhalb von 5 %.

Ergebnisse ζ^B

| a | 0.9 | 1.4 | 2.5 | 3.7 | 6.5 | 7.2 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ζ_{ZP}^B | 1.52 | 1.54 | 1.55 | 1.56 | 1.59 | 1.61 |
| σ | 0.016 | 0.024 | 0.016 | 0.013 | 0.015 | 0.015 |
| ζ_{QP}^B | 1.77 | 1.89 | 1.96 | 1.98 | 1.99 | 1.99 |
| σ | 0.014 | 0.026 | 0.020 | 0.017 | 0.021 | 0.020 |
| ζ_{QX}^B | 1.19 | 1.18 | 1.21 | 1.27 | 1.32 | 1.36 |
| σ | 0.026 | 0.035 | 0.018 | 0.015 | 0.018 | 0.017 |
| ζ_{VP}^B | 1.60 | 1.57 | 1.70 | 1.72 | 1.75 | 1.77 |
| σ | 0.019 | 0.029 | 0.014 | 0.011 | 0.013 | 0.013 |
| ζ_{VX}^B | 1.52 | 1.56 | 1.49 | 1.39 | 1.37 | 1.35 |
| σ | 0.011 | 0.022 | 0.016 | 0.015 | 0.021 | 0.021 |

Tabelle 4.4: Werte ζ^B und deren Standardabweichungen.

| a | 0.9 | 1.4 | 2.5 | 3.7 | 6.5 | 7.2 |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\zeta_{ZP}^B - \zeta_{ZP}^R$ | -0.04 | -0.05 | -0.04 | -0.04 | -0.02 | -0.01 |
| σ | 0.016 | 0.024 | 0.016 | 0.013 | 0.015 | 0.015 |
| $\zeta_{QP}^B - \zeta_{QP}^R$ | -0.05 | -0.03 | -0.01 | -0.00 | -0.01 | -0.01 |
| σ | 0.014 | 0.026 | 0.020 | 0.017 | 0.021 | 0.020 |
| $\zeta_{QX}^B - \zeta_{QX}^R$ | 0.08 | 0.08 | 0.05 | 0.08 | 0.10 | 0.13 |
| σ | 0.026 | 0.035 | 0.018 | 0.015 | 0.018 | 0.017 |
| $\zeta_{VP}^B - \zeta_{VP}^R$ | -0.40 | -0.43 | -0.30 | -0.28 | -0.25 | -0.23 |
| σ | 0.019 | 0.029 | 0.014 | 0.011 | 0.013 | 0.013 |
| $\zeta_{VX}^B - \zeta_{VX}^R$ | 0.26 | 0.31 | 0.38 | 0.33 | 0.32 | 0.32 |
| σ | 0.011 | 0.022 | 0.016 | 0.015 | 0.021 | 0.021 |

Tabelle 4.5: Differenzen $\zeta^B - \zeta^R$ und deren Standardabweichungen.

Abb. 4.7 zeigt das Ergebnis der Rechnungen mit der Lidar-Methode nach Fall B, Tab. 4.4 enthält die Werte ζ^B , Abb. 4.8 zeigt die Differenzen der Kurven von den Referenzwerten und Tab. 4.5 enthält die dazugehörigen Werte. Diese Konfiguration wurde mit exakt senkrechter Blickrichtung zur Detektorfläche (Öffnungswinkel $\alpha = 0$) und mittelndem Empfänger gerechnet (siehe Abb. 3.8 Fall B).

Die Werte für ζ_{QP}^B weisen eine fast perfekte Übereinstimmung mit ζ_{QP}^R und damit auch mit ζ_{QP}^M auf. Die Werte für ζ_{ZP}^B und ζ_{QX}^B liegen relativ nahe an den Referenzwerten, die Differenzen sind nur leicht größer, als die von ζ_{ZP}^M und ζ_{QX}^M . ζ_{ZP}^B liegt jedoch im Gegensatz zu ζ_{ZP}^M unterhalb von ζ_{ZP}^R statt oberhalb. Die Werte für ζ_{VP}^B und ζ_{VX}^B zeigen dagegen eine starke Abweichung von den Referenzwerten.

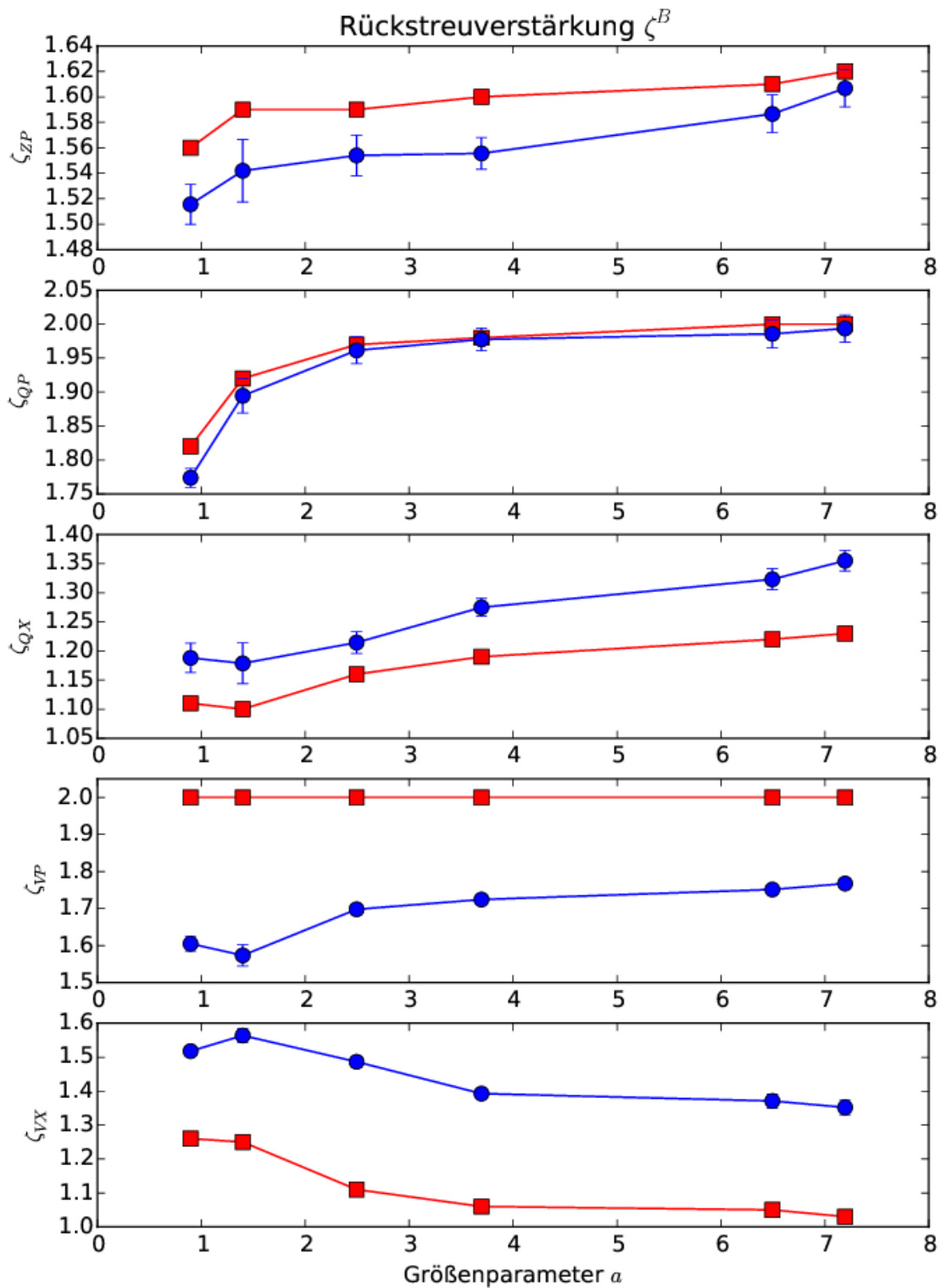


Abbildung 4.7: Gefilterte Datenreihe ζ^B (blau) im Vergleich mit ζ^R (rot) für alle fünf betrachteten Polarisationskomponenten.

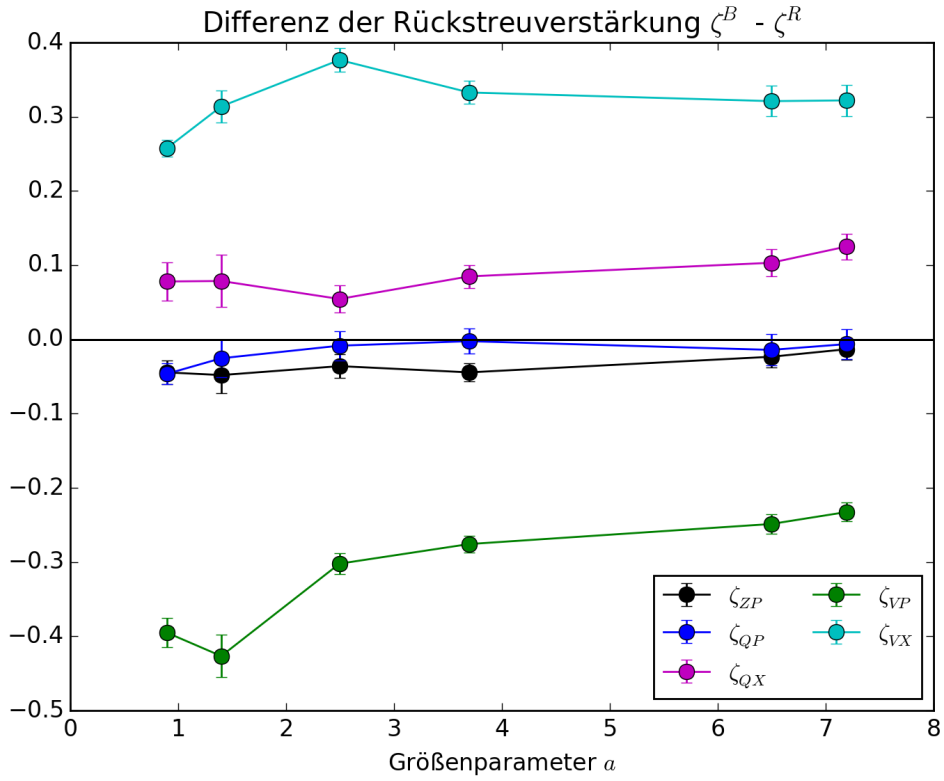


Abbildung 4.8: Differenzen zwischen den gefilterten Datenreihen ζ^B und den Referenzwerten ζ^R für alle fünf betrachteten Polarisationskomponenten.

| a | 0.9 | 1.4 | 2.5 | 3.7 | 6.5 | 7.2 |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ζ_{ZP}^C | 1.65 | 1.68 | 1.69 | 1.69 | 1.71 | 1.72 |
| σ | 0.014 | 0.042 | 0.013 | 0.009 | 0.011 | 0.011 |
| ζ_{QP}^C | 1.84 | 1.94 | 2.03 | 2.05 | 2.08 | 2.08 |
| σ | 0.024 | 0.048 | 0.022 | 0.018 | 0.018 | 0.019 |
| ζ_{QX}^C | 1.32 | 1.33 | 1.20 | 1.19 | 1.20 | 1.19 |
| σ | 0.020 | 0.042 | 0.017 | 0.014 | 0.015 | 0.015 |
| ζ_{VP}^C | 1.85 | 1.83 | 1.98 | 2.01 | 2.04 | 2.06 |
| σ | 0.016 | 0.049 | 0.014 | 0.009 | 0.012 | 0.011 |
| ζ_{VX}^C | 1.72 | 1.80 | 1.72 | 1.62 | 1.60 | 1.58 |
| σ | 0.009 | 0.037 | 0.016 | 0.012 | 0.019 | 0.019 |

Tabelle 4.6: Werte ζ^C und deren Standardabweichungen.

Ergebnisse ζ^C

Abb. 4.9 zeigt das Ergebnis der Rechnungen mit der Lidar-Methode nach Fall C, Tab. 4.6 enthält die Werte ζ^C , Abb. 4.10 zeigt die Differenzen der Kurven von den Referenzwerten und Tab. 4.7 enthält die dazugehörigen Werte. Diese Konfiguration wurde mit endlichem Öffnungswinkel $\alpha = 1^\circ$ und mittelndem Empfänger, d.h. stets exakt gleichen Weglängen, gerechnet (siehe Abb. 3.8 Fall C).

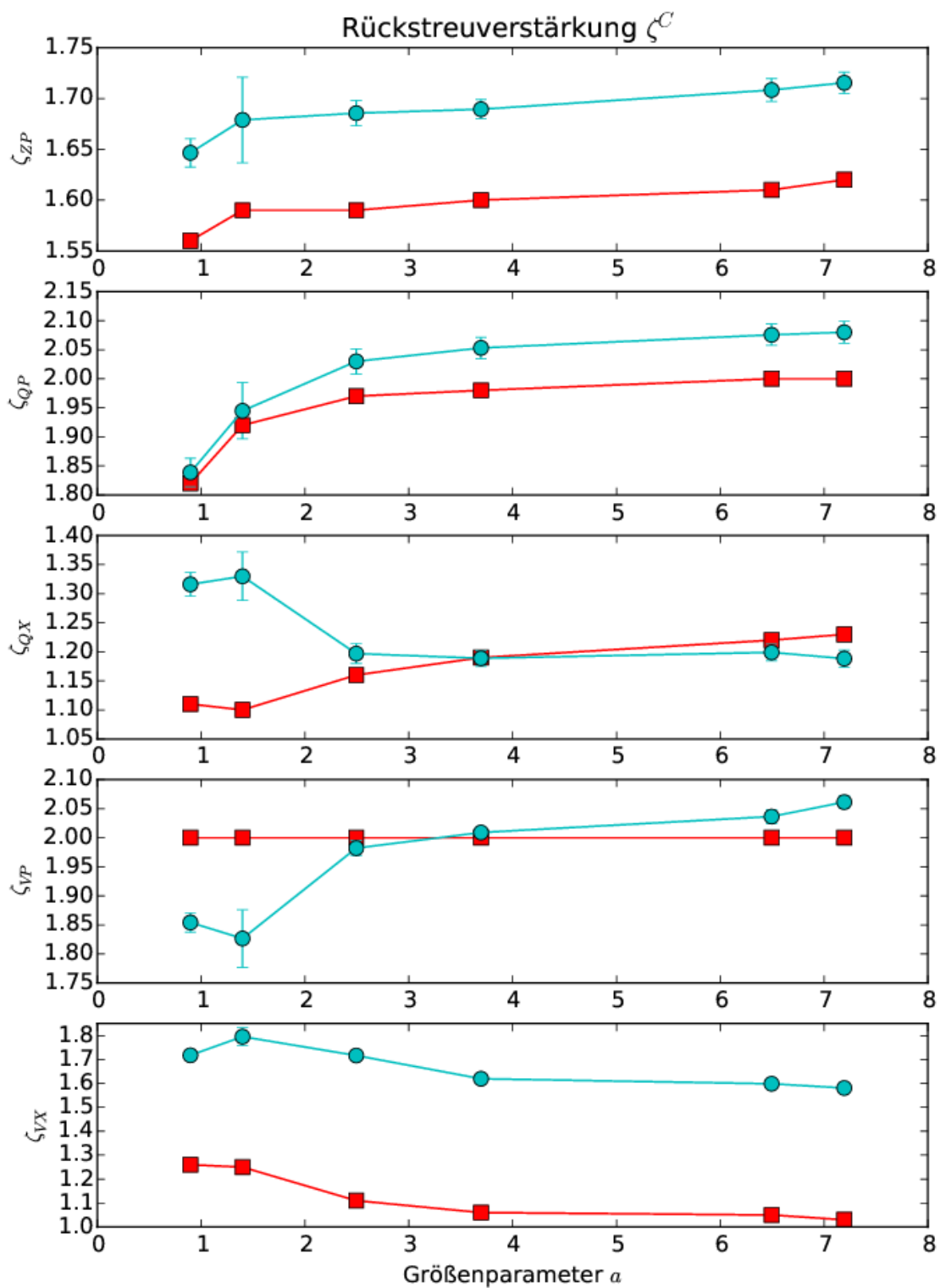


Abbildung 4.9: Gefilterte Datenreihe ζ^C (türkis) im Vergleich mit ζ^R (rot) für alle fünf betrachteten Polarisationskomponenten.

| a | 0.9 | 1.4 | 2.5 | 3.7 | 6.5 | 7.2 |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\zeta_{ZP}^C - \zeta_{ZP}^R$ | 0.09 | 0.09 | 0.10 | 0.09 | 0.10 | 0.10 |
| σ | 0.014 | 0.042 | 0.013 | 0.009 | 0.011 | 0.011 |
| $\zeta_{QP}^C - \zeta_{QP}^R$ | 0.02 | 0.02 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.08 |
| σ | 0.024 | 0.048 | 0.022 | 0.018 | 0.018 | 0.019 |
| $\zeta_{QX}^C - \zeta_{QX}^R$ | 0.21 | 0.23 | 0.04 | -0.00 | -0.02 | -0.04 |
| σ | 0.020 | 0.042 | 0.017 | 0.014 | 0.015 | 0.015 |
| $\zeta_{VP}^C - \zeta_{VP}^R$ | -0.15 | -0.17 | -0.02 | 0.01 | 0.04 | 0.06 |
| σ | 0.016 | 0.049 | 0.014 | 0.009 | 0.012 | 0.011 |
| $\zeta_{VX}^C - \zeta_{VX}^R$ | 0.46 | 0.55 | 0.61 | 0.56 | 0.55 | 0.55 |
| σ | 0.009 | 0.037 | 0.016 | 0.012 | 0.019 | 0.019 |

Tabelle 4.7: Differenzen $\zeta^C - \zeta^R$ und deren Standardabweichungen.

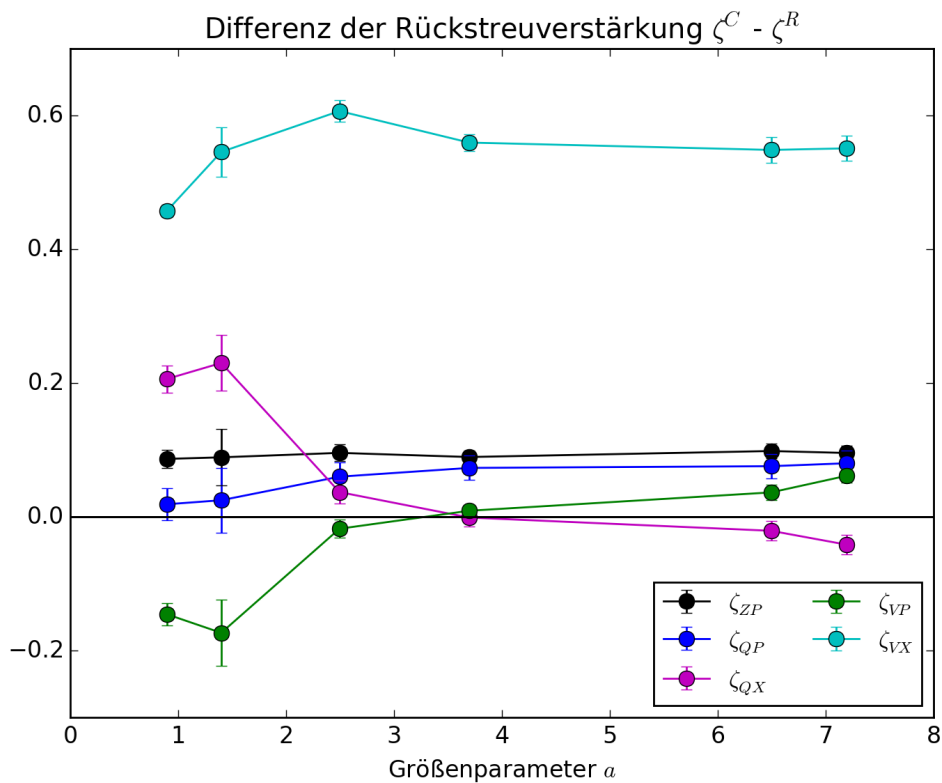


Abbildung 4.10: Differenzen zwischen den gefilterten Datenreihen ζ^C und den Referenzwerten ζ^R für alle fünf betrachteten Polarisationskomponenten.

Die ζ^C -Werte überschätzen in den meisten Fällen die Referenzwerte deutlich. Obwohl der theoretisch maximal mögliche KRSV-Faktor gleich 2 beträgt, wird dieser sowohl von ζ_{QP}^C , als auch von ζ_{VP}^C überschritten, daher muss hier von einem Fehler ausgegangen werden. Der Verlauf von ζ_{QX}^C ist ungewöhnlich, die unteren beiden Werte sind zu groß, die restlichen Werte dagegen sind sehr nahe an ζ_{QX}^R , aber mit einem Verlauf, welcher vertikal gespiegelt wirkt.

Natürlich gibt es auch individuelle Unterschiede in den einzelnen Kurven. ζ_{VP}^C liegt zwar zum Teil sehr nahe an ζ_{VP}^R , aber die Kurve zeigt im wesentlichen den gleichen Verlauf wie

ζ_{VP}^B . Gleichzeitig zeigt ζ_{VX}^C die größte Abweichung von allen, während ihr Verlauf ebenfalls dem von ζ_{VX}^B stark ähnelt. Ein weiterer Hinweis darauf, dass in der Lidar-Methode eine Abweichung entsteht, welche sich speziell auf die zirkuläre Polarisationskomponente auswirkt.

Die Ergebnisse ζ_{UP} und ζ_{UX}

Abb. 4.11 zeigt die Ergebnisse für die schräglinearen Polarisationskomponenten. Aufgrund fehlender Referenzwerte werden diese weniger ausführlich behandelt. Es kann davon ausgegangen werden, dass die ζ^M -Werte hier den Referenzwerten am nächsten kommen, und so werden die Lidar-Ergebnisse im Vergleich zu diesen betrachtet. Die ζ^B -Ergebnisse zeigen gute Ähnlichkeiten in den Verläufen, aber auch wesentliche systematische Abweichungen, im Fall ζ_{UP}^B eine Überschätzung, im Fall ζ_{UX}^B eine Unterschätzung der Ergebnisse. Das gleiche Muster zeigt sich für ζ^C , allerdings mit wesentlich größeren Abweichungen. Der in der Lidar-Methode vermutete Fehler wirkt sich offenbar auf die schräglineare Polarisation ebenso stark aus, wie auf die zirkuläre.

Ergebnisse ζ^A

Abb. 4.12 zeigt die Ergebnisse der Rechnungen mit der Lidar-Methode nach Fall A, vor der Reduzierung von Spikes (oben) und danach (unten). Die Werte wurden nach Fall A mit Öffnungswinkel $\alpha = 1^\circ$ und mit einem nicht-mittelnden Empfänger ermittelt, das heißt es wurde bei jedem Local Estimate getestet, ob eine Interferenz auch wirklich sichtbar ist (siehe Kap. 3.2.5). Die Konfiguration wurde so gewählt, dass nach theoretischer Abschätzung etwa 99.8% aller Local Estimates eine sichtbare Interferenz erzeugen.

Das Ergebnis zeigt, dass die KRSV fast vollständig verschwindet. Nach Reduktion der Spikes, welche hier auch für andere Größenparameter als $a = 1.4$ auftreten, finden sich die meisten Mittelwerte zwischen 1.00 und 1.03, vier Werte liegen unterhalb von 1.00. Die Werte der zirkulären Polarisationskomponenten liegen in der Mehrzahl unterhalb der anderen drei Kurven. Die einfache Standardabweichung kreuzt in allen Fällen den 1.00-Wert. Aufgrund dieser großen Unsicherheiten weisen die Kurven auch keine Ähnlichkeiten mit den ζ^R -Referenzwerten auf.

In der getesteten Konfiguration sind die Weglängendifferenzen zwischen den Hin- und Rückwegen so breit verteilt, dass sich die KRSV fast komplett heraus mittelt. Der Verlauf des schwachen übrig gebliebenen Signals ist durch die Standardabweichungen der Ergebnisse unsicher, daher lässt eine genauere Analyse der Werte keine belastbaren Aussagen zu.

Ergebnisse Allgemein

Tab. 4.8 zeigt die über die Größenparameter a gemittelten Beträge der Differenzen und die Standardabweichungen dieser Mittelung. Letztere verdeutlichen, wie stark die einzelnen Differenzen vom Mittelwert abweichen und sind damit ein Maß dafür, ob sich zwei Kurven im Verlauf ähnlich (die Differenzwerte variieren nur wenig) oder unähnlich (starke Varianz der Differenzwerte) sind. Voneinander abweichende Kurven, deren Verlauf sehr ähnlich ist, unterliegen mit hoher Wahrscheinlichkeit nur systematischen Fehlern, die unabhängig vom Größenparameter sind. Kurven die eine hohe Unähnlichkeit aufweisen sind wahrscheinlich auch von Fehlern betroffen, welche mit dem Größenparameter variieren.

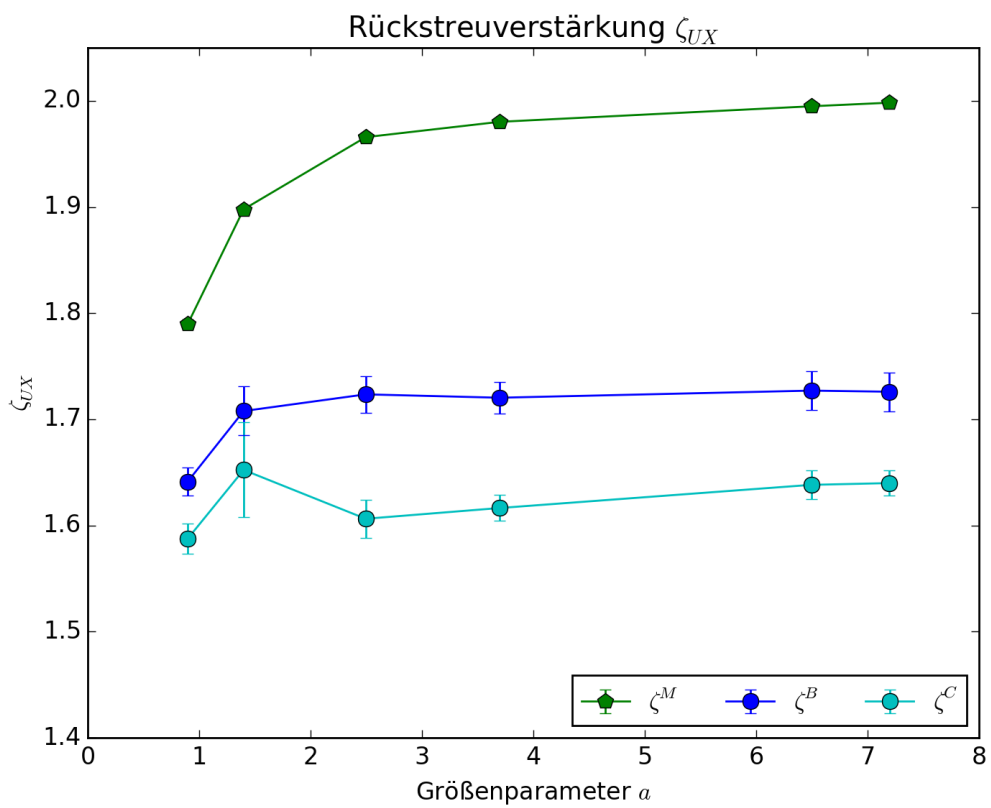
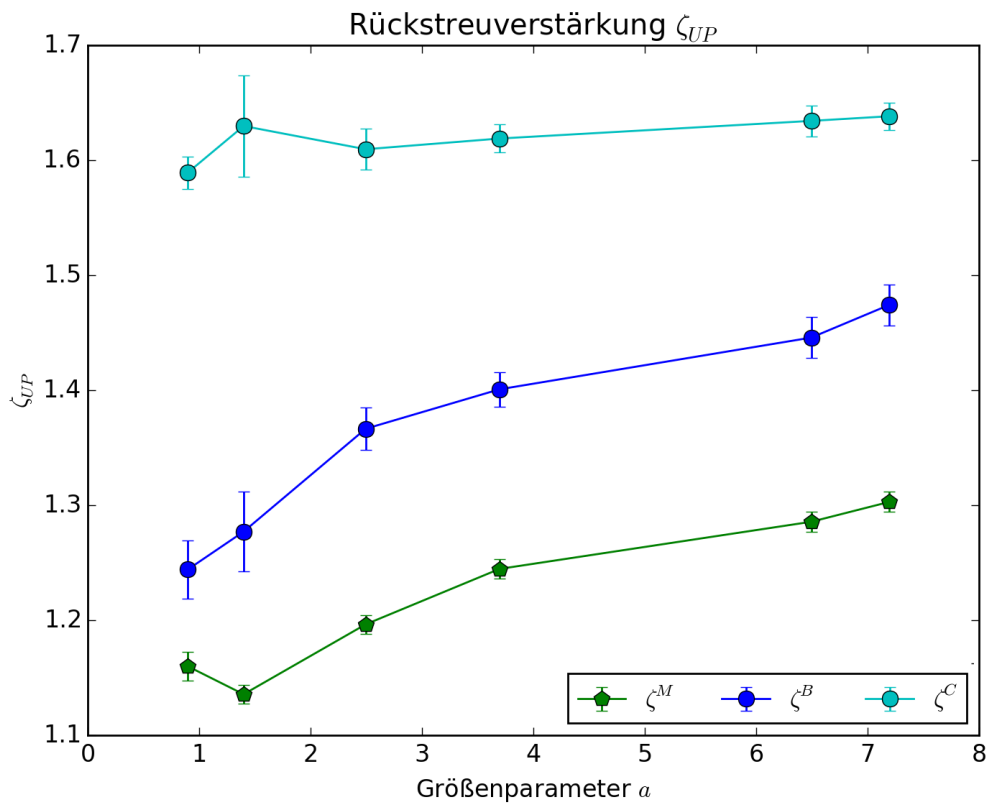


Abbildung 4.11: Oben: Die drei Wertreihen ζ_{UP} . Unten: Die drei Wertreihen ζ_{UX} .

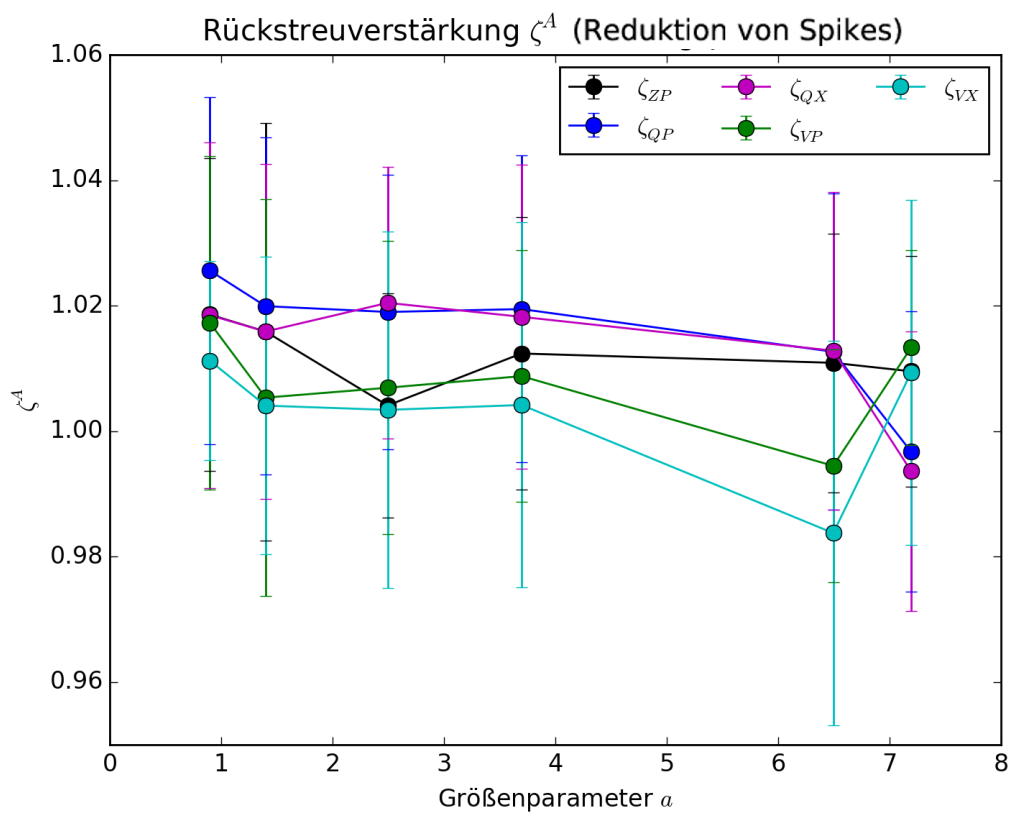
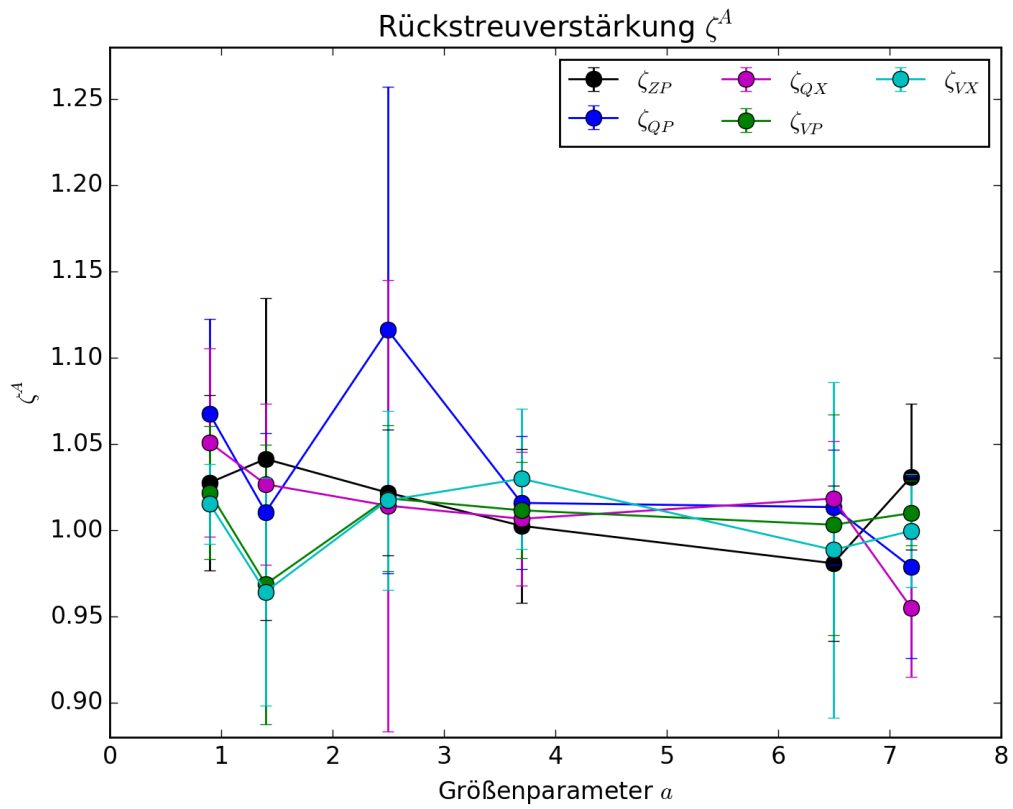


Abbildung 4.12: Die fünf Datenreihen ζ^A vor (oben) und nach Spike-Reduktion (unten).

| Pol. | $\langle \zeta^M - \zeta^R \rangle_a$ | $\langle \zeta^B - \zeta^R \rangle_a$ | $\langle \zeta^C - \zeta^R \rangle_a$ |
|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <i>ZP</i> | 0.03 ± 0.008 | -0.03 ± 0.013 | 0.09 ± 0.004 |
| <i>QP</i> | -0.01 ± 0.011 | -0.02 ± 0.015 | 0.06 ± 0.025 |
| <i>QX</i> | 0.05 ± 0.012 | 0.09 ± 0.022 | 0.07 ± <i>0.109</i> |
| <i>VP</i> | 0.00 ± 0.000 | <i>-0.31 ± 0.073</i> | -0.04 ± 0.089 |
| <i>VX</i> | 0.05 ± 0.013 | <i>0.32 ± 0.035</i> | <i>0.54 ± 0.044</i> |
| $\langle \dots \rangle_{Pol}$ | 0.03 ± 0.009 | 0.15 ± 0.032 | 0.16 ± <i>0.054</i> |

Tabelle 4.8: Über die Größenparameter a gemittelte Differenzbeträge und die Standardabweichungen dieser Mittelung, in der letzten Zeile steht der Mittelwert über die Beträge aller Polarisationskomponenten. Differenzbeträge ≤ 0.05 und Standardabweichungen ≤ 0.025 sind fett gedruckt, Differenzbeträge > 0.25 und Standardabweichungen > 0.05 sind kursiv.

Die Tabelle zeigt auf, dass die Matrizen-Methode nach Mishchenko (ζ^M) mit Abstand das beste Ergebnis liefert, und dies konsistent für alle betrachteten Polarisationskomponenten. Die mittlere Abweichung überschreitet 0.05 nicht, was in Anbetracht der typischen ζ^M -Werte einem Fehler von weniger als 5% entspricht (konsistent mit den Ergebnissen in Abb. 4.2), und die Kurven weisen allesamt eine hohe Ähnlichkeit auf. Das Bild, das die beiden Lidar-Methoden vermitteln ist komplexer.

Zunächst weisen die zirkulären und schräglinearen Polarisationskomponenten fast alle große Abweichungen und große Unähnlichkeiten auf, lediglich die mittlere Abweichung von ζ_{VP}^C ist gering. Für die übrigen Polarisierungen liefert ζ^B das beste Ergebnis, die Ergebnisse von ζ_{ZP}^C und ζ_{QP}^C sind ebenfalls befriedigend. ζ_{QX}^C zeigt dagegen eine besonders geringe Ähnlichkeit der Kurven.

In der untersten Zeile von Tab. 4.8 ist die Mittelung über alle Polarisationskomponenten angegeben, als Benchmark für die Güte jeder Methode. Wie erwartet schneidet ζ^M mit Abstand am besten ab. Von den beiden Lidar-Methoden ist ζ^B die bessere, trotz der Probleme in der zirkulären Polarisation. ζ^C weist in vier der fünf Komponenten eher geringe Abweichungen auf, in der fünften Komponente aber auch die höchste Abweichung von allen, auch sind fast alle Abweichungen positiv und übertreffen teilweise den theoretisch erlaubten Maximalwert. Problematisch sind insgesamt vor allem die Unähnlichkeiten in der zirkulären und schräglinearen Polarisation, sowie in ζ_{QX}^C .

Trennung der Polarisationskomponenten

Zur weiteren Analyse können die ζ -Werte der einzelnen SV-Komponenten aufgeschlüsselt werden, indem I und die jeweilige Polarisationskomponente getrennt werden. Als Beispiel wird diese Prozedur mit I und V genau beschrieben. ζ_{VP} ist gegeben durch:

$$\zeta_{VP} = \frac{I_K + V_K}{I_d + V_d} \quad (4.1)$$

Die Zähler dieser Gleichung können aufgespalten werden, wobei die diffuse Strahlung im Nenner als Normierungsfaktor betrachtet wird, d.h. der KRSV-Faktor wird als Summe zweier normierter Polarisationskomponenten betrachtet. Die Referenzwerte werden

ebenfalls als Quotienten interpretiert, deren diffuse Komponenten im Nenner gleich den berechneten sind.

$$\zeta_{VP} = \frac{I + V}{I_d + V_d} = \frac{I}{I_d + V_d} + \frac{V}{I_d + V_d} = I_n + V_n \quad (4.2)$$

Das Subskript n kennzeichnet diese Normierung durch die jeweilige diffuse Polarisationskomponente.

Laut Tab. 4.8 gilt: $\zeta_{VP}^B - \zeta_{VP}^R = -0.31$, Anwendung von Gl. 4.2 führt zu:

$$I_n^B + V_n^B - (I_n^R + V_n^R) = -0.31 \quad (4.3)$$

Dies wird auch für $\zeta_{VX}^B - \zeta_{VX}^R = 0.32$ durchgeführt:

$$\zeta_{VX} = \frac{I - V}{I_d - V_d} = I_n - V_n \quad (4.4)$$

$$I_n^B - V_n^B - (I_n^R - V_n^R) = 0.32 \quad (4.5)$$

Nun werden die Gleichungen 4.2 und 4.4 je einmal voneinander subtrahiert und einmal addiert:

$$I_n^B + V_n^B - (I_n^R + V_n^R) - (I_n^B - V_n^B - (I_n^R - V_n^R)) = 2(V_n^B - V_n^R) = -0.63 \quad (4.6)$$

$$I_n^B + V_n^B - (I_n^R + V_n^R) + (I_n^B - V_n^B - (I_n^R - V_n^R)) = 2(I_n^B - I_n^R) = 0.01 \quad (4.7)$$

Es folgt (Rundung auf zwei Nachkommastellen):

$$V_n^B - V_n^R = -0.32 \quad (4.8)$$

$$I_n^B - I_n^R = 0.01 \quad (4.9)$$

Diese Prozedur wurde für alle über a gemittelten Werte der ζ -Differenzen aus Tab. 4.8 durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Tab. 4.9 zu sehen.

| X = | M | B | C |
|-----------------------|--------------|--------------|--------------|
| ΔI_{ZP}^{X-R} | 0.03 | -0.03 | 0.09 |
| ΔI_Q^{X-R} | 0.02 | 0.04 | 0.07 |
| ΔQ^{X-R} | -0.03 | -0.06 | -0.01 |
| ΔI_V^{X-R} | 0.03 | 0.01 | 0.25 |
| ΔV^{X-R} | -0.03 | -0.32 | -0.29 |
| ΔI_U^{X-M} | X | -0.04 | 0.05 |
| ΔU^{X-M} | X | 0.19 | 0.36 |

Tabelle 4.9: Differenzen zwischen den Polarisationskomponenten für die verwendeten initialen Polarisationszustände. Die Werte wurden mit Hilfe von Tab. 4.8 berechnet.

Diese Untersuchung zeigt, dass im Fall von ζ^M die Strahldichten leicht überschätzt, die Polarisationskomponenten leicht unterschätzt werden. Gut zu erkennen ist die allgemeine Überschätzung aller I-Komponenten im Lidar-Fall C, insbesondere für I_V . Die starke

Unterschätzung der V-Komponente tritt in allen Lidar-Fällen auf. Ebenfalls gibt es eine generelle Unterschätzung der Q-Komponente.

Betrachtet man die U-Komponente, indem man die Differenzen zwischen den Lidar-Komponenten und ζ^M bildet, so ergibt sich auch hier das Bild, dass der größte Teil der Abweichungen durch die U-Komponente entsteht. Die größten Fehler zeigen sich in der U- und V-Komponente der Lidar-Rechnungen, sowie in I_V^{C-R} .

Multiplikation der Streumatrizen

Fehler, die auf alle Methoden gleichermaßen wirken können, sind Fehler in den Streudaten und im Kern-Programmcode von MYSTIC, welche außerhalb der KRSV- und Lidar-Algorithmen liegen. Diese Code-Bereiche sind am besten validiert und haben sich vielfach bewährt, jedoch werden im Rahmen des atmosphärischen Strahlungstransportes selten derart hohe optische Dicken in Kombination mit polarisierter Strahlung gerechnet. Kleine numerische Abweichungen in den Streudaten können sich über lange Streuwege potenzieren und spürbar werden.

Wie bereits erläutert weisen die Streumatrizen der einzelnen Streuungen Ungenauigkeiten in den Komponenten, die für die U- und die V-Polarisation verantwortlich sind, auf (siehe Kap. 3.2.4). Bei jeder Multiplikation zweier Streumatrizen kommt es zu Drehungen im Koordinatensystem, was zu Umwandlungen von Polarisationskomponenten ineinander führt. Die Ungenauigkeiten der U- und V-Komponenten können dadurch auf die I- und Q-Komponenten übergreifen.

Die Multiplikationen selbst funktionieren dabei akkurat: Für den Fall exakt gleicher Photonewege erfüllt die Streumatrix des Rückwegs M_{RW} folgende Beziehung zur Streumatrix des Vorwärtsweges M_{VW} (siehe Sekera [1966]):

$$M_{RW} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (M_{VW})^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Numerische Ungenauigkeiten bleiben dabei unterhalb der Grenzen einfacher Präzision, sie liegen größenordnungsmäßig i.d.R. zwischen 10^{-8} und 10^{-12} . Dies zeigt, dass die Fehler nicht durch die Multiplikationen selbst entstehen, sondern von außen durch fehlerbehaftete Streumatrizen eingebracht werden, da Vor- und Rückweg dieselben Streuwinkel aufweisen und damit dieselben Streumatrizen verwenden.

Analyse der Mishchenko-Formeln

Die Abweichungen der Werte der Mishchenko-Matrix-Methode sind allgemein gering. Die Werte für ζ_{ZP}^M , ζ_{QX}^M und ζ_{VX}^M werden allesamt leicht überschätzt, ζ_{QP}^M zeigt nur eine Abweichung für die untersten beiden Größenparameter. Bei Betrachtung der U-Komponenten (Abb. 4.11) fällt sofort auf, dass sich ζ_{UP}^M und ζ_{QX}^M , sowie ζ_{UX}^M und ζ_{QP}^M gleichen. Dies ist nicht verwunderlich, da beide Kurven lineare Polarisationskomponenten darstellen.

An dieser Stelle seien nochmal sämtliche Formeln für reine initiale Stokes-Vektoren von ζ^M aufgelistet (Gl 2.133 bis 2.139). Sie lassen sich direkt aus den Formeln aus Kapitel 3.2.2 ableiten.

$$\zeta_{QP}^M = \frac{2R_{11}^1 + 2R_{11}^M + 4R_{12}^M + 2R_{22}^M}{2R_{11}^1 + R_{11}^M + 2R_{12}^M + R_{22}^M} \quad (4.11)$$

$$\zeta_{QX}^M = \frac{R_{11}^M - R_{22}^M - R_{33}^M + R_{44}^M}{R_{11}^M - R_{22}^M} \quad (4.12)$$

$$\zeta_{UP} = \frac{R_{11}^M + R_{22}^M + R_{33}^M + R_{44}^M}{R_{11}^M + R_{33}^M} \quad (4.13)$$

$$\zeta_{UX} = \frac{2R_{11}^1 + 2R_{11}^M - 2R_{33}^M}{2R_{11}^1 + R_{11}^M - R_{33}^M} \quad (4.14)$$

$$\zeta_{VP}^M = 2 \quad (4.15)$$

$$\zeta_{VX}^M = \frac{2R_{11}^1 + R_{11}^M + R_{22}^M - R_{33}^M - R_{44}^M}{2R_{11}^1 + R_{11}^M - R_{44}^M} \quad (4.16)$$

Für zufällige Polarisation gibt es offensichtlich keine Verkürzung, aber im Mittel ist das Ergebnis das gleiche, wie für unpolarisierte Strahlung:

$$\zeta_{ZP}^M = \frac{R_{11}^1 + R_{11}^M + \frac{1}{2}(R_{11}^M + R_{22}^M - R_{33}^M + R_{44}^M)}{R_{11}^1 + R_{11}^M} \quad (4.17)$$

Eine Analyse dieser Formeln zeigt, dass Gl. 4.11, die Formel für den QP-Fall, als einzige nicht mindestens eines der Elemente R_{33}^M und R_{44}^M , gleichzeitig auch als einzige das Element R_{12}^M enthält. Dies führt zusammen mit den in Kap. 3.2.4 gezeigte Ungenauigkeiten der Streueigenschaften zu der Annahme, dass die bei allen anderen ζ^M -Kurven ausgeprägten systematischen Abweichungen durch eben diese Elemente R_{33}^M und R_{44}^M ausgelöst werden, welche, wie beschrieben, aufgrund der Streueigenschaften selbst von numerischen Abweichungen betroffen sind. Die Formeln für die drei problematischen Polarisationskomponenten ζ_{ZP} , ζ_{QX} und ζ_{VX} enthalten alle die vier Elemente der Hauptdiagonale der Reflexionsmatrix. Das R_{12}^M -Element hingegen sollte einwandfrei sein, da die lineare Polarisation in den Streudaten keine Ungenauigkeiten aufweist.

Betrachtung von ζ^B und ζ^C

Zunächst wird die für die Berechnung der Lidar-KRSV verwendete Formel 2.146 wiederholt, der Term $\delta_{1\phi} - \delta_{2\phi}$ wurde gleich 0 gesetzt:

$$\mathbf{I}_k = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\theta} \cos(\Delta\epsilon + \Delta\delta_1 - \Delta\delta_2) + \mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\phi} \cos(\Delta\epsilon) \\ \mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\theta} \cos(\Delta\epsilon + \Delta\delta_1 - \Delta\delta_2) - \mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\phi} \cos(\Delta\epsilon) \\ \mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\phi} \cos(\Delta\epsilon + \Delta\delta_1) + \mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\theta} \cos(\Delta\epsilon - \Delta\delta_2) \\ -\mathbf{E}_{1\theta}\mathbf{E}_{2\phi} \sin(\Delta\epsilon + \Delta\delta_1) + \mathbf{E}_{1\phi}\mathbf{E}_{2\theta} \sin(\Delta\epsilon - \Delta\delta_2) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Die ζ^B -Werte wurden mit mittellnden Empfänger und ohne Öffnungswinkel gerechnet und zeigen von den beiden hier untersuchten Lidar-Methoden die geringeren Abweichungen (Tab. 4.8, Abb. 4.7 und Abb. 4.11). ζ_{QP}^B zeigt dabei ein fast so gutes Ergebnis wie ζ_{QP}^M , die Abweichung von ζ_{QX}^B ist im Vergleich etwas größer.

Die Abweichung in der zufälligen Polarisationskomponente ist von der selben Größenordnung wie die von ζ^M , jedoch Vorzeichen und Verlauf unterscheiden sich. Die lineare Polarisationskomponente ist von etwas größeren Abweichungen betroffen, als ζ^M , die schräglinearen und zirkulären Polarisationskomponenten zeigen starke Abweichungen. Die schräglineare ist wie die lineare Polarisation, nur um 45° gedreht. Der Unterschied liegt

lediglich darin, dass in der schräglinearen Komponente der interne Phasenunterschied $\Delta\delta$ (siehe Gl. 2.7) zwischen den beiden Feldkomponenten eine Rolle spielt.

Der Unterschied zu ζ^M liegt lediglich in der Verwendung des Lidar Local Estimates, der Grund für die starken Abweichungen in U und V muss demnach in diesem Algorithmus zu finden sein. Da der Lidar Local Estimate nicht endgültig validiert wurde, können unentdeckte Fehler nicht ausgeschlossen werden. Auch für diesen Algorithmus gilt, dass er primär für typische atmosphärische Anwendungen implementiert wurde und verwendet wird, und nicht für die speziellen Anforderungen der KSRV-Berechnungen in dieser Arbeit.

Im Lichte dieser Überlegungen stellt sich dazu die Frage, warum ζ_{QP}^B trotz der Abweichungen der Lidar-Methode ein ebenso gutes Ergebnis wie ζ_{QP}^M liefert. Die Antwort liefert ein Blick auf Tab. 4.9: Im Fall von ζ^B sind I und Q von doppelt so großen Abweichungen betroffen, wie im Fall ζ^M , der unbekannte Fehler der Lidar-Methode hat also durchaus eine Auswirkung. Jedoch ist das Verhältnis der beiden Komponenten zueinander dasselbe, so dass sich der relative Fehler in der Summe QP fast ausgleicht, in der Differenz dagegen QX verdoppelt. Daher weist auch ζ_{QX}^B eine signifikant größere Abweichung als ζ_{QX}^M auf. Es handelt sich beim Ergebnis von ζ_{QP}^B daher um eine Kompensation zweier fast gleich großer Abweichungen.

Die ζ^C -Rechnungen wurden mit mittelndem Empfänger und endlichem Öffnungswinkel und daher mit Weglängendifferenzen gleich Null gerechnet und zeigen eine deutlich positive Abweichung. Die Betrachtung eines Signals, das aus einem endlichen Öffnungswinkel stammt, bedeutet, Rückstreuungssignale zu messen, welche mit unterschiedlichen Winkeln zur Grenze des streuenden Mediums aus diesem austreten.

Mishchenko et al [2006] zeigt in Kap.14.6, dass das gemessene KRSV-Signal auch abhängig vom Winkel zwischen der Blickrichtung und der hier angenommenen ebenen Grenzfläche des Mediums ist. Die Veränderung von ζ über den hier verwendeten halben Öffnungswinkel von 0.5° , dürfte allerdings keine Rolle spielen (vgl. Abb. 14.6.3 in Mishchenko et al [2006]). Die starken positiven Abweichungen von ζ^C lassen sich damit nicht erklären.

Die ζ^{QX} -Komponente zeigt im Fall C ein abweichendes Verhalten im Vergleich zu den Fällen B und M und zu den Referenzwerten. Die Kurve zeigt für die untersten beiden Größenparameter wesentlich höhere Werte, als für die restlichen vier. Tab. 4.10 zeigt analog zu Tab. 4.9 die Differenzen der Stokes-Vektor-Komponenten I und Q der drei Lidar-Fälle aufgeschlüsselt nach dem Größenparameter.

| a | 0.9 | 1.4 | 2.5 | 3.7 | 6.5 | 7.2 |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ΔI_Q^{B-R} | 0.02 | 0.03 | 0.02 | 0.04 | 0.05 | 0.06 |
| ΔQ^{B-R} | -0.07 | -0.06 | -0.03 | -0.04 | -0.06 | -0.07 |
| ΔI_Q^{C-R} | 0.12 | 0.13 | 0.05 | 0.04 | 0.03 | 0.02 |
| ΔQ^{C-R} | -0.10 | -0.11 | 0.01 | 0.04 | 0.05 | 0.06 |

Tabelle 4.10: Differenzen der Stokes-Vektor-Komponenten I und Q der drei Lidar-Fälle für die einzelnen Größenparameter a .

Während die gemittelten Werte in Tab. 4.9 vermuten lassen, dass die Überschätzung der KRSV in Fall C in erster Linie durch eine Überschätzung der Strahldichte im Vergleich zu den Polarisationskomponenten herrührt, zeigen Werte in Tab. 4.10 ein komplexeres Bild. Der Vergleich zu Fall B zeigt, dass dies nur im Fall endlicher Öffnungswinkel na-

he des Rayleigh-Bereichs vorkommt, abseits dieses wird zunehmend die Q-Komponente überschätzt, während die Differenz der Strahldichte kleiner wird.

Dieser Befund ist bemerkenswert, da sich der Fall C nur in dem Winkel von Fall B unterscheiden, mit dem der Local Estimate auf den Detektor trifft, das heißt, dieser Unterschied muss im Local Estimate entstehen. Rayleigh-Spikes können als Ursache ausgeschlossen werden, da sie auf beide Rechnungen, mit und ohne KRSV gleichermaßen auswirken müssten. Es wirkt so, als würde ein Teil der Q-Komponente fälschlicherweise in die I-Komponente umgewandelt werden, was eine Art numerischer Depolarisation wäre, die zu einer Erhöhung der Strahldichte führt.

Während eines Lidar-Local Estimates wird die Polarisationssebene des Photons vor dem Auftreffen auf dem Detektor über eine Matrizenmultiplikation in die Polarisationssebene des Detektors zurück gedreht. Bei Auftreffwinkeln $= 90^\circ$ beinhaltet dies lediglich eine Drehung im Azimuth, bei der es nur zu Umwandlungen zwischen Q und U kommt. Bei Auftreffwinkeln $\neq 90^\circ$ ist die Drehung komplexer und alle Polarisationskomponenten können sich ineinander umwandeln. Es leuchtet jedoch nicht ein, wieso dieser kleine Unterschied zu solchen Abweichungen führen sollte, wie sie in ζ^C auftreten. Wie bereits ausgeführt wurde, können sukzessive Matrixmultiplikationen kleine Fehler stark anwachsen lassen, eine einzelne solche Multiplikation aber sollte nicht so einen deutlichen Effekt haben. Man kann demnach mit ziemlicher Sicherheit davon ausgehen, dass es sich bei den Abweichungen im Fall C um einen unentdeckten Fehler im KRSV-Algorithmus handelt.

Den Lidar-Methoden gemeinsam sind die starken Abweichungen in den zirkulär und den schräglinear polarisierten Komponenten. Die ζ_{VP}^C -Kurve wirkt auf den ersten Blick zwar erstaunlich nah an den Referenzwerten, das hat seinen Grund aber vermutlich darin, dass sich die allgemeine negative Abweichung von ζ_{VP} und die speziell bei ζ^C auftretende positive Abweichung des KRSV-Faktors gegenseitig aufheben. Der Verlauf der Kurve ist auch, wie in den beiden anderen Fällen, nicht konstant, sondern ähnelt im Verlauf der ζ_{VP}^B -Kurve.

Vergleicht man die Form der ζ_{VP} - und der ζ_{VX} -Kurven von ζ^B und ζ^C in den Abbildungen 4.7 und 4.9, so fällt auf, dass jeweils die eine Kurve das vertikale Spiegelbild der anderen zu sein scheint, und das obwohl die Referenzkurven unterschiedlich verlaufen. So kommt es, dass der Verlauf der ζ_{VX}^R -Kurve von der Form her halbwegs nachgebildet wird, der Verlauf der ζ_{VP}^R -Kurve jedoch überhaupt nicht. Beide Lidar-Methoden weisen für UP eine signifikante Überschätzung der Werte auf, in der UX-Komponente zeigt sich eine ebenso deutliche Unterschätzung. Zu den Werten von ζ^C addiert sich die generelle Überschätzung dieser Konfiguration.

Schließlich bleibt die Abweichung nach unten von ζ_{QP}^B und ζ_{QP}^C in den untersten beiden Größenparametern, welche sie mit ζ_{QP}^M gemeinsam haben, wobei der Verlauf von ζ^C zusätzlich nach oben versetzt ist. Da diese Abweichung ebenso die untersten beiden Größenparameter betrifft, wie die Abweichung in ζ_{QX}^C , gibt es hier möglicherweise einen Zusammenhang, und die bereits erwähnte numerische Depolarisation ist auch hierfür verantwortlich.

Eine andere mögliche Erklärung für diese Abweichungen lässt sich von der Rolle des R_{12}^M -Elements der Reflexionsmatrix ableiten. Da die Reflexionsmatrix eine Mittelung über alle Streumatrizen aller Winkel darstellt, sind die möglichen Abweichungen dieses Elements auch in den einzelnen Streumatrizen vorhanden und können sich dadurch genauso auf die Lidar-Rechnungen auswirken. Die genaueren Umstände dieses Effekts bleiben jedoch ungeklärt.

ζ^M mit unpolarisierter Strahlung

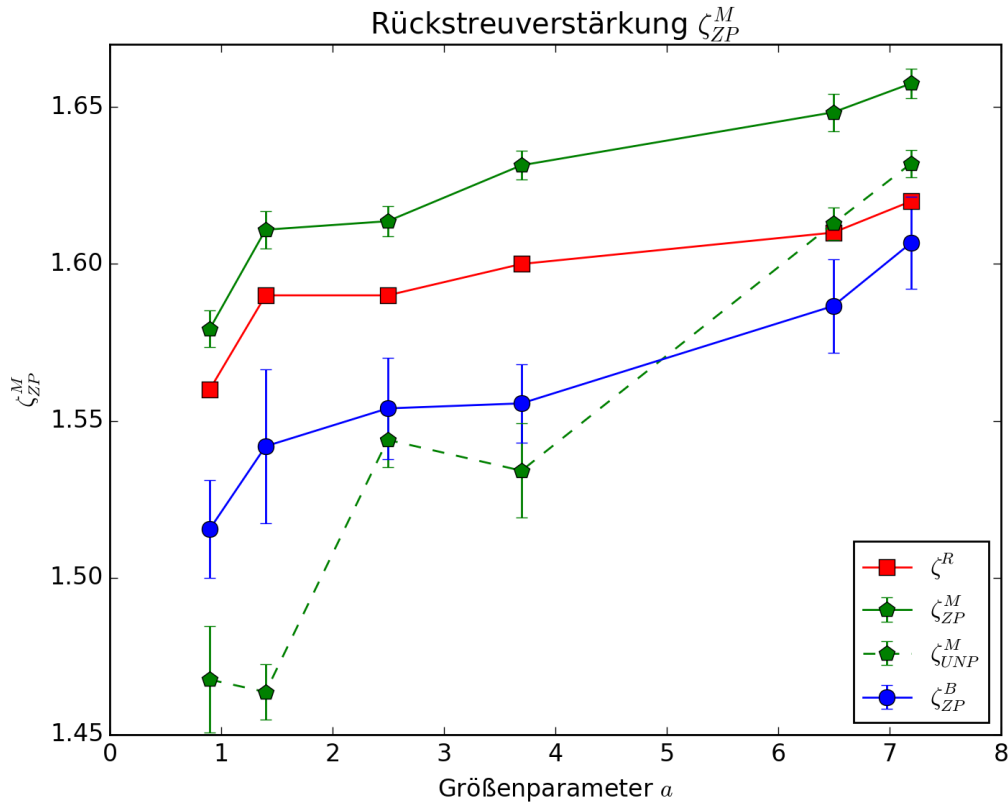


Abbildung 4.13: Datenreihe ζ_{UNP}^M im Vergleich zu ζ_{ZP}^M , ζ_{ZP}^R und ζ_{ZP}^B .

Die Datenreihe ζ_{ZP}^M wurde testweise mit zufälliger Polarisation gerechnet. Da zufällig polarisierte Stokes-Vektoren im Mittel zu einem unpolarisierten $[1, 0, 0, 0]$ Stokes-Vektor führen, und da die Mishchenko-Formel Gl. 4.17 ebenfalls mit einem unpolarisierten Stokes-Vektor berechnet wurde, müssten sich die Ergebnisse in beiden Fällen gleichen. Abb. 4.13 zeigt jedoch, dass dies nicht der Fall ist. Alle ζ_{UNP}^M -Werte sind kleiner als die dazugehörigen ζ_{ZP}^M -Werte, und dieser Abstand vergrößert sich mit kleiner werdendem Größenparameter. ζ_{ZP}^M zeigt hier eindeutig das bessere Ergebnis, da ihr Verlauf der ζ_{ZP}^R -Kurve gut ähnelt, ganz im Gegensatz zur ζ_{UNP}^M -Kurve, welche aussieht, als hätte sie keine Verbindung zu den beiden anderen. Dieses Ergebnis zeigt, dass bei der Implementierung in MYSTIC die Einhaltung der Stokes-Vektor-Bedingung auch für die Matrix-Methode wichtig ist.

Fazit

Tab. 4.11 gibt noch einmal einen Überblick über die wesentlichen Aspekte. Folgende Schlüsse lassen sich daraus ziehen.

1. Die numerischen Ungenauigkeiten in den Streudaten haben einen spürbaren Einfluss auf das Ergebnis aller Methoden. Durch lange Streuwege und die damit verbundenen Matrizenmultiplikationen können sich diese Ungenauigkeiten auf die Ergebnisse aller Fälle auswirken. Dazu gibt es in allen Methoden (abgesehen von Fall A) eine leicht negative Abweichung in der QP-Komponente in den untersten beiden Größenparametern.

| Pol. | ζ^M | ζ^A | ζ^B | ζ^C |
|------------------|-----------|-------------|-----------|-----------|
| ZP | + | ≈ 0 | - | + |
| QP | - | ≈ 0 | - | + |
| QX | + | ≈ 0 | + | + |
| UP* | - | - | ++ | ++++ |
| UX* | - | - | ---- | ---- |
| VP | 0 | ≈ 0 | ---- | - |
| VX | + | ≈ 0 | +++ | +++++ |
| QP Abweichungen | X | - | X | X |
| QX Abweichungen | - | - | - | X |
| Spikes | - | $\forall a$ | $a = 1.4$ | $a = 1.4$ |
| $\Delta\epsilon$ | - | $\neq 0$ | 0 | 0 |
| α | - | $\neq 0$ | 0 | $\neq 0$ |
| Detektor mittelt | - | - | X | X |
| Lidar LE | - | X | X | X |
| Konfiguration | breit | schmal | breit | breit |

Tabelle 4.11: Finale Übersicht über die Ergebnisse. Der oberste Block zeigt die Größenordnung der Abweichungen von ζ^R in Schritten von 0.1, dargestellt durch die entsprechende Anzahl von Plus- oder Minuszeichen für positive bzw. negative Abweichungen. Die Angaben der U-Polarisation wurden mit ζ^M verglichen und sind gekennzeichnet mit einem *. Der mittlere Block zeigt das Auftreten bestimmter spezieller Phänomene: Die beschriebenen speziellen Abweichungen in den linearen Polarisationskomponenten in den unteren beiden Größenordnungen und Spikes. Der untere Block listet wesentliche Aspekte der unterschiedlichen Konfigurationen auf: Weglängendifferenz $\Delta\epsilon$, Öffnungswinkel α , mittelnder Detektor, Lidar Local Estimate und welche Modell-Konfiguration (Abb. 4.1) verwendet wurde.

2. Die Matrix-Methode (ζ^M) führt zu einem befriedigendem Ergebnis in allen betrachteten Polarisationskomponenten. Die Abweichungen bleiben innerhalb von 5 % und die ζ_{VP} -Komponente wird nur mit dieser Methode korrekt wieder gegeben.
3. Die Verwendung der Lidar-Methode führt zu starken Abweichungen in der U- und V-Polarisation. In der zufälligen und der Q-Polarisation sind die Abweichungen gegenüber der Matrix-Methode leicht erhöht. Der Entstehungsmechanismus dieser Abweichungen ist trotz intensiver Nachforschungen unklar, muss sich aber entweder im (nicht ausreichend) validierten Lidar Local Estimate oder im KRSV-Algorithmus selbst befinden. Ersteres ist wahrscheinlicher, da der KRSV-Algorithmus sehr ausführlich getestet wurde.
4. Die Annahme eines mittelnden Detektors ($\Delta\epsilon = 0$) mit senkrechter Blickrichtung ($\alpha = 0$, Fall B) führt zu einem guten Ergebnis für zufällig und linear polarisierte Strahlung. Rechnungen mit unpolarisierter Strahlung zeigen ein etwas schlechteres Ergebnis mit wesentlich anderem Kurvenverlauf, zufällige Polarisation ist hier vorzuziehen.

5. Die Annahme eines mittelnden Detektors ($\Delta\epsilon = 0$) mit endlichem Öffnungswinkel ($= 1^\circ$, Fall C) führt zu einer Überschätzung des Signals. Da das Signal dabei auch den Grenzwert 2 überschreitet, handelt es sich dabei nicht um einen physikalischen Effekt. Außerdem kommt es zu einer deutlichen positiven Abweichung in der QX-Komponente in den untersten beiden Größenparametern, der Entstehungsmechanismus dieser Abweichung ist ebenfalls unklar.
6. Die Annahme eines nicht mittelnden Detektors (Fall A) führt erwartungsgemäß zu einem fast vollständigen Verschwinden des KRSV-Signals durch die Verteilung von Weglängendifferenzen $\neq 0$. Aufgrund der geringen Größenordnung des Signals können wegen der Standardabweichungen keine belastbaren Aussagen über die Kurvenverläufe gemacht werden.

Zur Berechnung von kohärenter Rückstreuung empfiehlt es sich daher, nach Möglichkeit die Matrizen-Methode zu verwenden. Für die Lidar-Fälle liefert die Konfiguration nach Fall B ohne Öffnungswinkel und ohne Weglängendifferenzen mit zufälliger oder linearer Polarisation gute Ergebnisse.

4.2 Validierung der Form des Rückstreumaximums

Nach der Validierung der KRSV in exakter Rückstreurichtung wird jetzt der Verlauf des kegelförmigen Maximums abseits dieser betrachtet. In direkter Umgebung der Rückstreurichtung werden nach außen hin abfallende Flanken erwartet, in weiterer Entfernung müssen die Signale gleich sein, da Energieerhaltung hier nicht berücksichtigt werden kann (siehe Kap. 2.3.1). Zusätzlich wird Formel 2.151 wiederholt, welche die volle Halbwertsbreite des Maximums (FWHM) definiert:

$$\text{FWHM} = \frac{3}{4kl^*} \quad (4.19)$$

4.2.1 Betrachtung eines weiten Winkelbereich

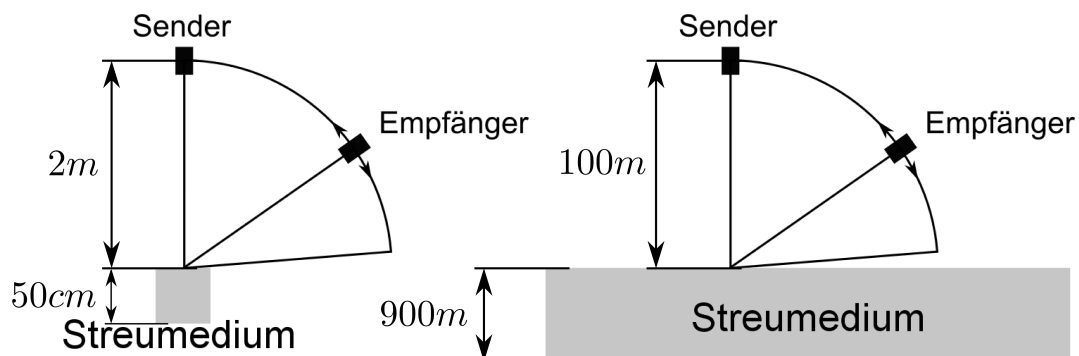


Abbildung 4.14: Scan-Setup für die Berechnung des vollen Rückstreumaximums. Links: Horizontaler Setup für Abb. 4.15; rechts: Vertikaler Setup für alle anderen Winkelbereichsrechnungen, entspricht Abb. 4.1 links. Abmessungen siehe Text.

Der Modellaufbau ist in Abb. 4.14 links dargestellt.

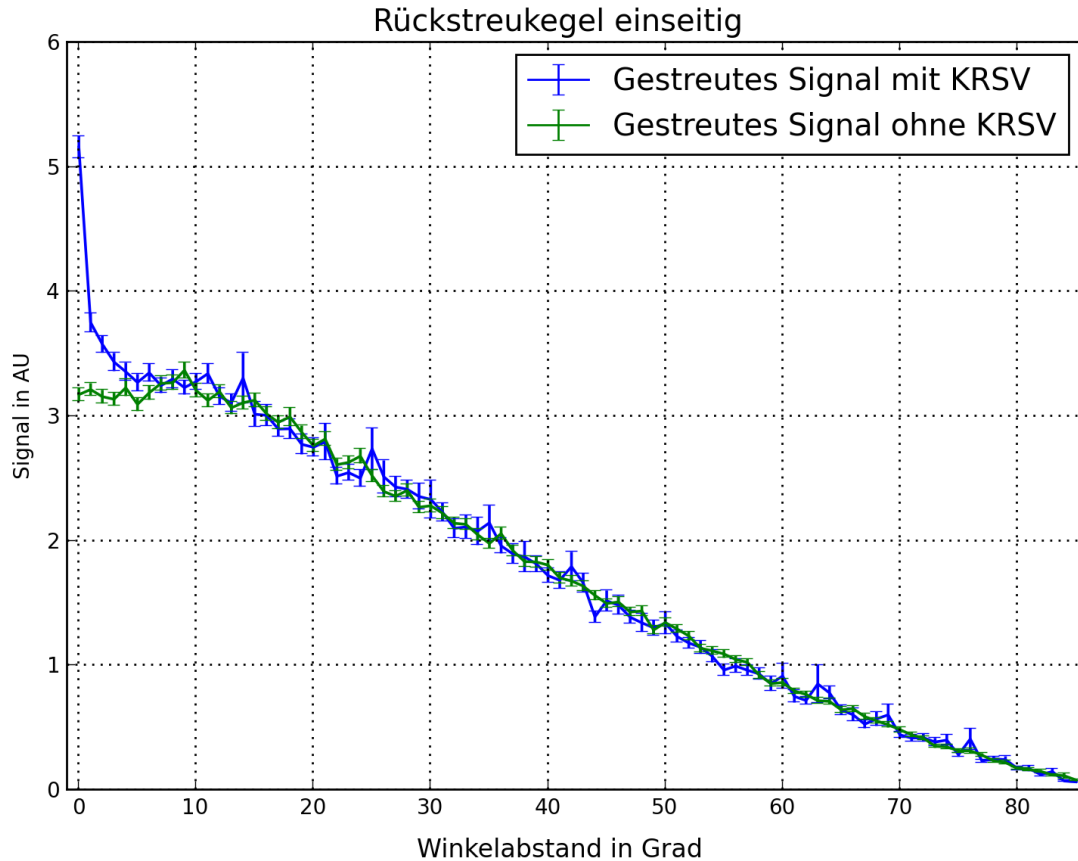


Abbildung 4.15: Rückstreumaximum über einen weiten Winkelbereich von 0° bis 85° . AU = Arbitrary Units.

Abbildung 4.15 zeigt einen Scan von 0° bis 85° . Der Setup unterscheidet sich dahingehend, dass es sich um einen horizontalen Scan handelt und dass der streuende Bereich ein begrenzter Quader mit 50 cm Kantenlänge in einem Raum mit 3.5 mal 2.9 m Kantenlänge ist (Abb. 4.14 links). Die optische Dicke des streuenden Quaders beträgt 65341 und der Größenparameter ist 15.

Mittelt man über alle Werte von 10° bis 85° beider Kurven und bildet die Differenz der beiden Mittelwerte, so erhält man eine mittlere Abweichung von 0.00196 ± 0.08611 , beide Kurven sind im Bereich abseits des Rückstreumaximums gleich, wie erwartet. In der Graphik wird auch sichtbar, dass in der Kurve mit KRSV wesentlich größere Standardabweichungen (0.07735) vorkommen, als in der ohne (0.03785). Dies liegt daran, dass für das Endergebnis des KRSV-Simulation die Ergebnisse der beiden Streuwege summiert werden (Gl. 3.43). Da die Ergebnisse beider Wege eine Standardabweichung haben, und Standardabweichungen quadratisch summiert werden, ist die Standardabweichung des Ergebnisses größer, als die der Einzelwerte. Dazu kommt, dass sich Local Estimate-Spikes in den Rückwegen stärker auswirken, da jeder rückwärtige Local Estimate eines Photons die exakt gleiche Streuung rechnet, da er immer über die erste Streuung des Hinweges läuft.

4.2.2 Validierung der Halbbreite des Maximums

Nach der Gleichheit der Ergebnisse abseits des Rückstreumaximums wird die Breite des Maximums nach Gl.4.19 vermessen, dabei wird die Konfiguration von Fall B in Abb. 3.8

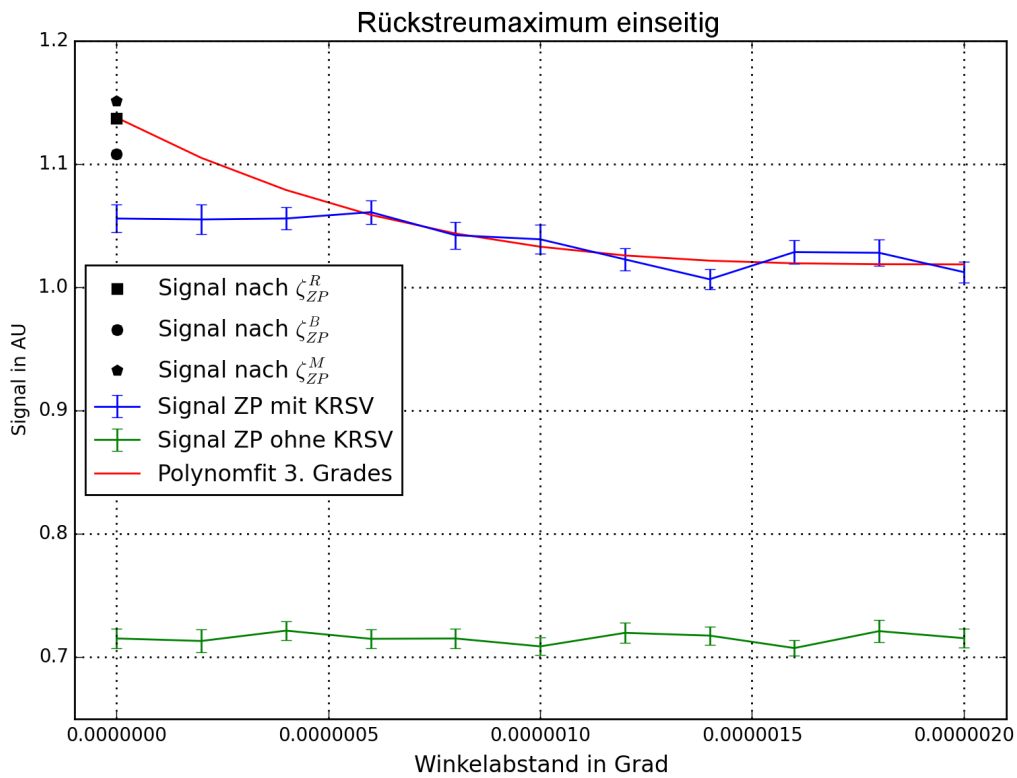
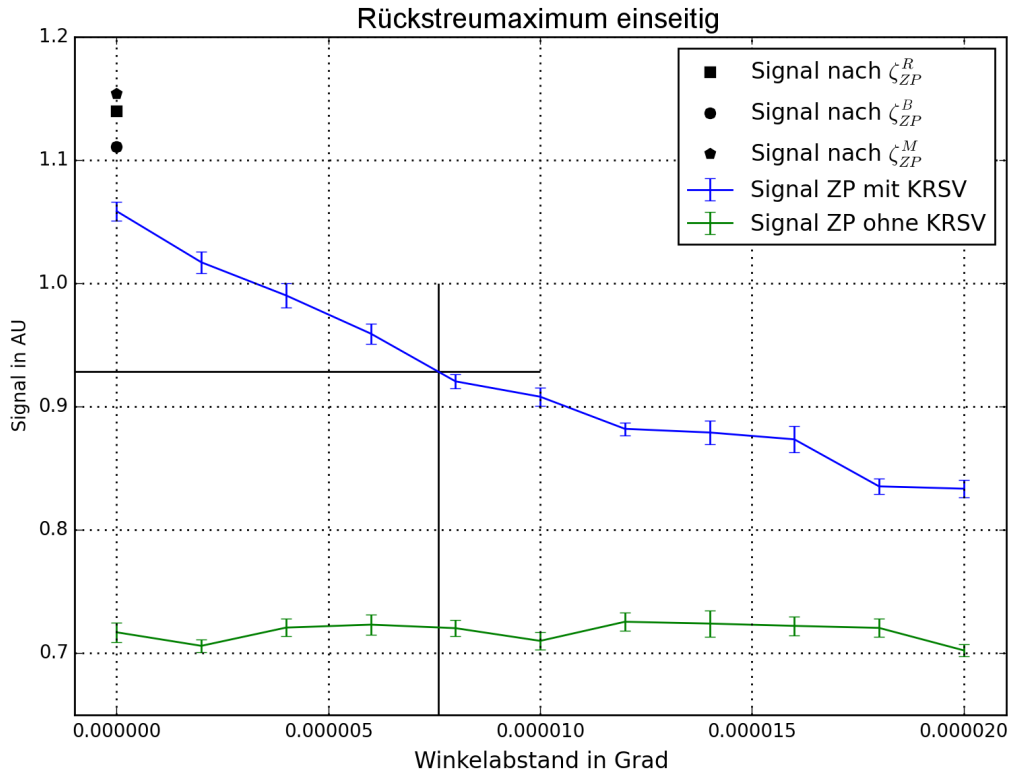


Abbildung 4.16: Rückstreumaximum (zufällige Polarisation) für $a = 2.5$. Signale mit und ohne KRSV, außerdem die hypothetischen Signale $\zeta_{ZP}^R, \zeta_{ZP}^M$ und ζ_{ZP}^B in Rückstreurichtung; AU = Arbitrary Units. Oben: Winkelbereich von 0° bis 0.00002° Unten: Winkelbereich von 0° bis 0.000002° mit Polynomfit (siehe Text).

verwendet (Abb. 4.14 rechts) mit dem Unterschied, dass hier exakt entlang der senkrechten Blickrichtung gemessen wird. Dies führt zu einer Verschlechterung des Ergebnisses in exakter Rückstreurichtung, welches hier aber nicht von Belang ist, da für das Maximum die Referenzwerte ζ^R verwendet werden.

Der Grund für diese Entscheidung liegt darin, dass numerische Limitierungen bei exakter Parallelität zu einer der Koordinatensystemachsen keine Auswirkungen haben, bei geringen Abweichungen (z.B. 0.001° wie in der Validierung der KRSV-Maxima) jedoch das Ergebnis komplett unbrauchbar machen. Da der Referenzwert für die senkrechte Konfiguration nach Mishchenko bekannt ist (Tab. 4.1), und da die exakte Rückstreurichtung bereits validiert wurde, kann hier die Korrektheit des Algorithmus im Bezug auf die Breite des Rückstreumaximums und die Bereiche neben der Rückstreurichtung ohne Probleme gezeigt werden.

Abbildung 4.16 zeigt ein Rückstreumaximum im Detail. Um dieses Ergebnis zu erzeugen, wurden beide Kurven je achtmal gerechnet, mit 500000 Photonen pro Punkt. Um Spikes auszuschalten, wurden die Werte aller Kurven analysiert und für jeden Punkt wurde der Wert mit der geringsten Standardabweichung ausgewählt, um die endgültige Graphik zu erzeugen. Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, wie bereits in Kap. 4.1.3 argumentiert wurde. Außerdem wurden die Faktoren ζ_{ZP}^R , ζ_{ZP}^M und ζ_{ZP}^B (letztere wie in Kap. 4.1.3 berechnet) mit dem diffusen Ergebnis in Rückstreurichtung multipliziert und eingezeichnet. ζ_{ZP}^R wurde mit einem schwarzen Quadrat markiert, ζ_{ZP}^B mit einem Kreis und ζ_{ZP}^M mit einem Pentagon. Als halbe Höhe des Maximums wurde der halbe ζ_{ZP}^R -Wert verwendet und als horizontale Linie eingezeichnet. Gerechnet wurde mit dem Größenparameter 2.5 mit einer optischen Dicke von 15543.

Der FWHM-Wert (Gl. 4.19) wird umso kleiner, je größer kl^* ist, d.h. bei konstanter Wellenzahl k , je größer die mittlere Transportweglänge l^* ist. Um diese zu verringern, muss die optische Dicke erhöht werden, da man bei den in Kapitel 4.1.3 benutzten optischen Dicken in derart geringe Winkelbereiche kommt, dass die numerische Präzision der Rechnungen beeinträchtigt wird. Die FWHM für die genannte optische Dicke von 15543 liegt bei ca. $1.52 \cdot 10^{-5}^\circ$, da sie um das Maximum zentriert ist, wurde sie in der Graphik als vertikale Linie bei $0.76 \cdot 10^{-5}^\circ$ als HWHM eingezeichnet.

Gerechnet wurde mit zufälliger Polarisation, der Referenzwert von ζ_{ZP}^R für $a = 2.5$ liegt laut Tab. 4.1 bei 1.59 und der hier berechnete bei 1.48, damit liegt letzterer nochmal deutlich unterhalb des in Tab. 4.4 gezeigten Wertes von 1.55. Das hat seinen Grund in dem in Kap. 3.2.5 beschriebenen Verlust der Polarisationssebene bei exakt vertikaler Bewegungsrichtung des Photons.

Der Schnittpunkt der horizontalen Linie, die das halbe Maximum markiert, mit der vertikalen HWHM-Linie ergibt den aus Gl. 4.19 erwarteten Wert an. Wie man sieht, kreuzt die Kurve exakt diesen Wert. Aufgrund der Standardabweichung der Kurve, muss man natürlich von einem Toleranzbereich ausgehen, jedoch zeigt dieses Ergebnis, dass der Algorithmus die Breite des Maximums richtig wiedergibt, hier also auch nicht von den Ungenauigkeiten betroffen zu sein scheint, welche in exakter Rückstreurichtung auftreten. Abbildung 4.16 unten zeigt den Bereich zwischen 0° und 0.000002° höher aufgelöst mit einer Polynomfit-Kurve dritten Grades, welche die innersten drei Punkte der KRSV-Kurve auslässt und in Rückstreurichtung stattdessen den Referenzwert verwendet. In der Literatur verfügbare Abbildungen, welche berechnete ideale Formen des Rückstreumaximums zeigen (z.B. Abb. 1.2 rechts), zeigen stets einen glatten Verlauf der Kurve, bei

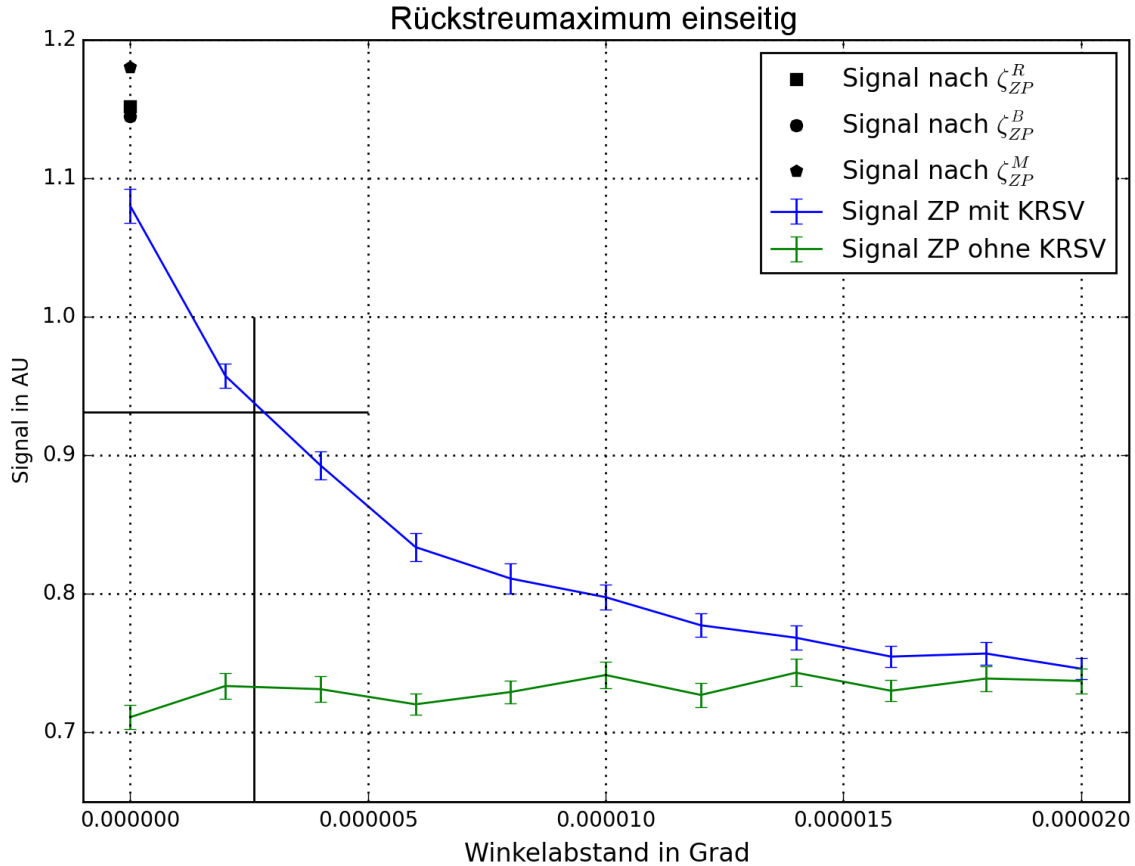


Abbildung 4.17: Rückstreumaximum (zufällige Polarisation) über einen engen Winkelbereich von 0° bis 0.00002° für $a = 7.2$. AU = Arbitrary Units.

Vernachlässigung von Absorption mit von einem spitzen singulären Maximum aus abfallenden und zunehmend flacher werdenden Flanken.

Der gezeigte Polynomfit dritten Grades stellt dabei eine qualitative Abschätzung dar, wie die Kurve um das Maximum verlaufen könnte, unter der Voraussetzung, dass die innersten drei Werte, welche augenscheinlich ein Plateau unterhalb des Maximums bilden, falsch sind. Die Kurve soll vor allem verdeutlichen, dass nicht nur der Punkt in direkter Rückstreurichtung, sondern auch mindestens die beiden nächstliegenden Punkte von der numerischen Verringerung des Signals betroffen sind. Denn ein Sprung vom Maximalwert (Referenzwert) zum Signal bei 0.0000002° würde jedem möglichen glatten Kurvenverlauf widersprechen.

Abbildung 4.17 zeigt das Maximum für $a = 7.2$, auch hier liegt die FWHM, welche mit Hilfe des Referenzwertes berechnet wurde, fast genau auf der Kurve (innerhalb der Standardabweichung). Der hier geplottet HWHM-Wert lautet $2.60 \cdot 10^{-6}^\circ$.

4.2.3 Asymmetrie des Maximums bei linearer Polarisation und kleinem Größenparameter

Normalerweise ist das Rückstreumaximum, wird entlang der Sender/Empfängerachse ("von oben") betrachtet, kreisförmig. Im Fall von linearer Polarisation im oder nahe des Rayleigh-Bereichs entsteht ein kurioser Effekt, welcher bei Betrachtung von ζ_{QP}^B sichtbar wird:

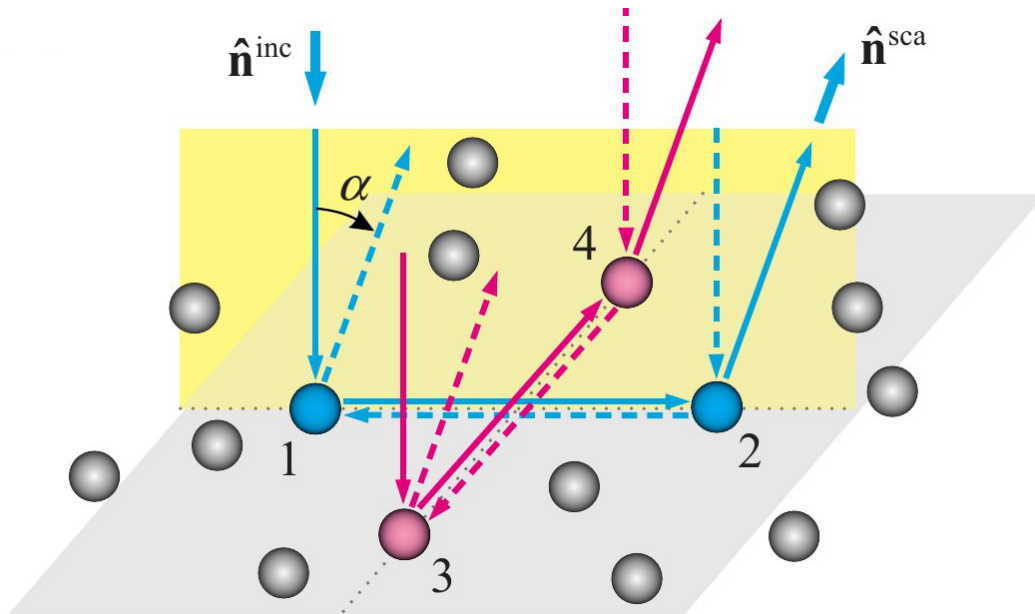


Abbildung 4.18: Zweifachstreuconfiguration für je zwei Partikel, deren Verbindungslinien je einmal senkrecht und parallel zur Ebene, entlang der sich der Detektor bewegt (gelb), verlaufen. Im normalen Fall ist die Polarisationssebene parallel zur gelben Ebene, im anomalen Fall steht sie senkrecht auf dieser. Quelle: Mishchenko et al [2009]

Das Rückstreumaximum nimmt eine ovale Form an, was mit der Form der Rayleigh-Streumatrix zu tun hat.

Verläuft die einfallende Polarisationssebene (d.h. die Ebene in welcher der rein linear polarisierte elektrische Feldvektor schwingt) parallel zur Ebene in der sich der Detektor bewegt, so hat das Rückstreumaximum die von der Theorie (Gl. 4.19) vorhergesagte Breite (der "normale" Fall). Bewegt sich der Detektor stattdessen senkrecht zur Polarisationssebene, ist das Rückstreumaximum sehr viel schmaler und das Signal ist abseits der Rückstreuung wesentlich verringert (der "anomale" Fall).

Die genaue Erklärung lautet wie folgt: Im normalen Fall (Polarisationssebene parallel zur gelben Ebene in Abb. 4.18) verschwindet der Anteil der Streuungen am Gesamtsignal über die Partikel 1 und 2 aufgrund der 90° -Streuung bei 1. Die Streuungen über die Partikel 3 und 4 in beiden Richtungen haben stets einen Weglängenunterschied von Null, unabhängig vom Winkel, was immer zu konstruktiver Interferenz führt und zu einem maximalen Beitrag zur KRSV.

Im anomalen Fall verschwindet der Anteil der Streuungen über die Partikel 3 und 4, während der Anteil, der über die Partikel 1 und 2 in beide Richtungen gestreut wird, abseits der Rückstreuung variierende Weglängendifferenzen erfährt. Dadurch wird der Anteil dieser Streuungen am Gesamtsignal im Vergleich zum ersten Fall verringert. In exakter Rückstreuung sind beide Signale identisch, da sich beide Fälle aufgrund des zufälligen Mediums nicht unterscheiden. Eine MYSTIC-Simulation dieses Falls zeigt Abb. 4.19. Sie zeigt die beiden Signale mit und ohne KRSV, einmal mit normaler linearer Polarisationssebene, und einmal mit um 90° gedrehter Polarisationssebene.

Da durch die Drehung um 90° das Vorzeichen der Q-Komponente abseits der exakten Rückstreuung negativ wird, verringert sich das QP-Signal für den gedrehten Fall

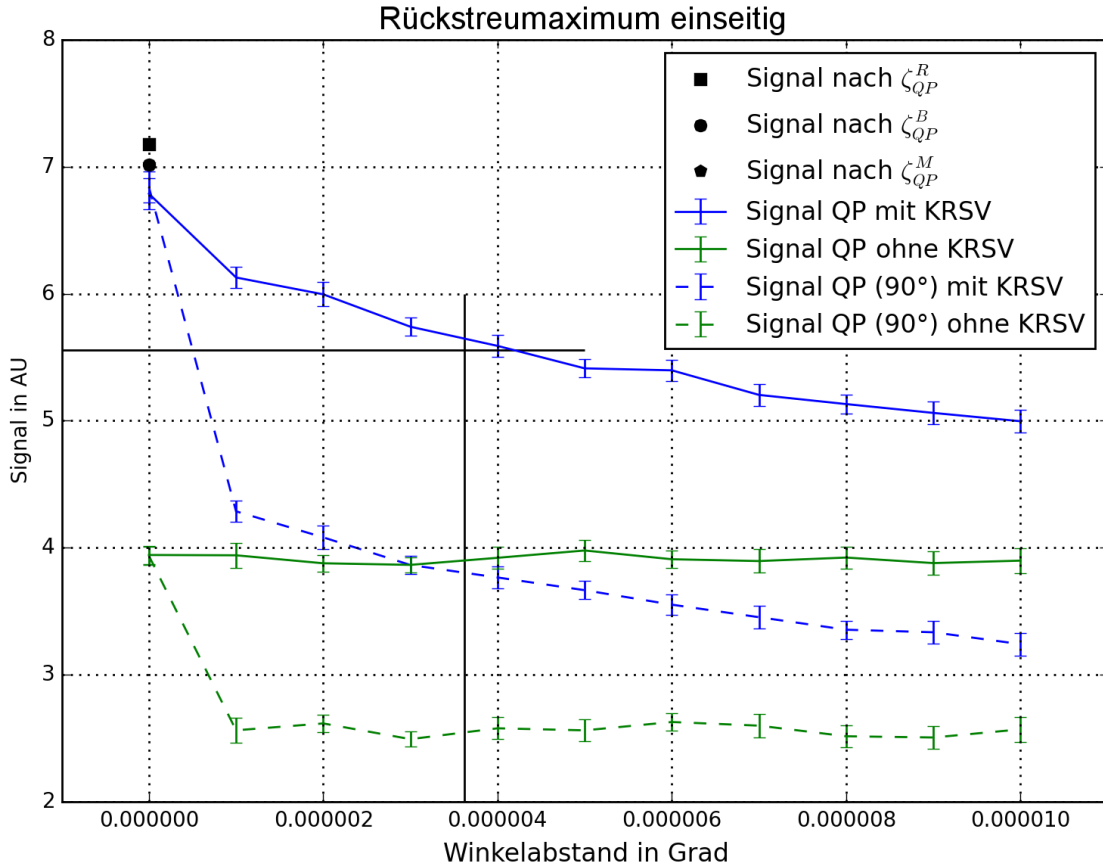


Abbildung 4.19: QP-Komponente des Rückstreumaximums über einen engen Winkelbereich von 0° bis 0.00002° für $a = 0.9$, für Azimuth 0° und Azimuth 90° . AU = Arbitrary Units.

merklich da $QP = (I + Q)/2$. Dieser Effekt betrifft aber auch das diffuse Signal, hat also mit der KRSV nichts zu tun. Es ist in der Graphik offensichtlich, dass der Abstand der beiden Signale mit KRSV voneinander wesentlich größer ist, als der Abstand der beiden Signale ohne KRSV. Diese zusätzliche Differenz ist auf den Einfluss des beschriebenen Asymmetrie-Effekts zurückzuführen, er ist in der MYSTIC-Simulation reproduzierbar. Ebenfalls eingezeichnet ist wieder die erwartete Halbbreite des Maximums im normalen Fall, in diesem Fall ist der Abstand zwischen dem erwarteten Punkt und der Kurve im Bereich der einer Standardabweichung.

4.2.4 Fazit

Die Ergebnisse dieses Kapitels zeigen, dass der KRSV-Algorithmus abseits der exakten Rückstreurichtung sehr gut funktioniert. In Bereichen weit abseits der Rückstreurichtung konnte außerdem die Gleichheit der beiden Signale gezeigt werden. Die Halbbreite des kegelförmigen Maximums wurde in allen betrachteten Fällen (zufällige und lineare Polarisation) innerhalb einer Standardabweichung korrekt wieder gegeben. Auch der Spezialfall des ovalen Rückstreumaximums für lineare Polarisation im Rayleigh-Bereich konnte reproduziert werden. Diese Ergebnisse sind akkurater, als die in exakter Rückstreurichtung, was darauf schließen lässt, dass die Problem bei der Validierung des KRSV-Maximums auf die exakte Rückstreurichtung beschränkt sind.

4.3 Validierung der Radarsimulatoren

Wie in Kap. 3.3 beschrieben, wurde MYSTIC erweitert, um Radarreflektivitäten zu simulieren, zusätzlich wurde SSRadar (Kap. 3.4) programmiert. Beide Radar-Codes wurden mit Hilfe der Simulationssoftware Quickbeam (Haynes [2007]) validiert. Quickbeam verwendet zur Berechnung der Reflektivitäten Gl. 2.168:

$$z_{eff}^{QB} = \frac{\lambda^4}{\pi^5 |K|^2} \left(\frac{\pi}{4} \sum_i^K Q_{bsca,i} N(D_i) D_i^2 \Delta D_i \right)$$

Diese berücksichtigt über die Streueffizienz in Rückstreurichtung $Q_{bs} = Q_{as} M_{11}(\pi)$ (Gl. 2.167) die Abweichungen der Streueigenschaften von der reinen Rayleigh-Theorie. Zusätzlich berücksichtigt Quickbeam die Abschwächung des Radarstrahls durch Hydrometeore, diese Daten werden mit "QB att" bezeichnet.

SSRadar und Quickbeam lösen Gl. 2.166, welche reine Rayleigh-Radarreflektivitäten berechnet:

$$z_{eff}^{ray} = \sum_i^K N(D_i) D_i^6 \Delta D_i$$

Für Quickbeam werden die Ergebnisse dieser Gleichung als "QB ray" (für Rayleigh) bezeichnet.

MYSTIC rechnet, wie in Kap. 3.3 erklärt, die Rückstreuwahrscheinlichkeit eines Photons aus einem bestimmten Abstandsintervall (Range Bin) aus und errechnet den Radarreflektivitätsfaktor über eine angepasste Radargleichung (Gl. 3.66). Wie in jenem Kapitel erwähnt, ist unklar, ob der richtige Korrekturfaktor für die Gauss-Form des Radarstrahls 0.72 oder 0.81 lautet, daher werden in den folgenden Vergleichen beide Ergebnisse gezeigt.

4.3.1 Konstanter Radius

Der Modellaufbau lautet wie folgt (siehe Tab. 4.12): Ein senkrecht nach oben blickendes Radar misst vier unterschiedliche Wasserwolken-schichten, beginnend bei einer Höhe von 1 km. Die Schichten sind jeweils 1 km dick und die Tröpfchen in den vier Schichten haben jeweils einen konstanten Radius. Die Wellenlänge ist 8.5 mm, was ca. 35.27 GHz entspricht. Die umgebende Atmosphäre wird vernachlässigt. Berechnet wurden die folgenden Datenreihen:

- MYSTIC Faktor 0.81:
MYSTIC-Rechnung mit Korrekturfaktor 0.81.
- MYSTIC Faktor 0.72:
MYSTIC-Rechnung mit Korrekturfaktor 0.72.
- Quickbeam:
Quickbeam-Rechnung ohne Abschwächung mit Mie-Korrektur
- Quickbeam att:
Quickbeam-Rechnung mit Abschwächung und Mie-Korrektur
- Quickbeam ray:
Quickbeam-Rechnung ohne Abschwächung und Mie-Korrektur

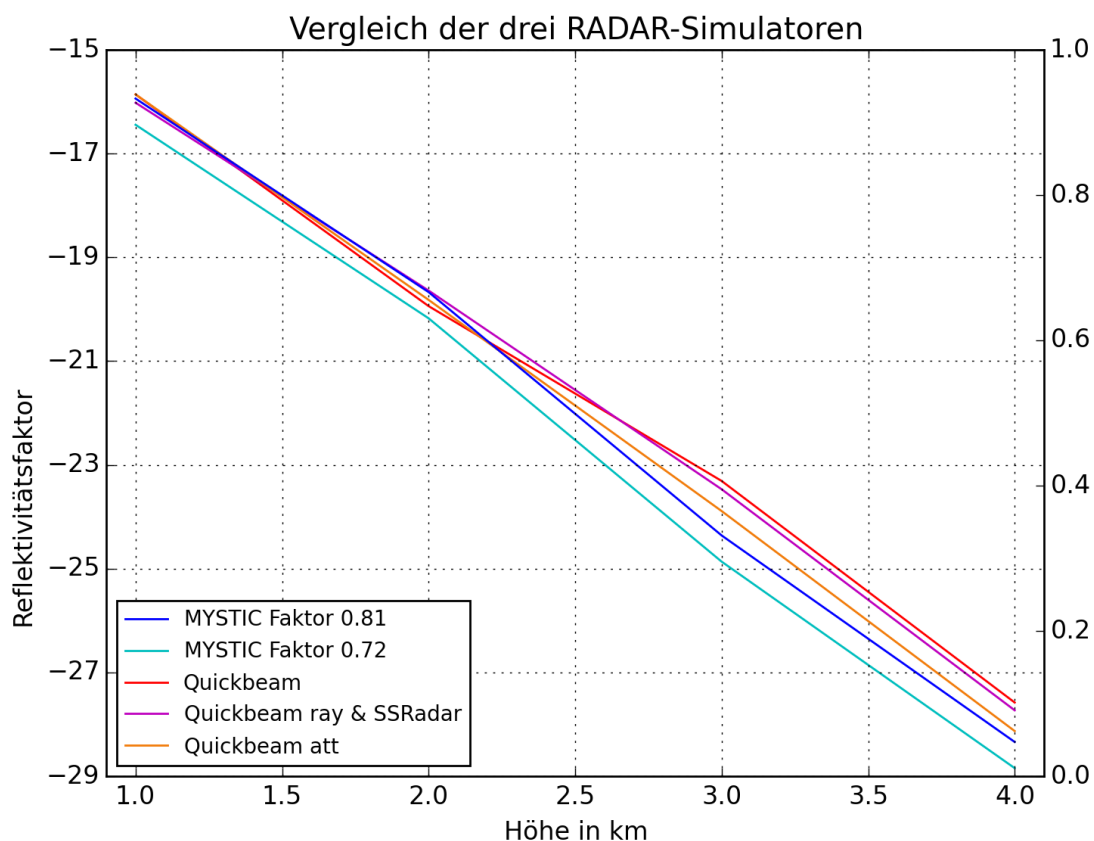


Abbildung 4.20: Vergleich der drei Radar-Simulatoren. Konstante Tröpfchenradien in allen Schichten, Daten in Tab. 4.12.

- SSRadar:
SSRadar-Rechnung, wie Quickbeam ray

Die Quickbeam-Ergebnisse werden mit einem Faktor $|K^2| = 0.88$ berechnet (siehe Haynes [2007]), MYSTIC arbeitet mit einem konstanten Faktor von $|K^2| = 0.93$, d.h. beide Ergebnisse haben von vornherein eine systematische Abweichung um einen Faktor von ca. 1.06 zeigen.

| Höhe (m) | QB | Att | QB att | QB ray | SSRadar | MY 0.81 | MY 0.72 |
|----------|--------|------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 1000 | -15.86 | 0.00 | -15.86 | -16.02 | -16.02 | -15.94 | -16.44 |
| 2000 | -19.49 | 0.33 | -19.82 | -19.64 | -19.64 | -19.67 | -20.17 |
| 3000 | -23.31 | 0.58 | -23.89 | -23.47 | -23.47 | -24.36 | -24.86 |
| 4000 | -27.58 | 0.55 | -28.13 | -27.73 | -27.73 | -28.34 | -28.84 |

Tabelle 4.12: Vergleich der drei Radarsimulatoren. Vier Wolkenschichten von jeweils 1000m Dicke und monodisperse Tröpfchengrößenverteilung. Reflektivitäten jeder Schicht gemessen mit Quickbeam, jeweils mit (QB att) und ohne Abschwächung (Att) sowie mit reiner Rayleigh-Rechnung (QB ray), SSRadar und MYSTIC mit beiden Korrekturfaktoren 0.81 und 0.72 (siehe Kap. 3.3). Der LWC ist in g/m^3 angegeben, der r_{eff} in μm , die Reflektivitäten in dBZ . Die Abschwächung Att ist kumulativ.

Tab. 4.12 zeigt die Ergebnisse des Vergleichs. Das reine Rayleigh-Ergebnis von Quickbeam ist identisch zu SSRadar, was beweist, dass SSRadar korrekt arbeitet. Der Unterschied zwischen SSRadar (lila) und Quickbeam ohne Abschwächung (rot) ist gering (im Mittel 0.16 dB , was einem Faktor von 1.04 entspricht) und konstant. Er entsteht durch die Verwendung der Mie-Korrektur in Quickbeam, welche im betrachteten Größenparameter-Bereich keine große Rolle spielt.

Die Werte von Quickbeam mit Abschwächung (Quickbeam att, türkis) nehmen erwartungsgemäß mit zunehmender Höhe und durchlaufener Wolkenschichten im Vergleich zu Quickbeam ohne Abschwächung ab. Jedoch berechnet Quickbeam für die vierte Schicht eine geringere Abschwächung (0.55 dB) als für die dritte Schicht (0.58 dB). Da die Abschwächung mit der Zahl durchquerter Schichten kumulativ wirkt, entspricht der berechnete Wert 0.55 dB einer leichten Verstärkung des Signals, dieses Ergebnis ist unphysikalisch. Der Wert der Abschwächung oberhalb der vier Schichten lautet 0.91 dB und erscheint wieder korrekt.

Die mittlere Abweichung zwischen Quickbeam mit Abschwächung und MYSTIC 0.81 beträgt 0.15 dB , bei Betrachtung von MYSTIC 0.72 steigt dieser Wert auf 0.6 dB . MYSTIC 0.81 und Quickbeam zeigen eine signifikant größere Abweichung in den oberen beiden Schichten. Es ist denkbar, dass Quickbeam aufgrund eines Programmierfehlers die Abschwächung (Att) in der dritten Schicht falsch berechnet und unterschätzt, dies würde erklären, warum das Quickbeam-Signal für die oberen beiden Schichten signifikant größer ist als das MYSTIC 0.81-Signal. Das Ergebnis ist aber ausreichend, um die Radarsimulation mit MYSTIC zu validieren. Da keine groben Abweichungen auftreten, kann davon ausgegangen werden, dass der Algorithmus korrekt arbeitet, und dass noch bestehende Abweichungen durch andere Faktoren entstehen, d.h. durch das komplexere 3D-Setup und die andere Berechnungsweise in MYSTIC, und durch die vermuteten Programmierfehler in Quickbeam.

Das MYSTIC 0.81-Signal ist in den unteren Schichten sehr nahe an den Quickbeam- und SSRadar-Kurven, während das MYSTIC 0.72-Signal von Anfang an unterhalb aller anderen Werte liegt. In der Anwendung scheint der Faktor von 0.81 der korrekte zu sein (siehe Kap. 3.3).

4.3.2 Modifizierte Gamma-Verteilung

Die gleiche Rechnung wurde mit einer modifizierten Gamma-Verteilung (Gleichung (2) in Haynes [2007]) durchgeführt. Die in Quickbeam errechnete Verteilung wurde in eine Datei ausgegeben und in MYSTIC und SSRadar eingelesen, alle drei Solver erhielten exakt dieselbe Verteilung. Das Ergebnis ist in Abb. 4.21 gezeigt. Tabelle 4.13 zeigt die Zahlenwerte.

SSRadar und Quickbeam-Rayleigh liefern hier kein exakt identisches Ergebnis. Die einfachste Erklärung dafür ist, dass Quickbeam einen anderen Algorithmus zur Interpolation der Tröpfchengrößenverteilung verwendet als MYSTIC und SSRadar. In der untersten Schicht liegen MYSTIC 0.81 und SSRadar, welche denselben Interpolationsalgorithmus verwenden, auch sehr nahe beieinander (die Interpolation der Streudaten für MYSTIC findet im Mie-Tool statt).

Auch in diesem Fall ist die Berechnung der Abschwächung im Quickbeam vermutlich fehlerhaft und die Abweichung zeigt sich darin, dass die Abschwächung bei 3 km 0.58 dB beträgt, bei 4 km aber nur 0.56 dB , d.h. der Wert der dritten Schicht wird auch

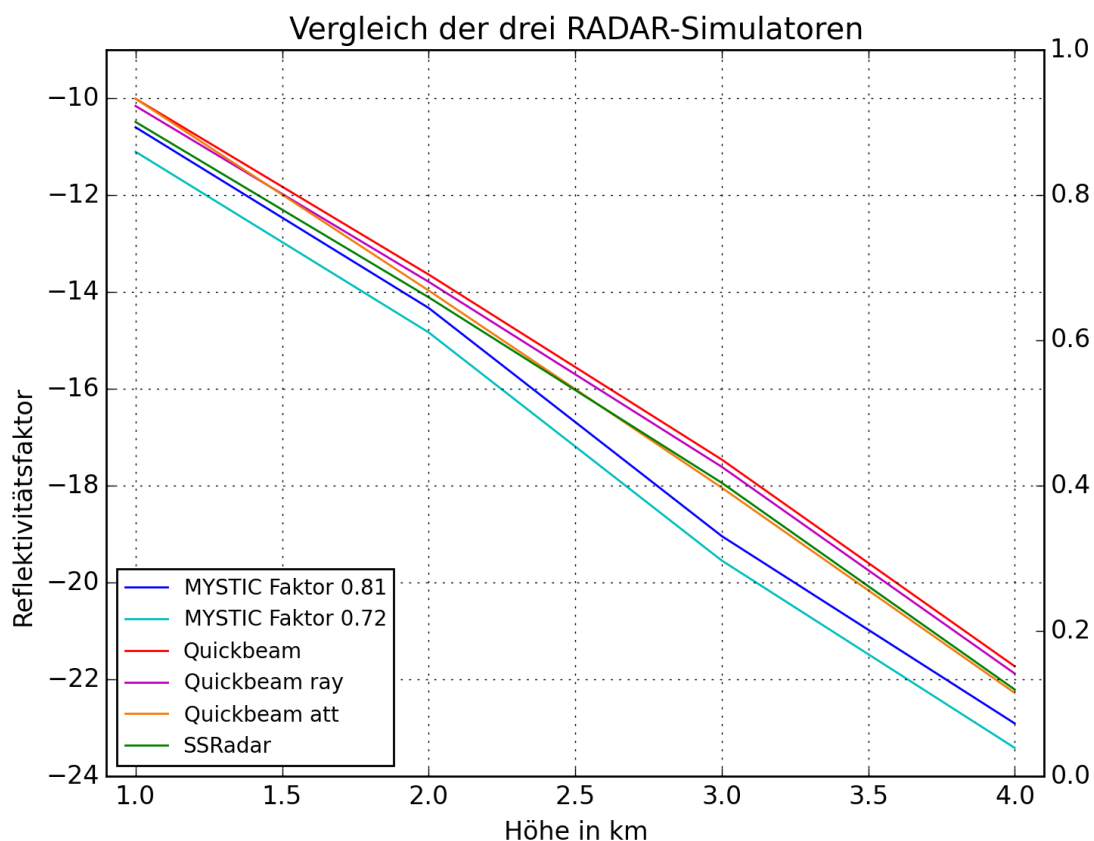


Abbildung 4.21: Vergleich der drei Radar-Simulatoren. Modifiziert-Gamma-verteilte Tröpfchenradien in allen Schichten, Daten in Tab. 4.13.

| Höhe (m) | QB | Att | QB att | QB ray | SSRadar | MY 0.81 | MY 0.72 |
|----------|--------|------|--------|--------|---------|---------|---------|
| 1000 | -10.01 | 0.00 | -10.01 | -10.16 | -10.49 | -10.60 | -11.10 |
| 2000 | -13.64 | 0.33 | -13.97 | -13.79 | -14.11 | -14.33 | -14.83 |
| 3000 | -17.46 | 0.58 | -18.04 | -17.61 | -17.94 | -19.04 | -19.54 |
| 4000 | -21.73 | 0.56 | -22.28 | -21.88 | -22.21 | -22.91 | -23.41 |

Tabelle 4.13: Vergleich der drei Radarsimulatoren. Vier Wolkenschichten mit jeweils 1000m Dicke, modifizierte Gamma-Tröpfchengrößenverteilung. Reflektivitäten jeder Schicht gemessen mit Quickbeam, jeweils mit (QB att) und ohne Abschwächung (Att) sowie mit reiner Rayleigh-Rechnung (QB ray), SSRadar und MYSTIC. Der LWC ist in g/m^3 angegeben, der r_{eff} in μm , die Reflektivitäten in dBZ . Die Abschwächung Att ist kumulativ.

hier falsch berechnet. Die in den Graphiken nicht sichtbare Abschwächung oberhalb der vierten Schicht beträgt 0.92 dB , ein Wert, welcher wieder physikalisch korrekt scheint. Allgemein sind die Abweichungen zwischen Quickbeam und MYSTIC bzw. SSRadar systematisch größer, als bei der monodispersen Verteilung (Abb. 4.20). Dennoch bleiben die Unterschiede zu MYSTIC 0.81 innerhalb eines Bereichs von 1 dB , was einem Faktor von 1.25 entspricht, für MYSTIC 0.72 beträgt die maximale Abweichung allerdings 1.5 dB , auch hier führt diese Kurve zu einem schlechteren Ergebnis, als MYSTIC 0.81.

4.3.3 Fazit

Dieser Vergleich zeigt zunächst, dass SSRadar richtig funktioniert. Desweiteren liefert MYSTIC mit dem Faktor 0.81 ein besseres Ergebnis, als mit dem Faktor 0.72, obwohl 0.72 aus theoretischen Argumenten heraus der korrekte Faktor ist (Kap 3.66). Es ist denkbar, dass der Faktor 0.72 korrekt ist, und die Abweichung andere Ursachen hat, da die beiden Modelle unterschiedlich aufgebaut sind und funktionieren. Der lineare Verlauf der Quickbeam- und SSRadar-Ergebnisse erweckt den Eindruck, dass MYSTIC in den oberen beiden Schichten falsch liegt. Die Zahlenwerte beweisen jedoch, dass Quickbeam oberhalb der dritten Schicht eine niedrigere Abschwächung berechnet, als oberhalb der zweiten Schicht, was bedeuten würde, dass die dritte Schicht das Signal nicht abschwächt, sondern leicht verstärkt. Physikalisch ergibt das wenig Sinn, daher muss hier von einem Fehler in Quickbeam ausgegangen werden.

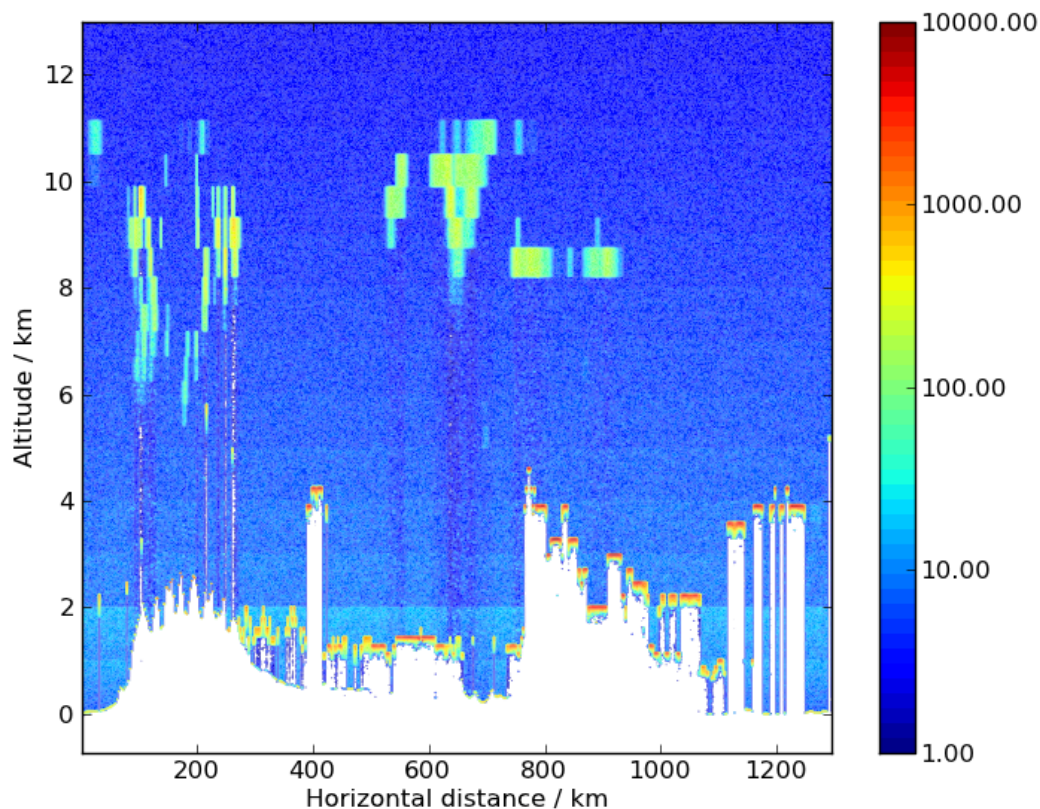


Abbildung 4.22: Abbildung aus Mayer et al [2012], zeigt den Range-Corrected Backscatter des im MYSTIC simulierten ATLID-Lidars.

4.4 Ein Anwendungsbeispiel

Abb. 4.22 und 4.23 zeigen einen Querschnitt durch ein Gebiet über Mitteleuropa, welches mit COSMO-DE simuliert wurde (Mayer et al [2012]). Die Daten zeigen den Zeitpunkt 12 UTC am 31. Juli 2011. Eine Simulation des Satelliten-gestützten ATLID-Lidars (ATmospheric LIDar ATLID an Bord von EarthCARE) ist in Abb. 4.22 zu sehen. Abb. 4.23 zeigt

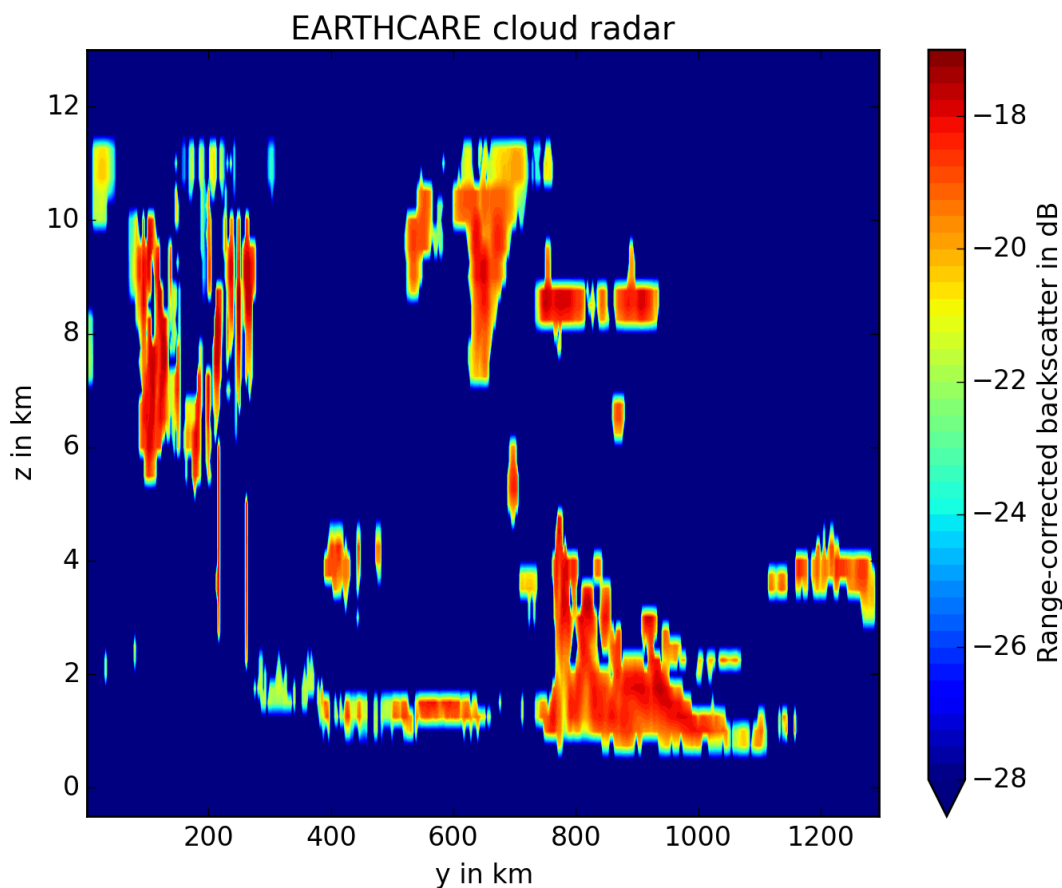


Abbildung 4.23: Dieselbe Szene wie in Abb. 4.22, diesmal Simulation des CPR-Wolkenradars.

die Simulation eines satellitengestützten 94GHz-Wolkenradars (entspricht dem Cloud Profiling Radar CPR an Bord des geplanten EarthCARE-Satelliten). Für beide Rechnungen kam derselbe MYSTIC-Algorithmus zum Einsatz. Die Steuerung des Radar-Simulators und die Darstellung der Radar-Daten erfolgt mit Hilfe umfangreicher Python-Skripte, da somit eine gute Kontrolle und Visualisierung von großen zwei- und dreidimensionalen Feldern möglich ist.

4.5 Kohärente Rückstreuung mit Radar

4.5.1 Anteil der Mehrfachstreuung am Radarsignal

Der Anteil der kohärenten Rückstreuung am Gesamtsignal hängt vom Anteil der Mehrfachstreuung am Gesamtsignal ab. Streuung von Mikrowellen an Hydrometeoren ist i.d.R. sehr schwach, daher wird zunächst untersucht, in welchen Bereichen eine nähere Betrachtung der kohärenten Rückstreuung überhaupt sinnvoll ist.

Dazu wurde in MYSTIC ein simpler Modellaufbau verwendet, in dem die Streuung von Mikrowellen bei drei typischen Radarwellenlängen an einer Wolke mit einer horizontalen Ausdehnung von $6 \times 6 \text{ km}$ mit unterschiedlichen LWC-Werten und Tröpfchenradien simuliert wurde. Die Wellenlängen, welche auch für die Hauptsimulation verwendet wurden,

| | Wolken | | | Niederschlag | | |
|---------|------------|------------|-----------|--------------|-----------|------|
| LWC | 0.2 | 0.5 | 1.0 | 2.0 | 5.0 | 10.0 |
| r | 10 | 20 | 50 | 100 | 1000 | 5000 |
| 3.2 mm | 10^{-7} | 10^{-6} | 10^{-4} | 10^{-3} | 0.1 | 0.2 |
| 8.6 mm | 10^{-9} | 10^{-7} | 10^{-6} | 10^{-5} | 0.01 | 0.1 |
| 54.5 mm | 10^{-12} | 10^{-11} | 10^{-9} | 10^{-8} | 10^{-4} | 0.01 |

Tabelle 4.14: Verhältnis der Mehrfachstreuung zum Gesamtsignal für verschiedene Kombinationen aus LWC (g/m^3) und (konstantem) Radius r (μm), welche für unterschiedliche Wolken- und Regenkonfigurationen stehen, und drei gängige Wetterradarfrequenzen.

sind 3.2 mm (entspricht einem Wolkenradar mit 93.7 GHz), 8.6 mm (entspricht einem Wolkenradar mit 34.9 GHz) und 54.5 mm (entspricht einem Regenradar mit 5.5 GHz).

Tab. 4.14 zeigt das mit dieser Testreihe berechnete Verhältnis der Mehrfachstreuung zum Gesamtsignal. Alle Werte in dem unter "Wolken" betitelten Bereich sind so klein, dass der gesamte Bereich vernachlässigbar ist. Das von Wolken reflektierte Radarsignal ist grundsätzlich zu schwach, um einen messbaren Effekt der kohärenten Rückstreuung zu erzeugen. Dies gilt für Wasserwolken und Eiswolken. Letztere können zwar größere Partikel enthalten, streuen aber geringer, da der Faktor $|K^2|$ in Gl. 2.160 für Eis nur ≈ 0.197 lautet und der Eiswassergehalt von Eiswolken i.d.R. sehr gering ist. Physikalisch existiert die KRSV natürlich auch in Wolken, aber mit vernachlässigbarer Größenordnung.

Unter dem mit "Niederschlag" betiteltem Bereich wurden typische Werte für Niederschlag simuliert, intern in MYSTIC werden diese als Wolken definiert, da MYSTIC keine dynamischen Effekte simulieren kann. Das Ergebnis zeigt, dass es abhängig von der Wellenlänge für moderaten bis extremen Niederschlag zu messbaren KRSV-Effekten kommen kann. Da es sich hier um eine sehr grobe Abschätzung handelt, werden die eigentlichen Rechnungen, welche die ursprüngliche Frage der Arbeit beantworten sollen, über einen weiten Bereich von Eingabeparametern verfügen.

4.5.2 Simulation der kohärenten Rückstreuverstärkung

Angenommen werden ein LWC-Bereich von 2 bis 50 g/m^3 und ein r -Bereich von 1 mm bis 20 mm. Dies soll den Bereich starker bis extremster Niederschlagsereignisse abdecken. Da das Interesse hier darauf gerichtet ist, welche Maximalwerte das Streusignal und damit ζ erreichen kann, werden auch hier nur Wasserpartikel betrachtet. Das sind entweder Wassertröpfchen oder Eispartikel, welche von einer Wasserschicht überzogen sind, z.B. schmelzende Hagelkörner.

Der Modellaufbau enthält eine hochreichende Wolke mit 6×6 km horizontaler Ausdehnung und 9 km Höhe, die aus 15 km Entfernung horizontal von einem Radargerät bestrahlt wird, das sich relativ zu der Wolke in einer Höhe von 1.5 km befindet. Diese Konfiguration wird mit allen Kombinationen der Tröpfchenradien 1 mm, 5 mm, 1 cm und 2 cm, und der LWCs 2, 5, 10, 20 und 50 g/m^3 gerechnet.

Da reale Regentropfen etwa bei einem Durchmesser von 7 mm auseinander brechen, können die größeren Radien als mit Wasser überzogene Eisteilchen interpretiert werden. Diese werden von einem Radar als Wasserteilchen gesehen und erzeugen entsprechend ein stärkeres Signal als reine Eisteilchen. Es handelt sich hier nicht um ein realistisches

Setup, da die gesamte Wolke nur einen konstanten Tröpfchenradius enthält und keine Verteilungen verwendet werden können (siehe Kap. 3.2.5).

| λ | r | a | Q_{as} | Q_{bs} | g | $\tau_{s;10g/m^3}$ | l_{10g/m^3} | $\zeta_{QP,10g/m^3}^B$ |
|-----------|-----------|-------|-----------------------|-----------------------|-------|--------------------|---------------|------------------------|
| <i>mm</i> | <i>mm</i> | | | | | | <i>m</i> | |
| 3.2 | 1 | 1.96 | 1.737 | 0.050 | 0.49 | 78.15 | 207.0 | 1.25 |
| 3.2 | 5 | 9.81 | 1.604 | 0.031 | 0.69 | 14.44 | 579.8 | 1.27 |
| 3.2 | 10 | 19.63 | 1.558 | 0.035 | 0.71 | 7.01 | 1025.3 | 1.25 |
| 3.2 | 20 | 39.27 | 1.523 | 0.035 | 0.70 | 3.43 | 1576.5 | 1.25 |
| 8.6 | 1 | 0.73 | 0.936 | 0.127 | -0.08 | 42.13 | 412.4 | 1.16 |
| 8.6 | 5 | 3.65 | 1.783 | 0.060 | 0.56 | 16.05 | 579.7 | 1.28 |
| 8.6 | 10 | 7.31 | 2.388 | 0.044 | 0.63 | 7.74 | 982.3 | 1.29 |
| 8.6 | 20 | 14.61 | 2.268 | 0.042 | 0.63 | 3.76 | 1566.2 | 1.28 |
| 54.5 | 1 | 0.12 | $4.432 \cdot 10^{-4}$ | $4.907 \cdot 10^{-5}$ | 0.08 | 0.02 | – | 1.00 |
| 54.5 | 5 | 0.58 | 0.319 | 0.053 | -0.22 | 2.87 | 2215.2 | 1.04 |
| 54.5 | 10 | 1.15 | 1.948 | 0.180 | 0.02 | 8.77 | 935.8 | 1.19 |
| 54.5 | 20 | 2.31 | 1.818 | 0.099 | 0.43 | 4.09 | 1466.9 | 1.15 |

Tabelle 4.15: Alle Kombinationen aus Wellenlänge (in mm) und Radius (in mm), die dazu gehörigen Größenparameter, Streueffizienzen Q_{as} (Gl. 2.3), Rückstreuungseffizienzen Q_{bs} (Gl. 2.167), Asymmetrieparameter g , optische Dicke der Streuung τ_s bei $LWC = 10g/m^3$ (in m), mittlere freie Weglänge l bei $LWC = 10 g/m^3$ und das Ergebnis ζ_{QP}^B ebenfalls bei $LWC = 10 g/m^3$. Der l -Wert für $\lambda = 54.5 mm$ und $r = 1 mm$ fehlt, da er aufgrund der kleinen optischen Dicke durch Anwendung des Importance Sampling-Faktors (siehe Kap. 3.1.6) verfälscht wurde.

Der normalerweise beobachtete Maximalwert des LWC liegt bei ca. $10 g/m^3$, jedoch berichtet Roys [1966] von einem Messwert von $43.7 g/m^3$ in einem extremen Niederschlagsereignis, daher wird für diese Testreihe ein Maximalwert von $50 g/m^3$ angenommen. Für jede Simulation werden 100 Millionen Photonen verwendet. Die Konfiguration, welche hier verwendet wird, entspricht Fall B in Abb. 3.8 mit mittelndem Empfänger, betrachtet wird die Komponente ζ_{QP}^B , da dieses in Kap. 4.1.3 zum genauesten Ergebnis geführt hat, und da moderne Wetterradargeräte in der Regel mit linear polarisierter Strahlung arbeiten. Dem Prinzip eines Radar näher kommen würde zwar die Konfiguration C mit mittelndem Empfänger und finitem Öffnungswinkel, aber wie gezeigt wurde, überschätzt ζ^C die KRSV-Werte.

Tabelle 4.15 zeigt alle in der Testreihe vorkommenden Größenparameter und weitere Parameter bzw. Ergebnisse. Abb. 4.24 und 4.25 zeigen alle ζ_{QP}^B -Werte für alle betrachteten Wellenlängen, Effektivradien und LWCs. Es ist offensichtlich, dass ζ_{QP}^B mit zunehmendem LWC ansteigt, jedoch mit einer sich abflachenden Tendenz, hin zu einer Sättigung, welche in keinem der Fälle aber erreicht wird.

- Für $\lambda = 3.2 mm$ liegen die Kurven relativ nahe beieinander und verlaufen quasi parallel. Die $r = 5 mm$ -Kurve sticht leicht hervor, was möglicherweise mit ihrer im Vergleich zu den anderen Kurven geringeren Rückstreuungseffizienz zu tun haben könnte (vgl. Abb. 4.26).

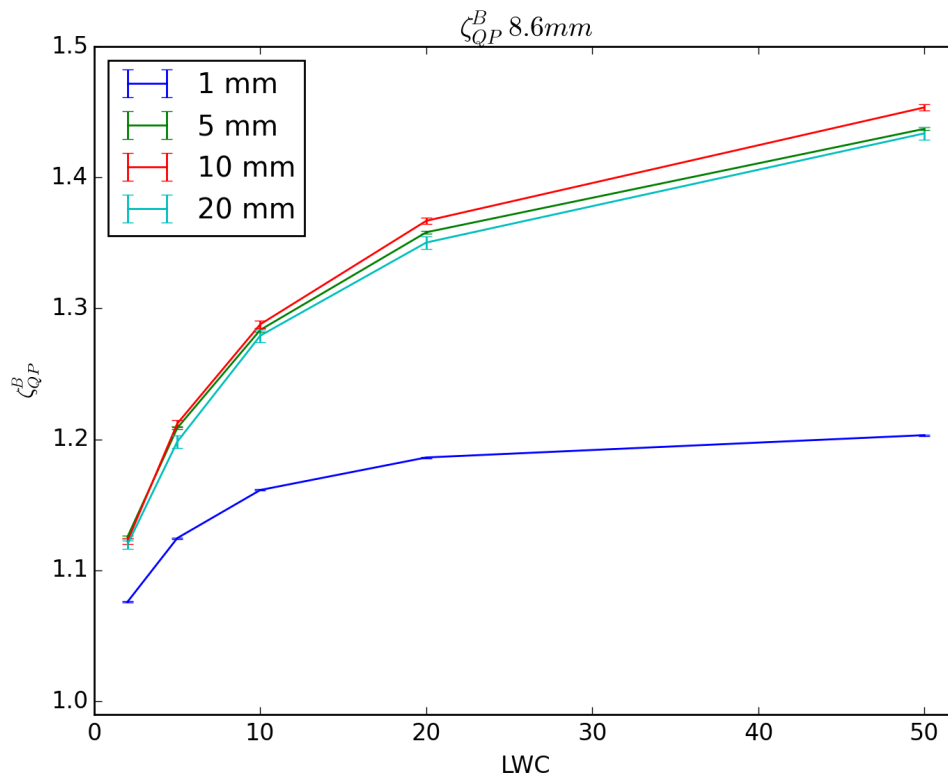
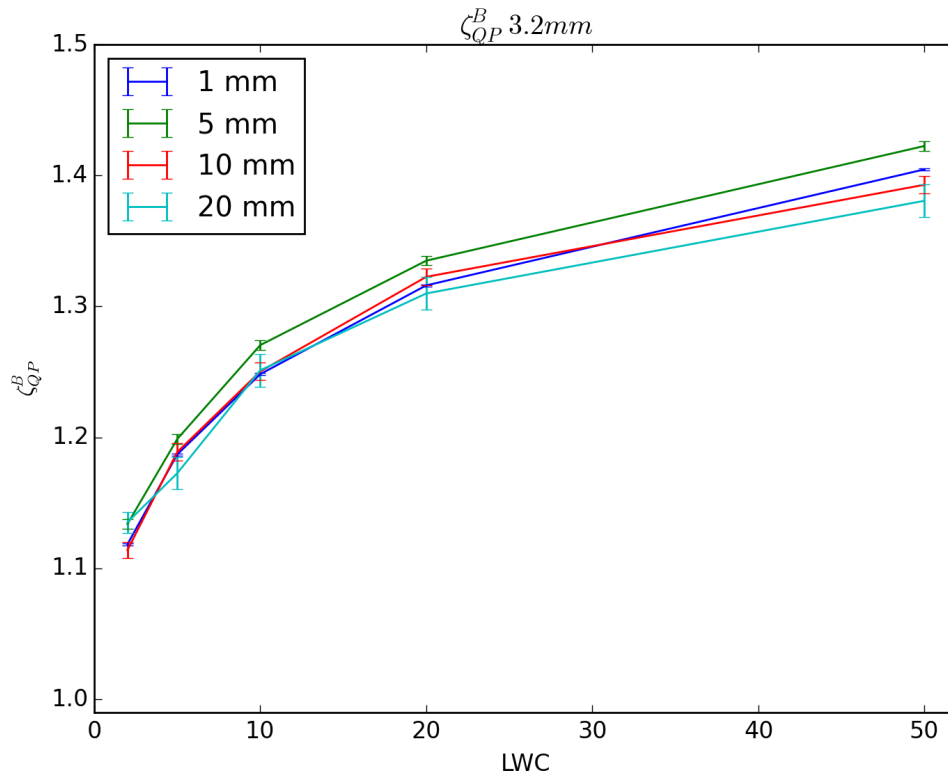


Abbildung 4.24: ζ_{QP}^B der vier Effektivradien geplottet gegen den LWC (g/m^3). Oben für $\lambda = 3.2$ mm, unten für $\lambda = 8.6$ mm.

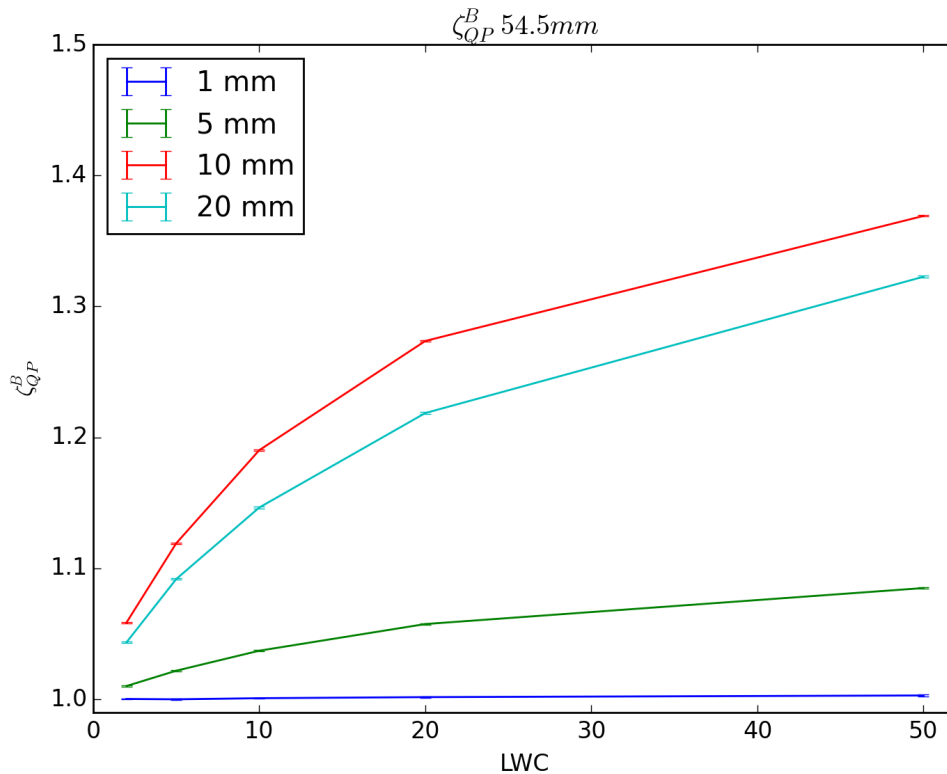


Abbildung 4.25: ζ_{QP}^B der vier Effektivradien geplottet gegen den LWC (g/m^3) für $\lambda = 54.5$ mm.

- Für $\lambda = 8.6$ mm ist die $r = 1$ mm-Kurve geringer als der Rest, was an ihrer deutlich geringeren Streueffizienz liegt (vgl. Abb. 4.26). Die anderen drei Kurven liegen sehr eng beieinander und verlaufen erneut quasi parallel.
- Im Fall $\lambda = 54.5$ mm befindet man sich in einem Größenparameterbereich, über welchen die Streueigenschaften stark variieren, anhand von Abb. 4.26 sind diese Ergebnisse gut erklärbar. $r = 1$ mm befindet sich noch an der Grenze zum Rayleigh-Streubereich und Q_{as} und damit die Mehrfachstreuung ist hier zu schwach, um ein nennenswertes ζ_{QP}^B zu erzeugen. Die anderen drei ζ_{QP}^B -Werte sind von der Reihenfolge ebenfalls so angeordnet, wie die Stärke der Q_{as} -Werte.

Die Streueffizienz Q_{as} ist definiert in Gl. 2.3, die Rückstreueffizienz Q_{bs} in Gl. 2.167. Beide Streueffizienzen wurden mit Hilfe des BHMIE-Codes (Bohren et al [1983]) ermittelt und sind in Abb. 4.26 In Abhängigkeit vom Größenparameter dargestellt. Desweiteren enthält Tab. 4.15 die in den MYSTIC-Rechnungen ermittelten Asymmetrieparameter g (siehe Kap. 2.3.4), sowie für $LWC = 10g/m^3$ die optischen Dicken der Streuung τ_s (siehe Gl. 2.15), die mittleren freien Streu-Weglängen (siehe Kap. 2.3.4) und die Ergebnisse ζ_{QP}^B . Aufgrund des konstant gehaltenen LWCs nimmt die optische Dicke mit zunehmendem r deutlich ab. Da der Tröpfchenradius über das Volumen in den LWC eingeht, bedeutet eine Erhöhung des Radius bei konstant gehaltenem LWC eine Verringerung der Tröpfchenzahl und damit eine Verringerung der Streuobjekte im Medium. Zusätzlich nimmt mit wachsendem Größenparameter nach dem Maximum bei $a \approx 1$ die Streueffizienz sukzessive ab (siehe Abb. 4.26).

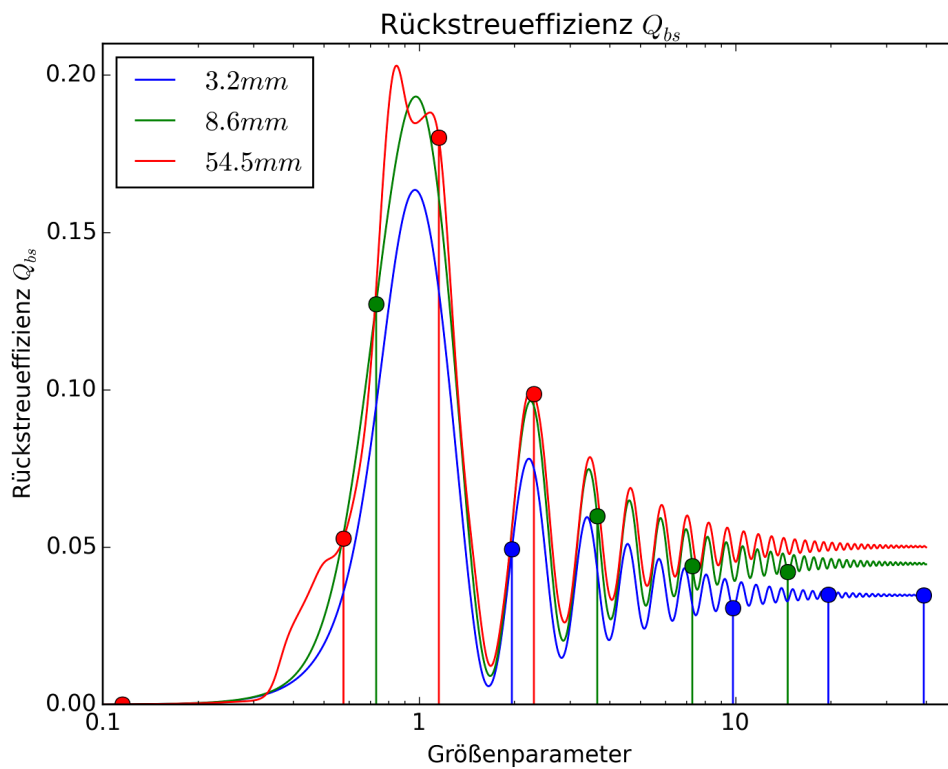
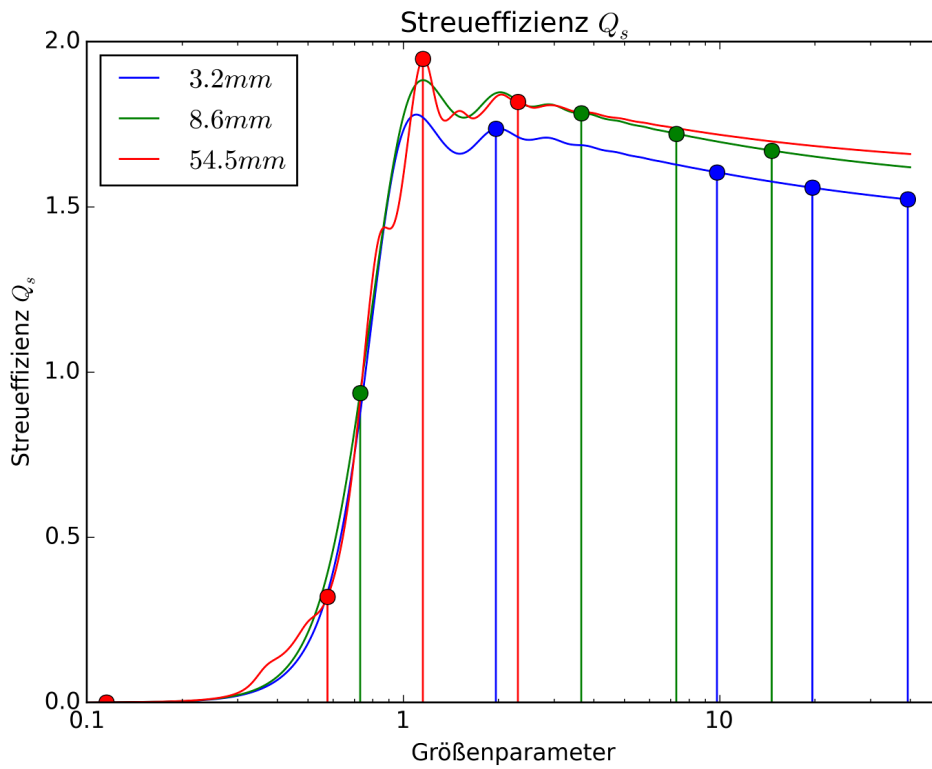


Abbildung 4.26: Streueffizienz Q_{as} (oben) und Rückstreueffizienz Q_{bs} (unten) geplottet gegen den Größenparameter a . Die in den Rechnungen vorkommenden Größenparameter und deren Effizienzwerte sind durch Kreise gekennzeichnet.

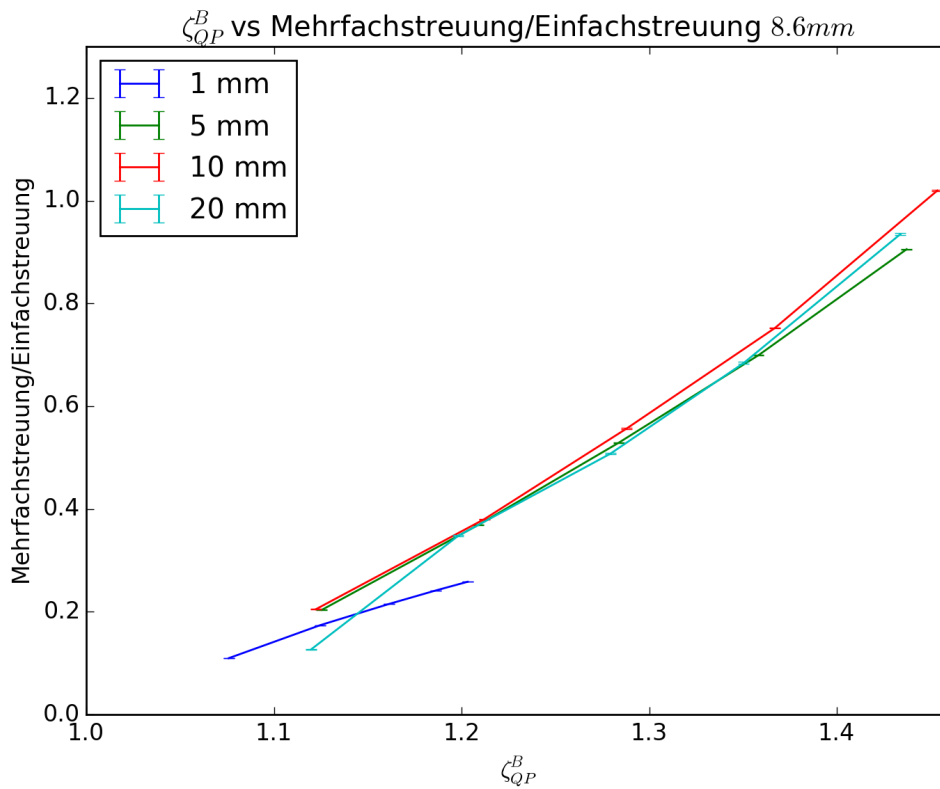
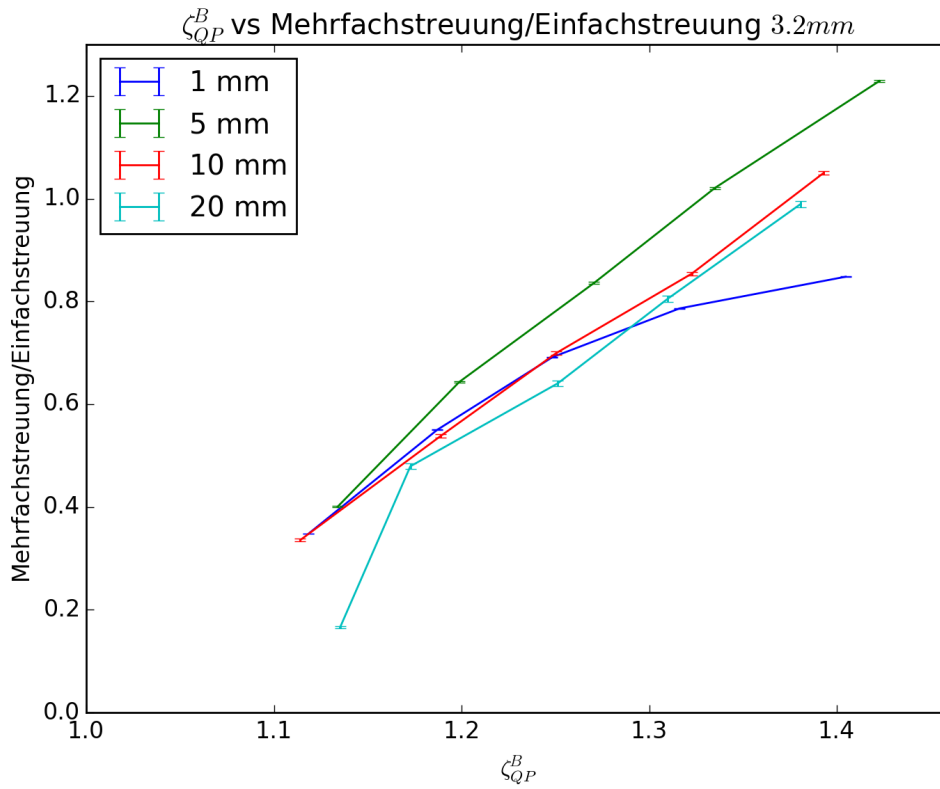


Abbildung 4.27: Das Verhältnis von Mehrfachstreuung und Einfachstreuung der vier Effektivradien geplottet gegen ζ_{QP}^B . Oben für $\lambda = 3.2mm$, unten für $\lambda = 8.6mm$.

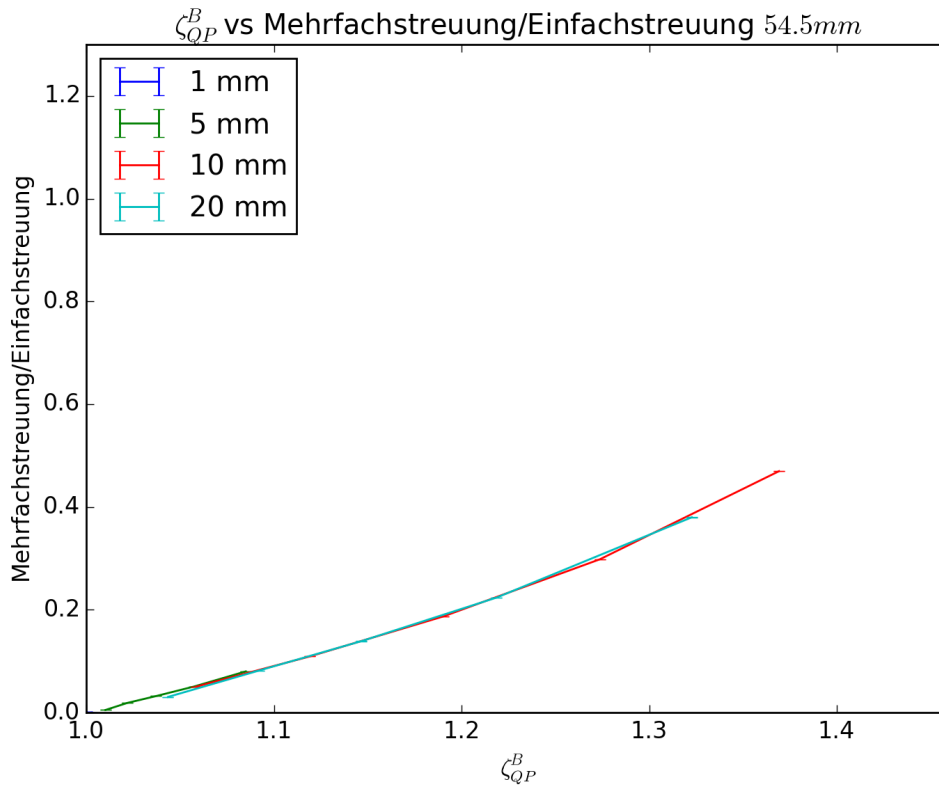


Abbildung 4.28: Das Verhältnis von Mehrfachstreuung und Einfachstreuung der vier Effektivradien geplottet gegen den ζ_{QP}^B für $\lambda = 54.5\text{mm}$.

Zusammenfassend kann man folgendes ableiten:

- Ein eindeutiger Zusammenhang zwischen ζ_{QP}^B und dem Asymmetrieparameter g konnte im Rahmen dieser Testreihe nicht nachgewiesen werden.
- Abgesehen von der Tatsache, dass die optische Dicke ausreichend groß sein muss, um ein nennenswertes Mehrfachstreusignal zu ermöglichen, ist ein weiter gehender Zusammenhang zwischen optischer Dicke bzw. mittlerer freien Streuweglänge und ζ_{QP}^B nicht erkennbar. Es ist aber interessant, dass die ζ_{QP}^B -Werte für 3.2 mm und 8.6 mm bei optischen Dicken unter 4 keine Abschwächung zeigen, obwohl das in Kap. 4.1.1 beobachtete Verhalten diesen Zusammenhang zwischen optischer Dicke und ζ_{QP}^B erwarten lässt.
- Für 54.5 mm ist eine Abnahme von ζ_{QP}^B mit abnehmender optischer Dicke erkennbar. Diese hängt mit dem Größenparameter bzw. mit der Streueffizienz Q_{as} zusammen, welche für diese Wellenlänge am geringsten ist. Ein Vergleich mit der Rechnung für $\lambda = 8,6\text{ mm}$ und $r = 1\text{ mm}$, für welche $a = 0.73$ und $Q_{as} = 0.936$ sind, bestärkt diesen Eindruck. Dies ist auch erwartet, da die Streueffizienz die Mehrfachstreuung bestimmt. Die Rückstreuereffizienz Q_{bs} dagegen wirkt sich vor allem auf die Einfachstreuung aus.
- Die Absorption von Mikrowellen an Wassertropfen ist stark und wurde im Gegensatz zu den Rechnungen in Kap. 4.1 mit berücksichtigt. Absorption führt zu einer Abflachung des KRSV-Maximums und damit zu verringerten ζ_{QP}^B -Werten in Rückstreu-

richtung (vgl. Fiebig [2010] und Akkermans et al [2007]). Dies ist der Hauptgrund dafür, dass die Ergebnisse auch für die höchsten optischen Dicken in Tab. 4.15 von der Größenordnung her unterhalb der Ergebnisse der Validierung (Tab. 4.4) liegen.

- Der deutlichste Zusammenhang ist der zwischen ζ_{QP}^B und dem LWC. Ein höherer LWC führt offensichtlich zu einer höheren optischen Dicke, was zu einem stärkeren Mehrfachstreusignal führt, welches wiederum zu einem höheren ζ_{QP}^B -Signal führt.

Aus dem Anteil der Mehrfachstreuung alleine kann man keinen eindeutigen Rückschluss auf den Zahlenwert von ζ_{QP}^B ziehen, da das Verhältnis zwischen beiden Werten auch abhängig von den Streueigenschaften ist. Das Verhältnis von Mehrfachstreuung und Einfachstreuung ist in den Abb. 4.27 und 4.28 gegen ζ_{QP}^B geplottet, alle drei Graphiken mit identischen Achsen. Es zeigt in der Mehrzahl der Fälle klare lineare Zusammenhänge zwischen den beiden Größen.

Der Vergleich der drei Wellenlängen zeigt aber auch, dass die Steigungen der Geraden sich zwischen den Wellenlängen sehr unterscheiden, obwohl sich die abgedeckten Größenparameter teilweise überschneiden. Auch würden die Kurven bei Erreichen der Sättigung der Mehrfachstreuung einen konstanten ζ_{QP}^B -Wert annehmen, d.h. senkrecht verlaufen. Sättigung wird aber in keinem der gerechneten Fälle erreicht.

Grundsätzlich gilt, dass Fälle mit einem LWC über 10 g/m^3 extrem selten vorkommen. Der maximale simulierte ζ_{QP}^B -Wert liegt bei 1.29. Zieht man in Betracht, dass die ζ_{QP}^B -Werte von Unsicherheiten betroffen sind, ergibt ein Grenzwert von 1.3 Sinn. Aus den Ergebnissen lässt sich schließen, dass ζ_{QP}^B -Werte, die größer als 1.3 sind, entsprechend sehr selten auftreten sollten.

Der Wert 1.3 entspricht einer Erhöhung des Radarreflektivitätsfaktors um 1.14 dB . Dem höchsten simulierten Wert von 1.45 für $\lambda = 8.6 \text{ mm}$, $LWC = 50 \text{ g/m}^3$ und $r = 10 \text{ mm}$ entspricht eine Erhöhung von 1.61 dB . Das sind beides relativ geringe Werte, verglichen einerseits mit den Größenordnungen von Signalen entsprechender Starkniederschlagsereignisse von 50 dBZ und mehr (Werte oberhalb von 55 dBZ sind generell mit Hagel assoziiert, siehe Rinehart [2010]), und andererseits mit der Größenordnung der generellen Ungenauigkeiten eines Radargerätes (z.B. im Gain der Antenne, in der Pulsleistung, dem temperaturabhängigen Geräterauschen und den Leitungsverlusten, siehe auch Rinehart [2010]), welche bei 1 dB liegt.

Die Berechnungen zeigen, dass die Erhöhung abhängig vom Radius der Tröpfchen und der Wellenlänge ist. In der Realität ist man jedoch mit einer unbekanntem Tröpfchengrößenverteilung konfrontiert, welche man aus dem Doppler-Signal eines Radars ableiten kann. Kennt man diese, wäre es möglich, ein ζ für eine realistische Situation zu simulieren und damit entsprechenden Messdaten zu korrigieren. Die Ableitung von Tröpfchengrößenverteilungen aus Doppler-Radar-Signalen ist jedoch eine komplexe Angelegenheit, eine gute Genauigkeit zu erzielen ist hier sehr schwer.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Fazit

Ziel der Arbeit war die Beantwortung der Frage, ob der Effekt der kohärenten Rückstreuung das Signal von Wetterradaren so stark beeinflussen kann, dass er bei der Auswertung von gemessenen Radardaten berücksichtigt werden muss.

Im ersten Kapitel wurden zunächst die wesentlichen Grundbegriffe der Strahlungs- und Streutheorie eingeführt, danach wurde dargestellt, wie die in der Atmosphärenphysik verwendete Strahlungstransfergleichung aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitet werden kann. Dabei wurde besonderes Augenmerk darauf gelegt, bei welchem Schritt der Ableitung die kohärente Rückstreuung vernachlässigt wird. Im Folgenden wurde die kohärente Rückstreuung genauer erläutert und zwei unterschiedliche Wege aufgezeigt, wie der Verstärkungseffekt konkret berechenbar ist. Am Schluss folgte eine Einführung in die Radar-Theorie.

Der erste Weg (Mishchenko et al [2006]) erlaubt die implizite Ableitung der Verstärkung in exakter Rückstreuerrichtung alleine aus der gemittelten Einfach- und Mehrfachstrematrix (Reflexionsmatrix) eines chaotischen streuenden Mediums, vorausgesetzt, dass die Mehrfachstreuung gesättigt ist. Der zweite Weg, nach Muinonen [2004], erlaubt die explizite Berechnung des Effekts in jeder beliebigen Richtung mit Hilfe der Stokes-Vektoren der beiden reziproken, die kohärente Rückstreuung bedingenden Streuewege.

Im zweiten Kapitel wurde die Arbeitsweise des Monte Carlo-Modells MYSTIC im Detail erläutert und dargestellt, wie die beiden o.g. Methoden zur Berechnung der kohärenten Rückstreuerverstärkung in MYSTIC integriert wurden. Dabei ergaben sich gewisse Schwierigkeiten mit numerischen Ungenauigkeiten und bestimmten Limitierungen, welche sich aus dem grundlegenden Design des Modells ergaben. Es zeigte sich, dass die Simulation der kohärenten Rückstreuung andere Anforderungen stellt, als die Simulation von Strahlung in der Atmosphäre. Ein Modell, das beide Aspekte vereinen will, muss daher von Grund auf mit Rücksicht auf die Anforderungen beider Aspekte geplant werden. Am Ende des Kapitels wurde dargelegt, wie die Simulation von Radar in MYSTIC funktioniert, außerdem wurde das Modell SSRadar kurz vorgestellt.

Das dritte Kapitel behandelte die Ergebnisse. Als erstes kam die Validierung der beiden implementierten Methoden zur Berechnung der kohärenten Rückstreuung in exakter Rückstreuerrichtung mit detaillierter Diskussion. Darauf folgten die Validierung der Form des Rückstremaximums und die Validierung der Radar-Simulation mit MYSTIC und SSRadar. Schließlich wurden Radar-Simulationen berechnet, welche die Frage nach der Rolle der kohärenten Rückstreuung für Wetterradar im Rahmen der Möglichkeiten gut beantworteten.

Insgesamt konnte gezeigt werden, dass die Simulation von kohärenter Rückstreuung in einem Monte Carlo-Modell mit beiden Methoden machbar ist und zufriedenstellende Ergebnisse liefern kann, vorausgesetzt, dass bei der Implementierung große Sorgfalt angewendet wird. Im konkreten Fall führte die Berechnung der kopolarisierten Komponente QP bei linear polarisierter Strahlung zum besten Ergebnis. Da moderne Radargeräte i.d.R. ebenfalls linear polarisierte Strahlung verwenden, können die folgenden Ergebnisse im Rahmen der beschriebenen Ungenauigkeiten als solide angesehen werden:

- Kohärente Rückstreuung spielt im Radarsignal von Wolken, egal ob aus Eis oder Wasser keine nennenswerte Rolle.
- Kohärente Rückstreuung spielt im Radarsignal an schwachem bis moderatem Niederschlag ebenfalls keine nennenswerte Rolle.
- Kohärente Rückstreuung kann sich im Radarsignal an starkem bis extremem Niederschlag aus großen Tropfen oder Eis-Partikeln bemerkbar machen, insbesondere wenn diese mit einer Schicht aus Schmelzwasser überzogen sind. Die Verstärkung kann dabei eine Größenordnung von 1 *dB* erreichen, im Extremfall sogar bis zu 1.5 *dB*. Diese Werte gehen jedoch kaum über die Größenordnung der Geräte-internen Messungenauigkeiten hinaus, d.h. die Anwesenheit eines KRSV-Signals ließe sich nur schwer nachweisen. Daraus kann der Schluss gezogen werden, dass kohärente Rückstreuung auch in diesem Fall i.d.R. keine nennenswerte Rolle spielt, solange man nicht mit einem Radarempfänger mit ausreichend hoher Genauigkeit arbeitet.

Dem Ziel, in einem konkreten extremen Niederschlagsereignis den Anteil der kohärenten Rückstreuung aus dem Gesamtsignal zu isolieren und zu bestimmen, könnte man näher kommen, indem man mit Hilfe der Doppler-Eigenschaften des Radars eine Tröpfchen-größenverteilung möglichst akkurat bestimmt, und mit ihrer Hilfe und einem entsprechend auf die Berechnung der kohärenten Rückstreuung spezialisierten Modell die KRSV berechnet. Auch wäre es denkbar, mittels eines hochsensitiven multistatischen Radars die kohärente Rückstreuung eines Radargerätes direkt zu messen. In dieser Richtung ist durchaus Forschungspotential vorhanden.

Ob diese Ergebnisse im Endeffekt zu einer konkreten Anwendung oder Verbesserung von Messergebnissen und Modellen führen oder ob sie lediglich der Grundlagenforschung dienen, lässt sich noch nicht endgültig abschätzen. Auch wenn sie für die Atmosphärenphysik von geringer Relevanz bleiben sind die Ergebnisse für andere Forschungszweige, z.B. die Festkörperphysik (z.B. Akkermans et al [2007]), durchaus von Interesse, insbesondere was die Monte Carlo-Simulation betrifft. Die Radar-Simulation mit MYSTIC ist ebenfalls erweiterungsfähig, z.B. durch die Implementierung der Depolarisation durch die Verformung fallender Regentropfen.

Anhang

Absorption, Streuung, und Extinktion im Detail

Dieser Anhang beschreibt eine alternative Ableitung der Querschnitte der Streuung, Absorption und Extinktion.

Gegeben sei ein einzelner beliebiger Streuer, der durch eine ebene Welle beleuchtet wird. Das Feld um den Streuer herum besteht aus zwei Komponenten, dem ungestreuten und dem gestreuten Feldanteil von jeweils dem elektrischen und dem magnetischen Feld:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s \quad (1)$$

Die Energieflussdichte einer EM-Welle wird durch den Poynting-Vektor beschrieben. Für diese Betrachtung wird der zeitlich gemittelte Poynting-Vektor $\mathcal{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ verwendet, welcher Dichte und Richtung des Energietransports einer elektromagnetischen Welle beschreibt:

$$\langle \mathcal{S}(\mathbf{r}, t) \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \} = \langle \mathcal{S}_i(\mathbf{r}, t) \rangle_t + \langle \mathcal{S}_s(\mathbf{r}, t) \rangle_t + \langle \mathcal{S}_e(\mathbf{r}, t) \rangle_t \quad (2)$$

Der Poynting-Vektor der einfallenden Strahlung:

$$\langle \mathcal{S}_i(\mathbf{r}, t) \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i^*(\mathbf{r}) \} \quad (3)$$

Der Poynting-Vektor der gestreuten Strahlung:

$$\langle \mathcal{S}_s(\mathbf{r}, t) \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_s^*(\mathbf{r}) \} \quad (4)$$

Der Poynting-Vektor der extingierten Strahlung:

$$\langle \mathcal{S}_e(\mathbf{r}, t) \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_s^*(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_i^*(\mathbf{r}) \} \quad (5)$$

Der Anteil der Extinktion lässt sich als die Wechselwirkung des einfallenden und des gestreuten Feldes beschreiben. Da das einfallende Feld planar ist, gibt es diese Wechselwirkung nur im Bereich der exakt vorwärts gestreuten Strahlung, alle anderen Richtungen enthalten nur gestreute Strahlung.

Um den Streuer herum wird eine Kugelfläche definiert, welche den Streuer, und nur diesen, komplett einschließt, und es werden die einzelnen Energieflussdichten durch die Oberfläche dieser Kugel betrachtet. Dazu wird über die Oberfläche der Kugel integriert, wobei r der Radius der Kugel ist und $\hat{\mathbf{n}}$ der nach außen weisende Einheitsvektor auf der Kugeloberfläche. Die innerhalb dieser Oberfläche absorbierte Energie ist dann:

$$W_a = - \oint_S \langle \mathcal{S}(\mathbf{r}, t) \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = -r^2 \int_{4\pi} \langle \mathcal{S}(\mathbf{r}, t) \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}} \quad (6)$$

Da das Teilchen dem einfallenden Feld Energie entzieht, entsteht ein Nettoenergiefluss nach innen, welcher der absorbierten Energie entspricht.

Die einfallende Energie über die Kugelfläche ist 0, da es sich um einen konstanten parallelen Energiefluss handelt und das Medium um den Streuer nicht absorbierend ist:

$$W_i = -r^2 \int_{4\pi} \langle \mathcal{S}_i(\mathbf{r}, t) \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (7)$$

Die gestreute Energie ist nach außen gerichtet und daher positive:

$$W_s = r^2 \int_{4\pi} \langle \mathcal{S}_s(\mathbf{r}, t) \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}} \quad (8)$$

Der Fluss der extingierten Energie ist ebenfalls nach innen gerichtet und daher negativ:

$$W_e = -r^2 \int_{4\pi} \langle \mathcal{S}_e(\mathbf{r}, t) \rangle_t \cdot \hat{\mathbf{n}} d\hat{\mathbf{n}} \quad (9)$$

Die innere Energiebilanz der Kugel lautet daher wie folgt:

$$W_a = -W_s + W_e \quad (10)$$

$$W_e = W_s + W_a \quad (11)$$

Extinktionsquerschnitt und Streuquerschnitt lassen sich damit auch schreiben (Mishchenko et al [2006] Kap. 3.9) als:

$$\sigma_e = \frac{W_e}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon E}{\mu_0}} |\mathbf{E}_{i,0}|^2} \quad (12)$$

$$\sigma_s = \frac{W_s}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon E}{\mu_0}} |\mathbf{E}_{i,0}|^2} \quad (13)$$

Und der Absorptionsquerschnitt ist dementsprechend gegeben durch:

$$\sigma_a = \sigma_e - \sigma_s \geq 0 \quad (14)$$

Mit Hilfe der Streu- und der Extinktionsmatrizen aus Kap. 2.2.6 können Extinktions- und Streuquerschnitt auch wie folgt ausgedrückt werden:

$$\sigma_e = \frac{1}{|\mathbf{i}^{inc}|} [K_{11}(\hat{\mathbf{n}}^{inc})|\mathbf{i}^{inc}| + K_{12}(\hat{\mathbf{n}}^{inc})\mathbf{Q}^{inc} + K_{13}(\hat{\mathbf{n}}^{inc})\mathbf{U}^{inc} + K_{14}(\hat{\mathbf{n}}^{inc})\mathbf{V}^{inc}] \quad (15)$$

$$\sigma_s = \frac{1}{|\mathbf{i}^{inc}|} \int_{4\pi} [Z_{11}(\hat{\mathbf{n}}^{inc})|\mathbf{i}^{inc}| + Z_{12}(\hat{\mathbf{n}}^{inc})\mathbf{Q}^{inc} + Z_{13}(\hat{\mathbf{n}}^{inc})\mathbf{U}^{inc} + Z_{14}(\hat{\mathbf{n}}^{inc})\mathbf{V}^{inc}] d\hat{\mathbf{r}} \quad (16)$$

Transformation der Strahlungstransfergleichung

Dieser Anhang zeigt die Umwandlung der ISTG, wie sie von Mishchenko et al [2006] abgeleitet wurde (Gl. 2.92) in die ISTG nach Marchuk et al [1980] und Marshak et al [2005] (Gl. 3.13). Die ISTG nach Mishchenko lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(Q, \hat{\mathbf{q}}) &= \delta(\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{s}}) \mathbf{I}_v(Q) \\ &+ n_0 \int_0^Q \int_{4\pi} \exp[-(Q-q)n_0 \langle \mathbf{K}(\hat{\mathbf{q}}) \rangle_\xi] \langle \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}') \rangle_\xi \mathbf{I}(q, \hat{\mathbf{q}}') d\hat{\mathbf{q}}' dq \end{aligned} \quad (17)$$

Zunächst wird das Konzept des Vorwärtsstreu-Teils der Strahlung aufgegeben und die Vorwärtsstreuung, welche in \mathbf{I}_v enthalten war, wird der Streumatrix \mathbf{Z} zugeschlagen, welche wieder in Vorwärtsstreurichtung gültig ist und mit \mathbf{Z}' bezeichnet wird. Die Größe \mathbf{I}_0 steht lediglich für die ungestreute Strahlung am Punkt Q . Das hat zur Folge, dass die Extinktion, welche die ungestreute Strahlung auf ihrem Weg vom Rand des Mediums bis zum Beobachter erfährt, explizit behandelt werden muss. Daher wird definiert:

$$\mathbf{I}_0(Q, \hat{\mathbf{q}}) = \delta(\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{s}}) \mathbf{I}_0(Q, \hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{I}_{00}(Q) \exp \left[- \int_0^Q n_0 \mathbf{K}(Q, q, \hat{\mathbf{s}}) dq \right] \quad (18)$$

Bei N Streuungen müssen stets $N + 1$ Wegstrecken und damit genauso viele Extinktionsterme berücksichtigt werden. Es gibt hier zwei Möglichkeiten, die STG zu formulieren: Entweder man betrachtet bei jeder Streuung den Weg des Photons hin zu dieser Streuung, oder man betrachtet den Weg von dieser Streuung weg. Diese Frage wird in der Literatur ausführlicher behandelt (z.B. in Marshak et al [2005] Kap.3.8.3). In dieser Arbeit wird der zweite Ansatz gewählt. Die Mittelungen fallen ebenfalls weg wodurch \mathbf{K} und \mathbf{Z}' ortsabhängig werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(Q, \hat{\mathbf{q}}) &= \mathbf{I}_0(Q, \hat{\mathbf{q}}) \\ &+ n_0 \int_0^Q \int_{4\pi} \exp \left[- \int_0^Q n_0 \mathbf{K}(Q, q, \hat{\mathbf{q}}) dq \right] \mathbf{Z}'(q, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}') \mathbf{I}(q, \hat{\mathbf{q}}') d\hat{\mathbf{q}}' dq \end{aligned} \quad (19)$$

Da hier nur kugelförmige Teilchen betrachtet werden, kann statt der Extinktionsmatrix \mathbf{K} der Extinktionsquerschnitt σ_e verwendet werden. Der in \mathbf{Z}' enthaltene Streuquerschnitt σ_s wird aus der Matrix raus gezogen, wodurch die Streumatrix \bar{Z} definiert wird: $\sigma_s \bar{Z} = \mathbf{Z}'$. Die STG sieht damit wie folgt aus:

$$\mathbf{I}(Q, \hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{I}_0(Q, \hat{\mathbf{q}}) + n_0 \int_0^Q \int_{4\pi} \exp \left[- \int_0^Q n_0 \sigma_e(Q, q, \hat{\mathbf{q}}) dq \right] \sigma_s(q) \bar{Z}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}') \mathbf{I}(q, \hat{\mathbf{q}}') d\hat{\mathbf{q}}' dq \quad (20)$$

Sei die optische Dicke $\tau_e = \int_0^Q n_0 \sigma_e(Q, q, \hat{\mathbf{q}}') dq = \int_0^Q k_e(Q, q, \hat{\mathbf{q}}') dq$ und $n_0 \sigma_s = k_s$ (siehe Gleichungen 2.14 und 2.15). Damit ergibt sich für die STG:

$$\mathbf{I}(Q, \hat{\mathbf{q}}) = \mathbf{I}_0(Q, \hat{\mathbf{q}}) + \int_0^Q \int_{4\pi} k_s(q) \exp[-\tau_e(Q, q)] \bar{Z}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}') \mathbf{I}(q, \hat{\mathbf{q}}') d\hat{\mathbf{q}}' dq \quad (21)$$

Die bisher betrachtete Form der STG mit Dreifachintegral ist vorteilhaft gegenüber einer vollen fünffachen Integration über alle drei Raumkoordinaten und zwei Richtungswinkel.

In dieser Transformation soll aber die fünfdimensionale Form der ISTG gezeigt werden, wie sie auch in Marchuk et al [1980] eingeführt wird. Zunächst wird in ein kartesisches Koordinatensystem \mathbf{X} übergegangen, das Dreifachintegral aber beibehalten (s.a. Kap. 3.1.3).

Sei $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ die kartesische Koordinate des Beobachtungspunkt, Ω die Menge aller Raumwinkel, $\omega = \hat{\mathbf{q}}$ und $\omega' = \hat{\mathbf{q}}'$ ($\omega, \omega' \in \Omega$), die Blickrichtungen, und s der Abstand zum vorherigen Streupunkt. Dann ist die Koordinate des vorherigen Streupunkts gegeben durch $\mathbf{x} - \omega s$ (siehe Marshak et al [2005], Kapitel 3.8) und an Stelle des Integrals über q tritt ein Integral über $s \in S(\mathbf{x}, \omega)$, wobei $S(\mathbf{x}, \omega)$ die Menge aller Abstände s vom Punkt \mathbf{x} in Richtung ω bis zur Grenze des streuenden Mediums ist.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{x}, \omega) = & \mathbf{I}_0(\mathbf{x}, \omega) + \int_0^{S(\mathbf{x}, \omega)} \int_{\omega} k_s(\mathbf{x} - \omega s) \exp[-\tau_e(s, \mathbf{x}, \omega)] \\ & \times \bar{Z}(\mathbf{x} - \omega s, \omega, \omega') \mathbf{I}(\mathbf{x} - \omega s, \omega') d\omega' ds \end{aligned} \quad (22)$$

Schließlich wird das Integral selbst in fünf Dimensionen transformiert. Dazu wird zunächst $d\mathbf{x} = s^2 ds$ gesetzt und der Punkt der letzten Streuung als \mathbf{x}' bezeichnet, wodurch s definiert wird als $s = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$. Bei der fünffachen Integration würde unabhängig von der Richtung ω' auch über alle drei Raumkoordinaten integriert. Die Integration soll aber nur entlang der Raumpunkte erfolgen, welche durch die Richtung ω' spezifiziert werden. Diese Randbedingung wird durch die Delta-Funktion in das Integral eingefügt:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(\mathbf{x}, \omega) = & \mathbf{I}_0(\mathbf{x}, \omega) + \int_{\mathbf{x}} \int_{\omega} k_s(\mathbf{x}') \exp[-\tau_e(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)] \\ & \times \bar{Z}(\omega, \mathbf{x}', \omega') \frac{1}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2} \delta\left(\omega' - \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|}\right) \mathbf{I}(\mathbf{x}', \omega') d\omega' d\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (23)$$

Das ist Gl. 3.13 aus Kap. 3.1.3.

Symbolverzeichnis

| Symbol | Bedeutung | Einheit | Kapitel |
|------------------------|---|-----------|---------|
| A | Fläche | m^2 | 2.1.2 |
| A_σ | Fläche eines Objekts im Radarstrahl | m^2 | 2.4.3 |
| A_e | effektive Fläche der Radarantenne | m^2 | 2.4.3 |
| A_Q | geometrische Querschnittsfläche aller Streuer | m^2 | 2.4.3 |
| A_s | Schnittfläche | m^2 | 3.1.5 |
| A_\perp | normierte elektrische Feldamplitude senkrecht | V/m^2 | 3.2.5 |
| A_\parallel | normierte elektrische Feldamplitude parallel | V/m^2 | 3.2.5 |
| \bar{A} | 3×3 Streumatrix | m | 2.2.1 |
| a | Größenparameter | | 2.1.1 |
| a | Normierungsparameter einer Tröpfchengrößenverteilung | | 3.2.5 |
| B | Beobachtungspunkt | m | 2.2.8 |
| \bar{B} | Abkürzung für $G\bar{A}$ | | 2.2.3 |
| C | Ursprung der Q -Achse | m | 2.2.8 |
| \bar{C} | gemittelte Kohärenzmatrix | V^2/m^4 | 2.2.8 |
| \bar{C}_L | \bar{C} der Leiter-Näherung | V^2/m^4 | 2.2.8 |
| \bar{C}_v | \bar{C} des kohärenten Felds in Vorwärtsstreurichtung | V^2/m^4 | 2.2.8 |
| \bar{C}_1 | \bar{C} des Einfachstrefeldes | V^2/m^4 | 2.3.1 |
| \bar{C}_M | \bar{C} des Mehrfachstrefeldes | V^2/m^4 | 2.3.1 |
| \bar{C}_K | \bar{C} des kohärenten Rückstrefeldes | V^2/m^4 | 2.3.1 |
| c | Radarkonstante | m/J | 2.4.3 |
| D | Durchmesser | m | 2.4.3 |
| D | Ereignismenge | | 3.1.1 |
| \mathbf{D} | Transformationsmatrix | | 2.2.5 |
| $E[]$ | Erwartungswert | | 3.1.1 |
| \mathbf{E} | Elektrischer Feldstärkevektor | V/m^2 | 2.2.1 |
| \mathbf{E}^* | komplex konjugiertes von \mathbf{E} | V/m^2 | 2.2.4 |
| \mathbf{E} | elektrisches Feld in (θ, ϕ) -Koord. | V/m^2 | 2.1.3 |
| \mathbf{E}_\parallel | parallele Komponente von \mathbf{E} | V/m^2 | 2.1.3 |
| \mathbf{E}_\perp | senkrechte Komponente von \mathbf{E} | V/m^2 | 2.1.3 |
| \mathbf{E}_θ | θ -Komponente von \mathbf{E} | V/m^2 | 2.2.1 |
| \mathbf{E}_ϕ | ϕ -Komponente von \mathbf{E} | V/m^2 | 2.2.1 |
| f | Frequenz | Hz | 2.1.2 |
| $f()$ | Beliebige Funktion | | 3.1.1 |
| $F()$ | Integral über $f()$ | | 3.1.1 |

| | | | |
|-----------------------|--|--------------|-------|
| $\hat{F}()$ | Monte Carlo-Abschätzung von $F()$ | | 3.1.1 |
| FWHM | Full Width Half Maximum | | 2.3.4 |
| $\bar{G}()$ | Green-Funktion | m^{-1} | 2.2.1 |
| g | Asymmetrieparameter = $\langle \cos \Theta \rangle$ | | 2.3.4 |
| g | Gain einer Radarantenne | | 2.4.3 |
| H | Magnetischer Feldstärkevektor | A/m | 2.2.1 |
| HWHM | Half Width Half Maximum | | 4.2.2 |
| h | Plancksches Wirkungsquantum | Js | 2.1.2 |
| h | Länge eines Radarpulses | m | 2.4.2 |
| h_{rb} | Länge eines Range Bins in MYSTIC LIDAR | m | 3.3 |
| \bar{I} | Einheitsdyade | | 2.2.1 |
| I | Strahldichte | $W/m^2 sr$ | 2.1.2 |
| I | Stokes Vektor | $W/m^2 sr$ | 2.1.3 |
| I_v | I des kohärenten Felds in Vorwärtsstreurichtung | $W/m^2 sr$ | 2.2.8 |
| I_d | I des diffusen Felds | $W/m^2 sr$ | 2.2.8 |
| I₀ | I der einfallenden Strahlung | $W/m^2 sr$ | 2.3.2 |
| I₀₀ | I der unmodifizierten einfallenden Strahlung | $W/m^2 sr$ | 3.1.3 |
| I¹ | I der Einfachstreuung | $W/m^2 sr^2$ | 2.3.2 |
| I^M | I der Mehrfachstreuung | $W/m^2 sr$ | 2.3.2 |
| I^K | I der kohärenten Rückstreuung | $W/m^2 sr$ | 2.3.2 |
| I_K | = I^K | $W/m^2 sr$ | 3.2.2 |
| J | Kohärenzspaltenvektor | $W/m^2 sr$ | 2.2.5 |
| J_v | J des kohärenten Felds in Vorwärtsstreurichtung | $W/m^2 sr$ | 2.2.8 |
| J_d | J des diffusen Felds | $W/m^2 sr$ | 2.2.8 |
| J₁ | J des Einfachstrefeldes | $W/m^2 sr$ | 2.3.2 |
| J_M | J des Mehrfachstrefeldes | $W/m^2 sr$ | 2.3.2 |
| J_K | J des kohärenten Rückstrefeldes | $W/m^2 sr$ | 2.3.2 |
| J' | Local Estimate in MYSTIC | | 3.1.5 |
| K | Brechungsindexfaktor in der Radargleichung | | 2.4.3 |
| K | Stokes-Extinktionsmatrix | m^2 | 2.2.5 |
| K^J | Extinktionsmatrix | m^2 | 2.2.5 |
| k | Kreiswellenzahl | m^{-1} | 2.1.3 |
| k_a | Absorptionskoeffizient | m^{-1} | 2.1.7 |
| k_e | Extinktionskoeffizient | m^{-1} | 2.1.7 |
| k_s | Streukoeffizient | m^{-1} | 2.1.7 |
| \bar{k} | Transportkernel | | 3.1.3 |
| \bar{K}^n | Transportkernel-Operator der n-ten Stufe | | 3.1.3 |
| L | Weglänge | m | 2.1.7 |
| L | Strahlungsstromdichte | W/m^2 | 2.1.2 |
| LWC | Liquid Water Content | g/m^3 | 4.1 |
| l | Weglänge | m | 2.1.7 |
| l | Verlustfaktor eines Radargerätes | | 2.4.3 |
| l | mittlere freie Streuweglänge | m | 2.3.4 |
| l^* | mittlere freie Transportweglänge | m | 2.3.4 |

| | | | |
|-------------------------|---|----------|--------|
| \bar{M} | Müller-Matrix | | 2.1.4 |
| \bar{M}_R | Rayleigh-Müller-Matrix | | 2.1.5 |
| M_{XY} | Element von \bar{M} | | 2.1.4 |
| m | komplexer Brechungsindex | | 2.2.1 |
| n | Anzahl | | 2.1.2 |
| N | Anzahl | | 2.2.2 |
| n_0 | Teilchenzahldichte pro Einheitsvolumen | m^{-3} | 2.1.7 |
| \hat{n} | Richtungsvektor | | 2.2.1 |
| $P()$ | Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion | | 3.1.1 |
| $\mathbf{P}r$ | Rückstreuwahrscheinlichkeit in MYSTIC-LIDAR | | 3.3 |
| $\hat{\mathbf{p}}$ | Beobachtungsrichtung | m | 2.2.8 |
| p_t | Sendeleistung eines Radarpulses | W | 2.4.3 |
| p_r | empfangene Leistung eines Radarpulses | W | 2.4.3 |
| p_σ | gestreute Leistung eines Radarpulses | W | 2.4.3 |
| Q | Koordinatenachse | m | 2.2.8 |
| Q_0 | Strahlungsenergie eines Photons | J | 2.1.2 |
| Q_g | gesamte Strahlungsenergie eines Felds | J | 2.1.7 |
| Q_i | einfallende Strahlungsenergie eines Felds | J | 2.1.7 |
| Q_s | gestreute Strahlungsenergie eines Felds | J | 2.1.7 |
| Q_{as} | Streueffizienz | | 2.1.1 |
| Q_{bs} | Streueffizienz in Rückstreurichtung | | 2.4.3 |
| $\hat{\mathbf{q}}$ | Richtungsvektor = $-\hat{\mathbf{p}}$ | | 2.2.8 |
| Q | lineare Stokes Vektor-Komponente | W/m^2 | 2.1.3 |
| R | Importance Sampling-Faktor | | 3.1.6 |
| \mathbf{R} | Stokes-Reflektions-Matrix | | 2.3.2 |
| \mathbf{R}^1 | R der Einfachstreuung | | 2.3.2 |
| \mathbf{R}^M | R der Mehrfachstreuung | | 2.3.2 |
| \mathbf{R}^K | R der kohärenten Rückstreuung | | 2.3.2 |
| \mathbf{R}^J | Kohärenz-Reflektions-Matrix | | 2.3.2 |
| \mathbf{R}^{J1} | R^J der Einfachstreuung | | 2.3.2 |
| \mathbf{R}^{JM} | R^J der Mehrfachstreuung | | 2.3.2 |
| \mathbf{R}^{JK} | R^J der kohärenten Rückstreuung | | 2.3.2 |
| R_{ij} | Element der Stokes-Reflektions-Matrix | | 2.3.2 |
| $\hat{\mathbf{R}}_{ij}$ | Vektor von Teilchen i zu T. j | m | 2.2.2 |
| r | Radius | m | 2.1.1 |
| r | Entfernung zwischen zwei Punkten | m | 2.1.1 |
| r_{eff} | Effektivradius | m | 3.2.5 |
| \mathbf{r} | Ortsvektor | m | 2.1.3 |
| $\hat{\mathbf{r}}$ | Einheits-Ortsvektor | | 2.2.1 |
| S | Streufunktion | | 2.1.4 |
| \mathbf{S} | Amplitudenstrematrix | m | 2.2.1 |
| \mathcal{S} | Poynting-Vektor | N/ms | Anhang |
| \hat{s} | Einfallsrichtung | | 2.2.2 |
| \bar{T} | dyadischer Transitionsoperator | | 2.2.1 |

| | | | |
|-------------------|--|------------|--------|
| t | Zeit | s | 2.1.2 |
| U | schräglineare Stokes Vektor-Komponente | W/m^2 | 2.1.3 |
| V | Volumen | m^3 | 2.4.2 |
| V | zirkuläre Stokes Vektor-Komponente | W/m^2 | 2.1.3 |
| W | Leistung | W | Anhang |
| w | statistisches Gewicht | | 3.2.3 |
| X | Zufallsvariable | | 3.1.1 |
| \mathbf{X} | kartesisches Koordinatensystem | | 3.1.3 |
| x | statistisches Ereignis | | 3.1.1 |
| \mathbf{x} | kartesische Koordinate | | 3.1.3 |
| \mathbf{y} | $= (\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$ | | 3.1.3 |
| \mathbf{Y} | $= (\mathbf{X}, \boldsymbol{\Omega})$ | | 3.1.3 |
| \mathbf{Z} | Stokes-Streumatrix, nicht gültig in Vorwärtsstreurichtung | m^2 | 2.2.5 |
| \mathbf{Z}' | Stokes-Streumatrix ($= \bar{M}r^2$) | m^2 | Anhang |
| \mathbf{Z}^J | Kohärenzstreumatrix | m^2 | 2.2.5 |
| \bar{Z} | Streumatrix $= \mathbf{Z}'/\sigma_s$ | | 3.1.3 |
| z_e | äquivalenter Radarreflektivitätsfaktor | mm^6/m^3 | 2.4.3 |
| Z_e | $= 10 * \log_{10}(z_e/(1mm^6/m^3))$ | | 2.4.3 |
| α | Winkelabstand | | 2.3.4 |
| α | Öffnungswinkel | | 3.2.3 |
| α | Verteilungsparameter einer Tröpfchengrößenverteilung | | 3.2.5 |
| β | Winkelabstand von der Flächennormalen | | 3.2.3 |
| δ | Phase | | 2.1.3 |
| δ_{XY} | Phase der Y -Komponente des Feldes X | | 2.3.3 |
| $\delta()$ | Dirac-Delta-Funktion | | 2.2.1 |
| ϵ | komplexe Permittivität | F/m | 2.2.1 |
| ε | reelle Permittivität | F/m | 2.2.1 |
| $\Delta\epsilon$ | Phasendifferenz durch Weglängenunterschied ($= k\Delta r$) | | 2.3.1 |
| ζ | kohärenter Rückstreuverstärkungsfaktor | | 2.3.2 |
| ζ_X | ζ der Polarisationskomponente X | | 2.3.2 |
| η | Indikatorfunktion | | 3.1.5 |
| Θ | Streuwinkel | | 2.1.4 |
| θ | Zenithwinkel | | 2.1.2 |
| $\hat{\theta}$ | Richtungsvektor des Zenithwinkels | | 2.2.1 |
| θ | Öffnungswinkel | | 2.4.2 |
| λ | Wellenlänge | m | 2.1.1 |
| μ | magnetische Permeabilität | H/m | 2.2.1 |
| μ | $= \cos \Theta$ | | 2.3.2 |
| $\hat{\mu}$ | $= (\mu, \phi)$ | | 2.3.2 |
| $\hat{\mu}_0$ | Einfallsrichtung | | 2.3.2 |
| $\hat{\mu}_0^\pi$ | Rückstreurichtung | | 2.3.2 |
| ξ | Partikelzustand | | 2.2.4 |
| ρ | Zufallszahl | | 3.1.4 |
| $\bar{\rho}$ | Kohärenzmatrix | V^2/m^4 | 2.2.5 |

| | | | |
|------------------|---|-----------|-------|
| $\bar{\Sigma}$ | spezifische Kohärenzmatrix | V^2/m^4 | 2.2.8 |
| $\bar{\Sigma}_K$ | $\bar{\Sigma}$ des kohärenten Rückstreufeldes | V^2/m^4 | 2.3.2 |
| σ | Leitfähigkeit | S/m | 2.2.1 |
| σ | Standardabweichung | | 3.2.5 |
| σ_a | Absorptionsquerschnitt | m^2 | 2.1.7 |
| σ_e | Extinktionsquerschnitt | m^2 | 2.1.7 |
| σ_s | Streuquerschnitt | m^2 | 2.1.1 |
| σ_V | Streuquerschnitt eines Volumens | m^2 | 2.4.3 |
| τ_a | optische Dicke der Absorption | | 2.1.7 |
| τ_e | optische Dicke der Extinktion | | 2.1.7 |
| τ_s | optische Dicke der Streuung | | 2.1.7 |
| ϕ | Azimuthwinkel | | 2.1.4 |
| $\hat{\phi}$ | Richtungsvektor des Azimuthwinkels | | 2.2.1 |
| ϕ | Öffnungswinkel | | 2.4.2 |
| Ω | Raumwinkel | sr | 2.1.2 |
| Ω | Menge aller Raumwinkel | | 3.1.3 |
| ω | Kreisfrequenz | Hz | 2.1.3 |
| ω | Richtungsvektor | | 3.1.3 |

Abbildungsverzeichnis

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Interferenz hinter einem Doppelspalt | 2 |
| 1.2 | Beispiele für kohärente Rückstreuung | 3 |
| 1.3 | Entstehung kohärenter Rückstreuung | 3 |
| | | |
| 2.1 | Polarisationszustände | 9 |
| 2.2 | Beispiele für Streumatrixelemente | 11 |
| 2.3 | Streu-Geometrie und -Koordinatensystem | 17 |
| 2.4 | Koordinatensystem und Vektoren in den Fernfeld-Foldy-Lax-Gleichungen . | 18 |
| 2.5 | Diagrammdarstellung des gestreuten elektrischen Felds | 19 |
| 2.6 | Diagrammatische Repräsentation der dyadischen Korrelationsfunktion . . . | 21 |
| 2.7 | Dyadisches Produkt zweiter Streupfade dritter Ordnung | 21 |
| 2.8 | Diagrammatische Darstellung der Leiter-Näherung | 22 |
| 2.9 | Lokales Koordinatensystem eines Streuvolumens | 27 |
| 2.10 | Maximal gekreuzte Diagramme | 30 |
| 2.11 | Kohärenzmatrix aller maximal gekreuzten Pfade | 30 |
| 2.12 | Geometrie für die Gleichungen 2.95 und 2.96 | 31 |
| 2.13 | Pfad, der zu destruktiver Interferenz führt | 33 |
| 2.14 | Vektoren für den Fall von Zweifachstreuung | 40 |
| 2.15 | Experimentell gemessene Rückstreumaxima | 41 |
| 2.16 | Radarfrequenzen und -geräte | 42 |
| 2.17 | Molekulare Absorption von Mikrowellen in der Atmosphäre | 43 |
| 2.18 | Volumen eines Radarpulses | 44 |
| 2.19 | Abstrahlcharakteristik einer gerichteten Radarantenne | 45 |
| 2.20 | Raum-Zeit-Diagramm eines Radarpulses | 46 |
| | | |
| 3.1 | Ablaufdiagramm eines Photonen-Tracing-Prozesses in MYSTIC | 54 |
| 3.2 | Funktionsweisen von MYSTIC | 57 |
| 3.3 | Local Estimate Geometrie; Entstehung von Spikes | 59 |
| 3.4 | Importance Sampling | 61 |
| 3.5 | Schachtelung der Programmblöcke in MYSTIC | 63 |
| 3.6 | Überblick über MYSTIC mit KRS-Implementierung | 64 |
| 3.7 | Reziproke Streupfade in MYSTIC | 67 |
| 3.8 | Drei Konfigurationen für kohärente Rückstreuung in MYSTIC | 68 |
| 3.9 | Numerische Depolarisation | 71 |
| 3.10 | Numerischer Fehler in den Streudaten | 72 |
| 3.11 | Limitierung der Sichtbarkeit kohärenter Rückstreuung | 73 |
| 3.12 | Abschätzung des Anteils von KRS-Streuwegen | 73 |
| 3.13 | Streuungsfunktion ohne und mit Größenverteilung | 75 |
| 3.14 | Beispiel eines Rayleigh-Spikes | 77 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.1 | Konfiguration der MYSTIC-Simulationen | 82 |
| 4.2 | KRSV-Werte abhängig von der optischen Dicke | 84 |
| 4.3 | Datenreihe ζ^B , Betrachtung von Spikes | 85 |
| 4.4 | Datenreihe ζ^C , Betrachtung von Spikes | 86 |
| 4.5 | Datenreihe ζ^M | 88 |
| 4.6 | Differenzen ζ^M | 89 |
| 4.7 | Datenreihe ζ^B | 91 |
| 4.8 | Differenzen ζ^B | 92 |
| 4.9 | Datenreihe ζ^C | 93 |
| 4.10 | Differenzen ζ^C | 94 |
| 4.11 | Datenreihen für die U-Polarisation | 96 |
| 4.12 | Datenreihen ζ^A | 97 |
| 4.13 | Datenreihe ζ^M unpolarisiert | 104 |
| 4.14 | Setup für simulierte Scans | 106 |
| 4.15 | Rückstreumaximum bis 85° Winkelabstand | 107 |
| 4.16 | Halbes Rückstreumaximum für $a = 2.5$, zufällige Polarisation | 108 |
| 4.17 | Halbes Rückstreumaximum für $a = 7.2$, zufällige Polarisation | 110 |
| 4.18 | Zweifachstreuconfiguration zur Erklärung der Asymmetrie | 111 |
| 4.19 | Asymmetrie des Rückstreumaximums für $a = 0.9$, QP-Komponente | 112 |
| 4.20 | Vergleich der drei Radar-Simulatoren, konstanter Radius | 114 |
| 4.21 | Vergleich der drei Radar-Simulatoren, Tröpfchengrößenverteilung | 116 |
| 4.22 | Simulation des ATLID-Lidars | 117 |
| 4.23 | Simulation des CPR-Wolkenradars | 118 |
| 4.24 | KRSV für Radar, 3.2 mm und 8.6 mm | 121 |
| 4.25 | KRSV für Radar, 54.5 mm | 122 |
| 4.26 | Streu- und Rückstreueffizienz abhängig vom Größenparameter | 123 |
| 4.27 | Verhältnis von Mehrfachstreuung und Einfachstreuung, 3.2 mm , 8.6 mm | 124 |
| 4.28 | Verhältnis von Mehrfachstreuung und Einfachstreuung, 54.5 mm | 125 |

Tabellenverzeichnis

| | | |
|------|--|-----|
| 3.1 | Vergleich beider KRSV-Methoden | 63 |
| 4.1 | Referenzwerte für die KRSV-Simulation | 81 |
| 4.2 | Werte ζ^M und deren Standardabweichungen. | 87 |
| 4.3 | Differenzen $\zeta^M - \zeta^R$ und deren Standardabweichungen. | 89 |
| 4.4 | Werte ζ^B und deren Standardabweichungen. | 90 |
| 4.5 | Differenzen $\zeta^B - \zeta^R$ und deren Standardabweichungen. | 90 |
| 4.6 | Werte ζ^C und deren Standardabweichungen. | 92 |
| 4.7 | Differenzen $\zeta^C - \zeta^R$ und deren Standardabweichungen. | 94 |
| 4.8 | Gemittelte Differenzen der simulierten Werte | 98 |
| 4.9 | Gemittelte Differenzen zwischen den Polarisationskomponenten | 99 |
| 4.10 | Differenzen zwischen den Polarisationskomponenten I und Q | 102 |
| 4.11 | Übersicht über die Ergebnisse | 105 |
| 4.12 | Vergleich der drei Radarsimulatoren, konstanter Radius | 114 |
| 4.13 | Vergleich der drei Radarsimulatoren, Tröpfchengrößenverteilung | 116 |
| 4.14 | Verhältnis der Mehrfachstreuung zum Gesamtsignal für Radar | 119 |
| 4.15 | Ergebnisse der Radar-Rechnungen für $LWC = 10g/m^3$ | 120 |

Literaturverzeichnis

- Albada, van, M.P., Lagendijk, A.: Observation of weak localization in a random medium, *Physical Review Letters*, Vol. 55, No. 24 (1985), 2692-2695
- Akkermans, E., Wolf, P.E., Maynard, R.: Coherent backscattering of light by disordered media: analysis of the peak line shape, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 56, No. 14, 1471-1474
- Akkermans, E., Wolf, P.E., Maynard, R., Maret, G.: Theoretical study of the coherent backscattering of light by disordered media, *J. Phys. France* 49 (1988) 77-98
- Akkermans, E., Montambaux, G.: *Mesoscopic physics of electrons and photons*, Cambridge University Press (2007)
- Anderson, G.P., Clough, S.A., Kneizys, F.X., Chetwynd, J.H., Shettle, E.P.: AFGL Atmospheric constituent profiles (0-120km), *Environmental Research Papers No. 954* (1986), AFGL-TR-86-0110
- Barabanenkov, Y.N.: Wave corrections to the transfer equation for "back" scattering, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Radiofizika*, Vol. 16, No. 1 (1973) 88-96
- Bohren, C.F., Huffman, D.R.: *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*, John Wiley & Sons (1983)
- Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Musiol, G., Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*, 5. Auflage, Verlag Harri Deutsch (2000)
- Buras, R., Mayer, B.: Efficient unbiased variance reduction techniques for Monte Carlo simulations of radiative transfer in cloudy atmospheres: The solution, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 112 (3) (2011), 434-447
- Chandrasekhar, S.: *Radiative transfer*, Dover Publications, Inc., New York (1960)
- Emde, C., Mayer, B.: Simulation of solar radiation during a total eclipse: a challenge for radiative transfer, *Atmos. Chem. Phys.*, 7 (2007), 2259-2270
- Emde, C., Buras, R., Mayer, B., Blumthaler, M.: The impact of aerosols on polarized sky radiance: model development, validation and applications, *Atmos. Chem. Phys.*, 10 (2010), 383-396
- Eriksson, P., Buehler, S.A., Davis, C.P., Emde, C., Lemke, O.: ARTS, the atmospheric radiative transfer simulator, version 2, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 112 (2011), 1551-1558

- Fiebig, S., Aegerter, C.M., Bühner, W., Störzer, M., Akkermans, E., Montambaux, G., Maret, G.: Conservation of energy in coherent backscattering of light, *EPL*, 81 (2008) 64004
- Fiebig, S.: Coherent Backscattering from Multiple Scattering Systems, PhD thesis.
- Gentle, J.E.: Random number generators and Monte Carlo methods, Springer (2003)
- Hansen, J.E., Travis L.D.: Light scattering in planetary atmospheres, *Space Science Reviews* 16 (1974) 527-610
- Hapke, B., DiMucci, D., Nelson, R., Smythe, W.: The Cause of the Hot Spot in Vegetation Canopies and Soils: Shadow-Hiding versus Coherent Backscatter, *Remote Sens. Environ.* 58 (1996), 63-68
- Hapke, B., Nelsons, R., Smythe, W.: The opposition effect of the moon: coherent backscatter and shadow hiding, *Icarus* 133 (1998), 89-97
- Haynes, J.M.: QuickBeam Radar Simulation Software - User's Guide, Department of Atmospheric Science, Colorado State University, Fort Collins, CO, USA
- Hess, M., Koepke, P., Schult, I.: Optical Properties of Aerosols and Clouds: The Software Package OPAC, *Bull. Amer. Meteor. Soc.* 79, 831-844 (1998)
- van de Hulst, H.C.: Light scattering by small particles, Dover Publications Inc, New York (1957,1981).
- Kahan, W.: Pracniques: further remarks on reducing truncation errors, *Communications of the ACM*, Volume 8 Issue 1, Jan. 1965, Page 40.
- Kobayashi, S., Tanelli, S., Im, E.: Second-order multiple-scattering theory associated with backscattering enhancement for a millimeter wavelength weather radar with a finite beam width, *Radio Science*, Vol. 40, RS6015 (2005)
- Kuga, Y., Ishimaru, A.: Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 1, No. 8 (1984), 831-835
- Legendijk, A., van Tiggelen, B., Wiersma, D.S.: Fifty years of Anderson localization, *Physics Today*, August 2009, 24-29
- Lenke, R., Maret, G.: Multiple scattering of light: coherent backscattering and transmission, scattering in polymeric and colloidal systems, Gordon and Breach Science Publishers, 2000
- Liou, K.N.: An Introduction to Atmospheric Radiation (Second Edition), International Geophysics Series, Volume 84, Academic Press, 2002
- Marchuk, G.I., Mikhailov, G.A., Nazaraiev, M.A., Darbinjan, R.A., Kargin, B.A., Elepov, B.S.: The Monte Carlo methods in atmospheric optics, Springer 1980
- Marshak, A., Davis, A.B.: 3D radiative transfer in cloudy atmospheres, Springer Berlin Heidelberg (2005)

- Mayer, B.: I3RC phase 1 results from MYSTIC Monte Carlo model, Extended abstract for the I3RC workshop, Tucson, Arizona, November 17-19, 1999
- Mayer B., Kylling A.: Technical Note: The libRadtran software package for radiative transfer calculation - description and examples of use, *Atmos. Chem. Phys.* 5 (2005), 1855-1877
- Mayer, B.: Radiative transfer in the cloudy atmosphere, *Eur. Phys. J. Conferences* 1 (2009), 75-99
- Mayer, B., Buras, R., Ehret, G., Hagen, M., Petzold, A., Weinzierl, B.: Cloud-Aerosol-Radiation Interaction: Towards the EarthCARE Satellite Mission, U. Schumann (ed.), *Atmospheric Physics - Research Topics in Aerospace*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2012), 829-842
- Mendez, E.R., O'Donnel, K.A.: Observation of depolarization and backscattering enhancement in light scattering from gaussian random surfaces, *Optics Communications* Vol. 61, No. 2 (1987), 91-95
- Mie, G.: Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen. *Annalen der Physik*, Vierte Folge, Band 25, 1908, No. 3, p 377–445.
- Mishchenko, M.I.: Enhanced backscattering of polarized light from discrete random media: Calculations in exactly the backscattering direction, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 9, No. 6 (1992)
- Mishchenko, M.I., Dlugach, J.M.: Coherent backscatter and the opposition effect for E-type asteroids, *Planet. Space Sci.*, Vol. 41, No. 3 (1993), 173-181
- Mishchenko, M.I.: Diffuse and coherent backscattering by discrete random media - I. Radar reflectivity, polarization ratios, and enhancement factors for a half-space of polydisperse, nonabsorbing and absorbing spherical particles, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 56 (5) (1996), 673-702
- Mishchenko, M.I., Travis, L.D., Lacis, A.A.: Multiple scattering of light by particles - radiative transfer and coherent backscattering, Cambridge University Press (2006) and
- Mishchenko, M.I., Dlugach, J.M., Liu, L.: Azimuthal asymmetry of the coherent backscattering cone: theoretical results, *Physical Review A* 80, 053824 (2009)
- Muononen, K.: Coherent backscattering of light by complex random media of spherical scatterers: numerical solution, *Waves Random Media* 14 (2004), 365-388
- Peters, K.J.: Coherent-backscatter effect: A vector formulation accounting for polarization and absorption effects and small or large scatterers, *Physical Review B*, Vol. 46, No. 2, 801-812
- Pomraning, G.C.: The equations of radiation hydrodynamics, Dover Publications (1973,2005)
- Probert-Jones, J.R.: The radar equation in meteorology, *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, Vol 88, Issue 378 (1962), 485-495

- Roys, G.P., Kessler, E.: Measurements by aircraft of condensed water in Great Plains thunderstorms, Technical Note 49-NSSP-19, U.S. Department of Commerce, 1966.
- Rinehart, R.E.: Radar for meteorologists (fifth edition), Rinehart Publications (2010)
- Sekera, Z.: Scattering matrices and reciprocity relationships in various representations of the state of polarisation. *Journal of the optical Society of America* Vol. 56, No. 12, 1732-1740
- Tsang, L., Ishimaru, A.: Backscattering enhancement of random discrete scatterers, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 1, No. 8, August 1984, 836-839
- Wiscombe W.J.: Mie scattering calculations: advances in technique and fast, vector-speed computer codes, NCAR Technical Note NCAR/TN-140+STR, edited/revised August 1996
- Wolf, P.E., Maret, G.: Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media, *Physical Review Letters* Vol. 55, No. 24 (1985), 2696-2699
- Zdunkowski, W., Trautmann, T., Bott, A.: *Radiation in the Atmosphere*, Cambridge University Press, 2007