„Fachmathematische Kenntnisse von Studierenden des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen. Eine explorative Quer- und Längsschnittstudie.“

Dissertation
an der Fakultät für Mathematik, Informatik und Statistik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

eingereicht von

Leonhard Riedl
2015

1. Gutachter:	Prof. Dr. Daniel Rost
2. Gutachterin:	Prof. Dr. Kristina Reiss
Tag der mündlichen Prüfung:	02.06.2015

Danksagung

Ein besonderes Wort des Dankes gebührt Herrn Prof. Dr. Daniel Rost und Herrn Dr. Erwin Schörner, die diese Arbeit ermöglichten und die Wegbereiter für diese waren. Sie zeigten immer großes Interesse am Fortgang meiner Arbeit und motivierten mich durch Ihre umsichtige und vorbildliche Betreuung zur Fertigstellung meiner Arbeit. In vielen Gesprächen standen sie freundschaftlich mit Rat und Tat zur Seite.

Großer Dank für die hilfreiche Unterstützung geht an Prof. Dr. Kristina Reiss, die mir durch Ihre Anregungen eine große Stütze bei der Erstellung der Arbeit war. Sie sicherte in einer schweren Phase der Arbeit Ihre Hilfe zu und trug so entscheidend zur erfolgreichen Fertigstellung der Dissertation bei.

Mein Dank gilt ebenso Herrn Prof. Dr. Stefan Ufer, der durch seine sinnvollen Ideen vor allem bei der theoretischen Einordnung der Dissertation wertvolle Hinweise zur Überarbeitung gab. Bedanken möchte ich schließlich bei Herrn Prof. Dr. Dr. Rudolf Fritsch, der stets am Fortgang meiner Arbeit interessiert war und immer motivierende Worte fand.

Zusammenfassung

Die Arbeit wird zunächst in den aktuellen Forschungsdiskurs eingeordnet. Es wird die Messung der professionellen Kompetenz von Lehrkräften aufgegriffen, wobei Bezug zu zentralen Punkten der Studien „TEDS-M“, „COACTIV“ und „TOSCA“ genommen wird. Zudem wird die Problematik beim Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik mit dem Schwerpunkt auf der „Doppelten Diskontinuität“ von Felix Klein thematisiert. Nach der theoretischen Einordnung wird das Dissertationsprojekt mit Forschungsfragen und Untersuchungsdesign vorgestellt.

In einer explorativen Querschnittstudie wird das schulspezifische mathematische Wissen von Studierenden für das Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen analysiert (Studienanfängerinnen und Studienanfänger Wintersemester 2010/11) und in Abhängigkeit exogener Variablen wie unter anderem Alter, Geschlecht und studierter Lehramtstyp untersucht. Zudem werden Studien- und Berufswahlmotive sowie Lernstrategien der Studierenden erfasst und mit ihren Leistungen in Verbindung gesetzt. Daraufhin werden die Ergebnisse (gemessen mit den gleichen Testerhebungen) der beiden Folgejahrgänge (Studienanfängerinnen und Studienanfänger Wintersemester 2011/12 und 2012/13) in Kurzform dargestellt und mit denen des obigen Referenzjahrgangs verglichen, so dass eine Entwicklung des Leistungspotentials über drei Jahre festgehalten werden kann. Außerdem werden die erbrachten Ergebnisse von Absolventinnen und Absolventen des acht- und neunjährigen Abiturs verglichen.

In einer explorativen Längsschnittstudie werden die schulspezifischen mathematischen Kenntnisse des Referenzjahrgangs vom Wintersemester 2010/11 nach zwei Studienjahren mit dem gleichen Testdesign nochmals erhoben und mit denen zu Studienbeginn verglichen; die Unterschiede im Leistungsbild werden unter spezieller Berücksichtigung des neukonzipierten Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ im Unterrichtsfach Mathematik begründet. Es wird eine quantitative und qualitative Gegenüberstellung der Ergebnisse zwischen den beiden Erhebungszeitpunkten mit spezifischer Fokussierung auf die Einzelaufgaben der Testerhebungen vorgenommen. Ferner werden auch universitäre mathematische Kenntnisse der Studierenden ausgerichtet auf die Inhalte des Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ gemessen und in den Kontext der Längsschnittstudie eingeordnet.

Abstract

The dissertation will be initially classified in the current academic discourse. The measurement of professional expertise among teachers will be a first subject, while covering the major aspects of the „TEDS-M“, the „COACTIV“ and the „TOSCA“ studies. Furthermore, problems during the transition phase from secondary education to university level education in case of mathematics - with a special focus on the „double discontinuity“ as described by Felix Klein - will be discussed. After these theoretical classifications of this dissertation the major questions and the study design will be presented.

The school-specific mathematical knowledge of students for the teaching profession in secondary education schools (beginning with semester 2010/11) related to exogenous factors like age, sex, and exact studying type will be analysed in an explorative cross-section study. Moreover, motives for the specific choice of course of studies and choice of profession as well as learning strategies and their relation to specific achievements will be examined. After that, results of the next two years (beginning year of 2011/12 and 2012/13, collected under similar conditions) will be compared with the reference year of 2010/11 and developments of the achievement potential during these three course years presented. The performance of the 8-year secondary school graduates and of the 9-year secondary school graduates will be compared.

During an explorative longitudinal study the school-specific mathematical knowledge of the reference year 2010/11 will be subjected to a similar testing after two years of university education and compared to the results at the beginning of their university training. Performance differences will be discussed and justified in consideration of the newly introduced course „basic principles in mathematics (Grundlagen der Mathematik)“. A quantitative and qualitative comparison of the results at both testing time points will be done focusing on a single-question-level. Furthermore, not only school-specific but also university-specific mathematical knowledge was tested among the students and the performance will also be discussed in the context of the new course „basic principles in mathematics“. These data will be classified among the other results within the longitudinal study as well.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Hauptaspekt der vorliegenden Dissertation liegt auf den fachmathematischen Kenntnissen angehender Mathematiklehrkräfte an Grund-, Haupt- oder Realschulen, eine zentrale Thematik im aktuellen Forschungsdiskurs.

Die professionelle Kompetenz von Mathematiklehrkräften wird in Vergleichsstudien wie TEDS-M und COACTIV untersucht. Dabei werden neben fachmathematischen Kenntnissen auch fachdidaktische und pädagogische Kompetenzen analysiert; zugrunde liegen dabei Modelle zur professionellen Kompetenz von Lehrkräften nach Shulman und Bromme [110], [27]. In der Dissertation wird die fachmathematische Komponente des Kompetenzansatzes fokussiert und schultypisches sowie universitäres Mathematikwissen von Studierenden des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen an der Ludwig-Maximilians-Universität München erfasst.

Zwischen Schulmathematik und universitärer Mathematik sind erhebliche Unterschiede hinsichtlich Aufbau, Struktur, Intention und Zielgruppe festzustellen; daher entsteht beim Übergang zwischen Schule und Hochschule eine Kluft, weil der Mathematik an beiden Institutionen eine unterschiedliche Ausrichtung zukommt. Diese Problematik hat Felix Klein bereits vor etwa 100 Jahren mit der „Doppelten Diskontinuität" beschrieben [63]; im aktuellen Forschungsfeld nimmt dieser Aspekt eine bedeutsame Rolle ein. An Hochschulen werden vielseitige Ansätze verfolgt, der Kluft zwischen Schule und Universität in Mathematik zu begegnen und geeignete Maßnahmen zu ihrer Überbrückung einzuleiten. In der Dissertation wird eine Neukonzeption in der Vorlesungsstruktur für das erste Studienjahr vorgestellt, die eine andere Ausrichtung als etwa die bekannten Universitätsprojekte „Mathematik Neu denken" oder „Mathematik besser verstehen" verfolgt [30], [54]. Dabei wird auch der Einfluss dieser Veranstaltungen auf die mathematischen Kenntnisse der Studierenden untersucht.

Die Dissertation ist durch eine explorative Quer- und eine Längsschnittstudie geprägt. Die Querschnittstudie fokussiert das Wissen der Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Wintersemester 2010/11, 2011/12 und 2012/13; dabei wird lediglich das mathematische Wissen untersucht, welches die Lernenden aus der Schule mitbringen. Es wird der Einfluss von speziellen Faktoren (wie persönliche Studienvoraussetzungen und Studien- und Berufswahlmotivation) auf diese Kenntnisse analysiert und ein Leistungsvergleich zwischen G9- und G8-Absolventinnen und -Absolventen angestrebt. Die Längsschnittstudie thematisiert das Wissen der Studierenden zu Studienbeginn und die Entwicklung dieser kognitiven Fähigkeiten über die ersten vier Fachsemester (Grundstudium); dabei soll vor allem der Einfluss der neukonzipierten Studieneingangsphase auf die fachmathematischen Kenntnisse der Lernenden untersucht werden, wobei nur die erste Kohorte, also die Studienanfängerinnen und Studienanfänger des Wintersemesters 2010/11 im Fokus stehen.

Die vorliegende Arbeit wird in vier große Bereiche unterteilt:

- Verortung und Beschreibung des Dissertationsprojekts,
- Thematisierung der Querschnittstudie,
- Thematisierung der Längsschnittstudie,
- Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse.

Im nun folgenden Kapitel wird zunächst der aktuelle Forschungstand zur vorliegenden Thematik geschildert und die Arbeit diesbezüglich eingeordnet. Ferner werden daraus Forschungsfragen abgeleitet und das methodische Vorgehen beschrieben.

2 Einordnung und Beschreibung des Dissertationsprojekts

2.1 Einordnung der Dissertation in die aktuelle Forschungssituation

Im Folgenden wird der aktuelle Forschungsstand beschrieben; dabei werden folgende Aspekte betrachtet:

- Messung von professioneller Kompetenz von Lehrkräften,
- Übergangsproblematik von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik,
- Maßnahmen in der Lehrerbildung im Rahmen universitärer Projekte.

2.1.1 Messung von professioneller Kompetenz von Lehrkräften

Die professionelle Kompetenz von Lehrkräften im Fach Mathematik hängt von verschiedenen Faktoren ab; es wird zuerst abgegrenzt, wie der Begriff „Kompetenzen" in der Mathematikdidaktik zu deuten ist, und daraufhin werden Modelle der professionellen Kompetenz von Mathematiklehrkräften vorgestellt.

Während Bildung im Sinne von Humboldt nicht in erster Linie auf materielle Verwertbarkeit zielt, sondern als Wert an sich gesehen wird, steht beim Kompetenzbegriff die Anwendbarkeit von Kenntnissen und Fertigkeiten deutlicher im Vordergrund [39]. Franz Emanuel Weinert hat 1999 in einem Gutachten für die OECD verschiedene Definitionsmöglichkeiten aufgezeigt und 2001 die heute in Deutschland meistzitierte Variante formuliert. Danach sind Kompetenzen

> „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können". [130, S. 27].

Damit werden Kompetenzen anhand zweier Hauptaspekte untergliedert; zum einen werden sie als vorhandene oder noch zu erwerbende geistige Fähigkeiten gesehen, um Probleme lösen zu können; zum anderen ist mit ihnen der weiterführende Anspruch verbunden, die Lösungen in verschiedenen Kontexten zu realisieren (motivationaler Ansatz). Diese Definition liefert im schulspezifischen Rahmen die Grundlage für den Kompetenzbegriff und stellt zudem den Aufhänger für die Konzeption von deutschlandweiten Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz dar [39, S. 28].

Ein weiterer Ansatz ist die Begriffsabgrenzung durch DeSeCo (Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations; interdisziplinäres Schweizer OECD-Projekt); dabei werden ähnlich zu Weinerts Definition kognitive Fähigkeiten und spezifisches Wissen sowie motivationale und emotionale Elemente im Rahmen des Kompetenzbegriffs thematisiert [39, S. 29]:

> „A competence is defined as the ability to successfully meet complex demands in a particular context. Competent performance or effective action implies the mobilization of knowledge, cognitive and practical skills, as well as social and behavior components such as attitudes, emotions, and values and motivations." [107, S. 45].

Der Begriff „Kompetenz" wird in der Literatur in verschiedenen Kontexten verwendet, dementsprechend sind die Definitionsansätze leicht unterschiedlich. Eine weitere Begriffsabgrenzung stammt von Klieme, der den Begriff Kompetenz folgendermaßen interpretiert [64]:

> „Die fachbezogene Formulierung von Kompetenzen darf nicht verwechselt werden mit der traditionellen Ausbreitung von Inhaltslisten in stoffdidaktischer bzw. fachsystematischer Gliederung. Von Kompetenzen kann nur dann gesprochen werden, wenn man grundlegende Zieldimensionen innerhalb eines Faches benennt, in denen systematisch, über Jahre hinweg Fähigkeiten aufgebaut werden. Kompetenz stellt die Verbindung zwischen Wissen und Können her und ist als Befähigung zur Bewältigung unterschiedlicher Situationen zu sehen. Entsprechend breit muss auch die Umsetzung in Tests und Aufgaben sein." [64, S. 12].

Diese Definition betont eine klare Formulierung von Zielen für ein Fach, welche den Kompetenzerwerb als Prozess fördern. Kompetenz stellt eine Verbindung von Wissen und Können her und wird wie in Weinerts Definition als Fähigkeit, variable Situationen zu bewältigen, angesehen. Zudem muss die Möglichkeit gegeben sein, die Kompetenzen zu prüfen.

Nach der Begriffsabgrenzung für Kompetenzen werden nun zwei Modelle der professionellen Kompetenz von Lehrkräften vorgestellt. Das erste ist die Struktur des professionellen Wissens von Lehrkräften von Shulman [110]. Er unterscheidet auf der Metaebene die beiden Hauptkomponenten, nämlich *general pedagogical knowledge* und *content knowledge*; *general pedagogical knowledge* ist das erziehungswissenschaftliche Wissen, also Inhalte der Pädagogik und Psychologie, *content knowledge* ist das Wissen im studierten Fach (im vorliegenden Fall Mathematik). Damit wird also global nach erziehungswissenschaftlichem und fachspezifischem Wissen differenziert; *content knowledge* unterteilt sich in *pedagogical content knowledge* und *matter content knowledge*, wobei *pedagogical content knowledge* das fachdidaktische und *matter content knowledge* das fachwissenschaftliche Wissen (im Fach Mathematik) darstellt. Das fachbezogene Wissen hat nach Shulman noch eine dritte Dimension neben fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Komponenten, nämlich das curriculare Wissen, welches notwendig für das spätere unterrichtliche Handeln ist.

> „How might we think about the knowledge that grows in the minds of teachers, with special emphasis on content? I suggest we distinguish among three categories of content knowledge: (a) subject matter content knowledge, (b) pedagogical content knowledge, and (c) curricular knowledge." [110, S. 9].

Schwarz beschreibt dabei die Kategorien *subject matter content knowledge* (siehe im obigen Zitat unter (a)) und *curricular knowledge* (siehe im obigen Zitat unter (c)) folgendermaßen [109]:

> „Dieser Bereich umfasst das Wissen über die rein fachbezogenen Inhalte und Konzepte der jeweiligen Referenzdisziplin. Daneben erstreckt sich das fachliche Wissen nicht nur auf die Kenntnis der zentralen Wissensbestände, sondern umfasst daneben auch das Wissen über zentrale fachliche Gliederungs- und Ordnungsstrukturen der jeweiligen wissenschaftlichen Disziplin. Insoweit entspricht das fachliche Wissen bis zu einem gewissen Grad dem Wissen einer oder eines rein fachbezogen ausgebildeten Diplom- beziehungsweise Bachelor/Master-Absolventin oder Absolventen." [109, S. 39].

Das zweite ist das Modell der professionellen Handlungskompetenz von Bromme [26], [27]. Es werden zum einen kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten betrachtet, welche mit dem Begriff Professionswissen zusammengefasst werden können; diese Facette beinhaltet Fachwissen, fachdidaktisches Wissen sowie pädagogische und psychologische Kenntnisse [39, S. 57], [26], [27]. Diese Einteilung folgt der von Shulman [110]. Ferner beinhaltet das Modell neben dem Professionswissen auch persönliche Überzeugungen und Werthaltungen der Lehrkräfte sowie schließlich die motivationale Orientierung; bei diesem Aspekt sind vor allem Selbstwirksamkeitserwartungen von Bedeutung [39, S. 57], [26], [27]. Nach Bromme hat der Zusammenhang vieler unterschiedlicher Kenntnisfacetten einen besonderen Stellenwert für die professionelle Kompetenz von Lehrkräften (und auch für andere Berufsfelder):

> „Die Verschmelzung von Kenntnissen unterschiedlicher Herkunft ist das Besondere des professionellen Wissens von Lehrern gegenüber dem kodifizierten Wissen der Fachdisziplinen, in denen sie ausgebildet sind.“ [27, S. 198].

Beide Modelle untergliedern die Kompetenzen sehr differenziert; es gibt noch weitere Ansätze, welche die Kompetenzen von Lehrkräften kategorisieren. Dabei wird zum einen eine Taxonomie mit den drei Kernpunkten

- Wissen über das Wesen der Wissenschaft bzw. des Faches, das gelehrt wird,
- Wissen über das Lehren,
- Wissen über das Lernen des jeweiligen Faches,

verfolgt; diese Struktur findet sich bei Aguirre, Haggerty und Linder [2], [34, S. 110]. Eine weitere Kategorisierung in noch reduzierterer Form liefern zum anderen Köller, Baumert und Neubrand durch die Zweiteilung „Struktur des Wissens“ und „Struktur der Wissenserzeugung“ [67], [34, S. 110]. Diese beiden Ansätze erfahren eine nicht so starke Differenzierung wie die Modelle von Shulman und Bromme.

Nach der Definition von Kompetenzen und der Vorstellung von Kompetenzmodellen werden nun zentrale Studien zur Messung professioneller Kompetenz von Mathematiklehrkräften im Überblick geschildert, wichtige Ergebnisse vorgestellt und offene Fragestellungen eruiert.

Kurzübersicht zu den Studien

Es werden in Kurzform die vier Studien TEDS-M, COACTIV, TOSCA und „Entwicklung und Implementierung von Standards und Kompetenzen im Rahmen der Neuorientierung in der Lehrerbildung – Untersuchung am Beispiel des Fachs Mathematik an der Universität Paderborn“ skizziert.

Die TEDS-M-Studie (Teacher Education and Development Study in Mathematics, von 2006-2010) untersucht das mathematische, mathematikdidaktische und erziehungswissenschaftliche Wissen angehender Mathematiklehrkräfte der Primarstufe und der Sekundarstufe I. Diese Studie fokussiert die Wirksamkeit der Lehrerausbildung im Fach Mathematik und stellt heraus, welche Bedingungen der Lehrerausbildung mit der professionellen Kompetenz angehender Lehrkräfte im Fach Mathematik korrelieren [20], [21], [22], [23], [24].

Ein zentrales Anliegen der COACTIV-Studie (Cognitive Activation in the Classroom, integriert in die nationale PISA 2003/2004-Erhebung) ist die Erfassung des mathematischen Fachwissens und des fachdidaktischen Wissens sowie die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen diesen beiden Richtungen [11], [9].

Die TOSCA-Studie (Transformation of the secondary school system and academic careers, von 2002-2007) untersucht, welche Kompetenzen Lernende im Laufe ihrer schulischen Karriere erwerben und wie gut sie auf den Übergang in eine Hochschule, eine berufliche Ausbildung oder den Arbeitsmarkt vorbereitet sind. Ein Schwerpunkt der Studie liegt auf Veränderungen im Sekundarschulsystem und deren Folgen für die Biografien der Lernenden [84].

Das Projekt „Entwicklung und Implementierung von Standards und Kompetenzen im Rahmen der Neuorientierung in der Lehrerbildung – Untersuchung am Beispiel des Fachs Mathematik an der Universität Paderborn“ von Eilerts aus dem Jahr 2009 befasst sich mit der Kompetenzorientierung in der Mathematiklehrerausbildung [39]. Dabei werden die Kompetenzen von Studienanfängerinnen und Studienanfängern im Fach Mathematik zu verschiedenen Erhebungszeitpunkten unter Einbezug verschiedener erklärender Variablen untersucht [39].

Ansätze und zentrale Ergebnisse der Studien

Der Hintergrund der Untersuchungen zur Lehrerausbildung ist, dass die Lehrerbildung kontinuierlicher Kritik ausgesetzt ist, ohne dass Erkenntnisse über ihre Wirksamkeit vorliegen. Dieser Kritikpunkt zeigt sich in der Schilderung von Larcher und Oelkers [76], indem sie formulieren:

> „Wenn es eine Krise in der Lehrerausbildung gibt, dann ist es wesentlich eine Krise der fehlenden Daten.“ [76, S. 129].

Es werden nun Ansätze und wichtige Erkenntnisse der oben genannten Studien vorgestellt. Die Studie TEDS-M untersucht in Anlehnung an das Modell von Bromme die Wirksamkeit der Mathematiklehrerausbildung auf der Ebene der professionellen Kompetenz, die in ihren kognitiven und affektiv-motivationalen Dimensionen erfasst wird [26], [27]. Die Auswertung erfolgt durch folgende Bewertung: vier von acht Punktwerten entfallen auf die fachmathematische Kompetenz, drei auf die fachdidaktische Kompetenz (Mathematikdidaktik allgemein sowie die Teilbereiche Curriculum und Planung sowie Interaktion) und einer auf die pädagogisch-psychologische Kompetenz [20], [21], [22], [23]. Die Messung der fachmathematischen Kompetenz beinhaltet folgende vier Inhaltsgebiete [22, S. 172]:

- **Arithmetik**: natürliche, ganze, rationale, irrationale, reelle und komplexe Zahlen mit ihren Eigenschaften und Rechenregeln, Bruch- und Prozentrechnung, arithmetische Folgen, Teilbarkeit, Kombinatorik.

- **Geometrie**: Messen geometrischer Größen, Abbildungen, Geometrie der Ebene und des Raumes.

- **Algebra**: Folgen, Terme, Gleichungen und Ungleichungen, proportionale Zuordnungen, lineare, quadratische und exponentielle Funktionen, Anfänge der Analysis eingeschränkt auf Grenzwerte und Stetigkeit, lineare Algebra.
- **Stochastik**: Darstellung, Beschreibung und Interpretation von Daten, klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Das mathematische Wissen lässt sich aber nicht nur inhaltlich charakterisieren, sondern ist auch mit kognitiven Prozessen verbunden. Die Struktur der Untersuchung der Kompetenzen greift die Unterscheidung in den TIMS-Studien auf; es werden die Aspekte Reproduzieren, Anwenden und Begründen fokussiert [22, S. 172-173]:

- **Reproduzieren**: Beispiele sind: Erinnern an mathematische Definitionen, Begriffe und Eigenschaften, Erkennen und Klassifizieren von geometrischen Objekten oder Zahlenmengen, Durchführen von Rechenoperationen, Entnehmen von Informationen aus Tabellen und Diagrammen.
- **Anwenden**: Beispiele sind: Lösen von Routineaufgaben, Entwicklung und Anwendung von Problemlösestrategien, Verwendung mathematischer Modelle und die Darstellung von Daten.
- **Begründen**: Beispiele sind: Stringenz in der Argumentation und Beweisführung, Beschreiben von mathematischen Beziehungen.

Wichtige Ergebnisse der Studie sind: Deutsche Grundschullehrkräfte haben eine sehr hohe Motivation für ihren Beruf; ferner erzielen Lehrkräfte mit Mathematik in der Grundschullehrerausbildung gute Resultate, schwache hingegen zeigen diejenigen ohne Mathematik als Unterrichtsfach [20, S. 1]. Für die Lehrkräfte der Sekundarstufe I zeigt sich ein zweiteiliges Ergebnis: es liegen sehr gute Leistungen (fachmathematisch und fachdidaktisch) in der Gymnasiallehrerausbildung vor, schwache hingegen von Lehrkräften an Haupt- oder Realschulen; diese mäßigen Resultate zeigen sich darin, dass diese Gruppe in Fachdidaktik nur knapp über dem Gruppenmittelwert liegt, im fachlichen Aspekt zum Teil signifikant darunter [20, S. 5]. Fast die Hälfte der deutschen Haupt- oder Realschullehrkräfte weist nur ein fachmathematisches bzw. mathematikdidaktisches Wissen auf, das dem untersten TEDS-M-Kompetenzniveau entspricht. Demnach haben diese Lehrkräfte zum Teil selber Schwierigkeiten, mathematische Nichtstandardaufgaben zu lösen, die auf dem Niveau der zu unterrichtenden Lernenden liegen [20, S. 6].

Die COACTIV-Studie untersucht folgende Aspekte:

- Professionswissen, Motivation, Selbstregulation und Überzeugungen von Lehrkräften in Anlehnung an das Modell von Shulman [110].
- Interaktion zwischen Lehrenden und Lernenden; dabei wird analysiert, inwieweit Lehrende die Lernenden kognitiv und konstruktiv unterstützen können und wie die Klassenführung gestaltet ist.

- Fähigkeiten und Fertigkeiten der Schülerinnen und Schüler (PISA).

Die Kompetenzen der Lehrkräfte werden mit Hilfe von Wissenstests und Fragebögen erfasst. Das mathematische Fachwissen der Lehrkräfte wird dabei als vertieftes Hintergrundwissen über den Stoff des Mathematikcurriculums (z.B. auch elementare Schulmathematik vom höheren Standpunkt aus) verstanden [69, S. 237]. Zur Beurteilung des Interaktionsgeschehens zwischen Lehrenden und Lernenden wird eine Befragung der Beteiligten und eine Analyse von Unterrichtsmaterialien herangezogen. Die Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler werden mit Hilfe von Leistungserhebungen (PISA-Untersuchung) und Fragebögen getestet.

Wichtige Ergebnisse der Studie sind: Gymnasiallehrkräfte erreichen deutlich höhere Werte im fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Wissen als Lehrkräfte an Haupt- oder Realschulen. Der Zusammenhang zwischen fachmathematischem und fachdidaktischem Wissen variiert in Abhängigkeit vom Schultyp, an der eine Lehrkraft unterrichtet: bei Gymnasiallehrkräften scheinen die beiden Wissensbereiche stärker vernetzt zu sein als bei Lehrkräften der beiden anderen Schultypen; Gymnasiallehrkräfte mit einer höheren Ausprägung im fachdidaktischen Wissen erreichen auch höhere Werte im Fachwissen. Eine höhere Ausprägung des Professionswissens geht mit stärker konstruktivistischen Lernüberzeugungen einher. Nahezu unkorreliert mit dem Professionswissen sind hingegen die berufsbezogene Motivation der Lehrkräfte und ihre selbstregulativen Fähigkeiten [83]. Es zeigt sich zudem, dass vor allem das fachdidaktische Wissen besonders wichtig für die Herstellung kognitiv aktivierender Unterrichtssituationen und die Unterstützung der Lernprozesse bei den Lernenden ist [83]. Ferner ist eine fundierte Kenntnis über verschiedene mathematische Aufgabentypen von Bedeutung, um den unterschiedlichen Voraussetzungen der Lernenden mit passenden Aufgaben gerecht zu werden, damit eine individuelle Förderung gelingen kann. Kognitive Aktivierung, Klassenführung und individuelle Unterstützung haben einen positiven Effekt auf die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen auf Schülerseite.

Die TOSCA-Studie fokussiert folgende Fragestellungen [84]:

- Welche Kompetenzen besitzen Lernende am Ende der zehnten Klasse und in der gymnasialen Oberstufe?
- Wie gut werden Lernende der zehnten Klasse bzw. Abiturientinnen und Abiturienten auf ihre berufliche Ausbildung oder eine weitere Schullaufbahn bzw. ihr Studienfach vorbereitet?
- Wie gut meistern Gymnasiastinnen und Gymnasiasten den Übergang von der Schule zur Hochschule oder in die Ausbildung?

Wichtige Ergebnisse der Studie sind: Studierende zeigen deutlich bessere mathematische Fähigkeiten im Vergleich zu Lernenden der zehnten Jahrgangsstufe. Greift man nun pezifisch die der zehnten Klasse des Gymnasiums heraus, so ergibt sich ein leicht besseres Bild für die Schülerinnen und Schüler, dieses ist aber nicht bedeutsam. Insgesamt ergeben sich für die Studierenden deutlich bessere Leistungen. Studierende mit Mathematikanteilen in ihrem Studiengang erzielen bessere Ergebnisse als Studierende ohne Mathematikinhalte [106, S. 238-239]. Zieht man als Bezugspunkt die KMK-Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss heran, so zeigen Studierende ein sehr hohes Niveau an mathematischen Grundkompetenzen. Auch die Studierenden ohne Mathematikanteile im Studium erzielen akzeptable Ergebnisse und übertreffen die Regelstandards für den mittleren Schulabschluss. Dieses Argument spricht für die Gymnasialbildung, da die Studierenden allesamt die Regelstandards des mittleren Schulabschlusses übertreffen [106, S. 239].

Das Forschungsprojekt „Entwicklung und Implementierung von Standards und Kompetenzen im Rahmen der Neuorientierung in der Lehrerbildung“ von Eilerts behandelt die Wirksamkeit der Lehrerausbildung an der Universität Paderborn und legt dabei ein Modell mit drei Ebenen zugrunde. Auf der Makroebene wird untersucht, wie die Konzeption der Lehrerausbildung und die inhaltliche Ausrichtung, welche an Standards ausgerichtet ist, in der modularisierten Studienstruktur erreicht werden. Die Mesoebene bezieht sich auf die Lehrenden und analysiert, wie die Neuorientierung in der Ausrichtung der Lehrerausbildung in die Veranstaltungen integriert wird. Auf der Mikroebene werden Einstellungen und Kompetenzen von Studierenden gemessen [39]. Die Testerhebung (Mikroebene) besteht aus zwei Teilen: ein Teil prüft mathematische Grundfähigkeiten, der zweite Teil variiert je nach Studiengang; für Studierende des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen besteht dieser aus Aufgaben der Gebiete elementare Zahlentheorie und Elementargeometrie, für Studierende des gymnasialen Lehramts aus Aufgaben der Gebiete lineare Algebra und Analysis (diese Konzeption ist abhängig von den Veranstaltungen, welche die jeweiligen Studiengruppen im ersten Fachsemester besuchen). Neben diesen Testerhebungen werden in einem Fragebogen personenbezogene Variablen wie soziodemographische Merkmale, Studienvoraussetzungen, Einstellungen zum Studium und Studienfachwunsch erhoben [39, S. 155].

Wichtige Ergebnisse (auf der Mikroebene) der Studie sind: Das in der Testerhebung abgeprüfte Vorwissen hat einen Einfluss auf die Kompetenzentwicklung der Studierenden; während für die Studierenden des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen die Grundfähigkeiten (erster Teil der Erhebung) für die Kompetenzentwicklung bedeutsam sind, ist dies für die Studierenden des gymnasialen Lehramts der stoffspezifische Aspekt (zweiter Teil der Erhebung, orientiert an den Veranstaltungen in linearer Algebra und Analysis) [39, S. 155]. Einen erheblichen Einfluss auf den Kompetenzzuwachs haben die persönlichen Voraussetzungen Abiturnote, Geschlecht und Bildungsnähe der Eltern; speziell für Studierende des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen hat der Regressor Motivation eine Bedeutung auf die Kompetenz [39, S. 168]. Ferner haben die Faktoren intrinsische Studienmotivation und Interesse am Lehramtsstudium eine signifikante Bedeutung für den Kompetenzerwerb. Zudem werden für eine positive Entwicklung der Kenntnisse die

Aspekte interne Ressourcen sowie kognitive und metakognitive Lernstrategien festgehalten [39, S. 188].

Fragestellungen zum Forschungsstand Messung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften

Die Kompetenz von Lehrkräften ist historisch durch drei Strömungen gekennzeichnet: Vom Persönlichkeits-Paradigma über das Prozess-Produkt-Paradigma bis hin zum Experten-Paradigma [69, S. 226]. Die professionelle Kompetenz von Lehrkräften ist im aktuellen Forschungsstand durch die Expertise von Lehrkräften bestimmt, weswegen die Modelle von Shulman und Bromme als theoretisch fundiert gelten. Das Experten-Paradigma wird durch folgende Aussage von Elbaz gestützt:

> „The single factor which seems to have the greatest power to carry forward our understanding of the teacher's role is the phenomenon teachers' knowledge". [40].

Die Ergebnisse von TEDS-M und COACTIV zeigen, dass Lehrkräfte vom Gymnasium (unter anderem) im fachmathematischen Wissen deutlich bessere Ergebnisse erzielen als Lehrkräfte an Haupt- oder Realschulen; 50 % dieser Lehrkräfte erreichen nur das unterste TEDS-M-Kompetenzniveau, so dass das Unterrichten zu einer Hürde werden könnte. Nun stellt sich die Frage: Welches mathematische Fachwissen haben Studierende des Lehramts an Haupt- oder Realschulen? Dieses Wissen kann nach schultypischen und universitätsspezifischen Komponenten differenziert werden. Damit stellt sich weiterführend die Frage: Beeinflussen sich diese beiden Wissensdomänen bzw. welchen Einfluss haben universitäre Fachinhalte auf schulmathematische Aspekte. Das Fachwissen wird als notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung für fachdidaktisches Wissen gesehen [9]; das fachdidaktische Wissen wird in der COACTIV-Studie als Basis für kognitiv aktivierenden Unterricht erkannt und es zeigt sich daher, dass Fachwissen eine entscheidende Grundlage für das Unterrichten ist, so dass einer Untersuchung von schultypischem und universitätsspezifischem mathematischen Wissen von Studierenden an Haupt- oder Realschulen (und auch Grundschulen, welche bei TEDS-M (mit Unterrichtsfach Mathematik) ein besseres Ergebnis zeigen) nachgegangen werden muss.

TEDS-M erhebt das mathematische Fachwissen in den Bereichen Arithmetik, Geometrie, Algebra und Stochastik und unterscheidet dabei die kognitiven Prozesse Reproduzieren, Anwenden, Begründen; diese Prozesse sind mit den Anforderungsbereichen der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der KMK-Bildungsstandards (Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, Verallgemeinern und Reflektieren) zu vergleichen [71]. Diese bereichs- und kognitionsspezifische Einteilung ist theoretisch fundiert. TEDS-M baut stark auf Multiple-Choice-Aufgaben, die auch tiefes konzeptionelles Wissen messen. Es stellt sich dabei die Frage: Sollte der Schwerpunkt der

Testaufgaben auf offenen Aufgaben liegen? Dieser Ansatz würde die Analyse von Lösungswegen ermöglichen und es könnten typische Fehlerbilder eruiert werden, was eine differenziertere und spezifischere Untersuchung zum mathematischen Fachwissen eröffnet. Shulman sieht in der Komponente Fachwissen (content knowledge) neben dem Faktenwissen vor allem Argumentations- und Begründungskompetenz, welche anhand von Lösungswegen beurteilt werden kann.

> „The teacher need not only to understand that something is so, the teacher must further understand why it is so, on what grounds its warrant can be asserted, and under what circumstances our belief in its justification can be weakened and even denied.“ [110, S. 9].

Die Ideen von Eilerts bieten durch die Testerhebung und den Fragebogen einen fundierten Ansatz, um die Kompetenzentwicklung der Studierenden über den Verlauf eines Semesters zu testen und dieses Wissen auch in Abhängigkeit verschiedener Variablen zu betrachten. Als Frage tut sich nun auf: Würde eine größere Zeitspanne ein breiteres Spektrum für die Analyse der Kompetenzentwicklung ermöglichen? Und damit verbunden: Welchen Einfluss haben universitäre Inhalte auf die Kompetenzen (speziell fachmathematische Kenntnisse) über die Dauer des Grundstudiums? Zudem kann bei der Betrachtung der erklärenden Variablen die Frage gestellt werden: Welche Entwicklung nehmen die Variablen, speziell wie entwickeln sich etwa Lernstrategien in den ersten Fachsemestern und welcher Zusammenhang ergibt sich zwischen den Regressoren und den fachmathematischen Kompetenzen über eine größere Zeitspanne?

Die TOSCA-Studie zeigt, dass Studierende (mit und auch ohne Mathematikanteile im Studium) die Regelstandards der KMK-Bildungsstandards übertreffen, was zunächst für die Gymnasialausbildung spricht [106]. Die gymnasiale Oberstufe stellt ein Additum zum Wissen der Sekundarstufe I dar und soll zur Studierfähigkeit beitragen. Die Vermittlung von mathematischen Kompetenzen der Sekundarstufe II liefert eine Niveausteigerung des mathematischen Grundwissens und beeinflusst die Nachhaltigkeit des Mathematiklernens. Dies zeigt sich in der Studie an den ansprechenden Ergebnissen der Gruppe der Studierenden ohne Mathematikanteile, obwohl dem Vergessen mathematischer Aspekte nicht entgegenwirkt wird. Von Interesse wäre nun die Frage, ob die Studierfähigkeit, die durch den gymnasialen Bildungsweg attestiert wird [71], auch die notwendigen wie hinreichenden mathematischen Grundlagen für ein Fachstudium in Mathematik, insbesondere also auch für das Lehramtsstudium im Fach Mathematik an Grund-, Haupt- oder Realschulen, liefert und erbringt [71]?

> „Es ließe sich diskutieren, ob Grundkompetenzen auf hohem Niveau als hinreichend angesehen werden können, um von vertiefter Allgemeinbildung hinsichtlich mathematischer Kompetenzen insgesamt zu sprechen. Eine allgemeine Befähigung zum Studium setzt jedenfalls Kenntnisse

> voraus, die über die Inhalte der Sekundarstufe I und die hier definierten Grundkompetenzen hinausgehen.“ [106, S. 236].

In diesem Zusammenhang muss man auch die Verkürzung der Gymnasialzeit auf acht Jahre (G8) berücksichtigen. Die Fähigkeiten von Studierenden im Fach Mathematik werden vor allem zu Studienbeginn bemängelt, was durch die Verkürzung auf eine achtjährige Gymnasialzeit noch deutlich kritischer gesehen wird.

> „Im Zuge der in vielen Bundesländern bevorstehenden Verkürzung der gymnasialen Schulausbildung (G8) ist schon jetzt absehbar, dass sich die Lücke vergrößern wird.“ [29, S. 110].

Daher stellt sich nun die Frage: Welches mathematische Wissen haben G8-Absolventinnen und -Absolventen zu Studienbeginn? Wie ist der Wissensstand von G8-Absolventinnen und -Absolventen im Vergleich zum dem der G9-Absolventinnen und -Absolventen bzw. Absolventinnen und Absolventen von Fachober- und Berufsoberschulen? Bei der Betrachtung der G9-Absolventinnen und -Absolventen kann noch differenzierter nach Grund- und Leistungskursteilnehmenden unterschieden werden. Darauf aufbauend muss auch der nächste Kritikpunkt an der achtjährigen Gymnasialbildung, nämlich der Wegfall von Leistungskursen, erwähnt werden. Diesen Aspekt kritisieren Lorbeer und Reiss, da das Gymnasium oft nicht die Spezifizierung und Vertiefungsmöglichkeiten für ein Fach eröffnet, vor allem durch den Wegfall der Leistungskurse im G8-System in Bayern [80, S. 89]. Im Rahmen der TIMS-Studie konnte gezeigt werden, dass die Leistungen von Lernenden, die ein achtjähriges Gymnasium besuchen, am Ende der Sekundarstufe II signifikant besser sind als die von Lernenden mit neunjähriger Gymnasialbildung [58, S. 4], [8]. Einen weiteren Vergleich von G8- und G9-Absolventinnen und -Absolventen liefert die Gegenüberstellung der Ergebnisse von Kess-Studie (Kompetenzen und Einstellungen von Schülerinnen und Schülern) und LAU-Studie (Aspekte der Lernausgangslage und der Lernentwicklung) [46], [16], [15], [126]. Die Ergebnisse der G8-Absolventinnen und -Absolventen (aus der Kess-Studie) sind dabei leicht besser als die G9-Absolventinnen und -Absolventen (aus der LAU-Studie). Insgesamt lässt sich festhalten:

> „Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass die Testbesten des Kess-Jahrgangs in allen untersuchten Kompetenzbereichen insgesamt höhere Lernstände verzeichnen als die Testbesten des LAU-Jahrgangs - ein Hinweis darauf, dass unter den Rahmenbedingungen des G8 die Leistungsspitze erfolgreich gefördert werden konnte. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass unter den erhöhten Anforderungen des G8 mehr Abiturientinnen und Abiturienten höhere Lernstände erreicht haben.“ [126, S. 13].

Abschließend bleibt festzustellen, dass der Frage nach dem Leistungsstand von Studierenden mit G8-Hintergrund nachgegangen werden muss.

2.1.2 Die Übergangsproblematik von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik

Die Übergangsproblematik von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik ist eine zentrale Thematik im aktuellen Forschungsfeld und wird auch in der Dissertation thematisiert. Es werden zuerst grundlegende Kernpunkte dargelegt und danach Charakteristika von Schulmathematik und universitärer Mathematik vorgestellt und verglichen, da daran die Problematik dieses Übergangs deutlich wird. Ergänzend wird die Übergangsproblematik anhand dreier zentraler Artikel zu dieser Thematik beschrieben und vertieft, die nun kurz vorgestellt werden.

Lorbeer und Reiss [80] diskutieren die mathematische Kompetenzentwicklung beim Übergang von der Schule zum Tertiärbereich Hochschule. Es wird zuerst die grundlegende Situation beim Übergang zwischen den beiden Bildungsinstitutionen in den Blick genommen und daraufhin die Kernproblematik geschildert. Ferner werden Maßnahmen hinsichtlich der Übergangsproblematik (Frühstudium während der Schulzeit) vorgestellt und abrundend Konsequenzen bezüglich der mathematischen Kompetenzen beim Übergang skizziert.

Des Weiteren werden die Kernpunkte eines Übersichtsartikels von Grünwald, Kossow, Sauerbier und Klymchuk [49] dargestellt, welcher die Problematik unter nationalen und internationalen Gesichtspunkten diskutiert. Dabei werden Gründe für die Übergangsproblematik formuliert und ferner eine Studie vorgestellt, in der Hochschullehrende und auch Studierende zu diesem Aspekt befragt werden. Das zentrale Anliegen des Artikels ist es, Antworten von Lehrenden und Lernenden zum Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik zu erhalten und diese auszuwerten.

Zudem analysieren Cramer und Walcher [29] die Übergangsproblematik und nennen als zentrale Kritikpunkte die inhaltlichen Ansprüche und Ausrichtung der Mathematik in der Schule (zu starke Kompetenzorientierung und weniger Inhalt sowie gezwungene Einkleidung der Mathematik in reale Sachsituationen) und die Unterschiede in den Lehrplänen der verschiedenen Bundesländer in Deutschland.

Problematik beim Übergang von der Schule zur Hochschule

Als Leitgedanke für die Problematik beim Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik wird die Thematik der „Doppelten Diskontinuität“ fokussiert; Felix Klein prägte am Anfang des 20. Jahrhunderts diesen Begriff, der an Aktualität und Brisanz über ein Jahrhundert hinweg nichts verloren hat. Studierende für das Lehramt mit dem Fach Mathematik erfahren zwei Bruchstellen in ihrer Berufsbiographie; zu Beginn des Studiums erleben sie im Fach Mathematik einen Abstraktionsschock, der durch die Umstellung von algorithmischer, beispielorientierter Schulmathematik zu deduktiver und abstrakter Hochschulmathematik bedingt ist.

Die zweite Bruchstelle nach Beendigung des Studiums wird durch die Rückkehr zur Schulmathematik (in lehrender Form) hervorgerufen. Somit nehmen die Studierenden die beiden Stufen der Mathematik als zwei unterschiedliche, voneinander getrennte Gesichtspunkte wahr.

$$\text{Schulmathematik} \underset{\textbf{Bruchstelle}}{\overset{\textbf{erste}}{\Longrightarrow}} \text{Universitätsmathematik} \underset{\textbf{Bruchstelle}}{\overset{\textbf{zweite}}{\Longrightarrow}} \text{Schulmathematik}$$

Felix Klein beschreibt die erste Bruchstelle folgendermaßen:

> „Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkt mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergisst er daher alle diese Sachen rasch und gründlich.“ [63, S. 1].

Genau diese erste Bruchstelle ist im aktuellen Forschungsfeld immer wieder Gegenstand von Untersuchungen und wird auch im Rahmen der Dissertation fokussiert. Das von Ableitinger, Kramer und Prediger herausgegebene Werk „Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung“ widmet sich dieser Thematik [1]. Aufgrund der Problematik der doppelten Diskontinuität (vor allem die erste Bruchstelle) entwickeln viele Universitäten neukonzipierte Anfängervorlesungen und legen bei der Gestaltung der Inhalte Wert auf eine Interaktion zwischen fachinhaltlichen und fachdidaktischen Ausbildungselementen [1]. Das Buch gibt einen Überblick zu unterschiedlichen didaktischen und methodischen Konzepten und deren Umsetzung in Lehrveranstaltungen. Des Weiteren fasst Klein die zweite Bruchstelle in folgende Worte:

> „Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht kaum einen Einfluss hat.“ [63, S. 1].

Diese Aussagen von Felix Klein sind als zentrales Kernstück für die Diskussion der Übergangsproblematik zwischen Schule und Universität im Fach Mathematik zu sehen. Als Ergänzung zu den Aussagen von Felix Klein werden drei zentrale Punkte für die Übergangsproblematik von Bauer und Partheil angeführt, die im Einklang mit Kleins Ansichten stehen [7].

- Bruchstelle „Lerninhalte“:

  Die beiden großen Stoffgebiete der Sekundarstufe I, Algebra und Geometrie, und ihre universitären Pendants, Zahlentheorie und (Hochschul-)Geometrie, untermauern diese Bruchstelle [7, S. 86-87], [63]; die Lerninhalte der Schulalgebra stützen sich zum Großteil auf algorithmische Rechenmethoden wie etwa die Behandlung von Termen und das Lösen von Gleichungen, während in der Zahlentheorie theoretische Aspekte wie etwa algebraische Strukturen (Gruppe, Ring, Körper) besprochen werden. Die Schulgeometrie legt unter anderem besonderen Wert auf die Anschauung und Konstruktion von Objekten, was im universitären Rahmen (etwa Differentialgeometrie) kaum Bedeutung findet.

- Bruchstelle „Anforderungen und Ziele“:

  Sich überschneidende Inhalte der Schulmathematik und der universitären Mathematik streben (zurecht) unterschiedliche Anforderungen und Zielvorstellungen an. Dies zeigt sich immer wieder in Inhalten der Analysis; beispielsweise werden zentrale Themen wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit aus zwei völlig verschiedenen Blickwinkeln betrachtet [7, S. 86-87], [63]. Die Thematik Differenzierbarkeit beschränkt sich in der Schule vor allem auf die schematische Bildung der ersten Ableitung und die Bestimmung lokaler Extrema mit Hilfe der ersten Ableitung, während im universitären Rahmen die Begriffsbildung stärker betont wird und den schematischen Rechenansätzen ein geringer Stellenwert zukommt.

- Bruchstelle „Argumentation“:

  Die universitäre Mathematik findet in ihrem axiomatisch-deduktiven Aufbau ihre Entfaltung und Bestimmung; dieses Bestreben nach Exaktheit und Lückenlosigkeit in der Argumentation ist die Stärke der universitären Disziplin Mathematik. Die Argumentationsstruktur in der Schulmathematik zeigt ein anderes Gesicht; hier sind unterschiedliche Ebenen der Argumentation wie anschauliche und heuristische Argumentation dem vollständigen Beweis gleichgestellt. Diese dritte Bruchstelle beim Übergang von der Schule zur Universität im Fach Mathematik spielt wohl die stärkste Rolle (im Vergleich zu den beiden oben beschriebenen Aspekten), da der sehr formale und theoretische axiomatisch-deduktive Aufbau der universitären Mathematik den Studierenden am meisten Schwierigkeiten bereitet [7, S. 86-87], [63]. Bauer und Partheil geben ein Beispiel für diese Bruchstelle:

  > „Man führe sich die Situation am Beispiel des Zwischenwertsatzes vor Augen: Falls man den Satz im Unterricht überhaupt herausstellt, so wird man vermutlich nicht über das Plausibilitätsargument hinausgehen, dass jede Parallele zur x-Achse den Graphen einer stetigen Funktion im betrachteten Bereich schneiden muss. Dieselbe

> Überlegung wird man auch in einer Analysis-Vorlesung finden, jedoch in völlig anderer Rolle, nämlich als heuristische Vorüberlegung, die zum Zwischenwertsatz hinführt. Der eigentliche Beweis im deduktiven Rahmen zeigt dann, wie die Stetigkeit der Funktion und die Vollständigkeit der reellen Zahlen in die Begründung eingehen.“ [7, S. 87].

Damit sind Kernpunkte der „Doppelten Diskontinuität“ und ihre zentralen Bruchstellen skizziert. Im Folgenden werden die Charakteristika von Schulmathematik und Universitätsmathematik vorgestellt und verglichen und damit die Ursachen für die Übergangsproblematik zwischen den Bildungsinstitutionen eruiert.

Gegenüberstellung von Schulmathematik und Universitätsmathematik

Charakter der Schulmathematik

Wegen institutioneller Voraussetzungen kommt der Schulmathematik ein anderer Stellenwert zu als der akademischen Mathematik an Hochschulen. Die Schulmathematik als Trivialisierung der akademischen Mathematik zu sehen ist dabei nicht akzeptabel. Die soziale Funktion der Schulmathematik liefert das Argument dafür, ihr einen eigenständigen Platz in der gesellschaftlichen Wissensstruktur zuzuordnen [60, S. 165], [128, S. 246]. Die Schulmathematik besitzt einen deutlich stärkeren Bezug zur Außenwelt und zum Alltag, während die akademische Hochschulmathematik eher eine innermathematische Motivation findet [128, S. 246]. Auch die mathematischen Begrifflichkeiten erfahren unterschiedliche Auslegungen; so sind in der Hochschulmathematik die Begrifflichkeiten präzise gefasst, was die Stärke der Wissenschaftsdisziplin Mathematik ist. Die Schulmathematik thematisiert Begriffe meist auf verschiedenen Bedeutungsebenen, es wird also mehr Spielraum geboten und die Exaktheit steht nun nicht mehr so sehr im Zentrum des Interesses. Insgesamt zielt die Schulmathematik auf die Vermittlung von mathematischer Grundbildung und mathematischer Prozessfähigkeit [71], [128, S. 247].

Der entscheidende Unterschied der beiden Ausrichtungen findet sich wohl im theoretischen Aufbau. Die akademische Disziplin zeichnet sich durch den axiomatischen Aufbau und die exakte Formulierung der Inhalte aus. Die schulische Mathematik hingegen findet für diese beiden Aspekte eher wenig Raum. Der Aufbau der Schulmathematik weist natürlich auch eine logische inhaltliche Struktur auf, aber er orientiert sich vielmehr an den pädagogisch-psychologischen Lernvoraussetzungen der Lernenden [128, S. 248]. Die akademische Mathematik beschreibt eine globale Systematisierung in ihrem axiomatischen Aufbau. Die Systematik der Schulmathematik hingegen ist als lokales Ordnungssystem mit einem reduzierten Grad an Strenge aufzufassen, welches ohne explizite Axiome auskommt [128, S. 249]. Es werden allerdings in der lokalen Ordnungssystematik wahre Aussagen mit Axiomen gleichgestellt, womit bewiesen und begründet werden kann [128, S. 248], [117].

Charakter der Universitätsmathematik

Um charakteristische Eigenschaften der akademischen Mathematik zu explorieren, sind die speziellen Anforderungen beim Erlernen der universitären Mathematik zu bedenken. Dabei ist vor allem die Arbeitsgruppe Advanced Mathematical Thinking zu nennen, die sich mit den psychologischen Hintergründen bei der Auseinandersetzung mit akademischer Mathematik beschäftigt. Ziel dieser Gruppe ist, die kognitiven Herausforderungen zu analysieren, welche sich den Studierenden zu Studienbeginn stellen [128, S. 252]. Es ist geradezu ein Charakteristikum der Wissenschaftsdisziplin Mathematik, dass die meisten Studierenden zu Beginn des Studiums vor grundlegenden Verständnisproblemen stehen.

Die Mathematik wird den Studierenden als fertige Theorie gelehrt; diese Produktorientierung stößt innerhalb der Forschung immer wieder auf Kritik [128, S. 253], [31]. Es zeigen sich Verständnisprobleme, wenn Studierende mit fertigen Inhalten und Theorien konfrontiert werden, da kein konstruktivistischer Wissenserwerb ermöglicht wird. Die Probleme bei der Aufnahme dieser Inhalte kategorisiert Tall durch die Begriffe *assimilation* und *accommodation* [119]; dabei werden höhere Denkstrukturen erreicht, indem neue Informationen aufgenommen werden (*assimilation*) und ihre kognitive Struktur geändert wird (*accommodation*) [128, S. 253]. Bei den Begriffen *assimilation* und *accommodation* muss ein Bezug zur Lernpsychologie hergestellt werden, speziell zum Entwicklungsstufenmodell von Piaget [93]. Nach Piaget bedeutet Assimilation die Einordnung von Erfahrungen in vorhandene subjektive Bezugssysteme. Die aufgenommene Information wird so verändert, dass sie sich in das vorhandene Schema einfügen lässt. [134, S. 66]. Ferner versteht Piaget unter dem Begriff Akkommodation eine Anpassung an eine Situation oder einen Gegenstand, also eine Anpassung an die Wirklichkeit [88, S. 548, S. 523]. Zimbardo ergänzt für den Begriff Akkommodation:

> „Bei der Akkommodation werden die Schemata selbst verändert, um der Information angemessen zu sein oder um nicht zu anderen Schemata oder der Gesamtstruktur in Widerstand zu stehen.“ [134, S. 66].

Ferner treten auch Schwierigkeiten bei der Abstraktion mathematischer Grundbegriffe auf. Beispielhaft soll der zentrale Begriff Vektorraum im Bereich der linearen Algebra erwähnt werden; bei den Studierenden ist eine Vorstellung der Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ vorhanden, aber die Generalisierung zu beliebigen Vektorräumen wie $\mathbb{R}^n$ oder $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ fällt ihnen schwer [128, S. 253]. Die bekannten Beispiele des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ dienen als Unterstützung, offenbaren sich aber womöglich als Problem bei der Verallgemeinerung des Begriffs Vektorraum. Tall fasst diesen Aspekt als ungenügende *accomodation* auf, da die kognitive Struktur nicht so geändert wird, dass anhand von Definitionen und daraus abgeleiteten Axiomen erkannt wird, welche Eigenschaften sich übertragen lassen [119], [128, S. 252].

Vinner definiert das Begriffsverständnis der Lernenden durch die Begriffe *concept image* und *concept definition* [127]. Dabei beschreibt der Begriff *concept image* das Schema, das zu einem mathematischen Grundbegriff vorliegt, und der Begriff *concept definition* die entsprechende Definition. Eine mathematische Begrifflichkeit wird nur dann verstanden, wenn *concept image* und *concept definition* zur *concept formation* verschmelzen [128, S. 255]. Die Anfängervorlesungen im Fach Mathematik greifen häufig bekannte Inhalte der Schulmathematik auf und verleihen diesen nun formal-axiomatischen Charakter. Da strikten Definitionen von mathematischen Begriffen (*concept definition*) in der Schule eher eine untergeordnete Rolle zuzuordnen ist und die Lernenden sich oft nur mit dem Schema (*concept image*) beschäftigen, ist der übliche Gebrauch von Begriffsabgrenzungen im akademischen Mathematikumfeld für die Studierenden so gut wie neu [128]. Vinner liefert ein Beispiel aus der Differentialrechnung: in der Schule wird der Grenzwertbegriff meist anhand des Verhaltens von Funktionen am Rande des Definitionsgebiets motiviert. Diese Auslegung kann zu einem falschen *concept image* führen; in Anfängervorlesungen der Analysis ist der Grenzwert ein zentraler Inhalt bei der Thematik der reellen Folgen. Bleibt nun das *concept image* gleich, während sich die *concept definition* ändert, so ergeben sich beispielsweise Probleme bei der Behandlung des Grenzverhaltens für reelle Folgen wie $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ [128, S. 255], [127].

Diese Theorien zum Mathematiklernen auf akademischem Niveau zeigen markante Unterschiede zum Lernen auf Schulniveau. Der formal-axiomatische Charakter der akademischen Mathematik weist spezifische Besonderheiten auf, die zu kognitiven Konflikten auf Seiten der Studierenden führen und somit den Übergang von der Schule zur Universität blockieren können. Dies liegt einerseits im beschriebenen Unterschied bezüglich des Charakters der Schulmathematik zur universitären Mathematik, andererseits in der Art und Weise, wie Mathematik an den einzelnen Bildungsinstitutionen gelernt und gelehrt wird, begründet [128].

Nun werden Aspekte der Übergangsproblematik aus drei verschiedenen Positionen thematisiert. Es werden die Kompetenzentwicklung beim Übergang von beiden Bildungsinstitutionen als Prozess skizziert, Meinungen von Lehrenden und Lernenden aus dem In- und Ausland zur Problematik erfasst und Kritikpunkte durch die veränderte Ausrichtung im Fach Mathematik an den Schulen angeführt.

Mathematische Kompetenzentwicklung im Übergang zwischen Schule und Hochschule: Ist der Kulturschock unabwendbar?

Lorbeer und Reiss [80] stellen die Grundzüge der Kompetenzentwicklung bei der Übergangsproblematik von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik dar:

> „Dabei geht es nicht um ein einfaches Kontinuum, sondern die Kompetenzentwicklung stellt sich als ein Prozess dar, der durch dynamische Phasen gekennzeichnet ist und von unterschiedlichen Institutionen organisiert wird, die immer noch wenig miteinander abgestimmt arbeiten.“ [80, S. 87].

Es werden für die Schwierigkeit beim Wechsel zwischen den Bildungsinstitutionen die unterschiedlichen Zielvorstellungen von Schule und Universität gegenübergestellt; dabei kommt dem Gymnasium die Verpflichtung zu, auf ein Studium vorzubereiten und ein breites Spektrum an Allgemeinbildung zu vermitteln, während die Universität den eigenen wissenschaftlichen Nachwuchs ausbilden möchte und die Studierenden auf das Berufsleben vorbereiten muss [80, S. 88-89]. Die Rollen von Schule (Gymnasium) und Universität müssen auch so verstanden werden, da sich Lernende wohl bewusst für eine Studienwahl entscheiden; dennoch leistet das Gymnasium oft nicht die Spezifizierung und Vertiefungsmöglichkeiten für ein Fach, vor allem durch den Wegfall der Leistungskurse im G8-System in Bayern [80, S. 89].

Die oben dargestellten Charakteristika der beiden Formen der Mathematik in Schule und Hochschule stellen die größte Hürde beim Übergang dar. Die Autoren betonen, dass Mathematiklernen keine reine Aneignung von Wissen ist, sondern eher durch aktive Auseinandersetzung mit dem Stoff erfolgt (vgl. auch [31]); vor allem sind Fähigkeiten wie Hartnäckigkeit bei der Wissensaneignung und die Förderung von Interesse für das Fach wichtig, um den Übergang besser zu bewältigen.

Die Autoren stellen ferner die Problematik des axiomatisch-deduktiven Aufbau von Vorlesungen an Universitäten dar und wünschen ein Umdenken auf Seiten der Schulen und auch Universitäten, also beispielsweise Schulinhalte in universitären Vorlesungen zu thematisieren. Dieser Leitgedanke wird im Buch „Basiswissen Zahlentheorie“ von Reiss und Schmieder [101] verfolgt. Eine besondere Betonung im Artikel findet die Rolle des Beweisens; diese Methode ist gerade die Stärke der Mathematik, da Sätze allgemeingültig bestätigt werden können. Daher muss die Fähigkeit, Beweise durchführen zu können, in der Schule auf einem ansprechenden Niveau vermittelt werden [80, S. 91]. Ein weiterer möglicher Ansatz für das verbindende Kalkül zwischen den Institutionen Schule und Hochschule ist, Lernende mit der universitären Mathematik vertraut zu machen; dies wird durch Schülertage an den Universitäten oder durch Angebote eines Frühstudiums realisiert, in dem Lernende der Oberstufe Vorlesungen besuchen und auch Leistungsnachweise erwerben können [80, S. 93].

Als Fazit sehen die Autoren, dass sich Schulen und Hochschulen nicht nur hinsichtlich der Inhalte verständigen sollen, sondern auch den kompetenzorientierten Ansatz verfolgen sollen, da inhaltliches Wissen in dieser Domäne nicht ausreicht.

> „Wichtig ist es, nicht so sehr spezifische Inhalte, sondern auch die Entwicklung von Kompetenzen bei den Schülerinnen und Schüler in den Fokus zu nehmen. Würde das im Dialog zwischen Schulen und Hochschulen gelingen, so wäre es für alle Seiten ein großer Gewinn.“ [80, S. 97].

Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik: Erfahrungen aus internationaler und deutscher Sicht

Der Artikel von Grünwald et al. [49] zur Übergangsproblematik von der Schule zur Universität im Fach Mathematik schildert Gründe für diese Kluft und versucht in einer Studie, Ansichten von Lehrenden und Lernenden aus Deutschland und dem Ausland zu dieser Thematik auszuwerten. Die Aussagen des Artikels werden an dieser Stelle recht ausführlich geschildert, da dieser viele Aspekte dieser Problematik beschreibt und die Antworten der Betroffenen (Lehrende und Lernende) in der Befragung von großem Interesse sind.

Einführend greifen die Autoren auf den gemeinsamen Report des Institute of Mathematics and its Applications (IMA) der London Mathematical Society und der Royal Statistical Society zurück und bringen folgende Aspekte des Reports für die Übergangsproblematik an [49, S. 284]:

> „Es gibt eine beispiellose Sorge unter Mathematikern, Wissenschaftlern und Ingenieuren in der Hochschulausbildung über die mathematischen Fähigkeiten der Studienanfänger [...] Die ernsten Probleme, die in der höheren Ausbildung wahrgenommen werden, sind
>
> - ein erheblicher Mangel an grundlegenden mathematischen Fertigkeiten, beispielsweise eine algebraische Berechnung mit Exaktheit durchzuführen;
> - ein Rückgang an analytischen Fähigkeiten, wenn die Studienanfänger mit einfachen Problemen konfrontiert werden, die mehr als einen Lösungsschritt erfordern;
> - eine veränderte Auffassung der Disziplin Mathematik, insbesondere zur Notwendigkeit von deren Exaktheit und Stringenz.“ [49, S. 284].

Der Hauptgrund für die Lücke zwischen Schul- und Hochschulmathematik ist in der unterschiedlichen Art des Denkens zu finden. Diesen Gedanken formuliert übrigens auch Tall [119]:

> „The formal presentation of material to students in university mathematics courses - including mathematics majors, but even more for those who take mathematics as a service subject - involves conceptual obstacles that make the pathway very difficult for them to travel successfully. And the changes in technology, that render routine tasks less needful of labour, suggest that the time for turning out students whose major achievement is in reproducing algorithms in appropriate circumstances is fast passing and such an approach needs to move to one which attempts to develop much more productive thinking“. [49, S. 284-285].

Ferner führt Tall die Konfrontation der Studierenden mit dem logischen Aufbau der Mathematik in Hochschulen an, der sich durch seinen axiomatisch-deduktiven Charakter auszeichnet und im Gegensatz zur beispielorientierten Schulmathematik steht:

> „At school the accent is on computations and manipulation of symbols to get an answer, using graphs to provide imagery to suggest properties. At university there is a bifurcation between technical mathematics that follows this style (with increasingly sophisticated techniques) and formal mathematics, which seeks to place the theory on a systematic, axiomatic basis.“ [118, S. 1].

> „During the difficult transition from pre-formal mathematics to a more formal understanding of mathematical processes there is a genuine need to help students gain insight into the concepts.“ [119, S. 17].

In der Studie von Grünwald et al. werden Hochschullehrenden aus dem In- und Ausland folgende drei Fragen gestellt [49, S. 285]: Die Lehrenden sollen Ursachen für die Lücke zwischen Schul- und Hochschulmathematik benennen (Frage 1), Methoden schildern, um diese Lücke zu verringern (Frage 2) und schließlich Ideen darlegen, wie der Übergangsproblematik effektiver begegnet werden kann (Frage 3).

Die Autoren stellen für Frage 1 (Ursachen der Übergangsproblematik) gemäß den Antworten der Lehrenden folgende acht Ursachen heraus [49, S. 286-287]:

- **Ursache 1**: Unterschiedliche fachliche Ansprüche: es herrscht ein anspruchsvolleres Denkniveau auf Seiten der Hochschulmathematik; dies wird im Vergleich der algorithmisch geprägten Schulmathematik zur deduktiven Struktur der universitären Mathematik deutlich (vgl. auch [128]).
- **Ursache 2**: Art und Weise des Bestehens von Prüfungen: durch das Auswendiglernen von Schemata können Schülerinnen und Schüler leicht gute Prüfungsleistungen erbringen, ohne die Inhalte verstanden zu haben. Diese Tendenz wirkt konträr zum Wesen des Fachs Mathematik (vor allem an den Hochschulen).

- **Ursache 3**: Überfüllte Lehrpläne: die Stofffülle an Inhalten überfordert die kognitiven Fertigkeiten bzw. die Aufnahmefähigkeiten der Lernenden und verleitet zum Auswendiglernen und nicht zum Verstehen der zentralen Inhalte.

- **Ursache 4**: Hohe Erwartungen an Hochschulehrende: die Kompetenzen der Lehrenden an Hochschulen sollen sich nicht nur auf die Aufgaben in der Lehre beschränken, sondern es besteht der Wunsch, dass zusätzlich Lücken im Wissen der Lernenden geschlossen und fehlende Denkstrukturen für das Fach Mathematik gefördert werden.

- **Ursache 5**: Unterschiedliche Ausprägungen des Lehrens und Lernens an beiden Bildungsinstitutionen: es werden die institutionellen Ausrichtungen betont, der axiomatisch-deduktive sowie der beispielorientierte (allgemeinbildende) Charakter, die eine unterschiedliche Betonung in den Prozessen des Lehrens und folglich auch des Lernens bedingen (vgl. auch [128]).

- **Ursache 6**: Mangelndes mathematisches Wissen der Lehrenden an Schulen und mangelnde Lehrfähigkeiten der Lehrenden an Hochschulen: dieser Aspekt stellt die fachmathematische und die fachdidaktische Wissensdomäne stark kontrastierend gegenüber, da dem Lehrenden an der Schule fachwissenschaftliche und dem an der Hochschule fachdidaktische bzw. pädagogisch-psychologische Kompetenzmängel attestiert werden; dieses Argument scheint sehr pauschalisiert, wobei festgehalten werden muss, dass ein Lehrender an der Hochschule in der Regel keine didaktische und pädagogische Ausbildung durchlaufen hat.

- **Ursache 7**: Mangelnde Kommunikation zwischen Schule und Hochschule: dieser Punkt wirkt auch sehr pauschal, da beide Institutionen an Rahmenbedingungen gebunden sind und diese primär zu erfüllen haben.

- **Ursache 8**: Wechsel der Umgebung: der Sprung an die Universität ist mit viel Selbstständigkeit und Eigeninitiative verbunden, was an der Schule nicht in diesem Ausmaß von den Lernenden verlangt wird.

Des Weiteren ergeben sich für Frage 2 (Verringerung der Übergangsproblematik) folgende sechs Methoden [49, S. 287-288]:

- **Methode 1**: Vermittlungsform des Stoffes an der Hochschule anpassen: dies beinhaltet ein Angebot an zusätzlichen Übungsterminen, kleine Übungsgruppen mit tutorieller Unterstützung und die Möglichkeit der Einzelberatung.

- **Methode 2**: Brückenkurse: diese stellen ein verbindendes Glied zwischen den Institutionen Schule und Hochschule dar. Dabei soll vor allem die universitäre Denkweise vorgestellt, nicht Lücken im Schulwissen geschlossen werden.

- **Methode 3**: Entwicklung pädagogischer Verfahren und Strategien: die Lehrenden an Hochschulen können durch diese Maßnahmen mit mehr didaktischem und pädagogischem Repertoire ausgestattet werden.
- **Methode 4**: Bessere Kommunikation zwischen Schule und Hochschule: dieser Aspekt wird bereits bei den Ursachen für die bestehende Kluft genannt. Durch Angebote wie Frühstudium und Schülertage kann ein Austausch und damit eine bessere Kommunikation stattfinden.
- **Methode 5**: Transparenz des Leistungsstandes der Lernenden: durch wöchentliche Tests, mündliche Prüfungen und Feedback an die Lernenden hat die Hochschule die Möglichkeit, ein genaues Bild über die Zielgruppe und deren kognitives Potential zu erhalten.
- **Methode 6**: Verringerung der fachlichen Anforderungen an den Hochschulen: dieser Aspekt kann kritisch gesehen werden, da diese Entwicklung zu einer stetigen Reduzierung von Anspruch und Inhalt führen würde.

Ferner werden folgenden Ideen für Frage 3 (Gestaltung der Übergangsproblematik) gefunden [49, S. 288-289]:

- **Idee 1**: Qualitätskontrolle an beiden Institutionen: dieser Ansatz gestaltet den Leistungsstand der Lernenden transparent, so dass sich die Hochschullehrenden auf das Potential der Studienanfängerinnen und Studienanfänger einstellen können. Ferner soll die pädagogische und didaktische Ausbildung der Hochschullehrenden intensiviert werden.
- **Idee 2**: Zusätzliche Angebote an Schulen: Beispiele sind etwa Lernhilfen, Tutorien und das Angebot von Leistungsklassen; dabei soll der universitäre Charakter der Mathematik fokussiert werden, indem Beweisführung und stringente Argumentationsweise geschult werden. Ein weiterer Ansatz ist eine Leistungsdifferenzierung der Studierenden durch Eigeneinschätzung und eine darauf ausgerichtete Anpassung der Übungsgruppen bzw. -angebote.
- **Idee 3**: Didaktische Ausbildung für Hochschullehrende: dieses Bestreben fordert eine stärkere Implementierung der Didaktikinhalte im Tertiärbereich, um die Hochschullehrenden didaktisch und methodisch zu schulen, damit die Inhalte besser an die Lernenden vermittelt werden können.

Ein weiterer Kernpunkt der Studie sieht zudem vor, Studierende zur Problematik des Übergangs zwischen den beiden Bildungsinstitutionen zu befragen. Dabei handelt es sich um Studierende von ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen einer Hochschule. Die Fragen entsprechen den ersten beiden (Frage 1 und 2), welche auch den Hochschullehrenden gestellt werden.

Für die erste Frage werden von Seite der Studierenden folgende Ursachen für die Kluft zwischen Schule und Hochschule festgehalten: es werden die unterschiedlichen inhaltlichen Ansprüche an den verschiedenen Schultypen, die Kürzung von Lehrstoff in der Schule, der mangelnde Fleiß der Lernenden (selbstkritisches Argument), der hohe Abstraktionsgrad und die Fachbetonung an der Hochschule (Charakter der Hochschulmathematik), das zu geringe Vorwissen aus der Schule (eine Folge der oben erwähnten Kürzung des Lehrstoffs) und der höhere bzw. zu hohe Anspruch an Inhalt sowie das hohe Lehrtempo an Hochschulen (Ambitionen der Hochschulmathematik) als Faktoren geschildert [49, S. 290].

Ferner werden die Vorschläge zur Verringerung der Übergangsproblematik von den Studierenden differenziert für die beiden Bildungsinstitutionen Schule und Hochschule beleuchtet; Verbesserungsvorschläge an die Schulen sind: die Abstimmung des Lehrstoffes und die Verbesserung der Kommunikation mit den Hochschulen, die am Studienfach orientierte Spezialisierung in der Schule (dieser Aspekt wird durch den Wegfall von Leistungskursen (in Bayern durch die Umstellung auf G8) deutlich weniger gefördert (vgl. auch [80]), die Einführung einheitlicher Lehrpläne bzw. verbindlicher Bildungsstandards, die Förderung des Interesses am Fach Mathematik (beispielsweise durch Anwendungsbezug und Computereinsatz), die Erhöhung der Wochenstundenzahl in Mathematik, ein nachhaltigerer Wissenserwerb im Fach Mathematik und die Erhöhung des Anforderungsniveaus [49, S. 290-291].

Vorschläge zur Verbesserung an die Hochschulen beinhalten das Angebot von Vorbereitungs- und Brückenkursen und zusätzlichen Übungsgelegenheiten, die Einführung von freiwilligen Zwischentests, die Anpassung der Vorlesungen an den Wissensstand der Studierenden, eine Verbesserung der Kommunikation mit den Schulen, die Einführung von Studieneignungstests und die Verringerung des Tempos bei der Stoffvermittlung [49, S. 290-291].

Es fällt auf, dass ein beträchtlicher Anteil der Studierenden mehr Zeit für das Fach Mathematik aufwenden möchte. Allerdings soll das in zusätzlichen Veranstaltungen passieren, d.h. mit der ständigen Begleitung durch eine Lehrperson. Ferner wird deutlich, dass die Probleme des Übergangs von der Schule zur Hochschule individuell verschiedene Ursachen haben können, die zum Teil mit mangelnden schulischen Vorkenntnissen, aber auch mit Lehr- und Lernstilen zu tun haben [49, S. 291].

Bemerkungen zur Schulmathematik und Studierfähigkeit

Es werden weitere vier Aspekte für die Übergangsproblematik von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik von Cramer und Walcher ergänzt (DMV-Artikel). Dabei werden vor allem die inhaltlichen Ansprüche und Ausrichtung der Mathematik in der Schule kritisiert; ferner werden Unterschiede in den Lehrplänen der verschiedenen Bundesländer in Deutschland als Problempunkt aufgeführt [29].

- Verdrängen der Mathematik und der Naturwissenschaften:

Die Autoren kritisieren die zunehmenden Stundenkürzungen in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern und die Abschaffung von Leistungskursen im G8-System, was konträr zu den Erklärungen der Wichtigkeit der MINT-Fächer von der KMK steht [29, S. 110], (vgl. auch [80]).

- Heterogenität:

  Es herrscht ein starkes Gefälle im Anspruch an die Mathematikausbildung zwischen den Bundesländern und den verschiedenen Schultypen. In Sachsen etwa ist in Klasse 9 die Kenntnis der Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen und rationalen Exponenten sowie quadratischer Funktionen als Ziel verbindlich vorgeschrieben. In Klasse 10 wird der Begriff der Umkehrfunktion thematisiert. Der nordrhein-westfälische Kernlehrplan hingegen fokussiert Kompetenzen und ist wenig spezifisch bei den Inhalten; dabei werden die Fachinhalte in alle möglichen Sachzusammenhänge gezwängt, was eine völlig falsche Vorstellung der mathematischen Beschreibung vermittelt [29, S. 110].

- Veränderte Ziele: Kompetenzen:

  Die Schwerpunkte der Mathematik in beiden Bildungsinstitutionen Schule und Hochschule sind unterschiedlich; es werden im Artikel divergente Lehrkulturen und Lernziele herausgearbeitet. Die Autoren kritisieren die Betonung des Kompetenzerwerbs (im Gegensatz zu angelernten Inhalten) in Schulen, der eine inhaltliche Stoffkürzung zur Folge hat [29, S. 111].

- Veränderte Ziele: „Mathematical Literacy“:

  Das Konzept von „Mathematical Literacy“ wird

  > „als die Fähigkeit definiert, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, welche Mathematik in der Welt spielt, begründete mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens einer Person als eines konstruktiven, engagierten und reflektierenden Bürgers entspricht.“ [29, S. 111], [10].

  Dieses Konzept stammt vom PISA-Konsortium und bewirkt, dass die anwendungsorientierte Mathematik im Vordergrund steht. Die Autoren kritisieren in diesem Zusammenhang zum einen die als Folge von PISA resultierende (teils zwanghafte) Einkleidung mathematischer Inhalte in Sachzusammenhänge und zum anderen die veränderte Zielsetzung der mathematischen Bildung von PISA (beispielsweise bereitet die Niederlande als PISA-Spitzenland ihre Abiturientinnen und Abiturienten nicht besonders gut auf ein mathematisch-naturwissenschaftliches Studium vor) [29].

Nach der Darstellung dieser vier möglichen Problemstränge kann zusammenfassend folgender Gedankenkomplex der Autoren festgehalten werden:

> „Althergebrachte Unterrichtsziele sind natürlich nicht sakrosankt, aber eine fundamentale Änderung ohne Einbeziehung aller betroffenen Bereiche ist äußerst problematisch. Um Missverständnisse zu vermeiden: Natürlich sind (genauer: wären) wir von Schülern und Studienanfängern begeistert, die in der Lage sind, mit Mathematik eigenständig und kritisch umzugehen sowie inner- und außermathematische Probleme selbstständig zu lösen. Aber wie soll dies ohne ein Fundament sicheren Umgangs mit mathematischen Ausdrücken, Rechenverfahren und Umformungen möglich sein? Uns erscheint zudem die (in einigen Bundesländern exklusive) Ausrichtung auf Sachzusammenhänge problematisch: Zum einen erzeugt dies eine Flut von Pseudoanwendungen, die kaum etwas mit dem realen Nutzen von Mathematik zu tun haben. Zum anderen gehört zum Wesen der Mathematik eine abstrakt-strukturelle Komponente, die auch etwa in Ingenieurstudiengängen bedeutsam ist - ganz abgesehen davon, dass sie viele Schüler für Mathematik motiviert und begeistert. Bei der Festsetzung der Ziele sollte nach unserer Meinung auch die Abnehmerseite berücksichtigt werden, und dazu gehören insbesondere die Hochschulen.“ [29, S. 111].

Damit ist die Übergangsproblematik von der Schule zur Hochschule aus vielen verschiedenen Perspektiven beleuchtet und zentrale Kernpunkte für diese dargestellt. Beide Bildungsinstitutionen müssen sich mit der Kluft auseinandersetzten; im Rahmen der Dissertation wird eine universitäre Konzeption vorgestellt, die genau dies versucht. Daher werden nachfolgend universitäre Projekte beschrieben, welche dieser Problematik begegnen, schulische Ansätze werden dabei nicht aufgegriffen.

2.1.3 Maßnahmen in der Lehrerbildung im Rahmen universitärer Projekte

Um der Kluft zwischen Schule und Hochschule im Fach Mathematik zu begegnen bzw. den Abstraktionsschock zu Studienbeginn zu vermindern, also sich mit den Gedanken Kleins bezüglich der „Doppelten Diskontinuität“ auseinanderzusetzen, werden an Universitäten viele verschiedene Ansätze verfolgt. Im Folgenden werden ausgewählte im Überblick dargestellt und zentrale Erkenntnisse geschildert und abschließend Fragestellungen abgeleitet. Im Rahmen der Dissertation wird ebenfalls eine Konzeption für das erste Studienjahr beschrieben, die sich mit dem obigen Problemfeld beschäftigt, so dass Grundannahmen, Ziele und Methoden der bestehenden Projekte für die eigene Neuausrichtung von Bedeutung sind.

Kurzübersicht zu den Projekten

Es wird zunächst das von der Deutschen Telekom Stiftung geförderte Gemeinschaftsprojekt „Mathematik Neu denken“ der Universitäten Siegen und Gießen unter der Federführung der Professoren Danckwerts, Hein und Nickel (Siegen) sowie Beutelsbacher (Gießen) dargestellt. Dieses propagiert eine Neukonzeption in der gymnasialen Lehrerausbildung im Fach Mathematik, welche die Unterrichtsqualität verbessern soll, basierend auf einer höheren Qualifikation der Lehrenden [30].

Zudem wird das von der Deutschen Telekom Stiftung geförderte Projekt „Mathematik besser verstehen“ unter der wissenschaftlichen Leitung der Professoren Hefendehl-Hebeker und Böckle (Duisburg-Essen) dargestellt. Der Fokus liegt auf der Unterstützung von Studierenden des gymnasialen Lehramts im Fach Mathematik zur Erleichterung des Einstiegs in das Studium und in die Wissenschaftsdisziplin. Es werden spezielle Übungsaufgaben (mit Bezug zur Schulmathematik) angeboten, Unterstützungsmaterialien zum Durcharbeiten des Vorlesungsstoffes bereitgestellt und der Übungsbetrieb durch ein spezifisches Tutorensystem unterstützt [55].

Ferner versucht das Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik KHDM (Kassel, Paderborn, Lüneburg) unter anderem, wissenschaftliche Grundlagen einer fachbezogenen Hochschuldidaktik in mathematikhaltigen Studiengängen zu entwickeln und Lehrinnovationen zu implementieren [59]. Zentrale Forschungsvorhaben sind etwa die Konzeption von kompetenz- und adressatenorientierten Curricula, die Integration von Schnittstellen zwischen Fachwissen und Fachdidaktik sowie zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik, das Angebot an E-Learning-Komponenten sowie die Entwicklung von fachspezifischen Tutorenschulungen und individueller Beratung [59].

Ansätze und zentrale Ergebnisse der Projekte

Für alle Ansätze gibt es eine zentrale Ursache, nämlich die erste Bruchstelle der Kleinschen „Doppelten Diskontinuität“ [63].

Das Projekt „Mathematik Neu denken“ sieht die Problematik und die daraus resultierende Konsequenz zum Neudenken wie eben dargelegt vor allem in inhaltlichen und methodischen Ursachen; der klassische axiomatisch-deduktive Aufbau der Vorlesungen vermittelt den Studierenden die Wissenschaft Mathematik in der Regel als fertiges, in sich geschlossenes System. Die Problemstellungen sowie die Prozesse der Begriffsbildung und der Theorieentwicklung in den jeweiligen Gebieten kommen zu kurz. Zudem wird unzureichend thematisiert, wie die Inhalte der Hochschulmathematik mit der späteren Schulmathematik in Verbindung gebracht werden können. Danckwerts beschreibt dies so:

> „Die Methoden der Vermittlung an der Universität sind einseitig fixiert auf die reine Instruktion durch die klassische Vorlesung, und die Übungen folgen in der Regel noch immer dem selben Instruktionsmuster, nicht selten sind sie reduziert auf ritualisiertes Vorrechnen von perfekten Musterlösungen. Die so akzentuierte, traditionelle Fachausbildung ist eher produkt- und weniger prozessorientiert, und sie setzt eher auf die Instruktion durch die Lehrenden als auf die aktive Konstruktion des Wissens durch die Lernenden." [30].

Er betont die Balance von Produkt und Prozess sowie von Instruktion und Konstruktion für eine Verbesserung der fachbezogenen Lehrerausbildung und hebt den fachmathematischen Teil der Ausbildung von Gymnasiallehrkräften als Kernstück heraus, weil die eigenen Lernerfahrungen im Studium auch die Vorstellungen vom schulischen Mathematiklernen und -lehren prägen würden [30]. Ebenso bekräftigt er, dass die fachdidaktische Ausbildung oft isoliert neben den fachwissenschaftlichen Inhalten steht und beide Komponenten viel stärker verzahnt werden müssen.

Die Zielvorstellung ist, dass angehende Gymnasiallehrkräfte eine positive Haltung gegenüber ihrem Fach gewinnen, was für den beruflichen Erfolg als Lehrperson von Bedeutung ist. Dementsprechend soll einer elementarmathematisch orientierten Schulmathematik vom höheren Standpunkt genügend Platz eingeräumt und zugleich die fachdidaktischen Aspekte früh integriert werden. Dies beinhaltet die oben angesprochene Balance zwischen Instruktion (durch die Lehrenden) und Konstruktion des Wissens durch die Lernenden, es soll nicht nur die fertige Disziplin Mathematik vermittelt werden, sondern die Gelegenheit gegeben werden, mathematisches Wissen aufbauend und vernetzt zu erlernen [30].

Als Umsetzungsidee erfahren die klassischen Anfängerveranstaltungen Analysis und lineare Algebra eine Neuorientierung (lineare Algebra in Gießen, Analysis in Siegen). Die Neukonzeptionen konzentrieren sich auf das erste Studienjahr. Für die Vorlesung Analysis wird die „Schulanalysis vom höheren Standpunkt" thematisiert und damit eine Standpunktverlagerung im ersten Fachsemester vorgenommen [30]:

> „Weg von der vertrauten Beherrschung analytischer Rechenverfahren in der Schule hin zu einem verstehens- und vorstellungsorientierten Umgang mit elementarer Analysis. In enger Abstimmung damit wurde die klassische Analysis I so entfaltet, dass die ideengeschichtliche und philosophische Sicht der Analysis durchgängig integriert war." [30].

Das zweite Fachsemester beinhaltet neben der genauso strukturierten Analysis II eine Begleitung mit dem Seminar Didaktik der Analysis, in dem Aspekte des ersten Semesters (Schulanalysis vom höheren Standpunkt) aufgegriffen werden. Die Übungsgruppen konzentrieren sich dabei besonders auf die Behandlung passender Inhalte und heuristischer Denkmethoden und fungieren damit als Gelenkstelle zwischen Vorlesung und individueller Arbeit [30].

Das Projekt „Mathematik besser verstehen“ sieht den Ursprung der Neuausrichtung ebenfalls in der „Doppelten Diskontinuität“ und dem Abstraktionsschock zu Studienbeginn. Ziel des Projekts ist, eine Brücke zwischen Schul- und Universitätsmathematik zu schlagen, um dieser Problematik zu begegnen.

Es gibt eine spezielle Unterstützung für die Studierende zur Erleichterung des Einstiegs in das Studium und in die Wissenschaftsdisziplin. Das betrifft Maßnahmen auf drei Ebenen [54]:

- „Auswahl spezieller Übungsaufgaben, die das inhaltliche Verständnis vertiefen und Brücken zur Schulmathematik schlagen.
- Verständnishilfen auf der E-Learning-Plattform Moodle (Unterstützungsmaterialien zum Vorlesungsstoff, Visualisierungen) zu den Inhalten der Vorlesungen Analysis und lineare Algebra.
- Anpassung des Übungsbetriebs an die Bedürfnisse der Studierenden (tutorielle Betreuung bei Übungsaufgaben).“ [54].

Im Rahmen der Analysis-Vorlesung wird die Bedeutung von Visualisierungen hervorgehoben, um die Entwicklung von Grundvorstellungen zu den Begriffen und Konzepten zu fördern. Ein Beispiel ist die Stetigkeit von Funktionen; die Studierenden können mit Hilfe von Grafik-Tools der E-Learning-Plattform Moodle beobachten, wie die im ε-δ-Kriterium der Stetigkeit einer Funktion vorkommenden Größen voneinander abhängen. Ferner werden Aufgaben konzipiert, die eine Brücke zum Schulstoff schlagen und den Fokus auf den späteren Lehrberuf richten [55, S. 2]. Zudem erhalten die Studierenden ausführliche Musterlösungen, die für das Themengebiet typische Lösungsstrategien herausarbeiten [55, S. 2]. Weitere Maßnahmen sind Selbstdiagnosetests in Form von Multiple-Choice-Aufgaben [55, S. 2].

Das Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik erstrebt einen globaleren Ansatz als die beiden Telekom-Projekte, da nicht nur Lehramtsstudiengänge fokussiert werden; es wird bestrebt, Grundzüge einer fachbezogenen Hochschuldidaktik in mathematikhaltigen Studiengängen zu entfalten, Lehrinnovationen einzuflechten und wissenschaftlich zu evaluieren. Das Forschungsvorhaben erstreckt sich dabei auf die kompetenz- und adressatenspezifische Orientierung und empirische Kontrolle der Curricula, Interventionen zur Förderung von Lernstrategien und Arbeitstechniken, visuell-experimentelle Zugänge zur Mathematik mit Brückenfunktion zwischen Fachwissen und Fachdidaktik, E-Learning-Module, Instrumente zur Kompetenzdiagnostik und Lehrevaluation sowie Konzepte zur fachspezifischen Tutorenschulung und individuellen Beratung und Betreuung. Diese Forschungsansätze werden in studiengangbezogenen Arbeitsgruppen realisiert; diese Gruppen werden mit Querschnittsarbeitsgruppen vernetzt, welche übergreifende Themen der Hochschulmathematikdidaktik untersuchen [59].

Vergleich der Projekte und offene Fragestellungen

Die Projekte werden nun hinsichtlich Grundannahmen sowie Zielvorstellungen und Methodik verglichen und offene Fragestellungen abgeleitet.

- **Grundannahmen**: Alle Projekte sind als Folge der Bruchstelle zwischen Schul- und Universitätsmathematik zu sehen. Hervorzuheben sind dabei die Ausrichtungen, nämlich der axiomatisch-deduktive Charakter an Universitäten und der beispielorientierte-algorithmische an Schulen, die entscheidend zu diesem Problemfeld beitragen [7, S. 86-87], [63].

- **Zielvorstellungen und Methodik**: „Mathematik Neu denken“ forciert das Ziel, die Qualifikation der angehenden Lehrkräfte zu steigern, um die Qualität des Mathematikunterrichts langfristig zu verbessern. Die Projektverantwortlichen erstreben eine neue Vorbereitung künftiger Lehrkräfte, da sie der Ansicht sind, dass

  > „[...] Studierende(n) traditionell so mit der Mathematik konfrontiert werden, dass für viele der Zusammenhang mit dem Berufsziel Lehrer nicht sichtbar ist“ [...] [30].

  Dabei sollen Gymnasiallehrkräfte eine positive Haltung gegenüber ihrem Fach gewinnen; dies soll durch eine Balance zwischen Instruktion und Konstruktion in der Lehre und durch die Verzahnung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik erfolgen. Diese gegenseitige Abstimmung wird auch an der TUM School of Education (Technische Universität München) fokussiert; die Interaktion und die gegenseitige Ergänzung von fachwissenschaftlichen, fachdidaktischen und erziehungswissenschaftlichen Komponenten ist entscheidend, um den Erwerb von aufbauendem Wissen zu ermöglichen.

  > „In Bezug auf die Mathematik heißt das konkret, dass von Anfang an schulbezogene Themen und die klassischen Vorlesungsinhalte etwa von Linearer Algebra, Analysis, Algebra, Geometrie oder Wahrscheinlichkeitstheorie aufeinander bezogen werden.“ [102, S. 5].

  Ebenso wird dieses Zusammenspiel von Fachwissenschaft und Fachdidaktik im HU-Modell (Humboldt-Universität zu Berlin) thematisiert; dabei werden inhaltliche Aspekte wie Arithmetik, Elementargeometrie und Stochastik ergänzend mit der jeweiligen Didaktikveranstaltung gelehrt, um eine direkte Verbindung herzustellen [102, S. 6].

  Insgesamt liegt im Telekom-Projekt „Mathematik Neu denken“ ein Neuorientierung für die Veranstaltungen vor. Dieser Ansatz wird bei „Mathematik besser verstehen“ (ebenfalls ein Telekom-Projekt) nicht verfolgt, das bestehende Konstrukt aus Vorlesungs- und Übungsbetrieb soll ergänzt und verbessert werden, um die Studieneingangsphase stärker phänomenologisch orientiert und verständnisgeleitet zu gestalten [55, S. 1]. Dieser Ansatz wird mit Hilfe von Übungsaufgaben, die eine Brücke zwischen Schul- und Universitätsmathematik schlagen sollen, durch eine starke Betonung auf Visualisierungen von Fachinhalten und durch einen auf die Studienwünschen ausgerichteten Übungsbetrieb verfolgt. Diese Ideen werden auch im LIMA-Projekt (assoziiertes Teilprojekt des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik) verfolgt. Das Hauptaugenmerk liegt auf dem Übungsbetrieb zu den Vorlesungen: Aufgaben werden neu konzipiert, Korrekturen der Übungsaufgaben als lernförderliches Feedback gestaltet und Unterstützungsangebote ergänzend eingerichtet. Ferner werden die Übungsgruppenleiterinnen und -leiter gezielt auf ihre Aufgabe vorbereitet, als Tandems eingesetzt und auch während des Semesters intensiv betreut [59].

- **Offene Fragestellungen**: Viele Ansätze beruhen auch auf dem Angebot von Brückenkursen, welche vor Studienbeginn in die Konzeption der Studieneingangsphase integriert sind und damit in ersten Zügen der Übergangsproblematik begegnet werden kann; diese Angebote stellen ein sinnvolles Konzept dar, wenn Inhalte und Zielvorstellungen spezifisch auf die entsprechende Studiengruppe ausgerichtet sind.

  In den obigen Projekten werden in der Studieneingangsphase (1. und 2. Fachsemester) in einigen Ausrichtungen die Inhalte lineare Algebra und bzw. oder Analysis gelehrt. Es stellt sich dabei die Frage: Sollten zuerst eher elementarmathematische Gebiete wie elementare Zahlentheorie, Elementargeometrie und elementare Stochastik thematisiert werden, da diese einen stärkeren Bezug zur Schulmathematik haben. Damit könnte der Abstraktionsschock womöglich besser gedämpft werden, da diese Inhalte den Studierenden bekannter sind. Analysis wird auch in der Oberstufe an der Schule unterrichtet, aber mit einer anderen Intention als an den Universitäten (vgl. Bruchstelle „Anforderungen und Ziele“ [7]); dies zeigt sich etwa an den zentralen Begriffen Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit einer Funktion und deren unterschiedlicher Behandlung und fachlichen Betonung an beiden Bildungsinstitutionen. Anhand der elementarmathematischen Inhalte können grundlegende Begriffe und Methoden eingeübt werden, die für weitere Gebiete (wie lineare Algebra und Analysis) von Bedeutung sind; es kann so ein Grundlagenwissen aufgebaut und dabei die universitären Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik erarbeitet und vertieft werden. Eine ideale Ergänzung für diese Ausrichtung wäre eine Verzahnung der Fachinhalte mit den fachdidaktischen Aspekten der Gebiete elementare Zahlentheorie, Elementargeometrie und elementare Stochastik wie im HU-Modell beschrieben. Natürlich sind stets

Curricula und Prüfungsordnungen zu beachten, die bei der Konzeption einen übergeordneten Rahmen darstellen.

Ferner ist auch das gelingende Zusammenspiel von Vorlesung, Zentralübung und Tutorübung von wesentlicher Bedeutung; dabei nimmt die fachliche und didaktische Qualifikation von Tutorinnen und Tutoren eine entscheidende Rolle ein, da diese in Kleingruppen mit den Lernenden arbeiten und dabei die Probleme der Lernenden sehr gut nachvollziehen können, da sie selbst in der Regel Studierende in höheren Fachsemestern sind. Dieses Element muss genutzt werden und daher müssen die Tutorinnen und Tutoren fachlich und methodisch für ihre Aufgaben geschult werden. Dieser Ansatz wird in den Projekten „Mathematik besser verstehen“ und LIMA verfolgt [54], [59].

Wie oben erwähnt gibt das Buch „Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung“ einen Überblick zu den an Universitäten neukonzipierten Anfängervorlesungen; dabei wird besonders der eben beschriebene Aspekt der Verzahnung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik betont [1].

2.2 Beschreibung des Dissertationsprojekts

Nach der Darstellung des in der Dissertation zugrunde liegenden Forschungsfelds werden darauf aufbauend Forschungsfragen abgeleitet und das auf die Forschungsfragen basierende Studiendesign beschrieben.

2.2.1 Forschungsfragen

Die Studien TEDS-M und COACTIV untersuchen fachmathematisches, fachdidaktisches und erziehungswissenschaftliches Wissen von Lehrkräften auf der Grundlage der Kompetenzmodelle von Shulman und Bromme [110], [26]. Beide Modelle stellen im aktuellen Forschungsfeld theoretisch fundierte Ansätze zur Struktur der professionellen Kompetenz von Lehrkräften dar. In der Dissertation wird das Fachwissen (matter content knowledge) gemäß obiger Modelle fokussiert; dabei werden die Kenntnisse von Studienanfängerinnen und Studienanfängern mit einer spezifischen Studienausrichtung (Lehramt für Grund-, Haupt- oder Realschulen) erfasst, was einen Unterschied zur Zielgruppe (Lehrkräfte) bei den Studien TEDS-M und COACTIV darstellt. In der Studie TEDS-M werden die fachmathematischen Kenntnisse an den Inhalten Arithmetik, Geometrie, Algebra und Stochastik erhoben; dabei werden die drei Kognitionsprozesse Reproduzieren, Anwenden und Begründen unterschieden [22, S. 172]. Daraus ergibt sich die erste Forschungsfrage der Dissertation:

> **Forschungsfrage 1**: Welche fachmathematischen Kenntnisse weisen Studierende des Lehramts an Grund-, Haupt oder Realschulen zu Studienbeginn in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik auf?

Es werden die vier zentralen Schulbereiche Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik gewählt, was der Struktur der Inhalte von TEDS-M folgt. Dieses Wissen wird zu Studienbeginn erhoben und berücksichtigt daher nur schultypisches Wissen. Die Aufgaben werden hinsichtlich ihres Anspruchs durch die Anforderungsbereiche der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der KMK-Bildungsstandards Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, Verallgemeinern und Reflektieren charakterisiert, was den obigen Kognitionsprozessen von TEDS-M entspricht [71]. Die Aufgaben zu den vier Bereichen werden im Rahmen der Dissertation vorgestellt und sind zudem im Anhang zu finden.

Das Vorwissen aus der Schule ist von vielen Faktoren abhängig. Betrachtet man etwa die drei Studienrichtungen Lehramt Grundschule, Lehramt Hauptschule und Lehramt Realschule, so muss die Zulassungsbeschränkung für das Studium Grundschullehramt berücksichtigt werden. Ferner sind auch Unterschiede zwischen Studierenden mit Gymnasialbildung (noch weiter zu differenzieren nach Grund- und Leistungskurs im G9-System und G8-Struktur) und Nichtgymnasialbildung (Fach- und Berufsoberschule) zu erwarten. Zudem müssen auch Studien- und Berufswahlmotive bedacht werden: Wird das Studium als Notlösung oder aufgrund guter Berufsaussichten gewählt, so muss nicht zwingend ein solides mathematisches Grundwissen als Motivationsgrund für die getroffene Studienwahl vorliegen. Eilerts untersucht den Einfluss von personenbezogenen Variablen und soziodemographischen Merkmalen, Studienvoraussetzungen, Einstellungen und Studienfachwünschen auf die mathematischen Kompetenzen von Studierenden zu Studienbeginn und auf die Kompetenzentwicklung im Laufe des ersten Fachsemesters [39, S. 155]. Dieser Ansatz wird auch in der Dissertation angestrebt und ergibt die zweite Forschungsfrage:

> **Forschungsfrage 2**: Welchen Einfluss nehmen exogene Variablen (untergliedert nach persönlichen und studienbezogenen Voraussetzungen, Studien- und Berufswahlmotiven sowie Lernstrategien) auf das Vorwissen der Studierenden in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik?

Die Items, welche die persönlichen und studienbezogenen Voraussetzungen, Studien- und Berufswahlmotive und Lernstrategien erfassen, werden im Studiendesign bei der Methodenwahl genauer beschrieben und im Rahmen der Dissertation explizit vorgestellt sowie im Anhang in Originalfassung (Fragebogen) vorgelegt.

Das mathematische Vorwissen der Studienanfängerinnen und Studienanfänger wird von Lehrenden an den Universitäten zunehmend bemängelt; diese Kritik kann sich vor allem in Hinblick auf Stundenkürzungen in mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächern und die Abschaffung von Leistungskursen im G8-System, die eine Spezialisierung und Vertiefung in Fachbereichen ermöglicht haben, noch weiter verschärfen [29, S. 110], [80, S. 89]. Die G8-Diskussion und der Wunsch zur neunjährigen Gymnasialzeit ist in Bayern aktuell. Die TIMS-Studie hat gezeigt, dass die Leistungen von Lernenden, die ein achtjähriges Gymnasium besuchen, am Ende der Sekundarstufe II signifikant besser sind als die von Lernenden mit neunjähriger Gymnasialbildung [58, S. 4], [8]. Ferner sind gemäß dem Vergleich von Kess- und LAU-Studie die Ergebnisse der G8-Absolventinnen und -Absolventen leicht besser als die der G9-Absolventinnen und -Absolventen, aber nicht signifikant [126, S. 13]. In Bayern haben zum Wintersemester 2011/12 die ersten Studierenden mit bayerischer G8-Ausbildung ihr Studium begonnen. Es ergibt sich daraus die dritte Forschungsfrage:

> **Forschungsfrage 3**: Welche Unterschiede zeichnen sich hinsichtlich der fachmathematischen Kenntnisse in den schultypischen Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik zu Studienbeginn zwischen G8- und G9-Absolventinnen und -Absolventen ab? Welches Bild ergibt sich, wenn die G9-Gruppe differenziert nach Grund- und Leistungskursteilnehmenden unterschieden wird?

In diesem Zusammenhang liegt ein spezielles Augenmerk auf der Disziplin Stochastik, deren Inhalte (in Bayern) im G8-Zug auf die Klassenstufen 5 bis 12 verteilt und im G9-System komprimiert in der Kollegstufe verortet sind.

In der Dissertation wird eine Konzeption für die Studieneingangsphase (1. und 2. Fachsemester) beschrieben, die versucht, der Übergangsproblematik zwischen Schule und Universität im Fach Mathematik zu begegnen; dabei liegen die inhaltlichen Schwerpunkte auf den Bereichen elementare Zahlentheorie, Elementargeometrie und elementare Stochastik. Auf Grundlage dieser Neuausrichtung ergibt sich die vierte Forschungsfrage, die einen Entwicklungsprozess forciert:

> **Forschungsfrage 4**: Welche Entwicklung ergibt sich hinsichtlich der Kenntnisse in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik und hinsichtlich des Einflusses der exogenen Variablen auf dieses Wissen nach dem Besuch der neukonzipierten Studieneingangsphase?

Neben schultypischem Wissen werden in der Dissertation auch universitäre mathematische Kenntnisse der Studierenden erhoben. Diese beziehen sich inhaltlich auf die eben erwähnten Gebiete elementare Zahlentheorie, Elementargeometrie und elementare Stochastik. Diese universitären Disziplinen thematisieren Inhalte der drei Schulgebiete Algebra, Geometrie und Stochastik von einem höheren Standpunkt der Mathematik, aber keine Aspekte des Bereichs Analysis. Diese universitären Kenntnisse werden als Grundlage für den Entwicklungsprozess des schultypischen Wissens und für den Einfluss der exogenen Variablen auf dieses betrachtet. Die Aufgaben zum universitären Wissen werden in der Dissertation vorgestellt und finden sich zudem auch im Anhang.

2.2.2 Studiendesign

Nach der Darstellung der Forschungsfragen wird nun das Studiendesign vorgestellt. Dabei werden die Struktur der Studie, die Stichprobe sowie das methodische Vorgehen mit entsprechenden Begründungen skizziert. Abschließend werden Gütekriterien der psychologischen Diagnostik vorgestellt und die Reliabilität der Items des Fragebogens untersucht; ergänzend wird eine Hauptkomponentenanalyse für einen speziellen Abschnitt des Fragebogens durchgeführt.

Struktur der Studie

Die Untersuchung ist in eine Querschnitt- und eine Längsschnittstudie unterteilt, welche unter Bezugnahme zu den Forschungsfragen nun skizziert werden.

Querschnittstudie: Die Studienkonzeption orientiert sich an den Studienanfängerinnen und Studienanfängern der Wintersemester 2010/11, 2011/12 und 2012/13. Für diese drei Gruppen wird das mathematische Vorwissen in den vier zentralen Schulgebieten Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik (Vortest) gemessen (Forschungsfrage 1). Diese über drei Jahre angelegte Studie soll einen Überblick über den Stand des mathematischen Vorwissens der Studierenden geben. Ferner wird der Einfluss erklärender Regressoren auf dieses Vorwissen fokussiert; dabei werden persönliche und studienbezogene Voraussetzungen, Studien- und Berufswahlmotive sowie Lernstrategien betrachtet (Forschungsfrage 2). Zudem sind in den beiden Jahrgängen vom Wintersemester 2011/12 und 2012/13 die ersten G8-Absolventinnen und -Absolventen aus Bayern vertreten (etwa 92 % der Teilnehmenden an der Studie stammen aus Bayern); es werden die Leistungen von G9- und G8-Absolventinnen und -Absolventen in den vier Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik verglichen (Forschungsfrage 3). Die Untersuchungen mit Hilfe der Testerhebungen in den vier genannten Bereichen und des Fragebogens, der die erwähnten erklärenden Regressoren erfasst, finden jeweils im ersten Fachsemester statt, so dass die Querschnittstudie folgende Struktur aufweist:

Tabelle 2.1: Struktur der Querschnittstudie

Semester	WS 10/11	WS 11/12	WS 12/13
Erhebung Standpunkt	Vortest 1. Fachsem.	Vortest 1. Fachsem.	Vortest 1. Fachsem.

Längsschnittstudie: Die Untersuchungsstruktur orientiert sich an der Studiengruppe, welche das Studium für das Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen zum Wintersemester 2010/11 (gleichzeitiges Inkrafttreten der modularisierten Prüfungs- und Studienordnung an der Ludwig-Maximilians-Universität München) begonnen hat [13]; die Gruppe wird als Kohorte über vier Fachsemester (Grundstudium) begleitet. Für diese Studie nimmt die neukonzipierte Studieneingangsphase (Veranstaltungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ im ersten und zweiten Fachsemester) eine bedeutende Rolle ein. Inhaltliche Schwerpunkte liegen auf den Gebieten elementare Zahlentheorie, Elementargeometrie und elementare Stochastik. Dabei werden Inhalte der Schulmathematik vom höheren Standpunkt der universitären Mathematik thematisiert, um der Bruchstelle zwischen Schule und Universität im Fach Mathematik zu begegnen. Eine genaue Darstellung des Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ mit Leitgedanke, Inhalten und Zielen folgt im Rahmen der Dissertation. Es wird das Wissen dieser Studiengruppe in den schulischen Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik zu Studienbeginn gemessen (vgl. dazu Forschungsfrage 1 im Rahmen der Querschnittstudie). Diese Erhebung wird als Vortest bezeichnet (schultypisches Wissen zu Studienbeginn) und wird mit Hilfe des gleichen Testdesigns nochmal durchgeführt, nachdem die Studierenden den Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ besucht haben. Diese Erhebung wird als Nachtest bezeichnet (schultypisches Wissen nach etwa zwei Studienjahren). Durch diesen Ansatz (Schulwissen zu Studienbeginn $\longrightarrow$ Besuch der Veranstaltungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ $\longrightarrow$ Schulwissen danach) soll der Einfluss der genannten Veranstaltungen auf die Entwicklung der Kenntnisse der Studierenden in den schulrelevanten Gebieten Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik gemessen werden; die Inhalte dreier Disziplinen (Algebra, Geometrie und Stochastik) werden in den neukonzipierten Vorlesungen thematisiert, aber keine Aspekte des Bereichs Analysis. Zudem wird die Entwicklung des Einflusses der exogenen Variablen (persönliche und studienbezogene Voraussetzungen, Studien- und Berufswahlmotive sowie Lernstrategien) auf dieses schultypische Wissen nach dem Besuch der Veranstaltungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ diskutiert (Forschungsfrage 4). Zwischen Vor- und Nachtest wird das universitäre Wissen der Studierenden erhoben; dieses bezieht sich auf Inhalte der Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ (Test Grundlagen I und Test Grundlagen II), so dass sich folgende Struktur für die Längsschnittstudie ergibt:

Tabelle 2.2: Struktur der Längsschnittstudie

Semester	WS 10/11	SS 11	WS 11/12	SS 12
Erhebung	Vortest	Test Grundl. I	Test Grundl. II	Nachtest
Vorlesung	Grundl. I	Grundl. II	(lineare Alg. I)	(lineare Alg. II)

Beschreibung der Stichprobe

Im Folgenden werden die Stichproben differenziert nach Quer- und Längsschnittstudie beschrieben. Genauere Charaktersierungen der jeweiligen Stichproben werden bei der Darstellung der Ergebnisse dieser Studien erbracht.

Querschnittstudie: Die vier Einzeltests wurden für die beiden ersten Jahrgänge (Wintersemester 2010/11 und 2011/12) zu zwei verschiedenen Messzeitpunkten erhoben; am ersten Erhebungszeitpunkt wurden die Gebiete Algebra und Geometrie und am zweiten Analysis und Stochastik abgeprüft. Der parallel durchgeführte Fragebogen wurde von jedem Studierenden bearbeitet, da er zu beiden Zeitpunkten ausgegeben wurde (insgesamt von jeder Person genau einmal ausgefüllt). Die beiden verschiedenen Zeitpunkte bedingen unterschiedliche Stichprobenumfänge; diese Konzeption wurde bei der dritten Studiengruppe (Wintersemester 2012/13) nicht mehr verfolgt, da sich gezeigt hat, dass alle vier Einzeltests und der Fragebogen (zeitlich) an einem Erhebungszeitpunkt bearbeitet werden können. Eine genauere Erläuterung für den abweichenden Ansatz im Wintersemester 2012/13 wird im Rahmen der Querschnittstudie erbracht. Unter dem Begriff Gesamtteilnahme werden diejenigen Studierenden zusammengefasst, die an allen vier Einzeltests und an der Beantwortung des Fragebogens teilgenommen haben. Für die Querschnittstudie ergeben sich folgende Stichprobenumfänge:

- **StudienanfängerInnen WS 10/11**: Algebra und Geometrie: $n = 178$, Analysis und Stochastik: $n = 154$, Gesamtteilnahme: $n = 139$.
- **StudienanfängerInnen WS 11/12**: Algebra und Geometrie: $n = 88$, Analysis und Stochastik: $n = 84$, Gesamtteilnahme: $n = 77$.
- **StudienanfängerInnen WS 12/13**: Algebra und Geometrie: $n = 133$, Analysis und Stochastik: $n = 133$, Gesamtteilnahme: $n = 133$.

Diese Stichproben werden durch erklärende Regressoren wie etwa Geschlecht, studierter Lehramtstyp und Studienwahlmotive spezifisch unterteilt. Die speziellen Differenzierungen werden im Rahmen der Querschnittstudie geschildert, so dass an dieser Stelle auf eine genauere Beschreibung der Stichprobe verzichtet wird.

Längsschnittstudie: In dieser Studienausrichtung wird eine Studiengruppe (Studienanfängerinnen und Studienanfänger Wintersemester 2010/11) über einen Zeitraum von zwei Jahren (Grundstudium) begleitet, wobei verschiedene Testerhebungen zum schulischen und universitären Wissen der Studierenden durchgeführt wurden. Das schulische Wissen in Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik wird zu Studienbeginn (Vortest) und nach etwa zwei Jahren (Nachtest) erhoben; in diesem Zwischenraum wird das universitäre Wissen zu den Inhalten der Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ gemessen. Die Stichprobenumfänge bezüglich des Vortests entsprechen den obigen Zahlen in der Querschnittstudie für die Studienanfängerinnen und Studienanfänger vom Wintersemester 2010/11. Die Stichprobenumfänge für den Nachtest sind in den vier Teildisziplinen gleich, da diese an einem Erhebungstermin durchgeführt wurden (wie in der Querschnittstudie für die Studiengruppe Wintersemester 2012/13). Das universitäre Wissen zu den Inhalten der Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ wurde jeweils mit zwei Einzeltests (Grundlagen der Mathematik I: Test 1 + 2 sowie Grundlagen der Mathematik II: Test 1 + 2) ermittelt. Die beiden Tests zum ersten Teil der Vorlesung haben an zwei verschiedenen Zeitpunkten stattgefunden, die beiden Tests zum zweiten Teil an einem (durch sieben verfrühte Abgaben bei Test 2 ergeben sich die differierenden Stichprobenumfänge von $n = 73$ und $n = 66$). Eine genauere Charakterisierung der jeweiligen Stichproben wird im Rahmen der Längsschnittstudie erbracht. Für die Längsschnittstudie ergeben sich folgende Stichprobenumfänge:

- **Vortest**: Algebra und Geometrie: $n = 178$, Analysis und Stochastik: $n = 154$, Gesamtteilnahme: $n = 139$.
- **Grundlagen der Mathematik I**: Test 1: $n = 121$ und Test 2: $n = 108$.
- **Grundlagen der Mathematik II**: Test 1: $n = 73$ und Test 2: $n = 66$.
- **Nachtest**: Algebra und Geometrie: $n = 86$, Analysis und Stochastik: $n = 86$, Gesamtteilnahme: $n = 86$.

Methodenwahl

Nach der Darstellung der Forschungsfragen und des Studiendesigns werden nun die Methoden beschrieben, die zur Erhebung der notwendigen Daten gewählt wurden. Für die Quer- und Längsschnittstudie werden die Testerhebungen zum schulischen mathematischen Wissen in Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik sowie der Fragebogen zur Erfassung von persönlichen Voraussetzungen, studienbezogenen Angaben, Studien- und Berufswahlmotiven sowie Aspekten des Lernverhaltens der Studierenden vorgestellt und begründet. Für die Längsschnittstudie werden zudem die Testerhebungen zum universitären mathematischen Wissen (orientiert an den Inhalten der Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“) erörtert.

Testerhebungen in Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik: Es werden in den vier zentralen Schulbereichen Testerhebungen konzipiert, die das Vorwissen aus der Schule messen sollen; diese vier Disziplinen sind an die Bereiche Arithmetik, Geometrie, Algebra und Stochastik der TEDS-M-Studie angelehnt [22, S. 172]. Alle Einzeltests sind mit jeweils 24 Bewertungseinheiten bepunktet, wobei sich die Gesamtpunkte auf eine verschiedene Anzahl an Einzelaufgaben verteilen. Insgesamt werden 37 Aufgaben gestellt, wovon 32 im offenen Format (mit Angabe des Lösungsweges) und fünf im Multiple-Choice-Format gestellt sind. Die offene Gestaltung der Aufgaben erlaubt es, die Argumentationsweise der Studierenden nachzuvollziehen und so typische Fehler abzuleiten. Somit kann im Rahmen der Längsschnittstudie eine Entwicklung bzw. eine Veränderung der Fehlerbilder zwischen Vor- und Nachtest fokussiert werden. Der Schwerpunkt liegt auf offenen Aufgaben, da im Fach Mathematik ein begründeter und nachvollziehbarer Lösungsweg von zentraler Bedeutung ist, was durch das Ankreuzen von möglichen Lösungen bei Multiple-Choice-Aufgaben nicht in dieser Ausprägung realisiert werden kann. Die im Testdesign verwendeten Multiple-Choice-Aufgaben thematisieren Rechengesetze für Quadratwurzeln, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze und elementare Aussagen über Wahrscheinlichkeiten; für diese Problemstellungen ist ein argumentativer Lösungsweg nicht notwendig, so dass in diesem Fall auf das geschlossene Aufgabenformat zurückgegriffen wird. Die Aufgaben in den vier Bereichen sollen einen repräsentativen Querschnitt für die schulrelevanten Gebiete der Sekundarstufe I + II darstellen, so dass folgende thematische Schwerpunkte gewählt werden:

- **Algebra**: Behandlung von Termen, Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, Gleichungssysteme, Prozentrechnung, Bruchrechnung, Gleichungslehre, Eigenschaften von Quadratwurzeln, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze.

- **Geometrie**: Flächeninhalts- und Umfangsbestimmung von Kreis und Quadrat, Flächeninhaltsbestimmung von Rechteck und Quadrat unter Verwendung des Satzes von Pythagoras, Kongruenzabbildungen (Drehung, Punktspiegelung und Parallelverschiebung), Innenwinkelsumme im Dreieck, Gleichungen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, geometrische Örter (Umkreis- und Inkreismittelpunkt des Dreiecks), Zusammenhang von Cosinussatz und Satz des Pythagoras.

- **Analysis**: Bedeutung der Parameter bei quadratischen Funktionen, Beschreibung von Alltagssituationen mit Funktionen, Logarithmus- und Exponentialfunktion und Umkehrfunktion, Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Ableitungsfunktion, Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Integrandenfunktion, Grenzwertbestimmung und Asymptoten.

- **Stochastik**: Urnenexperimente: Ziehen mit bzw. ohne Wiederholung und mit bzw. ohne Beachtung der Reihenfolge, Permutationen, Laplacewahrscheinlichkeit, hypergeometrische Verteilung, bedingte Wahrscheinlichkeit, elementare Aussagen über Wahrscheinlichkeiten.

Die Aufgaben werden den drei unterschiedlichen Anspruchsstufen Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, Verallgemeinern und Reflektieren zugeordnet; diese sind die Anforderungsbereiche der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der KMK-Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik und an die drei Kognitionsprozesse Reproduzieren, Anwenden und Begründen in der TEDS-M-Studie angelehnt [22, S. 172], [71]. Zudem werden die Aufgaben in die bayerischen Lehrpläne der sechsstufigen Realschule und des achtjährigen Gymnasiums eingeordnet [115], [116]; die Charakterisierung der Aufgaben durch Lehrplaninhalte des achtjährigen Gymnasiums gibt eine inhaltliche Begründung durch Rahmenpläne, die Aspekte der sechsstufigen Realschule sollen aufzeigen, dass die Inhalte vom Großteil der Studierenden (etwa drei Viertel der Testteilnehmenden studieren das Lehramt an Realschulen) im späteren Berufsleben sicher beherrscht werden müssen. Zudem werden die Aufgaben durch die allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen der KMK-Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik kategorisiert [71].

Diese Testerhebungen werden in beiden Studien eingesetzt: bei der Querschnittstudie wird das Vorwissen aus der Schule für die Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Wintersemester 2010/11 bzw. 2011/12 bzw. 2012/13 gemessen, bei der Längsschnittstudie für eine Kohorte (Studienanfängerinnen und Studienanfänger Wintersemester 2010/11) zu Studienbeginn (Vortest) und nach etwa zwei Studienjahren (Nachtest). Die Aufgaben werden im Verlauf der Arbeit explizit vorgestellt und sind auch im Anhang zu finden.

Fragebogen zur Erfassung persönlicher Voraussetzungen, studienbezogener Angaben, Studien- und Berufswahlmotiven sowie Aspekten des Lernverhaltens: Dieser umfasst 42 Fragen und erfährt folgende Aufgliederung:

- **persönliche Voraussetzungen** (drei Fragen): Alter, Geschlecht und Fachsemester.
- **studienbezogene Voraussetzungen** (acht Fragen): Studiengang, Kombinationsfach bzw. Kombinationsfächer (neben Mathematik), Art der Hochschulreife, Bundesland, in dem die Hochschulreife erlangt wurde, mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe der Schule, bisheriger Bildungsweg, Priorität des Faches Mathematik im Vergleich zum Kombinationsfach bzw. zu den Kombinationsfächern, Brückenkursbesuch.
- **Studien- und Berufswahlmotive** (24 Fragen) untergliedert in die Themenblöcke: Studieninteresse (drei Fragen), Gründe für die Wahl des Unterrichtsfaches Mathematik (fünf Fragen), intrinsische Studienwahlmotive (zwei Fragen), extrinsische Studienwahlmotive (sechs Fragen), intrinsische Berufswahlmotive (vier Fragen) und extrinsische Berufswahlmotive (vier Fragen).

- **Lernstrategien** (sieben Fragen).

Der Fragebogen orientiert sich an den Items der beiden Fragebögen EMIL (Eilerts-Mathematik-Inventar-Lehrerbildung) von Eilerts und FEMOLA (Fragebogen zur Erfassung der Motivation für die Wahl des Lehramtsstudiums) von Pohlmann und Möller, deren Grundzüge an dieser Stelle kurz skizziert werden [39, S. 97], [87, S. 195-196], [94]: Der Fragebogen EMIL ist auf der Grundlage verschiedener Projekte entwickelt, legt den Fokus auf Lehramtsstudierende mit Mathematik und erfasst von diesen Studienvoraussetzungen, persönliches Interesse am Studienfach Mathematik, Gründe für die Wahl des Lehramtsstudiums sowie Lern- und Arbeitsverhalten im Fach Mathematik [39, S. 97-104, S. 284-287]. Der Fragebogen FEMOLA erfasst auf der Grundlage des Erwartungs-Wert-Modells die Motivation für die Wahl des Lehramtsstudiums; für die Wertekomponente werden die Aspekte pädagogisches Interesse, fachliches Interesse und Nützlichkeit sowie für die Erwartungskomponente Fähigkeitsüberzeugung und geringe Schwierigkeit des Studiums (im Vergleich zum Diplomstudiengang) unterschieden [94, S. 73], [131]. Folgende Elemente der Studien- und Berufswahlmotive sowie der Lernstrategien werden für den in der Dissertation eingesetzten Fragebogen von EMIL und FEMOLA adaptiert:

Studien- und Berufswahlmotive:

- Studieninteresse (angelehnt an EMIL Items 8.8, 8.9, 8.10 [39, S. 286]):
  - Das Studium soll Ihren persönlichen Neigungen entsprechen.
  - Das Studium soll Ihre Persönlichkeit positiv beeinflussen.
  - Bereits vor Studienbeginn hatten die gewählten Studiengebiete einen hohen Stellenwert für Sie.
- Intrinsische Studienwahlmotive (angelehnt an EMIL Items 9.1, 9.2 [39, S. 286] und FEMOLA „fachliches Interesse“ [87, S. 195-196]):
  - Sie zeigen starkes Interesse an den Studieninhalten.
  - Sie möchten Ihre Fähigkeiten im Fach Mathematik steigern.
- Extrinsische Studienwahlmotive (angelehnt an EMIL Items 9.5, 9.6, 9.7, 9.8 [39, S. 286] und FEMOLA „geringe Schwierigkeit des Lehramtsstudiums“ und „Nützlichkeit“ [87, S. 195-196]):
  - Die Studienwahl ist durch die relativ kurze Regelstudienzeit begünstigt.
  - Das Studium ist vom fachwissenschaftlichen Anspruch gut machbar.
  - Die Studienwahl ist eine Notlösung aufgrund fehlenden Interesses an anderen Fächern.
  - Die Studienwahl ist durch lokale Begebenheiten begünstigt.

- Intrinsische Berufswahlmotive (angelehnt an EMIL Items 9.10, 9.15, 9.17, 9.18 [39, S. 286] und FEMOLA „pädagogisches Interesse“ und „Fähigkeitsüberzeugung“ [87, S. 195-196]):
  - Sie begeistern sich, mathematische Inhalte zu erklären.
  - Sie arbeiten gerne mit Kindern und/oder Jugendlichen.
  - Sie glauben an Ihre pädagogischen und didaktischen Fähigkeiten.
  - Sie erwarten Vielseitigkeit im Lehrerberuf.
- Extrinsische Berufswahlmotive (angelehnt an EMIL Items 9.11, 9.13, 9.14 [39, S. 286] und FEMOLA „Nützlichkeit“ [87, S. 195-196]):
  - Der Lehrerberuf gilt als ein sicherer Arbeitsplatz.
  - Der Lehrerberuf genießt hohes Ansehen in der Öffentlichkeit.
  - Der Lehrerberuf bietet günstige Arbeitsbedingungen.

Lernstrategien: (angelehnt an EMIL Items 10.1, 10.5, 10.9 [39, S. 287]):

- Sie strukturieren und visualisieren mathematische Inhalte anhand von Skizzen und Schaubildern.
- Sie ziehen bei mathematischen Problemstellungen zusätzliche Literatur oder Hilfsmittel zu Rate.
- Sie fassen wichtige Inhalte von Texten oder Mitschriften schriftlich zusammen.

Der Fragebogen greift Items der beiden Ausrichtungen EMIL und FEMOLA auf (starker Bezug zum Fragebogen EMIL) und ergänzt diese durch eigene Schwerpunkte, so dass die geschilderte Darstellung untergliedert in die vier Bereiche persönliche Angaben, studienbezogene Angaben, Studien- und Berufswahlmotive und Lernverhalten begründet ist. Damit ist bereits ein Großteil der Fragebogenitems vorgestellt; alle Items werden im Verlauf der Querschnittstudie explizit besprochen und sind zudem im Anhang zu finden.

Die Items zu den Studien- und Berufswahlmotiven sowie zu den Lernstrategien (welche nicht zum direkten Ausfüllen konzipiert sind) liegen in einer endpunktbestimmten Skala mit sechs Skalenpunkten vor (wie bei FEMOLA). Diese Form der Skala kann als Intervall-Skala interpretiert werden; es wird die Äquidistanz zwischen allen Skalenpunkten erzeugt (diese ist in der Realität nicht zwingend gegeben) [95, S. 92]. Die Skala ist endpunktbestimmt, es werden lediglich die Extrempunkte verbalisiert (von „trifft voll zu“ bis „trifft gar nicht zu“). Des Weiteren sollen endpunktbestimmte Skalen numerisch mit fünf bis sieben Skalenpunkten bewertet werden und die Richtung der Skala von links nach rechts angeordnet werden, d.h. vom niedrigsten Wert („trifft gar nicht zu“) zum höchsten Wert („trifft voll zu“) [95, S. 86].

Der Fragebogen erhebt für beide Studien die erklärenden Regressoren, deren Einfluss auf das Leistungsbild im Vorwissen untersucht wird. In der Längsschnittstudie werden die Regressoren auch im Nachtest (Schulwissen in den vier Gebieten nach etwa zwei Studienjahren) thematisiert.

Testerhebungen zu den Inhalten der Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“: Für die Längsschnittstudie werden zudem Testerhebungen zum universitären Wissen der Studierenden (orientiert an den Inhalten der Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“) konzipiert. Die Erhebungen setzen sich aus je zwei Einzeltests für beide Vorlesungen zusammen, die jeweils etwa die Hälfte des Vorlesungsstoffes abdecken. Die vier Einzeltests sind mit je 24 Bewertungseinheiten bepunktet. Die Aufgaben der Testerhebungen werden im Rahmen der Längsschnittstudie vorgestellt und sind zudem im Anhang zu finden. Die folgende Übersicht zeigt die thematischen Schwerpunkte, die sich aus der inhaltlichen Struktur der beiden Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ ergeben:

Testerhebungen zu den Inhalten „Grundlagen der Mathematik I“:

- **1. Test zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“**: Eigenschaften von Abbildungen wie Injektivität, Surjektivität, Bijektivität und Umkehrabbildungen, Bild und Urbild unter einer Abbildung, Rechengesetze der reellen Zahlen, Beweismethoden (direkter und indirekter Beweis, Beweis durch Widerspruch), vollständige Induktion, Kombinatorik.
- **2. Test zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“**: Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie, Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, Primzahlen, algebraische Strukturen (Körper und Ring), Gleichungslehre und Zahlenbereichserweiterung, Bestimmung der Lösungsmenge einer Gleichung über der Grundmenge der reellen Zahlen.

Testerhebungen zu den Inhalten „Grundlagen der Mathematik II“:

- **1. Test zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“**: Relationen und Graph einer Abbildung, Ordnung und Äquivalenzrelation, Laplacewahrscheinlichkeit, hypergeometrische Verteilung und Binomialverteilung, bedingte Wahrscheinlichkeit, stochastische Unabhängigkeit.
- **2. Test zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“**: Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen, Satzgruppe des Pythagoras, Kommensurabilität von zwei Größen sowie angeordnete Körper, Trigonometrie, Bestimmung der Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung über dem Körper der komplexen Zahlen und Darstellungsformen für komplexe Zahlen, Eigenschaften des Körpers der komplexen Zahlen.

Gütekriterien der Messung

Bei empirischen Untersuchungen ist die Qualität des Messvorgangs entscheidend, da diese die Aussagekraft der erhobenen Ergebnisse und deren Interpretation beeinflusst. Das Ziel eines Messvorgangs ist, die Qualität der Messung beurteilen zu können und Messfehler zu minimieren [57, S. 383]. In der Testtheorie werden in diesem Zusammenhang die drei Hauptgütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität betrachtet [78]; diese werden nun kurz beschrieben:

- **Objektivität**: Es liegen objektive Messergebnisse vor, wenn unabhängig voneinander durchgeführte Messungen zu den gleichen Ergebnissen führen [57, S. 383]; die Ergebnisse müssen unabhängig von jeglichen Einflüssen (Personen und Situation bei Durchführung, Auswertung und Interpretation) sein.

- **Reliabilität**: Dieses Gütekriterium betrifft die Zuverlässigkeit und die Stabilität des Messinstruments; die Frage ist demnach, ob die Messung zuverlässig oder mit starken Messfehlern behaftet ist. Entscheidend ist also, dass bei wiederholter Messung reproduzierbare Ergebnisse erzielt werden [57, S. 383].

- **Validität**: Dieses Gütekriterium fokussiert die Gültigkeit und materielle Genauigkeit des Messinstruments [57, S. 383]; die Frage ist, ob das Messinstrument das Merkmal misst, welches gemessen werden soll, und ob durch dieses Merkmal eine diagnostische Entscheidung mit entsprechender Güte getroffen werden kann [78, S. 7].

Die Reliabilität eines Tests (bzw. Messinstruments) kann mit Hilfe der Maßzahl Cronbachs α erfasst werden; diese stellt eine Maßzahl für die interne Konsistenz einer Skala dar und gibt das Ausmaß an, in dem die Items einer Skala miteinander in Beziehung stehen [78]. Cronbachs α ist definiert als die durchschnittliche Korrelation zwischen den betrachteten Items und kann Werte von $-\infty$ bis 1 annehmen; Werte für $\alpha \geq 0{,}50$ gelten dabei als noch vertretbar [78], wobei Werte ab etwa $\alpha = 0{,}70$ als gut angesehen werden. Für die beiden Blöcke Studien- und Berufswahlmotive (untergliedert in Studieninteresse, Gründe für die Wahl des Unterrichtsfaches Mathematik, intrinsische Studienwahlmotive, extrinsische Studienwahlmotive, intrinsische Berufswahlmotive und extrinsische Berufswahlmotive) sowie Lernstrategien wird die interne Konsistenz der Subskalen (mit Anzahl der Items, Mittelwert MW, Standardabweichung SD und interner Konsistenz über Cronbachs α) dargestellt:

Tabelle 2.3: Interne Konsistenz der Subskalen

Subskala	Anzahl der Items	MW	SD	Cronbachs α
Studieninteresse	3	4,71	0,25	0,57
Gründe für das U-fach	5	3,95	0,39	0,74
intr. Studienwahlmot.	2	4,88	0,33	0,65
extr. Studienwahlmot.	6	2,79	0,74	0,68
intr. Berufswahlmot.	4	5,31	0,26	0,72
extr. Berufswahlmot.	4	4,15	0,60	0,79
Lernstrategien	7	4,38	0,51	0,77

Alle Werte für Cronbachs α liegen über 0,50 und können als akzeptabel angesehen werden, so dass die Items im Fragebogen eingesetzt werden können. Die zugrunde liegende Stichprobe setzt sich aus den Studienanfängerinnen und Studienanfänger vom Wintersemester 2010/11 zusammen (Gesamtteilnahme $n = 139$).

Hauptkomponentenanalyse für den Themenblock „Studien- und Berufswahlmotive“

Die Grundlagen dieser explorativen Methode (Ziele, Bestimmung der Hauptkomponenten und ihrer Anzahl, Interpretation der Hauptkomponenten, mathematische Grundidee und Voraussetzungen für die Anwendung) werden im Anhang bei den in der Dissertation verwendeten statistischen Methoden beschrieben. Damit wird versucht, eine Übersichtlichkeit in den Themenblock „Studien- und Berufswahlmotive“ zu bringen und Strukturen abzuleiten. Ziel ist es, eine sinnvolle Anzahl an Hauptkomponenten, welche mit den ursprünglichen Items noch hoch korrelieren, zu finden und ferner eine Struktur aufzudecken, welcher eine Vielzahl an Items (Variablen) zugrunde liegt. Insgesamt soll dabei aber der Großteil der Informationen beibehalten werden, um damit einen hohen Prozentsatz der Gesamtvarianz zu erklären. Die Zuordnung der Items zu spezifischen neu konstruierten Hauptkomponenten ermöglicht eine einfachere und übersichtlichere Interpretation der Tendenzen der Studien- und Berufswahlmotive. Der vorliegende Datensatz erfüllt die Voraussetzungen (mit einem Wert von 0,72 für das Kaiser-Meyer-Olkin-Kriterium und der Ablehnung der Nullhypothese beim Bartlett-Test auf Spherizität) für die Durchführung der Hauptkomponentenanalyse [53, S. 392, S. 395]. Zuerst muss die Anzahl der Hauptkomponenten bestimmt werden; dazu wird ein Screeplot verwendet, in dem die Komponenten gegen die Eigenwerte abgetragen werden.

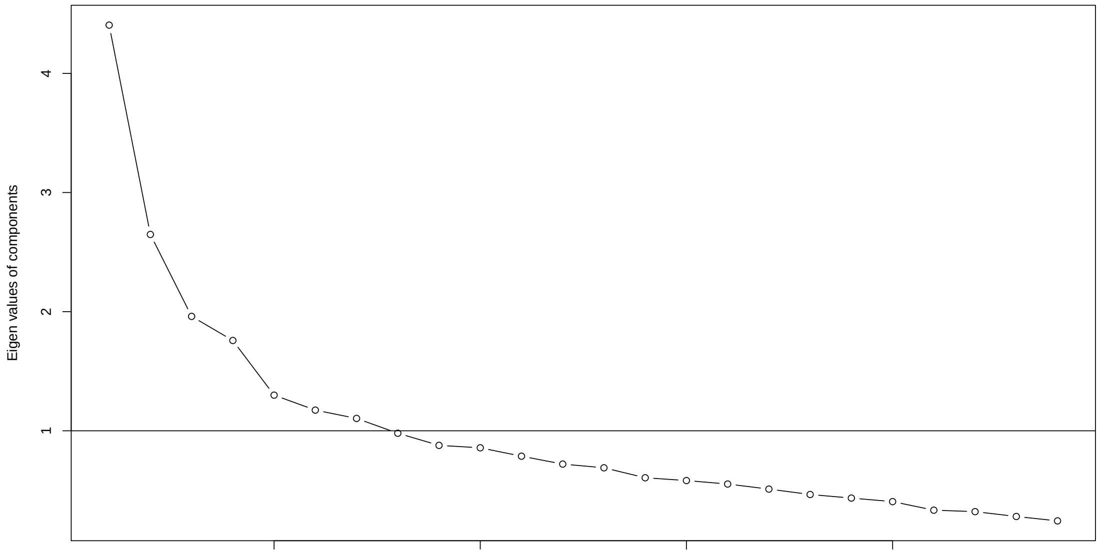

Abbildung 2.1: Screeplot für die Fragen 12 - 35

Der Screeplot liefert sieben Eigenwerte mit einem Wert größer als 1; gemäß dem Kriterium für Screeplots sollen diejenigen Hauptkomponenten berücksichtigt werden, die im Diagramm links der Knickstelle liegen; diese liegt im vorliegenden Fall nach der siebten Hauptkomponente, absteigend von der Größe der auf der Hochwertachse aufgetragenen Eigenwerte (Schnittpunkt des Polygonzugs mit der horizontalen Gerade beim Eigenwert 1). Im Folgenden werden als Kompromiss fünf Hauptkomponenten extrahiert, da der Screeplot eine Orientierungshilfe für die Extraktion von Hauptkomponenten ist, aber kein eindeutiges Kriterium darstellt (die Hauptkomponentenanalyse ist eine explorative Methode).

Die Berechnung der Hauptkomponentenanalyse mit fünf Hauptkomponenten wird mit Hilfe der Varimax-Rotation durchgeführt. Diese ist eine orthogonale Transformation, welche die Achsen des Koordinatensystems so dreht, dass für jede Komponente (jede Spalte in der Komponentenladungsmatrix) einige wenige Items hohe Ladungen, die anderen Items hingegen Ladungen nahe von Null besitzen [53, S. 391]. Für jedes Item wird die Kommunalität berechnet, dieser Wert ist die Summe der quadrierten Ladungen auf allen extrahierten Hauptkomponenten; ist die Kommunalität eines Items niedrig, wird es durch die extrahierten Komponenten nicht gut repräsentiert [53, S. 398]. Im vorliegenden Datensatz bzw. im Output der Berechnung des Modells liegen durchgängig hohe Werte für die Kommunalitäten vor, weswegen nicht daran gedacht werden muss, Items mit geringen Werten zu entfernen oder zusätzliche Hauptkomponenten mit aufzunehmen. Es laden immer mindestens drei Items auf einer Hauptkomponente hoch und ferner lädt kein Item auf mehr als einer Komponente. Insgesamt erklärt das vorliegende extrahierte Modell mit fünf Hauptkomponenten 52 % der Gesamtvarianz; kein sehr guter, aber ein akzeptabler Wert. Folgende Tabelle veranschaulicht die Zuordnung der Items zu den fünf Hauptkomponenten mit Angabe der Ladungen; (die Items des Fragebogens sind dem Anhang zu entnehmen).

Tabelle 2.4: Zuordnung der Items zu den Hauptkomponenten

Hauptkomponente	Items	Ladung
Hauptkomponente 1	Frage 12	0,6
	Frage 14	0,7
	Frage 17	0,6
	Frage 18	0,8
	Frage 19	0,6
	Frage 20	0,6
	Frage 28	0,6
Hauptkomponente 2	Frage 32	0,7
	Frage 33	0,7
	Frage 34	0,8
	Frage 35	0,6
Hauptkomponente 3	Frage 29	0,7
	Frage 30	0,8
	Frage 31	0,7
Hauptkomponente 4	Frage 22	0,6
	Frage 23	0,7
	Frage 25	0,6
Hauptkomponente 5	Frage 16	0,6
	Frage 21	0,6
	Frage 27	0,5

Von den insgesamt 24 Fragen dieses Themenkomplexes werden vier Fragen (F13, F15, F24, F26) aufgrund ihrer geringen Ladung (jeweils mit einem Wert unter 0,50) nicht im Modell berücksichtigt und die übrigen 20 zu fünf Hauptkomponenten gemäß obiger Tabelle zusammengefasst. Durch die orthogonale Transformation des Koordinatensystems laden die Items (Fragen 12, 14, 17, 18, 19, 20, 28) hoch auf der ersten Hauptkomponente (diese Items korrelieren untereinander stark und sind zu den übrigen Items annähernd unkorreliert), weswegen diese sieben Items zur ersten Hauptkomponente gruppiert werden. Analog werden die übrigen Items zu der zweiten, dritten, vierten und fünften Hauptkomponente zusammengefasst. Die durchwegs positiven Ladungen (für die Ladungen kommen Werte von -1 bis 1 in Frage) zeigen, dass die Studierenden mit hohen Werten bei den jeweiligen Items auch hohe

Ausprägungen auf der entsprechenden Hauptkomponente haben und dem jeweiligen Inhalt zustimmen. Für die Interpretation ist es nun grundlegend, den konstruierten fünf Hauptkomponenten disjunkte inhaltsbestimmende Einteilungen zuzuordnen, um damit den Block „Studien- und Berufswahlmotive“ nach fünf Merkmalen zu charakterisieren. Für die fünf Hauptkomponenten mit ihren Items ergibt sich:

- Hauptkomponente 1: Bedeutung des Fachs Mathematik auf Persönlichkeit, Studienwahl und Interaktion.
- Hauptkomponente 2: Extrinsische Berufswahlmotive.
- Hauptkomponente 3: Allgemeine Aspekte des Lehrerberufs.
- Hauptkopmonente 4: Extrinsische Begünstigungsfaktoren der Studienwahl.
- Hauptkomponente 5: Keine schlüssige Interpretation möglich.

Zusammenfassend ergibt sich nach Durchführung der Hauptkomponentenanalyse:

Tabelle 2.5: Hauptkomponentenanalyse mit 52 % erklärter Gesamtvarianz

Hauptkomponente	Eigenwert	Anteil erklärter Varianz
Hauptkomponente 1	3,69	16 %
Hauptkomponente 2	2,38	10 %
Hauptkomponente 3	2,13	9 %
Hauptkomponente 4	2,06	9 %
Hauptkomponente 5	1,91	8 %

Bei der eben dargestellten Charakterisierung der fünf Hauptkomponenten mit den entsprechenden Items kann in vier von fünf Fällen eine sinnvolle inhaltsbestimmte Einteilung vorgenommen werden, in einem Fall lässt sich keine sinnvolle Interpretation ableiten. Insgesamt kann die im Fragebogen gewählte Einteilung der Studien- und Berufswahlmotive (Frage 12 bis 35) in die sechs Bereiche

- Studieninteresse,
- Gründe für das Unterrichtsfach Mathematik,
- intrinsische Studienwahlmotive,
- extrinsische Studienwahlmotive,
- intrinsische Berufswahlmotive,
- extrinsische Berufswahlmotive,

mit Hilfe der Hauptkomponentenanalyse bestätigt werden. Der Fragebogen ist mit der obigen Einteilung der Studien- und Berufswahlmotive an die Studierenden im Wintersemester 2010/11 ausgegeben und mit Hilfe der Hauptkomponentenanalyse bestätigt worden, so dass mit dem gleichen Fragebogendesign auch die Daten der beiden Folgejahrgänge (Wintersemester 2011/12 und 2012/13) erhoben wurden.

3 Querschnittstudie

Im Folgenden werden die Ergebnisse einer Querschnittstudie zum mathematischen Vorwissen von Studienanfängerinnen und Studienanfänger vorgestellt. Diese analysiert die Leistungen von Studierenden mit Studienbeginn in den Wintersemestern 2010/11, 2011/12 und 2012/13; die Untersuchung der Leistungen bezieht sich lediglich auf das Vorwissen von schulrelevanten mathematischen Inhalten zu Studienbeginn. Ferner wird der Frage nachgegangen, welche erklärenden Regressoren einen bedeutsamen Einfluss auf dieses Leistungsbild haben.

Nicht für alle Jahrgänge werden die gleichen Variablen erhoben. Insbesondere nehmen die Studierenden des Jahrgangs Wintersemester 2010/11 zusätzlich an einer Längsschnittstudie teil. Im Folgenden werden spezifische Auffälligkeiten der beiden anderen Jahrgänge aufgezeigt und vergleichend zu dieser Schwerpunktgruppe betrachtet. Es wird für alle drei Jahrgänge das gleiche Testdesign zu Grunde gelegt; daher werden die Ergebnisse nur eines Jahrgangs intensiv geschildert und bei den anderen Jahrgängen besonders auffallende Ergebnisse ergänzt.

Für die Analyse des mathematischen Vorwissens werden Testerhebungen konstruiert, die den gesamten Schulbereich der Mathematik der Sekundarstufe I und II abdecken. Die vier elementaren schulspezifischen Disziplinen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik werden einzeln geprüft; in den meisten Fällen wird zudem der Mittelwert aus den Ergebnissen der vier Gebiete betrachtet. Alle vier Bereiche sind einheitlich mit 24 Bewertungseinheiten bepunktet, wobei diese auf eine unterschiedliche Anzahl an Aufgaben verteilt sind. Die Aufgaben sind hauptsächlich in offener Form (mit Angabe des Lösungswegs) gestellt. Die inhaltliche Begründung für die Wahl der Aufgaben findet sich sowohl in den bayerischen Lehrplänen der sechsstufigen Realschule [116] und des achtstufigen Gymnasiums [115] als auch in den von der ständigen Kultusministerkonferenz (KMK) beschlossenen Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik [71] und den einheitlichen Prüfungsanforderungen für die Abiturprüfung im Fach Mathematik [72]. Die Charakterisierung der Einzelaufgaben durch diese institutionellen Rahmenvorgaben wird im Zuge der Längsschnittstudie erfolgen, da dort die Aufgaben theoretisch eingebettet, typische Fehlerbilder analysiert und Leistungsentwicklungen erörtert werden. Der parallel zu den vier Einzeltests konzipierte Fragebogen ist in die drei Abschnitte

- Angaben zu Person und Studium (Fragen 1-11),
- Angaben zu Studien- und Berufswahlmotiven (Fragen 12-35),
- Angaben zu den Lernstrategien (Fragen 36-42)

untergliedert und weist insgesamt 42 Fragen (Items) auf. Im ersten Abschnitt werden die Angaben zu Person und Studium anhand von Fragen zum Ankreuzen bzw. zum direkten Ausfüllen erfasst (Fragen 1-11). Die beiden anderen Abschnitte Studien- und Berufswahlmotive sowie Lernstrategien werden mit Hilfe von Fragen mit Tendenzangabe vorgegeben. Dabei liegt eine endpunktbestimmte Skala mit sechs Skalenpunkten (von „trifft gar nicht zu" bis „trifft völlig zu") vor, um durch nicht fest definierte Skalenpunkte und deren Spannweite genügend Spielraum für die Antworten zu geben [95, S. 92]. Die Teilnehmenden müssen sich bei jeder Frage für „Zustimmung" oder für „keine Zustimmung" entscheiden, da die gerade Anzahl an Skalenpunkte keine neutrale Position zulässt.

Die vier Einzeltests werden zu zwei verschiedenen Messzeitpunkten erhoben; am ersten Erhebungszeitpunkt werden die Gebiete der Sekundarstufe I (Algebra und Geometrie) und am zweiten die der Sekundarstufe II (Analysis und Stochastik) abgeprüft. Der parallel durchgeführte Fragebogen wird von jedem Studierenden bearbeitet, da er zu beiden Zeitpunkten ausgegeben wird (insgesamt wird er von jeder Person genau einmal ausgefüllt). Die beiden verschiedenen Zeitpunkte bedingen eine unterschiedliche Anzahl an Teilnehmenden; für jeden der vier Einzeltests sind 45 Minuten Bearbeitungszeit vorgesehen. Die zeitliche Kapazität erlaubt jeweils 90-minütige Zeitfenster (Zentralübung der Veranstaltungen), was zur geschilderten Aufteilung führt. Für die Testerhebung im Wintersemester 2012/13 wurde das obige Erhebungsschema nicht eingehalten: alle vier Einzeltests (mit Fragebogen) wurden an einem Tag erhoben, was die gleiche Anzahl an Teilnehmenden erklärt; dabei wurde die Zeit von 90 Minuten auf 120 Minuten verlängert, da sich für die Erhebungen in den ersten beiden Jahren gezeigt hat, dass 30 Minuten pro Testerhebung genügen (ein Messzeitpunkt: vier Einzeltests mit je 30 Minuten). Für die ersten beiden Erhebungszeitpunkte (Wintersemester 2010/11 und 2011/12) werden unter dem Begriff Gesamtteilnahme diejenigen Studierenden zusammengefasst, die alle vier Testerhebungen bearbeitet haben. Die Studierenden nehmen an den Erhebungen freiwillig teil, dafür wird ein Bonus für den Übungsbetrieb der Semesterveranstaltung angerechnet. Die Testerhebungen und Fragebögen sind mit einem persönlichen Code versehen, so dass die Bearbeitung für die Studierenden anonym ist, aber die Ergebnisse in den Testerhebungen mit den Items des Fragebogens in Verbindung gebracht werden können. Folgende Stichprobenumfänge ergeben sich für die drei Untersuchungsgruppen:

- Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 2010/11: Algebra und Geometrie: $n = 178$, Analysis und Stochastik: $n = 154$, Gesamtteilnahme: $n = 139$.
- Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 2011/12: Algebra und Geometrie: $n = 88$, Analysis und Stochastik: $n = 84$, Gesamtteilnahme: $n = 77$.
- Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 2012/13: Algebra und Geometrie: $n = 133$, Analysis und Stochastik: $n = 133$, Gesamtteilnahme: $n = 133$.

Das Vorgehen in der Querschnittstudie ist im Wesentlichen explorativ. Dieses Kapitel weist folgende Struktur auf:

- Es werden zuerst in Abschnitt 3.1 die Leistungen in den vier Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik für die Studienanfängerinnen und Studienanfänger des Wintersemesters 2010/11 vorgestellt; es wird damit ein Überblick über das Leistungsbild der Studierenden gegeben, ohne den Einfluss von Regressoren zu berücksichtigen.

- In Abschnitt 3.2 werden diese Ergebnisse in Abhängigkeit der ersten Kategorie von Regressoren betrachtet; es werden persönliche und studienbezogene Angaben fokussiert. Am Ende des Abschnittes werden mittels multipler linearer Regression die für die Zielvariable (Leistung in den Testerhebungen) bedeutsamen erklärenden Variablen herausgestellt.

- Die Studien- und Berufswahlmotive stehen im Fokus des Abschnitts 3.3; es werden in Abhängigkeit dieser Aspekte die Leistungen in den Erhebungen diskutiert und die für das Leistungsbild der Studierenden bedeutsamen Variablen dieses Blockes aufgezeigt.

- In Abschnitt 3.4 werden die Leistungen in Abhängigkeit vom Lernverhalten bzw. von Lernstrategien analysiert.

- Der Abschluss dieses Kapitels (Abschnitt 3.5) bezieht nun die beiden anderen Untersuchungsgruppen mit ein; es werden die Ergebnisse der Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Wintersemester 2011/12 und 2012/13 betrachtet. Dabei werden Unterschiede und Gemeinsamkeiten hinsichtlich des Leistungsbilds bzw. des Einflusses der Regressoren im Vergleich zur Referenzgruppe der Studienanfängerinnen und Studienanfänger des Wintersemesters 2010/11 geschildert. In den beiden Gruppen (Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 2011/12 und WS 2012/13) befinden sich Studierende, die ihr Abitur (Hochschulreife) am achtjährigen Gymnasium G8 absolviert haben. Ein Vergleich der Testleistungen von G9- und G8-Absolventinnen und -Absolventen rundet dieses Kapitel ab.

3.1 Leistungen in den vier Vorwissenstests (StudienanfängerInnen WS 10/11)

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Studierenden (Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 2010/11) in den vier Einzelfächern Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik und im Mittelwert dieser vier Disziplinen geschildert.

Diese Darstellung zeigt das Potential in jedem Einzelgebiet und stellt die Gebiete vergleichend gegenüber. Damit werden im Folgenden Ergebnisse für die erste Forschungsfrage skizziert:

> **Forschungsfrage 1**: Welche fachmathematischen Kenntnisse weisen Studierende des Lehramts an Grund-, Haupt oder Realschulen zu Studienbeginn in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik auf?

Es werden nur deskriptive Merkmale zur Beschreibung der erbrachten Leistungen betrachtet; die Ergebnisse werden in einem Histogramm und einem (verallgemeinerten) Boxplot veranschaulicht. Dabei sind im Histogramm die 24 möglichen Punkte (Rechtswertachse bzw. x-Achse) gegen die entsprechende Dichte (Hochwertachse bzw. y-Achse) aufgetragen. Ferner soll mit Hilfe des Kern-Dichteschätzers (grüne Kurve) die Dichtefunktion besser approximiert werden, um eine genauere Übersicht über die Verteilung der Punkte zu erhalten. Der Boxplot liefert einen schnellen Überblick über die Verteilung (Symmetrie bzw. Schiefe und Ausreißer), da fünf Lagemaße (unterer Whisker bzw. x_{min}, $x_{0,25}$, x_{med}, $x_{0,75}$, oberer Whisker bzw. x_{max}) erfasst werden [41, S. 67]. Abrundend werden die beiden Graphiken mit typischen Lagemaßen für die vier Einzelfächer in tabellarischer Form ergänzt.

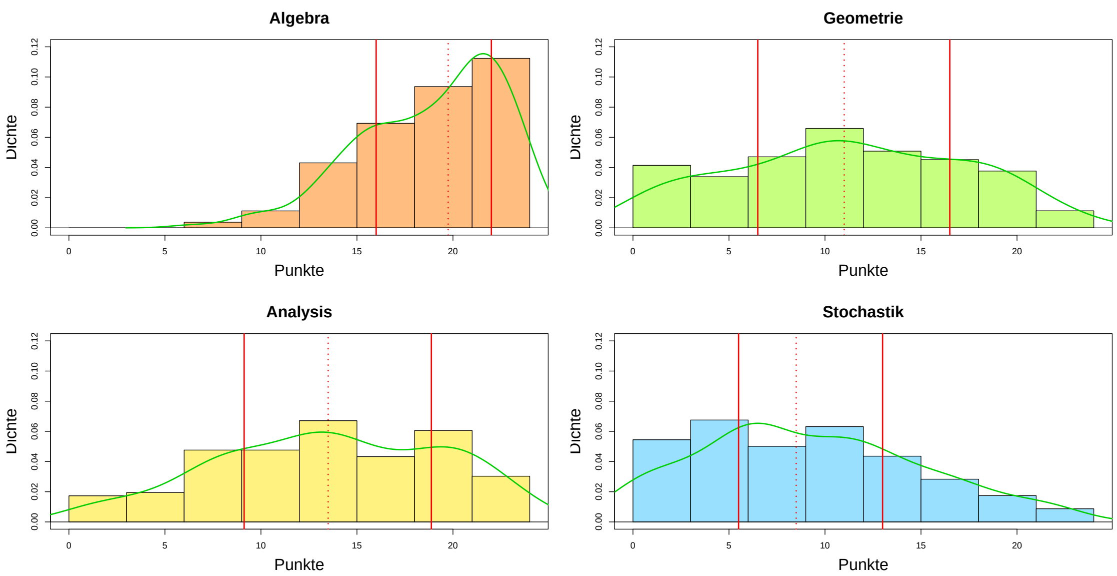

Abbildung 3.1: Histogramm der vier Einzelfächer (WS 10/11)

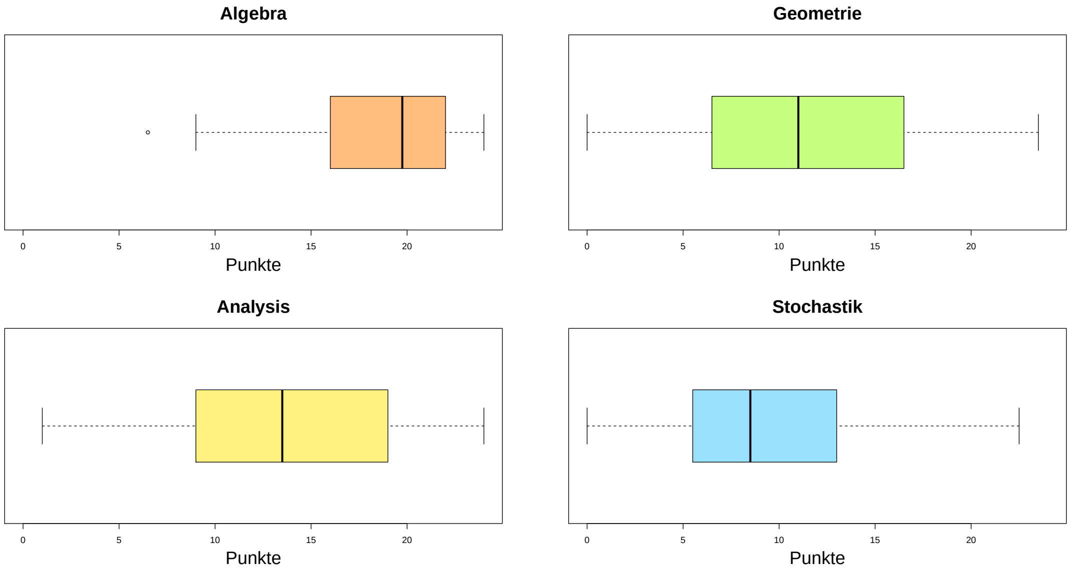

Abbildung 3.2: Boxplot der vier Einzelfächer (WS 10/11)

Tabelle 3.1: Lagemaße der vier Einzelfächer (WS 10/11)

Fach	x_{min}	$x_{0,25}$	x_{med}	$\bar{x}$	$x_{0,75}$	x_{max}
Algebra	6,50	16,00	19,75	18,87	22,00	24,00
Geometrie	0,00	6,50	11,00	11,23	16,50	23,50
Analysis	1,00	9,13	13,50	13,55	18,88	24,00
Stochastik	0,00	5,50	8,50	9,25	13,00	22,50

An dieser Stelle soll auch der Mittelwert aus den vier Fächern gebildet und analysiert werden; dieser wird in späteren Untersuchungen, die sich auf den Fragebogen beziehen, immer wieder von Bedeutung sein. Folgende Graphik stellt die Ergebnisse des Mittelwerts der vier Teildisziplinen im Histogramm und im Boxplot dar (im Histogramm wird die Verteilung durch die roten Linien in Quartile eingeteilt, gelb markiert ist das arithmetische Mittel).

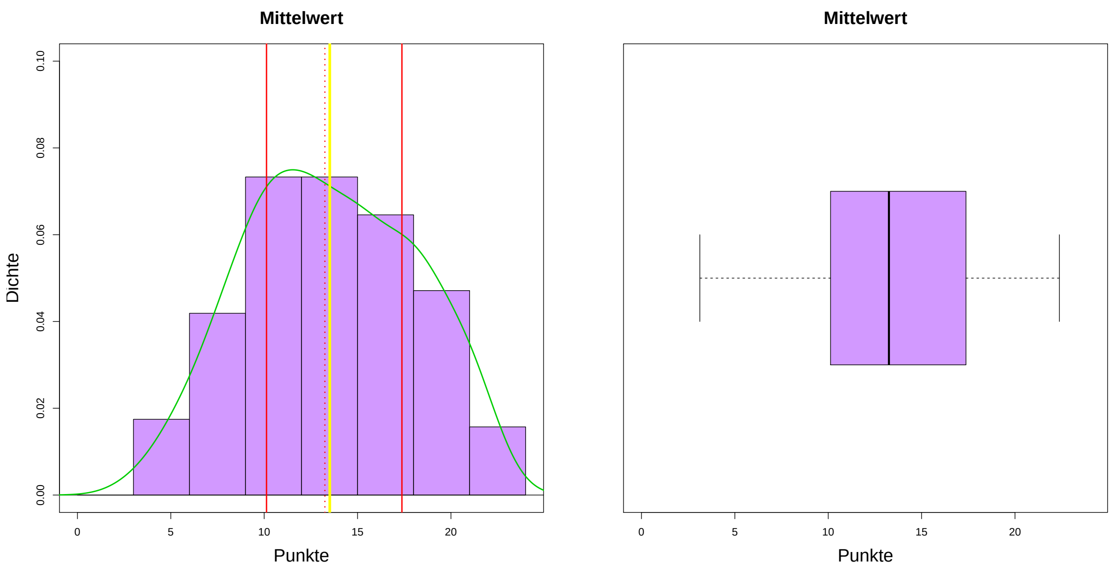

Abbildung 3.3: Histogramm und Boxplot für den Mittelwert der vier Einzelfächer (WS 10/11)

Für den gebildeten Mittelwert bleibt festzuhalten:

- Der arithmetische Mittelwert (der Mittelwerte) ist $\bar{x} = 13{,}51$, der Median $x_{med} = 13{,}25$ sowie der Modus $x_{mod} = 14{,}75$; wegen $\bar{x} \approx x_{med} \approx x_{mod}$ liegt eine symmetrische Verteilung vor.
- Wegen $d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 22{,}38 - 3{,}13 = 19{,}25$ werden fast alle Punkte (bis auf die Randbereiche) erreicht, die mittleren 50 % der Leistungen liegen im Bereich der Breite $d_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 17{,}38 - 10{,}12 = 7{,}26$.
- Die starken Algebraergebnisse ($\bar{x} = 18{,}87$) gleichen (rechnerisch) vor allem das schlechte Stochastikergebnis ($\bar{x} = 9{,}25$) aus, aber ferner auch das schwache Geometrieergebnis ($\bar{x} = 11{,}23$); das Ergebnis in Analysis ist ähnlich wie das des Mittelwerts (symmetrische Verteilung mit $\bar{x} = 13{,}55$).

3.2 Angaben zu Person und Studium (StudienanfängerInnen WS 10/11)

Aus dem ersten Themenkomplex „Angaben zu Person und Studium“ (Fragen 1-11) werden folgende erklärende Variablen für die Leistungen der Studierenden in den vier Vorwissenstests analysiert (abhängige Variable): Alter, Geschlecht, Fachsemester, studierter Lehramtstyp (Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen), Kombinationsfächer (nur für das Lehramt an Realschulen), Art der Hochschulreife, mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe der Schule, Prioritätensetzung bei den studierten Unterrichtsfächern sowie Teilnahme am Brückenkurs. Damit werden im Folgenden Ergebnisse für einen Teil der zweiten Forschungsfrage skizziert, da als exogene Variablen an dieser Stelle persönliche und studienbezogene Voraussetzungen thematisiert werden.

> **Forschungsfrage 2 (Teilaspekt 1)**: Welchen Einfluss nehmen exogene Variablen (persönliche und studienbezogene Voraussetzungen) auf das Vorwissen der Studierenden in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik?

Die vier Vorwissenstests wurden im Wintersemester 2010/11 wie oben beschrieben zu zwei verschiedenen Erhebungszeitpunkten an die Studierenden ausgegeben, weswegen auch eine unterschiedliche Anzahl an Teilnehmenden für die vier Einzeltests vorliegt. Am ersten Erhebungstag werden die Unter- und Mittelstufengebiete Algebra und Geometrie behandelt (178 Teilnehmende). Der zweite Erhebungszeitpunkt beinhaltet die Gebiete Analysis und Stochastik, welche in der Regel in der Oberstufe behandelt werden (154 Teilnehmende). An allen vier Einzeltests sind insgesamt 139 Studierende beteiligt (mit Bearbeitung des Fragebogens, der die exogenen Variablen erfasst).

3.2.1 Abhängigkeit der Leistung vom Alter

Dieser Abschnitt behandelt, welchen Einfluss das Alter (exogene Variable) der Studierenden auf deren Leistungen in den vier Testerhebungen (endogene Variable) hat. In folgendem Diagramm wird die mittlere Leistung aus allen vier Tests anhand eines Histogramms und eines Boxplots für zwei Gruppen differenziert untersucht. Man betrachtet zum einen Personen unter 21 Jahren sowie Personen, die mindestens 21 Jahre sind. Diese Einteilung ist aufgrund ausbildungschronologischer Gründe (die jüngere Gruppe kommt direkt nach Beendigung der Schule, ältere Studierende haben womöglich bereits Studien- oder Berufserfahrung (oder anderes) und damit womöglich einen gewissen Abstand zur Schule) getroffen worden. Die Punktespanne beträgt für jeden einzelnen Test und damit auch für deren Mittelwert, wie bereits geschildert, 24 Punkte.

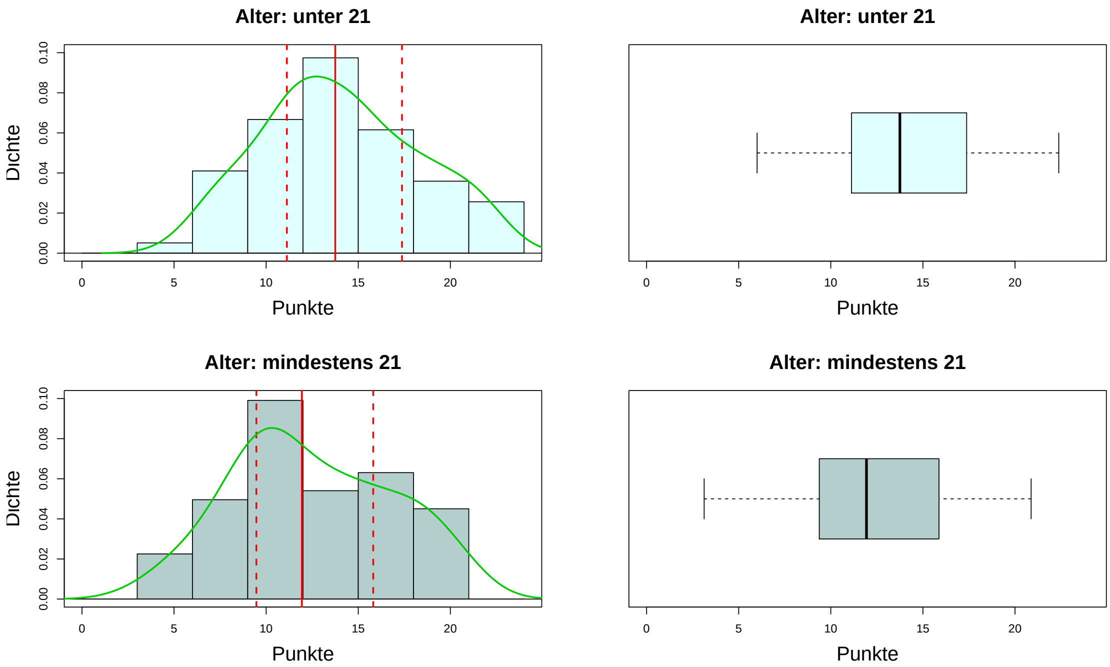

Abbildung 3.4: Histogramm und Boxplot für den Mittelwert der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom Alter

Sowohl im Histogramm als auch im Boxplot werden die Gesamtpunkte (metrisches Merkmal) auf der x-Achse aufgetragen; im Histogramm, welches in die Klassen $[0, 3[, [3, 6[, \ldots, [21, 24]$ eingeteilt ist, wird zudem auf der y-Achse die Dichte für die jeweils erzielte Punktzahl angegeben. Das Histogramm ist um die Quartilseinteilung (gestrichelte Linien und durchgezogene Linie) ergänzt, die ebenso durch die „Schachtel" im Boxplot zu finden ist. Die zur y-Achse parallelen Geraden im Histogramm veranschaulichen das 25 %-Quantil $x_{0,25}$ (gestrichelte Linie), das 50 %-Quantil x_{med} (durchgezogene Linie) und das 75 %-Quantil $x_{0,75}$ (gestrichelte Linie) und zerlegen damit den Datensatz in etwa vier gleich große Teile. Diese Kennwerte sind ebenso im Boxplot zu finden; die beiden Enden der „Schachtel" entsprechen $x_{0,25}$ bzw. $x_{0,75}$ und die Markierung innerhalb der Box dem 50 %-Quantil x_{med}. Der Boxplot ist zudem um die zwei Linien („Whisker") außerhalb der Box ergänzt. Im vorliegenden Fall werden 65 Personen (unter 21 Jahre) mit 74 (mindestens 21 Jahre) bezüglich des Mittelwerts aus allen vier Testergebnissen verglichen (insgesamt 139 Testpersonen). Das Diagramm zeigt, dass die jüngeren Studierenden im Vergleich zur älteren Gruppe bezüglich des Mittelwerts der vier Einzelfächer leicht besser abschneiden. Sowohl das Histogramm als auch der Boxplot verdeutlichen das Ergebnis; man kann im Histogramm beispielsweise sofort erkennen, dass keine Studierenden der älteren Vergleichsgruppe 21,00 Punkte oder mehr erreichen; dagegen zeigt sich bei der jüngeren Gruppe dieser Bereich leicht ausgeprägt, und diese Gruppe erzielt vergleichsweise selten eine geringe Punktzahl zwischen drei und sechs Punkten, wie an der geringen Rechteckshöhe in diesem Intervall deutlich wird. Um mit Hilfe der skizzierten Quartile sowie des Boxplots zu argumentieren, kann festgehalten werden, dass die mittleren 50 % der erzielten Leistungen der jüngeren Vergleichsgruppe etwa zwischen 11,00 und 17,00 Punkten und der älteren Gruppe etwa zwischen 9,00 und 16,00 Punkten liegen; dieses Punkteintervall entspricht dem Interquartilabstand $d_Q = x_{0,75} - x_{0,25}$ bzw. der markierten Schachtel [41, S. 66]. Mit folgenden numerischen Daten kann die Beobachtung überdies gestützt werden; so ergibt sich auf Seiten der jüngeren Gruppe ein Mittelwert von 13,75 bzw. ein Median von 14,00 sowie bei der Gruppe der älteren Studierenden die Werte 11,94 bzw. 12,50. Folgende Tabelle schlüsselt die arithmetischen Mittel der vier Testergebnisse auf, wobei die Mittelwerte im Fach Stochastik die stärkste Differenz zeigen:

Tabelle 3.2: Mittelwerte der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom Alter

Fach	jüngere Gruppe	ältere Gruppe
Algebra	19,08	18,32
Geometrie	11,93	10,02
Analysis	14,58	13,32
Stochastik	10,44	8,15

Die geschilderten Aspekte werden mit induktiven Methoden untersucht. Für beide Gruppen liegen unabhängige und identische Variablen vor, die als approximativ normalverteilt aufgefasst werden können [41, S. 443]. Für beide Gruppen ist jeweils die Varianz nicht bekannt. Aufgrund dieser Annahmen wird ein zweiseitiger Welch-Test durchgeführt, der auf einen Vergleich der Mittelwerte für beide Gruppen abzielt [41, S. 443]. Als Nullhypothese bzw. Alternativhypothese ergeben sich

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad \text{bzw.} \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2,$$

wobei μ_1 bzw. μ_2 der Erwartungswert der Leistungen für die jüngere bzw. ältere Vergleichsgruppe ist. Im Teilgebiet Stochastik (p-Wert der zugehörigen Teststatistik ist $p = 0{,}02$) können mit einer Fehlertoleranz von $\alpha = 0{,}05$ signifikante Leistungsunterschiede festgestellt werden; in den anderen Einzelfächern sowie in deren Mittelwert kann kein signifikanter Leistungsunterschied bezüglich der beiden Vergleichsgruppen erkannt werden.

3.2.2 Abhängigkeit der Leistung vom Geschlecht

Eine weitere Kategorisierung der zu untersuchenden Gruppe wird durch das Geschlecht erlangt. Insgesamt sind die weiblichen Teilnehmenden mit einer Anzahl von 108 in der deutlichen Mehrheit zu 31 männlichen Teilnehmenden. Es werden zunächst ein Histogramm und ein Boxplot für den Mittelwert aus den vier Einzeltests betrachtet.

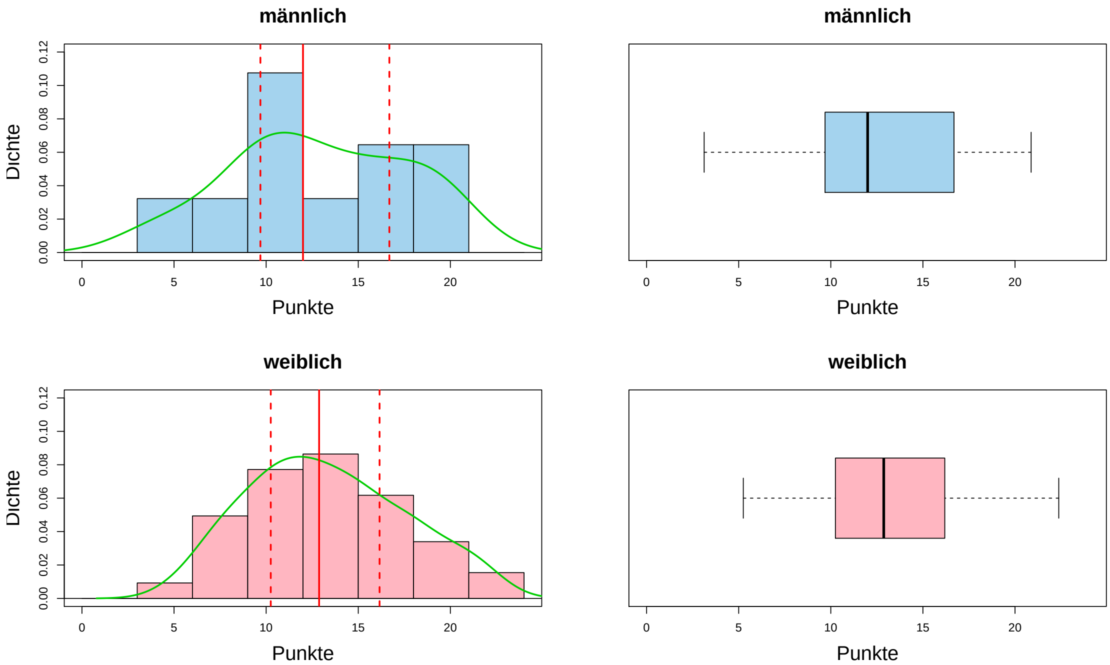

Abbildung 3.5: Histogramm und Boxplot für den Mittelwert der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom Geschlecht

Insgesamt differieren die Ergebnisse beider Gruppen nicht stark: so erzielen die weiblichen Teilnehmenden in Bezug auf den Mittelwert der vier Teilbereiche ein arithmetisches Mittel von $\bar{x} = 13{,}30$ Punkten, die männlichen Studierenden liegen mit $\bar{x} = 12{,}86$ Punkten leicht darunter. Im Histogramm zeigt sich, dass die männlichen Teilnehmenden keine Leistungen im Bereich von 21,00 bis 24,00 Punkten erreichen, dennoch punktet ein Großteil im Bereich von 15,00 bis 21,00 Punkten. Am häufigsten wird bei dieser zu untersuchenden Gruppe das Punkteintervall zwischen 11,00 und 12,00 Punkten getroffen; diese Aussage kann mit Hilfe des Kern-Dichteschätzers (Dichtekurve) untermauert werden. Diese Anhäufung in den Intervallen von 9,00 bis 12,00 und von 15,00 bis 21,00 Punkten führt auch zum dargestellten Bild im Boxplot; die Hälfte der Leistungen, welche von der männlichen Gruppe erzielt wird, liegt zwischen fast 10,00 und fast 17,00 Punkten; dieses Intervall ist bekanntlich durch den Interquartilabstand $d_Q = x_{0,75} - x_{0,25}$ definiert und graphisch durch die Schachtel im Boxplot bzw. durch das gestrichelte Intervall im Histogramm zu erkennen. Durch die deutlich höhere Anzahl der weiblichen Studierenden kann die symmetrischere Verteilung im Histogramm festgemacht werden; dies wird auch durch den Verlauf der Dichtekurve (Kern-Dichteschätzer) bestätigt. Ferner kann in der vergleichenden Boxplotgraphik festgehalten werden, dass die Leistungen der weiblichen Teilnehmenden insgesamt leicht besser sind; das Minimum, der Median und das Maximum (sowie der Mittelwert) fallen im Vergleich zur männlichen Vergleichsgruppe allesamt besser aus. Man muss hier aber die unterschiedliche Anzahl an Teilnehmenden bedenken und bei der Analyse berücksichtigen. Dieses doch relativ leistungsähnliche Ergebnis soll genauer aufgeschlüsselt werden. Es werden nun die arithmetischen Mittelwerte der Leistungen in den vier Einzeltests in tabellarischer Form dargestellt.

Tabelle 3.3: Mittelwerte der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom Geschlecht

Fach	weibliche Gruppe	männliche Gruppe
Algebra	18,72	18,53
Geometrie	11,16	10,48
Analysis	13,72	14,56
Stochastik	9,61	7,86

Nur im Teilgebiet Analysis kann die männliche Vergleichsgruppe einen besseren Mittelwert erreichen, im Gebiet Stochastik ist diese Gruppe im Mittel um fast zwei Punkte schwächer, was eine Erklärung für das leicht bessere Gesamtergebnis der weiblichen Testpersonen darstellt (keine signifikanten Unterschiede).

Es wird nun das Leistungsbild geschlechtsspezifisch für die beiden obigen Altersgruppen untersucht. In der jüngeren Vergleichsgruppe ergibt sich für den Mittelwert der vier Einzelfächer folgendes Bild:

$$\bar{x}_{\mathrm{m}} = 12{,}71 \text{ mit } n_{\mathrm{m}} = 6 \qquad \text{sowie} \qquad \bar{x}_{\mathrm{w}} = 14{,}14 \text{ mit } n_{\mathrm{w}} = 59;$$

für die Gruppe der älteren Studierenden ergibt sich:

$$\bar{x}_{\mathrm{m}} = 12{,}90 \text{ mit } n_{\mathrm{m}} = 25 \qquad \text{sowie} \qquad \bar{x}_{\mathrm{w}} = 12{,}29 \text{ mit } n_{\mathrm{w}} = 49.$$

Es ergeben sich signifikante Leistungsunterschiede zwischen den beiden weiblichen Gruppen (jüngere weibliche Studierende signifikant besser).

3.2.3 Abhängigkeit der Leistung vom Fachsemester

Die Personen, die an den Tests teilgenommen haben, sind hauptsächlich Studierende im ersten Fachsemester; ferner sind aber Studierende aus höheren Fachsemestern (ab dem dritten Fachsemester) an den Tests beteiligt gewesen. Durch die Einteilung in Studierende des ersten Fachsemesters und Studierende, die nicht im ersten Fachsemester sind, soll versucht werden zu klären, welchen Einfluss die Anzahl des Fachsemesters (Regressor) auf die Leistung (abhängige Variable) hat. Es wird an dieser Stelle wieder ein Diagramm mit der obigen Kombination aus Histogramm und Boxplot zur Erklärung verwendet.

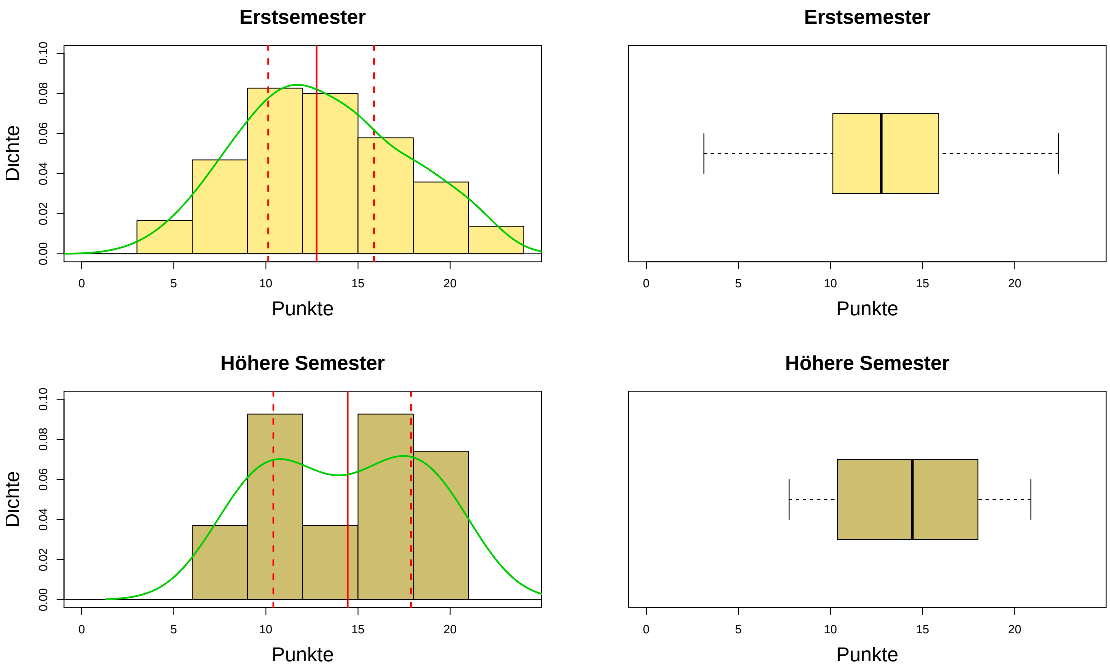

Abbildung 3.6: Histogramm und Boxplot für den Mittelwert der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom Fachsemester

Wie bereits geschildert, sind die Studierenden im ersten Fachsemester mit einer Anzahl von 121 Studierenden im Vergleich zu 18 Studierenden in der deutlichen Mehrheit; diese Zahlen sind auch in der folgenden Auswertung zu berücksichtigen. Eine andere Einteilung wäre wohl nicht sinnvoll. Mit Hilfe des Diagramms kann festgehalten werden, dass die mittleren 50 % der erzielten Leistungen zwischen etwa 10,00 und 16,00 Punkten (Erstsemester) und etwa 10,00 und 18,00 Punkten (höhere Semester) liegen. Die Studierenden in höheren Fachsemestern erreichen ein arithmetisches Mittel von 14,22, und es zeigt sich, dass kaum Ausreißer nach oben bzw. unten vorhanden sind. Dies ist natürlich auch der Tatsache geschuldet, dass die

Anzahl an Studierenden in dieser Gruppe sehr gering ist. Die Punkte verdichten sich im Histogramm vor allem im Intervall von 9,00 bis 12,00 Punkten als auch von 15,00 bis 21,00 Punkten. Die Erstsemester verbuchen ein leicht schwächeres Ergebnis. Sie zeigen im Mittel eine Leistung von 13,05 Punkten (im Vergleich zu 14,22) und auch die oben geschilderte Tatsache, welche die Schachtel im Boxplot zeigt, ist ein weiteres Indiz dafür. Diese Studierenden punkten auch in den Regionen ganz unten (3,00 bis 6,00 Punkte) und ganz oben (21,00 bis 24,00), dennoch ist der Bereich von 15,00 bis 21,00 Punkten nicht so ausgeprägt wie bei den Studierenden höherer Semester. Um einen Einblick in die Leistungen der vier Einzeltests zu erhalten, werden jeweils die Mittelwerte für beide Gruppen tabellarisch angeführt.

Tabelle 3.4: Mittelwerte der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom Fachsemester

Fach	erstes Fachsemester	höhere Fachsemester
Algebra	18,62	19,08
Geometrie	10,77	12,58
Analysis	13,72	15,14
Stochastik	9,10	10,06

Besonders in den Teilgebieten Geometrie und Analysis überzeugen die Studierenden höherer Semester im Vergleich zu den Erstsemestern, auch in den beiden anderen ist diese Gruppe besser. Für die Gruppe der höheren Fachsemester kann gemäß Normal-Quantil-Plot und auch durch Anwendung des Shapiro-Wilk-Test nicht von Normalverteilung ausgegangen werden. Damit ist eine zentrale Annahme für die Durchführung des parametrischen Welch-Tests nicht erfüllt. An dieser Stelle kann auf die nichtparametrische Alternative, den Wilcoxon-Rangsummentest, zurückgegriffen werden. Für beide Gruppen müssen, wie schon beim Welch-Test, unabhängige und identische Variablen vorliegen. In diesem Fall besitzen die beiden Gruppen stetige Verteilungsfunktionen mit gleicher Form, aber sie sind unter Umständen verschoben. Für einen zweiseitigen Test dieser Art werden die Hypothesen

$$H_0 : m_1 = m_2 \qquad \text{bzw.} \qquad H_1 : m_1 \neq m_2$$

formuliert, wobei m_1 der Median der Erstsemestergruppe bzw. m_2 der Median der Gruppe der Studierenden aus höheren Semestern ist [41, S. 446]. Nach Berechnung der zugehörigen Teststatistik können keine signifikanten Unterschiede zwischen den beiden Vergleichsgruppen auf dem (üblichen) 5 %-Fehlerniveau eruiert werden.

Es wird wiederum der Einfluss des Alters betrachtet: die jüngere Gruppe (unter 21 Jahre, 65 Personen) setzt sich aus 64 Erstsemesterstudierenden und einem Studierenden aus einem höheren Fachsemester zusammen. Die ältere Gruppe (mindestens

21 Jahre, 74 Personen) setzt sich aus 57 Erstsemesterstudierenden und 17 Studierenden aus einem höheren Fachsemester zusammen; für diese ergibt sich folgendes Leistungsbild:

$$\bar{x}_{\text{1. FS}} = 12{,}04 \text{ mit } n_{\text{1. FS}} = 57 \qquad \text{sowie} \qquad \bar{x}_{\text{höh. FS}} = 14{,}03 \text{ mit } n_{\text{höh. FS}} = 17.$$

Die Leistungsunterschiede in der Gruppe der älteren Studierenden (differenziert nach erstem bzw. höherem Fachsemester) sind jedoch nicht signifikant.

3.2.4 Abhängigkeit der Leistung vom studierten Lehramtstyp

Die Einteilung in die verschiedenen studierten Lehramtstypen ergibt eine Untergliederung der zu untersuchenden Gruppe von 23 Studierenden mit Lehramt an Grundschulen, 10 Studierenden mit Lehramt an Hauptschulen und 106 Studierenden mit Lehramt an Realschulen. Im Folgenden werden die üblichen Histogramme und die vergleichende Boxplotgraphik betrachtet. Dabei wird der Mittelwert aus allen vier Teilbereichen als vergleichendes Objekt zu Grunde gelegt.

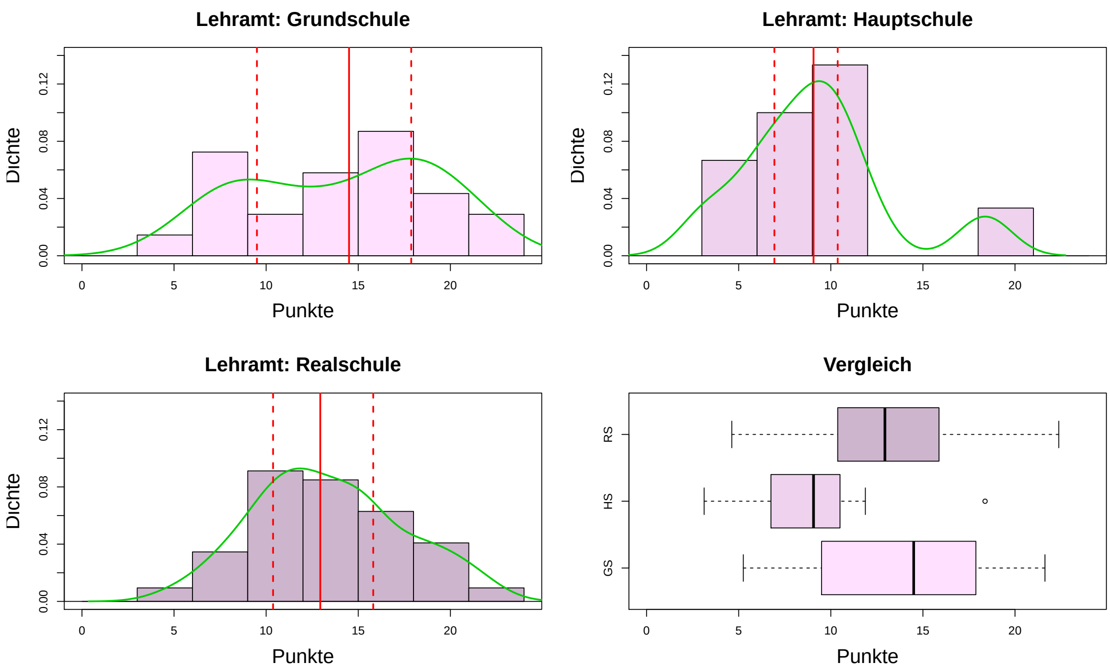

Abbildung 3.7: Histogramm und Boxplot für den Mittelwert der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom studierten Lehramtstyp

Zuerst werden die Bereiche festgehalten, in denen die mittlere Hälfte der erbrachten Leistungen liegt; dies ist der Bereich zwischen $x_{0,25}$ und $x_{0,75}$. Man erhält dabei für den Lehramtstyp Grundschule eine Spanne von etwa 9,50 bis 18,00 Punkten, für den Lehramtstyp Hauptschule einen Bereich von etwa 7,00 bis 10,00 Punkten und für die Studierenden des Realschullehramts ein Intervall von etwa 10,00 bis 16,00 Punkten. Daraus kann abgeleitet werden, dass die Studierenden mit Lehramt Grundschule die besten Leistungen erzielen, dicht gefolgt von den Personen mit Lehramt an Realschulen, deutlich schwächer liegen die Studierenden für das Lehramt an Hauptschulen; diese erzielen ein sehr schwaches Gesamtergebnis, was anhand des Histogramms und des Boxplots sofort zu erkennen ist. Im Histogramm ist die Anhäufung der Leistungen in einem Punktebereich von etwa 6,00 bis 12,00 Punkten festzustellen, was mit dem bereits oben festgehaltenen Ergebnis einhergeht. Ferner werden keine Leistungen von 12,00 bis 18,00 und 21,00 bis 24,00 Punkten erbracht und selten im Bereich von 18,00 bis 21,00 Punkten. Im Boxplot ist ein Ausreißer bei einer Punktzahl von etwa 19,00 Punkten festzustellen. Das Ergebnis für Lehramt Grundschule zeigt sich leicht besser als das für Lehramt Realschule. Im Histogramm ist zu erkennen, dass die Studierenden des Grundschullehramts häufiger Leistungen im Intervall von 15,00 bis 24,00 Punkten erbringen als die entsprechende Gruppe der Studierenden für das Lehramt an Realschulen. Im Boxplot wird das bessere Ergebnis mit einem größeren Median und trotz eines geringeren Maximums ebenso deutlich. Für die einzelnen vier Bereiche werden die jeweils erbrachten arithmetischen Mittel in Abhängigkeit vom Lehramtstyp betrachtet und analysiert.

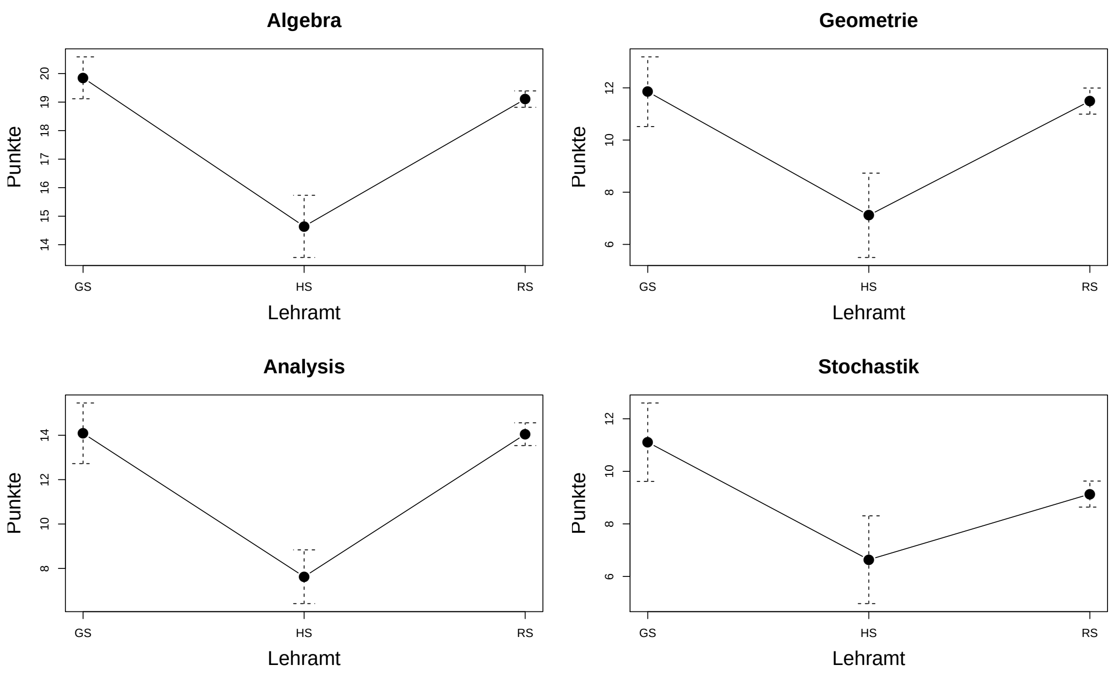

Abbildung 3.8: Mittelwertplot der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom studierten Lehramtstyp

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Grundschulgruppe die besten Mittelwerte in allen Fächern außer im Teilgebiet Analysis erreicht. Dennoch kann die Realschulgruppe ein ähnlich gutes Ergebnis verbuchen. Auffallend an dieser Graphik ist das schlechte Abschneiden der Hauptschulgruppe, welche in allen vier Bereichen deutlich schwächere Leistungen erbringt. Da in diesem Fall drei verschiedene Gruppen hinsichtlich ihrer Leistungsunterschiede induktiv untersucht werden, kann man die bisherigen Methoden wie Welch-Test und Wilcoxon-Rangsummentest nicht mehr verwenden, da diese nur für zwei Vergleichsgruppen konzipiert sind [5, S. 158]. Es wird eine einfaktorielle Varianzanalyse herangezogen. Eine Voraussetzung für den Einsatz dieser Methode ist die Varianzhomogenität in den drei Gruppen. Der obige Boxplot zeigt drei relativ symmetrische Verteilungen, der Ausreißer in der Hauptschulgruppe ist unbedenklich; man kann wohl von Varianzhomogenität ausgehen. Interferenzstatistisch kann man diese Annahme beispielsweise durch einen Bartlett-Test stützen; in diesem Fall ist die Nullhypothese die Varianzhomogenität in den drei Gruppen, also

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2,$$

die Alternativhypothese H_1 ist die Varianzheterogenität, also mindestens zwei Gruppen haben unterschiedliche Varianzen [53, S. 345]. Weitere Testmethoden für die Varianzhomogenität wären der Levene-Test bzw. der Fligner-Killeen-Test [82, S. 193]. Der Bartlett-Test bestätigt, wie bereits vermutet, dass von Varianzhomogenität in den Gruppen ausgegangen werden kann, da die obige Nullhypothese wegen $p > 0{,}30$ bei einer Fehlerwahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}20$ nicht abgelehnt werden kann [99, S. 29, S. 68]. Da ferner die abhängige Variable (Leistungen in den Testerhebungen) in den drei Gruppen normalverteilt ist, kann die Varianzanalyse mit dem F-Test durchgeführt werden. Für den F-Test wird

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \exists (i, j) \text{ für } i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ und } i \neq j \text{ mit } \mu_i \neq \mu_j$$

getestet, also die Gleichheit der Mittelwerte in den Gruppen Grundschule, Hauptschule und Realschule; Alternativhypothese ist damit, dass sich mindestens zwei Gruppen im Mittelwert unterscheiden. Im vorliegenden Fall wird die Nullhypothese verworfen, d.h. die Variabilität zwischen den drei Gruppen ist wesentlich größer als die Variabilität innerhalb der Gruppen [41, S. 503]. Damit liegen mindestens bei zwei Gruppen signifikant voneinander verschiedene Mittelwerte vor, aber es ist noch nicht klar, zwischen welchen. Mit Hilfe von Post-hoc-Tests kann nun geklärt werden, welche Gruppen sich in den Mittelwerten unterscheiden. Die Analyse mit einem Post-hoc-Test, der Tukeys HSD-Methode, liefert signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen Grund- und Hauptschule sowie Real- und Hauptschule. Bei dieser Methode werden paarweise Gruppenmittelwerte verglichen und bewertet [53, S. 347]. Eine andere Option ist, alle Mittelwerte paarweise mit t-Tests für unabhängige Stichproben zu vergleichen. In dieser multiplen Teststruktur liegt das Problem der α-Fehler-Kumulierung vor, da man k unabhängige Hypothesen auf dem α-Fehlerniveau testet. Abhilfe schafft die Bonferroni-Korrektur, indem für jede einzelne Hypothese $\frac{\alpha}{k}$ gewählt wird [50, S. 188]. Eine Alternative dazu stellt die Holm-Korrektur dar. Wendet man die Varianzanalyse mit F-Test gemäß des eben dargelegten Verfahrens auf die vier Einzelfächer an, kann man signifikante Unterschiede in den Gebieten Algebra und Analysis zwischen den Gruppen Grund- und Hauptschule sowie Real- und Hauptschule feststellen. In den beiden anderen Teildisziplinen resultieren dagegen keine signifikanten Auffälligkeiten.

Die Gruppe Lehramt Grundschule besteht aus 22 weiblichen und einem männlichen Studierenden sowie zehn Studierenden der jüngeren und 13 Studierenden der älteren Gruppe; betrachtet man die Gruppe Lehramt Realschule differenziert nach dem Geschlecht, so zeigen sich sehr ähnliche Ergebnisse im Mittelwert der vier Einzelfächer mit

$$\bar{x}_{\mathrm{m}} = 13{,}74 \;\text{ mit }\; n_{\mathrm{m}} = 26 \qquad \text{sowie} \qquad \bar{x}_{\mathrm{w}} = 13{,}28 \;\text{ mit }\; n_{\mathrm{w}} = 80.$$

3.2.5 Abhängigkeit der Leistung vom Kombinationsfach

Die Untersuchung analysiert die fachmathematischen Kenntnisse von Studierenden für das Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen. Dieser Abschnitt soll den Einfluss der Kombinations- bzw. Didaktikfächer beleuchten; dazu soll zuerst die Struktur der Kombinationsmöglichkeiten für die einzelnen Lehramtsrichtungen im Bundesland Bayern erläutert werden. Im Bereich des Grund- oder Hauptschullehramts wird ein Unterrichtsfach (mit fachwissenschaftlichen wie fachdidaktischen Aspekten) studiert (hier Mathematik), dieses wird durch drei Didaktikfächer ergänzt, welche sich unterschiedlich zusammenstellen lassen. Studierende für das Lehramt an Realschulen (und Gymnasien) setzen sich fachlich mit zwei Unterrichtsfächern auseinander, wobei im vorliegenden Fall eines Mathematik ist. Alle Lehramtsrichtungen werden ferner durch das erziehungswissenschaftliche Studium komplettiert. Im Folgenden werden nur die Kombinationsfächer für die größte Gruppe, Lehramt Realschule, analysiert. Für die beiden anderen Schultypen ist eine spezielle Untersuchung der Didaktikfächer nicht sinnvoll, da einerseits die Gruppengrößen sehr klein sind und andererseits die unterschiedlichen Konstellationen innerhalb der drei Didaktikfächer keine konzeptionelle Gruppierung zulassen. Für das Lehramt an Realschulen werden die beliebtesten Kombinationsfächer Chemie (22 Studierende), Deutsch (18 Studierende), Physik (22 Studierende), Religion (11 Studierende) und Wirtschaftswissenschaften (15 Studierende) untersucht und leistungsmäßig miteinander verglichen (mögliches Erweiterungsfach wird nicht berücksichtigt). Einen ersten Eindruck für die Leistungen der einzelnen Gruppen geben ein Boxplotdiagramm und eine Tabelle mit charakteristischen Lagemaßen.

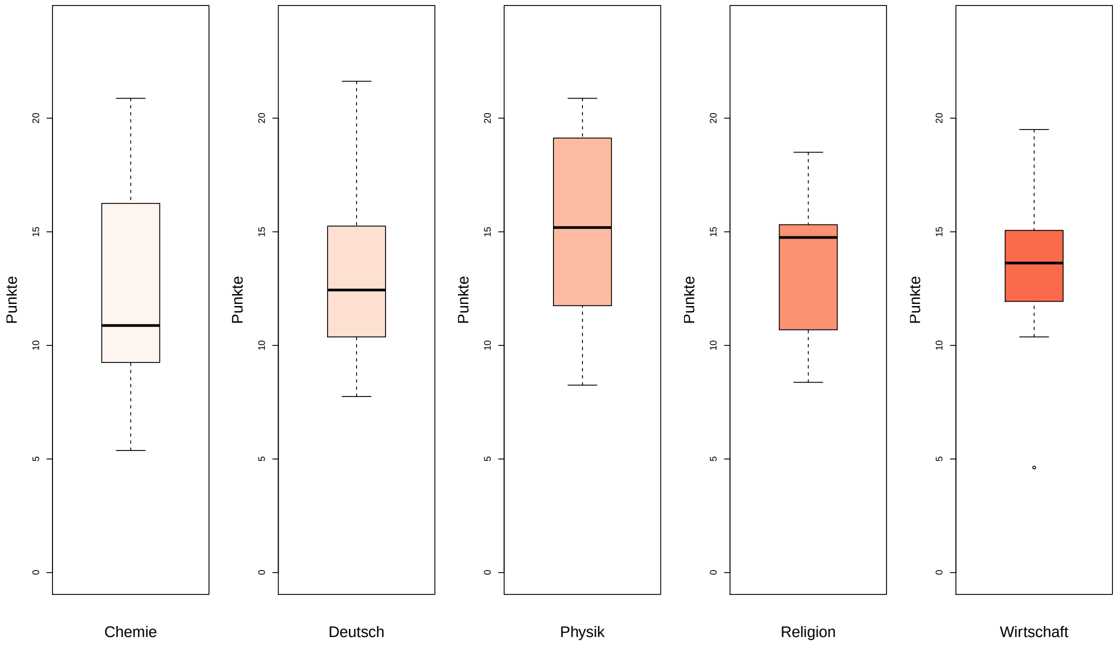

Abbildung 3.9: Boxplot für den Mittelwert der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom Kombinationsfach

Tabelle 3.5: Lagemaße für den Mittelwert der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom Kombinationsfach

Lagemaße	Chemie	Deutsch	Physik	Religion	Wirtschaft
$x_{0,25}$	9,25	10,44	11,78	10,69	11,94
x_{med}	10,88	12,44	15,19	14,75	13,62
$\bar{x}$	12,12	12,91	15,33	13,43	13,40
$x_{0,75}$	16,00	14,75	19,03	15,31	15,06
Anzahl	22	18	22	11	15

Die deskriptiven Kenngrößen bestätigen, dass die Gruppe Physik am besten abschneidet; in fast allen Lagemaßen zeigt diese Gruppe die stärksten Ergebnisse; dagegen weist die Chemiegruppe mit Ausnahme des 75 %-Quantils die schwächsten Leistungen auf. Die Gruppen Religion und Wirtschaft verzeichnen mittelmäßige Ergebnisse, die Gruppe Deutsch vergleichsweise schwache. Als induktive Untersuchungsmethode würde sich wie beim studierten Lehramtstyp eine Varianzanalyse mit F-Test anbieten, da fünf Gruppen hinsichtlich signifikanter Unterschiede untersucht werden sollen. Im vorliegenden Fall ist aber die Annahme, dass die endogene Variable (Leistungen in den vier Testerhebungen) in allen Gruppen normalverteilt ist, nicht gegeben, weswegen eine zentrale Annahme für die Durchführung der Varianzanalyse verletzt ist. Wie schon bei der Betrachtung des Regressors Fachsemester kann man auf eine nichtparametrische Option zurückgreifen. Beim Leistungsvergleich zwischen den Gruppen erstes Fachsemester und höhere Fachsemester lag ebenfalls nicht in beiden Gruppen hinsichtlich der Leistung Normalverteilung vor, weswegen der parametrische Mittelwertvergleich mit Hilfe des Welch-Tests nicht realisiert werden konnte. In diesem Fall konnte die nichtparametrische Alternative, der Wilcoxon-Rangsummentest, angewendet werden. Die entsprechende nichtparametrische Variante der Varianzanalyse ist der Kruskal-Wallis-Test [99, S. 95]. Da dieser Test eine Verallgemeinerung des Wilcoxon-Rangsummentests ist, müssen die zu untersuchenden Gruppen für die abhängige Variable stetige Verteilungsfunktionen mit gleicher Form aufweisen, die aber unter Umständen verschoben sind. Für einen zweiseitigen Test dieser Art wird die Hypothese

$$H_0 : m_1 = \ldots = m_5$$

gegen

$$H_1 : \exists(i, j) \text{ für } i, j \in \{1, \ldots, 5\} \text{ und } i \neq j \text{ mit } m_i \neq m_j$$

formuliert, wobei jeweils die Mediane der fünf Gruppen untersucht werden. Die Berechnung der zugehörigen Teststatistik liefert, dass signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen vorliegen. Eine Post-hoc-Untersuchung liefert signifikante Leistungsunterschiede zwischen den Gruppen Physik und Chemie sowie Physik und Deutsch. Ergänzend werden Boxplots für die vier Einzelfächer angeführt.

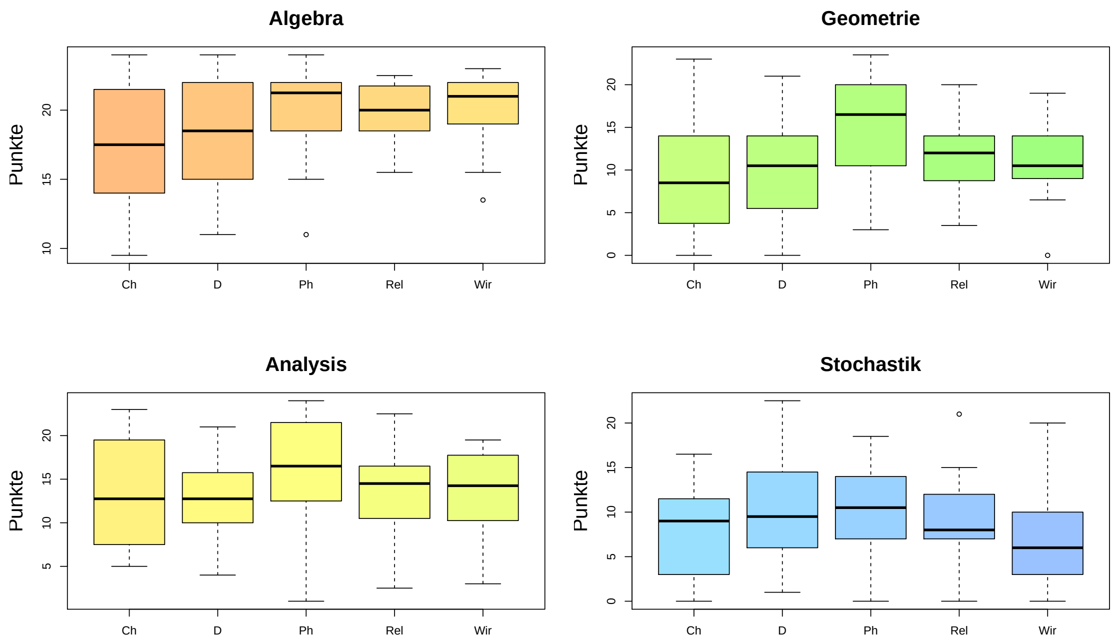

Abbildung 3.10: Boxplot der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom Kombinationsfach

Es zeigen sich dabei folgende Auffälligkeiten:

- In Algebra ergeben sich starke Leistungen für die Gruppen Physik, Religion und Wirtschaft, schwache Leistungen hingegen für die anderen Gruppen.
- Die Gruppe Physik erzielt sehr gute Leistungen in Geometrie und Analysis, die Gruppen Religion und Wirtschaft liegen im Mittelfeld, Chemie und Deutsch erbringen schwache Ergebnisse.
- Prägnante Ergebnisse liefert das Fach Stochastik: es zeigen sich starke Leistungen für die Gruppe Deutsch, schwache Leistungen hingegen für die Gruppe Wirtschaft.

3.2.6 Abhängigkeit der Leistung von der Art der Hochschulreife

In diesem Abschnitt werden die Leistungen der Studierenden anhand ihrer erlangten Hochschulreife untersucht. Insgesamt weisen 128 der Teilnehmenden allgemeine und elf Teilnehmende fachgebundene Hochschulreife auf. Im ausgegebenen Fragebogen waren auch die Optionen für Fachhochschulreife oder sonstige Hochschulzugangsberechtigungen gegeben, diese wurden jedoch kein einziges Mal vermerkt. Das folgende Diagramm liefert einen Vergleich zwischen den Leistungen der beiden Gruppen.

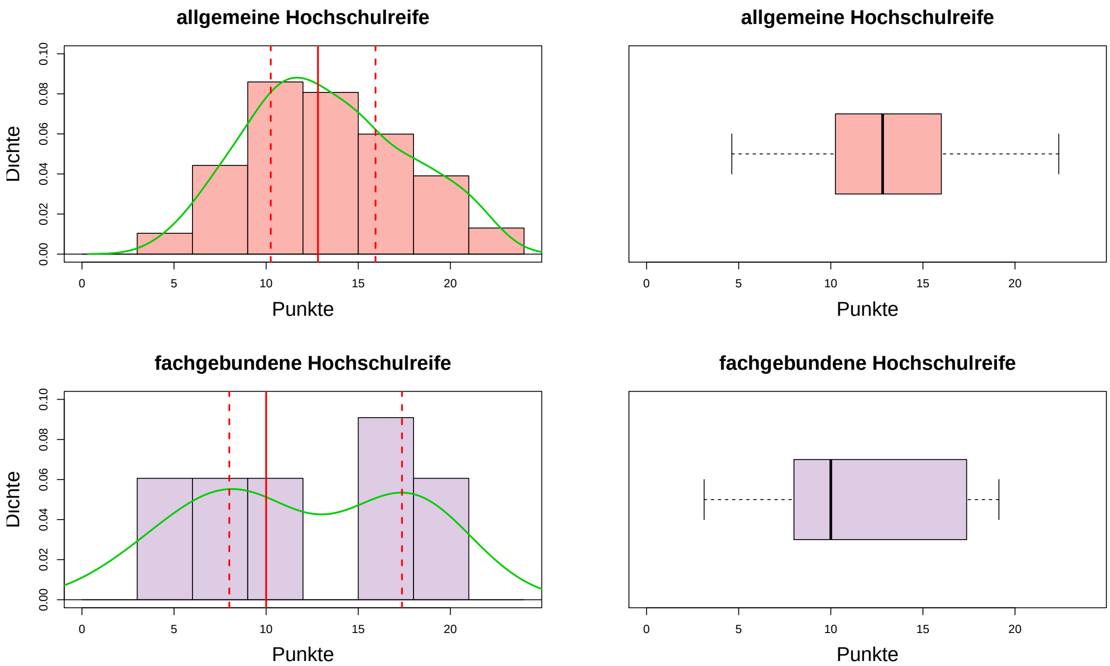

Abbildung 3.11: Histogramm und Boxplot für den Mittelwert der vier Einzelfächer in Abhängigkeit der Hochschulreife

Insgesamt treten keine nennenswerten Unterschiede zwischen den beiden zu vergleichenden Gruppen auf. Auffallend sind die Lücken im Histogramm und die breite Schachtel im Boxplot für die Gruppe fachgebundene Hochschulreife; dies erklärt sich aber mit der geringeren Anzahl an Teilnehmenden in dieser Gruppe. Die Verteilung der Punkte im Histogramm für die Gruppe der Studierenden mit allgemeiner Hochschulreife ist relativ symmetrisch. Die mittleren 50 % der erzielten Leistungen liegen bei der Gruppe mit allgemeiner Hochschulreife zwischen etwa 10,00 und 16,00 Punkten; dieser Bereich ist mit etwa 7,00 bis 17,00 Punkten bei der Vergleichsgruppe breiter. Für die vier Einzelfächer können folgende Ergebnisse festgestellt werden: Im Teilgebiet Algebra zeigen sich relativ ähnliche Ergebnisse, dies gilt für die anderen Fächer nicht. Für die Teildisziplin Analysis weist die Gruppe mit allgemeiner Hochschulreife ein arithmetisches Mittel von $\bar{x} = 14{,}12$ auf und die mittleren 50 % der erzielten Leistungen liegen zwischen 10,00 und 19,00 Punkten; dagegen erzielt die Vergleichsgruppe ein arithmetisches Mittel von $\bar{x} = 11{,}45$ und die mittleren 50 % der erzielten Leistungen liegen zwischen etwa 4,00 und 17,00 Punkten. Im Teilgebiet Geometrie ergeben sich ähnliche arithmetische Mittelwerte, aber differierende Interquartilabstände. Mit einer Differenz von etwa zwei Punkten bezüglich des arithmetischen Mittels im Gebiet Stochastik ist die Gruppe mit allgemeiner Hochschulreife besser als ihre Vergleichsgruppe. Die Durchführung des zweiseitigen Welch-Tests liefert weder in einer Einzeldisziplin noch im Mittelwert zwischen den beiden Vergleichsgruppen signifikante Unterschiede. Die nötigen Annahmen für die Durchführung des Tests wurden sorgfältig geprüft, vor allem in Hinblick auf die Normalverteilungsannahme in der Gruppe fachgebundene Hochschulreife mit einer Gruppengröße von elf Personen. Die Ergebnisse lassen den Schluss zu, dass der Prädikator Art der Hochschulreife keine entscheidende Einflussgröße auf die abhängige Variable (Leistungen in den Testerhebungen) ist.

3.2.7 Abhängigkeit der Leistung vom Bundesland bzw. Land, in dem das Abitur erlangt wurde

Die Studierenden, die ihr Abitur im Bundesland Bayern erworben haben, sind deutlich in der Mehrheit. Diese Verteilung ist so zu erwarten, was durch zwei Sachverhalte begründet werden kann. Ein Grund ist, dass das Lehramtsstudium für Grund-, Haupt- oder Realschulen in jedem Bundesland und fast allen Universitäten fächerdeckend studiert werden kann; dabei sind größtenteils keine Zulassungsbeschränkungen für die Fächer vorhanden. Ein weiterer Grund ist, dass nach Beendigung des Studiums (mit dem Ersten Staatsexamen) und des Referendariats (mit dem Zweiten Staatsexamen) die Anstellung als Lehrkraft relativ stark auf das Bundesland fokussiert ist; viele der Studierenden werden eine Tätigkeit als Lehrkraft in Bayern anstreben wollen. Etwa 91 % der Studierenden (127 Personen) haben ihre Hochschulreife in Bayern erlangt; die größte sonstige Gruppe stammt aus Baden-

Württemberg (sechs Personen), die Aufteilung wird durch Schleswig-Holstein (2 Personen) und je einer Person aus Hessen, England, Ungarn und USA komplettiert. Aufgrund der Verteilung werden die Gruppen Bayern (Studierende mit bayerischer Hochschulreife) und Sonstige, die alle Teilnehmenden beinhaltet, welche ihre Hochschulreife in den übrigen Bundesländern bzw. Ländern erworben haben, miteinander verglichen; Histogramm und Boxplot für beide Gruppen vergleichen den Mittelwert der vier Einzelfächer.

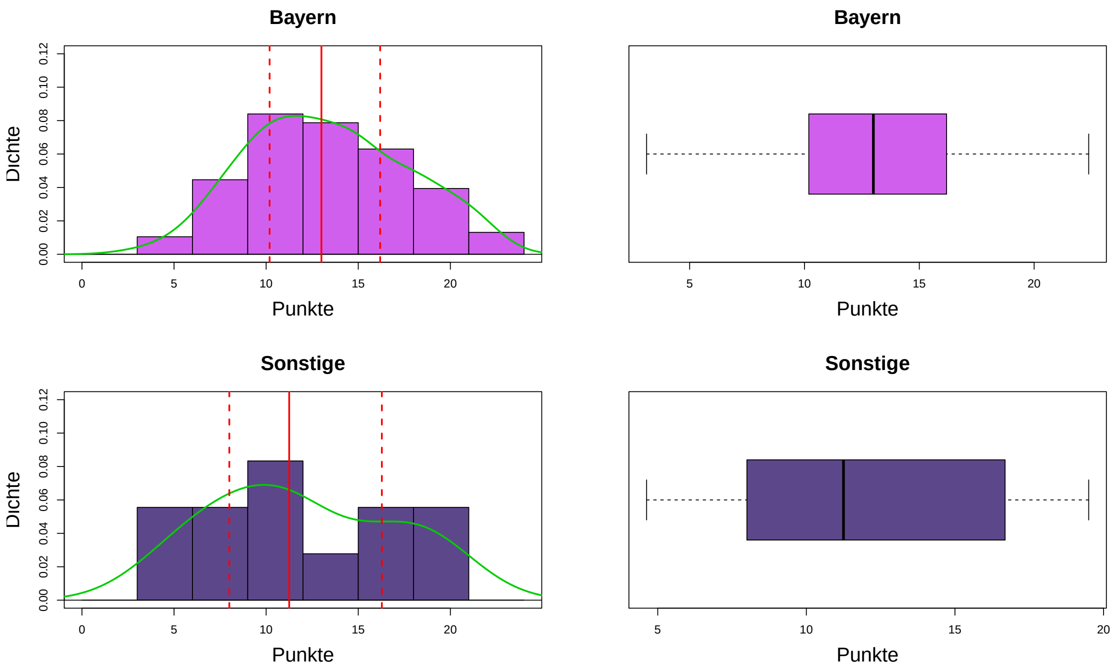

Abbildung 3.12: Histogramm und Boxplot für den Mittelwert der vier Einzelfächer in Abhängigkeit vom Land

Es können keine auffallenden Leistungsunterschiede festgestellt werden; der deutlich größere Interquartilabstand $d_Q = x_{0,75} - x_{0,25}$ für die sonstige Gruppe ist der geringen Gruppengröße geschuldet. Festzuhalten ist, dass die Gruppe Bayern bezüglich des arithmetischen Mittels ($\bar{x}_{\text{Bay}} = 13{,}32$ zu $\bar{x}_{\text{Sonst}} = 11{,}94$) sowie des Medians ($x_{med_{\text{Bay}}} = 13{,}00$ zu $x_{med_{\text{Sonst}}} = 11{,}25$) leicht bessere Leistungen zeigt, dennoch sind die Unterschiede auf dem 5 %-Niveau nicht signifikant, was aus dem p-Wert der Teststatistik des durchgeführten Welch-Tests hervorgeht. Beim arithmetischen Mittel ergeben sich für die Fächer Algebra, Geometrie und Stochastik relativ gleiche Ergebnisse, was den oben beschriebenen Sachverhalt bestätigt, dass für beide Gruppen im Mittelwert der vier Testergebnisse keine signifikanten Unterschiede vorliegen. Im Fach Analysis erzielen die Studierenden mit bayerischer Hochschulzugangsberechtigung signifikant bessere Leistungen, belegt zum einen deskriptiv an einer Mittelwertdifferenz von fast vier Punkten sowie zum anderen induktiv am p-Wert mit $p = 0{,}037$ der Teststatistik des zugehörigen Welch-Tests.

3.2.8 Abhängigkeit der Leistung vom mathematischen Schwerpunkt der Schulbildung

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der mathematischen Schwerpunktsetzung in der Schullaufbahn analysiert. Es werden die Gruppen Leistungskurs (LK), Grundkurs (GK), Fachoberschule (FOS), Berufsoberschule (BOS) und die sonstige Gruppe untersucht. Die 102 Studierenden mit Gymnasialbildung verteilen sich mit 52 Leistungskurs- und 50 Grundkursbesucherinnen und -besucher gleichmäßig und bilden die beiden personenstärksten Gruppen. Ferner ergibt sich mit 16 Teilnehmenden für die FOS-Gruppe, 14 Teilnehmenden für BOS-Gruppe und sechs sonstigen Teilnehmenden die komplette Verteilung. Für die Analyse der Einzelfächer wird ein vergleichendes Boxplotdiagramm sowie eine Tabelle mit den arithmetischen Mittelwerten für jedes Einzelfach und jede Gruppe betrachtet.

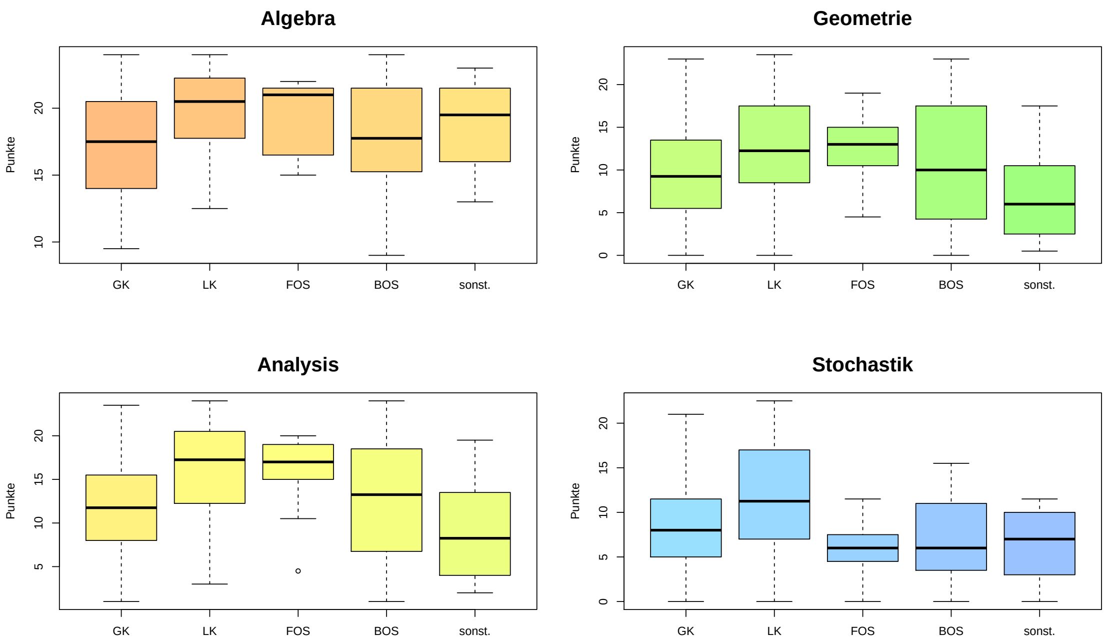

Abbildung 3.13: Boxplot der vier Einzelfächer in Abh. vom math. Schwerpunkt

Tabelle 3.6: Mittelwerte der vier Einzelfächer in Abh. vom math. Schwerpunkt

Fach	Gymnasium	GK	LK	FOS	BOS	sonst.
Algebra	18,76	17,44	19,89	19,29	17,81	18,75
Geometrie	11,20	9,60	12,46	12,28	10,75	7,16
Analysis	13,97	11,87	16,09	15,93	13,03	9,25
Stochastik	10,06	8,44	11,71	5,82	7,09	6,42
Mittelwert	13,50	11,84	15,04	13,33	12,17	10,40
Anzahl	102	50	52	14	16	6

Auffallend ist das schlechte Abschneiden des Grundkurses im Gesamtbild der Gruppe Gymnasium; die LK-Gruppe zeigt sich in jedem Teilgebiet und auch im Mittelwert signifikant besser als die GK-Gruppe. Die FOS-Gruppe kann in allen Teilgebieten mit Ausnahme der Stochastik mit der LK-Gruppe mithalten, fällt aber in genau diesem Teilgebiet signifikant gegen die LK-Gruppe ab. Mit ähnlichen und im Gesamtaspekt betrachtet eher schwachen Ergebnissen können die GK-Gruppe sowie die BOS-Gruppe festgehalten werden. Die Gruppe Sonstige soll hier aufgrund ihrer geringen Gruppengröße nicht weiter berücksichtigt werden. Für die zu untersuchenden Gruppen wird eine einfaktorielle Varianzanalyse mit F-Test durchgeführt. Die Varianzhomogenität ist gemäß Bartlett-Test und Levene-Test für die vier Vergleichsgruppen anzunehmen, da die Nullhypothese dieser Tests,

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2,$$

auf einem Fehlerniveau von $\alpha = 0{,}20$ nicht abgelehnt wird [99, S. 29, S. 68]. Ebenso kann die Normalverteilung für die abhängige Variable (Leistung in den Einzeltests sowie in deren Mittelwert) angenommen werden; dies kann zum einen visuell anhand von Normal-Quantil-Plots als auch induktiv anhand von Shapiro-Wilk-Tests bestätigt werden. Die Berechnung der Teststatistik des zugehörigen F-Tests der einfaktoriellen Varianzanalyse sowie anschließender differenzierter Post-hoc-Betrachtung bestätigt die oben beschriebenen signifikanten Unterschiede.

Die Gruppe Grundkurs setzt sich aus elf männlichen und 39 weiblichen Studierenden zusammen, das arithmetische Mittel hinsichtlich des Alters liegt bei 20,96 Jahren. Ein ähnliches Bild ergibt sich für Leistungskursgruppe mit 12 männlichen und 40 weiblichen Studierenden und einem Durchschnittsalter von 20,73 Jahren; für die FOS-Gruppe ist das durchschnittliche Alter relativ ähnlich mit zwei männlichen und 14 weiblichen Studierenden. Für die BOS-Gruppe ergibt sich ein deutlich höheres Durchschnittsalter mit 25,44 Jahren, die geschlechtsspezifische Aufteilung ist ähnlich wie in der FOS-Gruppe.

3.2.9 Abhängigkeit der Leistung vom bisherigen Bildungsweg

Dieser Abschnitt behandelt nur kurz den Einfluss des bisherigen Bildungsweges der Studierenden auf die Leistung, da die gegebenen Gruppen (Studium, Beruf, sonstige, Schule) sehr ähnliche Leistungen aufweisen. Die Stichprobe teilt sich auf in 106 Personen, die direkt von der Schule kommen und ihr Studium beginnen, sowie in 24 Personen, die angeben, schon einen Beruf ausgeübt zu haben; die Teilnehmenden mit Studium (fünf Personen) bzw. die sonstige Gruppe (drei Personen) finden aufgrund des geringeren Stichprobenumfangs keine Berücksichtigung bei der Analyse. Vergleicht man die beiden Gruppen Beruf und Schule miteinander, können keine besonderen Unterschiede festgestellt werden; auf eine graphische Darstellung der Leistungen wird an dieser Stelle verzichtet.

3.2.10 Abhängigkeit der Leistung von der Priorität der Fächer

Ebenso können bei der Analyse, welchen Stellenwert das Fach Mathematik innerhalb der gewählten Fächerkombination besitzt, keine auffälligen Ergebnisse hinsichtlich des Leistungsbilds festgestellt werden. 80 Studierende sprechen dem Fach Mathematik die höhere Priorität innerhalb ihrer Fächerkombination zu, 54 Studierende messen ihren Fächern die gleiche Priorität zu. Zu vernachlässigen sind dabei die vier Studierenden, welche dem Kombinationsfach bzw. den Didaktikfächern die höhere Priorität zuschreiben. Es zeigen sich in den vier Einzelfächern kaum Leistungsunterschiede zwischen den Vergleichsgruppen mit höherer bzw. gleicher Priorität, weswegen wiederum auf eine graphische Darstellung verzichtet wird.

3.2.11 Abhängigkeit der Leistung vom Besuch des Brückenkurses

Vor Beginn des Wintersemesters 2010/11 wurde für die Studierenden ein Brückenkurs angeboten, der Schulinhalte vom höheren Standpunkt der Universitätsmathematik behandelt und mathematische Denk- und Arbeitsweisen gefördert und damit keine Stoffinhalte des ersten Fachsemesters vorweggenommen hat. Etwa ein Drittel der Testteilnehmenden hat diesen Brückenkurs besucht, der auf freiwilliger Basis angeboten wurde und in der vorlesungsfreien Zeit stattgefunden hat. Auch hier kann zwischen den beiden Gruppen in keinem Einzelfach eine Auffälligkeit herausgearbeitet werden. Das Teilnehmerfeld des Brückenkurses setzt sich wohl aus engagierten und auch leistungsmäßig recht starken Studierenden einerseits sowie andererseits leistungsmäßig eher schwachen Lernenden zusammen. Die starken Studierenden kommen wohl aus Interesse dem Angebot nach, die eher schwächeren der Option, manche Lücken aus dem Schulwissen schließen zu können; das breite Mittelfeld der Studierenden wird womöglich durch den Kurs nicht so intensiv angesprochen. Die geschilderten Aspekte sind ein Indiz für die sehr homogenen Leistungen der beiden Vergleichsgruppen; damit nimmt auch die exogene Variable Teilnahme am Brückenkurs keinen entscheidenden Einfluss auf die abhängige Variable (Leistungen der Studierenden); wiederum wird auf eine graphische Darstellung der Leistungen verzichtet.

3.2.12 Zusammenfassung des Einflusses der Regressoren auf die abhängige Variable

Als Zusammenfassung des Einflusses der Regressoren auf die abhängige Variable wird eine multiple lineare Regression mit der Responsevariablen „Mittelwert der Leistungen aus den vier Vorwissenstests“ und den bisher geschilderten erklärenden Variablen durchgeführt. An dieser Stelle sei an die zweite Forschungsfrage (bzw. an einen Teilaspekt) erinnert:

> **Forschungsfrage 2 (Teilaspekt 1)**: Welchen Einfluss nehmen exogene Variablen (persönliche und studienbezogene Voraussetzungen) auf das Vorwissen der Studierenden in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik?

Die folgenden Darstellungen sollen die Ergebnisse zu diesem Teilaspekt der zweiten Forschungsfrage zusammenfassen. Betrachtet wird im Folgenden nur der Mittelwert der vier Einzeldisziplinen.

Für die metrische Zielgröße Y „Mittelwert der Leistungen aus den vier Vorwissenstests“ stehen die kategorialen Einflussgrößen

- X_1: Alter,
- X_2: Geschlecht,
- X_3: Fachsemester,
- X_4: Studierter Lehramtstyp,
- X_5: Kombinations- und Didaktikfächer,
- X_6: Art der Hochschulreife,
- X_7: Bundesland, in dem das Abitur erlangt wurde,
- X_8: Mathematischer Schwerpunkt,
- X_9: Bisheriger Bildungsweg,
- X_{10}: Priorität der Fächer,
- X_{11}: Teilnahme am Brückenkurs,

für die Modellbildung zur Verfügung. Kategoriale Regressoren mit k Kategorien $1, \ldots, k$ werden durch $k-1$ Dummy-Variablen kodiert, wobei k die Referenzkategorie ist [41, S. 34]. Für die Zielgröße Y gilt das Regressionsmodell (die Aufschlüsselung in Dummy-Variablen ist hier der Übersichtlichkeit halber nicht notiert)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X_1 + \ldots + \beta_{11} \cdot X_{11} + \varepsilon$$

mit der Responsevariable Y, den erklärenden Variablen $X_1, \ldots, X_{11}$, den Regressionskoeffizienten $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{11}$ sowie dem normalverteilten Fehlerterm ε mit Mittelwert 0 und gleicher Varianz. Für die erwarteten Werte von Y gilt die Regressionsgleichung

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot X_1 + \ldots + \hat{\beta}_{11} \cdot X_{11}.$$

Die Regressionsparameter werden mit der Kleinste-Quadrate-Schätzung aus der Stichprobe ermittelt [53, S. 293]. Wichtig sind nun die Annahmen für den Fehlerterm, der durch die Residuen (vergleicht man den beobachteten Y-Wert mit dem durch das Modell geschätzten $\hat{Y}$-Wert, erhält man das Residuum [123, S. 174]) geschätzt wird, zu überprüfen. Im vorliegenden Fall kann für ε Normalverteilung mit Mittelwert 0 und Homoskedastizität angenommen werden, was durch folgende Graphik gestützt wird [41, S. 489], [82, S. 228], [50, S. 212-213].

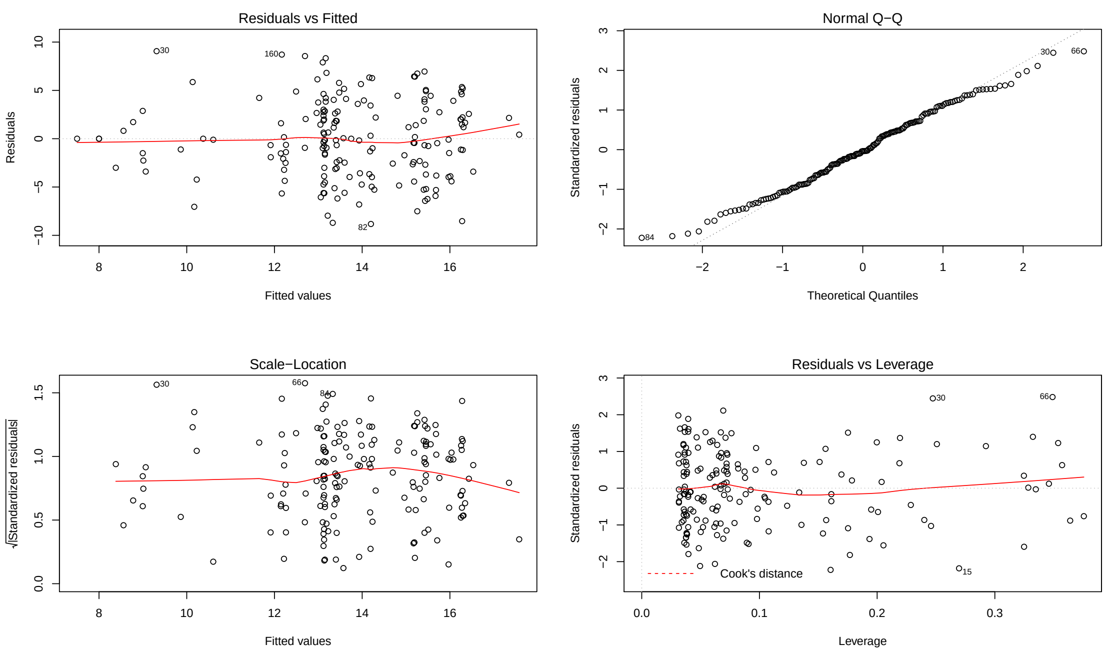

Abbildung 3.14: Darstellungen für die Annahme von Homoskedastizität und Normalverteilung für den Fehlerterm

Mit dem Omnibus F-Test soll überprüft werden, ob die Regressoren überhaupt zur Aufklärung der Zielgröße beitragen; es wird also

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_{11} = 0 \qquad \text{gegen} \qquad H_1 : \exists j \text{ für } j \in \{1, \ldots, 11\} \text{ mit } \beta_j \neq 0$$

getestet; die F-Statistik steht in enger Beziehung zum Bestimmtheitsmaß [41, S. 484]. Für das multiple Modell wird danach versucht, eine Modellselektion zu realisieren, da zum einen Einfachheit (möglichst wenig Parameter), aber gleichzeitig auch Komplexität (guter Erklärungswert des Modells anhand eines hohen Bestimmtheitsmaßes bzw. des adjustierten Bestimmtheitsmaßes) für das Modell vorliegen sollen. Dazu verwendet man die schrittweise Regression durch Rückwärtsauswahl, d.h. man geht von allen elf erklärenden Variablen $X_1, \ldots, X_{11}$ aus; im nächsten Schritt wird dann jede Einflussgröße einzeln weggelassen und das Modell bewertet. Dieses Verfahren wird als F-to-remove-Test bezeichnet [99, S. 120]. Schließlich wird das Modell gewählt, welches den kleinsten AIC-Wert aufweist; der AIC-Wert (Akaike Information Criterion) ist ein Maß für die Qualität der Anpassung beruhend auf dem Maximum-Likelihood-Ansatz [50, S. 214]. Nach der Berechnung ist das Modell mit den Einflussvariablen X_4: Studierter Lehramtstyp, X_5: Kombinations- und Didaktikfächer und X_8: Mathematischer Schwerpunkt als beste Anpassung gewählt worden. Damit folgt aber, dass die übrigen Regressoren wie unter anderem Alter, Geschlecht, Art der Hochschulreife usw. keine entscheidenden Variablen im multiplen linearen Regressionsmodell darstellen. Daher wird im reduzierten Modell der Anteil der Variation der Zielgröße Y durch die multiple lineare Regression besser erklärt als im umfangreichen Ausgangsmodell. Zur gleichen Modellannahme gelangt man auch mit Hilfe einer Varianzanalyse mit partiellen F-Tests mit der Nullhypothese

$$H_0: \text{ einfacheres Modell mit } \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$$

und der Alternative

$$H_1: \text{ komplexeres Modell mit } \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k \text{ und zusätzlich } \beta_{k+1}, \ldots, \beta_{k+p};$$

die partiellen F-Tests dienen zur Bewertung, welcher Verlust im Erklärungswert bezüglich der Komplexität an Parametern noch zu vertreten ist [53, S. 299]. Dabei wird stets über das adjustierte Bestimmtheitsmaß argumentiert, da das gewöhnliche Bestimmtheitsmaß mit der Anzahl der Prädikatoren steigt; das adjustierte Bestimmtheitsmaß wird so definiert, dass dieser Effekt nicht eintritt; daher wird diese Maßzahl zum Vergleich von Modellen bei der Prüfung mit partiellen F-Tests gewählt [50, S. 208]. Zusammenfassend stellt das Modell mit den Einflussvariablen

- X_4: Studierter Lehramtstyp,
- X_5: Kombinations- und Didaktikfächer,
- X_8: Mathematischer Schwerpunkt

die beste Anpassung dar, es wird der Anteil der Variation der Zielgröße Y am besten erklärt mit einem adjustierten Bestimmtheitsmaß von $R^2_{\text{adj.}} = 0{,}66$.

3.3 Angaben zu Studien- und Berufswahlmotiven (StudienanfängerInnen WS 10/11)

Dieser Abschnitt analysiert den zweiten Teil des Fragebogens, und zwar die Studien- und Berufswahlmotive der Studierenden mit dem Unterrichtsfach Mathematik (Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen). Damit werden im Folgenden Ergebnisse für einen weiteren Teilaspekt der zweiten Forschungsfrage skizziert, da als exogene Variablen an dieser Stelle Studien- und Berufswahlmotiven thematisiert werden.

> **Forschungsfrage 2 (Teilaspekt 2)**: Welchen Einfluss nehmen exogene Variablen (Studien- und Berufswahlmotive) auf das Vorwissen der Studierenden in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik?

Für diesen Abschnitt werden zum einen Ergebnisse für den Einfluss der erklärenden Variablen (Studien- und Berufswahlmotive) auf das Vorwissen geschildert und zum anderen diese gewonnenen Ergebnisse diskutiert und interpretiert.

Die Aspekte der Studien- und Berufswahlmotive sind im Fragebogen (auf 24 Fragen) wie folgt unterteilt:

- Studieninteresse (drei Fragen),
- Gründe für das Unterrichtsfach Mathematik (fünf Fragen),
- intrinsische Studienwahlmotive (zwei Fragen),
- extrinsische Studienwahlmotive (sechs Fragen),
- intrinsische Berufswahlmotive (vier Fragen),
- extrinsische Berufswahlmotive (vier Fragen).

Der erste Punkt, das Studieninteresse, bezieht sich auf Einflüsse von allgemeinen Studienaspekten; diese betreffen nicht nur das Unterrichtsfach Mathematik und bilden daher auch einen übergeordneten Einstieg. Daraufhin werden explizit Fragen herangezogen, die Gründe für das Unterrichtsfach Mathematik beleuchten sollen. Die übrigen vier Kategorien analysieren Studien- und Berufswahlmotive und zwar differenziert nach intrinsischen und extrinsischen Aspekten. Es soll eine kurze Begriffseingrenzung für intrinsische und extrinsische Motivation dargestellt werden. Deci und Ryan schildern in ihrer Selbstbestimmungstheorie, dass Personen intrinsisch und extrinsisch motiviert sein können. Die intrinsische Motivation ist ein

Trend, Herausforderungen zu suchen und die eigenen Fähigkeiten zu beweisen [32, S. 225]. Wird eine Handlung oder Tätigkeit durch äußere Faktoren bedingt, um beispielsweise nicht sanktioniert zu werden, handelt es sich um extrinsische Motivation [32, S. 225]. Auf den Hintergrund und die Intention der jeweiligen Fragen wird beim entsprechenden Unterabschnitt eingegangen.

Die Angaben der Studierenden werden im Fragebogen mit endpunktbestimmten Skalen mit je sechs Punkten erfasst (keine Position in der Mitte). Damit müssen die Studierenden eine Entscheidung treffen und der Aussage zustimmen bzw. nicht zustimmen. Dieser Aspekt wird auch genutzt, um eine gewisse Kategorisierung zu erlangen. Gruppiert werden die unteren drei Skalenpunkte zu „keine Zustimmung" sowie die oberen drei Skalenpunkte zu „Zustimmung". Diese Einteilung erscheint sinnvoll, da durch die gerade Anzahl an Skalenpunkten eine Zweiteilung in negativ und positiv angeboten wird. Diese beiden Gruppen werden für jede Frage deskriptiv mit vergleichenden Histogrammen und Boxplots sowie induktiv mit Hilfe von Welch-Test bzw. Wilcoxon-Rangsummentest verglichen und analysiert. Betrachtet wird im Folgenden lediglich der Mittelwert der vier Einzelfächer, da eine Fächeraufschlüsselung den Rahmen und auch die Übersichtlichkeit sprengen würde.

3.3.1 Studieninteresse

Die erste zu betrachtende Facette der Studien- und Berufswahlmotive ist das Studieninteresse. Dieser Aspekt erstreckt sich im Fragebogen auf drei Fragen; diese erfassen,

- inwiefern das Studium den persönlichen Neigungen entspricht (F12),
- ob das Studium die Persönlichkeit positiv beeinflusst (F13) und
- welchen Stellenwert die Studieninhalte bereits früher hatten (F14).

Das nachfolgende Säulendiagramm zeigt für diese drei Fragen jeweils die absoluten Häufigkeiten der gegebenen Tendenzen der Studierenden. Gruppiert werden nachfolgend die Skalenpunkte „$- - -$" (= trifft gar nicht zu), „$- -$" und „$-$" zu „keine Zustimmung" und „$+$", „$++$" und „$+++$" (= trifft völlig zu) zu „Zustimmung".

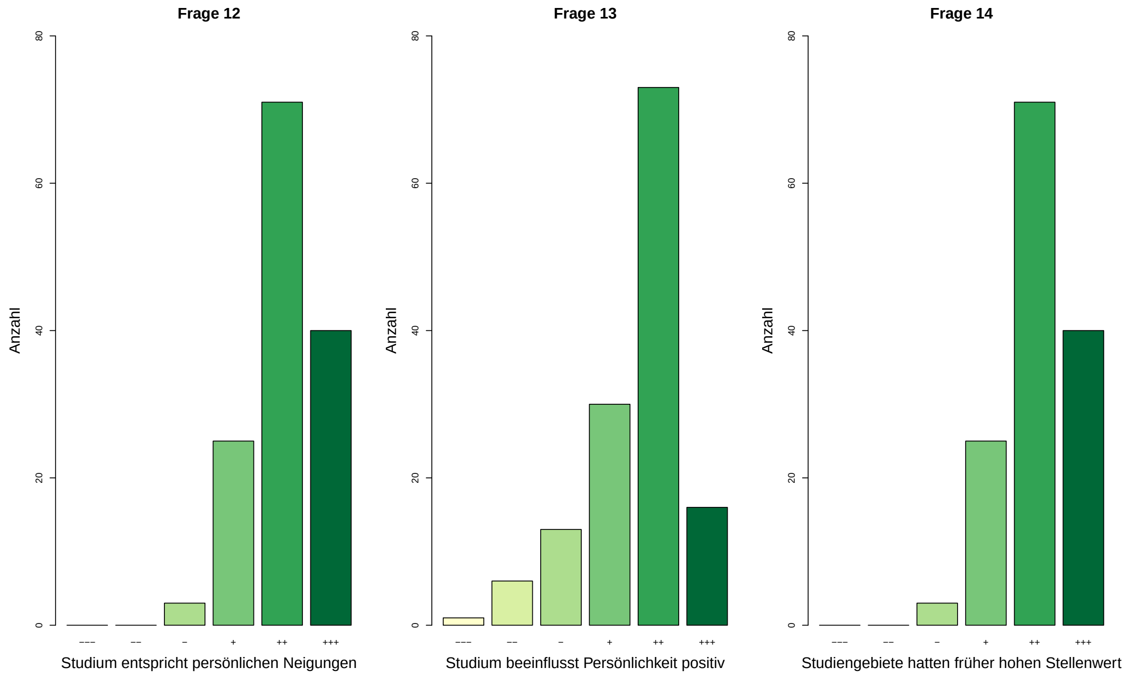

Abbildung 3.15: Antworthäufigkeiten für die Fragen 12 - 14

Frage 12. Das Studium soll Ihren persönlichen Neigungen entsprechen

Es wird der Frage nachgegangen, ob das gewählte Studium den persönlichen Neigungen entspricht. Gewählt wird diese Frage, da sie für eine rationale Studienwahl grundlegend erscheint. Die Studierenden bejahen diese Frage fast vollkommen, nur drei Studierende haben eine negative Tendenz gewählt. Obwohl fast 98 % der Befragten dieser Aussage zustimmen, überzeugt deren Leistung in den Tests nicht vollkommen, was doch verwunderlich für diese positive Auslegung ist. Der zu analysierende Zusammenhang zwischen Studium und persönlichen Neigungen bezieht sich auch stark auf das Unterrichtsfach Mathematik, da es gut ein Drittel des Studiums der Befragten tangiert. Die Daten der letzten Jahre zeigen aber einen beständigen Anstieg der Studienanfängerinnen und Studienanfänger im Fach Mathematik für das Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen; dieser scheint eher ein Indiz für das breitere Spektrum an Fächerkombinationen und die besseren Berufschancen mit dem Fach Mathematik zu sein als für die steigenden persönlichen Neigungen. Die oben beschriebenen mittelmäßigen Leistungen der Gruppe Zustimmung können der folgenden Graphik entnommen werden.

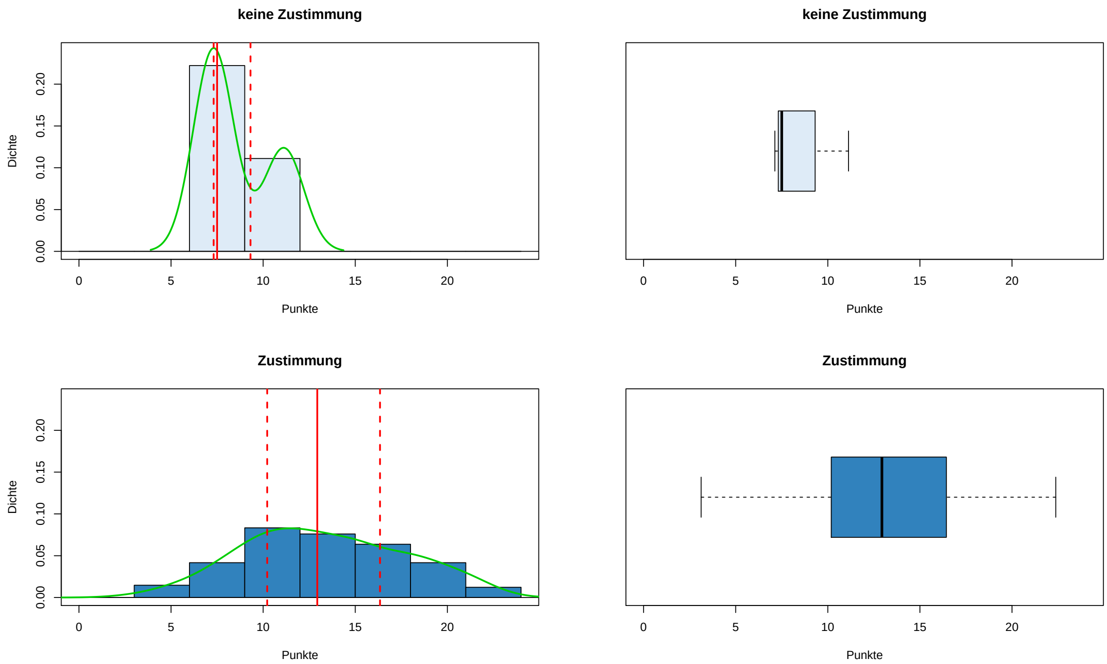

Abbildung 3.16: Histogramm und Boxplot für die beiden Gruppen bzgl. Frage 12

Die Graphik für die Gruppe „keine Zustimmung“ (drei Personen) zeigt, dass drei Teilnehmende Leistungen in einem Bereich zwischen 6,00 und 12,00 Punkten erzielen, was zu einem Mittelwert von $\bar{x} = 8{,}58$ führt. Die Vergleichsgruppe weist mit einem arithmetischen Mittel und einem Median von etwa 13,00 Punkten keine herausragenden Ergebnisse auf, dennoch bessere. Die induktive Statistik zeigt keine signifikanten Unterschiede, obwohl die arithmetischen Mittelwerte um etwa fünf Punkte voneinander abweichen; dies liegt am sehr geringen Stichprobenumfang der dieser Aussage nicht zustimmenden Gruppe.

Frage 13. Das Studium soll Ihre Persönlichkeit positiv beeinflussen

Diese Frage versucht den Einfluss des Studiums auf die Persönlichkeit zu analysieren. Das Wort Persönlichkeit hat seine Wurzeln im lateinischen Wort „persona“, was die Bezeichnungen Rolle und Charakter hat. Eine psychologische Begriffsabgrenzung liefert unter anderem Allport [3]:

> „Persönlichkeit ist die dynamische Ordnung derjenigen psychophysischen Systeme im Individuum, die seine einzigartigen Anpassungen an seine Umwelt bestimmen.“ [3, S. 49].

Die Begründung schließt sich der von Frage 12 an, die auch elementare Aspekte für die Studienwahl abgedeckt. Etwa sechs Siebtel der Befragten glauben an die oben erwähnten positiven Einflüsse, allerdings zweifeln auch 20 Personen, ob dieses Studium und damit auch das Fach Mathematik ihr Selbstbewusstsein bzw. ihr Selbstwertgefühl stärken wird. Die Leistungen beider Gruppen zeigt nun das folgende Diagramm.

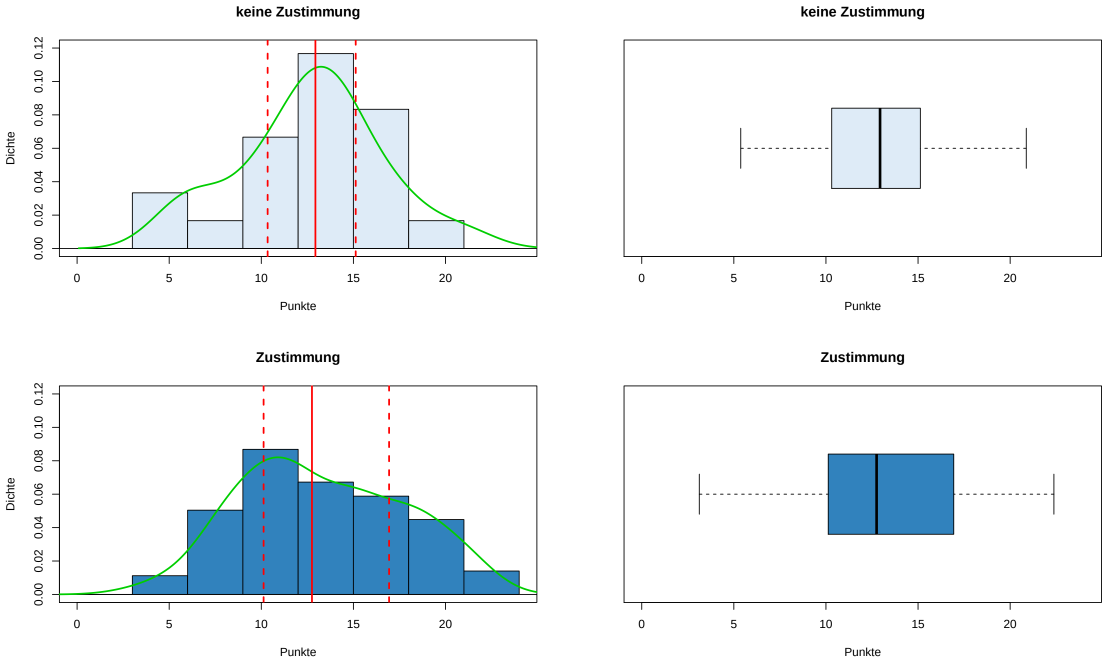

Abbildung 3.17: Histogramm und Boxplot für die beiden Gruppen bzgl. Frage 13

Die Mittelwerte $\bar{x} = 12,65$ (keine Zustimmung, 20 Personen) und $\bar{x} = 13{,}29$ (Zustimmung, 119 Personen) weichen kaum voneinander ab (der Median ist bei der Gruppe „keine Zustimmung“ sogar größer); ferner liegen die mittleren 50 % der erzielten Leistungen in einem Bereich von etwa 10,00 bis 15,00 bzw. 10,00 bis 17,00 Punkten, was die Schachtel im Boxplot sowie die rot gestrichelten Linien im Histogramm zeigen. Die deskriptiven Merkmale beschreiben ein relativ ausgeglichenes Ergebnis für beide Gruppen (keine signifikanten Unterschiede).

Frage 14. Bereits vor Studienbeginn hatten die gewählten Studiengebiete einen hohen Stellenwert für Sie

Die gewählten Studieninhalte sollen für eine durchdachte Studienentscheidung einen hohen Stellenwert haben, da die studierten Fächer (ohne auf pädagogische und psychologische wie didaktische Aspekte einzugehen) bereits in der Schule präsent waren und sich damit Präferenzen abzeichnen konnten. Wie schon bei Frage 13 bejahen gut 85 % der Studierenden diese Frage und deuten damit an, dass auch das

Fach Mathematik bereits während ihrer Schulzeit eine starke Rolle eingenommen hat. Die Leistungen beider Gruppen werden nun graphisch veranschaulicht.

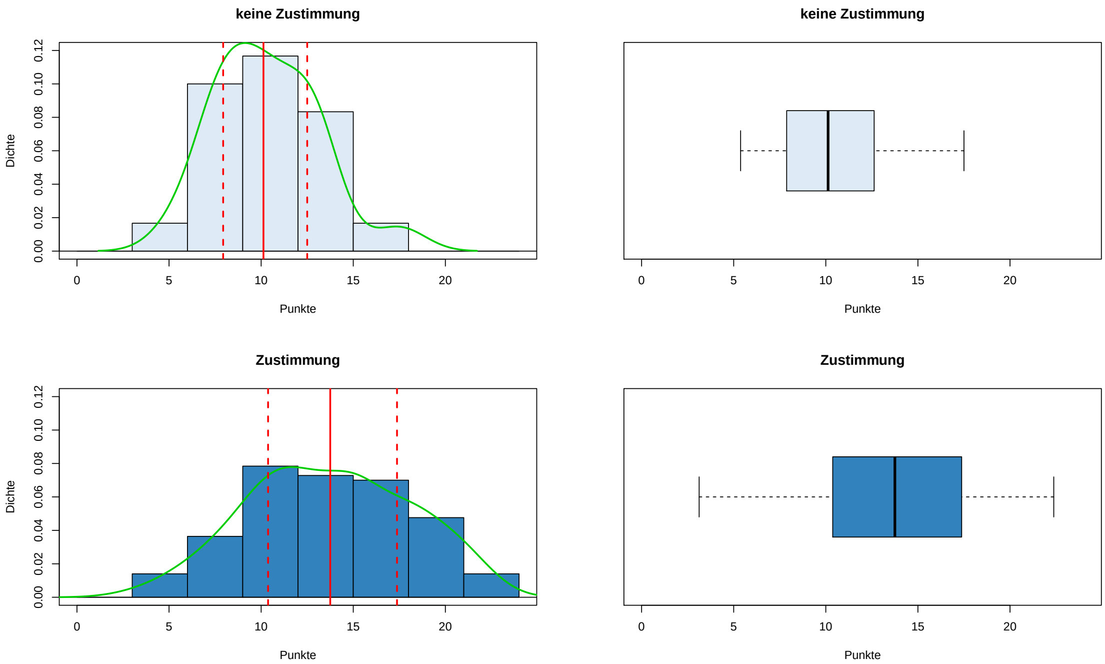

Abbildung 3.18: Histogramm und Boxplot für die beiden Gruppen bzgl. Frage 14

Auffallend ist, dass das 25 %-Quantil $x_{0,25}$ der Gruppe „Zustimmung" etwa mit dem Median x_{med} der Gruppe „keine Zustimmung" zusammentrifft. Dies kann man anhand der beiden Schachteln im Boxplot erkennen, da die dicke Linie des Medians (keine Zustimmung) über dem linken Schachtelende (Zustimmung) liegt. Ferner kann man dies auch an den rot gestrichelten Linien der Quartilergänzung im Histogramm erkennen. Lagemaße wie x_{med} und $x_{0,75}$ sind für die Gruppe „Zustimmung" deutlich höher, insgesamt sind die Unterschiede signifikant (Wilcoxon-Rangsummentest). Der hohe bzw. niedrige Stellenwert für das Fach Mathematik spiegelt sich im Leistungsbild wieder.

3.3.2 Gründe für das Unterrichtsfach Mathematik

In diesem Unterabschnitt werden verschiedene Aspekte für die Begründung der Wahl des Unterrichtsfaches Mathematik betrachtet. Es werden folgende Motivationsgründe für das Unterrichtsfach Mathematik fokussiert:

- Motivation durch die Qualität des Mathematikunterrichts (F15),
- durch Lehrkräfte (F16),

- durch mathematische Lehrinhalte (F17),
- durch die eigenen Begabungen und Fähigkeiten im Fach Mathematik (F18),
- durch den logischen Charakter des Faches Mathematik (F19).

In folgendem Säulendiagramm sind die absoluten Häufigkeiten der sechs Skalenpunkte für jede der fünf Fragen dargestellt.

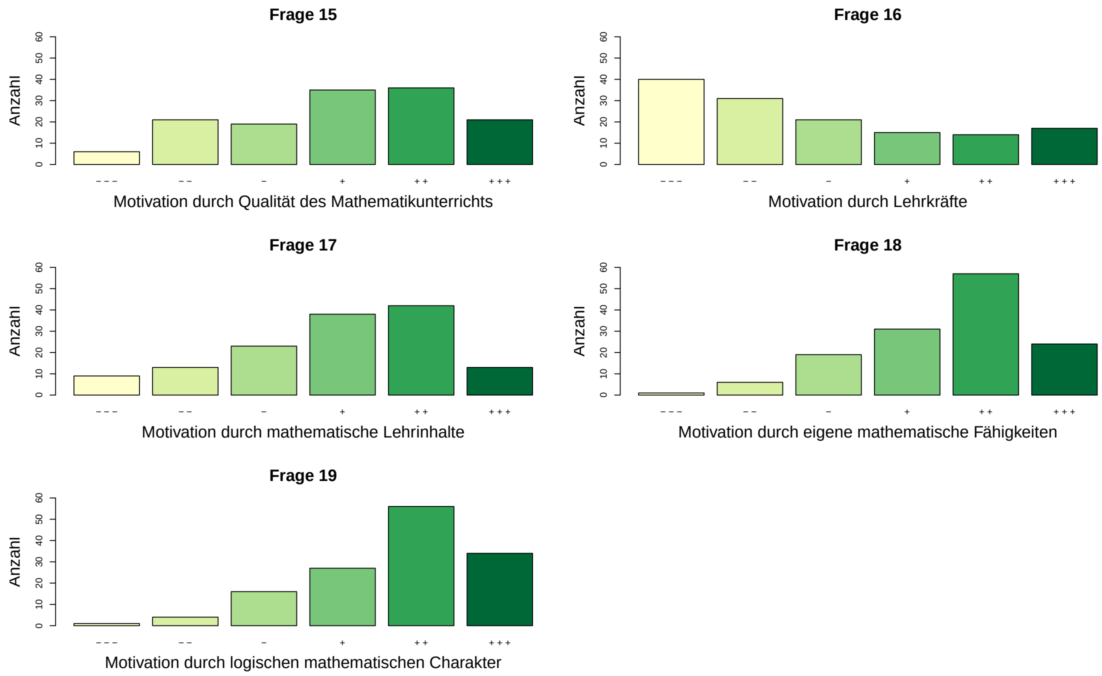

Abbildung 3.19: Antworthäufigkeiten für die Fragen 15 - 19

Frage 15. Die Qualität des Mathematikunterrichts hat Sie zu Ihrer Studienwahl motiviert

An dieser Stelle soll zuerst ein eigener Versuch der Begriffsbeschreibung für die Qualität des Unterrichts aus Schülersicht bzw. Sicht der Studierenden angeführt werden. Diese erstreben für sich optimale Ergebnisse bei möglichst geringem eigenem Arbeitsaufwand ergänzt durch Hilfestellungen der Lehrkraft und zielgerichteter Vorbereitung auf die Prüfung. Eine pädagogische Definition für Unterrichtsqualität liefert Meyer [85]:

> „Guter Unterricht ist ein Unterricht, in dem im Rahmen einer demokratischen Unterrichtskultur auf der Grundlage des Erziehungsauftrags und mit dem Ziel eines gelingenden Arbeitsbündnisses eine sinnstiftende Orientierung und ein Beitrag zur nachhaltigen Kompetenzentwicklung aller Schülerinnen und Schüler geleistet wird.“ [85, S. 13].

Der Gehalt des Mathematikunterrichts kann aufgrund seiner täglichen Präsenz sicher ein Beweggrund für die Studienwahl sein; dies zeigt sich daran, dass etwa zwei Drittel der Studierenden der Meinung sind, der Mathematikunterricht mit seiner Qualität hat sie zu ihrer Studienwahl bewogen. Dieser Teil der Studierenden zeigt auch die deutlich stärkeren Leistungen.

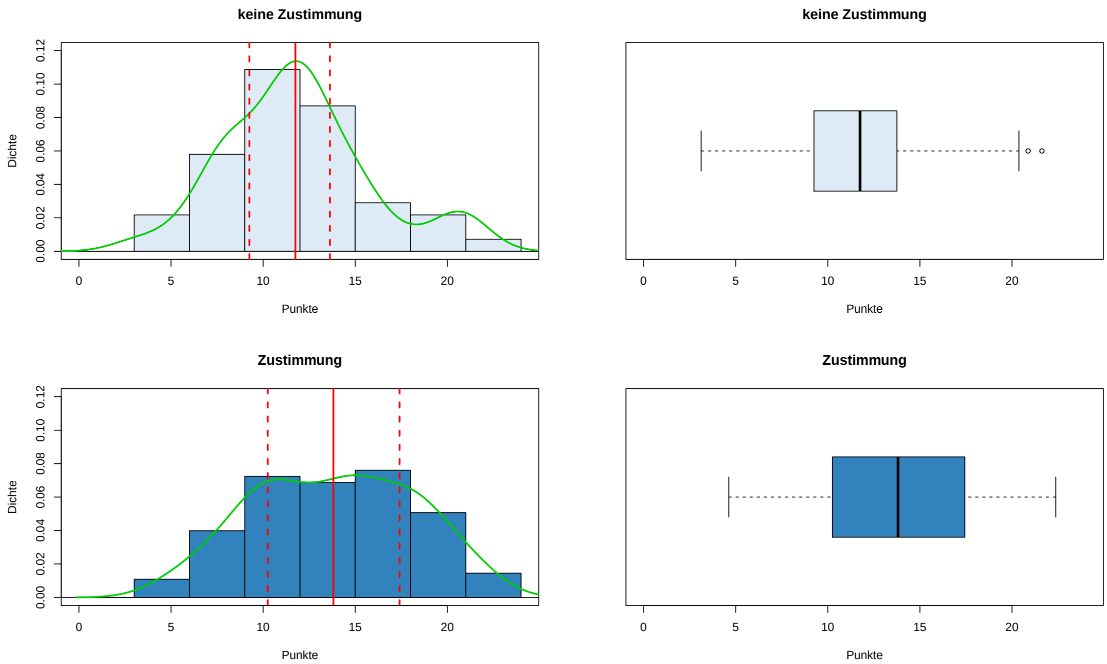

Abbildung 3.20: Histogramm und Boxplot für die beiden Gruppen bzgl. Frage 15

Die Zustimmenden liegen bezüglich des Mittelwerts $\bar{x}$ und des Medians x_{med} etwa jeweils zwei Punkte über den entsprechenden Werten der verneinenden Gruppe. Kennzeichnende Unterschiede werden auch an den beiden differierenden Interquartilabständen mit $d_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 17{,}41 - 10{,}25 = 7{,}16$ (Zustimmung) und $d_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 13{,}62 - 9{,}25 = 4{,}37$ (keine Zustimmung) deutlich; ferner seien die zwei Ausreißer im Boxplot in der Gruppe „keine Zustimmung“ erwähnt, die sich rechts vom oberen Whisker zeigen (mit 20,88 und 21,63 Punkten). Es werden also auch vereinzelt sehr gute Leistungen bei den Ablehnenden dieser Frage erzielt. Dennoch können die deskriptiv beschriebenen Leistungsunterschiede auch induktiv bestätigt werden (Welch-Test).

Frage 16. Lehrkräfte haben Sie zu Ihrer Studienwahl bewogen

Erstaunlicherweise dreht sich jetzt die Anzahl für Zustimmung bzw. keine Zustimmung im Vergleich zu Frage 15 exakt um; so ergeben sich nun für 92 Personen keine Zustimmung und für 46 Personen Zustimmung. Es scheint daher, dass die Studierenden wenig persönliche Motivation durch die Lehrkräfte für die Wahl des Faches Mathematik erhalten (nur ein Drittel Zustimmung). Eine schwedische Studie zeigt ein interessantes Ergebnis, welches die Fragen 15 und 16 betrifft. Die Studie, veröffentlicht in der Februarausgabe 2011 der Zeitschrift Geo, stellt einen starken Zusammenhang zwischen der Qualität von Lehrkräften und des Unterrichts heraus [70]. Zwei Drittel der Studierenden sind durch qualitativ anspruchsvollen Mathematikunterricht zu ihrer Studienwahl motiviert (Frage 15), ein Drittel hingegen durch die Lehrkraft (Frage 16). Somit ist die Qualität des Mathematikunterrichts der deutlich stärker gewichtete Faktor für die Studienwahlmotivation im Fach Mathematik. Die beiden Gruppen (bei Frage 16) zeigen sehr ähnliche Leistungen, auf ein Diagramm wird in diesem Fall verzichtet.

Frage 17. Mathematische Lehrinhalte haben zu Ihrer Studienwahl geführt

Die Verteilung in beiden Vergleichsgruppen ist ähnlich wie in Frage 15; wieder bejahen zwei Drittel diese Frage. Die Zustimmung ist ein Indiz, dass die mathematischen Lehrinhalte in der Schule verstanden wurden und nun weitergegeben werden wollen. Dies scheint ein solides Fundament zu sein, um im Studium darauf aufzubauen. Die Zustimmenden zeigen leicht bessere, aber keine signifikant stärkeren Ergebnisse. Auch in diesem Fall wird auf eine Vergleichsgraphik verzichtet.

Frage 18. Ihre Fähigkeiten und Begabungen im Fach Mathematik haben die Studienwahl veranlasst

Fähigkeiten und Begabungen im studierten Fach können als Grundvoraussetzung für ein erfolgreiches Studium formuliert werden. Es liegen mit 26 (keine Zustimmung) und 112 (Zustimmung) stark differierende Stärken in den beiden Gruppen vor; eine Zustimmung in einem Bereich von etwa 80 % war zu erwarten. Grund dafür ist, dass man wohl ein Fach bzw. Fachgebiet studiert, in dem man bereits seine Fähigkeiten und Stärken bewiesen hat. Die Leistungen der beiden Untersuchungsgruppen werden nun graphisch dargestellt.

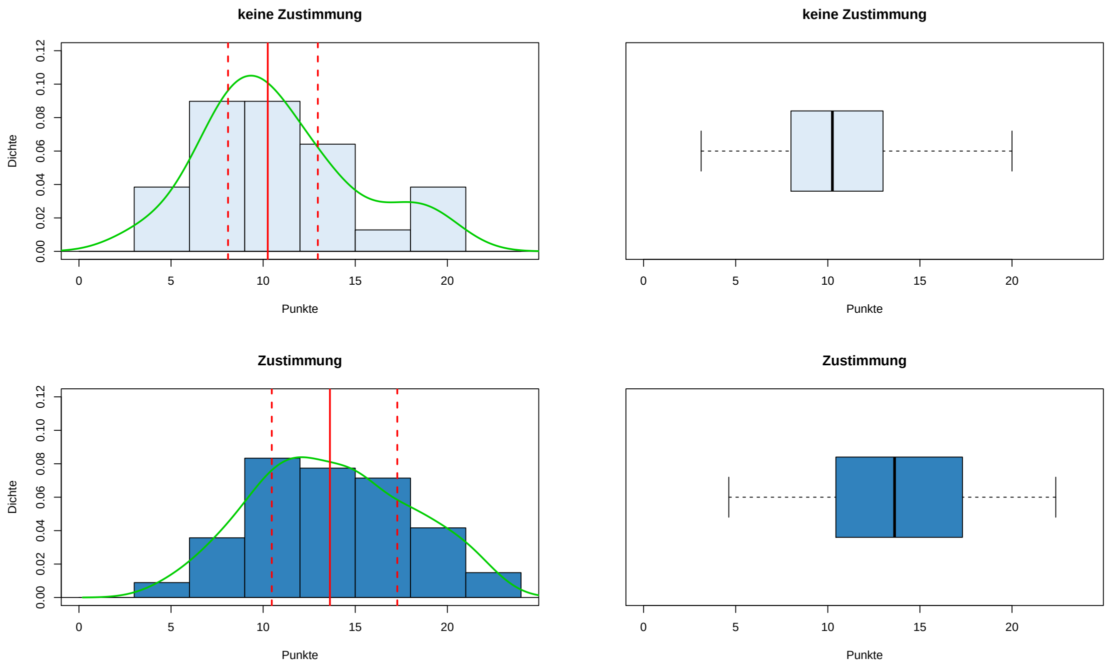

Abbildung 3.21: Histogramm und Boxplot für die beiden Gruppen bzgl. Frage 18

In den beiden relativ symmetrischen Verteilungen (gekennzeichnet durch jeweils annähernd gleiche Werte für $\bar{x}$, x_{med} und x_{mod} (Modalwert)) zeigen sich auf den ersten Blick Leistungsunterschiede. Die zustimmende Gruppe punktet stärker in den Bereichen 15,00 bis 18,00 und auch 21,00 bis 24,00 Punkte und weist zudem in allen Lagemaßen bessere Werte auf; beispielsweise wird die schwächere Gruppe bezüglich $\bar{x}$ und x_{med} jeweils um etwa drei Punkte übertroffen. Es ergeben sich signifikante Leistungsunterschiede zwischen den Gruppen. Das Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten und vor allem wohl die richtige Selbsteinschätzung für die eigenen Begabungen spielen bei der Klärung, welche Variablen einen Einfluss auf die untersuchte Leistung im Schulwissen nehmen, eine aussagekräftige Rolle. Abschließend muss man noch einen Gedanken aufgrund 20 % Ablehnender anbringen; wenn 26 Studierende den Zusammenhang zwischen Begabung und der Studienwahl für das Lehrfach Mathematik verneinen, so müssen wohl andere Motive wie beispielsweise günstige Berufsaussichten und Mangel an anderen Kombinationsfächern (es gibt Unterrichtsfächer, die fast ausschließlich mit dem Fach Mathematik kombinierbar sind) im Vordergrund stehen.

Frage 19. Der logische Charakter der Mathematik hat Sie für die Studienwahl überzeugt

Das Fach Mathematik genießt wie kaum ein anderes Fach einen hohen Stellenwert wegen seines logischen Charakters und seiner Exaktheit. Ein Beleg dafür ist das Zitat des französischen Physikers und Mathematikers Carnot:

> „Die erste Regel, an die man sich in der Mathematik halten muss, ist exakt zu sein. Die zweite Regel ist, klar und deutlich zu sein und nach Möglichkeit einfach." [101, S. 3].

Dieser Aspekt kann die Studienwahl durchaus begünstigen; dies zeigt sich auch bei der Verteilung der Antworten. Mit fast 85 % herrscht fast völlige Zustimmung. Die Gruppe „Zustimmung" weist für die beiden Kennwerte $\bar{x}$ und x_{med} jeweils drei Punkte Vorsprung auf; induktiv kann aber kein signifikanter Unterschied aufgezeigt werden. Betrachtet man die personenstarke Gruppe „Zustimmung" differenziert, so ergeben sich aber signifikant bessere Leistungen für die Gruppe, die völlig zustimmt ($+ + +$; 34 Personen) im Vergleich zur stark zustimmenden Gruppe ($+ +$; 56 Personen). Folgendes bleibt festzuhalten: je stärker die Zustimmung bezüglich des logischen und exakten Charakters der Mathematik für die Studienwahl ist, desto besser sind auch die Leistungen in den vier Vorwissenstests.

3.3.3 Intrinsische Studienwahlmotive

Die intrinsischen (von innen her bestimmten [38]) Studienwahlmotive werden im Fragebogen mit nur zwei Fragen untersucht; dabei werden die Tendenzen für

- das Interesse an den Studieninhalten (F20) sowie
- der Anspruch, die eigenen Fähigkeiten im Fach Mathematik zu steigern (F21)

beleuchtet. An dieser Stelle soll grundlegend der Begriff „Motivation" eingrenzt werden. Rheinberg versteht unter Motivation die

> „aktivierende Ausrichtung des momentanen Lebensvollzugs auf einen positiv bewerteten Zielzustand." [104, S. 16].

Verschiedene Einflussfaktoren wirken sich für ihn auf die intrinsische Motivation aus; dabei differenziert er den Begriff „intrinsische Motivation" in [103, S. 368-370]

- intrinsische Motivation „in der Tätigkeit",
- als „Bedürfnis nach Selbstbestimmung und Kompetenz",
- als „Interesse und Involviertheit",
- als „Übereinstimmung von Mittel und Zweck".

Die von Rheinberg aufgeschlüsselten Aspekte finden sich auch in den Fragen 20 und 21 wieder. Für die beiden Fragen werden die Tendenzen der Skalenpunkte im Säulendiagramm dargestellt.

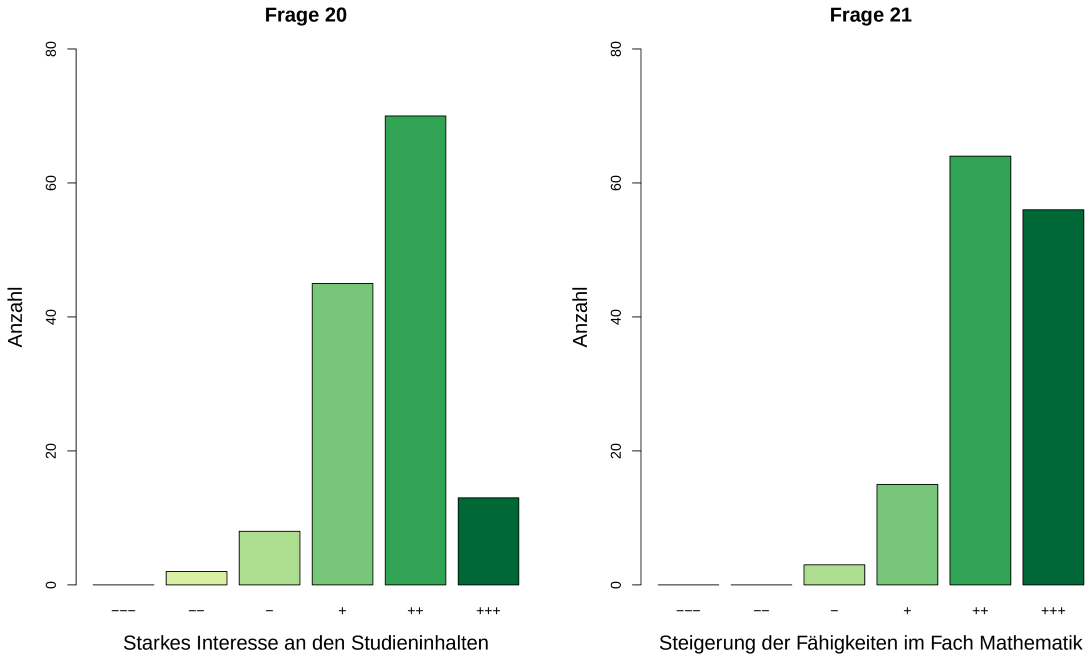

Abbildung 3.22: Antworthäufigkeiten für die Fragen 20 und 21

In beiden Fällen zeigt sich eine hohe Quote für die Gruppe Zustimmung (128 und 135 Personen), was bedeutet, dass fast alle Befragten fachliches Interesse an mathematischen Inhalten zeigen und ihre mathematischen Fähigkeiten steigern möchten; diese Verteilung erschwert wie bereits bei Frage 12 die Auswertungen; es ergeben sich keine signifikanten Leistungsunterschiede für beide Gruppen. Dies liegt auch an den extremen Zahlen in den beiden Gruppen. An dieser Stelle werden Studien angeführt, die sich mit Studienwahlmotiven von Lehramtsstudierenden auseinandersetzen. Dabei beziehen sich die Studien nicht auf mathematische Leistungen bzw. Kompetenzen. Möllers und Pohlmann untersuchen auf der Basis des Erwartungs-Wert-Modells [131] die Studienwahlmotivation von Lehramtsstudierenden; dabei konnten zwei große Pfeiler für die Studienwahlmotivation der angehenden Studierenden gefunden werden. Es wird zwischen der „Wertekomponente", die unter anderem pädagogisches und fachliches Interesse beinhaltet, sowie der „Erwartungswertkomponente", die unter anderem die Fähigkeitsüberzeugung, die geringe Schwierigkeit des Studiums sowie soziale Einflüsse beinhaltet, unterschieden [94, S. 73]. Diese beiden Kernpunkte beeinflussen die Studienwahlmotivation signifikant. Künsting und Lipowsky untersuchen den Einfluss von Studienwahlmotivationen und Persönlichkeitseigenschaften auf die Zufriedenheit und die selbstberichtete Strategienutzung zu Beginn des Lehramtsstudiums. Es zeigt sich, dass die intrinsischen Motivationsgründe einen Einfluss auf die Zufriedenheit und die selbstberichtete Strategienutzung haben, die extrinsischen jedoch nicht [68, S. 105].

3.3.4 Extrinsische Studienwahlmotive

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit extrinsischen (von außen her bestimmten [38]) Studienwahlmotiven. Die Fragen 22 bis 27 untersuchen, ob das gewählte Studium durch

- die relative kurze Studiendauer (F22),
- den machbaren fachwissenschaftlichen Anspruch des Studiums (F23),
- das mangelnde Interesse an anderen Fächern (F24),
- lokale Begebenheiten (F25),
- die Studienplatzsituation (F26) sowie
- Chancen, die dieser Studiengang in anderen Bereichen bietet (F27)

begünstigt wird. Deci und Ryan erläutern den Begriff extrinsische Motivation aus pädagogischer Sicht folgendermaßen:

> „Extrinsische Motivation wird dagegen (im Vergleich zu intrinsischer Motivation) in Verhaltensweisen sichtbar, die mit instrumenteller Absicht durchgeführt werden, um eine von der Handlung separierbare Konsequenz zu erlangen.“ [32, S. 225].

Die instrumentellen Absichten stellen bei den obigen Fragen jeweils die Begünstigungsfaktoren wie etwa die kurze Studiendauer für die Studienwahl dar. Im Folgenden werden die absoluten Häufigkeiten der gegebenen Antworten für die Gruppen „Zustimmung“ und „keine Zustimmung“ tabellarisch zusammengefasst.

Tabelle 3.7: Stichprobenumfänge beider Gruppen für die Fragen 22 - 27

Fragenummer	keine Zustimmung	Zustimmung
Frage 22	73	64
Frage 23	35	102
Frage 24	121	16
Frage 25	95	42
Frage 26	105	32
Frage 27	87	50

Bei diesem Block zeigen die Analysen für keine der sechs Fragen einen signifikanten Leistungsunterschied zwischen den Gruppen „keine Zustimmung“ und „Zustimmung“. Die stärksten Differenzen ergeben sich bei Frage 22, welche die relative kurze Studiendauer als Begünstigungsfaktor beinhaltet. Auf die Ausführung der Analysen der sechs Fragen wird aufgrund der geringen und nicht signifikanten Leistungsunterschiede verzichtet. Generell kann allerdings festgestellt werden, dass die Studienwahl überwiegend nicht als Notlösung angesehen oder durch lokale Faktoren beeinflusst sowie durch die Studienplatzsituation getroffen wird. Ferner sehen aber drei Viertel der Befragten ihre Studienwahl durch den machbaren fachwissenschaftlichen Anspruch ihres Studiums begünstigt; offenbar ist ihnen im Fach Mathematik der Unterschied in den fachlichen Ansprüchen gegenüber dem Bachelorstudiengang (bzw. Masterstudiengang) bewusst. Dennoch sollte auch bedacht werden, dass sich ein Lehramtsstudium aus mindestens zwei Unterrichtsfächern (zumindest das Lehramt an Realschulen) sowie Inhalten der Pädagogik und Psychologie sowie der Fachdidaktik in den Unterrichtsfächern zusammensetzt. Im Grund- oder Hauptschulbereich werden neben einem Unterrichtsfach drei Didaktikfächer studiert.

3.3.5 Intrinsische Berufswahlmotive

Neben den intrinsischen Studienwahlmotiven werden nun auch intrinsische Berufswahlmotive betrachtet. Die vier Fragen zu diesem Komplex beinhalten

- die Begeisterung, mathematische Inhalte zu erklären (F28),
- das Interesse und den Wunsch, mit Jugendlichen zu arbeiten (F29),
- das Vertrauen in eigene didaktische wie pädagogische Fähigkeiten (F30),
- Erwartungshaltung bezüglich der Vielseitigkeit im Lehrerberuf (F31).

Diese berufsbezogenen Fragen beinhalten Aspekte, die für die Ausübung des Lehrerberufs grundlegend sind. Gerade bei diesen Berufswahlmotiven zeigt sich im Vergleich zu den entsprechenden Studienwahlmotiven ein deutlich höherer Zustimmungsgrad, was das folgende Diagramm zeigt.

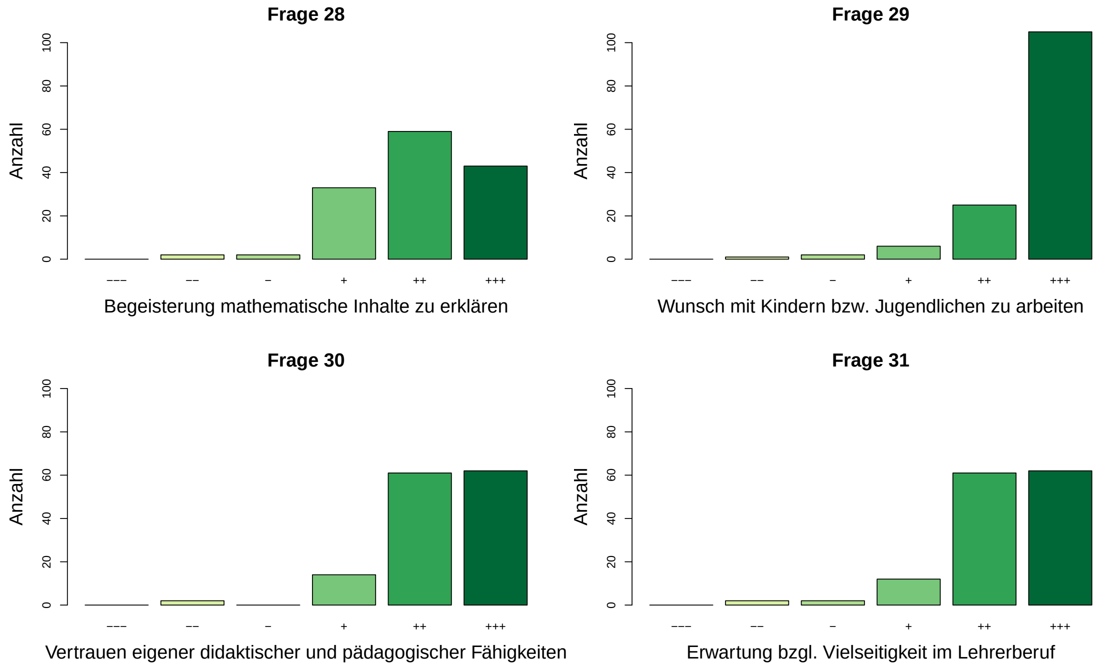

Abbildung 3.23: Antworthäufigkeiten für die Fragen 28 - 31

Aufgrund der gegebenen hohen Zustimmungskonstellation wird eine andere Gruppeneinteilung gewählt; diese fasst zum einen die Teilnehmenden, welche die Skalenpunkten „+“ und „++“ gewählt haben, zusammen und vergleicht diese mit der Gruppe, die volle Zustimmung gewählt hat; die Personen, die aus diesem Raster fallen, sind verschwindend klein und können daher vernachlässigt werden. Die geschilderte Einteilung scheint bei der gegebenen Antwortsituation die einzig vernünftige Lösung. Würde man die oben dargestellte und bisher immer durchgeführte Einteilung beibehalten, so hätten man Stichprobenvergleiche von etwa 3 zu 133. Für beide Gruppen kann bei diesen Fragen kein signifikanter Leistungsunterschied festgestellt werden (auf die Diagramme für die Leistungen beider Gruppen wird wieder verzichtet). Auffallend ist, dass die Studierenden allen vier Aussagen dieses Blocks in hohem Maße zustimmen, aber die Leistungen der beiden Gruppen ähnlich ausfallen. Die abgefragten Aspekte scheinen allen Studierenden für ihren späteren Beruf grundlegend zu sein; so deutliche Indizien liefert bisher kein anderer Frageblock. Eine Studie von Oesterreich aus dem Jahr 1987 mit 257 Lehramtsstudierenden ergab folgende Priorität der Berufswahlmotive: dabei sind die drei häufigsten Antworten [89, S. 12]:

- „Weil ich gerne mit Kindern und Jugendlichen zusammen bin.“
- „Weil man als Lehrer eine wichtige gesellschaftliche Aufgabe hat.“
- „Weil die Tätigkeit als Lehrer interessant und abwechslungsreich ist.“

Hingegen sind die drei am wenigsten gewählten Items [89, S. 12]:

- „Weil mir nichts anderes eingefallen ist."
- „Weil ich mir ein anderes Studium nicht zugetraut habe."
- „Weil die Ausbildung relativ kurz ist."

Die Untersuchung von Oesterreich zeigt bei annähernd gleichen Fragen ähnliche Befunde, die bereits geschildert wurden, beispielsweise die hohe Zustimmung für die Arbeit mit Kindern und Jugendlichen.

3.3.6 Extrinsische Berufswahlmotive

Der Komplex extrinsische Berufswahlmotive komplettiert den Block „Studien- und Berufswahlmotive". Beachtung finden dabei die folgenden Punkte:

- die Sicherheit des Lehrerberufs (F32),
- das Ansehen des Lehrerberufs (F33),
- die günstigen Arbeitsbedingungen des Lehrerberufs (F34) und
- der Aspekt des Lehrmangels im Fach Mathematik (F35).

Es werden nun die absoluten Häufigkeiten der gewählten sechs Skalenpunkte für diesen Frageblock veranschaulicht:

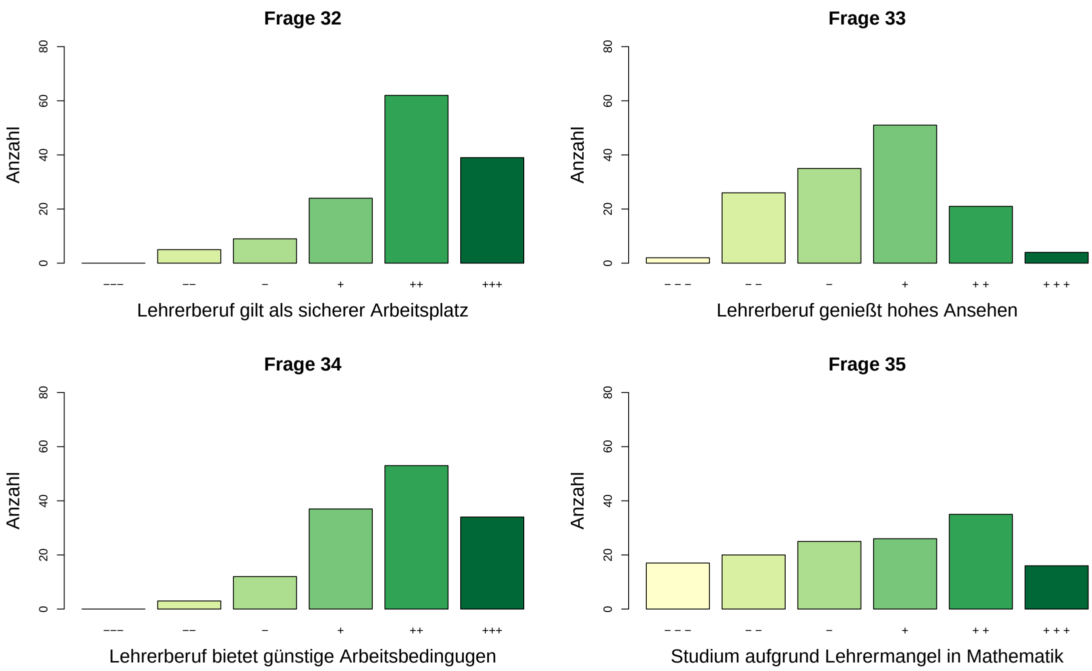

Abbildung 3.24: Antworthäufigkeiten für die Fragen 32 - 35

Diese Fragen zeigen bei der Verteilung der Antworten kein so extremes Bild wie die Fragen zu den intrinsischen Berufswahlmotiven, sind also eher vergleichbar mit der Verteilung bei den extrinsischen Studienwahlmotiven. Die gestellten Fragen können Faktoren beinhalten, die für Studierende den Berufswunsch Mathematiklehrkraft sicherlich attraktiver machen. Generell kann festgehalten werden, dass mit großer Mehrheit der Sicherheit des Arbeitsplatzes im Lehrberuf zugestimmt wird (125 Personen), aber etwa nur die Hälfte der Studierenden misst dem Lehrerberuf hohes Ansehen bei (etwa 55 % Zustimmung). Ferner werden die Arbeitsplatzbedingungen mit 90 % Zustimmung deutlich positiv bewertet. Dass die Fachrichtung für eine Anstellung günstig ist, wird leicht bejaht (wiederum etwa 55 %). In einer Untersuchung von Blessing zu den Berufswahlmotiven von Lehrkräften werden folgende Indikatoren für die extrinsisch motivierte Berufswahl herausgefunden [19]:

- sicheres Einkommen,
- geregelte Freizeit,
- Sicherheit des Arbeitsplatzes,
- gute Vereinbarkeit von Lehrerberuf und Familie,
- vertraute Umgebung während der Ausbildung.

Diese Aspekte treten mit Ausnahme der Sicherheit des Arbeitsplatzes im ausgegebenen Fragebogen nicht auf, können aber für die untersuchte Gruppe in dieser Studie ebenfalls wichtige Kriterien bei der Berufswahl darstellen.

Für den Block Studien- und Berufswahlmotive haben sich folgende Faktoren (Items) als bedeutsam für die Leistungen der Studierenden im mathematischen Vorwissen in den Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik erwiesen:

- Bereits vor Studienbeginn hatten die gewählten Studiengebiete einen hohen Stellenwert für Sie (F14, Kategorie Studieninteresse).

- Die Qualität des Mathematikunterrichts hat Sie zu Ihrer Studienwahl motiviert (F15, Kategorie Gründe für das Unterrichtsfach Mathematik).

- Ihre Fähigkeiten und Begabungen im Fach Mathematik haben die Studienwahl veranlasst (F18, Kategorie Gründe für das Unterrichtsfach Mathematik).

3.4 Angaben zu Lernstrategien (StudienanfängerInnen WS 10/11)

Der Abschnitt „Lernstrategien“ beinhaltet sieben verschiedene Fragen, die dieses Gebiet aufschlüsseln sollen. An dieser Stelle werden Ergebnisse zum dritten Teilaspekt der zweiten Forschungsfrage skizziert, da als exogene Variablen an dieser

Stelle Lernstrategien thematisiert werden. Auch für diesen Abschnitt werden Ergebnisse geschildert und diese diskutiert.

> **Forschungsfrage 2 (Teilaspekt 3)**: Welchen Einfluss nehmen exogene Variablen (Lernstrategien) auf das Vorwissen der Studierenden in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik?

Die gestellten Fragen fixieren Themengebiete wie

- schriftliches Üben bei der Prüfungsvorbereitung (F36),
- Strukturieren und Visualisieren mathematischer Inhalte (F37),
- Zuhilfenahme von Literatur bei mathematischen Problemstellungen (F38),
- Hartnäckigkeit bei fehlenden Lösungsstrategien (F39),
- Aneignung theoretischer mathematischer Grundlagen vor der Problembegegnung (F40),
- kritisches Prüfen und Auseinandersetzen mit den gelernten Inhalten (F41),
- schriftliches Exzerpieren wichtiger Aspekte (F42).

Zuerst soll eine Abgrenzung für den Begriff Lernstrategien erfolgen. Friedrich und Mandl verstehen unter dem Begriff Lernstrategien

> „jene Verhaltensweisen und Gedanken, die Lernende aktivieren, um ihre Motivation und den Prozess des Wissenserwerbs zu beeinflussen und zu steuern.“ [47, S. 1].

Ferner untergliedert Wild den betreffenden Begriff in folgende drei Bereiche [108, S. 186-187], [132]:

- kognitive Lernstrategien (Aufnahme, Verarbeitung und Speicherung von Informationen),
- metakognitive Lernstrategien (Vorgänge zur Kontrolle des Lernprozesses),
- ressourcenbezogene Lernstrategien (Organisation der Lernaktivitäten).

Gemäß dieser Einteilung können die Fragen 36, 38 und 42 zu den kognitiven, die Fragen 37 und 41 zu den metakognitiven sowie die Fragen 39 und 40 zu den ressourcenbezogenen Lernstrategien gezählt werden. Folgende Tabelle zeigt die Stärke der beiden Gruppen „Zustimmung“ und „keine Zustimmung“ für diesen Block.

Tabelle 3.8: Stichprobenumfänge beider Gruppen für die Fragen 36 - 42

Fragenummer	keine Zustimmung	Zustimmung
Frage 36	4	135
Frage 37	18	121
Frage 38	53	86
Frage 39	28	111
Frage 40	39	100
Frage 41	41	98
Frage 42	46	93

Sehr starke Zustimmung erfährt dabei Frage 36, welche die schriftliche Prüfungsvorbereitung beinhaltet, was für das Fach Mathematik unabdingbar ist. Das Hinzuziehen von Literatur und Hilfsmitteln bei mathematischen Problemen sowie das schriftliche Exzerpieren wichtiger Aspekte erhält nur mittelmäßige Zustimmung; diese Strategien werden sich sicherlich im Laufe des Studiums entwickeln. Die übrigen Fragen erhalten starke Zustimmung, darunter vor allem Frage 37; dabei wird die Visualisierung mathematischer Problemstellungen diskutiert. Eine Frage zum Block Lernstrategien weist signifikante Leistungsunterschiede für die beiden Gruppen auf; dies ist Frage 38, die wie geschildert die Zuhilfenahme von Literatur und auch anderer Hilfsmittel bei mathematischen Schwierigkeiten analysiert. Prägnant ist dabei, dass die Gruppe, die der Frage nicht zustimmt, signifikant bessere Leistungen erzielt als die Gruppe, die der Frage zustimmt. Es zeigt sich, dass die beiden Gruppen deutliche Unterschiede beim 75 %-Quantil mit $x_{0,75} = 18{,}00$ (keine Zustimmung) und $x_{0,75} = 15{,}25$ (Zustimmung) aufweisen; ein ähnlicher Unterschied ergibt sich auch für den Mittelwert. Betrachtet man die vier Einzelfächer, so zeigt sich vor allem in der Teildisziplin Analysis im Mittel eine Differenz von drei Punkten (auf graphische Darstellungen der Leistungen wird an dieser Stelle verzichtet).

Generell sei hier angemerkt, dass die gestellten Fragen die Lernstrategien der Schulzeit betreffen und die Studierenden hinsichtlich der Lernstrategien einen Entwicklungsprozess durchlaufen werden. Der universitäre Lehrcharakter im Fach Mathematik wird sicherlich Aspekte wie das Hinzuziehen von Literatur und eine zunehmende Hartnäckigkeit bei fehlenden Lösungsideen fördern. Zudem wird im Rahmen des erziehungswissenschaftlichen Studiums und der Fachdidaktik das Thema Lernstrategien behandelt. Das Feld Lernstrategien erfährt in der Wissenschaft ein breites Spektrum, wird an dieser Stelle aber nicht weiter fokussiert.

3.5 Leistungen der StudienanfängerInnen WS 11/12 und WS 12/13

Dieser Abschnitt stellt das Kernstück der Querschnittstudie dar. Unter verschiedenen Gesichtspunkten werden die Leistungen im Schulwissen (gemessen durch den Vorwissenstest in den Gebieten Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik) von drei aufeinanderfolgenden Jahrgängen (hauptsächlich Erstsemester) miteinander verglichen. Dabei stellt der Jahrgang Wintersemester 2010/11 die Referenzgruppe dar; die Schilderung der Leistungen dieser Gruppe in den vier Einzelfächern und auch in Abhängigkeit verschiedener erklärender Variablen prägt das bisherige Kapitel. Für die beiden Folgejahrgänge werden in Kurzform die Leistungen in den vier Einzelfächern und in Abhängigkeit zweier erklärender Variablen geschildert und mit dem Referenzjahrgang verglichen. Intention dieser Vergleichsstudie ist, einen Verlauf über die Kenntnisse von schultypischen Sachverhalten der Studienanfängerinnen und Studienanfänger über einen Zeitraum von drei Jahren zu erhalten; genau in diesem Zeitraum hat in Bayern auch der erste G8-Abiturjahrgang (WS 2011/12) seine Hochschulzugangsberechtigung erhalten. Damit werden an dieser Stelle Ergebnisse für die dritte Forschungsfrage vorgestellt:

> **Forschungsfrage 3**: Welche Unterschiede zeichnen sich hinsichtlich der fachmathematischen Kenntnisse in den schultypischen Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik zu Studienbeginn zwischen G8- und G9-Absolventinnen und -Absolventen ab? Welches Bild ergibt sich, wenn die G9-Gruppe differenziert nach Grund- und Leistungskursteilnehmenden unterschieden wird?

Es werden zunächst vorbereitend die Leistungen in den vier Einzelfächern und deren Mittelwert für die Gruppen Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Wintersemester 2011/12 und 2012/13 vorgestellt und mit denen des Referenzjahrgangs vom Wintersemester 2010/11 verglichen. Daraufhin werden spezifisch die Einflüsse der beiden Regressoren „studierter Lehramtstyp“ und „mathematischer Schwerpunkt in der Oberstufe“ auf die Ergebnisse für die beiden Jahrgänge untersucht und wiederum mit den Leistungen der Referenzgruppe verglichen. Diese beiden Regressoren haben im Referenzjahrgang des Wintersemesters 2010/11 einen signifikanten Einfluss auf das Leistungsbild der Studierenden (der dritte bedeutsame Regressor „Kombinations- und Didaktikfächer“ wird aufgrund der unterschiedlichen Konstellation der Kombinationsfächer zwischen den drei Jahrgängen nicht berücksichtigt). Auf der Grundlage der Variablen „mathematischer Schwerpunkt in der Oberstufe“ werden dann die Leistungen von G8- und G9-Absolventinnen und -Absolventen analysiert und gegenübergestellt.

3.5.1 Leistungsübersicht in den vier Vorwissenstests

Es werden nun zuerst die Ergebnisse in den vier Einzelfächern und im Mittelwert für die beiden Gruppen geschildert, um einen globalen Überblick über deren Leistungspotential zu erhalten. Zusätzlich werden nochmals zur besseren Vergleichbarkeit die Leistungen der Referenzgruppe vom Wintersemester 2010/11 ergänzt; diese Leistungen wurden bereits am Anfang dieses Kapitels vorgestellt (vgl. 3.1).

Für die StudienanfängerInnen des WS 10/11 ($n = 139$) ergibt sich:

Tabelle 3.9: Leistungen Einzelfächer und Mittelwert (Studienanfänger WS 10/11)

Fach	Algebra	Geometrie	Analysis	Stochastik	Mittelwert
$x_{0,25}$	16,00	6,50	9,13	5,50	10,12
x_{med}	19,75	11,00	13,50	8,50	13,25
$\bar{x}$	18,87	11,23	13,55	9,25	13,51
$x_{0,75}$	22,00	16,50	18,88	13,00	17,38

Für die StudienanfängerInnen des WS 11/12 ($n = 77$) ergibt sich:

Tabelle 3.10: Leistungen Einzelfächer und Mittelwert (Studienanfänger WS 11/12)

Fach	Algebra	Geometrie	Analysis	Stochastik	Mittelwert
$x_{0,25}$	17,00	9,50	11,50	6,00	10,44
x_{med}	19,50	13,00	14,50	9,50	14,00
$\bar{x}$	18,87	12,70	14,46	9,69	14,25
$x_{0,75}$	21,50	16,50	18,12	13,50	16,50

Für die StudienanfängerInnen des WS 12/13 ($n = 133$) ergibt sich:

Tabelle 3.11: Leistungen Einzelfächer und Mittelwert (Studienanfänger WS 12/13)

Fach	Algebra	Geometrie	Analysis	Stochastik	Mittelwert
$x_{0,25}$	17,00	8,00	5,50	3,00	9,41
x_{med}	19,50	13,00	10,00	7,00	12,00
$\bar{x}$	18,89	12,05	10,01	7,29	12,06
$x_{0,75}$	21,50	16,00	14,50	12,00	15,06

Damit ergeben sich für die Leistungen der Studienanfängerinnen und Studienanfänger im schultypischen mathematischen Wissen über einen Zeitraum von drei aufeinanderfolgenden Studienjahren folgende Trends:

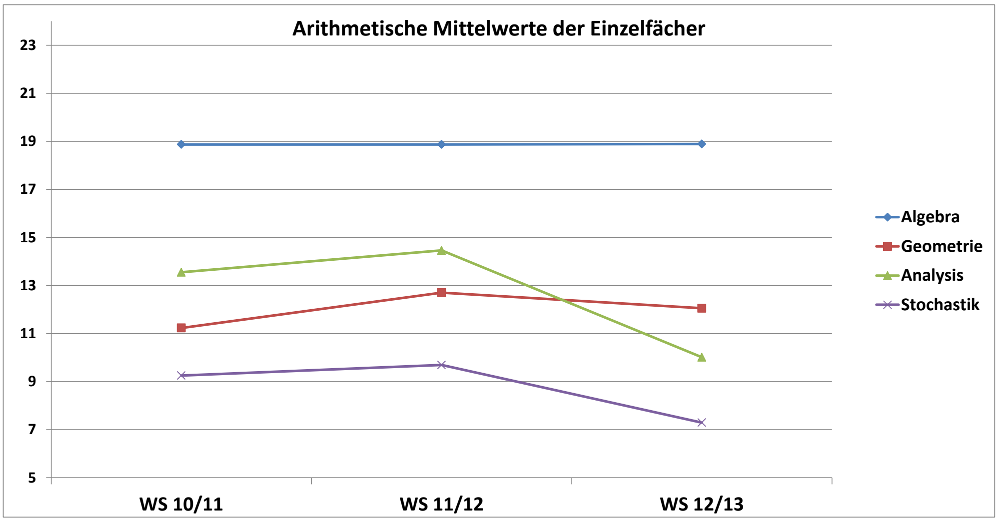

Abbildung 3.25: Mittelwerte der Einzelfächer der Jahrgänge WS 10/11, WS 11/12 und WS 12/13

- Es zeigen sich fast identische Leistungen in Algebra mit arithmetischen Mittelwerten bei knapp 19,00 Punkten für alle drei Gruppen; auch die übrigen Lagemaße sind annähernd gleich.
- Im Fach Geometrie liegen die arithmetischen Mittelwerte symmetrisch um 12,00 Punkte (11,23 bzw. 12,05 bzw. 12,70); die Mittelwerte weichen um etwa 1,50 und die Mediane um 2,00 Punkte zwischen den Gruppen ab.
- Es ergeben sich variierende Leistungen in Analysis: während die Leistungen der ersten beiden Jahrgänge mit Mittelwerten und Medianen um 13,50 bzw. 14,50 liegen, fällt der letzte Jahrgang mit etwa 10,00 Punkten deutlich ab; für das 25 %-Quantil ergibt sich zwischen den beiden letzten Gruppen (WS 11/12 und WS 12/13) sogar eine Differenz von sechs Punkten.
- Ein ähnlicher Trend wie im Fach Analysis ist für das Gebiet Stochastik festzustellen, in welchem der letzte Jahrgang um etwa zwei Punkte im arithmetischen Mittelwert und Median gegenüber den beiden anderen Gruppen schlechter abschneidet.

- Aufgrund der geschilderten Tatsachen liegt auch der Mittelwert der vier Einzelfächer des letzten Jahrgangs mit etwa zwei Punkten unter denen der anderen beiden Gruppen. Die Ergebnisse in den Bereichen der Sekundarstufe I (Algebra und Geometrie) sind über die drei Jahrgänge relativ konstant, die Leistungen in den anderen beiden Gebieten (Analysis und Stochastik) sind für die letzte Gruppe schwächer, was auch in obigem Diagramm durch den abfallenden Trend zwischen den Jahrgängen WS 10/11 bzw. WS 11/12 und WS 12/13 für die beiden Fächer der Sekundarstufe II zu erkennen ist.

3.5.2 Leistungen in Abhängigkeit des studierten Lehramtstyps

Die Leistungen in Abhängigkeit des studierten Lehramtstyps für den Referenzjahrgang wurden bereits am Anfang dieses Kapitels dargestellt (vgl. 3.2.4), werden aber zur Übersichtlichkeit nochmals kurz skizziert. Für den Jahrgang Wintersemester 2010/11 zeigt sich für die erklärende Variable „studierter Lehramtstyp“ ein signifikanter Einfluss auf die Zielgröße (Leistungen in den Testerhebungen). Es werden nun die Leistungen in Abhängigkeit dieser Variablen der drei Untersuchungsgruppen vergleichend in tabellarischer Form gegenüber gestellt.

- Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 10/11

Tabelle 3.12: Mittelwerte für Einzelfächer und Mittelwert in Abhängigkeit vom studierten Lehramtstyp (WS 10/11)

Lehramt	n	Algebra	Geometrie	Analysis	Stochastik	Mittelwert
GS	23	19,63	11,50	14,08	11,11	14,08
HS	10	14,75	7,25	8,00	6,65	9,16
RS	106	18,84	11,25	14,42	9,05	13,39

Es ergeben sich für diese Gruppe folgende Kernaussagen (vgl. 3.2.4):

- es liegen signifikante Unterschiede im Mittelwert zwischen den Gruppen Grund- und Hauptschule sowie Real- und Hauptschule vor;
- diese Unterschiede hinsichtlich der Leistungen beruhen vor allem auf den Gebieten Algebra und Analysis, in Geometrie und Stochastik differieren die Ergebnisse zwischen den Gruppen nicht so stark.

- Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 11/12

Tabelle 3.13: Mittelwerte für Einzelfächer und Mittelwert in Abhängigkeit vom studierten Lehramtstyp (WS 11/12)

Lehramt	n	Algebra	Geometrie	Analysis	Stochastik	Mittelwert
GS	13	17,57	12,57	16,03	10,19	14,09
HS	9	16,94	12,17	12,05	7,44	12,15
RS	55	19,58	13,28	15,07	10,21	14,54

Für diese Gruppe sind folgende Ergebnisse festzuhalten:

- es liegen keine signifikanten Unterschiede zwischen den drei Gruppen vor;
- die Leistungen sind für alle Gruppen auf einem höheren Niveau im Vergleich zu den anderen beiden Jahrgängen, zudem sind die Ergebnisse relativ homogen (der Stichprobenumfang mit $n = 77$ ist zu bedenken).

- Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 12/13

Tabelle 3.14: Mittelwerte für Einzelfächer und Mittelwert in Abhängigkeit vom studierten Lehramtstyp (WS 12/13)

Lehramt	n	Algebra	Geometrie	Analysis	Stochastik	Mittelwert
GS	25	20,42	12,66	12,46	10,38	13,98
HS	15	18,50	10,80	7,50	5,17	10,49
RS	93	18,54	12,09	9,76	6,80	11,88

Folgende Aspekte werden für diese Gruppe beobachtet:

- im Mittel weisen die Leistungen zwischen Grund- und Hauptschulgruppe sowie Grund- und Realschulgruppe signifikante Unterschiede auf;
- die Unterschiede für Grund- und Hauptschulgruppe resultieren aus den signifikanten Leistungsdifferenzen in Analysis und Stochastik, für die Gruppen Grund- und Realschule sind die Unterschiede an den Gebieten Algebra, Analysis und Stochastik festzumachen.

Zusammenfassend ergibt sich ein bedeutsamer Einfluss dieses Regressors auf die Leistungen in den Testerhebungen für die Jahrgänge WS 10/11 und WS 12/13; dabei ragt besonders die Gruppe Grundschule heraus. Der andere Jahrgang (WS 11/12) ist von den Ergebnissen der drei Gruppen deutlich homogener und auf einem höheren Niveau. In allen drei Untersuchungseinheiten ist die Hauptschulgruppe die schwächste (man muss den geringen Stichprobenumfang berücksichtigen); ferner kann die Grundschulgruppe in allen drei Untersuchungseinheiten im Mittel etwa 14,00 Punkte erreichen. Die Ergebnisse der Realschulgruppe fallen besonders für den Jahrgang WS 12/13 ab, für die beiden anderen Jahrgänge sind die Ergebnisse ähnlich wie die der Grundschulgruppe. Im Gebiet Geometrie können in keinem Jahrgang signifikante Auffälligkeiten festgestellt werden, die anderen Gebiete weisen teilweise starke Leistungsunterschiede auf. Es ist zu beachten, dass der Jahrgang WS 11/12 im Vergleich zu den beiden anderen Gruppen eine deutlich geringere Anzahl an Testpersonen aufweist, was einen Einfluss auf die nicht signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen in den vier Teilgebieten und im Mittelwert haben könnte.

3.5.3 Leistungen in Abhängigkeit vom Schulschwerpunkt

Diese erklärende Variable hatte für die Referenzgruppe einen bedeutsamen Einfluss auf die Zielgröße (vgl. 3.2.8); es werden wiederum die Leistungen der drei Untersuchungsgruppen in tabellarischer Form vergleichend gegenüber gestellt, um diesen Einfluss auch bei den Vergleichsgruppen zu untersuchen.

- Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 10/11

Tabelle 3.15: Mittelwerte für Einzelfächer und Mittelwert in Abhängigkeit vom mathematischen Schulschwerpunkt (WS 10/11)

Schwerp.	n	Algebra	Geometrie	Analysis	Stochastik	Mittelwert
GK	50	17,44	9,60	11,87	8,44	11,84
LK	52	19,89	12,46	16,09	11,71	15,03
FOS	14	19,29	12,29	15,93	5,82	13,33
BOS	16	17,81	10,75	13,03	7,09	12,17
sonst.	6	18,75	7,17	9,25	6,42	10,40

Es ergeben sich folgende Trends (vgl. 3.2.8):

- die Leistungskursgruppe ist allen Gebieten und folglich auch im Mittelwert signifikant besser als die Grundkursgruppe;
- im Gebiet Stochastik zeigen sich ebenso signifikante Unterschiede zwischen der Leistungskurs- und der FOS- bzw. BOS-Gruppe;
- für die Fachoberschulgruppe liegen relativ gute Ergebnisse mit Ausnahme der Disziplin Stochastik vor.

- Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 11/12

Tabelle 3.16: Mittelwerte für Einzelfächer und Mittelwert in Abhängigkeit vom mathematischen Schulschwerpunkt (WS 11/12)

Schwerp.	n	Algebra	Geometrie	Analysis	Stochastik	Mittelwert
G8	16	19,91	14,97	16,53	11,87	15,82
GK	14	19,29	12,82	13,00	9,18	13,57
LK	19	20,10	15,08	16,63	13,50	16,33
FOS	19	17,23	10,55	14,13	6,60	12,13
BOS	9	17,78	10,83	12,78	6,72	12,03

Für den Jahrgang WS 11/12 fallen folgende Aspekte auf:

– es zeigen sich in allen vier Gebieten und auch im Mittelwert signifikante Unterschiede zwischen den Gruppen; zur besseren Übersichtlichkeit werden diese Unterschiede in tabellarischer Form dargestellt; dabei ist die erstgenannte Gruppe die leistungsmäßig signifikant bessere:

Tabelle 3.17: Signifikanzen in Abh. vom mathematischen Schulschwerpunkt (WS 11/12)

Algebra	Geometrie	Analysis	Stochastik
LK- und FOS	LK- und FOS	LK- und GK	LK- und FOS
	G8- und FOS	G8- und GK	LK- und BOS
			G8- und FOS
			G8- und BOS

– es ergeben sich zwischen LK- und G8-Gruppe sehr ähnliche Leistungen mit Ausnahme in Stochastik (LK-Gruppe um etwa 1,50 Punkte besser), die GK-Gruppe fällt dagegen im Gymnasialsektor zu den beiden Vergleichsgruppen ab (Unterschiede im Mittelwert von etwa 2,50 bzw. etwa 3,00 Punkten);

– für die nichtgymnasialen Gruppen (FOS- und BOS-Gruppe) zeigt sich ebenfalls ein ähnliches aber im Vergleich zu den gymnasialen Gruppen (vor allem LK- und G8-Gruppe) deutlich schwächeres Leistungsniveau, was vor allem am Teilgebiet Stochastik zu erkennen ist; diese Tatsache bestätigt sich auch in der obigen Tabelle mit den signifikanten Unterschieden im Fach Stochastik.

- Studienanfängerinnen und Studienanfänger WS 12/13

Tabelle 3.18: Mittelwerte für Einzelfächer und Mittelwert in Abhängigkeit vom mathematischen Schulschwerpunkt (WS 12/13)

Schwerp.	n	Algebra	Geometrie	Analysis	Stochastik	Mittelwert
G8	28	18,89	12,13	12,82	9,96	13,47
GK	23	18,30	11,56	8,56	7,13	11,39
LK	26	20,25	14,01	11,12	7,88	13,32
FOS	38	18,28	12,07	9,20	6,10	11,41
BOS	15	19,43	10,30	8,60	5,53	10,97
sonst.	3	15,67	6,67	2,67	2,33	6,83

Für den Jahrgang WS 12/13 kann Folgendes festgehalten werden:

- es zeigen sich in Analysis zwischen G8- und GK-Gruppe und in Stochastik zwischen G8- und FOS-Gruppe signifikante Leistungsunterschiede;
- es bilden sich die stärkeren Gruppen G8 und LK gegenüber den übrigen drei heraus; die Gruppe Sonstige soll aufgrund ihrer sehr geringen Gruppengröße nicht weiter berücksichtigt werden.

Zusammenfassend zeigt die Leistungskursgruppe in allen drei Untersuchungseinheiten gute Ergebnisse, ebenso die G8-Gruppe für die beiden letzten Jahrgänge; Studierende mit Grundkurs Mathematik fallen dagegen teils signifikant ab. Für den letzten Jahrgang sind die Leistungen durchgängig schlechter, was sich ebenfalls schon bei der Darstellung der Ergebnisse in den vier Einzelfächern und der Leistungen in Abhängigkeit des Regressors studierter Lehramtstyp herausgestellt hat. Dennoch ergeben sich besonders im Teilgebiet Stochastik erhebliche Unterschiede; diesem Sachverhalt soll nun näher nachgegangen werden, indem die inhaltlichen und zeitlichen Aspekte der entsprechenden bayerischen Lehrpläne (etwa 90 % der Studierenden haben ihre Hochschulreife in Bayern erworben) analysiert werden.

Vergleich der stochastischen Inhalte in den bayerischen Lehrplänen des Gymnasiums sowie der Fach- und Berufsoberschule

Es werden inhaltliche Aspekte sowie der zeitliche Umfang des Stochastikunterrichts in den bayerischen Lehrplänen des achtjährigen Gymnasiums, des neunjährigen Gymnasiums (differenziert nach Grund- und Leistungskurs) [116], der Fachoberschule (differenziert nach technischer und nichttechnischer Ausbildungsrichtung) [113] und der Berufsoberschule (ebenso differenziert nach technischer und nichttechnischer Ausbildungsrichtung) [112] vorgestellt und anschließend verglichen.

Lehrplaninhalte und zeitlicher Umfang für das achtjährige Gymnasium (Umfang: ca. 94 Stunden)

- **Klassenstufe 5** (Umfang: ca. 3 Stunden): M 5.3 Rechnen mit ganzen Zahlen: erstes Anwenden des Zählprinzips, Veranschaulichen in Baumdiagrammen.
- **Klassenstufe 6** (Umfang: ca. 12 Stunden): M 6.1 Weiterentwicklung der Zahlvorstellung: Auswerten von Zufallsexperimenten; relative Häufigkeit, M 6.5 Mathematik im Alltag: Prozentrechnung und Diagramme: Erarbeiten grundlegender Kenntnisse der Prozentrechnung; Interpretation von Diagrammen, manipulative Darstellung in Diagrammen.
- **Klassenstufe 7** (Umfang: ca. 11 Stunden): M 7.4 Mathematik im Alltag: Daten, Diagramme und Prozentrechnung: Auswerten von Daten (auch arithmetisches Mittel); Wiederholen und Vertiefen des Prozentrechnens.
- **Klassenstufe 8** (Umfang: ca. 12 Stunden): M 8.2 Stochastik: Laplace-Experimente: Ergebnis, Ergebnisraum, Ereignis; Berechnung von Laplace-Wahrscheinlichkeiten, Anwenden des Zählprinzips; Abgrenzung des Begriffs „Laplace-Experiment“ durch Beispiele.
- **Klassenstufe 9** (Umfang: ca. 10 Stunden): M 9.4 Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente: elementare zusammengesetzte Zufallsexperimente, Pfadregeln und ihre Anwendung.
- **Klassenstufe 10** (Umfang: ca. 10 Stunden): M 10.4 Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente: Anwenden der Pfadregeln, Begriff „bedingte Wahrscheinlichkeit“.
- **Klassenstufe 11** (Umfang: ca. 10 Stunden): M 11.5 Wahrscheinlichkeitsbegriff: axiomatische Definition von Wahrscheinlichkeit; verknüpfte Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten; Unabhängigkeit von Ereignissen.
- **Klassenstufe 12** (Umfang: ca. 26 Stunden) M 12.2 Stochastik: Binomialverteilung und ihre Anwendung in der beurteilenden Statistik: Bernoulli-Experiment und Bernoulli-Kette; Binomialkoeffizient, Binomialverteilung; Anwendung der Binomialverteilung insbesondere am Beispiel des einseitigen Signifikanztests.

Lehrplaninhalte und zeitlicher Umfang für das neunjährige Gymnasium

- **Leistungskurs LK** (Umfang: ca. 114 Stunden)

  - **Klassenstufe 12** (Umfang: ca. 52 Stunden): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik: Zufallsexperimente: Mathematisierung realer Vorgänge; relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeitsbegriff; Einführung in die Kombinatorik; bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit von Ereignissen; Zufallsgrößen und ihre Verteilungsfunktionen; Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung als Maßzahlen von Zufallsgrößen.

  - **Klassenstufe 13** (Umfang: ca. 62 Stunden): Bernoulli-Kette und Binomialverteilung; Tschebyschow-Ungleichung, Gesetz der großen Zahlen; Näherungen für die Binomialverteilung, die Normalverteilung; Testen von Hypothesen.

- **Grundkurs GK** (Umfang: ca. 44 Stunden): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik: Zufallsexperimente; Begriff der relativen Häufigkeit und Wahrscheinlichkeitsbegriff; Einführung in die Kombinatorik; Unabhängigkeit zweier Ereignisse; Bernoulli-Kette und Binomialverteilung; Testen von Hypothesen in einfachen Fällen (nur Klasse 12).

An dieser Stelle sollen die Inhalte sowie der zeitliche Umfang der stochastischen Aspekte in den Lehrplänen von G8 und G9 analysiert und verglichen werden. Ein erster und offensichtlicher Unterschied ist, dass sich die Lehrinhalte im achtjährigen Konzept auf alle Schuljahre (Klassenstufe 5 bis 12) verteilen, im Gegensatz zur komprimierten Darstellung der Aspekte in der Oberstufe im G9-Lehrplan (Klassenstufe 12 und 13 beim Leistungskurs, Klassenstufe 12 beim Grundkurs). Die inhaltliche und auch zeitliche Gewichtung in der konzeptionellen Ausrichtung des Leistungskurses (G9) nimmt die stärkste Position ein; der zeitliche Anspruch der G8-Konzeption (ca. 94 Stunden) orientiert sich eher am Leistungskurs (ca. 114 Stunden), von den Inhalten her gesehen ist die Ausrichtung des Stochastikunterrichts im achtjährigen Gymnasium aber nur leicht über dem Grundkursniveau (ca. 44 Stunden) anzusiedeln. Ob die Darbietung der Stochastikinhalte im Gymnasium in einer verteilten oder komprimierten Form sinnvoller ist, soll an dieser Stelle nicht diskutiert werden. Ferner muss man natürlich auch die Entwicklungen erster stochastischer Inhalte (kombinatorische Ansätze) in der Grundschulzeit berücksichtigen [114]; dieser Trend war in früheren Jahren nicht zu erkennen, da keine stochastischen Inhalte für den bayerischen Grundschullehrplan vorgesehen waren. Des Weiteren ist anzumerken, dass auch in der sechsstufigen Realschule vermehrt stochastische Aspekte vermittelt werden [115]; die Aufteilung der Inhalte erfolgt ähnlich der Konzeption im G8-System und erstreckt sich auf die Klassenstufen 5 bis 9 (nicht in Klasse 10).

Lehrplaninhalte und zeitlicher Umfang für die Fachoberschule

- **Technische Ausbildungsrichtung**: keine Lehrplaninhalte.

- **Nichttechnische Ausbildungsrichtung** (Umfang: ca. 66 Stunden): Stochastik: Zufallsexperiment und Ereignis; relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit; Berechnung von Wahrscheinlichkeiten; Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung; Testen von Hypothesen (nur Klasse 12).

Es ist sehr prägnant, dass Studierende, die die technische Ausbildungsrichtung an der Fachoberschule genossen haben, nicht mit stochastischen Inhalten vor Studienbeginn konfrontiert waren (ohne Berücksichtigung etwaiger Stochastikinhalte an anderen Schulformen). Dieser Aspekt kann zum einen im Verlauf des Studiums kritisch werden, da Inhalte der Kombinatorik und der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen der Veranstaltung „Grundlagen der Mathematik“ vorgesehen sind, aber auch das Unterrichten dieser Inhalte (wie eben geschildert finden sich stochastische Inhalte im bayerischen Lehrplan der sechsstufigen Realschulen in fast allen Klassenstufen) kann zu Problemen führen, da eine solide fachliche Grundlage ein Faktor für einen erfolgreichen Mathematikunterricht ist [85].

Lehrplaninhalte und zeitlicher Umfang für die Berufsoberschule

- **Technische Ausbildungsrichtung** (Umfang: ca. 106 Stunden): Stochastik: Zufallsexperiment und Ereignis; relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit; Berechnung von Wahrscheinlichkeiten; stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen; Zufallsgröße und Wahrscheinlichkeitsverteilung; Normalverteilung, Näherungsformel für die Binomialverteilung; Testen von Hypothesen (nur Klasse 13).
- **Nichttechnische Ausbildungsrichtung** (Umfang: ca. 56 Stunden; Inhalte analog zur Fachoberschule in dieser Ausbildungsrichtung).

Die Inhalte und auch der zeitliche Umfang der Disziplin Stochastik für die technische Ausbildungsrichtung in der Berufsoberschule sind fast vergleichbar mit denen des Leistungskurses und stellen damit einen völligen Kontrast zum entsprechenden Zweig in der Fachoberschule dar. Für die nichttechnische Ausrichtung sind Fach- und Berufsoberschule inhaltlich völlig, zeitlich annähernd identisch; der zeitliche Rahmen der beiden verschiedenen Zweige ist ähnlich wie das Verhältnis von Leistungskurs zu Grundkurs mit etwa 2:1 bewertet.

Ein zusammenfassender Kommentar zu den stochastischen Lehrinhalten sowie der zeitlichen Rahmenkonzeption soll die Analyse der Lehrplaninhalte abschließen. Die geschilderten Inhalte sowie auch der zeitliche Umfang, in dem der Lehrstoff vermittelt werden soll, muss in Hinblick auf mögliche Leistungsunterschiede in den durchgeführten Testerhebungen berücksichtigt werden. Es können folgende zentrale Kernpunkte aus der Analyse der Lehrpläne zusammengetragen werden:

- Im gymnasialen Sektor nimmt die zeitliche Intensivierung stochastischer Inhalte vom Leistungskurs über die G8-Konzeption bis hin zum Grundkurs ab;

die inhaltlichen Anforderungen und der zeitliche Aufwand scheinen im Leistungskurs gerechtfertigt zu sein, im G8-Zug ist dieser Aspekt zu diskutieren (unabhängig von den erzielten Testleistungen), da der zeitliche Umfang mit 94 Stunden im Vergleich zu den inhaltlichen Kernpunkten sehr breit bemessen ist, d.h. der geringe zeitliche Unterschied zwischen LK- und G8-Curricula passt nicht zu den markanten inhaltlichen Kürzungen.

- Die Fachoberschule sieht in der technischen Ausbildungsrichtung keine Inhalte der Stochastik vor, was möglicherweise für Studierende des Lehramts an Realschulen kurzfristig Diskrepanzen mit diesen Studieninhalten hervorrufen und längerfristig negative Auswirkungen bei der Vermittlung auf der Schulebene haben kann. Im nichttechnischen Zweig von Fach- bzw. Berufsoberschule wird ein solides Basiswissen gelehrt, die Inhalte und die Intensität der technischen Berufsoberschulausbildung weisen einen sehr hohen Anspruch auf.
- Auf dem Leistungskursniveau ist das der technischen BOS anzusiedeln, das G8-Konzept folgt diesen Ausrichtungen. Die übrigen Konstellationen (GK, FOS bzw. BOS nichttechnischer Zweig) bewegen sich etwa auf einem Level.

3.5.4 Leistungspotential von G8- und G9-AbsolventInnen

Zuerst werden die mittleren Leistungen der gymnasialen Vergleichsgruppen (achtjähriges Abitur (G8), neunjähriges Abitur unterteilt in Grundkurs (GK) und Leistungskurs (LK)) betrachtet; diese Ergebnisse wurden bereits geschildert, werden dennoch nochmal kurz zusammengestellt:

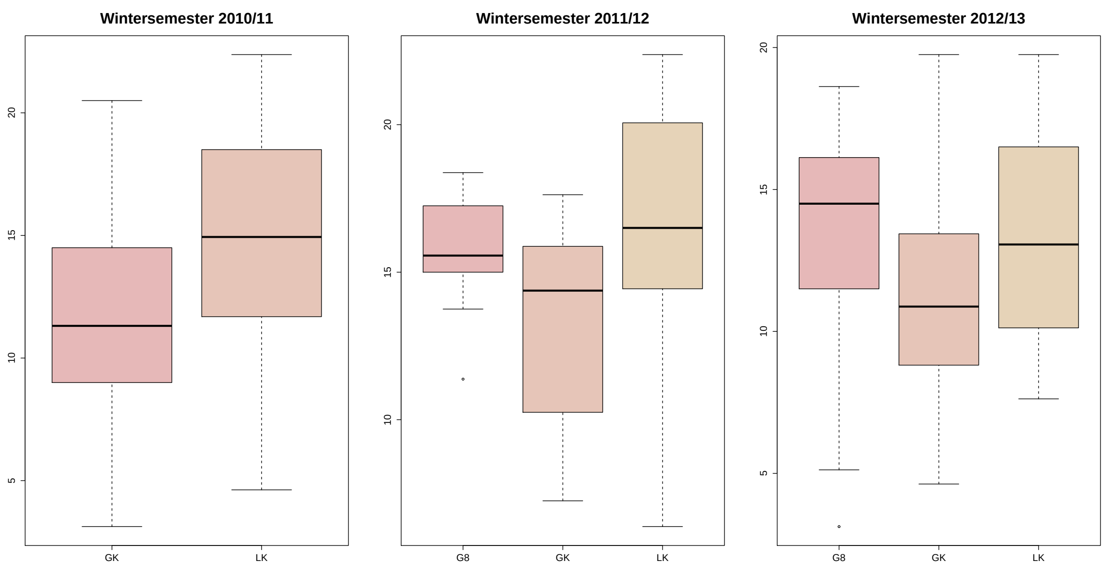

Abbildung 3.26: Boxplot für die Leistungen (Mittelwert) der gymnasialen Gruppen WS 10/11 bzw. WS 11/12 bzw. WS 12/13

Tabelle 3.19: Mittelwerte der Einzelfächer der drei Jahrgänge untergliedert nach gymnasialen Gruppen

	WS 10/11		**WS 11/12**			**WS 12/13**		
	GK	**LK**	**G8**	**GK**	**LK**	**G8**	**GK**	**LK**
Algebra	17,44	19,89	19,91	19,29	20,10	18,89	18,30	20,25
Geometrie	9,60	12,46	14,97	12,82	15,08	12,13	11,56	14,01
Analysis	11,87	16,09	16,53	13,00	16,63	12,82	8,52	11,12
Stochastik	8,44	11,71	11,87	9,18	13,50	9,96	7,13	7,88
Mittelwert	11,84	15,03	15,82	13,57	16,33	13,47	11,39	13,32
Anzahl	50	52	16	14	19	28	23	26

Nun werden die Leistungen der Gruppen G8 und G9 (unterteilt in Grund- und Leistungskurs) miteinander verglichen. Für den Jahrgang WS 10/11 werden nur die beiden G9-Vergleichsgruppen betrachtet; diese sind hinsichtlich der Gruppengröße fast gleich. In allen vier Bereichen sind die Unterschiede signifikant (bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 0{,}05$); es zeigen sich bei jeweils 24,00 erreichbaren Punkten folgende Differenzen: Algebra (2,45 Punkte), Geometrie (2,86), Analysis (4,22), Stochastik (3,27) und Mittelwert (3,19). Vor allem die Kluft in Analysis ist bedeutsam. Betrachtet man die Differenzen für den Jahrgang WS 11/12, fällt Folgendes auf: zwischen G8- und LK-Gruppe gibt es hinsichtlich der Fächer Algebra, Geometrie und Analysis fast keinen Unterschied, in Stochastik beträgt dieser 1,63 Punkte und folglich im Mittelwert etwa einen halben Punkt. Vergleicht man die G8- und GK-Gruppe, ist das Gefälle deutlich stärker; die G8-Gruppe ist in Algebra 0,62 Punkte, in Geometrie 2,15, in Analysis 3,53, in Stochastik 2,69 und im Mittelwert 2,25 besser, wiederum ist der Unterschied in Analysis am stärksten und auch signifikant (ebenso zwischen GK- und LK-Gruppe). Zusammenfassend sind für diesen Jahrgang die G8- und LK-Gruppe auf einem relativ ähnlich hohen Niveau, die GK-Gruppe ist deutlich schwächer; die Stichprobenumfänge der drei Gruppen sind relativ ähnlich. Die Gruppengrößen sind auch für den letzten Jahrgang recht ausgeglichen, die Leistungen aber nicht. Die Ergebnisse im Mittelwert für G8- und LK-Gruppe sind sehr ähnlich, wobei in den Einzelfächern variierende Leistungen vorliegen; in Algebra (1,36 Punkte) und Geometrie (1,88) ist die LK-Gruppe besser, in Analysis (1,70) und Stochastik (2,08) die G8-Gruppe. Das Ergebnis in Stochastik überrascht, da die oben beschriebene zeitliche Intensivierung der Stochastikinhalte für den Leistungskurs stärker ist als für die G8-Struktur und im Jahrgang WS 11/12 die Ergebnisse fast umgekehrt waren (1,63 Punkte mehr für die LK-Gruppe). Für den Vergleich von G8- und GK-Gruppe fallen vor allem die Leistungsunterschiede in Analysis auf (4,30 Punkte); in Algebra und Geometrie differieren die Ergebnisse um weniger als einen Punkt, in Stochastik hingegen um fast drei Punkte. Wieder zeigen sich ähnliche Ergebnisse für G8- und LK-Gruppe im Mittel (aber variierende Ergebnisse in den vier Einzeldisziplinen) und schwächere Leistungen für die GK-Gruppe (im Mittel von über zwei Punkten). Insgesamt sind die Differenzen in Analysis für alle drei Jahrgängen auffällig.

Als Fazit für den Vergleich zwischen G8- und G9-Leistungspotential ergibt sich: die Ergebnisse der G8-Gruppe zeigen, dass das Niveau dieser Gruppe sehr ähnlich dem der LK-Gruppe ist und deutlich besser als das der GK-Gruppe; daher kann aus der obigen Untersuchung geschlossen werden, dass die mathematischen Fähigkeiten (Vorwissen aus der Schule in den Disziplinen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik) von G8-Absolventinnen und -Absolventen auf Leistungskursniveau liegen und daher sicher nicht schlechter sind als die von G9-Absolventinnen und -Absolventen. Für den Jahrgang WS 11/12 ergeben sich die gewichteten arithmetischen Mittelwerte (es wird lediglich der Mittelwert der Einzelfächer betrachtet)

$$\bar{x}_{G8} = 15{,}82 \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{x}_{G9} = 15{,}15$$

sowie für den Jahrgang WS 12/13

$$\bar{x}_{G8} = 13{,}47 \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{x}_{G9} = 12{,}41;$$

die Unterschiede sind jeweils nicht signifikant. In der Vergleichsstudie „Trends in Mathematics and Science Study“ (TIMSS) von Baumert et al. werden auch Leistungsunterschiede zwischen Lernenden mit acht- und neunjähriger Gymnasialzeit (abhängig vom Bundesland) am Ende der Sekundarstufe II untersucht; es zeigen sich für das Fach Mathematik signifikant bessere Leistungen der Schülerinnen und Schüler in den G8-Ländern [58, S. 4], [8].

3.5.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Beschreibung der Leistungen in den vier Einzeldisziplinen zeigt für die drei Jahrgänge ähnliche Leistungen in den Bereichen der Sekundarstufe I (Algebra und Geometrie); in den Gebieten der Sekundarstufe II (Analysis und Stochastik) fällt der Jahrgang WS 12/13 gegenüber den anderen beiden ab. Insgesamt liegen die Leistungen im Mittel für die drei Jahrgänge etwa bei der Hälfte der Maximalpunktzahl bzw. leicht besser.

Für die Referenzgruppe stellen sich drei der elf Regressoren (persönliche und studienbezogene Angaben) als bedeutsam für die Zielgröße heraus; diese sind der studierte Lehramtstyp, das Kombinationsfach neben Mathematik und die mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe der Schule. Die Auswirkungen der beiden Regressoren Lehramtstyp und Schwerpunktsetzung auf das Leistungsbild der Studierenden sind auch für die beiden anderen Jahrgänge untersucht worden; die erklärende Variable Kombinationsfach wird dabei nicht berücksichtigt, da die Wahl der Kombinationsfächer für die drei Jahrgänge stark variiert und daher nur schwer ein Vergleich gezogen werden kann. Die bedeutsamen Einflüsse der beiden geschilderten Regressoren können zum Teil auch für die beiden anderen Jahrgänge festgestellt werden. Die übrigen Variablen des ersten Teils des Fragebogens (persönliche und studienbezogene Angaben) haben keine entscheidende Bedeutung für das Leistungspotential in den vier Testgebieten; dieser Aspekt zeigte sich bereits für die Referenzgruppe. Auf die übrigen Variablen zu Studien- und Berufswahlmotiven und Lernverhalten wird nicht mehr vergleichend eingegangen.

Der Vergleich zwischen G8- und G9-Absolventinnen und -Absolventen zeigt, dass die G8-Gruppe an die Leistungen der LK-Gruppe anknüpfen kann und damit bessere Ergebnisse als die GK-Gruppe erzielt. Die Untersuchung ergibt keine signifikanten Leistungsunterschiede zwischen den beiden Gruppen, wenn in der G9-Ausrichtung nicht nach Grund- und Leistungskurskurs unterschieden wird (vgl. dazu die arithmetischen Mittelwerte $\bar{x}_{G8}$ und $\bar{x}_{G9}$ der beiden Jahrgänge WS 11/12 und WS 12/13). Die aktuellen politischen Diskussionen (vor allem in Bayern) über das schwache Potential von G8-Schülerinnen und -Schüler kann damit nicht bestätigt werden, allerdings ist die Zahl der G8-Teilnehmenden an der Studie zu gering, um eine konkrete Aussage zu machen (explorativer Ansatz).

4 Längsschnittstudie

In einer Längsschnittstudie werden Erhebungen zum schulischen und universitären mathematischen Wissen der Studierenden durchgeführt; ferner werden persönliche und studienbezogene Angaben, Studien- und Berufswahlmotive und Lernstrategien sowie deren Einfluss auf das Leistungsbild der Studierenden analysiert. Zudem wird die Wirksamkeit der Lehre im fachmathematischen Ausbildungsbereich für das Unterrichtsfach Mathematik untersucht. Diese Studie umfasst den Zeitraum vom Wintersemester 2010/11 bis zum Sommersemester 2012, also vier Fachsemester, was dem Grundstudium für den Studiengang Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München bzw. in Bayern entspricht; es werden also die Studienanfängerinnen und Studienanfänger des Wintersemesters 2010/11 über vier Semester begleitet. Die Längsschnittuntersuchung weist folgende Struktur auf: im Wintersemester 2010/11 wird das Wissen der Studierenden in den vier schulrelevanten Gebieten Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik zu Studienbeginn erhoben (Vortest; bereits in der Querschnittstudie vorgestellt). Nach der Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ (erstes Fachsemester) wird das universitäre Wissen der Studierenden zu diesen Vorlesungsinhalten gemessen (Sommersemester 2011). Analog wird für den zweiten Teil der Vorlesung vorgegangen (Wintersemester 2011/12). Die Untersuchung schließt im Sommersemester 2012 mit dem Nachtest, der wiederum das Wissen der Studierenden in den vier schulrelevanten Gebieten Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik nach zwei Studienjahren erhebt.

Das Vorgehen in der Längsschnittstudie ist im Wesentlichen explorativ. Dieses Kapitel weist zwei große Abschnitte auf:

- Beschreibung der Studienkonzeption des Unterrichtsfachs Mathematik (Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen) untergliedert in:
  - Charakterisierung des allgemeinen Studienaufbaus für das Unterrichtsfach Mathematik auf der Grundlage der modularisierten Fassung der Lehramtsprüfungsordnung I vom 13.03.2008.
  - Vorstellung der Struktur des fachwissenschaftlichen Studiums im Unterrichtsfach Mathematik.
  - Beschreibung der neukonzipierten Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ mit Leitgedanken, Inhalten und Zielen.

- Darstellung und Vergleich der Leistungen der Studierenden im schultypischen mathematischen Wissen (Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik) zu Studienbeginn (Vortest) und nach vier Fachsemester (Nachtest); Darstellung und Vergleich der Leistungen in Abhängigkeit von speziellen Regressoren zu beiden Erhebungszeitpunkten.

Nach den konzeptionellen Schilderungen des ersten Abschnitts, werden im zweiten Abschnitt Ergebnisse für die vierte Forschungsfrage dargestellt; diese Ergebnisse werden in diesem Abschnitt auch diskutiert und interpretiert.

> **Forschungsfrage 4**: Welche Entwicklung ergibt sich hinsichtlich der Kenntnisse in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik und hinsichtlich des Einflusses der exogenen Variablen auf dieses Wissen nach dem Besuch der neukonzipierten Studieneingangsphase?

4.1 Studienkonzeption des Unterrichtsfachs Mathematik

In diesem Abschnitt wird die Studienkonzeption des Unterrichtsfachs Mathematik beschrieben. Es werden zunächst übergeordnete Strukturen skizziert, daraufhin der fachwissenschaftliche Bereich des Unterrichtsfachs fokussiert und schließlich die neukonzipierten Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ der ersten beiden Fachsemester ausführlich dargestellt.

4.1.1 Allgemeiner Studienaufbau

Zum Wintersemester 2010/11 ist das Studium für ein Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen an der Ludwig-Maximilians-Universität München (Unterrichtsfach Mathematik) neu strukturiert worden. Grundlage dafür ist die modularisierte Fassung der Lehramtsprüfungsordnung I vom 13.03.2008 [13]. Neben fachdidaktischen Aspekten (auf diese wird nur am Rande eingegangen) werden für die fachwissenschaftliche Ausbildung im Unterrichtsfach Mathematik folgende Schwerpunktthemen gelehrt:

- 1./2. Fachsemester: Grundlagen der Mathematik I + II.
- 3./4. Fachsemester: Lineare Algebra und analytische Geometrie I + II.
- 5./6. Fachsemester: Differential- und Integralrechnung I + II.
- 7. Fachsemester: Mathematik im Querschnitt.

Diese sieben Veranstaltungen umfassen jeweils einen zeitlichen Rahmen von vier Semesterwochenstunden für die Vorlesung und zwei Semesterwochenstunden für die Übung (4 + 2 SWS); Vorlesung und Übung werden als Plenarveranstaltungen abgehalten. Zudem werden zahlreiche Tutorien in Kleingruppen angeboten. Dieses fachwissenschaftliche Curriculum ist für alle drei zu studierenden Schultypen (Grund-, Haupt- und Realschule) identisch, da auch die fachliche Abschlussprüfung (Erstes Staatsexamen) für diese Ausrichtung gleich ist.

In der Fachdidaktik werden die Inhalte für die drei Studienrichtungen differenziert aufbereitet, da auch die Prüfungen im Ersten Staatsexamen schultypspezifisch gestellt werden. Im Folgenden wird beispielhaft für den Studiengang Lehramt an Realschulen die fachdidaktische Ausbildung dargelegt:

- 1. Fachsemester: Einführung in die Mathematikdidaktik der Sekundarstufe I.
- 2. Fachsemester: Didaktik in den Bereichen Algebra, Zahlen und Operationen.
- 3. Fachsemester: Didaktik in den Bereichen Funktionen, Daten und Zufall.
- 4. Fachsemester: Didaktik in den Bereichen Raum und Form.

Die Inhalte dieser vier Veranstaltungen (Lehramt für Realschulen) werden in je einer zweistündigen Vorlesung und einstündigen Übung behandelt (2 + 1 SWS). Im Bereich des Grund- und Hauptschullehramts werden fachdidaktische Inhalte zusätzlich auch in Form von Seminaren unterrichtet.

Für die fachwissenschaftliche Ausbildung sind 60 ECTS-Punkte und für die fachdidaktische 12 ECTS-Punkte festgesetzt; damit ergibt sich eine Gewichtung von 5:1 für die fachwissenschaftlichen Komponenten (diese Verteilung gilt für das Studium Lehramt Realschule; die beiden anderen Ausrichtungen Lehramt Grundschule bzw. Lehramt Hauptschule variieren nur gering).

4.1.2 Konzeption des fachwissenschaftlichen Studiums im Unterrichtsfach Mathematik

Es werden im Folgenden die Inhalte der ersten beiden Fachsemester für die fachwissenschaftliche Ausbildung detailliert beschrieben und ergänzend in Kurzform die Kernpunkte der übrigen fünf Fachsemester (3. bis 7. Fachsemester) dargestellt. Der Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik I + II“ stellt im Vergleich zur Lehramtsprüfungsordnung vom 07.11.2002 [14] ein neues Konzept dar, welches speziell für den Einstieg in das Studium im Fach Mathematik ausgelegt ist. In diesem Kapitel wird auch der Einfluss dieser Veranstaltungen auf das Leistungsbild der Studierenden untersucht; gerade deshalb wird eine ausführliche Darstellung von Leitgedanke, Inhalten und Zielen dieser zweisemestrigen Veranstaltung geschildert.

Die fachwissenschaftliche Ausbildung im Unterrichtsfach Mathematik setzt sich aus drei großen inhaltlichen Blöcken zusammen, welche durch die modularisierte Fassung der Lehramtsprüfungsordnung I vom 13.03.2008 vorgegeben sind [13]:

- Block 1: Elementare Zahlentheorie, elementare Stochastik und Elementargeometrie.
- Block 2: Lineare Algebra und analytische Geometrie.
- Block 3: Differential- und Integralrechnung.

Diese Inhalte werden im Rahmen der fachwissenschaftlichen Ausbildung im Unterrichtsfach folgendermaßen aufgegriffen (vgl. obige Übersicht):

- Erstes Studienjahr (1./2. Fachsemester): Grundlagen der Mathematik I + II; hier werden die Inhalte von Block 1 thematisiert.
- Zweites Studienjahr (3./4. Fachsemester): Lineare Algebra und analytische Geometrie I + II; hier werden die Inhalte von Block 2 thematisiert.
- Drittes Studienjahr (5./6. Fachsemester): Differential- und Integralrechnung I + II; hier werden die Inhalte von Block 3 thematisiert.

Dieser Aufbau hat folgende konzeptionelle Begründung: Im ersten Studienjahr werden Inhalte der Gebiete elementare Zahlentheorie, elementare Stochastik und Elementargeometrie unterrichtet. Diese Inhalte sind an schulische Themengebiete angelehnt und den Studienanfängerinnen und Studienanfänger daher noch bekannt; diese Einführung in die universitäre Mathematik kann den Abstraktionsschock im Fach Mathematik beim Übergang von der Schule zur Universität dämpfen. Ferner werden im Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ grundlegende Begrifflichkeiten und Methoden eingeübt, die für alle Gebiete der Mathematik von Bedeutung sind, eben auch für die Inhalte des zweiten und dritten Studienjahrs (Block 2: Lineare Algebra und analytische Geometrie und Block 3: Differential- und Integralrechnung). Die Themen des ersten Studienjahrs finden keinen direkten Niederschlag in den schriftlichen Prüfungen im Rahmen des Ersten Staatsexamens (die LPO I vom 13.03.2008 sieht in der Fachwissenschaft zwei schriftliche Prüfungen in den Gebieten „Lineare Algebra und analytische Geometrie“ und „Differential- und Integralrechnung“ vor) und sind daher am Anfang der Ausbildung verankert, um die staatsexamensrelevanten Inhalte mehr an den Schluss des Studiums (3. bis 7. Fachsemester) zu verlagern. Mathematik im Querschnitt (7. Fachsemester) fokussiert schließlich bedeutsamen Inhalte der beiden Gebiete lineare Algebra und analytische Geometrie sowie Differential- und Integralrechnung.

Die fachwissenschaftliche Ausbildung im Unterrichtsfach Mathematik erfährt in der modularisierten Fassung der Lehramtsprüfungsordnung I vom 13.03.2008 (an der Ludwig-Maximilians-Universität München umgesetzt ab dem Wintersemester 2010/11) im Vergleich zur alten Ausrichtung der Lehramtsprüfungsordnung I vom

07.11.2002 eine neue Strukturierung [13], [14]; während die Inhalte des 3./4. Fachsemesters (lineare Algebra und analytische Geometrie), des 5./6. Fachsemesters (Differential- und Integralrechnung) und des 7. Fachsemesters (Mathematik im Querschnitt) bereits in der vorherigen Ausrichtung (Lehramtsprüfungsordnung I vom 07.11.2002) ihren eigenständigen Platz eingenommen haben, ist der Vorlesungszyklus Grundlagen der Mathematik neu in den Studienkanon implementiert worden. Die Inhalte der Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I" (im Wintersemester 2010/11) und „Grundlagen der Mathematik II" (im Sommersemester 2011) sollen eine Einführung in die universitäre Mathematik liefern und so eine zweisemestrige Verbindung zwischen der eher algorithmischen und beispielorientierten Schulmathematik und der axiomatisch-deduktiv aufgebauten Hochschulmathematik darstellen. Diese Neukonzeption wird nun in ihrem Leitgedanken und den inhaltlichen Schwerpunkten ausführlich vorgestellt. Am Ende dieses Abschnitts werden dann in Kurzform die Themen der beiden anderen Blöcke lineare Algebra und analytische Geometrie sowie Differential- und Integralrechnung geschildert.

4.1.3 Beschreibung des Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik"

Im Folgenden wird zuerst der Leitgedanke der neukonzipierten Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I" und „Grundlagen der Mathematik II" vorgestellt und daraufhin die inhaltliche Schwerpunktsetzung diskutiert. Abschließend wird die Auswahl der Inhalte und der strukturelle Aufbau begründet.

Leitgedanke

Im Rahmen dieses zweisemestrigen Kanons werden zum einen einige für alle Gebiete der Mathematik zentrale Begriffe und Methoden vorgestellt und die klassischen Zahlenbereiche von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen betrachtet; zum anderen werden ausgewählte Fragestellungen aus der elementaren Zahlentheorie, der elementaren Stochastik und der Elementargeometrie behandelt, die nicht nur von eigenständiger Bedeutung sind, sondern auch das Verständnis für die grundlegenden Begriffe fördern und gleichzeitig Fundament für weitere Gebiete der Mathematik sind. Als Leitfaden dienen die klassischen Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$; diese werden in ihrer Struktur beschrieben und charakteristische Eigenschaften abgeleitet. Für jeden dieser Zahlenbereiche werden spezifische Anwendungen thematisiert, wie beispielsweise die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung bei der Behandlung des Zahlenbereichs $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Folgende Aufzählung soll einen kurzen thematischen Überblick verschaffen, bevor die Inhalte genauer beschrieben werden:

- Grundlegende Begrifflichkeiten und Methoden: Aussagenlogik, Mengen und Abbildungen.
- Zahlenbereich $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen: Peano-Axiome, Induktion und Rekursion, Kombinatorik.
- Zahlenbereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen: Teilbarkeitslehre, Primzahlen, Restklassenringe.
- Zahlenbereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen: Brüche und Bruchzahlen, elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung.
- Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen: Vollständigkeit, Elementargeometrie, deskriptive Statistik.
- Zahlenbereich $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen: Gaußsche Zahlenebene, Polynome und Nullstellen.

Grundlegende Begrifflichkeiten und Methoden

Zur Einführung werden mathematische Sprech- und Arbeitsweisen im Rahmen von Aussagen und Mengen, den Grundrechenarten sowie den Abbildungen thematisiert. Zunächst werden Aussagen im mathematischen Sinne und ihre Negation definiert, logische Verknüpfungen zwischen Aussagen wie Konjunktion, Disjunktion, Implikation und Äquivalenz betrachtet sowie daraus grundlegende Beweismethoden (direkter und indirekter Beweis sowie Beweis durch Widerspruch) abgeleitet. Mit dem Konzept der Mengen wird ein zentraler Begriff der Mathematik eingeführt. Es werden die verschiedenen Verknüpfungen von Mengen wie Durchschnitt und Vereinigung sowie die Komplementbildung betrachtet und die Analogie zu den Aussagen thematisiert; damit können quantifizierte Aussagen mit Hilfe der beiden Quantoren formuliert werden. Anschließend werden die zentralen Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ auch als Beispielmaterial kurz vorgestellt und begründet, dass die Erweiterung der Zahlenbereiche aus dem Anliegen, bestimmte Typen von Gleichungen zu lösen, resultiert. Dabei werden die algebraischen Eigenschaften von $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ hinsichtlich der Grundrechenarten im Begriff des Körpers abstrahiert sowie die natürliche Anordnung auf $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ fokussiert; auf dieser Basis werden Gleichungen und Ungleichungen gelöst. Schließlich wird der Begriff der Abbildung über Quelle, Ziel und Abbildungsvorschrift definiert und zentrale Eigenschaften wie Injektivität, Surjektivität und Bijektivität behandelt; damit können nun Mengen hinsichtlich ihrer Mächtigkeit betrachtet und verglichen werden. Spezielle Abbildungen und ihre Eigenschaften werden in den weiterführenden Vorlesungen der linearen Algebra und der Differential- und Integralrechnung einen breiten Rahmen einnehmen.

Zahlenbereich $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen

Zunächst wird das Prinzip des Zählens als das Charakteristikum der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen herausgearbeitet, in den Peano-Axiomen abstrahiert und auf dieser Grundlage das Induktionsprinzip eingeführt, worauf die vollständige Induktion als wichtige Beweismethode für Aussagen über den natürlichen Zahlen vorgestellt und an Beispielen eingeübt wird. Darauf basiert die Rekursion, wodurch auf der Menge $\mathbb{N}$ Addition und Multiplikation sowie die Anordnung erklärt und ihre Eigenschaften induktiv nachgewiesen werden. Der Begriff der Folge wird eingeführt; ihre systematische Untersuchung, etwa die Betrachtung der Konvergenz, bleibt jedoch der Analysis vorbehalten. Als eine klassische Anwendung der natürlichen Zahlen werden im Rahmen des Vorlesungskanons Inhalte der Kombinatorik besprochen, die sich mit der Mächtigkeit endlicher Mengen beschäftigt; dabei werden grundlegende Begriffe wie Potenz, Fakultät und Binomialkoeffizient eingeführt und der Binomische Lehrsatz bewiesen. Die Fragestellungen werden auf Urnenexperimente (Zugexperimente) zurückgeführt; dabei werden aus einer Urne mit n Kugeln, die von 1 bis n durchnummeriert sind, k Kugeln mit/ohne Zurücklegen gezogen und die Nummern der gezogenen Kugeln mit/ohne Beachtung der Reihenfolge notiert. Der Begriff der Permutation wird im Sinne des Urnenexperiments besprochen und als bijektive Selbstabbildung der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ interpretiert; dies spannt den Bogen zur algebraischen Struktur der Gruppe, da die symmetrische Gruppe S_n im Zusammenhang mit Permutationen auftritt; anschließend wird allgemein der Begriff Gruppe definiert und die charakterisierenden Eigenschaften vorgestellt.

Zahlenbereich $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen

Der Wunsch, auch die Subtraktion ohne Einschränkung ausführen zu können, motiviert die Erweiterung des Zahlenbereichs $\mathbb{N}$ auf den Zahlenbereich $\mathbb{Z}$, wobei 0 und die Elemente von $-\mathbb{N}$ hinzugenommen sowie Addition, Multiplikation und Anordnung unter Beachtung des Permanenzprinzips auf $\mathbb{Z}$ fortgesetzt werden. Die Untersuchung charakteristischer Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ erfolgt im Rahmen der elementaren Zahlentheorie über die zentralen Begriffe Teiler und Vielfaches (samt dem Konzept des größten gemeinsamen Teilers ggT und des kleinsten gemeinsamen Vielfachen kgV) mit Hilfe der Division mit Rest und des euklidischen Algorithmus. Für eine ganze Zahl p mit $|p| \geq 2$ werden die Begriffe irreduzibel und Primelement definiert und deren Äquivalenz im Lemma von Euklid formuliert. Auf dieser Basis wird der Hauptsatz der Zahlentheorie über die eindeutige Primfaktorzerlegung gezeigt; der Beweis dieses Kernstücks der elementaren Zahlentheorie kann mit Hilfe des Lemmas von Euklid über $\mathbb{Z}$ übersichtlicher darstellt werden als im typischen Beweisverfahren über $\mathbb{N}$. Ferner wird das Sieb des Eratosthenes als Methode zur Ermittlung von Primzahlen vorgestellt und systematisch erläutert. Auf der Grundlage der oben geschilderten charakterisierenden Eigenschaften wird der Zahlenbereich $\mathbb{Z}$ der ganzen

Zahlen nun in seiner algebraischen Struktur als Integritätsring abstrahiert; darauf aufbauend wird die Konstruktion von Restklassenringen (Modulorechnung) thematisiert und abschließend werden lineare Kongruenzen gelöst; diese werden systematisch über die Ermittlung der Lösung der homogenen linearen Kongruenz und einer partikulären Lösung der inhomogenen linearen Kongruenz behandelt, was einen Bezug zur linearen Algebra im Rahmen der linearen Gleichungssysteme aufweist.

Zahlenbereich $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen

Es wird zuerst der Begriff der Relation R zwischen zwei nichtleeren Mengen M und N als $R \subseteq M \times N$ definiert und der Zusammenhang zu einer Abbildung dargestellt; danach werden für eine Relation $R \subseteq M \times M$ auf der Menge M zentrale Eigenschaften wie Reflexivität, Symmetrie und Transitivität besprochen, was zum Begriff der Äquivalenzrelation mit der Partition der Menge M in disjunkte Äquivalenzklassen führt. Dies dient der Konstruktion des Zahlenbereichs $\mathbb{Q}$ über die Äquivalenzrelation, die die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ der formalen Brüche mit Zähler $z \in \mathbb{Z}$ und Nenner $n \in \mathbb{N}$ in Äquivalenzklassen gleichwertiger Brüche zerlegt. Es wird gezeigt, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ ein angeordneter Körper ist: es sind nunmehr alle Gleichungen $b + x = a$ für alle a, $b \in \mathbb{Q}$ und $d \cdot x = c$ für alle c, $d \in \mathbb{Q}$ mit $d \neq 0$ in $\mathbb{Q}$ eindeutig lösbar. Ferner wird die Primfaktorzerlegung von rationalen Zahlen $q \in \mathbb{Q}$ mit $q \neq 0$ mit der Darstellung $q = \pm p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{e_r}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ und ganzzahligen Exponenten $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{Z}$ thematisiert. Als Anwendung der rationalen Zahlen wird die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet, da dort Wahrscheinlichkeiten häufig durch ein Verhältnis ganzer Zahlen, also eine rationale Zahl $p \in \mathbb{Q}$ mit $0 \leq p \leq 1$ dargestellt werden können. In diesem Rahmen wird das grundlegende Modell eines Zufallsexperiments mit Ergebnissen und Ereignissen behandelt und zentrale Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit im Begriff des endlichen Wahrscheinlichkeitsraums axiomatisiert. Besondere Beachtung erfahren die Laplacewahrscheinlichkeit (mit gleichwahrscheinlichen Elementarereignissen) sowie die hypergeometrische Verteilung und die Binomialverteilung. Ferner wird im Rahmen von mehrstufigen Zufallsexperimenten die bedingte Wahrscheinlichkeit und die Unabhängigkeit von Ereignissen definiert.

Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen

Die Motivation für die Erweiterung des Zahlenbereichs $\mathbb{Q}$ auf den Zahlenbereich $\mathbb{R}$ findet sich in der Elementargeometrie; dabei wird einführend thematisiert, wann zwei Größen kommensurabel sind; es wird gezeigt, dass die Seite und die Diagonale eines Quadrats nicht kommensurabel sind, also der Quotient beider Größen nicht durch eine rationale Zahl beschrieben werden kann. Zentrale Inhalte der Elementargeometrie sind die Kongruenzabbildungen mit der Satzgruppe des Pythagoras sowie die Ähnlichkeitsabbildungen mit der Betrachtung der trigonometrischen Beziehungen sin, cos und tan. Der Begriff der Kongruenzabbildung wird als bijektive längentreue Selbstabbildung der Anschauungsebene definiert, verschiedene Typen der Doppelachsenspiegelung als Bewegung vorgestellt und Kongruenzsätze am Dreieck analysiert. Bei der intensiven Betrachtung der Satzgruppe des Pythagoras werden mehrere Beweismethoden für den Kathetensatz, den Höhensatz und den Satz des Pythagoras vorgestellt und deren Umkehrung thematisiert und gezeigt, dass nur der Satz des Pythagoras uneingeschränkt umkehrbar ist. Es wird der Begriff der Ähnlichkeitsabbildung definiert und zentrale Eigenschaften dieses Typs erörtert sowie Kriterien für die Ähnlichkeit von Dreiecken vorgestellt. Auf Grundlage dieser Ähnlichkeitskriterien können die trigonometrischen Beziehungen sin, cos und tan an einem rechtwinkligen Dreieck für Winkelgrößen zwischen $0°$ und $90°$ eingeführt werden; anschließend werden die Winkelmaße auf $0°$ bis $360°$ verallgemeinert. Die trigonometrischen Betrachtungen werden auf beliebige Dreiecke übertragen und mit Sinus- und Cosinussatz abgeschlossen. Im Hinblick auf die Existenz wichtiger inkommensurabler Größen wird der Zahlenbereich $\mathbb{R}$ als Menge der Dedekindscher Schnitte über $\mathbb{Q}$ definiert und gezeigt, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ wie schon $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ ein archimedisch angeordneter Körper ist. Als zentraler Unterschied wird die Vollständigkeit des Zahlenbereichs $\mathbb{R}$ aufgezeigt; jede nichtleere nach oben bzw. unten beschränkte Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt also ein Supremum $\sup M$ bzw. ein Infimum $\inf M$ in $\mathbb{R}$. Im Rahmen des Vorlesungszyklus vom Wintersemester 2010/11 und Sommersemester 2011 wird der Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen über Betrachtungen der Elementargeometrie motiviert. Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen beziehen sich stets auf diesen Vorlesungszyklus. Wie im obigen Leitgedanken beschrieben, kann diese Einführung in die reellen Zahlen auch durch die Thematisierung der deskriptiven Statistik erfolgen; dieser Ansatz wurde im darauffolgenden Zyklus (Wintersemester 2011/12 und Sommersemester 2012) fokussiert. Folgende Übersicht skizziert stichpunktartig die Inhalte der deskriptiven Statistik: Es wird zuerst die Klassifikation von Datensätzen behandelt (ein- und mehrdimensional; qualitativ, ordinal, quantitativ; diskret, stetig). Daraufhin werden eindimensionale Datensätze mittels Kenngrößen (Lage- und Streuungsmaße) beschrieben; thematisiert werden dabei Modus, arithmetisches, gewichtetes und geometrisches Mittel, empirische Varianz, empirische Standardabweichung, Median und empirisches p-Quantil. Zudem werden quantitative Datensätze durch empirische Verteilungsfunktion, Histogramme und Boxplots veranschaulicht. Nun werden auch zweidimensionalen Datensätze mittels Kenngrößen (Zusammenhangsmaße) beschrieben; besprochen werden dabei Kreuzproduktverhältnis, empirische Kovarianz, empirischer Korrelationskoeffizient und Regressionsgeraden als Veranschaulichung eines linearen Zusammenhangs.

Zahlenbereich $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

Da im angeordneten Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ jedes Quadrat zwingend nichtnegativ ist, führt das Bedürfnis, jede quadratische Gleichung lösen zu können, auf die Erweiterung zum Zahlenbereich $\mathbb{C}$, der ein Element i mit $i^2 = -1$ beinhaltet. Die Zahlenmenge $\mathbb{C} = \{a + i \cdot b \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$ wird eingeführt, wobei eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ über Real- und Imaginärteil dargestellt und in der Gaußschen Zahlenebene veranschaulicht wird; danach werden Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ definiert und nachgewiesen, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot, <)$ ein Körper ist, der aufgrund von $i^2 = -1$ nicht anordnungsfähig sein kann. Die komplexe Konjugation wird als Körperautomorphismus von $\mathbb{C}$ thematisiert. Für eine komplexe Zahl wird neben der Darstellung durch Real- und Imaginärteil die Polardarstellung durch Angabe des Betrags und des Arguments eingeführt und damit die Grundrechenarten in der Gaußschen Zahlenebene illustriert. Ferner wird gezeigt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die reine Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ genau n verschiedene Lösungen besitzt und sich dieses Ergebnis auf jede Gleichung $z^n = w$ mit $0 \neq w \in \mathbb{C}$ überträgt; bei der Bestimmung der Lösungen werden Eigenschaften von sin und cos wiederholt und vertieft. Schließlich wird der Begriff des Polynoms $p = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit Potenzen $X^n, X^{n-1}, \ldots, X^1 = X$ und $X^0 = 1$ in einer Unbestimmten X und Koeffizienten $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ in einem Körper $(K, +, \cdot)$ definiert und zum Abschluss dieses zweisemestrigen Vorlesungskanons der Fundamentalsatz der Algebra, wonach jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten eine komplexe Nullstelle besitzt, besprochen.

Spezifische und zielgruppenorientierte Neukonzeption der Vorlesungsstruktur

Dieser Ansatz weicht vom klassischen Aufbau in den fachmathematischen Vorlesungen ab und thematisiert zu Studienbeginn nicht die Inhalte der beiden üblichen Anfängerveranstaltungen „Lineare Algebra“ bzw. „Differential- und Integralrechnung“. Diese Aspekte sind dann für das dritte und vierte Fachsemester (lineare Algebra) bzw. fünfte und sechste Fachsemester (Differential- und Integralrechnung) vorgesehen. Die Neuerung wird durch die beiden Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I“ (erstes Fachsemester) und „Grundlagen der Mathematik II“ (zweites Fachsemester) implementiert. Die Inhalte dieser beiden Veranstaltungen haben eine spezifisch auf die Zielgruppe der angehenden Grund-, Haupt- oder Realschullehrkräfte ausgelegte Orientierung. Ferner wird dieses Gefüge des ersten Studienjahrs durch einen zweiwöchigen Brückenkurs komplettiert. Zentrale Zielvorstellungen dieser neukonzipierten Studieneingangsphase (Brückenkurs sowie die Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“) sind das Kennenlernen hochschulmathematischer Denkund Arbeitsweisen sowie die Darstellung des universitären Charakters der Mathematik samt seiner Vermittlungsstruktur. Neben diesen globalen Zielen sollen nun inhaltliche Intentionen und ihre Begründung geschildert werden.

Thematisierung von Schulinhalten: Die vorgestellte Neukonzeption der ersten beiden Fachsemester umfasst Inhalte der drei Disziplinen elementare Zahlentheorie, elementare Stochastik und Elementargeometrie. In diesem Rahmen werden zentrale Schulinhalte vom höheren Standpunkt der universitären Mathematik betrachtet. Diese Thematisierung dämpft den Abstraktionsschock (vgl. erste Bruchstelle in der von Felix Klein beschriebenen „Doppelten Diskontinuität“ [63]), der durch den axiomatisch-deduktiven Aufbau der Hochschulmathematik hervorgerufen wird, da sich die Inhalte auf bereits bekannte Themen aus der Schulzeit beziehen. Exemplarische Beispiele sind die Teilbarkeitslehre, die Laplacewahrscheinlichkeit sowie die Satzgruppe des Pythagoras.

Fundiertes Grundlagenwissen: In dieser zweisemestrigen Veranstaltung werden einige für alle Gebiete der Mathematik zentrale Begriffe und Methoden vorgestellt. Dieser Ansatz bietet die Gelegenheit, dass diese essentiellen Charakteristika der Hochschulmathematik zu Studienbeginn eingeführt und wiederkehrend in den Folgeveranstaltungen unter anderen Gesichtspunkten thematisiert werden, was zu einer engen Vernetzung der Begrifflichkeiten führt; damit kann zum einen die Stärke des axiomatischen Grundgerüsts, nämlich der formal-logische Aufbau der Hochschulmathematik, ausgeschöpft und zum anderen durch die rekapitulierende Begriffsbetrachtung das Wesen der universitären Mathematik näher gebracht werden. Somit sind die Thematiken der Veranstaltung nicht nur von eigenständiger Bedeutung, sondern dienen dem Verständnis für die grundlegenden Begriffe und stellen zudem ein Fundament für weitere Gebiete der Mathematik dar. Diese Konzeption stellt sich der Bruchstelle zwischen Schule und Universität im Fach Mathematik und setzt sich mit der Kluft beim Übergang zwischen den beiden Bildungsinstitutionen auseinander.

4.1.4 Inhalte der Gebiete lineare Algebra und analytische Geometrie sowie Differential- und Integralrechnung

Abschließend werden die Inhalte der übrigen Veranstaltungen (3. bis 7. Fachsemester) dargelegt, um die inhaltlichen Ansprüchen der fachwissenschaftlichen Ausbildung im Unterrichtsfach Mathematik abzurunden. Das Erste Staatsexamen sieht gemäß der Lehramtsprüfungsordnung I vom 13.03.2008 jeweils eine vierstündige schriftliche Prüfung in den Gebieten „Lineare Algebra und analytische Geometrie“

und „Differential- und Integralrechnung“ vor (für alle drei zu studierenden Lehramtstypen identisch); ferner werden diese fachwissenschaftlichen Anforderungen durch eine dreistündige schriftliche Prüfung in Fachdidaktik komplettiert (spezifisch auf den studierten Lehramtstyp zugeschnitten). Das Bayerische Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst legt für die beiden fachwissenschaftlichen Komponenten folgende Punkte als Kerncurriculum fest [12]: Für lineare Algebra und analytische Geometrie:

- Lineare Abbildungen, Matrizenrechnung, lineare Gleichungssysteme.
- Eigenwerte und Eigenräume reeller Matrizen, Diagonalisierbarkeit.
- Euklidische Vektorräume (Längen- und Winkelmessung, Orthonormalbasis, orthogonale Abbildungen und Matrizen).
- Analytische Geometrie im $\mathbb{R}^n$ (affine Unterräume, affine Abbildungen und Bewegungen, Vielecke und Polyeder, Kegelschnitte und ihre Normalformen).

Für Differential- und Integralrechnung:

- Folgen und Reihen reeller Zahlen, Grenzwerte und Konvergenzkriterien.
- Funktionen einer reellen Veränderlichen (Grenzwerte und Stetigkeit, elementare Funktionen, Differential- und Integralrechnung, Taylorformel und Potenzreihen).
- Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher (Grenzwerte und Stetigkeit, Differentialrechnung).
- Gewöhnliche Differentialgleichungen (Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Anfangswertprobleme, elementare Lösungsmethoden, lineare Differentialgleichungen).

Die Inhalte der Vorlesungen des 3. bis 7. Fachsemesters („Lineare Algebra und analytische Geometrie I + II“, „Differential- und Integralrechnung I + II“ und „Mathematik im Querschnitt“) greifen die eben dargestellten Inhalte des Kerncurriculum auf. In der Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie I“ werden die Themen lineare Abbildungen, Matrizenrechnung, lineare Gleichungssysteme auf der grundlegenden Basis des Begriffes des Vektorraums behandelt; im zweiten Teil werden Eigenwerte und Eigenräume reeller Matrizen und Diagonalisierbarkeit, euklidische Vektorräume sowie Teile der analytische Geometrie im $\mathbb{R}^n$ (affine Unterräume, affine Abbildungen und Bewegungen) besprochen. Im ersten Teil der „Differential- und Integralrechnung“ werden die Themen Folgen und Reihen reeller Zahlen samt Grenzwerten und Konvergenzkriterien sowie Funktionen einer reellen Veränderlichen (Grenzwerte und Stetigkeit, elementare Funktionen und Differential- und Integralrechnung) behandelt. Im zweiten Teil wird die Thematik Funktionen einer reellen Veränderlichen durch Taylorformel und Potenzreihen komplettiert und Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher (Grenzwerte und Stetigkeit sowie Differentialrechnung) gelehrt. Die Veranstaltung „Mathematik im Querschnitt“ (7. Fachsemester) greift im Rahmen der linearen Algebra und analytischen Geometrie Themen der analytischen Geometrie im $\mathbb{R}^n$ (Vielecke und Polyeder, Kegelschnitte und ihre Normalformen) sowie im Zuge der Differential- und Integralrechnung gewöhnliche Differentialgleichungen (Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Anfangswertprobleme, elementare Lösungsmethoden, lineare Differentialgleichungen) auf.

4.2 Darstellung und Vergleich zentraler Ergebnisse in Vor- und Nachtest

Im Folgenden werden die Hauptergebnisse von Vor- und Nachtest skizziert und daraufhin miteinander verglichen. Die Ergebnisse des Vortests (schulisches Wissen in den Gebieten Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik zu Studienbeginn und Einfluss erklärender Variablen auf die erzielten Leistungen in den vier Testerhebungen; Studienanfängerinnen und Studienanfänger Wintersemester 2010/11) wurden im Rahmen der Querschnittstudie ausführlich dargestellt. Die Hauptresultate werden in Kurzform nochmals dargelegt, da diese als Grundlage für das schulische Wissen der Studierenden zu Studienbeginn dienen. Daraufhin werden die Ergebnisse im Nachtest vorgestellt, diese geben einen Überblick über das schulische Wissen der Studierenden nach vier Fachsemestern. Zwischen Vor- und Nachtest haben die Studierenden die neukonzipierten Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ besucht. Die folgenden Darstellungen beziehen sich lediglich auf die Einzelfächer sowie auf ausgewählte Regressoren, die die Leistungen in den Testerhebung besonders geprägt haben. Damit werden im Folgenden Ergebnisse für die vierte Forschungsfrage vorgestellt und auch diskutiert:

> **Forschungsfrage 4**: Welche Entwicklung ergibt sich hinsichtlich der Kenntnisse in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik und hinsichtlich des Einflusses der exogenen Variablen auf dieses Wissen nach dem Besuch der neukonzipierten Studieneingangsphase?

4.2.1 Darstellung der Ergebnisse im Vortest

Es werden zuerst die Ergebnisse in den vier Einzelfächern (Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik) und deren Mittelwert dargestellt; diese Leistungen der Studierenden (139 Personen im Vortest) werden durch Histogramme und Boxplots veranschaulicht und anschließend jeweils durch Angabe des arithmetischen Mittels $\bar{x}_{vor}$ und des Medians $x_{med_{vor}}$ numerisch gestützt.

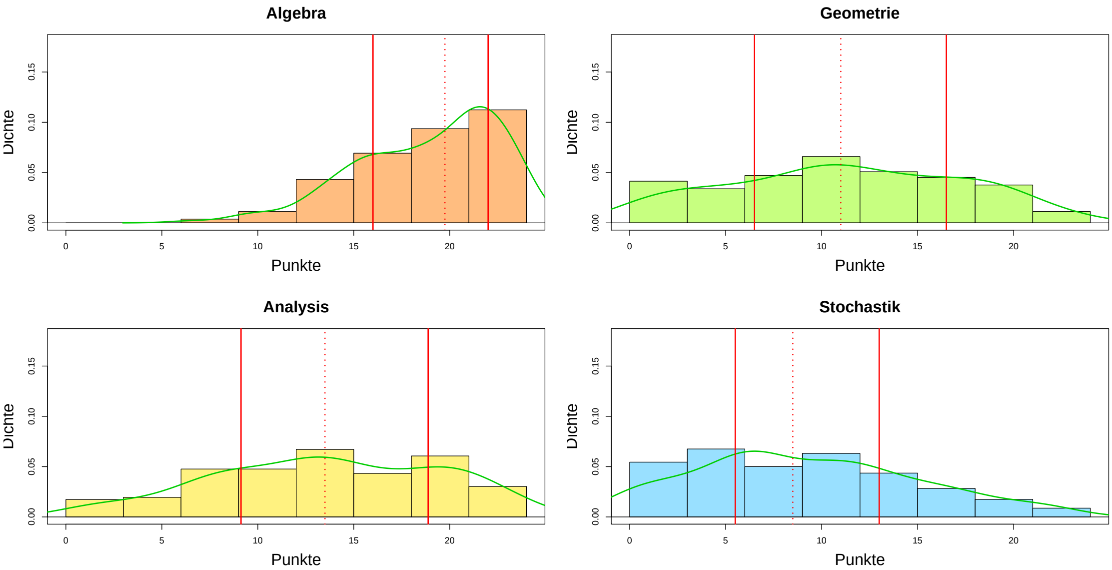

Abbildung 4.1: Histogramm für die Leistungen in den vier Einzelfächern (Vortest)

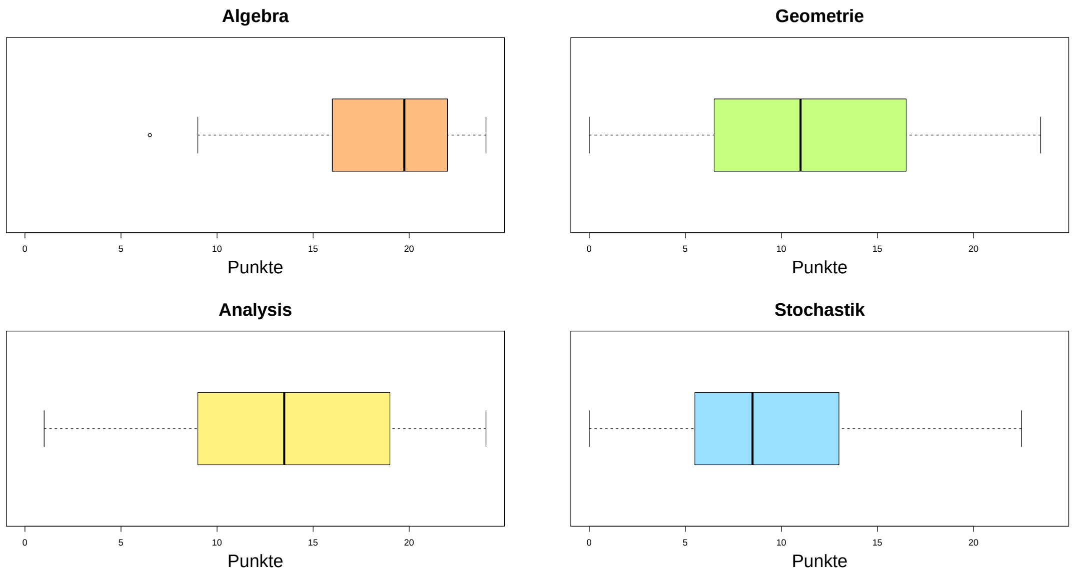

Abbildung 4.2: Boxplot für die Leistungen in den vier Einzelfächern (Vortest)

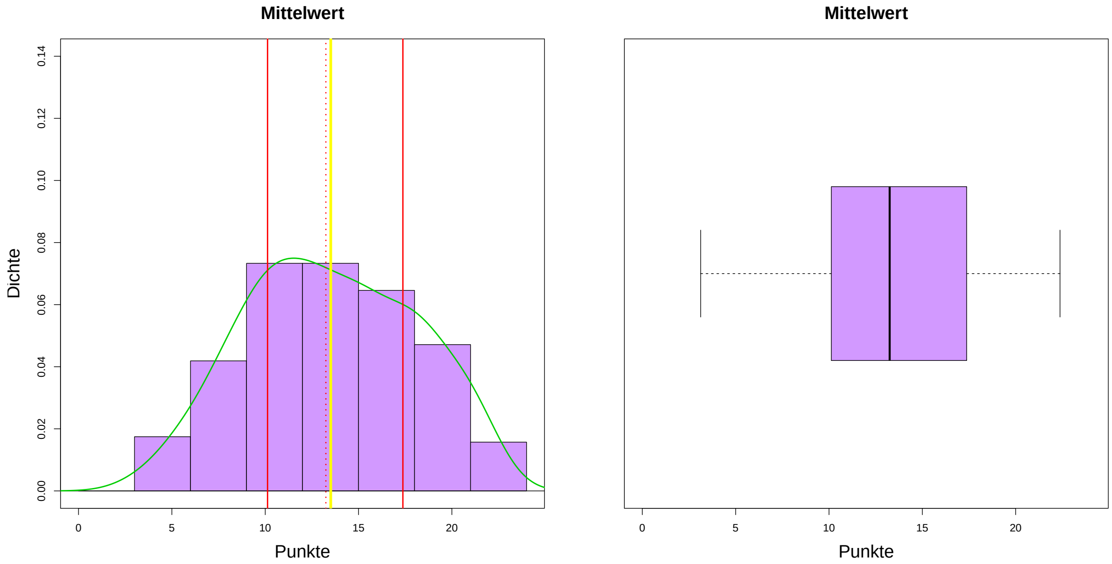

Abbildung 4.3: Histogramm und Boxplot der Leistungen im Mittelwert (Vortest)

Folgende deskriptive Erkenntnisse können festgehalten werden:

- Algebra: arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 18{,}87$, Median: $x_{med_{vor}} = 19{,}50$.
- Geometrie: arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 11{,}23$, Median: $x_{med_{vor}} = 11{,}00$.
- Analysis: arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 13{,}55$, Median: $x_{med_{vor}} = 13{,}50$.
- Stochastik: arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 9{,}25$, Median: $x_{med_{vor}} = 8{,}50$.
- Mittelwert: arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 13{,}51$, Median: $x_{med_{vor}} = 13{,}25$.

Man kann ein sehr starkes Bild im Bereich Algebra, ein mittelmäßiges in Analysis, schwache Ergebnisse in Geometrie und sehr schwache Leistungen im Bereich Stochastik festhalten; der Mittelwert der vier Einzeldisziplinen liegt leicht über der Hälfte der Maximalpunktzahl von 24,00 Punkten.

Nach der Darstellung der Leistungen der Studierenden in den Einzelfächern bzw. in deren Mittelwert wird nun dieses Leistungsbild in Abhängigkeit erklärender Regressoren aus persönlichen und studienbezogenen Angaben behandelt: die Leistungen werden in Abhängigkeit elf erklärender Variablen betrachtet, wovon sich drei Regressoren mittels multipler linearer Regression als bedeutsam für das Leistungsbild herausgestellt haben (vgl. Querschnittstudie 3.2.12); es werden nur die beiden Variablen „studierter Lehramtstyp“ und „mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe“ betrachtet, da der Regressor „Kombinations- und Didaktikfächer“ aufgrund zahlreicher Wechsel des Kombinationsfaches keinen sinnvollen Vergleich in Vor- und Nachtest zulässt. Folgende Graphik zeigt die Ergebnisse in Abhängigkeit des studierten Lehramtstyps; betrachtet wird der Mittelwert aus den vier Einzelfächern.

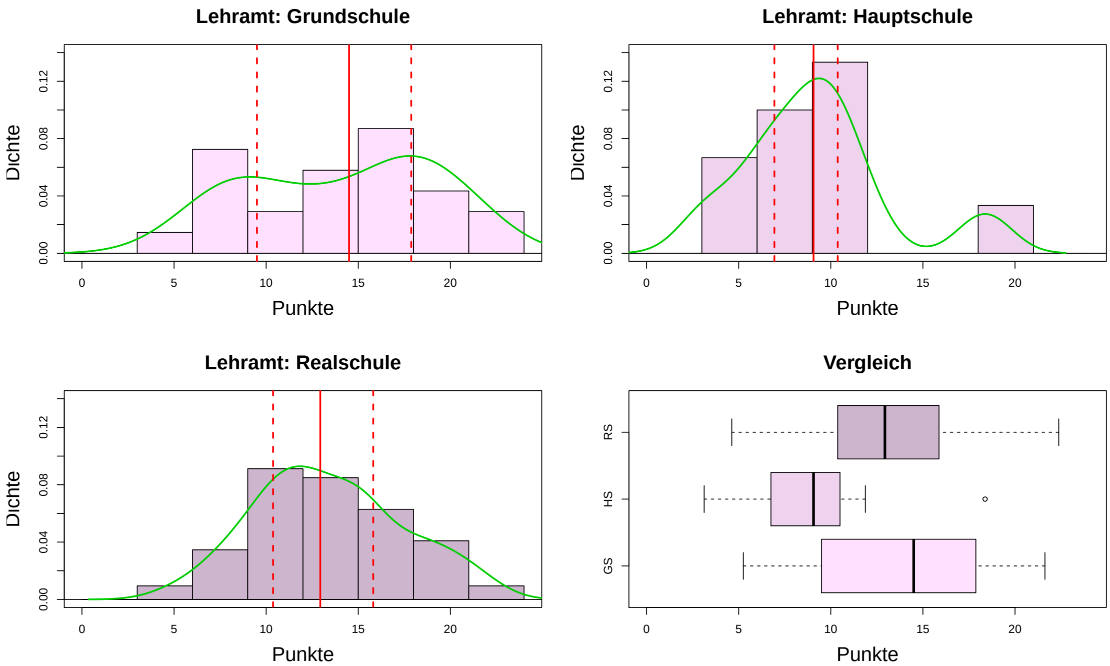

Abbildung 4.4: Histogramm und Boxplot für die Leistungen in Abhängigkeit vom studierten Lehramtstyp (Vortest)

Für die drei Gruppen zeigt sich im Mittel der vier Fächer ein heterogenes Bild:

- GS ($n_{vor} = 23$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 14{,}08$, Median: $x_{med_{vor}} = 14{,}50$.
- HS ($n_{vor} = 10$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 9{,}16$, Median: $x_{med_{vor}} = 9{,}06$.
- RS ($n_{vor} = 106$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 13{,}39$, Median: $x_{med_{vor}} = 12{,}94$.

Induktive Analysen erbringen einen signifikanten Leistungsunterschied zwischen den Gruppen Grund- und Hauptschule sowie Real- und Hauptschule.

Folgende Ausführungen sollen einen Überblick über die unterschiedlichen drei Lehramtstypen geben: das Studium des Unterrichtsfachs Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München orientiert sich an drei Studiengruppen; diesen Studiengang beschreiten zukünftige Grund-, Haupt- oder Realschullehrkräfte. Dabei ist zu beachten, dass für das Lehramt an Grund- und Hauptschulen Mathematik als Unterrichtsfach das Kernstück darstellt und dieses durch drei Didaktikfächer komplettiert wird; der Studiengang Lehramt an Realschulen sieht (in der Regel) das Studium des Fachs Mathematik mit einem gleichgestellten Kombinationsfach vor. Flankiert werden alle drei Studienausrichtungen durch Aspekte der Pädagogik und Psychologie (erziehungswissenschaftliches Studium). Das Unterrichtsfach Mathematik untergliedert sich in fachwissenschaftliche und fachdidaktische Komponenten, wobei der Schwerpunkt deutlich auf Seiten der Fachwissenschaft liegt (wie oben beschrieben für das Studium Lehramt Realschule im Verhältnis 5:1). Das Studium sieht eine Regelstudienzeit von sieben Fachsemestern vor; den Studienabschluss für die drei Studienrichtungen in der Fachwissenschaft Mathematik stellt ein einheitliches Erstes Staatsexamen dar. Damit ist trotz unterschiedlicher Studienstruktur der drei Ausrichtungen ein einheitliches Element geschaffen, dessen Ausrichtung vom Bayerischen Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst bestimmt wird.

Die formalen Voraussetzungen für die drei Studienausrichtungen sind dennoch unterschiedlich: das Lehramt an Grundschulen ist zulassungsbeschränkt; es werden die allgemeine Hochschulreife und ein Numerus Clausus von etwa 2,4 (Notendurchschnitt im Abitur) gefordert. Bei den Auswahlkriterien und Grenzwerten bei der örtlichen Zulassungsbeschränkung an der Ludwig-Maximilians-Universität wird ein Richtwert von 2,4 für das Studium Lehramt an Grundschulen angegeben [81]; dagegen sind die beiden anderen Schultypen nicht zulassungsbeschränkt. Trotz eines einheitlichen gemeinsamen Ziels sind die Voraussetzungen für diese Gruppen verschieden; dieser Aspekt lässt auf eine Leistungsheterogenität zu Studienbeginn schließen. Damit ist aber die Ludwig-Maximilians-Universität München im Rahmen der Lehrerausbildung im Unterrichtsfach Mathematik gefordert, dieser Leistungsheterogenität entgegen zu wirken und ein einheitliches dem Ersten Staatsexamen entsprechendes Kompetenzniveau zu schaffen.

Nun werden die Leistungen in Abhängigkeit des Regressors „mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe“ betrachtet: dabei werden die Gruppen Grundkurs (GK), Leistungskurs (LK), Fachoberschule (FOS), Berufsoberschule (BOS) und sonstige Studierende unterschieden. Dazu werden für die Vergleichsgruppen jeweils Gruppengröße, arithmetischer Mittelwert und Median zur deskriptiven Veranschaulichung vorgestellt und ergänzend ein Boxplotdiagramm für die erzielten Leistungen im Vortest dargestellt.

- GK ($n_{vor} = 50$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 11{,}84$, Median: $x_{med_{vor}} = 11{,}31$.
- LK ($n_{vor} = 52$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 15{,}04$, Median: $x_{med_{vor}} = 14{,}94$.
- FOS ($n_{vor} = 14$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 13{,}33$, Median: $x_{med_{vor}} = 13{,}75$.
- BOS ($n_{vor} = 16$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 12{,}17$, Median: $x_{med_{vor}} = 11{,}19$.
- sonstige ($n_{vor} = 6$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{vor} = 10{,}40$, Median: $x_{med_{vor}} = 9{,}63$.

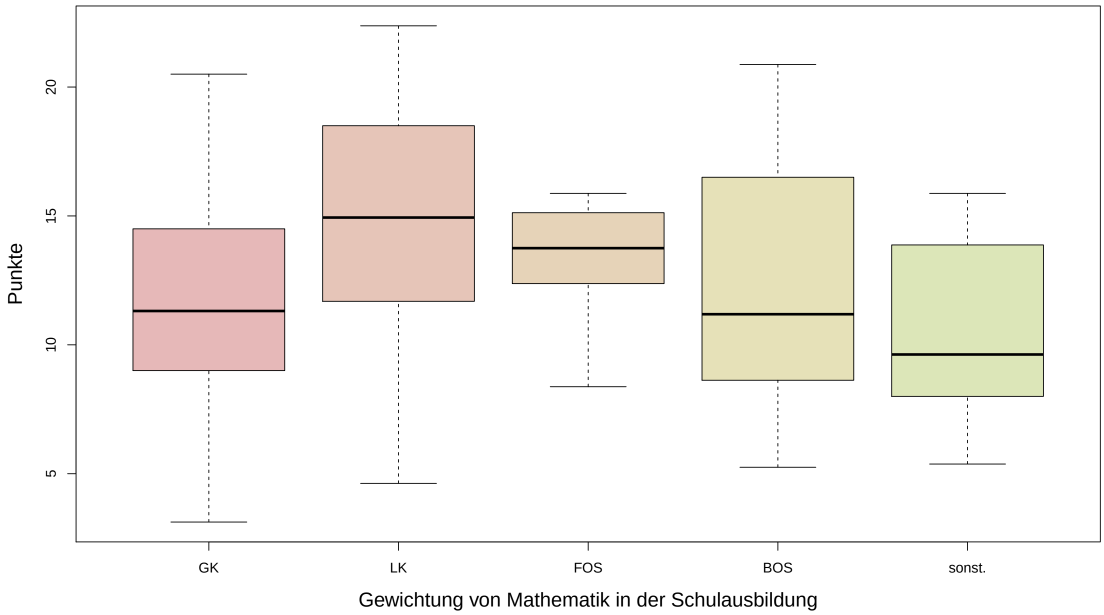

Abbildung 4.5: Boxplot der Leistungen in Abhängigkeit vom mathematischen Schwerpunkt (Vortest)

Auffallend ist das schlechte Abschneiden des Grundkurses im Gesamtbild der Gruppe Gymnasium; die Leistungskursgruppe zeigt sich in jedem der vier Teilgebiete signifikant stärker als die Grundkursgruppe. Die Fachoberschulgruppe kann in allen Teilgebieten mit Ausnahme der Stochastik mit der Leistungskursgruppe mithalten, ist aber genau in diesem Teilgebiet signifikant schwächer. Ähnliche und im Gesamtaspekt betrachtet eher schwache Ergebnisse weisen die Grundkursgruppe sowie die Berufsoberschulgruppe auf. Die Gruppe Sonstige soll aufgrund ihrer geringen Gruppengröße nicht berücksichtigt werden, da die Aussagekraft zu gering ist.

4.2.2 Darstellung zentraler Ergebnisse im Nachtest

Nachdem die Leistungen im Vortest (zu Studienbeginn im Wintersemester 2010/11) geschildert wurden, werden nun die Ergebnisse im Nachtest (nach etwa zwei Studienjahren im Sommersemester 2012; 86 Personen im Nachtest) skizziert. Es ist zu beachten, dass in Vor- und Nachtest dieselben Aufgaben zu bearbeiten sind. Es werden zuerst wieder die Ergebnisse in den Einzelfächern betrachtet und danach spezifisch die Leistungen in Abhängigkeit der beiden erklärenden Variablen „studierter Lehramtstyp“ und „mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe“.

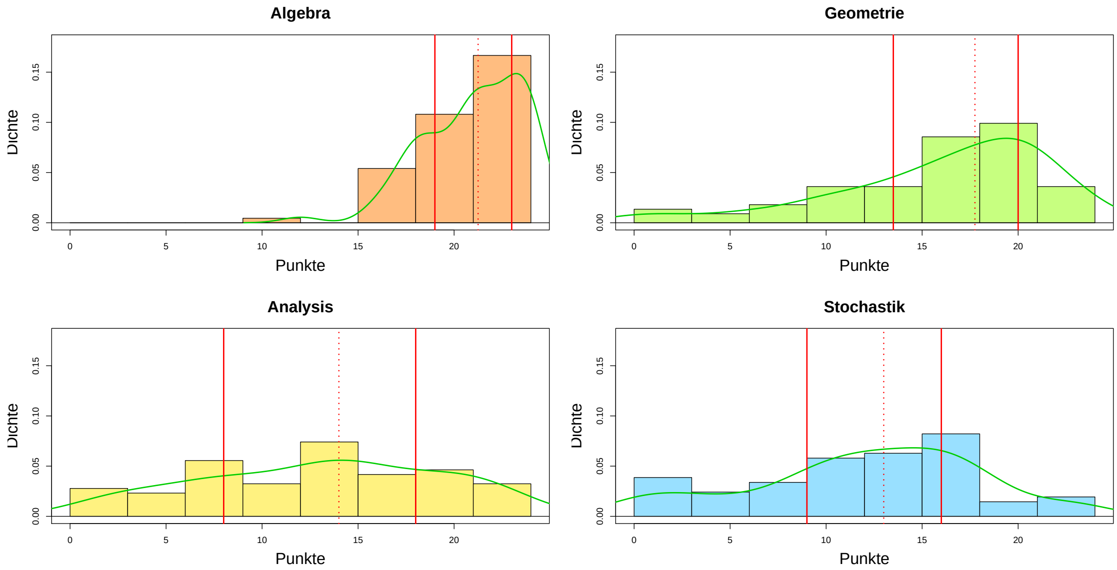

Abbildung 4.6: Histogramm für die Leistungen in den vier Einzelfächern (Nachtest)

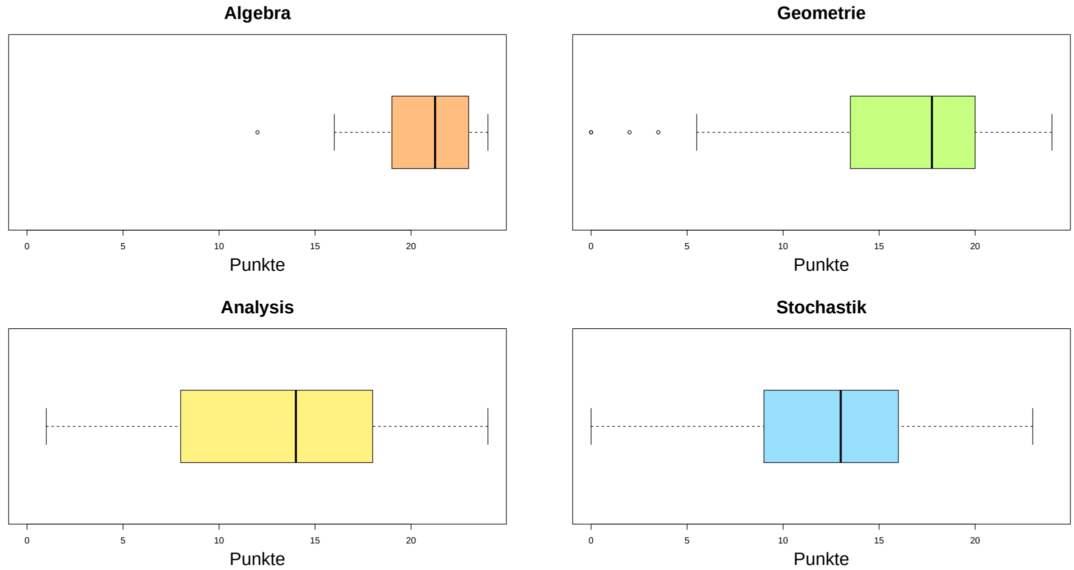

Abbildung 4.7: Boxplot für die Leistungen in den vier Einzelfächern (Nachtest)

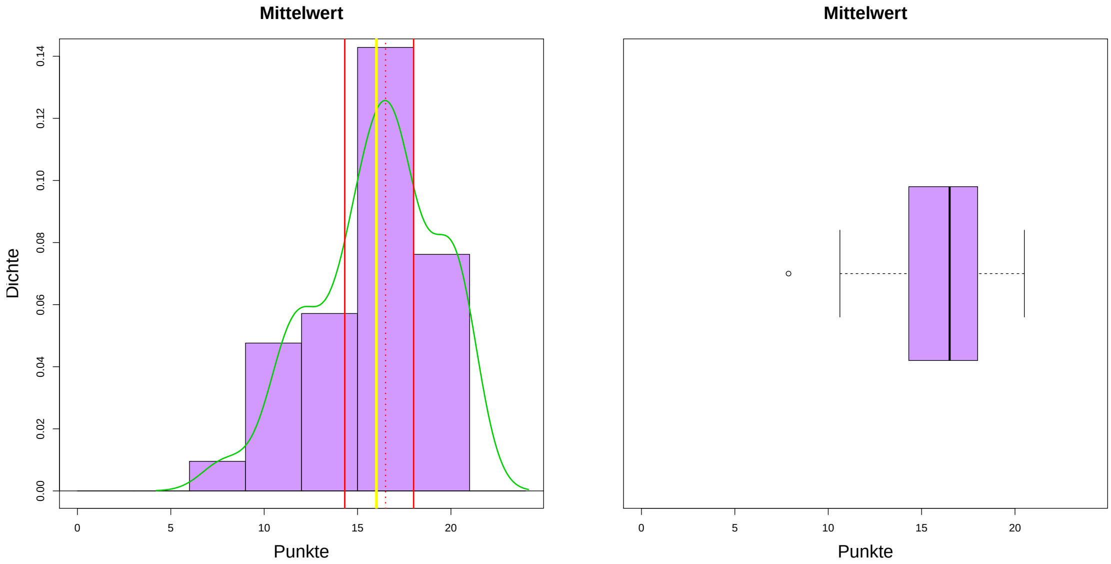

Abbildung 4.8: Histogramm und Boxplot der Leistungen im Mittelwert (Nachtest)

Folgende deskriptive Erkenntnisse können festgehalten werden:

- Algebra: arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 21{,}01$, Median: $x_{med_{nach}} = 21{,}50$.
- Geometrie: arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 16{,}03$, Median: $x_{med_{nach}} = 18{,}00$.
- Analysis: arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 13{,}05$, Median: $x_{med_{nach}} = 14{,}00$.
- Stochastik: arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 12{,}01$, Median: $x_{med_{nach}} = 13{,}50$.
- Mittelwert: arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 15{,}64$, Median: $x_{med_{nach}} = 16{,}00$.

Die Leistungen in Algebra sind sehr gut; das arithmetische Mittel und der Median liegen bei knapp 90 % der Maximalpunktzahl. Geometrie ist als zweitbestes Fach einzuordnen; es ist ein arithmetisches Mittel von etwa zwei Drittel und ein Median von drei Viertel der 24,00 zu erzielenden Punkte zu beobachten. Die Gebiete Analysis und Stochastik liegen (bezüglich des arithmetischen Mittels und des Medians) beide leicht über der Hälfte der Maximalpunktzahl. Schließlich bewegt sich der Mittelwert aus allen vier Teilgebieten bei etwa zwei Drittel der Gesamtpunktzahl.

Nun liegt das Augenmerk auf den Leistungen in Abhängigkeit der beiden oben beschriebenen Regressoren; zuerst werden die Ergebnisse in Abhängigkeit des „studierten Lehramtstyps“ dargestellt.

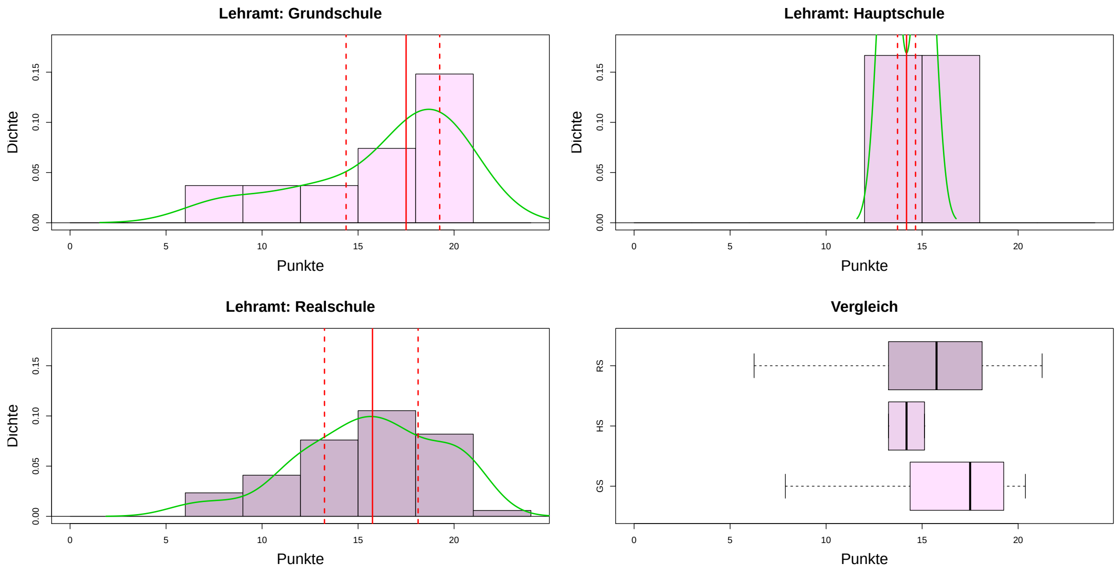

Abbildung 4.9: Histogramm und Boxplot für die Leistungen in Abhängigkeit vom studierten Lehramtstyp (Nachtest)

Die Leistungen der drei Gruppen zeigen ein relativ einheitliches Bild:

- GS ($n_{nach} = 12$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 16{,}32$, Median: $x_{med_{nach}} = 17{,}50$.
- HS ($n_{nach} = 5$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 14{,}19$, Median: $x_{med_{nach}} = 14{,}19$.
- RS ($n_{nach} = 69$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 15{,}54$, Median: $x_{med_{nach}} = 15{,}75$.

Die Ergebnisse für die drei Gruppen befinden sich auf einem sehr ähnlichen Niveau, die Leistungen (bezüglich des arithmetischen Mittels) differieren um etwa zwei Punkte zwischen Grund- und Hauptschulgruppe. Zu beachten ist die Gruppengröße der Studierenden des Hauptschullehramts ($n_{nach} = 5$); dennoch ist die Verteilung der Stichprobe auf die drei Schultypen ähnlich zu der im Vortest. Zwischen den drei Vergleichsgruppen liegen keine signifikanten Leistungsunterschiede mehr vor. Eine Interpretation über signifikante Unterschiede mit einem Stichprobenumfang von $n_{nach} = 5$ für die Hauptschulgruppe ist zudem mit Vorsicht zu genießen.

Ferner werden nun die Leistungen in Abhängigkeit des Regressors „mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe“ betrachtet; dazu dient zunächst eine Boxplotgraphik für die erzielten Leistungen im Nachtest:

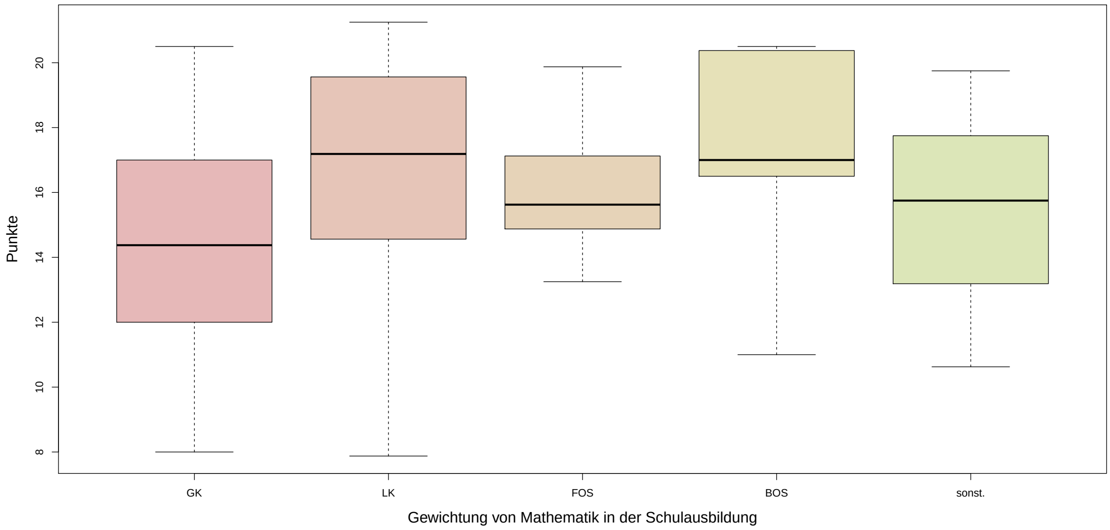

Abbildung 4.10: Boxplot der Leistungen in Abhängigkeit vom mathematischen Schwerpunkt (Nachtest)

Wieder werden für die fünf Gruppen jeweils Stichprobenumfang, arithmetisches Mittel und Median angebeben:

- GK ($n_{nach} = 31$) : arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 14{,}54$, Median: $x_{med_{nach}} = 14{,}38$.
- LK ($n_{nach} = 34$) : arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 16{,}73$, Median: $x_{med_{nach}} = 17{,}19$.
- FOS ($n_{nach} = 12$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 15{,}99$, Median: $x_{med_{nach}} = 15{,}62$.
- BOS ($n_{nach} = 6$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 17{,}07$, Median: $x_{med_{nach}} = 17{,}00$.
- sonstige ($n_{nach} = 3$): arithm. Mittel: $\bar{x}_{nach} = 15{,}38$, Median: $x_{med_{nach}} = 15{,}50$.

Die beiden Gruppen „BOS“ und „sonstige“ werden im Folgenden bei der Beschreibung der Ergebnisse nicht weiter berücksichtigt, da die Stichprobenumfänge zu gering sind und somit die Aussagekraft zu schwach ist. Die Leistungen für die übrigen drei Gruppen schwanken hinsichtlich des arithmetischen Mittelwerts $\bar{x}$ um etwa zwei Punkte (vgl. Grund- und Leistungskurs). Der Kruskal-Wallis-Test kann keine signifikanten Leistungsunterschiede nachweisen.

4.2.3 Vergleich der Leistungen in Vor- und Nachtest

Nach der Darstellung der Ergebnisse zu den beiden Erhebungszeitpunkten sollen diese nun verglichen und begründet werden; dazu werden wie bereits in den beiden vorherigen Abschnitten die Leistungen in den Einzelfächern dargelegt und anschließend die Regressorenabhängigkeit betrachtet.

Da nun die Leistungen zu zwei verschiedenen Messzeitpunkten im Rahmen der Längsschnittuntersuchung analysiert werden, muss an dieser Stelle eine Vorbemerkung gemacht werden.

Für die Studie liegt keine Vergleichs- bzw. Kontrollgruppe vor. Die Einführung einer Vergleichs- bzw. Kontrollgruppe dient für empirische Studien als bewährtes Mittel, eine hohe interne Validität herzustellen. Vergleichsgruppen als Kontrollgruppen sollen es ermöglichen, spezielle Einflüsse zu kontrollieren, um Veränderungen tatsächlich auf die gewünschte Intervention (im vorliegenden Fall: Neukonzeption des Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“) zurückführen zu können. Im ungünstigsten Fall kann irrtümlicherweise die Veränderung auf die Intervention bezogen werden, obwohl andere Effekte dafür verantwortlich sind [51].

Für die vorliegende Untersuchung kann keine sinnvolle Kontrollgruppe gefunden werden. Die Testpersonen sind Studierende der neuen Lehramtsprüfungsordnung I vom 13.03.2008, zum Großteil im ersten Fachsemester. Speziell mit der Modularisierung im Zuge dieser Lehramtsprüfungsordnung I sind die Vorlesungsinhalte zum Wintersemester 2010/11 im Rahmen des Lehramtsstudiums für Grund-, Haupt- oder Realschulen im Fach Mathematik (Unterrichtsfach) neu konzipiert worden; aus diesen Überlegungen heraus ist der Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ entstanden. Nun soll der Effekt der Vorlesungsinhalte dieser Veranstaltungen auf die schulmathematischen Kenntnisse der Studierenden untersucht werden, da im Vortest dieses Schulwissen zu Studienbeginn und im Nachtest dieses nach etwa zwei Studienjahren analysiert wird (zwischen den beiden Erhebungszeitpunkten haben die Studierenden die beiden Vorlesungen des Zyklus besucht). Wünschenswert wäre eine sinnvolle Kontrollgruppe gewesen, um die oben erwähnten Effekte bei fehlender Vergleichsgruppe zu vermeiden. Die Studie fokussiert eine spezielle Gruppe (Lehramtsstudierende an Grund-, Haupt- oder Realschulen mit Unterrichtsfach Mathematik) im ersten Fachsemester. Damit sind als Vergleichsgruppe Studierende für das Lehramt an Gymnasien mit Mathematik nicht sinnvoll, da diese eine andere Studiengruppe repräsentieren (möglichweise haben diese Studierenden ein besseres Vorwissen aus der Schule, da sie ein (fachmathematisch) höheres Lehramt anstreben). Ferner sind Studierende des Grund-, Haupt- und Realschullehramts nach der Lehramtsprüfungsordnung I vom 07.11.2002 auch nicht geeignet, da diese bereits einige Veranstaltungen im Rahmen des Studiums besucht haben und somit fachlich schon höher qualifiziert sind (diese Studierenden sind mindestens im dritten Fachsemester). Da alle Studierenden im ersten Fachsemester die Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ besuchen sollen (und dies vollständig geschieht) und auch keine Parallelvorlesung im fachmathematischen Bereich angeboten wird, kann auch dadurch keine Kontrollgruppe generiert werden. Würde man beispielsweise die Hälfte der Studienanfängerinnen und Studienanfänger in den ersten beiden Fachsemestern die Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ besuchen lassen und die andere Hälfte beispielsweise die Vorlesungen „Lineare Algebra und analytische Geometrie I + II“, so könnte man eine Vergleichsgruppe schaffen, was aber nicht sinnvoll ist, da die Studierenden nicht zu Testzwecken in Vorlesungen eingeteilt werden sollen, die zudem nicht dem empfohlenen Studienablauf entsprechen; ferner sollen die Studierenden gerade wegen des problematischen Übergangs von der Schule zur Universität die Vorlesungen des Zyklus „Grundlagen der Mathematik“ besuchen.

Gemäß den eben dargestellten Gründen konnte keine geeignete Kontrollgruppe gefunden werden, so dass eine andere Überlegung zum Tragen kommt. Die Testerhebungen zum Schulwissen setzen sich aus den vier zentralen Schulgebieten Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik zusammen; drei dieser Gebiete (Algebra, Geometrie und Stochastik) werden an speziellen Inhalten im Rahmen des Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ thematisiert, aber Aspekte des Themengebiets Analysis werden nicht gelehrt, da diese Inhalte spezifisch für das fünfte und sechste Fachsemester im Zuge der beiden Vorlesungen „Differential- und Integralrechnung I + II“ vorgesehen sind. Damit wird in der Längsschnittuntersuchung dieses Element als Kontroll- bzw. Vergleichskalkül eingesetzt (drei behandelte gegen ein nichtthematisiertes Fachgebiet). Somit ist dem Problem der fehlenden Vergleichsgruppe durch diese Konzeption in gewisser Weise Rechnung getragen.

Vergleich der Leistungen bezüglich der Einzelfächer

Es soll zuerst eine globale Darstellung der Leistungen zu den beiden Erhebungszeitpunkten mit Hilfe des Mittelwerts der vier Disziplinen geschildert werden. Im Vortest können für das 25 %-Quantil $x_{0,25}$ bzw. den Median x_{med} Werte von 10,12 bzw. 13,25 ermittelt werden; diese erfahren im Nachtest eine Steigerung von etwa jeweils drei Punkten zu 13,25 bzw. 16,00. Für das arithmetische Mittel $\bar{x}$ ergeben sich zum einen 13,51 (Vortest) sowie 15,84 (Nachtest). Diese Lagemaße lassen eine Leistungssteigerung zwischen beiden Erhebungszeitpunkten erkennen, was durch folgende Graphik nochmals verdeutlicht wird. Anschließend werden die Leistungen in den Einzelfächer geschildert, um die Steigerung der Ergebnisse aus dem Mittelwert der vier Gebiete genauer analysieren und deuten zu können.

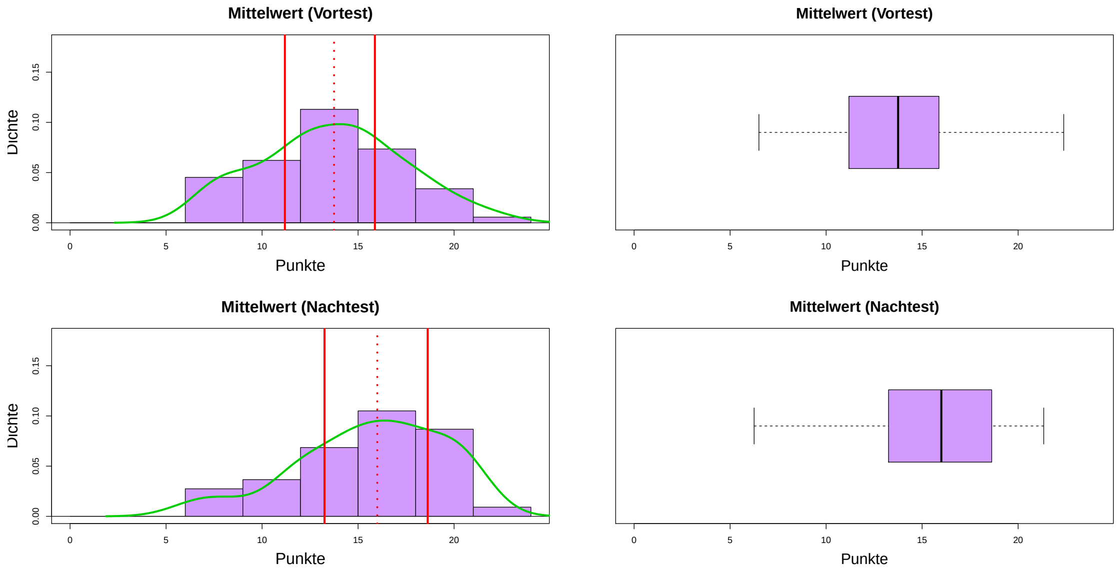

Abbildung 4.11: Histogramm und Boxplot für die Leistungen im Mittelwert (Vor- und Nachtest)

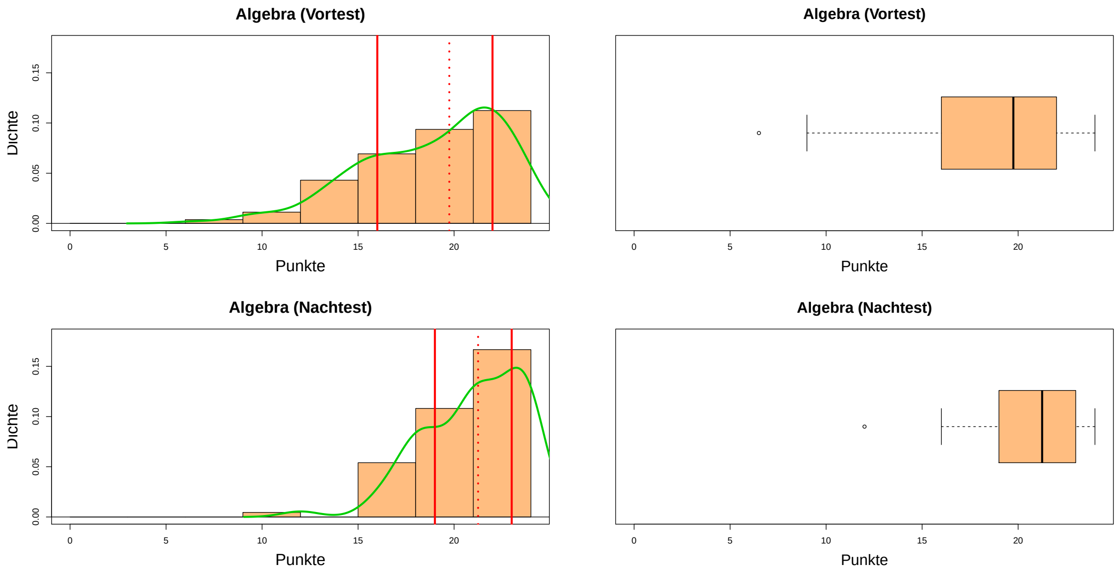

Abbildung 4.12: Histogramm und Boxplot für die Leistungen in Algebra (Vor- und Nachtest)

Im Teilgebiet Algebra ist zu beachten, dass die Leistungen bereits im Vortest äußerst gut waren; dies zeigt sich unter anderem am arithmetischen Mittel mit $\bar{x}_{vor} = 18{,}87$

und prägnanter noch am Median mit $x_{med_{vor}} = 19{,}50$. Dennoch können die Studierenden im Nachtest dieses sehr gute Ergebnis nochmals übertreffen; das arithmetische Mittel liegt nun bei $\bar{x}_{nach} = 21{,}01$ und der Median bei $x_{med_{nach}} = 21{,}50$, d.h. im Nachtest erreichen mehr als 50 % der Studierenden über 21,00 Punkte. Besonders für diese Teildisziplin ist ein Deckelungseffekt zu beachten; die eben beschriebenen starken Leistungen bereits im Vortest können nur noch schwer gesteigert werden, obwohl dies hier der Fall ist. Für diesen Test ist Eigenkritik anzumerken, da die Ergebnisse bereits zu Studienbeginn sehr gut ausfallen und die Steigerung im Nachtest durch den Deckelungseffekt vorsichtig zu interpretieren ist.

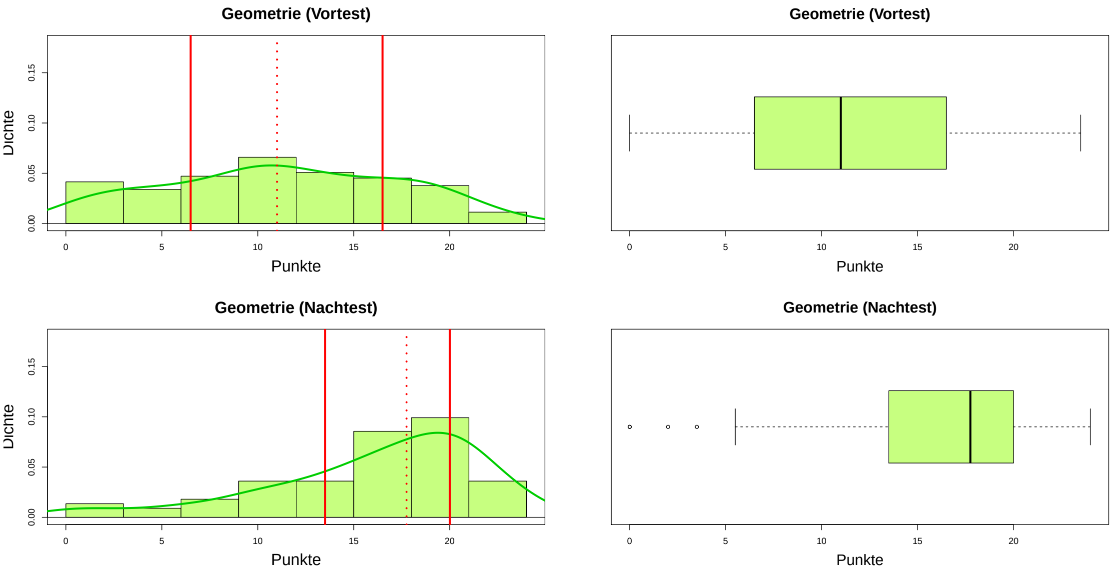

Abbildung 4.13: Histogramm und Boxplot für die Leistungen in Geometrie (Vor- und Nachtest)

In Geometrie sind markante Verbesserungen zwischen den beiden Erhebungszeitpunkten zu erkennen. Sehr auffallend ist die Steigerung des Medians um sieben Punkte von 11,00 (Vortest) auf 18,00 (Nachtest), ebenso wie die des 25 %-Quantils von 6,50 (Vortest) auf 13,50 (Nachtest). Sowohl für das arithmetische Mittel als auch für das 75 %-Quantil kann eine Verbesserung von fast vier Punkten festgestellt werden. Dieser Anstieg ist in keinem der anderen Gebiete so stark; damit trägt dieses Fach (rechnerisch) erheblich zur oben beschriebenen Steigerung im Mittelwert der vier Disziplinen bei.

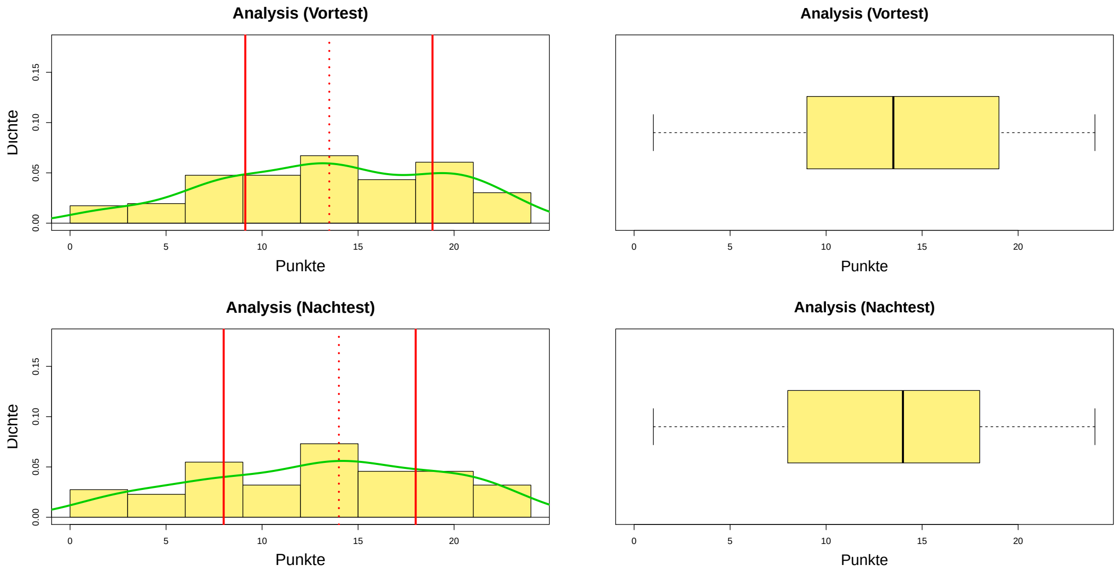

Abbildung 4.14: Histogramm und Boxplot für die Leistungen in Analysis (Vor- und Nachtest)

Für die Disziplin Analysis ergeben sich auch auffallende Ergebnisse, aber anders als im Gebiet Geometrie. Die Leistungen bei Vor- und Nachtest sind annähernd gleich; dieser Aspekt spiegelt sich in allen Lagemaßen wieder, die in der zusammenfassenden Tabelle (nach dem Teilgebiet Stochastik) zu finden sind.

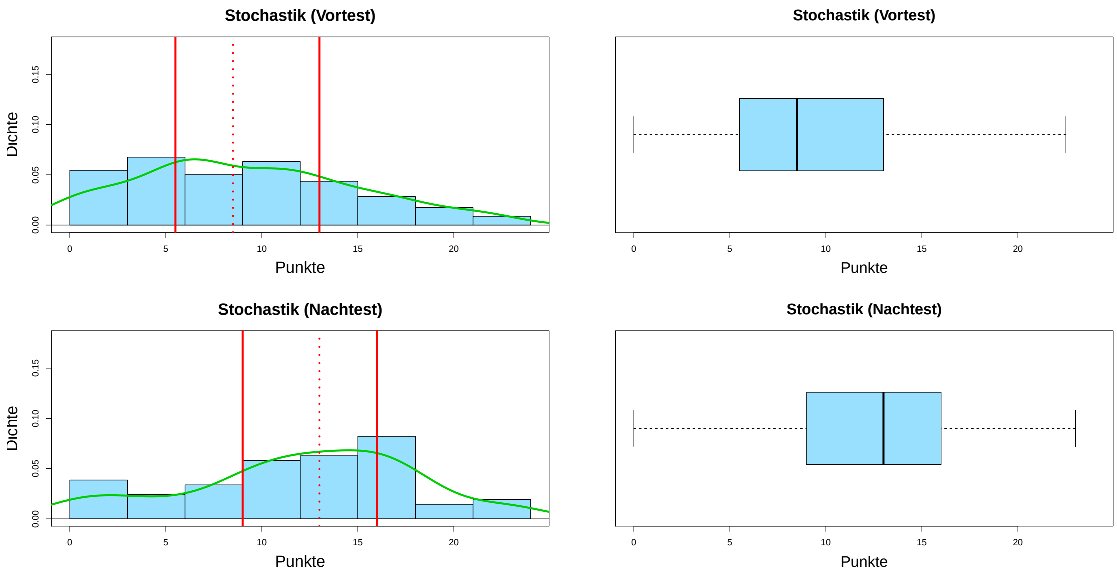

Abbildung 4.15: Histogramm und Boxplot für die Leistungen in Stochastik (Vor- und Nachtest)

Das letzte Teilgebiet weist auch eine deutliche Steigerung zwischen Vortest und Nachtest auf; prägnant ist der Anstieg des Medians von $x_{med_{vor}} = 8{,}50$ (Vortest) auf $x_{med_{nach}} = 13{,}50$ (Nachtest), d.h. im Vortest erzielen etwa die Hälfte der Studierenden ein Drittel der Punkte oder weniger, im Nachtest hingegen erreicht etwa die Hälfte der Teilnehmenden die Hälfte der Punkte oder mehr. Ferner zeigen sich auch für das 25 %- und 75 %-Quantil sowie für das arithmetische Mittel Steigerungen um etwa drei Punkte. Damit zählt Stochastik neben Geometrie zu den Bereichen, in denen die größten Leistungssteigerungen erzielt werden.

Folgende Tabelle gibt eine Zusammenfassung über deskriptive Kenngrößen für die Leistungen in den vier Einzelfächern zu beiden Erhebungszeitpunkten:

Tabelle 4.1: Deskriptive Kenngrößen der Einzelfächer in Vortest und Nachtest

	Algebra		**Geometrie**		**Analysis**		**Stochastik**	
	VT	NT	VT	NT	VT	NT	VT	NT
$x_{0,25}$	16,00	19,00	6,50	13,50	9,13	8,00	5,50	8,88
x_{med}	19,75	21,50	11,00	18,00	13,50	14,00	8,50	13,50
$\bar{x}$	18,87	21,01	11,23	16,03	13,55	13,05	9,25	12,01
$x_{0,75}$	22,00	23,00	16,50	20,00	18,80	18,00	13,00	16,00

Nach der deskriptiven Beschreibung der Ergebnisse werden diese nun mit induktiven Methoden untersucht. Für diese Analyse wird folgende Modellannahme getroffen: es liegen jeweils für beide Gruppen (Leistungen in den vier Einzelfächern und deren Mittelwert jeweils in Vor- bzw. Nachtest untergliedert) unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen vor, die in jeder Gruppe als normalverteilt aufgefasst werden können [41, S. 443]. Für beide Gruppen ist jeweils die Varianz nicht bekannt. Basierend auf diesen Annahmen wird ein zweiseitiger Welch-Test durchgeführt, der auf einen Vergleich der Mittelwerte für beide Gruppen abzielt [41, S. 443]. Als Nullhypothese bzw. Alternativhypothese ergeben sich

$$H_0 : \mu_{vor} = \mu_{nach} \qquad \text{bzw.} \qquad H_1 : \mu_{vor} \neq \mu_{nach},$$

wobei μ_{vor} bzw. μ_{nach} jeweils der Erwartungswert der Leistungen in den vier Einzelfächern und deren Mittelwert untergliedert in Vor- bzw. Nachtest ist. In den Teilgebieten Algebra, Geometrie, Stochastik und im Mittelwert liefert der zweiseitige Welch-Test signifikante Leistungsunterschiede bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 %; in Analysis liegen wie bereits geschildert bei Vor- und Nachtest annähernd gleiche Ergebnisse vor, die Unterschiede sind nicht signifikant.

Begründung der vorliegenden Ergebnisse

Da in den neukonzipierten Vorlesungen der ersten beiden Fachsemester vor allem Aspekte der elementaren Stochastik (im Rahmen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sowie kombinatorische Überlegungen als Anwendungsgebiet der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$) und der Elementargeometrie (einführende Motivation zur Behandlung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$) als größere zusammenhängende Blöcke thematisiert werden, ist diese signifikante Verbesserung in den beiden Disziplinen ein starkes Argument für die Neukonzeption in der Vorlesungsstruktur. Thematiken, die der schulischen Disziplin Algebra im Rahmen der Veranstaltung zukommen, sind zum einen an verschiedenen Stellen bei der Besprechung der Zahlenbereiche und zum anderen bei der Behandlung der elementaren Zahlentheorie (Teilbarkeitslehre, Primzahlen und weitere Inhalte im Zusammenhang mit dem Zahlenbereich $\mathbb{Z}$) zu finden. Durch die Betrachtung von Schulinhalten vom höheren Standpunkt der universitären Mathematik werden Lücken im Schulwissen geschlossen und gleichzeitig der Abstraktionsgrad infolge der axiomatisch-deduktiven Struktur der Hochschulmathematik vermindert. Die annähernd gleichen Ergebnisse im Teilgebiet Analysis sind (womöglich) damit zu erklären, dass die Grundlagenvorlesung keine Thematiken dieser Disziplin vorsieht, da ein komplettes Studienjahr (fünftes und sechstes Fachsemester) für die Behandlung dieser Inhalte zur Verfügung steht.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Studierenden neben den Inhalten der fachwissenschaftlichen Veranstaltungen auch Thematiken in den fachdidaktischen Vorlesungen und Übungen erarbeitet haben; diese Erfahrungen können einen Einfluss auf die doch positiv ausfallenden Ergebnisse nehmen. Im Bezug zu den am Anfang des Kapitels erwähnten Inhalten der fachdidaktischen Ausbildung für den Studiengang Lehramt an Realschulen werden neben einführenden Aspekten zur Mathematikdidaktik der Sekundarstufe I auch die Bereiche Algebra, Zahlen und Operationen bzw. Funktionen, Daten und Zufall bzw. Raum und Form betrachtet. Die Inhalte der Vorlesung „Didaktik in den Bereichen Algebra, Zahlen und Operationen“ kann sich positiv auf die Entwicklung des Teilgebiets Algebra in der Testerhebung auswirken, da dort unter anderem die verschiedenen Zahlenbereiche, spezifisch das Thema Bruchrechnung sowie Terme und Gleichungen betont werden. Für das Teilgebiet Geometrie kann möglicherweise eine Verbindung zur Vorlesung „Didaktik in den Bereichen Raum und Form“ hergestellt werden, da dort grundlegende Themen der elementaren Geometrie der Sekundarstufe I (unter anderem Flächeninhaltsbestimmung, Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen, Satzgruppe des Pythagoras, Trigonometrie) fokussiert werden. Schließlich ist noch die Vorlesung „Didaktik in den Bereichen Funktionen, Daten und Zufall“ zu betrachten; diese thematisiert Inhalte der beiden Testerhebungen Analysis und Stochastik, da elementare Funktionstypen und grundlegende Eigenschaften der Kombinatorik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelehrt werden. In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluss der didaktischen Veranstaltungen (Vorlesung mit Übung bzw. Seminare) auf die Leistung bzw.

deren Entwicklung im Rahmen der Längsschnittstudie nicht untersucht; ein möglicher Einfluss durch die didaktischen Veranstaltungen ist aber zu berücksichtigen. In den eben dargestellten Ausführungen wird speziell der Vorlesungskanon im Rahmen des Lehramtsstudium Realschule betont, da diese Gruppe den Großteil der analysierten Kohorte darstellt und die Inhalte der didaktischen Veranstaltungen mit den Testerhebungen in Verbindung gebracht werden können; die Inhalte der Veranstaltungen für die beiden anderen Ausrichtungen (Lehramt Grundschule bzw. Lehramt Hauptschule) haben keinen so starken Bezug zu den Inhalten der Testerhebungen. Eventuell müsste noch diskutiert werden, ob die Verbesserung auch dadurch zustande kommt, dass die schwächeren Studierenden das Studium abbrechen und so im Nachtest nicht mehr erfasst werden. Dieser Effekt trägt sicherlich zum besseren Leistungsbild im Nachtest bei, ob er jedoch ausschlaggebend ist, darf bezweifelt werden, denn die Leistungen im Teilgebiet Analysis, welches als Kontroll- bzw. Vergleichskalkül fungiert, sind zu beiden Erhebungszeitpunkten annähernd gleich.

Vergleich der Leistungen in Abhängigkeit der Regressoren

Im Folgenden wird jeweils die Leistungsentwicklung in Abhängigkeit der Regressoren „studierter Lehramtstyp" und „mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe" betrachtet; beide Variablen hatten im Vortest bedeutsamen Einfluss auf die abhängige Variable „Leistungen in der Testerhebung". Die Ergebnisse der Hauptschulgruppe bzw. der Grundkursgruppe waren dabei jeweils deutlich schwächer als die der beiden Vergleichsgruppen (Grund- und Realschulgruppe bzw. Leistungskurs- und Fachoberschulgruppe).

Studierter Lehramtstyp

Eine Übersicht mit arithmetischen Mittelwerten und Gruppengrößen sowie eine Graphik liefern einen Vergleich für die Leistungen der drei Gruppen zu beiden Erhebungszeitpunkten; betrachtet wird dabei der Mittelwert der vier Einzelfächer:

- Grundschule ($n_{vor} = 23$ und $n_{nach} = 12$): $\bar{x}_{vor} = 14{,}68$ und $\bar{x}_{nach} = 16{,}32$.
- Hauptschule ($n_{vor} = 10$ und $n_{nach} = 5$): $\bar{x}_{vor} = 9{,}16$ und $\bar{x}_{nach} = 14{,}19$.
- Realschule ($n_{vor} = 106$ und $n_{nach} = 69$): $\bar{x}_{vor} = 13{,}32$ und $\bar{x}_{nach} = 15{,}54$.

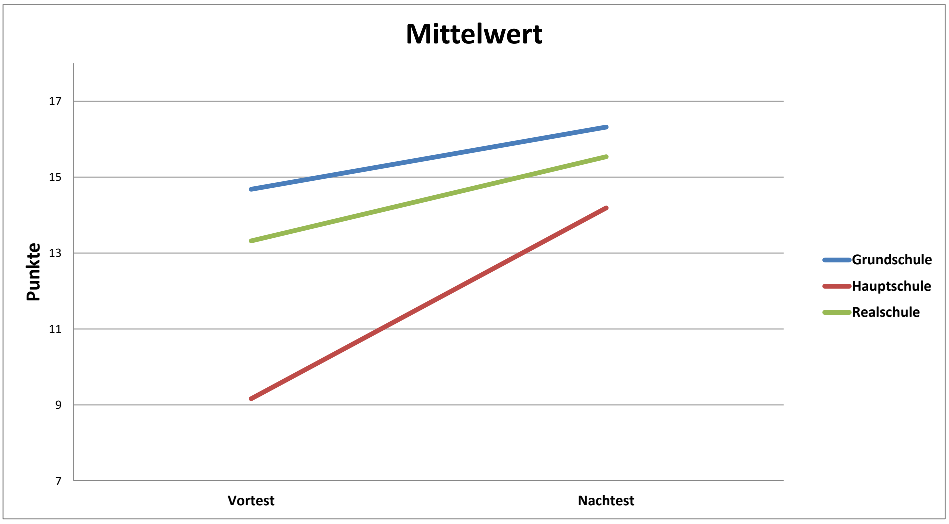

Abbildung 4.16: Leistungen in Abh. vom studierten Lehramtstyp (Vor- und Nachtest)

Für alle drei Gruppen ist eine signifikante Leistungssteigerung zu verbuchen (Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$); markant ist Steigerung der Hauptschulgruppe, wobei der geringe Stichprobenumfang dieser Gruppe zu bedenken ist. Die Differenz von über fünf Punkten zwischen einzelnen Gruppen im Vortest kann im Nachtest nicht mehr beobachtet werden, die Ergebnisse im Nachtest weichen nur gering voneinander ab (Differenz von etwa zwei Punkten) und liegen auf einem ansprechend hohem Niveau für alle Gruppen. Es müssen wieder gewisse Deckelungseffekte berücksichtigt werden, wobei die Leistungen der drei Gruppen im Vortest (und auch im Nachtest) nicht auf einem sehr hohen Leistungsniveau liegen. Die Steigerung für die Grundschulgruppe ist wie oben beschrieben signifikant, dennoch ist diese im Vergleich zur Hauptschulgruppe deutlich geringer; dies ist auf die bereits guten Leistungen dieser Gruppe im Vortest (und auf den geringen Stichprobenumfang der Hauptschulgruppe) zurückzuführen, weswegen wiederum ein Deckelungseffekt zu bedenken ist (ein ähnliches Bild zeigt sich für die Realschulgruppe, aber nicht so sehr ausgeprägt). Die Leistungssteigerung der Gruppen soll durch die Betrachtung der vier Einzelfächer mit Hilfe folgender Tabelle genauer analysiert werden.

Tabelle 4.2: Mittelwerte in Abh. vom studierten Lehramtstyp (Vor- und Nachtest)

	Algebra		**Geometrie**		**Analysis**		**Stochastik**	
	VT	NT	VT	NT	VT	NT	VT	NT
GS	19,63	21,09	11,50	17,39	14,09	14,22	11,11	13,08
HS	14,73	17,23	7,25	12,25	8,00	8,25	6,25	8,87
RS	18,84	20,13	11,25	16,73	13,70	13,02	9,05	12,68

- In Geometrie zeigen sich sehr starke Verbesserungen: alle Gruppen können sich um über fünf Punkte steigern.
- In Stochastik ergeben sich deutliche Steigerungen: die Realschulgruppe verbessert sich um gut drei Punkte, die Hauptschulgruppe um gut zwei und die Grundschulgruppe um knapp zwei.
- In Algebra ergeben sich auch Steigerungen, vor allem für die Hauptschulgruppe mit zweieinhalb Punkten. Es zeigen sich für die Grundschul- und Realschulgruppe Deckelungseffekte.
- In Analysis bleiben die Leistungen annähernd gleich bzw. verschlechtern sich sogar für die Realschulgruppe.

Mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe

Ebenso wie beim ersten Regressor werden zuerst die Leistungen im Mittelwert miteinander verglichen und anschließend Begründungen für die Steigerungen durch die Analyse der Einzelfächer geliefert.

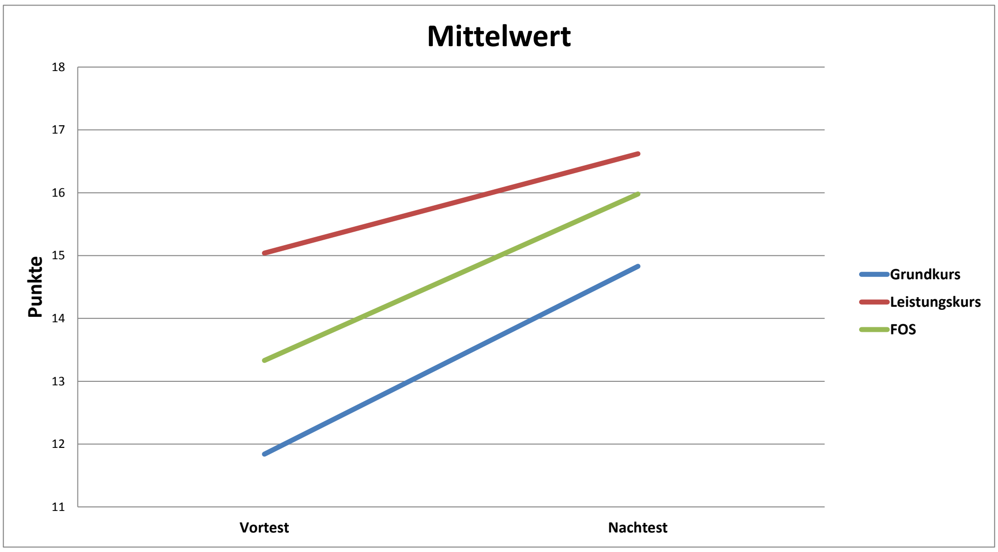

Abbildung 4.17: Leistungen in Abhängigkeit vom mathematischen Schwerpunkt (Vor- und Nachtest)

- Grundkurs ($n_{vor} = 50$ und $n_{nach} = 31$): $\bar{x}_{vor} = 11{,}84$ und $\bar{x}_{nach} = 14{,}53$.
- Leistungskurs ($n_{vor} = 52$ und $n_{nach} = 34$): $\bar{x}_{vor} = 15{,}03$ und $\bar{x}_{nach} = 16{,}73$.
- Fachoberschule ($n_{vor} = 14$ und $n_{nach} = 12$): $\bar{x}_{vor} = 13{,}33$ und $\bar{x}_{nach} = 15{,}98$.

Man kann im Vortest eine Differenz von über drei Punkten zwischen den Gruppen Grund- und Leistungskurs erkennen; diese ist im Nachtest immer noch vorhanden, aber der Unterschied beträgt nur noch etwa zwei Punkte. Also kann in diesem Fall noch immer eine Leistungsheterogenität zwischen diesen beiden Gruppen beobachtet werden, aber die Unterschiede im Nachtest sind nicht mehr signifikant. Alle drei Gruppen können sich signifikant zwischen beiden Messzeitpunkten verbessern (bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$). Ebenso wie beim Regressor „studierter Lehramtstyp" liegen die Leistungen in einem höheren Bereich und streuen weniger stark. Für die sehr gute Leistungskursgruppe muss wiederum ein Deckelungseffekt berücksichtigt werden, wobei die Leistungen dieser Gruppe mit etwa 15,00 Punkten im Mittelwert nicht auf ganz hohem Niveau liegen. Folgende numerische Werte ergeben sich vergleichend in Vor- und Nachtest.

Tabelle 4.3: Mittelwerte der Einzelfächer in Abhängigkeit vom mathematischen Schwerpunkt (Vor- und Nachtest)

	Algebra		**Geometrie**		**Analysis**		**Stochastik**	
	VT	NT	VT	NT	VT	NT	VT	NT
GK	17,44	21,00	9,60	14,77	11,87	11,52	8,44	10,85
LK	19,98	21,79	12,46	17,50	16,06	14,27	11,71	13,33
FOS	19,29	21,65	12,28	17,10	15,92	12,55	5,82	12,65

- In Geometrie zeigen sich für alle Gruppen Steigerungen um etwa fünf Punkte.
- In Stochastik steigern sich die beiden gymnasialen Vergleichsgruppen um etwa zwei Punkte; sehr auffällig ist der Anstieg der FOS-Gruppe von einem Viertel auf die Hälfte der Maximalpunktzahl; dabei ist der geringe Stichprobenumfang mit $n_{nach} = 12$ zu berücksichtigen.
- In Algebra ist eine deutliche Verbesserung für die Grundkursgruppe zu erkennen (mit über drei Punkten), die übrigen Gruppen steigern sich etwa um zwei Punkte, wobei hierbei Deckelungseffekte zu beachten sind.
- In Analysis bleiben die Leistungen der Grundkursgruppe auf einem unverändert schwachen Niveau, die beiden anderen Gruppen verschlechtern sich deutlich.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Regressoren „studierter Lehramtstyp" und „mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe" haben einen bedeutsamen Einfluss auf die Leistungen der Studierenden im Vortest; es zeichnen sich zwischen einzelnen Gruppen deutliche Unterschiede ab, diese Heterogenität ist oben beschrieben. Die übrigen Variablen (u.a. Alter, Geschlecht, Bundesland, in dem die Hochschulreife erworben wurde) prägen die Leistungen nicht auffallend. Die beiden Regressoren haben im Nachtest keinen signifikanten Einfluss mehr auf das Leistungsbild, ebenso wenig wie die bereits im Vortest nicht bedeutsamen Variablen.

Wie oben beschrieben steigern sich die durch die beiden Regressoren generierten Gruppen signifikant von Vor- zu Nachtest; besonders die zu Anfang schwachen Gruppen (Hauptschul- und Grundkursgruppe) erfahren eine erhebliche Verbesserung ihrer Leistungen. Die Steigerungen sind zum größten Teil auf das Gebiet Geometrie zurückzuführen, zudem auch auf die Disziplinen Stochastik und Algebra. Die Leistungen in Analysis bleiben unverändert und werden teilweise sogar schwächer. Die Leistungsverbesserung ist (womöglich) auf die Inhalte der beiden Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I“ (im Wintersemester 2010/11) und „Grundlagen der Mathematik II“ (im Sommersemester 2011) zurückzuführen. Inhalte der elementaren Stochastik werden im Rahmen des Zahlenbereichs $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen (elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung) und der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (Kombinatorik) besprochen. Die Elementargeometrie als Motivation für den Zahlenbereich der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ thematisiert zentrale Bereiche der Schulgeometrie vom höheren Standpunkt der universitären Mathematik wie beispielsweise Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen, Satzgruppe des Pythagoras und Trigonometrie. Die Besprechung der elementaren Zahlentheorie ist möglicherweise ein Grund für die Leistungssteigerung zwischen Vor- und Nachtest im Bereich Algebra. Die Ergebnisse haben einen explorativen Charakter.

Von Bedeutung ist, dass die Gruppen im Nachtest ein homogeneres Gesamtergebnis zeigen, dies aber unter gleichzeitiger signifikanter Verbesserung des Leistungsbildes geschieht. Drei der vier Gebiete werden im Zyklus „Grundlagen der Mathematik“ thematisiert; genau in diesen sind zwischen den Leistungen im Vor- und Nachtest signifikante Steigerungen zu beobachten. Die Disziplin Analysis wird nicht im Rahmen dieser Veranstaltung fokussiert, es ergeben sich keine bedeutsamen Unterschiede im Leistungsbild zwischen beiden Messzeitpunkten; dieses Fach fungiert wie beschrieben als Kontrollkalkül bei dieser Vergleichsuntersuchung.

5 Analyse der Einzelaufgaben in Vor- und Nachtest

In diesem Kapitel werden die Einzelaufgaben in Vor- und Nachtest in den vier Gebieten Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik untersucht. Dabei wird jede Einzelaufgabe zunächst ohne weitere Kommentare vorgestellt. Daraufhin werden die Aufgaben theoretisch verortet, indem sie zum einen durch die Inhalte der bayerischen Lehrpläne (sechsstufige Realschule und achtjähriges Gymnasium) charakterisiert und zum anderen in die unterschiedlichen Ebenen der Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik bzw. einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung im Fach Mathematik eingeordnet werden. In diesem Rahmen werden typische Fehlerbilder für die Aufgaben analysiert und dargestellt. Die Aufgaben in den vier Gebieten werden ferner quantitativ und qualitativ beschrieben. Die quantitative Darstellung beinhaltet eine deskriptive Beschreibung der Leistungen in den Einzelaufgaben der vier Disziplinen zu beiden Erhebungszeitpunkten sowie einen Leistungsvergleich mittels induktiver Methoden; ferner erfolgt eine Einordnung der Einzelaufgaben hinsichtlich der Stärke ihrer Bearbeitung im Vortest. Die qualitative Analyse beinhaltet eine Darstellung, in welchen Einzelaufgaben welches Steigerungspotential steckt und wie dieses zu erklären ist. Diese Analyse greift also einen Teilaspekt der vierten Forschungsfrage auf:

> **Forschungsfrage 4 (Teilaspekt)**: Welche Entwicklung ergibt sich hinsichtlich der Kenntnisse in den schulrelevanten Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik nach dem Besuch der neukonzipierten Studieneingangsphase?

Im letzten Kapitel sind die Leistungen in Vor- und Nachtest global dargestellt und verglichen worden; in diesem Kapitel werden nun auf der Mikroebene die Einzelaufgaben analysiert: es erfolgt dabei eine theoretische Einordnung der Aufgaben, eine Darstellung typischer Fehler, eine deskriptive Beschreibung und induktive Untersuchung der Leistung für jede Einzelaufgabe zu beiden Erhebungszeitpunkten und eine Darstellung, in welchen Aufgaben die Studierenden besondere Leistungssteigerungen zwischen beiden Erhebungszeitpunkten erzielen konnten. Diese Analyse stellt Ergebnisse für einen Teilaspekt der vierten Forschungsfrage heraus; die Ergebnisse werden auch diskutiert und interpretiert. Damit werden in diesem Rahmen auch die globaleren Ergebnisse aus dem letzten Kapitel begründet und interpretiert, da im Folgenden durch eine quantitative und eine qualitative Untersuchung der Einzelaufgaben Erkenntnisse für diese globalen Ergebnisse gewonnen werden.

5.1 Algebra

Für dieses Teilgebiet werden zunächst die Aufgaben vorgestellt, bevor diese dann eine theoretische Einordnung in die bayerischen Lehrpläne und Bildungsstandards erfahren und eine Darstellung typischer Fehlerbilder erfolgt.

5.1.1 Vorstellung der Einzelaufgaben

Das Teilgebiet Algebra weist zehn Aufgaben auf; davon sind drei Aufgaben im Multiple-Choice-Format gestellt, die übrigen offen. Die 24 Punkte verteilen sich auf folgende Aufgabenauswahl:

1. Man vereinfache folgende Terme soweit wie möglich

   a) $\dfrac{x^3 + 3\,x^2 + 2\,x}{x^2 + x}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, (1)

   b) $\dfrac{x^2 + 4\,x + 4}{x^2 - 4}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. (1)

2. Man gebe die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ an, die von den natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ohne Rest geteilt wird. (1)

3. Im Tierpark zahlen Erwachsene und Kinder unterschiedliche Eintrittspreise. Zwei Erwachsene und zwei Kinder zahlen zusammen 26 Euro, ein Erwachsener und drei Kinder zahlen hingegen 21 Euro. Welche Eintrittspreise werden für Erwachsene bzw. Kinder berechnet? (2)

4. Ein Sportgeschäft bietet einem Fußballverein 40% Rabatt für neue Trainingsanzüge. Damit kostet ein Trainingsanzug nur noch 42 Euro. Man ermittle den ursprünglichen Preis des Anzugs. (2)

5. a) Man ordne folgende Brüche der Größe nach: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{12}$. (1)

   b) Man gebe drei Bruchzahlen zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ an. (2)

   c) Man wandle die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ in Dezimalzahlen um. (2)

   d) Man wandle die Dezimalzahlen 0,4 und $2{,}\overline{3}$ in Brüche um. (1)

6. Für alle $x \in \mathbb{R}$ löse man folgende Gleichungen.

   a) $\frac{1}{2}\,x - 3 = x - 10$, (1)

   b) $x^2 - 4\,x + 6 = 3$, (1)

   c) $7^x + 3 = 52$. (1)

7. Seien a, b und $c \in \mathbb{R}^+$ mit

$$a \cdot b = c, \quad b \cdot c = 12 \quad \text{sowie} \quad b = 3 \cdot c.$$

Man gebe a, b und c explizit an. (2)

8. Seien a, $b \in \mathbb{R}^+$. Welche der folgenden Aussagen sind gültig? (Man kreuze die richtigen Antworten an.) (2)

Aussagen	wahr	falsch
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	☐	☐
$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, für $a \geq b$	☐	☐
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	☐	☐
$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$	☐	☐

9. Seien a, $b \in \mathbb{R}^+$ und n, $m \in \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen sind gültig? (Man kreuze die richtigen Antworten an.) (2)

Aussagen	wahr	falsch
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	☐	☐
$a^n + b^n = (a+b)^n$	☐	☐
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	☐	☐
$a^n \cdot b^m = (a \cdot b)^{n \cdot m}$	☐	☐

10. Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Welche der folgenden Aussagen sind gültig? Dabei bezeichnet ln den natürlichen Logarithmus. (Man kreuze die richtigen Antworten an.) (2)

Aussagen	wahr	falsch
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$	☐	☐
$\ln(a+b) = \ln a \cdot \ln b$	☐	☐
$\ln(a : b) = \ln a - \ln b$	☐	☐
$\ln(a-b) = \ln a : \ln b$, für $a > b$ und $b \neq 1$	☐	☐

5.1.2 Theoretische Einordnung und Darstellung typischer Fehler

In diesem Abschnitt werden die Aufgaben thematisch den Inhalten des bayerischen Lehrplans für die sechsstufige Realschule und das achtjährige Gymnasium sowie den drei Ebenen allgemeine mathematische Kompetenzen, inhaltliche mathematische Kompetenzen und Anforderungsbereiche der allgemeinen mathematischen Kompetenzen der KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss zugeordnet. Anschließend erfolgt eine Diskussion typischer Fehlerbilder für die Einzelaufgaben im Vortest; es werden hier lediglich die Fehler im Vortest erörtert, da der größere Stichprobenumfang eine genauere Analyse ermöglicht. In der qualitativen Beschreibung wird dann ebenfalls Bezug zu den Fehlerbildern im Nachtest genommen.

Aufgabe 1

- Lehrplan Realschule: „M 8.1 Terme“ (Termumformungen, Faktorisierung und binomische Formeln)
- Lehrplan Gymnasium: „M 7.3 Terme und Gleichungen“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Zahl“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

In Teilaufgabe a) wird der gegebene Term nicht vollständig vereinfacht; es ergibt sich für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

$$\frac{x^3 + 3\,x^2 + 2\,x}{x^2 + x} = \frac{x\ (x^2 + 3\,x + 2)}{x\ (x + 1)} = \frac{x^2 + 3\,x + 2}{x + 1}$$

anstelle der vereinfachten Version

$$\frac{x^3 + 3\,x^2 + 2\,x}{x^2 + x} = \frac{x\ (x + 1)\ (x + 2)}{x\ (x + 1)} = x + 2;$$

dabei wird nur jeweils im Zähler und Nenner der Faktor x ausgeklammert und anschließend gekürzt und übersehen, dass sich der Zähler noch weiter in Linearfaktoren zerlegen lässt. In Teilaufgabe b) werden die binomischen Formeln teils nicht erkannt, teils falsch interpretiert; verlangt ist das Erkennen der ersten binomischen Formel im Zähler sowie der dritten im Nenner, was zu

$$\frac{x^2 + 4\,x + 4}{x^2 - 4} = \frac{(x + 2)^2}{(x + 2)\ (x - 2)} = \frac{x + 2}{x - 2}$$

führt. Erwartungshorizont dieser Aufgabe ist der sichere Umgang bei der Umformung von Termen bei einer gegebene Definitionsmenge. In einigen Fällen werden die Terme als Gleichungen interpretiert und folglich ungültige Umformungen vollzogen; etwa werden beide Terme Null gesetzt und es ist dann

$$\frac{x^3 + 3\,x^2 + 2\,x}{x^2 + x} = 0 \underset{\text{s.o.}}{\iff} x + 2 = 0 \iff x = -2$$

bzw.

$$\frac{x^2 + 4\,x + 4}{x^2 - 4} = 0 \underset{\text{s.o.}}{\iff} \frac{x + 2}{x - 2} = 0 \iff x = -2;$$

in beiden Fällen wird jeweils die Lösungsmenge $L = \{-2\}$ angegeben, es fehlt das Verständnis für die Begriffe Term und Gleichung und deren Unterscheidung.

Aufgabe 2

- Lehrplan Realschule: „M 5.7 Teilbarkeit natürlicher Zahlen“ (kleinstes gemeinsames Vielfaches)
- Lehrplan Gymnasium: „M 5.3 Rechnen mit ganzen Zahlen“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Zahl“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Das typische Problembild besteht darin, dass die Studierenden die Thematik hinter der Aufgabenstellung nicht erkennen und damit nicht das gewünschte kleinste gemeinsame Vielfache kgV der gegebenen natürlichen Zahlen bestimmen. Die Aufgabenstellung wird häufig so interpretiert, dass der größte gemeinsame Teiler ggT der natürlichen Zahlen $1, \ldots, 6$ gesucht ist. Bei der richtigen Interpretation der Aufgabenstellung wird das kleinste gemeinsame Vielfache häufig zu

$$\text{kgV}\,(1,2,3,4,5,6) = 120 \quad \text{anstelle von} \quad \text{kgV}\,(4,5,6) = 60$$

bestimmt.

Aufgabe 3

- Lehrplan Realschule: „M 9.1 Systeme linearer Gleichungen“ (Systeme linearer Gleichungen mit zwei Variablen: algebraische Lösung)
- Lehrplan Gymnasium: „M 8.1.4 Lineare Gleichungssysteme“
- Mathematische Kompetenzen: „Probleme mathematisch lösen“
- Mathematische Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“, „Reproduzieren“

Die fehlende Kennzeichnung von gleichwertigen Umformungen bei Gleichungen ist charakteristisch bei dieser Aufgabe. Das Problem wird in der Regel als Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten erkannt und zum größten Teil korrekt gelöst. In einigen Fällen kann diese Alltagssituation nicht in das entsprechende Gleichungssystem eingekleidet werden; ferner zeigen sich Fehler bei der systematischen Lösung des Problems, da typische Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems (Einsetzverfahren, Additionsverfahren, Gleichsetzverfahren) unzureichend beherrscht werden. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

Es ist

$$2\,x + 2\,y = 26 \iff x + y = 13 \iff x = 13 - y$$

und damit

$$x + 3\,y = 21 \underset{x=13-y}{\iff} (13 - y) + 3\,y = 21 \iff 2\,y = 8 \iff y = 4$$

und wegen $x = 13 - y$ ist $x = 9$, wobei x den Preis für einen Erwachsenen und y den eines Kindes symbolisiert.

Aufgabe 4

- Lehrplan Realschule: „M 7.3 Proportionalitäten“ (Prozentrechnung)
- Lehrplan Gymnasium: „M 6.1.1 Bruchteile und Bruchzahlen“
- Mathematische Kompetenzen: „Probleme mathematisch lösen“
- Mathematische Leitidee: „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“, „Reproduzieren“

Der Hauptfehler bei dieser Aufgabe ist, dass die 40 % Rabatt auf den Artikel als neuer Preis interpretiert werden. Dies liegt möglicherweise daran, dass die Angabe nicht sorgfältig gelesen wird. Ferner zeigen sich Mängel bei einfachen Schritten der Prozentrechnung wie beispielsweise das Auflösen einer Dreisatzrechnung; dabei werden die Begrifflichkeiten Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz häufig verwechselt. Ein typischer Fehlerursprung bei der Prozentrechnung wird von Furdek erkannt: eine absolute Größe kann prozentual unterschiedliche Bedeutung haben, je nach dem, was das „Ganze“ (100 %) ist [48, S. 91]. Eine mögliche Darstellung der Lösung ohne Verwendung des Dreisatzes lautet

$$P \cdot \left(1 - \frac{40}{100}\right) = 42 \iff P = \frac{42}{0{,}6} = 70.$$

Aufgabe 5

- Lehrplan Realschule: „M 6.1 Erweiterung des Zahlenbereichs: Menge $\mathbb{Q}_0^+$ der positiven rationalen Zahlen“ (Erweitern und Kürzen; gleichnamige Brüche und Größenvergleich von positiven rationalen Zahlen), „M 6.2 Rechnen mit positiven rationalen Zahlen“
- Lehrplan Gymnasium: „M 6.1.1 Bruchteile und Bruchzahlen“, „M 6.4 Rechnen mit rationalen Zahlen“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“

- Mathematische Leitidee: „Zahl“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“, „Zusammenhänge herstellen“

Die am stärksten gewichtete Aufgabe in dieser Testerhebung beinhaltet verschiedene Aspekte der Bruchrechnung. Stolpersteine beim Größenvergleich von Brüchen mit unterschiedlichem Nenner sind der fehlende Schritt, einen gemeinsamen Nenner für die zu vergleichenden Bruchzahlen zu finden und daraufhin die Brüche anhand der Zähler zu vergleichen. Bei der Angabe von Bruchzahlen zwischen zwei konkreten Stammbrüchen ist oft das fehlende Anordnungsvermögen für die Brüche eine Fehlerquelle. Eine weitere Schwierigkeit zeigt sich bei der Umwandlung von periodischen Dezimalzahlen in Bruchzahlen, da die Interpretation der Rolle der Periode nicht angewendet werden kann. Padberg nennt beim Größenvergleich von Brüchen folgende Fehlerquellen [91, S. 66]:

- kleinerer Nenner bedeutet größerer Bruch (unabhängig vom Zähler),
- größerer Nenner bedeutet kleinerer Bruch,
- größerer Zähler bedeutet größerer Bruch,
- getrennte Betrachtung von Zähler und Nenner und Übertragung auf die Brüche.

Auch bei der Umwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche sowie umgekehrt hält Padberg folgende Fehlerquellen fest [91, S. 66]:

- fehlerhafter Transfer von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bezüglich des Stellenwertsystems,
- Gleichsetzung von Komma und Bruchstrich,
- fehlerhafter Transfer von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ bezüglich der Notation von Bündelungen höherer Ordnung,
- Notation des Zählers bei Zehnerbrüchen direkt hinter dem Komma.

Viele der eben dargestellten Fehler finden sich in den Lösungen der Studierenden bei dieser Aufgabe wieder. Im Erwartungshorizont für diese Aufgabe liegt etwa:

a) Es ist $\frac{7}{12} < \frac{2}{3} = \frac{8}{12} < \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

b) Es ist $\frac{1}{4} = \frac{4}{16} < \frac{5}{16} < \frac{6}{16} < \frac{7}{16} < \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

c) Es ist $\frac{3}{4} = 0{,}75, \quad \frac{1}{3} = 0{,}\bar{3}, \quad \frac{1}{6} = 0{,}1\bar{6}$.

d) Es ist $0{,}4 = \frac{2}{5}, \quad 2{,}\bar{3} = \frac{7}{3}$.

Aufgabe 6

- Lehrplan Realschule: „M 9.1 Systeme linearer Gleichungen“, „M 9.3 Quadratische Funktionen“, „M 10.2 Exponential- und Logarithmusfunktionen“

- Lehrplan Gymnasium: „M 7.3.2 Lösen von Gleichungen“, „M 9.2.1 Graphen quadratischer Funktionen und deren Nullstellen“, „M 10.3 Exponentielles Wachstum und Logarithmen“

- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“

- Mathematische Leitidee: „Funktionaler Zusammenhang“

- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Auffallend oft wird bei der linearen Gleichung im letzten Umformungsschritt ein Rechenfehler begangen, indem die Gleichung $\frac{1}{2}\,x = 7$ zu $x = \frac{7}{2}$ umgeformt wird. Die Äquivalenzumformung, beide Seiten der gegebenen linearen Gleichung mit dem Faktor 2 zu multiplizieren, wird nicht richtig vollzogen; die linke Seite $\frac{1}{2}\,x$ der Gleichung wird mit Faktor 2 multipliziert, während die rechte Seite 7 durch den Faktor 2 dividiert wird. Teilaufgabe c) wird oft unzureichend bearbeitet; dabei wird übersehen, dass es sich um eine Exponentialgleichung handelt und zudem werden falsche Strategien beim Lösen dieser Gleichung angewendet; bei der Darstellung $7^x = 49$ wird oft auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel gezogen, was zur Lösung $x = 7$ führt. Das zeigt, dass den Studierenden nicht klar ist, dass das zu bestimmende $x \in \mathbb{R}$ im Exponenten steht und nicht in der Rolle der Basis einer Potenz fungiert. Das Lösen der quadratischen Gleichung gelingt in der Regel gut und ohne typisches Fehlerbild. Es wird dabei zum größten Teil zur Lösungsformel von quadratischen Gleichungen gegriffen, quadratische Ergänzung oder die Anwendung des Satzes von Vieta werden nicht genutzt. Häufig fehlt bei allen drei Teilaufgaben die Kennzeichnungen äquivalenter Umformungen („$\Longleftrightarrow$“) von Gleichungen (vgl. Aufgabe 3 in diesem Teilgebiet). Als Bearbeitungsvorschlag ergibt sich:

a) Es ist $\dfrac{1}{2}\,x - 3 = x - 10 \iff \dfrac{1}{2}\,x = 7 \iff x = 14.$

b) Es ist

$$\begin{aligned} x^2 - 4\,x + 6 = 3 \iff{} & x^2 - 4\,x + 3 = 0 \\ \iff{} & (x-1)\,(x-3) \iff (x = 1 \quad \text{oder} \quad x = 3)\,. \end{aligned}$$

c) Es ist $7^x + 3 = 52 \iff 7^x = 49 \iff x = \dfrac{\ln 49}{\ln 7} \iff x = 2.$

Aufgabe 7

- Lehrplan Realschule: „M 9.1 Systeme linearer Gleichungen“
- Lehrplan Gymnasium: „M 8.1.4 Lineare Gleichungssysteme“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Zahl“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Die Problemstellung führt zu einem Gleichungssystem, welches durch das Einsetzverfahren typischerweise sicher gelöst wird. Der Aspekt, dass alle drei zu bestimmenden Parameter a, b und c positive reelle Zahlen sind, wird oft übersehen, was fälschlicherweise zu mehreren Belegungen der Parameter führt. Typische Fehlerquellen außer der Nichtbeachtung der Parameterbelegung mit $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ sind im vorliegenden Fall nicht zu erkennen; das Fehlen der Kennzeichnung äquivalenter Umformungen ist auch bei dieser Aufgabe häufig zu beobachten. In vielen Fällen lautet die Lösung völlig richtig: Mit $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$ ist

$$b \cdot c = 12 \underset{b=3\cdot c}{\iff} 3 \cdot c^2 = 12 \iff c^2 = 4 \underset{c>0}{\iff} c = 2$$

und damit

$$b = 3 \cdot 2 = 6 \quad \text{sowie} \quad a = \frac{c}{b} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 8

- Lehrplan Realschule: „M 9.2 Reelle Zahlen“
- Lehrplan Gymnasium: „M 9.1 Weiterentwicklung der Zahlvorstellung“ (Umgehen mit einfachen Wurzeltermen)
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Zahl“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Behandelt werden typische Rechengesetze für Quadratwurzeln (Summe, Differenz, Produkt und Quotient). Die korrekten Beziehungen für Produkt und Quotient werden in der Regel richtig erkannt; dennoch werden auch in einigen Fällen die beiden anderen Typen als wahr eingestuft, was fälschlicherweise den Schluss der Linearität der Quadratwurzel nach sich zieht. Die korrekte Lösung lautet:

Aussagen	wahr	falsch
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	☐	☒
$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}, \quad \text{für } a \geq b$	☐	☒
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	☒	☐
$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$	☒	☐

Aufgabe 9

- Lehrplan Realschule: „M 10.1 Potenzen und Potenzfunktionen“ (Potenzgesetze)
- Lehrplan Gymnasium: „M 7.3.1 Umformen von Termen“, „M 10.5.1 Graphen ganzrationaler Funktionen“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Zahl“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Behandelt werden Potenzgesetze mit positiven reellen Basen sowie ganzzahligen Exponenten. Den ersten beiden Aussagen wird sehr häufig der richtige Wahrheitsgehalt zugeordnet; in beiden Fällen tritt nur ein Exponent n auf. Für die beiden anderen Fälle zeigen sich viele Fehler, da $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ als falsch, dafür aber die Beziehung $a^n \cdot b^m = (a \cdot b)^{n \cdot m}$ als wahr interpretiert wird; die Studierenden haben Probleme mit zwei auftretenden Exponenten n und m. Die korrekte Lösung lautet:

Aussagen	wahr	falsch
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	☒	☐
$a^n + b^n = (a+b)^n$	☐	☒
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	☒	☐
$a^n \cdot b^m = (a \cdot b)^{n \cdot m}$	☐	☒

Aufgabe 10

- Lehrplan Realschule: „M 10.2 Exponential- und Logarithmusfunktionen“ (Logarithmussätze)
- Lehrplan Gymnasium: „M 10.3 Exponentielles Wachstum und Logarithmen“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Zahl“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Behandelt werden Logarithmusgesetze am Beispiel des natürlichen Logarithmus $\ln = \log_e$, also des Logarithmus mit der eulerschen Zahl e als Basis. Bis auf wenige Ausnahmen zeigen sich zwei typische Muster: entweder wird die Aufgabe richtig gelöst oder die Wahrheitswerte sind alle falsch angekreuzt; die Studierenden interpretieren im Falle der richtigen Lösung, dass der Logarithmus eines Produkts zweier positiver reeller Zahlen $\ln(a \cdot b)$ bzw. der Logarithmus eines Quotienten zweier positiver reeller Zahlen $\ln(a : b)$ der Summe $\ln a + \ln b$ bzw. der Differenz $\ln a - \ln b$ der einzelnen Logarithmen der positiven reellen Zahlen a und b entspricht. In den anderen Fällen hätte jeweils ein Gegenbeispiel gefunden werden können: so ist $\ln(1+1) = \ln 2 \neq 0 = \ln 1 \cdot \ln 1$ bzw. $\ln(3-2) = \ln 1 = 0 \neq \ln 3 : \ln 2$. Die korrekte Lösung lautet:

Aussagen	wahr	falsch
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$	☒	☐
$\ln(a + b) = \ln a \cdot \ln b$	☐	☒
$\ln(a : b) = \ln a - \ln b$	☒	☐
$\ln(a - b) = \ln a : \ln b, \quad$ für $a > b$ und $b \neq 1$	☐	☒

5.1.3 Quantitative Beschreibung

Im Folgenden werden für beide Erhebungszeitpunkte zuerst das Gesamtergebnis im Teilgebiet Algebra dargestellt und anschließend die Leistungen in den Einzelaufgaben betrachtet. Gemäß der Ergebnisse in den Einzelaufgaben im Vortest werden die Aufgaben (quantitativ) in die Kategorien „sehr gut bearbeitet“, „mittelmäßig bearbeitet“ und „schwach bearbeitet“ eingeteilt; die Ausführungen beziehen sich lediglich auf die Vortestergebnisse, da der Stichprobenumfang ($n_{vor} = 178$ und $n_{nach} = 86$) größer und folglich die Aussagekraft stärker ist. Abschließend werden die Bearbeitungen der Einzelaufgaben in Vor- und Nachtest vergleichend gegenüber gestellt.

Ergebnisse im Vortest ($n_{vor} = 178$)

Zuerst wird das Gesamtergebnis im Teilgebiet Algebra im Vortest betrachtet. Das Leistungsbild der Studierenden wird zunächst durch ein Säulendiagramm veranschaulicht, welches auf der Rechtswertachse die 24 zu erreichenden Gesamtpunkte in Halbpunktschritten aufgetragen hat und auf der Hochwertachse die entsprechende Anzahl an Studierenden, welche die jeweilige Punktzahl erreicht hat.

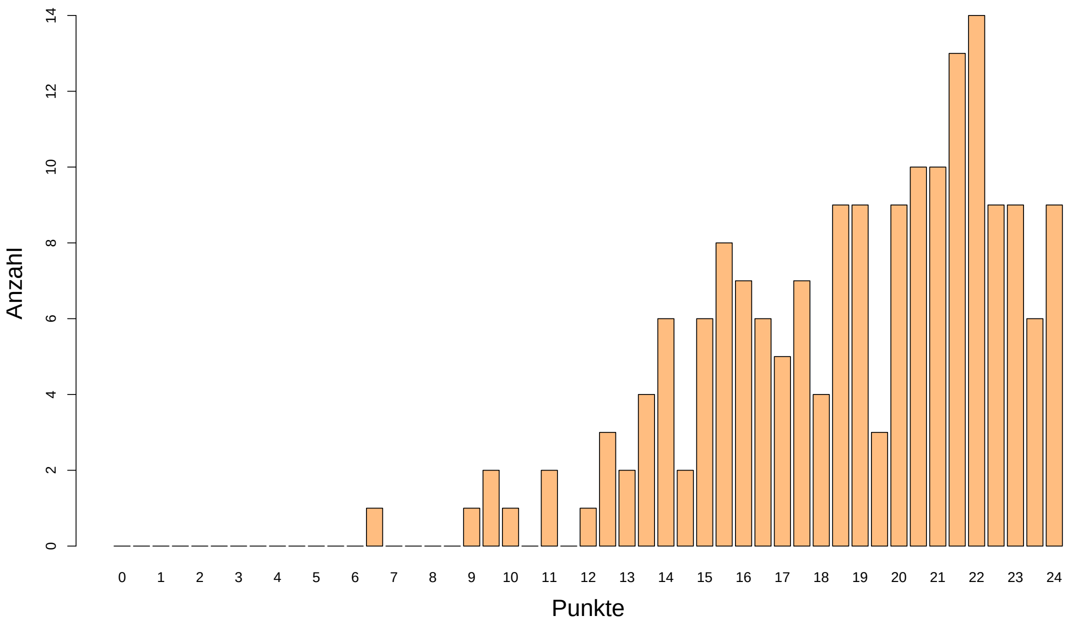

Abbildung 5.1: Punkteverteilung der Gesamtleistung Algebra (Vortest)

Für das dargestellte Gesamtergebnis erhält man folgende deskriptive Kenngrößen:

- der Mittelwert ist $\bar{x} = 18{,}87$, der Median $x_{med} = 19{,}75$ sowie der Modus $x_{mod} = 22{,}00$; wegen $\bar{x} < x_{med} < x_{mod}$ liegt eine rechtssteile Verteilung vor,

- der Interquartilabstand (in dem dadurch definierten Bereich befinden sich die mittleren 50 % der erzielten Leistungen) ist

$$d_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 22{,}00 - 16{,}00 = 6{,}00,$$

  die Spannweite der Punkte beträgt

$$d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 24{,}00 - 6{,}50 = 17{,}50$$

  sowie die Standardabweichung der Punkte $s = 3{,}69$ (maximal 24,00 Punkte).

Nach der Darstellung des Gesamtergebnisses werden die zehn Einzelaufgaben analysiert; dazu dienen ein Säulendiagramm und zudem Dichtekurven. Die Aufgaben haben unterschiedliche Maximalpunkte, was einen direkten Vergleich erschwert. Die angeführten Dichtekurven besitzen bei der Darstellung der zu erreichenden Punkte auf der Rechtswertachse das Einheitsintervall [0,00; 1,00], indem bei jeder Einzelaufgabe durch die jeweilige Maximalpunktzahl dividiert wird; auf der Hochwertachse wird jeweils die Dichte aufgetragen. Es wird beispielsweise durch den Wert 0,50 auf der Rechtswertachse die halbe Maximalpunktzahl symbolisiert.

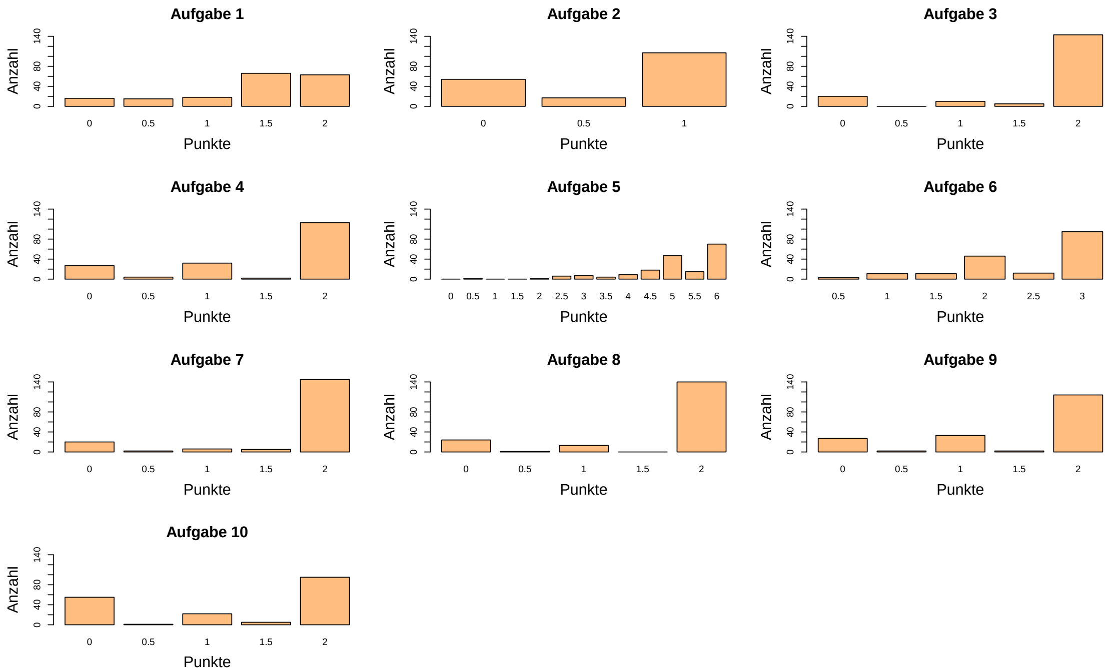

Abbildung 5.2: Punkteverteilung der Einzelaufgaben Algebra (Vortest)

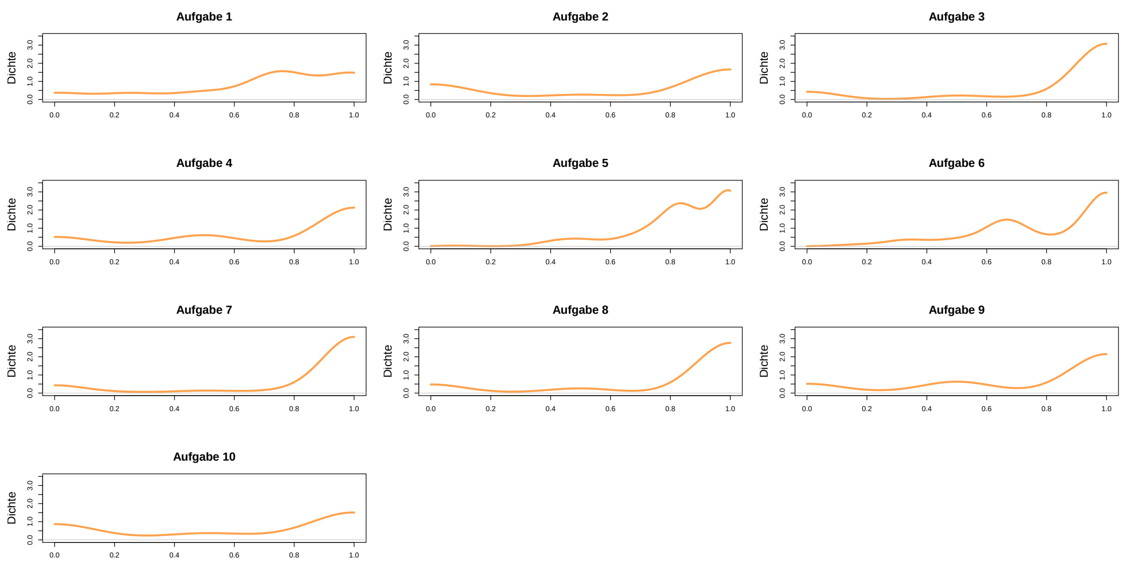

Abbildung 5.3: Dichtekurven der Einzelaufgaben Algebra (Vortest)

Die graphische Darstellung der Leistungen in den Einzelaufgaben wird nun noch durch numerische Kenngrößen ergänzt; dabei ist für jede Einzelaufgabe das arithmetische Mittel $\bar{x}_{vor}$, die Standardabweichung s_{vor} sowie die jeweils maximal zu erreichende Punktzahl $x_{maximal}$ angegeben.

Tabelle 5.1: Mittelw. und Standardabw. der Einzelaufgaben Algebra (Vortest)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
$\bar{x}_{vor}$	1,41	0,65	1,71	1,48	5,10	2,45	1,71	1,65	1,49	1,23
s_{vor}	0,62	0,45	0,65	0,75	1,03	0,68	0,66	0,71	0,75	0,89
$x_{maximal}$	2	1	2	2	6	3	3	2	2	2

Aufgabencharakterisierung hinsichtlich der Bearbeitung im Vortest

Sehr gut bearbeitete Aufgaben 3, 5, 6, 7, 8 (Themen: lineare Gleichungssysteme, Bruchrechnung (Anordnung, Umwandlung von gewöhnlichen Brüchen in Dezimaldarstellung und umgekehrt), Lösen von Gleichungen (lineare und quadratische Gleichungen sowie Exponentialgleichung), Eigenschaften von Quadratwurzeln).

Es ragen folgende Aufgaben besonders heraus: Aufgabe 3 (Gleichungssystem) mit 143, Aufgabe 7 (ebenfalls Gleichungssystem) mit 145 und Aufgabe 8 (Eigenschaften von Quadratwurzeln im Multiple-Choice-Verfahren) mit 140 vollständig richtigen Antworten. Bei Aufgabe 5 (Bruchrechnung) erzielen drei Viertel der Testpersonen 5,00 und mehr von 6,00 möglichen Punkten, darunter 70 mal 6,00 Punkte. Zwar wird die Thematik der Bruchrechnung bereits am Ende der Primarstufe und in den Anfängen der Sekundarstufe I behandelt und zieht sich durch alle Klassenstufen, aber es fällt Lernenden zunehmend schwerer, solch einfache elementare Bruchumwandlungen ohne Taschenrechner auszuführen. Bei Aufgabe 6 (Lösen einfacher Gleichungen) erzielen 153 Personen 2,00 Punkte oder mehr von 3,00 maximal erreichbaren.

Mittelmäßig bearbeitete Aufgaben 1, 4, 9 (Themen: Termumformungen, Prozentrechnung, Potenzgesetze).

Aufgabe 1 (Vereinfachen von Termen) zeigt einen Mittelwert von 1,41 von 2,00 Punkten. Diese Aufgabe wird teils sehr gut – über 70 % der Studierenden weisen 1,50 oder 2,00 Punkte auf – aber auch von 31 Studierenden schwach beantwortet, die keinen oder nur einen halben Punkt bei ihrer Bearbeitung erzielen. Damit kann diese Aufgabe im Mittelbereich eingeordnet werden.

Bei den Aufgaben 4 und 9 zeigt sich sowohl in der Tabelle als auch in der Dichtekurve ein einheitliches Bild. Beide weisen einen Mittelwert von 1,48 bzw. 1,49 von 2,00 zu erreichenden Punkten auf. Die Auslenkung auf der Rechtswertachse bei $x = 1{,}00$ (Maximalpunktzahl) ist nicht so stark ausgeprägt wie bei den sehr gut bearbeiteten Aufgaben 3, 5, 6, 7 und 8, dafür aber stärker als bei den Aufgaben 2 und 10, die als vergleichsweise schwach bearbeitet eingestuft werden können. Es ergeben sich stärkere Auslenkungen bei den x-Achsenwerten 0,00 (null Punkte) und 0,50 (halbe Maximalpunktzahl) im Vergleich zu den sehr gut bearbeiteten Aufgaben.

Schwach bearbeitete Aufgaben 2, 10 (Themen: Bestimmung des kgV, Logarithmusgesetze).

Schwach fallen im Vergleich die Aufgaben 2 und 10 aus. Die Schaubilder dieser Aufgaben zeigen, dass die Aufgaben teils sehr gut, teils schwach bearbeitet werden. Bereits die Hälfte der Personen erreicht volle Punktzahl, allerdings hat auch ein Viertel der Studierenden keine Punkte erzielt.

Multiple-Choice-Aufgaben 8, 9 und 10. Es zeigt sich kein einheitliches Ergebnis, da Aufgabe 8 vergleichsweise sehr gut, Aufgabe 9 mittelmäßig und Aufgabe 10 schlecht ausfällt.

Ergebnisse im Nachtest ($n_{nach} = 86$)

Für das Gesamtergebnis im Nachtest erhält man folgende deskriptive Kenngrößen:

- der Mittelwert ist $\bar{x} = 21{,}01$, der Median $x_{med} = 21{,}50$ sowie der Modus $x_{mod} = 24{,}00$; wegen $\bar{x} < x_{med} < x_{mod}$ liegt eine rechtssteile Verteilung vor,
- der Interquartilabstand ist

  $$d_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 23{,}00 - 19{,}00 = 4{,}00,$$

  die Spannweite der Punkte beträgt

  $$d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 24{,}00 - 12{,}00 = 12{,}00$$

  sowie die Standardabweichung der Punkte $s = 2{,}59$.

Folgende numerische Kenngrößen zeigen die Leistungen in den Einzelaufgaben im Nachtest; dabei ist für jede Aufgabe das arithmetische Mittel $\bar{x}_{nach}$, die Standardabweichung s_{nach} sowie die jeweilige Maximalpunktzahl $x_{maximal}$ angegeben.

Tabelle 5.2: Mittelw. und Standardabw. der Einzelaufgaben Algebra (Nachtest)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
$\bar{x}_{nach}$	1,89	0,74	1,98	1,74	5,42	2,60	1,76	1,90	1,82	1,16
s_{nach}	0,29	0,44	0,18	0,65	1,02	0,68	0,49	0,41	0,45	0,96
$x_{maximal}$	2	1	2	2	6	3	3	2	2	2

Vergleich der Ergebnisse der Einzelaufgaben in Vor- und Nachtest

Nach der Darstellung der Leistungen in den Einzelaufgaben zu beiden Erhebungszeitpunkten werden die Ergebnisse der Einzelaufgaben in Vor- und Nachtest verglichen. Die folgende Tabelle fasst die oben gewonnenen Ergebnisse nochmals vergleichend zusammen, indem die arithmetischen Mittelwerte in Vortest ($\bar{x}_{vor}$) und Nachtest ($\bar{x}_{nach}$) aufgeführt werden. Ferner wird die Stärke des Leistungsunterschieds zwischen den beiden Erhebungszeitpunkten für jede einzelne Aufgabe anhand des p-Werts folgendermaßen gekennzeichnet (Welch-Test):

$$\begin{cases} \text{keine Kennzeichnung (nicht signifikant)}, & \text{falls } p > 0{,}05, \\ * \text{ (leicht signifikant)}, & \text{falls } 0{,}01 < p \leq 0{,}05, \\ ** \text{ (signifikant)}, & \text{falls } 0{,}001 < p \leq 0{,}01, \\ *** \text{ (hoch signifikant)}, & \text{falls } p \leq 0{,}001. \end{cases}$$

Tabelle 5.3: Mittelwerte in Vor- und Nachtest mit Signifikanz (Algebra)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
$\bar{x}_{vor}$	1,41	0,65	1,71	1,48	5,10	2,45	1,71	1,65	1,49	1,23
$\bar{x}_{nach}$	1,89	0,74	1,98	1,74	5,42	2,60	1,76	1,90	1,82	1,16
Signifikanz	***		***	**	*			***	***	

Mit Hilfe der Tabelle werden folgende Trends deutlich:

- keine signifikante Leistungssteigerung bei den Aufgaben 2, 6, und 7,
- kein signifikanter Leistungsabfall bei Aufgabe 10,
- leicht signifikante Leistungssteigerung bei Aufgabe 5,
- signifikante Leistungssteigerung bei Aufgabe 4,

- hoch signifikante Leistungssteigerung bei den Aufgaben 1, 3, 8 und 9.

Damit werden in je vier Fällen keine auffallenden Leistungsänderungen bzw. hoch signifikante Leistungssteigerungen erzielt und in je einer Aufgabe leicht signifikante bzw. signifikante Verbesserungen.

5.1.4 Qualitative Analyse

Die obige Einteilung in die fünf Kategorien wird nun analysiert; dabei werden für jede Kategorie die Einzelaufgaben hinsichtlich der qualitativen Bearbeitung zwischen Vor- und Nachtest untersucht. Grundlage sind die typischen Fehlerbilder im Vortest und der Vergleich zu den Fehlerquellen im Nachtest.

Diskussion der Aufgaben 1, 3, 8 und 9 (hoch signifikant *)**

- Vereinfachung von Termen (Aufgabe 1),
- Erkennen und Lösen eines 2×2-Gleichungssystems (Aufgabe 3),
- Kenntnis über Gesetze von Quadratwurzeln (Aufgabe 8),
- Kenntnis über Potenzgesetze (Aufgabe 9).

Bei allen vier Aufgaben sind maximal zwei Bewertungseinheiten zu erreichen; diese Maximalpunktzahl wird im Nachtest von den Studierenden annähernd in allen vier Fällen erreicht.

Die Steigerungen bei Aufgabe 1 sind vor allem durch das vollständige Faktorisieren des Zählerterms $x^3 + 3\,x^2 + 2\,x$ in Teilaufgabe a) und das zielgerichtete Anwenden der ersten und dritten binomischen Formel in Zähler und Nenner in Teilaufgabe b) zu erklären. Ferner liegt das globale Verständnis der Aufgabe im Nachtest auf einem höheren Niveau, da stets erkannt wird, dass es sich um die Behandlung von Termen und nicht um die von Gleichungen handelt.

Die Übersetzung der Informationen aus dem gegebenen Text in mathematische Formelsprache (Alltagssituation in ein 2×2-Gleichungssystem) und das zielsichere Lösen des Gleichungssystems ist im Falle von Aufgabe 3 zu bemerken. Die Lösungsstrategien bei Gleichungssystemen werden zu beiden Erhebungszeitpunkten sicher angewendet; das Kennzeichnen äquivalenter Umformungen steigert sich im Nachtest deutlich bei allen Aufgaben, auch bei Aufgabe 3.

Die Aufgaben 8 und 9 sind im Multiple-Choice-Format. Es zeigt sich, dass Wurzel- und Potenzgesetze deutlich besser beherrscht werden. Im Nachtest werden die Wurzelgesetze sehr gut bearbeitet, da die Linearität der Quadratwurzel nicht mehr als richtig angenommen wird; ferner werden im Rahmen der Potenzgesetze die beiden letzten Aussagen besser interpretiert, da die Rollen der beiden auftretenden Exponenten n und m besser verstanden werden. Auffallend ist, dass in zwei der drei Multiple-Choice-Aufgaben hoch signifikante Steigerungen zu erkennen sind, wobei die Inhalte bzw. Thematiken der Aufgaben das Hauptaugenmerk darstellen. Wurzel- und Potenzgesetze werden im Rahmen des Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ behandelt, Logarithmusgesetze hingegen nicht; im Falle der Logarithmusgesetze lässt sich sogar ein leichter Abfall in der Leistung zwischen beiden Erhebungszeitpunkten beobachten (alle übrigen Aufgaben erfahren eine Steigerung im Nachtest).

Es zeigt sich ein auffallender Querverweis: Aufgabe 3 (hoch signifikante Steigerung) und Aufgabe 7 (keine signifikante Steigerung) haben als grundlegende Thematik das Lösen von Gleichungssystemen. In Aufgabe 3 stellt neben dem Lösen des Systems die Einkleidung der Textinformation in mathematische Formelsprache das Hauptaugenmerk dar; dieser Modellierungsaspekt wird durch den Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ der Bildungsstandards dargestellt. Damit kann dieser Aspekt als zentrales Unterscheidungsmerkmal zwischen den beiden Aufgaben, die dem gleichen Inhaltsgebiet zugeordnet werden, herausgestellt werden.

Diskussion der Aufgaben 2, 6, 7 und 10 (nicht signifikant)

- Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen kgV (Aufgabe 2),
- Lösen von Gleichungstypen (lineare und quadratische Gleichungen, Exponentialgleichung) (Aufgabe 6),
- Lösen eines Gleichungssystems (Aufgabe 7),
- Kenntnis über Rechenregeln von Logarithmen (Aufgabe 10).

In allen Fällen außer bei Aufgabe 10 zeichnen sich leichte Steigerungen der Leistungen im Nachtest ab. Die vergleichsweise schwachen Ergebnisse bei Aufgabe 10 im Vortest sinken im Nachtest leicht ab; die Thematik findet in den fachwissenschaftlichen Veranstaltungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ keinen Niederschlag, da diese im Rahmen der Differentialrechnung im dritten Studienjahr vorgesehen ist.

Für die Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der natürlichen Zahlen $1, \ldots, 6$ ergeben sich im Nachtest sehr ähnliche Fehlerbilder wie im Vortest; diese Thematik hingegen wird im Rahmen der ersten beiden Fachsemester besprochen, aber es zeigen sich hier nur leichte, nicht bedeutsame Verbesserungen, da im Nachtest dennoch häufig das kleinste gemeinsame Vielfache mit dem größten gemeinsamen Teiler verwechselt wird.

Die Strategien beim Lösen der drei Gleichungen in Aufgabe 6 zeigen im Nachtest die gleichen Fehler wie im Vortest; das Identifizieren der Gleichung $7^x+3 = 52$ als Exponentialgleichung stellt sich zu beiden Erhebungszeitpunkten als Hauptschwierigkeit dar. Dabei ist die Rolle der zu bestimmenden reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ im Exponenten für die Studierenden schwer zu charakterisieren, so dass viele Ansätze scheitern. Das Lösen der linearen und quadratischen Gleichung ist im Nachtest leicht besser, wobei dieser Aspekt nicht an der Lösungsstrategie zu kennzeichnen ist, sondern an der sicheren Beherrschung äquivalenter Umformungen.

Aufgabe 7 wird zu beiden Erhebungszeitpunkten vergleichsweise sehr gut gelöst; in beiden Fällen bestätigt sich der oben geschilderte Kritikpunkt, dass die Belegung der Parameter a, b und c mit positiven reellen Zahlen nicht berücksichtigt wird.

Alle diese Aufgaben sind gemäß der Bildungsstandards der allgemeinen mathematischen Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ und dem Anforderungsbereich „Reproduzieren“ zuzuordnen.

Diskussion der Aufgaben 4, 5 (signifikant ** bzw. leicht signifikant *)

- Prozentrechnung (Aufgabe 4),

- Bruchrechnung (Größenvergleich, Umwandlung von Dezimalzahlen in Brüche und umgekehrt) (Aufgabe 5).

Für die Aufgaben 4 bzw. 5 werden signifikante bzw. leicht signifikante Steigerungen festgestellt; beide Aufgaben werden gemeinsam diskutiert. Bei Aufgabe 4 ist zu erkennen, dass die Begrifflichkeiten Grundwert, Prozentwert und Prozentsatz im Nachtest klarer abstrahiert werden können und folglich die Rolle des aktuellen Preises des Anzugs richtig interpretiert wird.

Bei Aufgabe 5 kann im Nachtest festgestellt werden, dass das Anordnungsvermögen von Bruchzahlen besser verstanden wird. Dieser Aspekt wird im Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ im Rahmen der Anordnung algebraischer Strukturen (vor allem bei angeordneten Körpern $(K, +, \cdot, <)$) und der Konstruktion von $\mathbb{Q}$ thematisiert.

Beide Aufgaben sind gemäß der Bildungsstandards dem Anforderungsbereich „Zusammenhänge herstellen“ zugeordnet.

5.2 Geometrie

5.2.1 Vorstellung der Einzelaufgaben

Das Teilgebiet Geometrie weist neun Aufgaben auf; alle liegen im offenen Format vor. Die 24 Punkte verteilen sich auf folgende Aufgabenauswahl:

1. Gegeben sei ein Kreis und ein Quadrat mit gleichem Umfang. Man begründe rechnerisch, welcher der beiden geometrischen Figuren den größeren Flächeninhalt besitzt. (4)

2. In einem Rechteck sei die Länge $a = 4\,cm$ und die Diagonale $d = 5\,cm$ gegeben. Man berechne den Flächeninhalt des Rechtecks. (2)

3. In einem Quadrat sei die Diagonale $d = 4\sqrt{2}\,cm$ gegeben. Man berechne den Flächeninhalt des Quadrats. (2)

4. Die Kongruenzabbildungen Drehung, Punktspiegelung und Parallelverschiebung können als Doppelachsenspiegelungen interpretiert werden. Man beschreibe die gegenseitige Lage der beiden Spiegelachsen

   a) für eine Drehung, (1)

   b) für eine Punktspiegelung, (1)

   c) für eine Parallelverschiebung. (1)

5. In einem Dreieck verhalten sich die Winkel

   $$\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4.$$

   Wie groß sind die Winkel α, β und γ? (2)

6. In der Ebene seien die Punkte $P = (3, 0)$ und $Q = (0, 3)$ sowie die Gleichung $y = x + 1$ der Geraden g gegeben.

   a) Man gebe eine Gleichung der Geraden h an, die die Punkte P und Q enthält. (3)

   b) Man gebe eine Gleichung der Geraden k an, die parallel zur Geraden g ist und den Punkt P enthält. (3)

7. Jedes beliebige Dreieck besitzt einen Umkreis sowie einen Inkreis. Man beschreibe (in Worten) die Lage

   a) für den Umkreismittelpunkt, (1)

   b) für den Inkreismittelpunkt. (1)

8. Im allgemeinen Dreieck gilt der Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

Sei nun $\gamma = 90°$. Welcher Satz und welche besondere Dreiecksform ergeben sich für diese Wahl des Winkels γ? (1)

9. Welches geometrische Gebilde wird durch die Gleichung $x + y = 5$

   a) in der Ebene $\mathbb{R}^2$, (1)

   b) im Raum $\mathbb{R}^3$ (1)

   beschrieben?

5.2.2 Theoretische Einordnung und Darstellung typischer Fehler

Wie für das Teilgebiet Algebra werden die Aufgaben zuerst durch Lehrplaninhalte sowie Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss charakterisiert und anschließend typische Fehlerbilder im Vortest diskutiert.

Aufgabe 1

- Lehrplan Realschule: „M 5.5 Flächenmessung“, „M 9.9 Berechnungen am Kreis“
- Lehrplan Gymnasium: „M 5.4.2 Fläche und Flächenmessung“, „M 10.1 Kreiszahl π“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Mathematische Darstellungen verwenden“
- Mathematische Leitidee: „Messen“, „Raum und Form“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“, „Verallgemeinern und Reflektieren“

Ein klassischer Fehler beruht auf der mangelnden Kenntnis über elementare Formeln zur Flächeninhalts- und Umfangsbestimmung einfacher geometrischer Gebilde; vor allem die Einkleidung in Formeln für Flächeninhalt und Umfang des Kreises stellt eine häufige Fehlerquelle dar. Eine Formel nicht mehr zu wissen (obwohl die hier benötigten als absolutes Grundwissen zu deklarieren sind) kann passieren; dennoch sollte klar sein, dass die Größe Flächeninhalt eine Maßeinheit im Quadrat und die Größe Umfang eine Maßeinheit erster Potenz besitzt. Häufig wird als Flächeninhalt des Kreises die Beziehung $A_K = r\,\pi^2$ verwendet bzw. als Umfang des Kreises

$U_K = 2\,r^2\,\pi$. Diese Entwicklung ist wohl der Benutzung der Formelsammlung geschuldet, da jede einfachste Beziehung, die als Grundwissen zu verstehen ist, im Ernstfall nachgelesen wird. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe besteht im Erkennen des verbindenden Elements, dass der Umfang des Quadrats und der des Kreises die gleiche Maßzahl besitzen. Dieser Aspekt muss genutzt werden, um einen Vergleich der Maßzahlen der Flächeninhalte beider geometrischer Figuren zu ermöglichen. Es können elementare Fehler bei äquivalenten Umformungen festgehalten werden. Bei korrekter Rechnung fehlt schließlich das Vergleichskalkül, d.h. es kann beispielsweise aus der Beziehung

$$A_K = r^2\,\pi = \frac{4\,a^2}{\pi^2}\,\pi = \frac{4\,a^2}{\pi} \qquad \text{und} \qquad A_Q = a^2.$$

keine konkrete Aussage über die Größenanordnung beider Ausdrücke getroffen werden. In zahlreichen Fällen wird die Aufgabe mit selbstgewählten Maßzahlen berechnet, da das Abstraktionsvermögen nicht ausreicht. Folgende Skizze zur Lösung der Aufgabe stellt den Erwartungshorizont dar: Für den Kreis mit Radius r gilt $U_K = 2\,\pi\,r$ und $A_K = r^2\,\pi$ sowie für das Quadrat mit Seitenlänge a gilt $U_Q = 4\,a$ und $A_Q = a^2$. Es ist

$$U_K = U_Q \iff 2\,\pi\,r = 4\,a \iff r = \frac{2\,a}{\pi}$$

und damit

$$A_K = r^2\,\pi = \frac{4\,a^2}{\pi^2}\,\pi = \frac{4\,a^2}{\pi} \underset{\frac{4}{\pi}>1}{>} a^2 = A_Q.$$

Aufgabe 2

- Lehrplan Realschule: „M 5.5 Flächenmessung“, „M 9.8 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck“
- Lehrplan Gymnasium: „M 5.4.2 Fläche und Flächenmessung“, „M 9.5.1 Die Satzgruppe des Pythagoras“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Mathematische Darstellungen verwenden“
- Mathematische Leitidee: „Messen“, „Raum und Form“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

Ebenso wie in Aufgabe 1 zeigt sich in diesem Fall eine Schwachstelle bei der Einkleidung des Flächeninhalts des Rechtecks in die Formelsprache; folglich werden fälschlich zur Bestimmung des gesuchten Flächeninhalts die Länge a mit der Diagonalen d multipliziert. Ferner treten Probleme beim Umgang mit dem Satz des

Pythagoras auf; es wird einerseits die falsche Seite des entsprechenden Dreiecks (mit der Hypotenuse der Länge d und der gegebenen Kathete der Länge a) als Hypotenuse gewählt und andererseits Fehler beim Radizieren begangen. Folgende Darstellung stellt einen möglichen Lösungsvorschlag dar:

Es ist

$$a^2 + b^2 = d^2 \iff b^2 = d^2 - a^2 \underset{b>0}{\iff} b = \sqrt{25\ cm^2 - 16\ cm^2} \iff b = 3\ cm$$

und damit

$$A_R = a \cdot b = 4\ cm \cdot 3\ cm = 12\ cm^2.$$

Aufgabe 3

- Lehrplan Realschule: „M 5.5 Flächenmessung", „M 9.8 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck"
- Lehrplan Gymnasium: „M 5.4.2 Fläche und Flächenmessung", „M 9.5.1 Die Satzgruppe des Pythagoras"
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren", „Mathematische Darstellungen verwenden"
- Mathematische Leitidee: „Messen", „Raum und Form"
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen"

Bei dieser Aufgabe wird häufig nicht erkannt, dass die Diagonale das gegebene Quadrat in zwei kongruente und jeweils gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt, da die beiden Katheten die Seitenlänge a aufweisen. Ferner können fehlende algebraische Fertigkeiten beim Umgang mit quadratischen Ausdrücken als Fehlerquelle ausgemacht werden. Die Aufgabenstellung stellt eine Sonderform von Aufgabe 2 dar, da in diesem Fall ein Spezialfall des Rechtecks, nämlich ein Quadrat, betrachtet wird. Eine mögliche Lösung dieser Aufgaben ist etwa:

Es ist

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 = d^2 \iff 2\,a^2 = d^2 \iff a^2 &= \frac{\left(4\sqrt{2}\ cm\right)^2}{2} \\ \iff a^2 = 16\ cm^2 &\underset{a>0}{\iff} a = \sqrt{16\ cm^2} \iff a = 4\ cm \end{aligned}$$

und damit

$$A_Q = a^2 = 4^2\ cm^2 = 16\ cm^2.$$

Aufgabe 4

- Lehrplan Realschule: „M 7.4 Parallelverschiebung“, „M 7.5 Drehung“
- Lehrplan Gymnasium: „M 7.5.1 Kongruenz“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Messen“, „Raum und Form“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Diese Aufgabe wird sehr häufig nicht bearbeitet, was den Schluss nahelegt, dass die Aufgabestellung nicht verstanden wird. In den bearbeiteten Versionen können nur wenige Studierende die Lage der Geraden richtig zuordnen, in den seltensten Fällen wird die Punktspiegelung als Doppelachsenspiegelung richtig interpretiert. Am besten wird die Lage der beiden Spiegelachsen im Fall der Parallelverschiebung beschrieben, da wohl aus dem Begriff der Parallelverschiebung die Lage der Achsen geraten wird. Der Begriff der Kongruenzabbildung und die Interpretation dieser drei Typen als Doppelachsenspiegelungen wird von der Studierenden nur im geringen Maße durchdrungen. Folgende Darstellung wird dabei erwartet:

a) Bei einer Drehung schneiden sich die beiden Spiegelachsen.

b) Bei einer Punktspiegelung (Sonderfall der Drehung) sind die Spiegelachsen senkrecht zueinander.

c) Bei einer Parallelverschiebung sind die Spiegelachsen parallel zueinander.

Aufgabe 5

- Lehrplan Realschule: „M 7.4 Parallelverschiebung“ (Innenwinkelsumme im Dreieck Δ)
- Lehrplan Gymnasium: „M 7.1.2 Winkelbetrachtungen an Figuren“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Messen“, „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

Bei der Bestimmung der Innenwinkel α, β und γ des Dreiecks, die durch das Verhältnis $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$ gegeben sind, können algebraische und geometrische Fehler analysiert werden. Algebraisch liegen Probleme mit dem Verständnis der Begrifflichkeit Verhältnis zwischen Größen vor und geometrisch wird oft die Innenwinkelsumme eines Dreiecks nicht beachtet. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

Wegen $2 + 3 + 4 = 9$ zerlegt man $180°$ (Innenwinkelsumme im Dreieck) in neun gleiche Teile, also $180° : 9 = 20°$; damit ist

$$\alpha = 2 \cdot 20° = 40°, \quad \beta = 3 \cdot 20° = 60° \text{ und } \gamma = 4 \cdot 20° = 80°.$$

Aufgabe 6

- Lehrplan Realschule: „M 8.5 Lineare Funktionen“ (Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung)
- Lehrplan Gymnasium: „M 8.1.3 Lineare Funktionen“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematische Darstellungen verwenden“
- Mathematische Leitidee: „Raum und Form“, „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

In Teilaufgabe a) ist die Bestimmung der Steigung der gesuchten Geraden das Hauptproblem, da die Steigung nicht als Verhältnis der Differenz der y-Koordinaten und der Differenz der x-Koordinaten der gegebenen Punkte P, $Q \in \mathbb{R}^2$ interpretiert wird. Ferner ist damit auch die Bestimmung des entsprechenden y-Achsenabschnitts über $t = y - m \cdot x$ nicht vorhanden. In vielen Fällen wird die Geradengleichung anhand des skizzierten Graphen der entsprechenden linearen Funktion bestimmt, ohne dies genauer zu begründen. Zudem wird häufig nur eine Parameterdarstellung der Geraden angegeben, was keine Geradengleichung darstellt. Die Eigenschaft, dass die in b) gesuchte Gerade zu einer gegebenen Gerade parallel ist, kann einige Male nicht mit dem Aspekt der damit verbundenen gleichen Steigung interpretiert werden. Eine mögliche Lösung der Problemstellung ist etwa:

a) Mit $P = (x_P, y_P) = (3, 0)$ und $Q = (x_Q, y_Q) = (0, 3)$ ist

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{0 - 3}{3 - 0} = -1$$

und

$$y = m\,x + t \iff t = y - m\,x \iff t = 0 - (-1) \cdot 3 = 3;$$

es ergibt sich $\quad h : \; y = -x + 3.$

b) Da k parallel zu g ist, gilt für die Steigung $m = 1$ und mit

$$t = y - m\,x \iff t = 0 - 1 \cdot 3 = -3$$

ergibt sich $\quad k : \; y = x - 3.$

Aufgabe 7

- Lehrplan Realschule: „M 7.7 Geometrische Ortslinien und Ortsbereiche“ (Umkreis und Inkreis beim Dreieck Δ)
- Lehrplan Gymnasium: „M 7.5 Figurengeometrie: das Dreieck als Grundfigur“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Raum und Form“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Typische Fehlerbilder sind in diesem Fall schwer zu analysieren; oft werden keine Lösungsversuche angegeben oder es treten Verwechslungen zwischen den geometrischen Örtern Höhenschnittpunkt, Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt und Inkreismittelpunkt eines beliebigen Dreiecks auf. Ein Lösungsvorschlag ist etwa:

a) Der Umkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der drei Dreiecksseiten.

b) Der Inkreismittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel.

Aufgabe 8

- Lehrplan Realschule: „M 9.8 Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck“, „M 10.3 Trigonometrie“
- Lehrplan Gymnasium: „M 9.5.1 Die Satzgruppe des Pythagoras“, „M 10.2 Geometrische und funktionale Aspekte der Trigonometrie“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Messen“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

In einigen Fällen wird der Wert $\cos 90° = 1$ bestimmt und damit über die daraus gebildete zweite binomische Formel $a^2 - 2\,a\,b + b^2$ eine fälschliche Aussage (gleichschenkliges Dreieck) über die gesuchte Dreiecksform getätigt. Ferner sei erwähnt, dass $\gamma = 90°$ in der Angabe zu finden ist und damit auch schon ein Teil der Lösung. In einigen Fällen wird die Angabe des Satzes von Pythagoras vergessen. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

Es ist $\cos\gamma = \cos 90° = 0$ und damit

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \iff c^2 = a^2 + b^2.$$

Es ergibt sich der Satz des Pythagoras am rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse der Länge c und den beiden Katheten der Längen a und b.

Aufgabe 9

- Lehrplan Realschule: „M 8.5 Lineare Funktionen“ (Funktionen mit Gleichungen der Form $y = m \cdot x + t$)
- Lehrplan Gymnasium: „M 8.1.3 Lineare Funktionen“, „M 12.3 Geraden und Ebenen im Raum“ (Beschreibung von Geraden und Ebenen durch Gleichungen)
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Raum und Form“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ kann die Gleichung meist richtig als Geradengleichung beschrieben werden. Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ kann selten eine richtige Lösungsidee verbucht werden; häufig wird auch hier als Lösung eine Gerade oder ein Kreis angegeben, ohne weitere Begründung. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die Zuordnung der gegebenen Gleichung zu einem geometrischen Gebilde im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ der einzige Inhalt in diesem Test ist, der stofflich der Oberstufe zuzuordnen ist (analytische Geometrie). Weitere Fehlerbilder sind nicht zu erkennen. Es ist etwa: $x + y = 5$ beschriebt eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ bzw. eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

5.2.3 Quantitative Beschreibung

Es werden wiederum für beide Erhebungszeitpunkte das Gesamtergebnis und die Leistungen in den Einzelaufgaben betrachtet; die Leistungen in den Einzelaufgaben im Vortest werden daraufhin kategorisiert. Final werden die Bearbeitungen der Aufgaben vergleichend gegenüber gestellt.

Ergebnisse im Vortest ($n_{vor} = 178$)

Zuerst wird das Gesamtergebnis im Teilgebiet Geometrie im Vortest betrachtet. Das Leistungsbild der Studierenden wird zunächst durch ein Säulendiagramm veranschaulicht, welches auf der Rechtswertachse die 24 zu erreichenden Gesamtpunkte in Halbpunktschritten aufgetragen hat und auf der Hochwertachse die entsprechende Anzahl an Studierenden, welche die jeweilige Punktzahl erreicht hat.

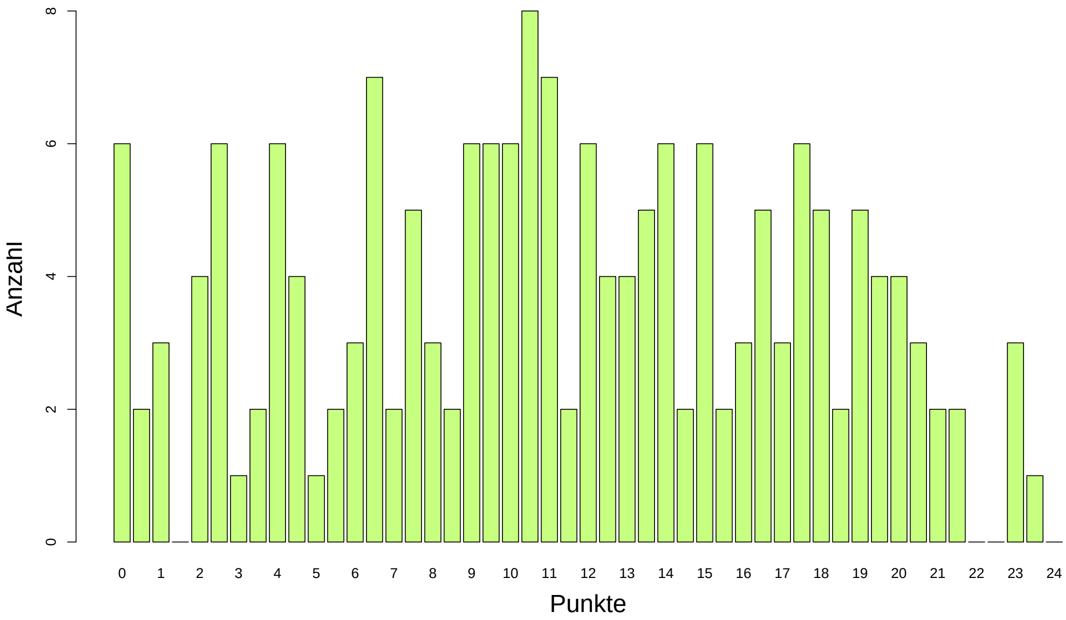

Abbildung 5.4: Punkteverteilung der Gesamtleistung Geometrie (Vortest)

Für das dargestellte Gesamtergebnis erhält man folgende deskriptive Kenngrößen:

- der Mittelwert ist $\bar{x} = 11{,}23$, der Median $x_{med} = 11{,}00$ sowie der Modus $x_{mod} = 10{,}50$; wegen $\bar{x} \approx x_{med} \approx x_{mod}$ liegt eine symmetrische Verteilung vor,

- der Interquartilabstand ist

$$d_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 16{,}50 - 6{,}50 = 10{,}00,$$

die Spannweite der Punkte beträgt

$$d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 23{,}50 - 0{,}00 = 23{,}50$$

sowie die Standardabweichung der Punkte $s = 6{,}10$.

Nach der Schilderung der Leistungen im Gesamtaspekt, werden die Ergebnisse in den neun Einzelaufgaben analysiert; dazu dienen die bereits für das Gebiet Algebra verwendeten graphischen Darstellungen.

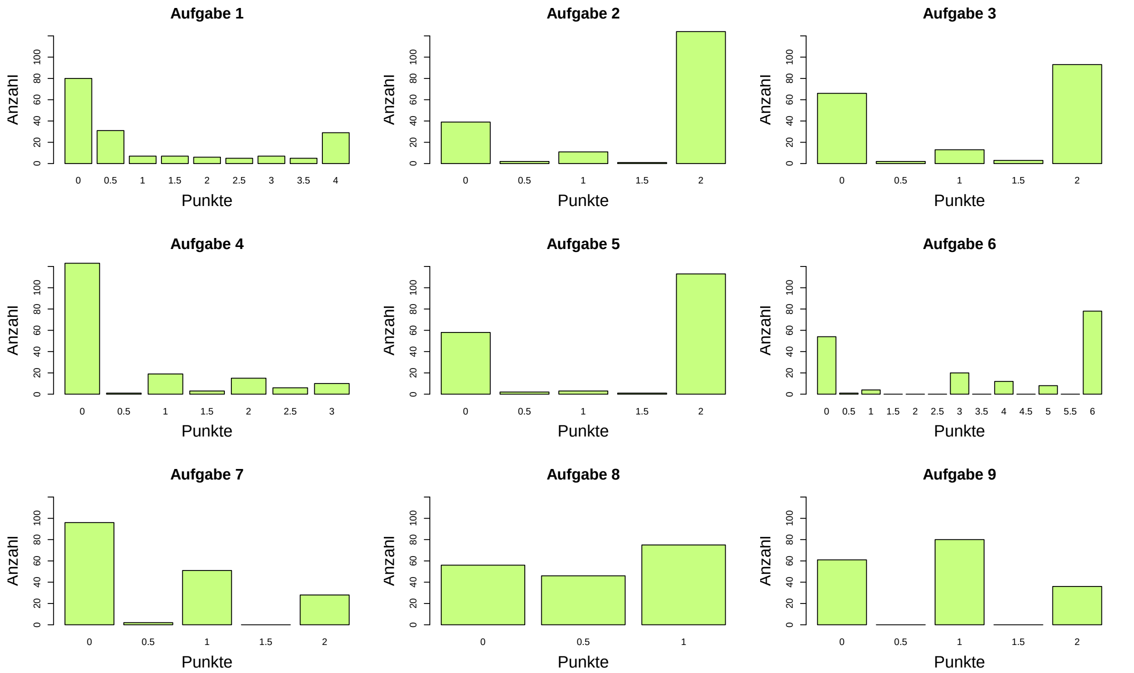

Abbildung 5.5: Punkteverteilung der Einzelaufgaben Geometrie (Vortest)

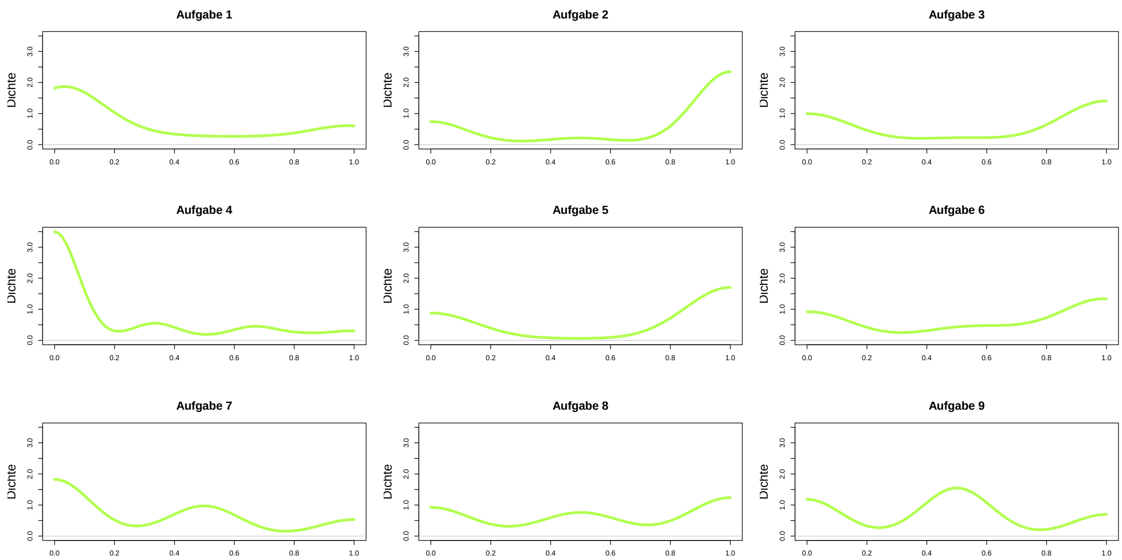

Abbildung 5.6: Dichtekurven der Einzelaufgaben Geometrie (Vortest)

Wieder werden die graphischen Darstellungen der Leistungen in den Einzelaufgaben durch numerische Kenngrößen ergänzt; dabei ist für jede Einzelaufgabe das arithmetische Mittel $\bar{x}_{vor}$, die Standardabweichung s_{vor} sowie die jeweils maximal zu erreichende Punktzahl $x_{maximal}$ angegeben.

Tabelle 5.4: Mittelw. und Standardabw. der Einzelaufgaben Geometrie (Vortest)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
$\bar{x}_{vor}$	1,20	1,48	1,16	0,56	1,31	3,51	0,61	0,55	0,86
s_{vor}	1,54	0,84	0,94	0,95	0,94	2,62	0,74	0,43	0,73
$x_{maximal}$	4	2	2	3	2	6	2	1	2

Aufgabencharakterisierung hinsichtlich der Bearbeitung im Vortest

Extreme Ergebnisse bei den Aufgaben 2 und 4 (Themen: Flächeninhaltsbestimmung eines Rechtecks mit Verwendung des Satzes von Pythagoras (sehr gut), Kongruenzabbildungen (sehr schwach)).

Es fallen die beiden extremen Aufgaben 2 und 4 auf. Aufgabe 2 zeigt im Vergleich zu den anderen acht Aufgaben das beste Ergebnis, diese beantworten über 70 % der Studierenden völlig korrekt; dennoch sei angemerkt, dass diese wohl eher leichte Aufgabe von über einem Fünftel der Studierenden gänzlich falsch gelöst wird. Die Dichteverteilung zeigt bei dieser Aufgabe die stärkste y-Achsenauslenkung der Kurve beim x-Wert 1,00 im Vergleich zu allen anderen Aufgaben. Dabei beinhaltet diese Aufgabe die Anwendung des Satzes des Pythagoras sowie die Flächeninhaltsbestimmung eines Rechtecks. Es sei darauf verwiesen, dass Aufgabe 3 das Pendant zu dieser Aufgabe mit einem gegebenen Quadrat darstellt, diese dennoch deutlich schlechter ausfällt.

Der zweite Extremfall, nämlich Aufgabe 4, fällt negativ auf. In dieser Aufgabe sollen klassische Typen von Kongruenzabbildungen als Doppelachsenspiegelungen interpretiert werden, indem jeweils die gegenseitige Lage der Spiegelachsen angegeben wird. Auffallend sind sofort das arithmetische Mittel mit $\bar{x} = 0{,}56$ und der Median mit $x_{med} = 0{,}00$ (70 % der Studierenden erzielen keinen Punkt) bei drei maximal erreichbaren Punkten. Graphisch untermauert wird dieses Ergebnis anhand der Dichteverteilung durch die markante Auslenkung hinsichtlich der Hochwertachse bei der Abszisse $x = 0{,}00$; auch das Säulendiagramm stützt diese Beobachtung.

Mittelmäßig bearbeitete Aufgaben 3, 5, 6 und 8 (Themen: Flächeninhaltsbestimmung eines Quadrats mit Verwendung des Satzes von Pythagoras, Innenwinkelsumme im Dreieck, Geraden im $\mathbb{R}^2$, Zusammenhang des Satzes von Pythagoras und des Cosinussatzes).

Diese Aufgaben können im Vergleich zu den übrigen fünf Aufgaben als mittelmäßig bearbeitet eingestuft werden. In allen Fällen können über 60 % der Studierenden mindestens die Hälfte der jeweiligen Maximalpunktzahl erreichen. Besonders ragt dabei Aufgabe 5 mit 113 völlig korrekten Antworten heraus. Der Themenzusammenhang hierbei ist die Innenwinkelsumme von beliebigen Dreiecken; dieser Aspekt ist wiederum bei der Schilderung des Entwicklungspotentials zwischen Vor- und Nachtest zu berücksichtigen. Alle vier Aufgaben zeigen in der Dichterverteilung ähnliche Verläufe; es können keine extremen Trends erkannt werden und ferner zeigt sich in allen vier Schaubildern die stärkste y-Achsenauslenkung bei der Abszisse $x = 1{,}00$. Aufgabe 3 beinhaltet, wie bereits schon oben erwähnt, die Anwendung des Satzes des Pythagoras am rechtwinkligen Dreieck und daraus folgernd die Flächeninhaltsbestimmung eines Quadrats. Die Aufgaben 6 und 8 behandeln Geradengleichungen in der Ebene sowie den Cosinussatz in Zusammenhang mit dem Satz des Pythagoras. Dabei sei bemerkt, dass Aufgabe 6 mit sechs Bewertungseinheiten die am stärksten gewichtete Aufgabe und Aufgabe 8 mit nur einem Punkt die am geringsten gewichtete Aufgabe darstellen.

Schwach bearbeitete Aufgaben 1, 7 und 9 (Themen: Flächeninhalt sowie Umfang von Quadrat und Kreis und deren Zusammenhang, geometrische Örter, Interpretation von Hyperebenen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$).

Als schwach bearbeitet können die Aufgaben 1, 7 und 9 betrachtet werden; in Aufgabe 1 kann etwa nur ein Viertel der Studierenden über die Hälfte der maximal zu erreichenden Punkte und 114 Teilnehmende keinen oder einen halben von maximal vier Punkten erzielen. Das Säulendiagramm zeigt dabei eine starke Häufung bei den x-Werten 0,00 und 0,50. Problemstellung ist der Zusammenhang von Umfang- und Flächeninhalt bei Quadrat und Kreis mit der Angabe, dass die beiden Figuren den gleichen Umfang aufweisen. Bei Aufgabe 7 sind insgesamt zwei Punkte zu erreichen; dabei erzielen fast 100 Studierende keinen Punkt und etwa 30 volle Punktzahl. Das schwache Ergebnis wird im Säulendiagramm durch die Höhe der Säulen bei den x-Werten 0,00 und 1,00 veranschaulicht. Thematisch werden in dieser Aufgabe geometrische Ortslinien behandelt. Ein leicht besseres Ergebnis verzeichnet Aufgabe 9 mit einem arithmetischen Mittelwert von $\bar{x} = 0{,}43$ und einem Median von $x_{med} = 1{,}00$ bei maximal zwei erreichbaren Punkten. Bei dieser Aufgabe wird am häufigsten ein Punkt erzielt und ferner kann zumindest ein Fünftel aller Studierenden die Aufgabe völlig richtig lösen. Hingegen weisen aber ein Drittel der Studierenden gar keinen Punkt auf. Es soll dabei einer gegebenen Gleichung ein geometrisches Gebilde in zwei verschiedenen Vektorräumen zugeordnet werden.

Rekapitulierend ist die Einteilung der Aufgaben nach der Qualität der Bearbeitungsvorschläge der Studierenden in diesem Fall deutlich schwerer als im Testgebiet Algebra. In diesem Vorwissenstest stechen die beiden Ausreißer, (positiv wie negativ) hervor. Ferner werden die Aufgaben 1, 7 und 9 eher schwach gelöst und vergleichsweise mittelmäßig fallen die Aufgaben 3, 5, 6 und 8 aus.

Ergebnisse im Nachtest ($n_{nach} = 86$)

Für das Gesamtergebnis im Nachtest erhält man folgende deskriptive Kenngrößen:

- der Mittelwert ist $\bar{x} = 16{,}03$, der Median $x_{med} = 18{,}00$ sowie der Modus $x_{mod} = 20{,}00$; wegen $\bar{x} < x_{med} < x_{mod}$ liegt eine rechtssteile Verteilung vor,
- der Interquartilabstand ist
$$d_Q = x_{0{,}75} - x_{0{,}25} = 20{,}00 - 13{,}50 = 6{,}50,$$
die Spannweite der Punkte beträgt
$$d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 24{,}00 - 0{,}00 = 24{,}00$$
sowie die Standardabweichung der Punkte $s = 5{,}70$.

Folgende numerische Kenngrößen zeigen die Leistungen in den Einzelaufgaben im Nachtest; dabei ist für jede Aufgabe das arithmetische Mittel $\bar{x}_{nach}$, die Standardabweichung s_{nach} sowie die jeweilige Maximalpunktzahl $x_{maximal}$ angegeben.

Tabelle 5.5: Mittelw. und Standardabw. der Einzelaufgaben Geometrie (Nachtest)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
$\bar{x}_{nach}$	2,25	1,72	1,64	1,12	1,45	4,77	1,25	0,83	1,01
s_{nach}	1,62	0,63	0,74	1,31	0,90	2,19	0,80	0,35	0,74
$x_{maximal}$	4	2	2	3	2	6	2	1	2

Vergleich der Ergebnisse der Einzelaufgaben in Vor- und Nachtest

Es werden nun die Ergebnisse der Einzelaufgaben in Vor- und Nachtest verglichen. Die folgende Tabelle beinhaltet die arithmetischen Mittelwerte in Vortest ($\bar{x}_{vor}$) und Nachtest ($\bar{x}_{nach}$) sowie die Stärke des Leistungsunterschieds zwischen den beiden Erhebungszeitpunkten für jede einzelne Aufgabe gemäß der in Abschnitt 5.1.3 vorgestellten Charakterisierung über die Größe des p-Werts.

Tabelle 5.6: Mittelwerte in Vor- und Nachtest mit Signifikanz (Geometrie)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
$\bar{x}_{vor}$	1,20	1,48	1,16	0,56	1,31	3,51	0,61	0,55	0,86
$\bar{x}_{nach}$	2,25	1,72	1,64	1,12	1,45	4,77	1,25	0,83	1,01
Signifikanz	***	*	***	***		***	***	***	

Mit Hilfe der Tabelle werden folgende Trends deutlich:

- keine auffallende Leistungssteigerung bei den Aufgaben 5 und 9,
- leicht signifikante Leistungssteigerung bei Aufgabe 2,
- hoch signifikante Leistungssteigerung bei den Aufgaben 1, 3, 4, 6, 7 und 8.

Damit werden in zwei Fällen keine auffallenden, in einem Fall leicht signifikante und bei sechs von neun Aufgaben hoch signifikante Verbesserungen erzielt; signifikante Steigerungen können nicht erkannt werden.

5.2.4 Qualitative Analyse

Jede Einzelaufgabe in den obigen drei Kategorien wird nun hinsichtlich der qualitativen Bearbeitung zwischen Vor- und Nachtest untersucht; Grundlage ist der Vergleich typischer Fehlerbilder in Vor- und Nachtest.

Diskussion der Aufgaben 1, 3, 4, 6, 7 und 8 (hoch signifikant *)**

- Umfang- und Flächeninhaltsbestimmung von Quadrat und Kreis (Aufgabe 1),
- Flächeninhalt eines Quadrats, Satz des Pythagoras (Aufgabe 3),
- Darstellung von Kongruenzabbildungen (Aufgabe 4),
- Aufstellen von Geradengleichungen in der Ebene (Aufgabe 6),
- Bestimmung geometrischer Örter (Aufgabe 7),
- Zusammenhang zwischen Cosinussatz und Satz des Pythagoras (Aufgabe 8).

Die Steigerungen bei Aufgabe 1 sind zum einen auf die deutlich bessere Kenntnis der Formeln für die Umfangs- und Flächeninhaltsbestimmung von Quadrat und Kreis und auf das Erkennen des Zusammenhangs des gleichen Wertes des Umfangs von Quadrat und Kreis zurückzuführen. Ferner kann die Information des verbindenden Elements $U_Q = U_K$ zielsicher mit den Flächeninhalten der beiden geometrischen Gebilde verwertet werden, indem beispielsweise der Radius r über

$$U_Q = U_K \iff 4\,a = 2\,r\,\pi \iff r = \frac{2\,a}{\pi}$$

bestimmt wird und damit der Flächeninhalt des Kreises zu $A_K = r^2\,\pi = \frac{4\,a^2}{\pi}$ berechnet und dieser schließlich mit dem Flächeninhalt des Quadrats $A_Q = a^2$ verglichen wird. Die Inhalte dieser Aufgabe werden im Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ thematisiert. Diese Aufgabe ist als einzige dem Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ zuzuordnen (neben „Zusammenhänge herstellen“); auffallend ist, dass sich in diesem Bereich hoch signifikante Steigerungen ergeben.

Bei Aufgabe 3 wird im Nachtest deutlich besser erkannt, dass die Diagonale das Quadrat in zwei kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit der Hypotenuse der Länge d und den Katheten der Länge a unterteilt. Folglich gelingt auch die Anwendung des Satzes des Pythagoras besser und somit die Bestimmung des Flächeninhalts des Quadrats. Zudem ist den Studierenden klar, dass der Flächeninhalt eine quadratische Maßeinheit besitzt. Die Inhalte dieser Aufgabe werden im Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ fokussiert und sind den Anforderungsbereichen „Reproduzieren“ und „Zusammenhänge herstellen“ zuzuordnen. Auffallend ist, dass bei dieser Aufgabe hoch signifikante Verbesserungen erzielt werden, bei Aufgabe 2 (dem Pendant mit einem Rechteck) lediglich nur leicht signifikante Steigerungen (zu bedenken ist ein möglicher Deckelungseffekt bei Aufgabe 2).

Aufgabe 4 wurde im Vortest mit 0,56 im Mittel von drei möglichen Punkten sehr schwach bearbeitet; dabei ist das Verständnis für den Begriff Kongruenzabbildung kaum vorhanden und folglich ebenso wenig die Darstellung der drei gesuchten Typen von Kongruenzabbildungen über Doppelachsenspiegelungen. Im Nachtest hingegen können deutlich häufiger die Typen Parallelverschiebung und Drehung als Doppelachsenspiegelungen beschrieben werden, die Punktspiegelung als Sonderfall der Drehung ist zu beiden Erhebungszeitpunkten schwach bearbeitet. Generell zeigt sich im Nachtest ein besseres Verständnis für den Begriff Kongruenzabbildung, da häufig zumindest zentrale Eigenschaften wie Längen- und Winkeltreue genannt werden, auch wenn keine ausreichende Bearbeitung der Problemstellung erfolgt. Diese Thematik nimmt im Zuge der Grundlagenveranstaltung einen breiten Rahmen im zweiten Teil des Zyklus ein. Die Inhalte sind wie die von Aufgabe 3 den Anforderungsbereichen „Reproduzieren“ und „Zusammenhänge herstellen“ zuzuordnen.

Bei Teilaufgabe 6 a) kann im Nachtest die Steigung der gesuchten Geraden deutlich häufiger über die Beziehung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ von den Studierenden richtig bestimmt werden und anschließend auch der y-Achsenabschnitt t (meistens durch das Einsetzen von einem der beiden Punkte P und Q in die Geradengleichung). Ferner wird nur noch in wenigen Fällen eine Parameterdarstellung der Geraden statt einer Gleichung angeführt. In Teilaufgabe b) wird die Information der Parallelität der Geraden im Nachtest algebraisch deutlich häufiger richtig interpretiert (beide Geraden besitzen die gleiche Steigung). Zudem wird öfter der algebraische als der häufig unzureichende graphische Lösungsweg im Nachtest gewählt. Wiederum werden die Inhalte den Anforderungsbereichen „Reproduzieren“ und „Zusammenhänge herstellen“ zugeteilt; wegen der grundlegenden Thematik der linearen Funktionen wird dieser Aufgabe die Leitidee „funktionaler Zusammenhang“ (neben „Raum und Form“) zugewiesen. Dagegen zeigen sich bei Aufgabe 5, ebenfalls im Kontext der Leitidee „funktionaler Zusammenhang“, keine signifikanten Steigerungen zwischen Vor- und Nachtest. Die Inhalte dieser Aufgabe werden zum Teil in der Grundlagenveranstaltung thematisiert (möglicher Deckelungseffekt bei Aufgabe 5).

Die Interpretation der geometrischen Örter Umkreis- und Inkreismittelpunkt in Aufgabe 7 erfährt zwischen beiden Erhebungszeitpunkten eine deutliche Verbesserung. Aufgrund der Aufgabenstellung und der oben beschriebenen Fehler können die Gründe für die Steigerung schwer explizit untermauert werden; diese Thematik wird im Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ besprochen, so dass bei dieser rein auf Reproduktion ausgelegten Aufgabe deutlich bessere Antworten erbracht werden.

Schließlich ergeben sich bei Aufgabe 8 hoch signifikante Leistungssteigerungen im Nachtest (im Vergleich zum Vortest). Grundlegende Thematik ist der Cosinussatz und dessen Zusammenhang zum Satz des Pythagoras. Im Nachtest zeigt sich ein besseres Wissen über trigonometrische Werte für gängige Winkel und über die Beziehung zwischen den beiden Sätzen; die Thematiken sind Teil der Grundlagenvorlesung II. Bei den Aufgaben 2, 3 und 8 wird der Satz des Pythagoras thematisiert; in zwei Fällen ergeben sich hoch signifikante und in einem Fall leicht signifikante Verbesserungen im Nachtest. Aufgabe 8 ist den Anforderungsbereichen „Reproduzieren“ und „Zusammenhänge herstellen“ zuzuordnen.

Diskussion der Aufgaben 5 und 9 (nicht signifikant)

- Bestimmung der Innenwinkel eines Dreiecks aus einem gegebenen Winkelverhältnis (Aufgabe 5),
- Geometrische Interpretation von Hyperebenen (Aufgabe 9).

Bei Aufgabe 5 kann im Nachtest in fast allen Fällen die Innenwinkelsumme des Dreiecks richtig bestimmt werden; allerdings zeigt sich bei den Studierenden ein unverändertes Problembild beim Begriffsverständnis für das Verhältnis von Größen. Im Nachtest wird durch die fälschliche Interpretation des gegebenen Verhältnisses der drei Innenwinkel ein falscher Wert für die Innenwinkelsumme angegeben, wobei zumindest wegen $\alpha + \beta + \gamma \neq 180°$ auf einen Fehler in der Lösung verwiesen wird. Die Thematik Innenwinkelsumme von Dreiecken wird in der Grundlagenvorlesung thematisiert, der Aspekt Verhältnis von Größen nicht. Diese Aufgabe ist den Anforderungsbereichen „Reproduzieren“ und „Zusammenhänge herstellen“ zuzuordnen. Vier Aufgaben, die in diesen Bereichen verankert sind, zeigen hoch signifikante Leistungssteigerungen zwischen beiden Erhebungszeitpunkten, eine Aufgabe leichte, nur die eben diskutierte Aufgabe weist keine besonderen Verbesserungen auf (möglicher Deckelungseffekt ist zu beachten).

Bei Aufgabe 9 ergibt sich in Vor- und Nachtest ein sehr ähnliches Fehlerbild; es kann in der zweidimensionalen Ebene $\mathbb{R}^2$ die gegebene Gleichung dem geometrischen Konstrukt Gerade häufig richtig zugeordnet werden, das Pendant im Raum $\mathbb{R}^3$ wird in den meisten Fällen falsch interpretiert. Dieser Aspekt ist der einzige Inhalt der Oberstufe in der Testerhebung Geometrie; diese Thematik wird in der Grundlagenvorlesung nicht behandelt. Die Aufgabenstellung ist einzig auf Reproduktion ausgelegt, ebenso wie Aufgabe 7, wobei die Inhalte dieser Aufgabe in der Vorlesung der ersten beiden Fachsemester behandelt und in diesem Fall hoch signifikante Verbesserungen erzielt werden.

Diskussion von Aufgabe 2 (leicht signifikant *). Die Thematik dieser Aufgabe umreißt die Gebiete Flächeninhaltsbestimmung eines Rechtecks und Anwendung des Satzes von Pythagoras. Zu beiden Erhebungszeitpunkten wird erkannt, dass die Diagonale d das Rechteck in zwei kongruente Dreiecke zerlegt; im Nachtest werden die Rollen der Hypotenuse und der beiden Katheten zielsicher interpretiert und damit die Anwendung des Satzes von Pythagoras korrekt durchgeführt. Die Kennzeichnung des Flächeninhalts mit einer quadratischen Maßeinheit (wie auch bei Aufgabe 3) erfolgt im Nachtest deutlich häufiger. Diese Aufgabe ist den Anforderungsbereichen „Reproduzieren“ und „Zusammenhänge herstellen“ zuzuordnen, die Inhalte finden sich in der entsprechenden Grundlagenvorlesung wieder.

Für dieses Teilgebiet können hinsichtlich der Anforderungsbereiche keine klaren Tendenzen abgeleitet werden: die einzige Aufgabe, die dem Anforderungsbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“ zuzuordnen ist, weist hoch signifikante Steigerungen zwischen Vor- und Nachtest auf; dieser Bereich spiegelt das höchste Kompetenzniveau wieder. Den beiden Anforderungsbereichen „Reproduzieren“ und „Zusammenhänge herstellen“ sind sechs Einzelaufgaben zugeordnet, wobei sich unterschiedliche Verbesserungsgrade ergeben; gleiches gilt für die beiden Aufgaben im Bereich „reine Reproduktion“.

5.3 Analysis

5.3.1 Vorstellung der Einzelaufgaben

Das Teilgebiet Analysis weist acht Aufgaben auf; alle liegen im offenen Format vor. Die 24 Punkte verteilen sich auf folgende Aufgabenauswahl:

1. Gegeben seien die drei Funktionen

   a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 + 3,$

   b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = (x + 3)^2,$

   c) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = 3\,x^2.$

   Man beschreibe, wie diese drei Funktionen aus der Normalparabel mit der Funktionsvorschrift $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2,$ hervorgehen. (3)

2. Mit welchen Funktionstypen können folgende Situationen beschrieben werden?

   a) Handyvertrag mit Grundgebühr und fester Minuteneinheit. (1)

   b) Anzahl an Bakterien nach t Jahren, wenn das Wachstum $k\,\%$ pro Jahr beträgt. (2)

3. Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$, ist umkehrbar.

   a) Man begründe, warum f umkehrbar ist. (1)

   b) Man gebe den Definitionsbereich und den Wertebereich der Umkehrfunktion an. (2)

4. Man gebe eine (differenzierbare) Funktion f mit $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ an. Dabei bezeichne f' die erste Ableitung der Funktion f.

5. Gegeben seien die differenzierbaren Funktionen f und g mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$; f' und g' bezeichnen jeweils die erste Ableitung von f und g. Man finde die wahre Aussage und widerlege die falsche Aussage mit einem Gegenbeispiel.

   a) Es gilt: $\quad f = g \Longrightarrow f' = g'.$

   b) Es gilt: $\quad f' = g' \Longrightarrow f = g.$ (3)

6. Sei F eine Stammfunktion von f. Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dabei gilt:

$$f(2) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'(2) < 0.$$

Man begründe, welche besondere Stelle die Stammfunktion F an der Abszisse $x = 2$ besitzt. (2)

7. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$, gilt

$$\int_{-2}^{2} x^2 \, dx = 2 \int_{0}^{2} x^2 \, dx.$$

Für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3$, gilt

$$\int_{-2}^{2} x^3 \, dx \neq 2 \int_{0}^{2} x^3 \, dx.$$

Man begründe diesen Sachverhalt (eventuell mit Skizzen der beiden Graphen G_f und G_g). (3)

8. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Die Funktion ist für $x = 2$ nicht definiert, also gilt $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

a) Man bestimme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (2)

b) Man bestimme das Verhalten von f an der Stelle $x = 2$. (3)

c) Man gebe die senkrechte und waagrechte Asymptote von G_f an. (1)

5.3.2 Theoretische Einordnung und Darstellung typischer Fehler

Es erfolgt wie bei den Gebieten Algebra und Geometrie eine Einordnung der Aufgaben in die Inhalte des bayerischen Lehrplans für die sechsstufige Realschule und für das achtjährige Gymnasium sowie in die Inhalte der KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss bzw. der einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung im Fach Mathematik. Einige Aufgaben werden lediglich dem Gymnasiallehrplan zugeordnet, da die entsprechenden Inhalte der Aufgaben nicht im Kanon des Lehrplans der Realschule vorgesehen sind (etwa

Differential- und Integralrechnung und Grenzwertbestimmung). Wiederum werden auch typische Fehler für die Einzelaufgaben im Vortest erörtert.

Aufgabe 1

- Lehrplan Realschule: „M 9.3 Quadratische Funktionen“
- Lehrplan Gymnasium: „M 9.2.1 Graphen quadratischer Funktionen und deren Nullstellen“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

In Teilaufgabe a) wird in der Regel die geometrische Bedeutung des Parameters $c = 3 \in \mathbb{R}$ der Funktionsgleichung $y = x^2 + c$ als Verschiebung um 3 Einheiten in y-Richtung richtig interpretiert. In Teilaufgabe b) wird häufig auf den Term der Funktionsgleichung $(x+3)^2$ die erste binomische Formel angewendet, woraus sich der Term $x^2 + 6\,x + 9$ ergibt; die Interpretation wird dann fälschlich als Verschiebung um 6 Einheiten in x-Richtung und 9 Einheiten in y-Richtung ausgelegt. Damit zeigt sich, dass die Studierenden vor allem die Rolle des Parameters $b \in \mathbb{R}$ in der Funktionsgleichung $y = a\,x^2 + b\,x + c$ falsch interpretieren. In Teilaufgabe c) werden häufig die Begriffe Streckung und Stauchung der Normalparabel als gleichbedeutend angenommen; in keinem Fall wird die Achse angegeben, bezüglich welcher die Streckung erfolgt. Angestrebt werden folgende Aspekte:

a) Verschiebung um 3 nach oben (in y-Richtung).

b) Verschiebung um 3 nach links (in x-Richtung).

c) Streckung um 3 in y-Richtung.

Aufgabe 2

- Lehrplan Realschule: „M 8.5 Lineare Funktionen“, „M 10.2 Exponential- und Logarithmusfunktionen“ (Aufgaben über Wachstums- und Abklingprozesse)
- Lehrplan Gymnasium: „M 8.1.3 Lineare Funktionen“, „M 10.3 Exponentielles Wachstum und Logarithmen“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Probleme mathematisch lösen“, „Mathematisch modellieren“
- Mathematische Leitidee: „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

Beide Fälle beschreiben reale Alltagssituationen, weswegen die Kompetenzstufe des Modellierens angesprochen wird. Die Einkleidung von Teilaufgabe a) in einen linearen Zusammenhang (beschrieben etwa durch $y = m\,x + t$, wobei m die Minuteneinheit und t die Grundgebühr darstellt) wird oft richtig erkannt, allerdings werden die Rollen der in der Funktionsgleichung auftretenden Parameter nicht genauer charakterisiert; in einigen Fällen wird die Situation in einen proportionalen Zusammenhang eingeordnet. Das exponentielle Wachstum in Aufgabe b) wird häufig mit Hilfe einer quadratischen Funktion modelliert, ohne diesen Aspekt weiter zu begründen. Viele Studierende können die Situation nicht mit einer Exponentialfunktion in Verbindung bringen; wird dieser Zusammenhang erkannt, wird dies in den seltensten Fällen in korrekte Fachsprache (Angabe einer Funktionsgleichung) gebracht. Es ist etwa:

a) Lineare Funktion: $y = m\,x + t$ (mit y als Gesamtbetrag, m als Minuteneinheit, x als telefonierte Minuten und t als Grundgebühr).

b) Exponentialfunktion: $y = N_0 \left(1 + \frac{k}{100}\right)^t$ (mit y als Anzahl der Bakterien nach t Jahren, N_0 als Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t_0, k als prozentuales Bakterienwachstum und t als Anzahl der Jahre).

Aufgabe 3

- Lehrplan Gymnasium: „M 11.4 Natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Mathematische Darstellungen verwenden“
- Mathematische Leitidee: „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

Die Eigenschaft einer Funktion, umkehrbar zu sein, wird häufig mit der Stetigkeit bzw. mit der Differenzierbarkeit der Funktion erklärt und nicht korrekterweise mit der globalen Eigenschaft ihrer strengen Monotonie. Viele Studierende erkennen, dass die natürliche Logarithmusfunktion ln die entsprechende Umkehrfunktion der Exponentialfunktion exp ist, dennoch können sie oft nicht den geforderten Werte- und Definitionsbereich angeben. Der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ bzw. der Wertebereich $\mathbb{R}^+$ der Exponentialfunktion nimmt bei der Umkehrfunktion die Rolle von Wertebereich bzw. Definitionsbereich ein; dieser Zusammenhang scheint den Studierenden nicht bekannt zu sein, da vielleicht die geometrische Interpretation der Umkehrfunktion nicht beherrscht wird. Zu erwarten ist etwa:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x$ ist streng monoton wachsend und damit umkehrbar.

b) Es ist $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$ und $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ mit $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f^{-1}(x) = \ln(x)$.

Aufgabe 4

- Lehrplan Gymnasium: „M 11.1 Änderungsverhalten von Funktionen“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

In einigen Fällen wird die Aufgabenstellung nicht verstanden, da die Lösung durch die Angabe einer Polynomfunktion (meistens vom Grad 2) mit ihrer entsprechenden Ableitungsfunktion (vom Grad 1) angegeben wird; in einigen anderen Fällen wird kein Lösungsversuch angeboten. Bei den richtigen Lösungen wird stets als Beispiel die Exponentialfunktion gewählt, die Nullfunktion nie. Damit ist etwa:

$$f(x) = e^x = f'(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad g(x) = 0 = g'(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5

- Lehrplan Gymnasium: „M 12.1 Fortführung der Infinitesimalrechnung“ (Zusammenhänge zwischen den Graphen von Funktion und Ableitungsfunktion)
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

Bei dieser Aufgabe kann schwer ein typisches Fehlerbild eruiert werden; es ist der Zusammenhang zwischen den differenzierbaren Funktionen f und g und ihren Ableitungsfunktionen f' und g' zu interpretieren. Dabei sind die beiden Aussagen

$$f = g \Longrightarrow f' = g' \quad \text{und} \quad f' = g' \Longrightarrow f = g$$

gegeben; es soll der Wahrheitswert für die beiden Aussagen angegeben und die falsche Aussage an einem Gegenbeispiel widerlegt werden. In den meisten Fällen wird die wahre Aussage richtig erkannt und auch ein passendes Gegenbeispiel für die falsche Aussage gefunden. Zu erwarten ist etwa:

Die erste Aussage ist wahr, die zweite hingegen falsch; als Gegenbeispiel wählt man etwa

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 + 6,$$

mit den beiden Ableitungsfunktionen

$$f'(x) = 2\,x = g'(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6

- Lehrplan Gymnasium: „M 12.1 Fortführung der Infinitesimalrechnung“ (Zusammenhänge zwischen den Graphen von Funktion und Integralfunktion)
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

Der Zusammenhang zwischen der Stammfunktion F und der Integrandenfunktion f (über den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) ist den Studierenden oft nicht bewusst, was keine sinnvolle Argumentation für das Problem zulässt. Damit fehlt der Zusammenhang $F' = f$ und damit $f(2) = F'(2) = 0$ und $f'(2) = F''(2) < 0$. Wenn an der Abszisse $x = 2$ für die Stammfunktion F das lokale Extremum wie eben beschrieben erkannt wird, wird in mehreren Fällen die falsche Art des Extremums angegeben; dieser Aspekt soll nur angemerkt sein, nicht aber als elementarer Fehler festgehalten werden, da die Aufgabe in diesen Fällen trotzdem durchgehend verstanden wird. Die korrekte Lösung lautet:

$$F'(2) = f(2) = 0 \quad \text{und} \quad F''(2) = f'(2) < 0.$$

Damit besitzt F in $x = 2$ ein (isoliertes) lokales Maximum.

Aufgabe 7

- Lehrplan Gymnasium: „M 12.1 Fortführung der Infinitesimalrechnung“ (Flächeninhalt und bestimmtes Integral)
- Mathematische Kompetenzen: „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“
- Mathematische Leitidee: „Funktionaler Zusammenhang“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

Rechnerische Lösungen scheitern bereits an der Bildung von korrekten Stammfunktionen für die beiden (einfachen) Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3$, bzw. am Einsetzen der Integrationsgrenzen. Argumentative Lösungen beinhalteten oft richtige Ideen, dennoch können diese kaum auf den Punkt gebracht werden, da die Fachsprache nur mangelhafte Anwendung findet. Graphische Ansätze liefern in der Regel für f noch richtige Argumentationsaspekte, da der Graph der Funktion und dessen Achsensymmetrie zur y-Achse richtig dargestellt werden; für die Funktion g wird jedoch häufig der Graph falsch skizziert, was keine zielführende Argumentation ermöglicht. Es zeigen sich klare Schwächen bei argumentativen Begründungen für mathematische Probleme. Eine akzeptable argumentative Lösungsvariante ist etwa:

Da G_f achsensymmetrisch zur y-Achse ist, folgt

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} f(x)\,dx \qquad \text{und damit} \qquad \int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2\int_{0}^{2} x^2\,dx;$$

da G_g punktsymmetrisch zum Ursprung ist, folgt

$$\int_{-2}^{0} g(x)\,dx = -\int_{0}^{2} g(x)\,dx \quad \text{und damit} \quad \int_{-2}^{2} g(x)\,dx = 0 \neq 2\int_{0}^{2} g(x)\,dx.$$

Aufgabe 8

- Lehrplan Gymnasium: „M 11.1 Änderungsverhalten von Funktionen“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Funktionaler Zusammenhang“
- Leitidee (gemäß einheitlicher Prüfungsanforderungen im Abitur für das Fach Mathematik): „Grenzprozesse bzw. Approximation“
- Anforderungsbereiche: „Zusammenhänge herstellen“

Es wird ein Viertel aller möglichen Punkte für diese Aufgaben vergeben; zentrale Thematik ist der Begriff des Grenzwerts. In Teilaufgabe a) wird der Grenzwert als Verhalten im Unendlichen interpretiert; diese Problemstellung wird von den Studierenden relativ sicher bearbeitet, wobei häufig die Schreibweise bei der Grenzwertbestimmung zu bemängeln ist, da entweder nach dem Symbol lim keine Funktion dargestellt oder vor dem entsprechenden Grenzwert im eigentlichen Sinn das Gleichheitszeichen vergessen wird. In Teilaufgabe b) wird das Verhalten an der Definitionslücke $x = 2$ fokussiert; dabei sind links- und rechtsseitiger Grenzwert zu bilden. In diesem Fall wird die Aufgabenstellung häufig nicht ausreichend bearbeitet und lediglich angegeben, dass an der Abszisse $x = 2$ eine Polstelle für die gegebene Funktion vorliegt, ohne jedoch den links- und rechtsseitigen Grenzwert an dieser Stelle zu bestimmen. In Teilaufgabe c) werden die Ergebnisse aus a) und b) durch Angabe der waagrechten Asymptote (x-Achse $y = 0$ wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$) und der senkrechten Asymptote ($x = 2$) zusammengetragen. Es zeigen sich zusammenfassend die meisten Schwierigkeiten bei der Interpretation von Teilaufgabe b), da der Begriff „Verhalten an einer bestimmten Abszisse (Definitionslücke)“ einer gebrochenrationalen Funktion f nicht klar verstanden wird. Im Erwartungshorizont ist etwa:

a) Es ist $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$

b) Es ist $\lim\limits_{x \to 2\pm} f(x) = \lim\limits_{x \to 2\pm} \dfrac{1}{x-2} = \pm\infty$

c) Gemäß a) ist die waagrechte Asymptote $y = 0$ und gemäß b) die senkrechte Asymptote $x = 2$.

5.3.3 Quantitative Beschreibung

Im Folgenden werden wiederum für beide Erhebungszeitpunkte das Gesamtergebnis und die Leistungen in den Einzelaufgaben betrachtet und diese miteinander verglichen. Die Ergebnisse in den Einzelaufgaben im Vortest werden anhand der erzielten Leistungen kategorisiert.

Ergebnisse im Vortest ($n_{vor} = 154$)

Zuerst wird das Gesamtergebnis im Teilgebiet Analysis im Vortest durch ein Säulendiagramm veranschaulicht.

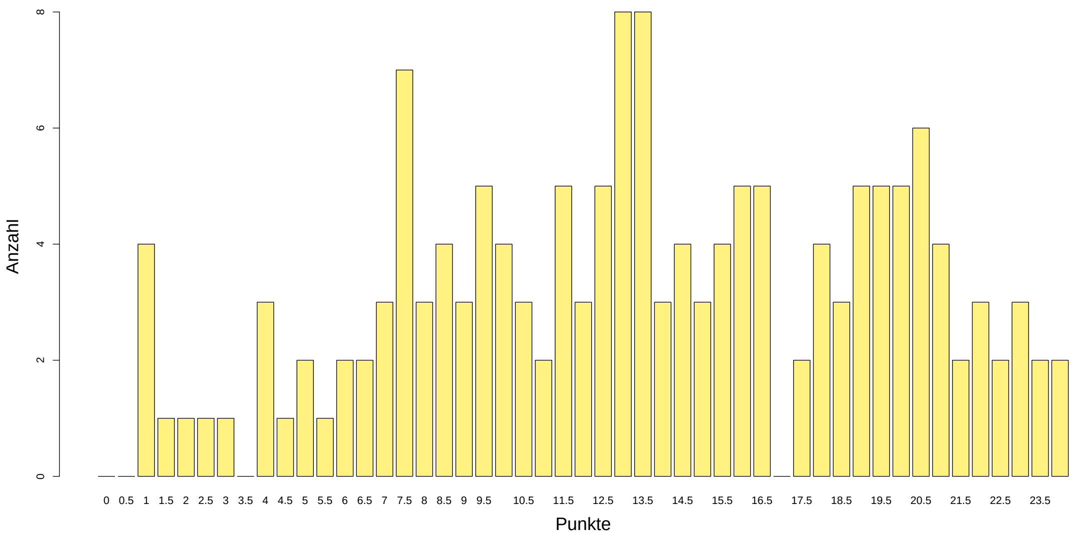

Abbildung 5.7: Punkteverteilung der Gesamtleistung Analysis (Vortest)

Für das dargestellte Gesamtergebnis erhält man folgende deskriptive Kenngrößen:

- der Mittelwert ist $\bar{x} = 13{,}55$, der Median $x_{med} = 13{,}50$ sowie der Modus $x_{mod} = 13{,}00$; wegen $\bar{x} \approx x_{med} \approx x_{mod}$ liegt eine symmetrische Verteilung vor,

- der Interquartilabstand ist

$$d_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 18{,}80 - 9{,}13 = 9{,}67,$$

  die Spannweite der Punkte beträgt

$$d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 24{,}00 - 1{,}00 = 23{,}00$$

  sowie die Standardabweichung der Punkte $s = 5{,}88$.

Nach der Schilderung der Leistungen im Gesamtaspekt werden die Ergebnisse in den acht Einzelaufgaben analysiert; dazu dienen die bereits für die Gebiete Algebra und Geometrie verwendeten graphischen Darstellungen.

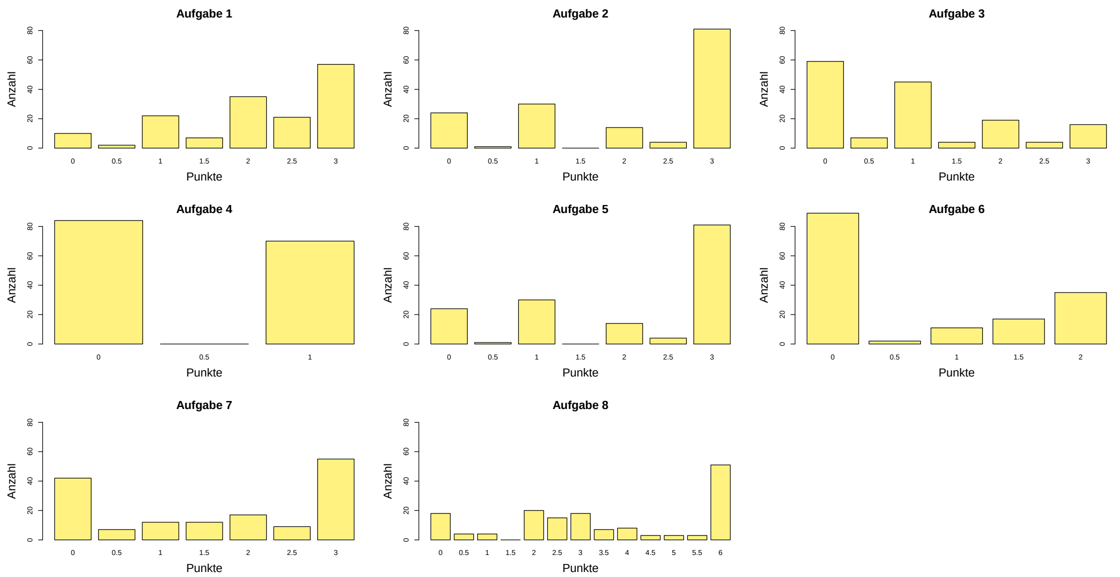

Abbildung 5.8: Punkteverteilung der Einzelaufgaben Analysis (Vortest)

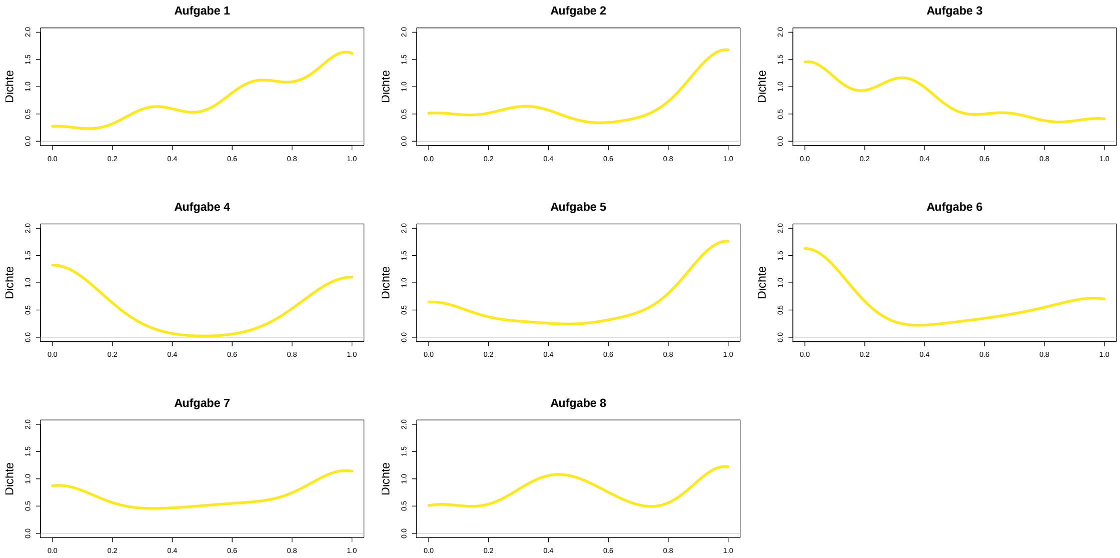

Abbildung 5.9: Dichtekurven der Einzelaufgaben Analysis (Vortest)

Wieder werden die graphischen Darstellungen der Leistungen in den Einzelaufgaben durch numerische Kenngrößen ergänzt; dabei ist für jede Einzelaufgabe das arithmetische Mittel $\bar{x}_{vor}$, die Standardabweichung s_{vor} sowie die jeweils maximal zu erreichende Punktzahl $x_{maximal}$ angegeben.

Tabelle 5.7: Mittelw. und Standardabw. der Einzelaufgaben Analysis (Vortest)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
$\bar{x}_{vor}$	2,12	2,02	0,98	0,45	2,08	0,70	1,66	3,54
s_{vor}	0,92	1,17	1,00	0,50	1,24	0,87	1,25	2,12
$x_{maximal}$	3	3	3	1	3	2	3	6

Aufgabencharakterisierung hinsichtlich der Bearbeitung im Vortest

Sehr gut bearbeitete Aufgaben 1, 2 und 5 (Themen: Einfluss der reellen Parameter a, b, c in der Darstellung $y = a\,x^2 + b\,x + c$ auf die Normalparabel, Beschreiben von Alltagssituationen mit Hilfe elementarer Funktionen, Zusammenhang zwischen einer differenzierbaren Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f').

Besonders gut werden die Aufgaben 1, 2 und 5 bearbeitet. Dies wird unter anderem anhand der entsprechenden Dichteverteilungen klar; diese Schaubilder zeigen deutliche Auslenkungen beim x-Achsenwert 1,00 (maximale Punktzahl) und geringe

Auslenkungen bezüglich der y-Achse für die x-Werte 0,00 und 0,50. Den gleichen Eindruck vermitteln auch die Säulendiagramme für diese Aufgaben; bei den Aufgaben 2 und 5 ragen besonders deutlich die Säulen für die jeweils vollständig richtige Lösung hervor. Bei Aufgabe 1 ist diese Säule nicht so stark ausgeprägt, dafür werden oft 2,00 und 2,50 Punkte von maximal drei Punkten erzielt; dieser Sachverhalt wird ebenfalls durch die entsprechende Dichtekurve veranschaulicht. Um die geschilderten Eindrücke zu festigen, werden die Aussagen noch mit numerischen Werten ergänzt. Über 70 % der Studierenden erreichen bei Aufgabe 1 mindestens 2,00 von 3,00 möglichen Punkten, fast 60 % bei Aufgabe 5 volle Punktzahl, dennoch erzielen auch 33 Studierende und damit über 20 % gar keinen Punkt. Ein ähnliches, aber nicht so extremes Bild zeigt Aufgabe 2.

Mittelmäßig bearbeitete Aufgaben 4, 7 und 8 (Themen: Angabe einer differenzierbaren Funktion f, die mit ihrer Ableitungsfunktion f' übereinstimmt, Flächenbilanz mittels Integralrechnung unter Beachtung globaler Eigenschaften von Funktionen, Grenzwertbestimmung und Asymptoten).

In diesen mittleren Bereich können unter anderem die Aufgaben 7 und 8 eingeordnet werden. Bei Aufgabe 7 (Integralrechnung) erreichen leicht mehr als die Hälfte der Testpersonen mindestens 2,00 oder mehr von drei Punkten, hingegen aber punktet über ein Viertel der Studierenden gar nicht. Aufgabe 8 ist mit sechs Bewertungseinheiten und damit einem Viertel der Gesamtpunktzahl am stärksten gewichtet. Themenkreis ist hier die Grenzwertbestimmung (Approximation) im Unendlichen bzw. an einer Abszisse, die aus dem Definitionsbereich der Funktion f ausgeschlossen ist. Die Verteilung der Punkte ist in diesem Fall zum einen im mittleren Bereich von 2,00 bis 3,00 Punkten und zum anderen bei voller Punktzahl gehäuft. Dieser Eindruck lässt sich auch über die Dichteverteilung gewinnen. Insgesamt ist Aufgabe 8 mit einem arithmetischen Mittelwert von $\bar{x} = 3{,}54$ und einem Median von $x_{med} = 3{,}00$ bei sechs zu erreichenden Punkten in diesem mittleren Bereich der Aufgaben 4, 7 und 8 am besten ausgefallen.

Aufgabe 4 mit nur einer Bewertungseinheit nimmt eine eigene Rolle ein. Es ist eine differenzierbare Funktion f mit $f = f'$ anzugeben; für diese Aufgabe gibt es lediglich die Bewertung richtig oder falsch (die Bewertung mit 0,50 Punkten wird in keinem Fall erzielt). Mit einem Mittelwert von 0,45 wird die Problemstellung damit öfter falsch als richtig beantwortet (83 falsche gegen 71 richtige Antworten). Diese numerischen Daten werden durch die beiden Schaubilder bestätigt.

Schwach bearbeitete Aufgaben 3 und 6 (Themen: Eigenschaften und Zusammenhang der elementaren Funktionen exp und ln, Zusammenhang zwischen Stamm- und Integrandenfunktion).

Vergleichsweise schwach bearbeitet werden in dieser Testdisziplin die Aufgaben 3 und 6. Auffallend sowohl im Säulendiagramm wie beim Kern-Dichteschätzer ist die Konzentration bei der Minimalpunktzahl. In Aufgabe 6 erreichen 89 Studierende (und damit über 50 % der Testpersonen) 0,00 Punkte; nur knapp 30 % erzielen mehr als die Hälfte der erreichbaren Punkte. Numerisch wird dieses schlechte Ergebnis durch einen arithmetischen Mittelwert von $\bar{x} = 0{,}70$ und einen Median von $x_{med} = 1{,}00$ bei maximal zwei zu erreichenden Punkten untermauert. Diese Aufgabe behandelt den Zusammenhang zwischen Stamm- und Integrandenfunktion.

In Aufgabe 3 wird von 64 % der Studierenden maximal einer von drei Punkten erlangt; verdeutlicht wird dieser Sachverhalt bei der Dichteverteilung durch die Konzentration der Kurve um die x-Werte 0,00 und 0,50. Mit einem arithmetischen Mittelwert von $\bar{x} = 0{,}98$ bei drei Punkten wird im Verhältnis arithmetischer Mittelwert zu Gesamtpunktzahl das schwächste Ergebnis in dieser Disziplin erzielt. In dieser Aufgabe soll der Zusammenhang und die daraus resultierenden Eigenschaften von Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmusfunktion erkannt und abgeleitet werden.

Ergebnisse im Nachtest ($n_{nach} = 86$)

Für das Gesamtergebnis im Nachtest erhält man folgende deskriptive Kenngrößen:

- der Mittelwert ist $\bar{x} = 13{,}05$, der Median $x_{med} = 14{,}00$ sowie der Modus $x_{mod} = 14{,}00$; wegen $\bar{x} \approx x_{med} \approx x_{mod}$ liegt eine symmetrische Verteilung vor,

- der Interquartilabstand ist

  $$d_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 18{,}00 - 8{,}00 = 10{,}00,$$

  die Spannweite der Punkte beträgt

  $$d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 24{,}00 - 1{,}00 = 23{,}00$$

  sowie die Standardabweichung der Punkte $s = 6{,}23$.

Folgende numerische Ergebnisse (mit arithmetischem Mittel $\bar{x}_{nach}$, Standardabweichung s_{nach} und Maximalpunktzahl $x_{maximal}$) liefert die Analyse der Einzelaufgaben im Nachtest.

Tabelle 5.8: Mittelw. und Standardabw. der Einzelaufgaben Analysis (Nachtest)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
$\bar{x}_{nach}$	2,03	2,09	1,00	0,65	2,05	0,75	1,26	3,21
s_{nach}	0,92	1,13	1,13	0,48	1,28	0,88	1,28	2,33
$x_{maximal}$	3	3	3	1	3	2	3	6

Vergleich der Ergebnisse der Einzelaufgaben in Vor- und Nachtest

Die folgende Tabelle fasst die oben gewonnenen Ergebnisse zusammen, indem die arithmetischen Mittelwerte in Vortest ($\bar{x}_{vor}$) und Nachtest ($\bar{x}_{nach}$) sowie die Stärke des Leistungsunterschieds zwischen den beiden Erhebungszeitpunkten für jede einzelne Aufgabe gemäß der in Abschnitt 5.1.3 vorgestellten Charakterisierung über die Größe des p-Werts angeführt werden:

Tabelle 5.9: Mittelwerte in Vor- und Nachtest mit Signifikanz (Analysis)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
$\bar{x}_{vor}$	2,12	2,02	0,98	0,45	2,08	0,70	1,66	3,54
$\bar{x}_{nach}$	2,03	2,09	1,00	0,65	2,05	0,75	1,26	3,21
Signifikanz				*			*	

Mit Hilfe der Tabelle werden folgende Trends deutlich:

- leicht signifikante Leistungssteigerung bei Aufgabe 4,
- leicht signifikante Leistungsverminderung bei Aufgabe 7,
- keine signifikante Leistungssteigerung bei den Aufgaben 2, 3, 6,
- keine signifikante Leistungsverminderung bei den Aufgaben 1, 5, 8.

Insgesamt sind die Leistungen der Studierenden zu beiden Erhebungszeitpunkten sehr ähnlich. Bei jeweils einer Aufgabe steigern sich bzw. vermindern sich die Leistungen zwischen Vor- und Nachtest leicht signifikant, bei jeweils drei Aufgaben steigern sich bzw. vermindern sich die Ergebnisse nicht signifikant; es liegen keinerlei signifikante bzw. hoch signifikante Leistungsunterschiede vor.

5.3.4 Qualitative Analyse

Aufgrund der sehr ähnlichen Ergebnisse in den acht Einzelaufgaben zu beiden Erhebungszeiten werden hier keine Interpretationen der Leistungsunterschiede hinsichtlich der Einordnung der Aufgaben in die Ebenen der Bildungsstandards vorgenommen; die qualitativen Aussagen werden somit in einem geringeren Rahmen ausfallen als für die anderen Gebiete; dies bestätigt zudem die Rolle dieser Disziplin als kontrollierendes Element im Rahmen der Längsschnittuntersuchung.

Diskussion von Aufgabe 4 (leicht signifikante Steigerung *). Die Thematik ist der Zusammenhang zwischen einer differenzierbaren Funktion f und ihrer Ableitungsfunktion f'. Da bei dieser Aufgabe nur die Angabe einer differenzierbaren Funktion f mit $f = f'$ (mit entsprechendem Definitionsgebiet) gefordert ist und somit kaum argumentative Kompetenzen angesprochen werden, ist kein typisches Steigerungsmerkmal zu erkennen. Die Fehlerquellen sind zu beiden Erhebungszeitpunkten sehr ähnlich, im Nachtest wird in wenigen Fällen die Nullfunktion $f = 0$ als korrektes Beispiel angegeben (im Vortest nie genannt).

Diskussion von Aufgabe 7 (leicht signifikante Verminderung *). Die Thematik dieser Aufgabe ist der Zusammenhang zwischen den Eigenschaften gegebener Funktionen ($f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$ mit $x \in \mathbb{R}$) und deren Flächenbilanz zwischen den Abszissen -2 und 2. Die schwächeren Leistungen im Nachtest können anhand des Vergleichs der Lösungsskizzen zu den beiden Erhebungszeitpunkten an der nachlassenden Kenntnis über die Bildung von Stammfunktionen identifiziert werden. Das Schulwissen zu dieser Thematik ist im Nachtest mehr in Vergessenheit geraten, da zeitlich mehr Abstand als noch im Vortest vorliegt. Weitere Aspekte können nicht beobachtet werden.

Diskussion der übrigen Aufgaben. Für die übrigen Aufgaben scheinen qualitative Aussagen sehr schwierig, da die Leistungen in Vor- und Nachtest sehr ähnlich sind. Betrachtet man die Bearbeitungsvorschläge zu beiden Terminen, so zeigen sich bei diesen sechs Aufgaben sehr ähnliche Fehlerbilder, zwei Aspekte fallen geringfügig auf: bei Aufgabe 3 wird die Begründung der Umkehrbarkeit der Exponentialfunktion exp mit der Injektivität bzw. Bijektivität der Funktion erklärt, genau eine zentrale Thematik der Grundlagenvorlesung Teil 1. Ferner fällt der leichte Leistungsabfall bei Aufgabe 8 auf, die mit sechs (von 24,00 möglichen) Bewertungseinheiten versehen ist; auch hier scheinen Begriffe in Vergessenheit zu geraten, ähnlich wie bei Aufgabe 7. Die Bildung von Stammfunktionen (Aufgabe 7) und der Begriff des Grenzwertes (Approximation) sind im Nachtest vom begrifflichen Verständnis schwächer einzustufen als im Vortest.

5.4 Stochastik

5.4.1 Vorstellung der Einzelaufgaben

Das Teilgebiet Stochastik weist zehn Aufgaben auf; davon sind zwei Aufgaben im Multiple-Choice-Format gestellt, die übrigen offen. Die 24 Punkte verteilen sich auf folgende Aufgabenauswahl:

1. An zwei Tischen gibt es drei bzw. vier freie Plätze. Auf wie viele Arten kann man sieben Gäste auf die beiden Tische verteilen? (1)
2. Aus einer Gruppe von n Herren und einer Dame sollen k Personen ausgewählt werden.
   a) Wie viele Möglichkeiten der Auswahl gibt es insgesamt? (1)
   b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Dame in die Auswahl kommen soll? (1)
   c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Dame nicht in die Auswahl kommen darf? (1)
3. a) Man berechne die Anzahl aller vierstelligen Zahlen, die sich mit den Ziffern 1 bis 9 bilden lassen, wenn in jeder dieser vierstelligen Zahlen keine Ziffer mehrfach auftritt. (1)
   b) Man berechne die Anzahl der vierstelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1 bis 9 bilden lassen, wenn jede dieser Ziffern auch mehrmals verwendet werden darf. (1)
4. Eine Fußballmannschaft besteht bekanntlich aus elf Spielern. Die elf Spieler verlassen vor Spielbeginn der Reihe nach die Mannschaftskabine. Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind dabei möglich? (1)
5. Aus einem Karton mit 50 Glühbirnen, von denen 20% defekt sind, werden drei Glühbirnen (gleichzeitig) zufällig entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?
   a) Keine der drei Glühbirnen ist defekt. (2)
   b) Alle drei Glühbirnen sind defekt. (2)
6. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, beim dreimaligen Würfeln jeweils dieselbe Augenzahl zu werfen. (2)
7. In einer Urne befinden sich 20 Kugeln mit den Ziffern 1 bis 20. Es wird eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?
   a) Die Zahl der gezogenen Kugel ist durch 4 teilbar. (1)

b) Die Zahl der gezogenen Kugel ist größer als 13. (1)

c) Die Zahl der gezogenen Kugel ist eine Quadratzahl. (1)

8. In einer Urne befinden sich fünf rote und fünf gelbe Kugeln. Es wird zweimal nacheinander gezogen.

   a) Man berechne die Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln, wenn **mit** Zurücklegen gezogen wird. (2)

   b) Man berechne die Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln, wenn **ohne** Zurücklegen gezogen wird. (2)

9. Für jede Wahrscheinlichkeit p gilt: (Man kreuze die richtigen Antworten an.) (2)

Aussagen	wahr	falsch
$0 \leq p \leq 1$	☐	☐
$0 < p < 1$	☐	☐
$0 \leq 1 - p \leq 1$	☐	☐
$p\,(1-p) > \frac{1}{4}$	☐	☐

10. Sei p_1 die Wahrscheinlichkeit für den Sieg einer Fußballmannschaft. Für die Wahrscheinlichkeit p_2, dass die Fußballmannschaft zwei Spiele hintereinander gewinnt, gilt: (Man kreuze die richtigen Antworten an.) (2)

Aussagen	wahr	falsch
$p_2 = p_1^2$	☐	☐
$p_2 = 2\,p_1$	☐	☐
$p_2 = p_1\,(1-p_1)$	☐	☐
$p_2 \leq p_1$	☐	☐

5.4.2 Theoretische Einordnung und Darstellung typischer Fehler

Im folgenden Abschnitt werden wie schon für die anderen drei Teildisziplinen die Aufgaben dem bayerischen Lehrplan für das achtstufige Gymnasium (aus inhaltlichen Gründen in diesem Fall nicht den Kernpunkten des Lehrplans der sechsstufigen Realschule) und den verschiedenen Ebenen der KMK-Bildungsstandards zugeordnet sowie anschließend typische Fehler analysiert.

Aufgabe 1

- Lehrplan Gymnasium: „M 12.2 Stochastik: Binomialverteilung und ihre Anwendung in der beurteilenden Statistik“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Mathematisch modellieren“

- Mathematische Leitidee: „Daten und Zufall“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Es wird sehr häufig der entsprechende Typ (Anzahl einer k elementigen Teilmenge aus einer n Menge) nicht korrekt erkannt, und falls doch, werden in der Ausführung Fehler vollzogen, wie beispielsweise die Rollen von n und k zu vertauschen, was zu einer falschen Anwendung des Binomialkoeffizienten führt (etwa $\binom{3}{7} \underset{\text{Def.}}{=} 0$); diese Verwechslung zeigt sich auch in einigen der folgenden Aufgaben dieser Disziplin, die im Lösungsverlauf den Binomialkoeffizienten enthalten. Es handelt sich im Rahmen eines Urnenexperiments um das Ziehen ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge. Im Erwartungshorizont ist etwa: Die Möglichkeiten für die Verteilung der Gäste gemäß gegebener Konstellation sind

$$\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4} = 35 \quad \text{bzw.} \quad \binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3} = 35.$$

Aufgabe 2

- Lehrplan Gymnasium: „M 12.2 Stochastik: Binomialverteilung und ihre Anwendung in der beurteilenden Statistik“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Mathematisch modellieren“
- Mathematische Leitidee: „Daten und Zufall“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“, „Zusammenhänge herstellen“, „Verallgemeinern und Reflektieren“

Die Verallgemeinerung in der Aufgabenstellung im Vergleich zu Aufgabe 1 verursacht Probleme; an dieser Stelle spielt das fehlende Abstraktionsvermögen eine Rolle. Ebenso wird wie eben erwähnt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ falsch interpretiert, da die Bedeutung von n und k nicht richtig verstanden wird. Der vorliegende Fall (wie auch Aufgabe 1) kann als Urnenexperiment aufgefasst werden; dabei werden aus n Kugeln, durchnummeriert von 1 bis n, genau k Kugeln ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen, was zur entsprechenden Beziehung $\binom{n}{k}$ für die verschiedenen Möglichkeiten führt. Das Erkennen des richtigen Typs des vorliegenden Urnenexperiments (mit bzw. ohne Wiederholung und mit bzw. ohne Beachtung der Reihenfolge) stellt bei allen kombinatorischen Überlegungen in den gestellten Testaufgaben eine große Fehlerquelle dar. Die entsprechenden Möglichkeiten für die drei gewünschten Fälle bei dieser Einzelaufgabe sind

$$\binom{n+1}{k} \quad \text{bzw.} \quad \binom{n}{k-1} \quad \text{bzw.} \quad \binom{n}{k}.$$

Aufgabe 3

- Lehrplan Gymnasium: „M 5.3 Rechnen mit ganzen Zahlen“ (erstes Anwenden des Zählprinzips)
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Mathematisch modellieren“
- Mathematische Leitidee: „Daten und Zufall“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

In Teilaufgabe a) werden die Möglichkeiten richtig erkannt, dann aber teilweise addiert, anstelle diese zu multiplizieren (dabei beschreibt Teilaufgabe a) den Typ ohne Wiederholung und mit Beachtung der Reihenfolge gemäß dem obigen Urnenexperiment, in b) tritt der Typ mit Wiederholung und mit Beachtung der Reihenfolge auf). Es finden sich weiterhin in beiden Teilaufgaben Verwechslungen der entsprechenden Typen; dabei werden die beiden Teilaufgaben fälschlich als Reihenfolgenproblem (Permutation) interpretiert. Für die entsprechende Anzahl an möglichen vierstelligen Ziffern ergeben sich für die beiden gewünschten Aspekte

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \quad \text{bzw.} \quad 9^4.$$

Aufgabe 4

- Lehrplan Gymnasium: „M 5.3 Rechnen mit ganzen Zahlen“ (erstes Anwenden des Zählprinzips)
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Daten und Zufall“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Diese Aufgabe wird vergleichsweise am besten gelöst, wobei auch nur ein Punkt zu erlangen ist. Ein typisches Fehlerbild ist dabei die Interpretation, dass für jeden einzelnen Spieler elf Möglichkeiten zur Verfügung stehen und damit insgesamt 11^{11} Optionen für mögliche Reihenfolgen beim Verlassen der Kabine. Die vorliegende Problemstellung ist als Permutation aufzufassen, also gemäß obigen Urnenexperiments werden (alle) n Kugeln ohne Zurücklegen aber mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen, und es ergeben sich insgesamt

$$11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 1 = 11!$$

Möglichkeiten für die Reihenfolge.

Aufgabe 5

- Lehrplan Gymnasium: „M 12.2 Stochastik: Binomialverteilung und ihre Anwendung in der beurteilenden Statistik“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Mathematisch modellieren“
- Mathematische Leitidee: „Daten und Zufall“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“, „Zusammenhänge herstellen“

Der Aspekt, dass drei Birnen gleichzeitig gezogen werden, wird von vielen Studierenden bei der Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit nicht berücksichtigt. Insgesamt kann in einigen Fällen trotz korrekter Bestimmung der Anzahl der für das entsprechende Ereignis günstigen Ergebnisse nicht die entsprechende Wahrscheinlichkeit zielführend bestimmt werden, da die Mächtigkeit des Ergebnisraumes nicht berechnet werden kann. In beiden Fällen liegt eine hypergeometrische Verteilung mit

$$p_1 = \frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{40}{3}}{\binom{50}{3}} \quad \text{bzw.} \quad p_2 = \frac{\binom{10}{3} \cdot \binom{40}{0}}{\binom{50}{3}}$$

vor, die in den meisten Fällen nicht erkannt wird. Zudem kann in manchen Ausführungen der Studierenden aus der Information, dass 20 % der 50 vorliegenden Glühbirnen defekt sind, nicht auf die korrekte Anzahl von zehn defekten Birnen geschlossen werden.

Aufgabe 6

- Lehrplan Gymnasium: „M 8.2 Stochastik: Laplace-Experimente“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Mathematisch modellieren“
- Mathematische Leitidee: „Daten und Zufall“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“

Für die vorliegende Problemsituation wird die Berechnung vom Prinzip häufig korrekt geführt, aber nur unter dem Aspekt, dass genau eine Augenzahl (und nicht eine beliebige Augenzahl) dreimal hintereinander auftritt; dies führt dann (unter Berücksichtigung der Unabhängigkeit der einzelnen Würfe) für die entsprechende Wahrscheinlichkeit fälschlich zu

$$p = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

und damit zum Fehlen des Faktors 6, da alle sechs möglichen Augenzahlen für die Problemstellung in Frage kommen. Ferner können Fehler bei der Multiplikation von Brüchen beobachtet werden. Im Erwartungshorizont ist etwa

$$p = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Aufgabe 7

- Lehrplan Gymnasium: „M 8.2 Stochastik: Laplace-Experimente“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Mathematisch modellieren“
- Mathematische Kompetenzen: Leitidee: „Daten und Zufall“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“, „Zusammenhänge herstellen“

Diese Aufgabe ist durch reines Zählen und anschließende Division durch 20 zu lösen, liefert aber viele unverständliche Lösungen, wohl daher rührend, dass der Wahrscheinlichkeitsbegriff und zudem die Grundlagen von Laplace-Experimenten nicht verstanden werden. Sonstige Fehler sind schlampiges Zählen sowie das Vergessen von Objekten, die für das entsprechende Ereignis relevant (günstig) sind. Es liegen 20 mögliche und gleichwahrscheinliche Ergebnisse vor, weswegen die Mächtigkeit des Ergebnisraums 20 beträgt. Für jedes der drei Ereignisse muss die entsprechende Anzahl der für das jeweilige Ereignis günstigen Ergebnisse bestimmt werden. Es ergeben sich folglich die Wahrscheinlichkeiten

$$p_1 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \quad \text{bzw.} \quad p_2 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \quad \text{bzw.} \quad p_3 = \frac{7}{20}.$$

Aufgabe 8

- Lehrplan Gymnasium: „M 10.4 Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente“ (Anwenden der Pfadregeln)
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“, „Mathematisch modellieren“
- Mathematische Leitidee: „Daten und Zufall“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“, „Zusammenhänge herstellen“

Im Falle des richtigen Lösungsversuchs wird häufig vergessen, dass beide Farben zu berücksichtigen sind; in vielen Bearbeitungsvorschlägen ergibt sich deshalb nicht vollständig korrekt

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \quad \text{bzw.} \quad p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9};$$

in beiden Fällen ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit p_i mit $i \in \{1, 2\}$ mit dem Faktor 2 zu multiplizieren. Ferner zeigen sich in einigen Baumdiagrammen elementare Fehler bezüglich der geltenden Wahrscheinlichkeitsregeln (Pfadregeln). Richtig interpretiert ergibt sich als Lösung

$$p_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{bzw.} \quad p_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

Aufgabe 9

- Lehrplan Gymnasium: „M 11.5 Wahrscheinlichkeitsbegriff“
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Daten und Zufall“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“, „Zusammenhänge herstellen“, „Verallgemeinern und Reflektieren“

In dieser Aufgabe soll der Wahrheitsgehalt von elementaren Aussagen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff bewertet werden. Offensichtlich gilt für die Wahrscheinlichkeit p und damit auch für die Gegenwahrscheinlichkeit $1 - p$, dass jeweils nur Werte zwischen 0 und 1 angenommen werden können und zwar auch die extremen Werte 0 und 1. Damit gilt also

$$0 \leq p \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq 1 - p \leq 1.$$

Das Produkt aus p und $1 - p$ nimmt im Falle $p = \frac{1}{2}$ maximal den Wert $\frac{1}{4}$ an, daher gilt

$$p \cdot (1 - p) \leq \frac{1}{4}.$$

Die erste Aussage ($0 \leq p \leq 1$) ist für die meisten Studierenden klar, dennoch kann daraus oft kein Bezug zur Gegenwahrscheinlichkeit von p hergestellt werden, da diese Aussage ($0 \leq 1-p \leq 1$) häufig als falsch interpretiert wird. In einigen Fällen werden nur die ersten beiden Aussagen als wahr gekennzeichnet, was völlig widersprüchlich ist, da durch die erste Aussage die extremen Werte $p = 0$ und $p = 1$ für die Wahrscheinlichkeit p (korrekterweise) zugelassen und dann in der zweiten Aussage ausgeschlossen werden. Die letzte Aussage wird in etwa einem Drittel der Fälle nicht beurteilt, etwa ein Drittel entscheidet den Wahrgehalt richtig und folglich etwa ein

Drittel falsch. Falls die erste Aussage richtig bestimmt wird, kann man etwa durch die Wahl von $p = 0$ ein Gegenbeispiel liefern, welches die Aussage falsifiziert.

Aufgabe 10

- Lehrplan Gymnasium: „M 10.4 Stochastik: Zusammengesetzte Zufallsexperimente“ (Anwenden der Pfadregeln)
- Mathematische Kompetenzen: „Mathematisch argumentieren“
- Mathematische Leitidee: „Daten und Zufall“
- Anforderungsbereiche: „Reproduzieren“, „Zusammenhänge herstellen“, „Verallgemeinern und Reflektieren“

Diese Aufgabe beinhaltet Aussagen über bedingte Wahrscheinlichkeiten, die anhand eines Baumdiagramms und den entsprechenden Pfadregeln leicht bewertet werden können; dabei erhält man die beiden wahren Aussagen (unter Berücksichtigung der Unabhängigkeit der Siegwahrscheinlichkeit)

$$p_2 = p_1^2 \quad \text{und} \quad p_2 \leq p_1.$$

In einigen Fällen wird diese Aufgabe nicht bearbeitet. Selten wird die erste Aussage mit dem richtigen Wahrheitsgehalt beurteilt; tatsächlich wird die zweite Aussage etwa mit der gleichen Quote wie die erste mit wahr bewertet, obwohl bei einer Siegwahrscheinlichkeit p_1 von über 50 % zwei Spiele hintereinander mit über 100 % Wahrscheinlichkeit gewonnen werden. Auch die wahre Aussage $p_2 \leq p_1$ wird selten identifiziert, wenngleich diese Aussage aus rein logischen Gründen abgeleitet werden kann, da man die Wahrscheinlichkeit, zwei Spiele hintereinander zu gewinnen, mit der, ein Spiel zu gewinnen, vergleicht.

5.4.3 Quantitative Beschreibung

Für beide Erhebungszeitpunkte werden jeweils das Gesamtergebnis und die Leistungen in den Einzelaufgaben beschrieben und diese verglichen. Die im Vortest erbrachten Leistungen werden spezifisch kategorisiert.

Ergebnisse im Vortest ($n_{vor} = 153$)

Es wird das Gesamtergebnis im Gebiet Stochastik im Vortest fokussiert. Das Leistungsbild der Studierenden wird durch das übliche Säulendiagramm illustriert.

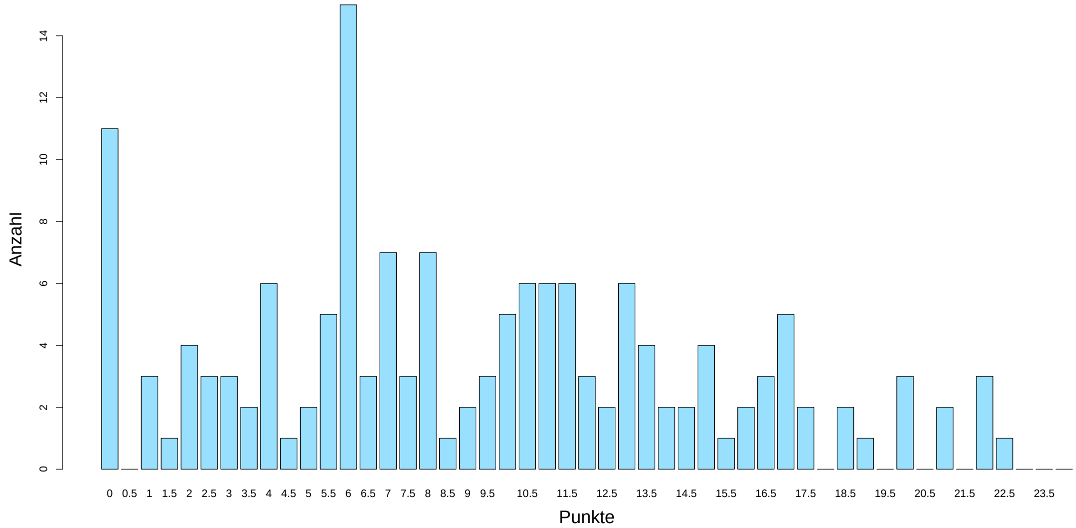

Abbildung 5.10: Punkteverteilung der Gesamtleistung Stochastik (Vortest)

Für das dargestellte Gesamtergebnis erhält man folgende deskriptive Kenngrößen:

- der Mittelwert ist $\bar{x} = 9{,}25$, der Median $x_{med} = 8{,}50$ sowie der Modus $x_{mod} = 6{,}00$; wegen $\bar{x} > x_{med} > x_{mod}$ liegt eine linkssteile Verteilung vor,

- der Interquartilabstand ist

$$d_Q = x_{0{,}75} - x_{0{,}25} = 13{,}00 - 5{,}50 = 7{,}50,$$

die Spannweite der Punkte beträgt

$$d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 22{,}50 - 0{,}00 = 22{,}50$$

sowie die Standardabweichung der Punkte $s = 5{,}75$.

Nach der Schilderung der Leistungen im Gesamtaspekt werden die Ergebnisse in den zehn Einzelaufgaben analysiert; dazu dienen die bereits für die Gebiete Algebra, Geometrie und Analysis verwendeten graphischen Darstellungen.

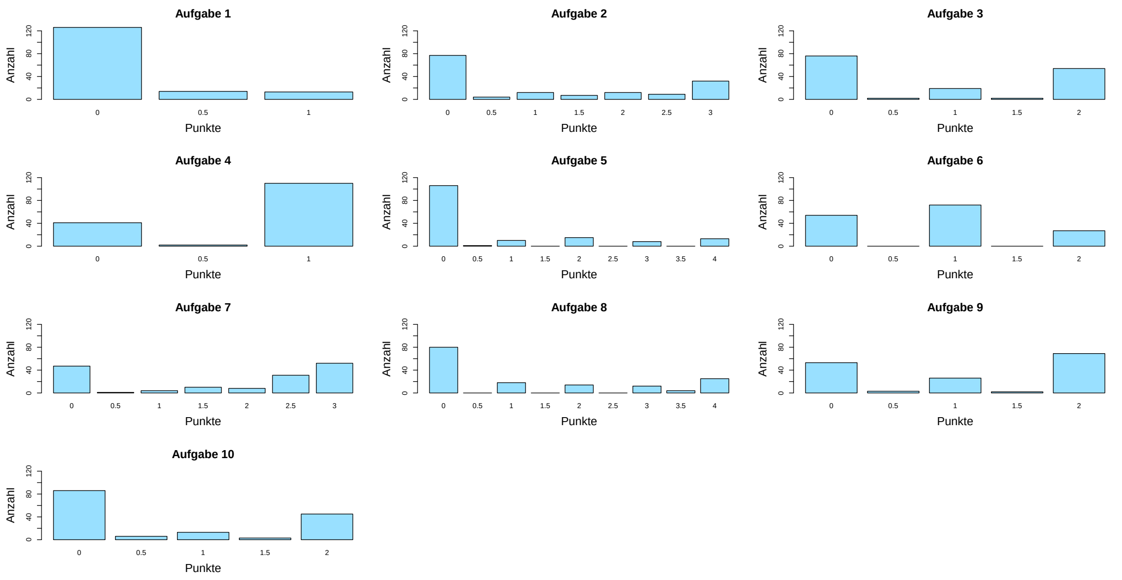

Abbildung 5.11: Punkteverteilung der Einzelaufgaben Stochastik (Vortest)

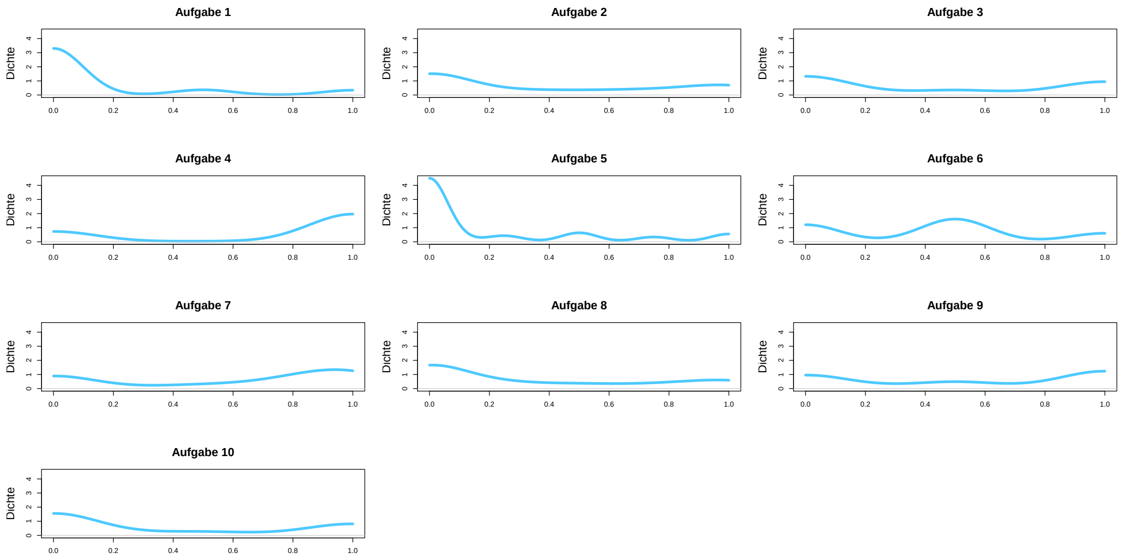

Abbildung 5.12: Dichtekurven der Einzelaufgaben Stochastik (Vortest)

Wieder werden die graphischen Darstellungen der Leistungen in den Einzelaufgaben durch numerische Kenngrößen ergänzt; dabei ist für jede Einzelaufgabe das arithmetische Mittel $\bar{x}_{vor}$, die Standardabweichung s_{vor} sowie die jeweilige Maximalpunktzahl $x_{maximal}$ angegeben.

Tabelle 5.10: Mittelw. und Standardabw. der Einzelaufgaben Stochastik (Vortest)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
$\bar{x}_{vor}$	0,13	1,09	0,86	0,73	0,76	0,82	1,76	1,28	1,10	0,72
s_{vor}	0,30	1,25	0,92	0,44	1,31	0,71	1,28	1,58	0,89	0,89
$x_{maximal}$	1	3	2	1	4	2	3	4	2	2

Aufgabencharakterisierung hinsichtlich der Bearbeitung im Vortest

Sehr gut bearbeitete Aufgabe 4 (Thema: Interpretation von Permutationen im Urnenmodell: Ziehen aller n Kugeln ohne Wiederholung mit Beachtung der Reihenfolge).

Am besten wird im Gesamtaspekt betrachtet Aufgabe 4 mit einem arithmetischen Mittelwert von $\bar{x} = 0{,}73$ und einem Median von $x_{med} = 1{,}00$ von insgesamt einem Punkt bearbeitet. 110 Studierende lösen diese Aufgabe völlig korrekt, im Vergleich zu 41 Personen, die nicht punkten können. Diese Verteilung ist im obigen Säulendiagramm durch die ausgeprägte Höhe der Säule für die Punktzahl 1,00 zu sehen.

Gut bearbeitete Aufgaben 7 und 9 (Themen: Laplacewahrscheinlichkeiten, elementare Aussagen über Wahrscheinlichkeiten).

Vergleichsweise gut werden die beiden Aufgaben 7 und 9 bearbeitet. Jeweils mehr als 60 % der Studierenden können die Aufgaben mit mindestens der Hälfte der maximal erreichbaren Punkte lösen. Auffallend in beiden Fällen ist dennoch, dass etwa ein Drittel der Testpersonen 0,00 Punkte aufweist. Ferner zeigen sich in der Dichteverteilung keine Extrema; in diesem Fall bleibt festzuhalten, anders als bei den Aufgaben 2, 3, 6, 8 und 10, dass die stärkere y-Achsenauslenkung der Abszisse $x = 1{,}00$ zukommt und nicht $x = 0{,}00$.

Mittelmäßig bearbeitete Aufgaben 2, 3, 6, 8 und 10 (Themen: Urnenexperimente: Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, Ziehen mit bzw. ohne Zurücklegen und mit Beachtung der Reihenfolge, Laplacewahrscheinlichkeiten, bedingte Wahrscheinlichkeiten, elementare Aussagen über Wahrscheinlichkeiten).

Eine größere Kategorie bilden die Aufgaben 2, 3, 6, 8 und 10. Die Dichteverteilungen zeigen einen gemeinsamen Trend; die Kurven haben keine bemerkenswerten Auffälligkeiten und weisen am x-Wert 0,00 die stärkste Auslenkung bezüglich der Hochwertachse auf. Eine kleine Ausnahme ist dabei Aufgabe 6; diese hat bei der Hälfte der maximal zu erreichenden Punktzahl den höchsten y-Wert und damit dort die höchste Punkteverdichtung. Es ergeben sich die arithmetischen Mittelwerte $\bar{x} = 1{,}09$ (Aufgabe 2, maximal drei Punkte), $\bar{x} = 0{,}86$ (Aufgabe 3, maximal zwei Punkte), $\bar{x} = 0{,}82$ (Aufgabe 6, maximal zwei Punkte), $\bar{x} = 1{,}28$ (Aufgabe 8, maximal vier Punkte) und $\bar{x} = 0{,}72$ (Aufgabe 10, maximal zwei Punkte).

Schwach bearbeitete Aufgaben 1 und 5 (Themen: Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge, hypergeometrische Verteilung).

Aufgabe 1 und 5 zeigen in der Dichteverteilung durch die extreme Amplitude in y-Richtung bei der Abszisse $x = 0{,}00$ das vergleichsweise schwächste Ergebnis. Bei Aufgabe 1 erzielen über 82 % der Studierenden keinen Punkt. Numerisch seien nochmals die beiden auffallenden arithmetischen Mittelwerte von $\bar{x} = 0{,}13$ (Aufgabe 1, maximal ein Punkt) und $\bar{x} = 0{,}76$ (Aufgabe 5, maximal vier Punkte) angeführt.

Final werden die Themengebiete der einzelnen Aufgaben nochmals in Anbetracht der Qualität der Bearbeitung charakterisiert. Die ersten vier Aufgaben behandeln Urnenexperimente mit kombinatorischen Fragestellungen. Die nächsten vier Aufgaben behandeln Thematiken der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung wie hypergeometrische Verteilung, Gleichverteilung und bedingte Wahrscheinlichkeit. Ferner wird in den beiden Multiple-Choice-Aufgaben der Wahrheitsgehalt von Aussagen über Wahrscheinlichkeiten geprüft. Insgesamt zieht sich das schlechte Abschneiden durch alle Themengebiete; dennoch stellt das Themengebiet von Aufgabe 4 das beste Ergebnis dar. Dabei handelt es sich um Permutationen. Die beiden Multiple-Choice-Aufgabe sind mit arithmetischen Mittelwerten von $\bar{x} = 1{,}10$ (Aufgabe 9) und $\bar{x} = 0{,}72$ (Aufgabe 10) von zwei zu erreichenden Punkten in den vergleichsweise gut bearbeiteten bzw. mittelmäßig bearbeiteten Bereich einzuordnen.

Ergebnisse im Nachtest ($n_{nach} = 86$)

Für das Gesamtergebnis im Nachtest erhält man folgende deskriptive Kenngrößen:

- der Mittelwert ist $\bar{x} = 12{,}01$, der Median $x_{med} = 13{,}00$ sowie der Modus $x_{mod} = 16{,}00$; es kann keine typische Lage für die Verteilung abgeleitet werden,
- der Interquartilabstand ist $d_Q = x_{0{,}75} - x_{0{,}25} = 16{,}00 - 8{,}88 = 7{,}12$, die Spannweite der Punkte beträgt $d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 23{,}00 - 0{,}00 = 23{,}00$ sowie die Standardabweichung der Punkte $s = 5{,}95$.

Folgende numerische Ergebnisse (mit arithmetischem Mittel $\bar{x}_{nach}$, Standardabweichung s_{nach} und Maximalpunktzahl $x_{maximal}$) liefert die Analyse der Einzelaufgaben im Nachtest.

Tabelle 5.11: Mittelw. und Standardabw. der Einzelaufgaben Stochastik (Nachtest)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
$\bar{x}_{nach}$	0,31	1,82	1,35	0,69	0,73	1,00	1,94	1,84	1,45	0,94
s_{nach}	0,46	1,17	0,88	0,46	1,42	0,64	1,32	1,67	0,82	0,87
$x_{maximal}$	1	3	2	1	4	2	3	4	2	2

Vergleich der Ergebnisse der Einzelaufgaben in Vor- und Nachtest

Für beide Erhebungszeitpunkte werden die arithmetischen Mittelwerte verglichen und daraus die Stärke des Leistungsunterschieds (über den p-Wert) gemäß der Charakterisierung von 5.1.3 dargestellt:

Tabelle 5.12: Mittelwerte in Vor- und Nachtest mit Signifikanz (Stochastik)

Aufgabe	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
$\bar{x}_{vor}$	0,13	1,09	0,86	0,73	0,76	0,82	1,76	1,28	1,10	0,72
$\bar{x}_{nach}$	0,31	1,82	1,35	0,69	0,73	1,00	1,94	1,84	1,45	0,94
Signifikanz	***	***	***					**	***	

Mit Hilfe der Tabelle werden folgende Trends deutlich:

- keine signifikante Leistungssteigerung bei den Aufgaben 6, 7 und 10,
- kein signifikanter Leistungsabfall bei den Aufgaben 4 und 5,
- signifikante Leistungssteigerung bei Aufgabe 8,
- hoch signifikante Leistungssteigerung bei den Aufgaben 1, 2, 3 und 9.

Damit werden in fünf Fällen keine auffallenden, bei einer Aufgabe signifikante und bei vier Problemstellungen hoch signifikante Leistungsentwicklungen verbucht. Alle Themeninhalte der zehn Einzelaufgaben werden im Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ im Rahmen der Themengebiete Kombinatorik und elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt.

5.4.4 Qualitative Analyse

Jede Einzelaufgabe in den obigen vier Kategorien wird nun hinsichtlich der qualitativen Bearbeitung zwischen Vor- und Nachtest untersucht; Grundlage ist der Vergleich typischer Fehlerbilder in Vor- und Nachtest. Im Folgenden wird die nicht signifikante Leistungssteigerung bei den Aufgaben 6, 7 und 10 sowie der nicht signifikante Leistungsabfall bei den Aufgaben 4 und 5 zusammen diskutiert.

Diskussion der Aufgaben 1, 2, 3 und 9 (hoch signifikant ***)

- Urnenmodell: Ziehen ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge mit expliziten Werten (Aufgabe 1),
- Urnenmodell: Ziehen ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge im verallgemeinerten Fall (Aufgabe 2),
- Urnenmodell: Ziehen mit bzw. ohne Wiederholung mit Beachtung der Reihenfolge (Aufgabe 3),
- Elementare Aussagen über Wahrscheinlichkeiten (Aufgabe 9).

Die ersten drei Aufgaben sind dem Themengebiet Kombinatorik zuzuordnen, Aufgabe 9 der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auffallend ist, dass bei drei der vier Aufgaben zur Kombinatorik hoch signifikante Steigerungen vorliegen.

Die Verbesserungen bei Aufgabe 1 sind vor allem durch das bessere Verständnis für das Urnenmodell zu erklären: dabei werden aus n Kugeln, durchnummeriert von 1 bis n, genau k Kugeln ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen, was zur entsprechenden Beziehung $\binom{n}{k}$ für die verschiedenen Möglichkeiten führt, in diesem Fall zu $\binom{7}{3} \cdot \binom{4}{4}$ bzw. $\binom{7}{4} \cdot \binom{3}{3}$. Ferner wird die Bedeutung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ mit den Rollen von n und k besser verstanden. Diese Aufgabe wird im Vortest sehr schwach bearbeitet und ist dem Anforderungsbereich „Reproduktion“ zuzuordnen.

Für das positivere Bild bei Aufgabe 2 ist vor allem das bessere Verständnis für die Bedeutung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ ausschlaggebend. Diese Aufgabe stellt aufgrund ihres allgemeineren Charakters ohne feste Zahlenwerte eine höhere Hürde im Vergleich zu Aufgabe 1 dar; im Nachtest zeigt sich ein verbessertes Abstraktionsvermögen, da die angegebenen Größen zielsicherer den Rollen im Binomialkoeffizienten zugeordnet werden können. Vor allem die Teilaufgaben a) und c) liefern ein deutliches Steigerungspotential im Nachtest. Diese Aufgabe spiegelt Aspekte aller drei Anforderungsbereiche wieder; hervorzuheben ist die hoch signifikante Steigerung in Bezug auf den Kompetenzbereich „Verallgemeinern und Reflektieren“. Im Rahmen der Kombinatorik haben sich die Abstraktionskompetenzen der Studierenden verbessert.

Aufgabe 3 ist hinsichtlich der Anforderungen dem Bereich „Reproduktion" zuzuteilen; in der vorliegenden Problemstellung ergeben sich im Nachtest vor allem Steigerungen bei Teilaufgabe a), also beim Typ Ziehen ohne Wiederholung und mit Beachtung der Reihenfolge. In beiden Fällen werden die vorliegenden Alltagssituation zielsicher den Typen im Urnenmodell zugeordnet.

In Aufgabe 9 muss der Wahrheitsgehalt von elementaren Aussagen über eine Wahrscheinlichkeit beurteilt werden. Vor allem das Verständnis für die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses hat sich verbessert; in vielen Fällen werden nun Wahrscheinlichkeit und entsprechende Gegenwahrscheinlichkeit mit Werten zwischen 0 und 1 richtig interpretiert. Ferner wird auch die Aussage $p \cdot (1-p) > \frac{1}{4}$ häufiger als falsch beurteilt, da das Verständnis für Wahrscheinlichkeit und Gegenwahrscheinlichkeit ausgeprägter ist und genau diese Aspekte wichtig für die Bewertung dieser Aussage sind. Diese Aufgabe ist allen drei Ebenen („Reproduktion", „Zusammenhänge herstellen" und „Verallgemeinern und Reflektieren") zuzuordnen; es zeigt sich auch im Rahmen der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung das gesteigerte Abstraktionsvermögen.

Diskussion der Aufgaben 4, 5, 6, 7 und 10 (nicht signifikant)

- Urnenmodell: Ziehen aller n Kugeln ohne Wiederholung und mit Beachtung der Reihenfolge (Permutation) (Aufgabe 4),
- Hypergeometrische Verteilung (Aufgabe 5),
- Laplacewahrscheinlichkeit (Aufgaben 6 und 7),
- Elementare Aussagen über zweistufige Zufallsexperimente (Aufgabe 10).

Bei den Aufgaben 4 und 5 ergeben sich im Nachtest minimal schwächere Leistungen, bei den übrigen drei Aufgaben leicht bessere Ergebnisse. Aufgabe 4 ist Rahmen der Kombinatorik (Permutationen) einzuordnen, die vier anderen Problemstellungen im Gebiet der elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Für Aufgabe 4 zeigen sich in Vor- und Nachtest ähnliche Fehler, vor allem die Interpretation mit Wiederholung, was fälschlich zu 11^{11} Möglichkeiten führt. Die Ergebnisse im Vortest sind vergleichsweise sehr gut, im Nachtest gehen diese geringfügig zurück, bleiben im Vergleich zu den anderen Aufgaben noch immer ansprechend (möglicher Deckelungseffekt). Diese Aufgabe ist rein auf Reproduktion ausgelegt.

Bei Aufgabe 5 sind die Ergebnisse zu beiden Erhebungszeitpunkten sehr ähnlich. Die Studierenden können den Typ Ziehen ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge nicht richtig interpretieren, weswegen auch die Anwendung der hypergeometrischen Verteilung nicht gelingt. Ferner kann zu beiden Erhebungszeitpunkten die Angabe, dass 20 % der Birnen kaputt sind, häufig nicht in den Kontext der Lösungsstrategie eingebunden werden. Diese Aufgabe ist neben „Reproduktion“ auch dem Bereich „Zusammenhänge herstellen“ zugeteilt.

Bei Aufgabe 6 wird im Nachtest das dreimalige Werfen eines Würfels besser verstanden: viele Studierende erkennen, dass bei jedem Wurf dem entsprechenden Ereignis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ zugeordnet wird; es wird nur in manchen Fällen nicht beachtet, dass sechs verschiedene Augenzahlen möglich sind. Dieser Sachverhalt erklärt die leichte Steigerung der Ergebnisse im Nachtest. Es liegt der Anforderungsbereich „Reproduktion“ vor.

Bei Aufgabe 7 wird im Nachtest die Mächtigkeit des Ergebnisraums Ω deutlich häufiger richtig bestimmt, das Abzählen der für die entsprechenden Ereignisse günstigen Ergebnisse ist in Vor- und Nachtest gleich gut bearbeitet. Im Vortest lösen die Studierenden die Aufgabe mehrfach so, dass keine Wahrscheinlichkeit bestimmt wird, sondern nur die entsprechende Anzahl an Möglichkeiten angegeben wird; dieser Aspekt (Bestimmung der expliziten Laplacewahrscheinlichkeiten, nicht nur Angabe der für das Ereignis günstigen Ergebnisse) ist für die leichte Steigerung im Nachtest verantwortlich. Diese Aufgabe ist neben „Reproduktion“ auch dem Bereich „Zusammenhänge herstellen“ zugeteilt.

Aufgabe 10 liegt wie Aufgabe 9 im Multiple-Choice-Format vor, was eine Analyse der Fehlerquellen und das Herausstellen von Steigerungsaspekten erschwert. Es ist der Wahrheitsgehalt von Aussagen über Wahrscheinlichkeiten bei zweistufigen Zufallsexperimenten zu prüfen. Die Leistungen sind leicht besser im Nachtest, es ist aber keine Struktur anhand der Multiple-Choice-Aufgabe zu erkennen, wie diese zu erklären sind. Diese Aufgabe ist allen drei Anforderungsbereichen zuzuordnen. Im Vergleich zu Aufgabe 9, die ebenfalls im Multiple-Choice-Format vorliegt und auch die drei Bereiche aufweist, können hier keine auffallenden Leistungssteigerungen beobachtet werden. Das Abstraktionsvermögen im Themengebiet zweistufige Zufallsexperimente bzw. bedingte Wahrscheinlichkeit kann nicht verbessert werden.

Diskussion von Aufgabe 8 (signifikant **). Bei Aufgabe 8 wird im Nachtest deutlich häufiger über ein passendes Baumdiagramm argumentiert, wobei wie im Vortest der Aspekt vergessen wird, dass sich die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten über zwei Pfade mit $\{(r, r)\}$ und $\{(g, g)\}$ zusammensetzen. Ferner wird auch die Bedeutung mit bzw. ohne Zurücklegen der Kugeln besser verstanden. Das Themengebiet dieser Aufgabe sind zweistufige Zufallsexperimente bzw. bedingte Wahrscheinlichkeit, ebenso wie in Aufgabe 10. In der vorliegenden Problemstellung sind explizite Werte gegeben, anders als in der im Multiple-Choice-Format gestellten Aufgabe 10; es zeigen sich nun signifikante Verbesserungen im Nachtest (im Gegensatz zu Aufgabe 10). Diese Aufgabe ist den beiden Anforderungsbereichen „Reproduktion“ und „Zusammenhänge herstellen“ zugeordnet.

6 Testerhebungen zum Zyklus „Grundlagen der Mathematik“

In diesem Kapitel werden die Testerhebungen zu den Inhalten des Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ vorgestellt und die Ergebnisse in quantitativer und qualitativer Form geschildert. Die Testerhebung zum ersten Teil des Zyklus besteht aus zwei Einzeltests, die jeweils etwa die Hälfte des Vorlesungsstoffes abdecken; das gleiche Design wird für den zweiten Teil des Zyklus verwendet. Damit werden die Inhalte des Zyklus auf vier Einzeltests verteilt. Diese Erhebungen analysieren im Gegensatz zu dem in Kapitel 5 diskutierten Vor- bzw. Nachtest das universitäre mathematische Wissen und nicht das schulische Wissen. Die Auswirkungen des Hochschulwissens (Inhalte der Vorlesungen Grundlagen der Mathematik I + II) auf das Schulwissen (Inhalte der schulrelevanten Gebiete Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik) wurden bei der Gegenüberstellung von Vor- und Nachtest beschrieben. Nun wird ein weiterer zentraler Gegenstand der Längsschnittstudie fokussiert, nämlich die Kenntnisse der Studierenden zu den Studieninhalten der neukonzipierten Vorlesungsstruktur (universitäres mathematisches Wissen); ein Leitgedanke des Vorlesungszyklus ist unter anderem die Thematisierung von mathematischen Schulinhalten vom höheren Standpunkt der universitären Mathematik, so dass im Rahmen der Längsschnittuntersuchung die beiden Wissensdomänen ineinander greifen und sich beeinflussen (speziell das universitäre Mathematikwissen die schulspezifischen Kenntnisse). Wie bei der Vorstellung der Forschungsfragen beschrieben thematisieren diese universitären Themen Inhalte der drei Schulgebiete Algebra, Geometrie und Stochastik vom höheren Standpunkt der Mathematik, aber keine Aspekte des Bereichs Analysis. Diese universitären Kenntnisse werden als Grundlage für den Entwicklungsprozess des schultypischen Wissens und für den Einfluss der exogenen Variablen auf dieses betrachtet.

Es werden für beide Testerhebungen jeweils die beiden Einzeltests vorgestellt, um einen inhaltlichen Überblick zu erhalten. Daraufhin werden quantitativ das Gesamtergebnis sowie die Einzelaufgaben untersucht und schließlich deren Ergebnisse noch qualitativ beschrieben; im Zuge der qualitativen Analyse wird für jede Aufgabe der Erwartungshorizont dargestellt. Am Ende des Kapitels werden die Ergebnisse zusammengefasst und im Rahmen der Längsschnittstudie eingeordnet.

6.1 Testerhebungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

Die im Folgenden dargestellten Testerhebungen beziehen sich thematisch auf die Inhalte der Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“, welche im Wintersemester 2010/11 gehalten wurde. Beide Testerhebungen sind einheitlich mit 24,00 Punkten bewertet. Diese fanden an zwei verschiedenen Terminen (erster Test nach vier Semesterwochen (Ende Mai 2011), zweiter nach zehn Semesterwochen (Mitte Juli 2011)) statt, was auch die differierende Anzahl an Teilnehmenden erklärt. Folgende Schwerpunktthemen werden behandelt: in der ersten sind die zentralen Gebiete

- Mengen und Abbildungen,
- Rechengesetze der reellen Zahlen,
- Beweistechniken (direkter und indirekter sowie Beweis durch Widerspruch),
- Menge der natürlichen Zahlen; vollständige Induktion und Kombinatorik

sowie in der zweiten

- Teilbarkeitslehre; Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie,
- Primzahlen und deren Anwendung,
- Eigenschaften elementarer algebraischer Strukturen,
- Gleichungslehre im Kontext der Zahlenbereichserweiterung,
- Grundlagen der Gleichungslehre.

6.1.1 Erste Testerhebung zu Grundlagen der Mathematik I

Vorstellung der Testaufgaben

Die erste Testerhebung besteht aus sechs Aufgaben mit unterschiedlicher Gewichtung der Punkte; die Punkte für jede Einzelaufgabe sind der nachfolgenden Darstellung zu entnehmen. Insgesamt sind 24,00 Punkte erreichbar.

1. a) Man entscheide für die Abbildungen f_1 bis f_4 die Injektivität und Surjektivität. (Zutreffendes bitte ankreuzen) (2)

Abbildungsvorschrift	injektiv	surjektiv
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2$	☐	☐
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ f_2(x) = x^2$	☐	☐
$f_3 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f_3(x) = x^2$	☐	☐
$f_4 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f_4(x) = x^2$	☐	☐

   b) Man gebe an, welche Abbildungen aus a) umkehrbar sind und bestimme dafür die Umkehrabbildung f^{-1} sowie deren Definitions- und Wertebereich. (2)

2. a) Man definiere für eine Abbildung $f : M \to N$ sowie $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ die Begriffe „Bild“ und „Urbild“. (2)

   b) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, bestimme man das Bild $f\left([-1; 2[\right)$. (1)

   c) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, bestimme man das Urbild $f^{-1}\left([1; 4[\right)$. (1)

3. Man leite für a, $b \in \mathbb{R}$ die binomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \qquad \text{und} \qquad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

   aus den Rechengesetzen der reellen Zahlen her. Welche Rechengesetze gehen dabei in jedem Schritt ein? (4)

4. Man betrachte für eine ganze Zahl z die beiden Aussagen

$$A\text{: „}z \text{ ist gerade.“} \qquad \text{und} \qquad B\text{: „}3\,z + 1 \text{ ist ungerade.“}$$

   Man zeige

   a) die Implikation $A \Longrightarrow B$ durch einen direkten Beweis, (1)

   b) die Implikation $B \Longrightarrow A$ durch einen indirekten Beweis, (1)

   c) die Implikation $B \Longrightarrow A$ durch einen Widerspruchsbeweis. (1)

   d) Man gebe zwei weitere schulrelevante Sätze an, die üblicherweise durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt werden. (1)

5. a) Auf welchen Aussagentyp lässt sich die vollständige Induktion anwenden? (1)

   b) Welche Axiome liegen dieser Methode zu Grunde? (1)

   c) Man entscheide mit Begründung, ob die vollständige Induktion auf dem Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen realisierbar ist. (1)

6. Man betrachte ein Urnenexperiment, bei dem aus einer Urne mit n Kugeln, die von 1 bis n durchnummeriert sind, k Kugeln gezogen werden.

   a) Man gebe für obiges Urnenexperiment die Anzahl der Möglichkeiten unter den Aspekten Reihenfolge bzw. Wiederholung mit Hilfe allgemeiner Formeln an. (2)

   b) Man gebe für jeden der vier Fälle ein Anwendungsbeispiel an, die sich auf Teilaufgabe a) beziehen. (2)

   c) Wie lassen sich „Permutationen“ als Urnenexperiment interpretieren? (1)

Quantitative Analyse der Punkteverteilung

Insgesamt haben an dieser Erhebung 121 Studierende teilgenommen. Die 24,00 Punkte verteilen sich auf sechs Aufgaben mit verschiedener Punktzahl. Die Auswahl der Testfragen deckt die erste Hälfte des Vorlesungsstoffes ab.

Folgende Graphik stellt die Gesamtverteilung der Leistungen der Studierenden in dieser Testerhebung dar; dabei werden die zu erreichenden 24,00 Punkte in Halbpunktschritten auf der Rechtswertachse gegen die Anzahl an Studierenden, welche die entsprechende Punktzahl erzielt haben, abgetragen.

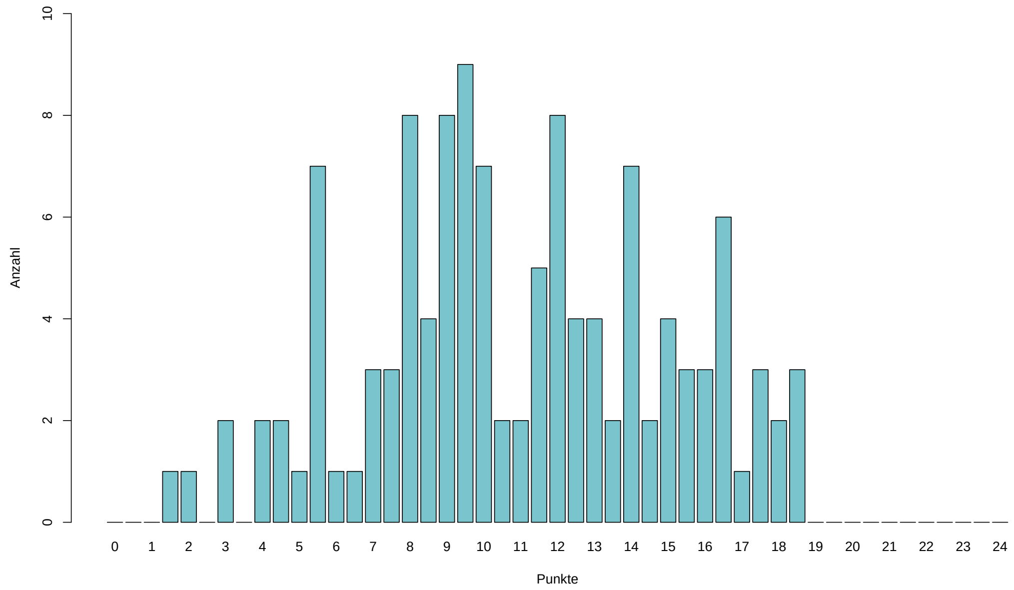

Abbildung 6.1: Punkteverteilung der ersten Testerhebung (I)

Folgende Übersicht zeigt typische Kenngrößen für das Gesamtergebnis:

- das arithmetische Mittel liegt bei 10,90,
- der Median liegt bei 10,50 Punkten,
- mit $\bar{x} \approx x_{med} \approx x_{mod}$ liegt eine relativ symmetrische Verteilung vor,
- die Spannweite der Punkte beträgt $d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 18{,}50 - 1{,}50 = 17{,}00$,
- die mittlere Hälfte der erzielten Leistungen wird durch den Interquartilabstand $d_Q = x_{0{,}75} - x_{0{,}25} = 14{,}00 - 8{,}50 = 5{,}50$ beschrieben,
- die Streuung der Punkte beträgt 4,04 Punkte um das arithmetische Mittel.

Ganz schwache (bis 1,50 Punkte) sowie ganz starke Ergebnisse (ab 19,00 Punkten) werden nicht erzielt; die Leistungen können insgesamt als eher mäßig eingestuft werden, da der Median x_{med} sowie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ nicht einmal die Hälfte der Maximalpunktzahl erreichen. Die Aufgaben sind zwar an den Stoffinhalten einer universitären Vorlesung orientiert, dennoch sind die gestellten Aufgaben zum größten Teil auf Schulniveau anzusiedeln; einzig der Aspekt der vollständigen Induktion ist kein typischer Inhalt im Kanon der Schulmathematik. Die anderen Gebiete der ersten Erhebung können als typische schulmathematische Inhalte angesehen werden; dieser Aspekt und ferner der Sachverhalt, dass die Studierenden die Inhalte vor wenigen Monaten gehört und sich damit beschäftigt haben, machen das schwache Ergebnis schwer erklärbar. Die folgende Beschreibung der Einzelaufgaben soll einen Einblick in deren Struktur, Inhalt und Fehlerbilder geben.

Quantitative Analyse der Einzelaufgaben

Für die Analyse der sechs Einzelaufgaben wird eine Tabelle mit typischen Lagemaßen angeführt. Diese wird durch zwei Graphiken für die sechs Einzelaufgaben ergänzt. Zum einen wird ein Säulendiagramm dargestellt, welches die Punkte der jeweiligen Aufgabe in Halbpunktschritten auf der x-Achse gegen die jeweilige Anzahl an Studierenden, die die entsprechende Punktzahl erreicht hat, auf der y-Achse aufträgt und ein Kern-Dichteschätzer, der bezüglich der x-Achse auf das Einheitsintervall $[0{,}00; 1{,}00]$ normiert ist, wobei $x = 0{,}00$ die Minimalpunktzahl und $x = 1{,}00$ die Maximalpunktzahl der entsprechenden Aufgabe darstellt.

Tabelle 6.1: Lagemaße der Einzelaufgaben für die erste Testerhebung (I)

Lagemaße	A1	A2	A3	A4	A5	A6
x_{min}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$x_{0,25}$	1,50	0,00	1,50	1,00	0,00	1,50
x_{med}	2,50	0,50	3,00	2,00	1,00	2,50
$\bar{x}$	2,31	0,83	2,69	1,67	1,01	2,39
$x_{0,75}$	3,50	1,50	4,00	2,00	2,00	3,50
x_{max}	4,00	4,00	4,00	3,50	3,00	5,00
max. Punktzahl	4,00	4,00	4,00	4,00	3,00	5,00

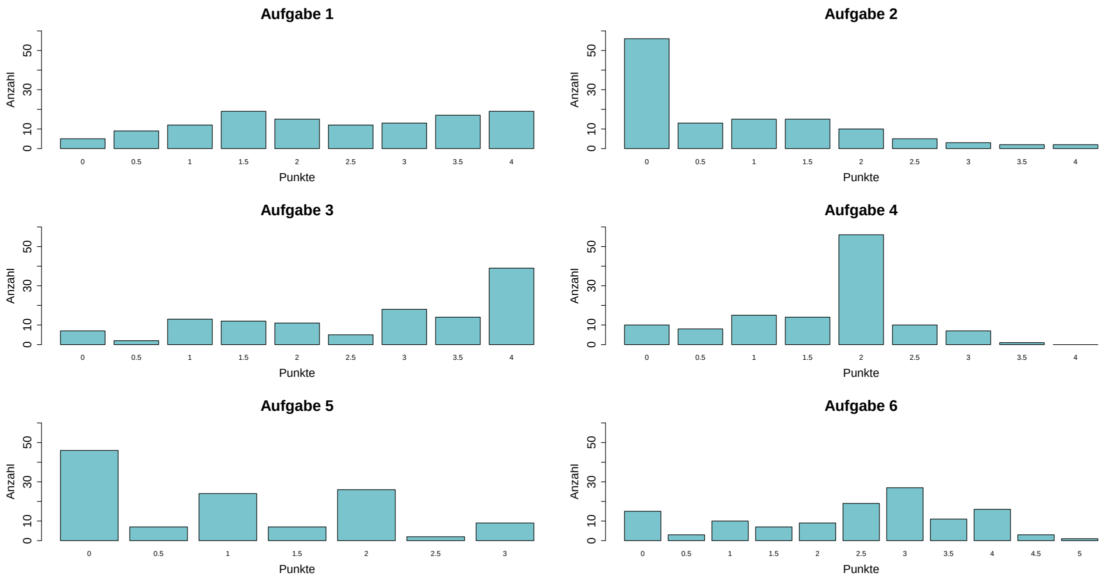

Abbildung 6.2: Punkteverteilung der Einzelaufgaben für die erste Testerhebung (I)

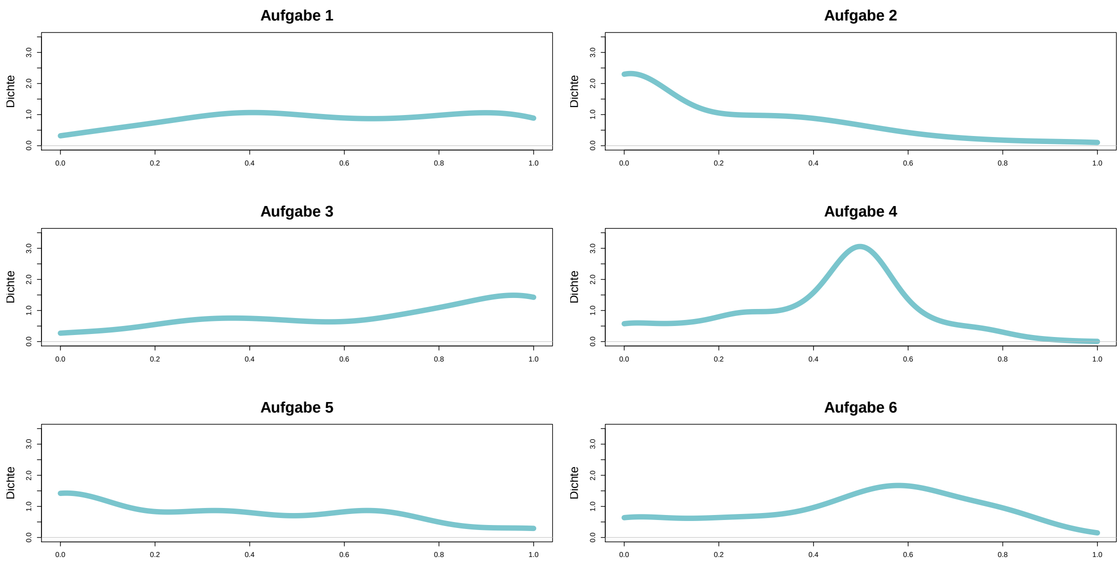

Abbildung 6.3: Dichtekurven der Einzelaufgaben für die erste Testerhebung (I)

Die Auswertung der Einzelaufgaben zeigt folgende Trends:

- vergleichsweise gut gelöst werden die Aufgaben 1 und 3,
- im mittleren Bereich finden sich die Aufgaben 4 und 6,

- schwache Leistungen werden bei Aufgabe 5 verbucht,
- sehr schwach schneiden die Studierenden bei Aufgabe 2 ab.

Bei Aufgabe 1 erzielen genau 50 % der Personen maximal zwei, die andere Hälfte über zwei Punkte. Es werden häufig 3,50 und 4,00 Punkte erreicht, wodurch sich der Median mit $x_{med} = 2{,}50$ und der Mittelwert mit $\bar{x} = 2{,}31$ erklären lässt. Die beiden Graphiken zeigen für diese Aufgabe eine sehr gleichmäßige Punkteverteilung; im Säulendiagramm werden durch ähnliche Säulenhöhen alle möglichen acht Halbpunktschritte relativ homogen erreicht, der Kern-Dichteschätzer bestätigt dies durch seinen relativ ruhigen Kurvenverlauf. Bei Aufgabe 3 erzielen etwa 63 % der Personen mehr als die Hälfte der möglichen Maximalpunktzahl; die starke Ausprägung bei der entsprechenden Maximalpunktzahl ist erfreulich, deutlich durch die Säulenhöhe bei vier Punkten und ferner durch die starke Amplitude bezüglich der Hochwertachse bei der Abszisse $x = 1{,}00$ im Kern-Dichteschätzer zu erkennen. Ein Drittel der Studierenden kann bei dieser Aufgabe volle Punktzahl erzielen.

Mittelmäßige Ergebnisse ergeben sich bei den Aufgaben 4 und 6. Aufgabe 4 mit seiner sehr symmetrischen Verteilung weist 37 Personen mit weniger als zwei sowie 18 Personen mit über zwei Punkten auf; fast die Hälfte der Studierenden verbucht genau zwei von vier Punkten; die Maximalpunktzahl kann von keinem Teilnehmenden erzielt werden. Bei Aufgabe 6 werden am häufigsten zweieinhalb bzw. drei Punkte erreicht, eine Person kann die volle Punktzahl, aber auch 15 Personen keinen Punkt erzielen; dies erklärt den Median mit $x_{med} = 2{,}50$ und den arithmetischen Mittelwert mit $\bar{x} = 2{,}39$ bei fünf maximal zu erreichenden Punkten.

Schwache Ergebnisse liefert Aufgabe 5, welche mit drei maximalen Punkten am schwächsten gewichtet ist. Die Dichtekurve fällt wie bei Aufgabe 2 von links nach rechts ab, aber nicht so stark; die stärkste Auslenkung bezüglich der y-Achse liegt bei 0,00 Punkten (die Dichte liegt in diesem Fall bei etwa 1,50 auf der Hochwertachse), die schwächste bei voller Punktzahl. Fast 40 % der Studierenden können nicht punkten und knapp zwei Drittel bleiben unter der Hälfte der Maximalpunktzahl.

Bei Aufgabe 2 beträgt das arithmetische Mittel $\bar{x} = 0{,}83$, gerade mal ein Fünftel der maximal zu erreichenden Punktzahl. Das 75 %-Quantil macht deutlich, dass drei Viertel der erbrachten Leistungen bei maximal 1,50 von 4,00 Punkten liegen.

Qualitative und inhaltliche Analyse der Einzelaufgaben

Nach der numerischen Analyse der Aufgaben werden nun die jeweiligen Inhalte diskutiert. In der einleitenden Passage wurden bereits in kurzen Stichpunkten die globalen Inhalte genannt; diese sollen nun differenzierter aufgeschlüsselt werden:

Aufgabe 1 (Themengebiet „Abbildungen“): Es werden die zentralen Begriffe Injektivität, Surjektivität und Bijektivität einer fest gegebenen Abbildung behandelt. Auf dieser Grundlage wird zudem der Begriff der Umkehrabbildung einer Abbildung thematisiert. Gegenstand der Betrachtung ist die Abbildung

$$f : D \to W, \quad f(x) = x^2.$$

Für diese Abbildung soll jeweils mit variierenden Definitionsbereichen D und Zielmengen W die Injektivität und Surjektivität der entsprechenden Abbildung untersucht werden. Ferner soll entschieden werden, welche der vier Abbildungen umkehrbar ist und die entsprechende Umkehrabbildung samt ihrem Definitions- und Wertebereich angegeben werden. Für den Definitionsbereich D und die Zielmenge W werden die Zahlenbereiche $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen) bzw. $\mathbb{R}_0^+$ (nichtnegative reelle Zahlen) gewählt, so dass sich die erwähnten vier Abbildungen ergeben. Da Teilaufgabe a), die Untersuchung auf Injektivität und Surjektivität der Abbildungen, lediglich zum Ankreuzen ist, ist eine explizite Fehleranalyse schwierig; dennoch zeigen sich gewisse Fehlerstrukturen. Es ergeben sich mehr Fehleranfälligkeiten für den Begriff der Injektivität; die Entscheidung, dass die Abbildungen f_2 und f_4 surjektiv bzw. f_1 und f_3 nicht surjektiv sind, wird besser bearbeitet, da den Studierenden der Graph der Normalparabel bekannt ist und damit entschieden werden kann, ob alle Werte in der Zielmenge ($\mathbb{R}_0^+$ bzw. $\mathbb{R}$) getroffen werden bzw. spezielle Werte nicht erreicht werden. Die Injektivität der Abbildungen kann (eigentlich) ebenfalls mit der Kenntnis des Graphen der Normalparabel entschieden werden, dennoch bereitet dieser Begriff mehr Schwierigkeiten; möglicherweise setzen die Studierenden den Begriff der Injektivität mit dem Begriff einer Abbildung gleich, also dass jedem Wert der Quelle in eindeutiger Weise ein Element im Ziel zugeordnet wird. Dieser Sachverhalt kommt womöglich zum Tragen, da viele Studierende alle vier Abbildung als injektiv bewertet haben. Bei der Begründung, welche der Abbildungen umkehrbar sind und deren Bestimmung, können folgende typische Fehlerbilder erkannt werden: zum einen die fehlende Kenntnis, unter welchen Bedingungen eine Abbildung umkehrbar ist, und zum anderen das fehlende Verständnis für den Zusammenhang von Definitions- und Wertebereich von Abbildung und zugehöriger Umkehrabbildung. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Es ist

Abbildungsvorschrift	injektiv	surjektiv
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2$	☐	☐
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ f_2(x) = x^2$	☐	☒
$f_3 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f_3(x) = x^2$	☒	☐
$f_4 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f_4(x) = x^2$	☒	☒

b) Nur f_4 ist gemäß a) bijektiv und damit umkehrbar. Es ist

$$f_4^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, \quad f_4^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

mit dem Definitionsbereich $W = \mathbb{R}_0^+$ sowie dem Wertebereich $D = \mathbb{R}_0^+$.

Aufgabe 2 (Themengebiet „Abbildungen“): Es werden die zentralen Begriffe Bild bzw. Urbild als Teilmengen von Ziel bzw. Quelle einer Abbildung betrachtet. Es soll zuerst allgemein für eine Abbildung

$$f : N \to M \text{ mit } A \subseteq N \text{ und } B \subseteq M$$

die Definition für die Begriffe Bild von A und Urbild von B unter f geliefert werden. In den Teilaufgaben b) und c) soll dann explizit Bild und Urbild am Beispiel der Normalparabel bestimmt werden. Diese Aufgabe wird wie bereits oben geschildert am schwächsten gelöst, typische Fehlerbilder sind dabei: es ergeben sich Probleme mit der exakten mathematischen Formulierung und Formalisierung bei der Angabe der Definition dieser zentralen Gegenstände. Ferner wird die Bedeutung der Mengen $A \subseteq N$ und $B \subseteq M$ im obigen Kontext nicht verstanden, also ist den Studierenden nicht bewusst, dass das Urbild Teilmenge der Quelle bzw. das Bild Teilmenge des Ziels der Abbildung ist. Besonders auffallend ist die fehlende Kenntnis für den Begriff des Urbildes unter einer Abbildung, was zur fehlerhaften oder fehlenden Bestimmung des Urbildes für das explizit gegebene Beispiel führt. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Seien $f : M \to N$ eine Abbildung sowie $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$. Dann heißt

- $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ das Bild von A unter f,
- $f^{-1}(B) = \{x \in M \mid f(x) \in B\}$ das Urbild von B unter f.

b) Es ist

$$f([-1;2[) = \{f(x) \mid x \in [-1;2[\} = \left\{x^2 \mid -1 \leq x < 2\right\} = [0;4[\,.$$

c) Es ist

$$f^{-1}([1;4[) = \{x \mid f(x) \in [1;4[\} = \left\{x \mid 1 \leq x^2 < 4\right\} = \,]-2;-1] \cup [1;2[\,.$$

Aufgabe 3 (Themengebiet „Rechengesetze der reellen Zahlen“): Es werden die Rechengesetze des Körpers $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen fokussiert. Zentraler Gegenstand ist die Herleitung der ersten und dritten binomischen Formel unter

Berücksichtigung der Rechengesetze der reellen Zahlen, welche die Körperstruktur kennzeichnen; es soll jeweils schrittweise die Gleichheit zwischen

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \qquad \text{und} \qquad (a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$$

hergeleitet werden, wobei Aspekte wie Definition des Quadrats, Kommutativ- und Assoziativgesetze der Addition und Multiplikation, Distributivgesetze sowie die Rolle des neutralen und inversen Elements der Addition berücksichtigt werden sollten. Es sollen für jeden einzelnen Schritt die jeweils verwendeten Rechengesetze des Körpers der reellen Zahlen angegeben werden. Typische Fehlerbilder sind das Weglassen einiger Zwischenschritte bei den entsprechenden Umformungen sowie ungenügende und falsche Begründungen für zulässige Umformungen. Diese Aufgabe gehört zur Gruppe der besser gelösten Aufgaben, überschreitet aber nicht den Kontext der Mittelstufe in der Schule, da die oben erwähnten Gesetze in der Schule unterrichtet werden. Jedoch werden der Begriff des Körpers sowie die Begriffe neutrales und inverses Element bezüglich der Addition nicht im Schulstoff behandelt.

Im Erwartungshorizont liegt etwa:

Für die erste binomische Formel ergibt sich

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) && \textit{(Definition des Quadrats)}\\
&= a\cdot(a+b) + b\cdot(a+b) && \textit{(Distributivgesetz)}\\
&= (a\cdot a + a\cdot b) + (b\cdot a + b\cdot b) && \textit{(Distributivgesetz)}\\
&= a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2 && \textit{(A-Gesetz der Add.)}\\
&= a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2 && \textit{(K-Gesetz der Mult.)}\\
&= a^2 + 2\cdot(a\cdot b) + b^2 && \textit{(Zusammenfassen)}\\
&= a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 && \textit{(A-Gesetz der Mult.);}
\end{aligned}$$

ferner ergibt sich für die dritte binomische Formel

$$\begin{aligned}
(a-b)\cdot(a+b) &= a\cdot(a+b) - b\cdot(a+b) && \textit{(Distributivgesetz)}\\
&= (a\cdot a + a\cdot b) - (b\cdot a + b\cdot b) && \textit{(Distributivgesetz)}\\
&= a^2 + a\cdot b - b\cdot a - b^2 && \textit{(A-Gesetz der Add.)}\\
&= a^2 + (a\cdot b - a\cdot b) - b^2 && \textit{(K-Gesetz der Mult.)}\\
&= a^2 + 0 - b^2 && \textit{(negative Elemente)}\\
&= a^2 - b^2. && \textit{(Rolle der 0)}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Themengebiet: „Beweistechniken“): Grundlegende Thematik sind Aussagen und darauf aufbauend die Anwendung der drei klassischen Beweistechniken. Die Implikation $A \Longrightarrow B$ direkt zu zeigen, gelingt den Studierenden sehr gut; es können keine typischen Fehlerbilder erkannt werden. Die beiden anderen Beweistechniken (indirekter Beweis und Beweis durch Widerspruch) werden häufig verwechselt bzw. die Variante des Widerspruchsbeweises nicht ausreichend ausgeführt. In diesem Fall ist die Implikation $B \Longrightarrow A$ zu zeigen, indem die zu ihrer Negation äquivalente Aussage $B \wedge \neg A$ ad absurdum geführt wird; dieser Aspekt bereitet den Studierenden große Probleme. Der indirekte Beweis der Umkehrung $B \Longrightarrow A$ gelingt besser, in vielen Fällen wird die Äquivalenz von $B \Longrightarrow A$ und $\neg A \Longrightarrow \neg B$ über die äquivalente Kontraposition exakt begründet. Die Angabe zweier schulrelevanter Widerspruchsbeweise scheitert; entweder wird diese Teilaufgabe nicht bearbeitet oder mit falschen Aspekten begründet (meist Angabe direkter Beweise); das am häufigsten genannte Beispiel ist der Widerspruchsbeweis, der zeigt, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, also irrational ist. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Man zeigt die Implikation $A \Longrightarrow B$ direkt über eine geeignete Implikationskette:

$$\begin{aligned} &A: \ z \text{ ist gerade} \Longrightarrow z = 2\,x \text{ für eine ganze Zahl } x \Longrightarrow \\ &3\,z + 1 = 3 \cdot (2\,x) + 1 = 6\,x + 1 = 2 \cdot (3\,x) + 1 \text{ mit } 3\,x \text{ ganz} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow B: \ 3\,z + 1 \text{ ist ungerade.} \end{aligned}$$

b) Man zeigt die Umkehrung $B \Longrightarrow A$ indirekt über deren dazu äquivalente Kontraposition:

$$\begin{aligned} &\neg A: \ z \text{ ist ungerade} \Longrightarrow z = 2\,y + 1 \text{ für eine ganze Zahl } y \Longrightarrow \\ &3\,z + 1 = 3 \cdot (2\,y + 1) + 1 = 6\,y + 4 = 2 \cdot (3\,y + 2) \ \text{ mit } 3\,y + 2 \text{ ganz} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Longrightarrow \neg B: \ 3\,z + 1 \text{ ist gerade.} \end{aligned}$$

c) Man zeigt die Umkehrung $B \Longrightarrow A$, indem man die zu ihrer Negation äquivalente Aussage $B \wedge \neg A$ ad absurdum führt:

Man geht von B aus, man betrachtet also eine ganze Zahl z mit $3\,z + 1$ ungerade, und nimmt zum Widerspruch $\neg A$ an, also dass z selbst ungerade ist. Damit ist $z = 2\,y + 1$ für eine ganze Zahl y, und man erhält

$$3\,z + 1 = 3 \cdot (2\,y + 1) + 1 = 6\,y + 4 = 2 \cdot (3\,y + 2) \ \text{ mit } 3\,y + 2 \text{ ganz;}$$

folglich ist $3\,z + 1$ gerade, im Widerspruch zu B.

d) Klassische Widerspruchsbeweise im Kontext der Schulmathematik sind etwa die Irrationalität von $\sqrt{2}$ sowie der Beweis nach Euklid, dass es unendlich viele Primzahlen gibt (beide Beweise sind im Rahmen der Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ behandelt worden).

Aufgabe 5: (Themengebiet: „Vollständige Induktion“): Zentraler Gegenstand dieser Aufgabe ist das Beweisprinzip der vollständigen Induktion im Rahmen des Zahlenbereichs der natürlichen Zahlen. Teilaufgabe a) wird nur unzureichend beantwortet, da in vielen Fällen die Beweismethode der vollständigen Induktion nicht mit Aussagentypen über den natürlichen Zahlen in Verbindung gebracht wird. Damit scheint die fundamentale Struktur der Methode nicht verstanden worden zu sein. Im Übungsbetrieb während der Vorlesung konnten die Studierenden die Methode relativ sicher auf Beispiele anwenden, obwohl anscheinend grundlegende Voraussetzungen nicht bekannt sind. Der zweite Teilaspekt wird besser gelöst, da die Peano-Axiome als Grundlage genannt werden. Da die beiden letzten Teilaufgaben in einem engen Zusammenhang stehen, weist auch Teilaufgabe c) ein ähnliches Leistungsbild auf; die in b) zu nennenden Peano-Axiome werden dann in Teilabschnitt c) verletzt, weswegen Aufgabe c) mit einem Gegenbeispiel zu widerlegen ist. Diese Aufgabe wird insgesamt sehr schwach beantwortet, obwohl diese Thematik einen großen Teil der entsprechenden Vorlesung eingenommen hat. Häufig werden völlig zusammenhanglose Antworten gegeben, die in keinem Kontext mit der Aufgabe stehen; dies erschwert eine klare Charakterisierung typischer Fehler. Es bleibt der Eindruck, dass das grundlegende Verständnis für diese Beweismethode fehlt. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Die vollständige Induktion ist ein Beweisprinzip für Aussagen über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$; damit lässt sie sich auf Aussagentypen in den natürlichen Zahlen anwenden. Ihr Prinzip lautet: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage; dabei gelte:

   - *Induktionsanfang:* $A(1)$ ist wahr.
   - *Induktionsschritt:* für jedes beliebige $n \in \mathbb{N}$ gilt: ist $A(n)$ wahr *(Induktionsvoraussetzung)*, so ist auch $A(n+1)$ wahr *(Induktionsbehauptung)*.

b) Grundlage der vollständigen Induktion sind die Peano-Axiome. Dieser Zählprozess

   - beginnt bei einer ersten natürlichen Zahl: es ist $1 \in \mathbb{N}$;
   - wird bei jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit derem eindeutig bestimmten Nachfolger $n' \in \mathbb{N}$ fortgesetzt;
   - trifft nicht mehrmals auf dieselbe natürliche Zahl: für alle m, $n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ ist auch $m' \neq n'$;
   - kehrt nicht zur ersten natürlichen Zahl zurück: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n' \neq 1$;
   - schöpft insgesamt alle natürlichen Zahlen aus: für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $1 \in M$, die mit jedem $n \in M$ auch $n' \in M$ enthält, gilt $M = \mathbb{N}$.

c) Im Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist etwa der zweite Aspekt der Peano-Axiome verletzt. Der Zählprozess scheitert, da im Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen das Vorgänger/Nachfolger-Prinzip nicht existent ist.

Aufgabe 6 (Themengebiet: „Kombinatorik“): Die grundlegende Thematik beruht auf einem Urnenexperiment; es handelt sich um das Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln mit bzw. ohne Wiederholung sowie mit bzw. ohne Beachtung der Reihenfolge. In Teilaufgabe a) soll unter Berücksichtigung der Aspekte Reihenfolge und Wiederholung die Anzahl an Möglichkeiten der Ergebnisse für obiges Urnenexperiment angegeben werden; dies gelingt größtenteils recht gut bzw. es liegt kein Bearbeitungsvorschlag vor. Die Fälle „Ziehen mit Reihenfolge und mit Wiederholung“ sowie „Ziehen ohne Reihenfolge und ohne Wiederholung“ werden relativ sicher mit den richtigen Formeln beschrieben, die übrigen beiden Typen „Ziehen mit Reihenfolge und ohne Wiederholung“ sowie „Ziehen ohne Reihenfolge und mit Wiederholung“ werden teils verwechselt oder teils falsch formalisiert, da die Rollen von k und n nicht korrekt interpretiert werden. In Teilaufgabe b) werden häufig richtige Beispiele für die jeweiligen Fälle angedacht, die aber durch fehlende Aspekte in der Formulierung nicht als vollständig korrekt angesehen werden können. In Teilaufgabe c) soll der Begriff „Permutationen“ im Rahmen eines Urnenexperiments interpretiert werden. In sehr vielen Fällen wird die Aufgabe nicht bearbeitet, da den Studierenden der Kontext der Aufgabe nicht klar ist; ferner zielen einige Ausführungen an der Thematik vorbei. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Folgende Übersicht stellt die vier Fälle für obiges Urnenexperiment unter den Aspekten Reihenfolge bzw. Wiederholung mit Hilfe allgemeiner Formeln dar.

Übersicht	ohne Wiederholung	mit Wiederholung
mit Reihenfolge	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
ohne Reihenfolge	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

b) An eine Gruppe von 10 Personen sollen 3 Konzertkarten ausgegeben werden. Wie viele Möglichkeiten der Kartenverteilung gibt es, wenn

- es 3 nummerierte Sitzplätze bzw. 3 unnummerierte Stehplätze sind,
- jede Person höchstens eine bzw. auch mehrere Karten erhalten kann?

Wir ziehen aus einer Urne mit $n = 10$ Kugeln (Personen) insgesamt $k = 3$ Kugeln (Konzertkarten) und haben die folgenden Fälle zu unterscheiden:

	höchstens eine Karte (ohne Wiederholung)	mehrere Karten (mit Wiederholung)
nummerierte Sitzpl. (mit Reihenfolge)	$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$	$10^3 = 1.000$
unnummerierte Stehpl. (ohne Reihenfolge)	$\binom{10}{3} = 120$	$\binom{10+3-1}{3} = 220$

c) Aus einer Urne mit n Kugeln, durchnummeriert von 1 bis n, werden alle n Kugeln ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge gezogen.

6.1.2 Zweite Testerhebung zu Grundlagen der Mathematik I

Vorstellung der Testaufgaben

Die zweite Testerhebung besteht wiederum aus sechs Aufgaben mit unterschiedlicher Gewichtung bei 24,00 Gesamtpunkten; die Punkte für jede Einzelaufgabe sind der nachfolgenden Darstellung zu entnehmen.

1. a) Man gebe zwei Möglichkeiten an, wie der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen a und b bestimmt werden kann. (1)

   b) Man formuliere den „Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie“. Bei welcher der obigen Bestimmungsmethoden geht dieser Satz ein? Welcher Satz ist für die andere Methode grundlegend? (2)

   c) Wie lässt sich das $\mathrm{kgV}(a, b)$ aus dem $\mathrm{ggT}(a, b)$ bestimmen? (1)

   d) Warum gibt es für zwei natürliche Zahlen a und b stets einen größten gemeinsamen Teiler sowie ein kleinstes gemeinsames Vielfaches? (1)

2. Man betrachte die Primfaktorzerlegungen der beiden natürlichen Zahlen

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot p_4^{k_4} \qquad \text{und} \qquad b = p_1^{\ell_1} \cdot p_2^{\ell_2} \cdot p_3^{\ell_3}$$

   mit den natürlichen Exponenten $k_1, \ldots, k_4$ und $\ell_1, \ldots, \ell_3$; ferner seien n_1 und n_2 natürliche Zahlen.

   a) Man bestimme $\mathrm{kgV}(a, b)$ und $\mathrm{ggT}(a, b)$. (2)

   b) Welche Bedeutung hat das $\mathrm{kgV}(n_1, n_2)$ für zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{z_1}{n_1}$ und $\frac{z_2}{n_2}$? Wo findet diese Verwendung? (1)

3. a) Man gebe zwei gleichwertige Charakterisierungen für den Begriff „Primzahl“ an. (2)

   b) Man entscheide mit Begründung, ob $2^{1000} - 1$ eine Primzahl ist. (2)

4. a) In welcher Eigenschaft unterscheiden sich die algebraischen Strukturen „kommutativer Ring“ $(R, +, \cdot)$ und „Körper“ $(K, +, \cdot)$? (1)

   b) Man zeige anhand zweier geeigneter Zahlenbereiche den in a) erwähnten Unterschied zwischen $(R, +, \cdot)$ und $(K, +, \cdot)$. (2)

   c) Man betrachte einen angeordneten Körper $(K, +, \cdot, <)$. Man formuliere das Monotoniegesetz der Addition und das Monotoniegesetz der Multiplikation. (1)

5. Man gebe je ein Beispiel für eine Gleichung mit natürlichen Parametern an,

   a) die im Zahlenbereich $\mathbb{Z}$, jedoch nicht im Zahlenbereich $\mathbb{N}$ lösbar ist, (1)

   b) die im Zahlenbereich $\mathbb{Q}$, jedoch nicht im Zahlenbereich $\mathbb{Z}$ lösbar ist, (1)

   c) die im Zahlenbereich $\mathbb{R}$, jedoch nicht im Zahlenbereich $\mathbb{Q}$ lösbar ist, (1)

   d) die im Zahlenbereich $\mathbb{C}$, jedoch nicht im Zahlenbereich $\mathbb{R}$ lösbar ist. (1)

   e) Man ordne die Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ in einer sinnvollen Beziehung zueinander an. (1)

6. a) Auf der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ bestimme man die Definitionsmenge D sowie die Lösungsmenge L für die Gleichung $\dfrac{3\,x - 4}{x - 3} - 4 = \dfrac{5 - 2\,x}{2\,x}$. (2)

   b) Man formuliere den allgemeinen Zusammenhang zwischen Grundmenge G, Definitionsmenge D sowie Lösungsmenge L einer Gleichung. (1)

Quantitative Analyse der Punkteverteilung

Folgende Graphik stellt die Gesamtverteilung der Leistungen der 108 teilnehmenden Studierenden in dieser Testerhebung dar; dabei werden die zu erreichenden 24,00 Punkte in Halbpunktschritten auf der Rechtswertachse gegen die Anzahl an Studierenden, welche die entsprechende Punktzahl erzielt haben, abgetragen.

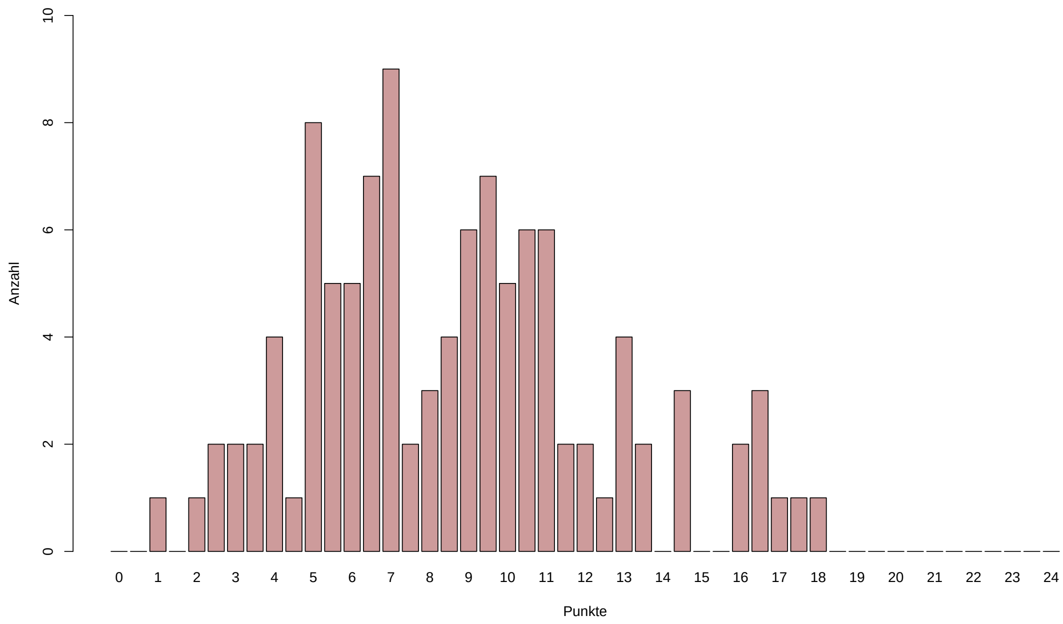

Abbildung 6.4: Punkteverteilung der zweiten Testerhebung (I)

Folgende Übersicht gibt einen Eindruck über die erzielten Leistungen:

- das arithmetische Mittel liegt bei 8,66 Punkten,
- der Median liegt bei 8,50 Punkten,
- mit $\bar{x} \approx x_{med} \approx x_{mod}$ liegt eine relativ symmetrische Verteilung vor,
- die Spannweite der Punkte beträgt $d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 18{,}00 - 1{,}00 = 17{,}00$,
- die mittlere Hälfte der erzielten Leistungen wird durch den Interquartilabstand $d_Q = x_{0{,}75} - x_{0{,}25} = 14{,}00 - 8{,}50 = 5{,}50$ beschrieben,
- die Streuung der Punkte beträgt 3,77 Punkte um das arithmetische Mittel.

Die Verteilung kann noch als symmetrisch eingestuft werden, obwohl der Modalwert $x_{mod} = 7{,}00$ etwa 1,50 Punkte vom Median x_{med} und vom arithmetischen Mittelwert $\bar{x}$ abweicht (die Verteilung ist leicht linkssteil). Das oberste Viertel der Punkte (ab 18,50 Punkten) wird von keinem Teilnehmenden erreicht; im unteren Punktebereich (bis 6,00 Punkte) liegen hingegen einige Ergebnisse. Die Leistungen können insgesamt als sehr schwach eingestuft werden, da der Median x_{med} sowie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ etwa bei einem Drittel der Maximalpunktzahl liegen. Die Ergebnisse dürften bei weitem nicht ein so schwaches Gesamtbild abgeben, da die Inhalte wiederum kaum die Grenzen der Schulmathematik überschreiten und die geprüften Gebiete eingehend in der Vorlesung besprochen wurden. Die folgende

Beschreibung der Einzelaufgaben soll einen Einblick in deren Struktur, Inhalt und Fehlerbilder geben.

Quantitative Analyse der Einzelaufgaben

Für die Analyse der sechs Einzelaufgaben wird wie bei der ersten Testerhebung auf eine Tabelle mit typischen Lagemaßen und die beiden Graphiken zurückgegriffen. Die numerischen Werte geben eine erste Tendenz, wie die einzelnen Aufgaben ausgefallen sind.

Tabelle 6.2: Lagemaße der Einzelaufgaben für die zweite Testerhebung (I)

Lagemaße	A1	A2	A3	A4	A5	A6
x_{min}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$x_{0,25}$	1,00	0,00	1,00	0,00	2,00	1,50
x_{med}	1,50	0,00	1,00	0,00	3,50	2,00
$\bar{x}$	1,41	0,55	0,92	0,77	3,09	1,93
$x_{0,75}$	2,00	1,00	1,00	1,00	4,00	2,50
x_{max}	3,50	3,00	2,50	4,00	5,00	3,00
max. Punktzahl	5,00	3,00	4,00	4,00	5,00	3,00

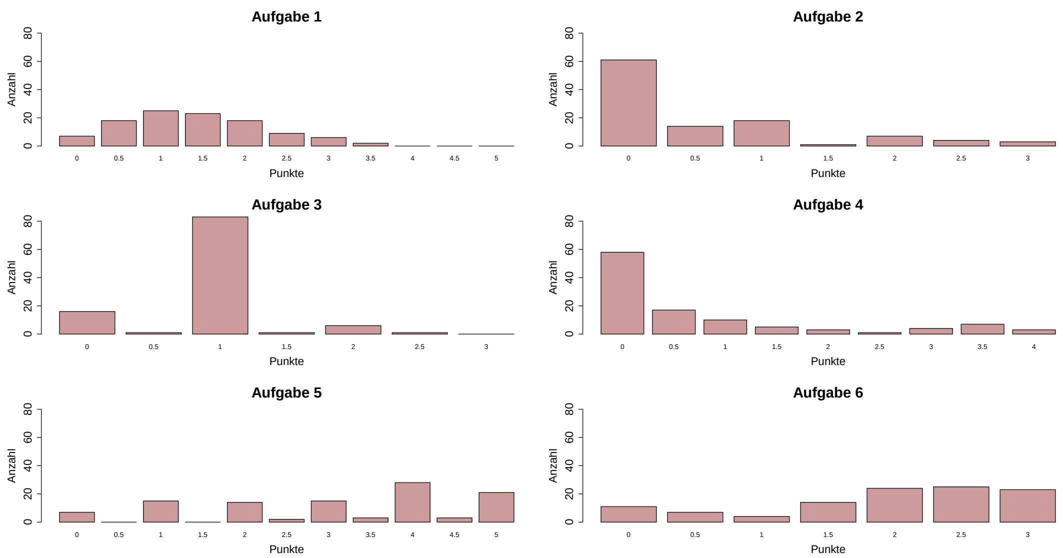

Abbildung 6.5: Punkteverteilung der Einzelaufgaben für die zweite Testerhebung (I)

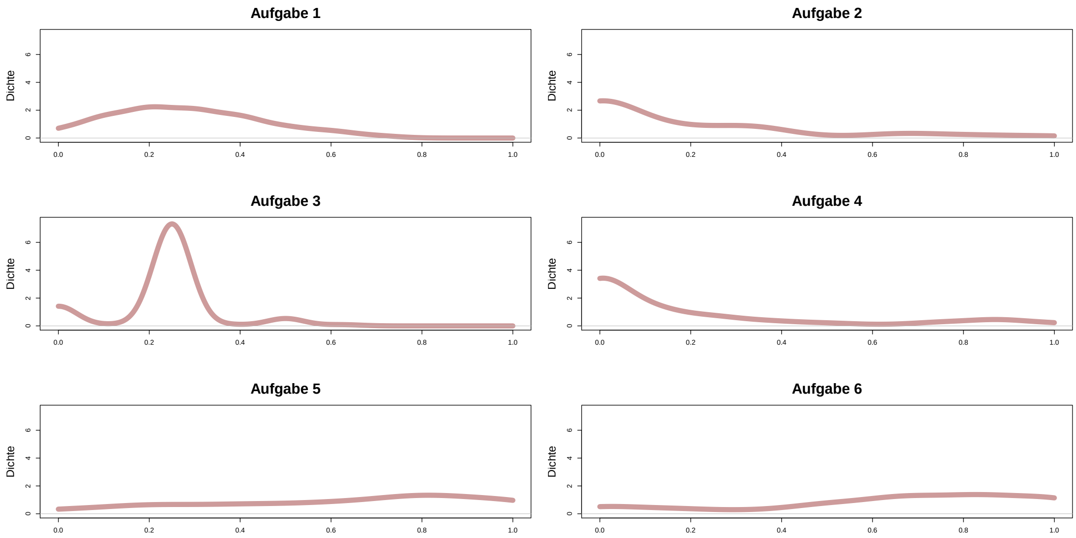

Abbildung 6.6: Dichtekurven der Einzelaufgaben für die zweite Testerhebung (I)

Die Auswertung der Einzelaufgaben zeigt eine dreigliedrige Einteilung:

- vergleichsweise gut werden die Aufgaben 5 und 6 bearbeitet,
- vergleichsweise mittelmäßig bearbeitet werden die Aufgaben 1 und 3,
- vergleichsweise schwach bearbeitet werden die Aufgaben 2 und 4.

Im Gesamtbild zeigen die beiden Aufgaben 5 und 6 die vergleichsweise besten Ergebnisse. So erreichen bei Aufgabe 5 genau zwei Drittel der Teilnehmenden mehr als die Hälfte der Maximalpunktzahl, gut ein Fünftel punktet sogar voll. Ein sehr ähnliches Ergebnis zeigt sich bei Aufgabe 6; in diesem Fall zeigt der Kern-Dichteschätzer die sehr ähnlichen Ergebnisse deutlich besser als das Säulendiagramm; dieses Diagramm veranschaulicht bei der vorletzten Aufgabe, dass fast ausschließlich ganze Punktzahlen verbucht werden. Damit ist diese Darstellung für die Vergleichbarkeit (zudem liegen in beiden Aufgaben verschiedene Gesamtpunkte vor) nicht besonders vorteilhaft; die ähnlichen numerischen Ergebnisse korrespondieren sehr gut mit den Dichteverteilungen. Für beide Aufgaben liegen die Lagemaße x_{med} und $\bar{x}$ über der Hälfte der maximal zu erzielenden Punktzahl, das 75 %-Quantil sogar über 80 % der entsprechenden Maximalpunktzahl.

In den mittleren Bereich fallen die Aufgaben 1 und 3; bei Aufgabe 1 erzielen die Studierenden zum größten Teil nicht einmal die Hälfte der Maximalpunkte; am häufigsten wird etwa bei einem Viertel der Maximalpunktzahl (im Kern-Dichteschätzer bei $x \approx 0{,}25$) gepunktet; dies entspricht 1,00 bzw. 1,50 Punkten. Drei oder mehr Punkte und damit mehr als die Hälfte der zu erreichenden Punktzahl erzielen lediglich acht Studierende. Bei Aufgabe 3 bleiben etwa 93 % der Studierenden unter der Hälfte der zu erreichenden drei Punkte; dies ist vor allem durch die ausgeprägte Häufigkeit der Punktzahl 1,00 bedingt, die in über drei Viertel der Fälle erbracht wird. Damit erklären sich auch die Auffälligkeiten in den Diagrammen bei Aufgabe 3 sowie der Median ($x_{med} = 1{,}00$) als auch das arithmetische Mittel ($\bar{x} = 0{,}92$).

Analysiert man die Leistungen bei den Aufgaben 2 und 4 (schwach bearbeitet), erkennt man, dass in beiden Fällen über die Hälfte der Personen (57 % und 54 %) mit null Punkten abschneidet; ferner können fünf Sechstel bzw. drei Viertel der Personen nicht die Hälfte der jeweiligen Maximalpunktzahl erzielen. Prägnant sind neben den beiden Medianen mit dem Wert $x_{med} = 0{,}00$ auch die beiden schwachen arithmetischen Mittel mit $\bar{x} = 0{,}55$ (bei Aufgabe 2 mit drei zu erreichenden Punkten) und $\bar{x} = 0{,}77$ (bei Aufgabe 4 mit vier zu erreichenden Punkten). In beiden Aufgaben können jeweils lediglich drei Personen die jeweilige Maximalpunktzahl erzielen. Das Säulendiagramm mit den beiden entsprechenden Verteilungen stützt diese Befunde, beispielsweise erkennt man in beiden Fällen etwa 60 Personen mit Minimalpunktzahl.

Qualitative und inhaltliche Analyse der Einzelaufgaben

Nachdem der Leistungsstand der Studierenden für jede Einzelaufgaben geschildert wurde, interessieren im Folgenden die jeweiligen Inhalte. Zu Beginn des Kapitels wurden in einer kurzen Aufzählung bereits grob die Inhalte dargestellt; nun gilt es aber, diese noch differenzierter für jede Aufgabe aufzugliedern:

Aufgabe 1 (Themengebiet „Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie“): Zentrale Thematik ist der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie samt der Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers ggT und dessen Zusammenhang mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen kgV. Die Bestimmungsmethoden für den ggT der natürlichen Zahlen a und b können größtenteils sicher formuliert sowie der Zusammenhang zwischen ggT und kgV hergestellt werden; dabei zeigen sich keine auffälligen Fehlerbilder. Die Formulierung des Hauptsatzes der elementaren Zahlentheorie scheitert größtenteils, da die Kernaussage des Satzes nicht stringent wiedergegeben wird bzw. wesentliche Aspekte nicht bekannt zu sein scheinen. Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie besagt, dass jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ mit $a > 1$ eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren); falls der Satz formuliert wird, fehlen häufig die Aspekte, dass $a > 1$ sein muss und die Primfaktorzerlegung nicht nur existiert, sondern auch eindeutig ist. Ferner werden Schilderungen wie „zwei natürliche Zahlen besitzen immer einen größten gemeinsamen Teiler und ein kleinstes gemeinsames Vielfaches“ als Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie formuliert; die Lösungsvorschläge sind unbefriedigend, da dieser zentrale Satz einer der Hauptbestandteile und fundamentalsten Erkenntnisse der entsprechenden Vorlesung ist. Die letzte Teilaufgabe wird kaum bearbeitet, weil das Wissen und die entsprechende Argumentationsstrategie fehlen. Dennoch nimmt diese Aufgabe einen mittleren Platz im gesamten Leistungsbild der Ergebnisse der zweiten Testerhebung ein. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen a und b kann

- mit Hilfe der eindeutigen Primfaktorzerlegung von a und b,
- mit Hilfe des euklidischen Algorithmus mit a und b

erfolgen.

b) Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie lautet:

„Jede natürliche Zahl $a > 1$ besitzt (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) genau eine Primfaktorzerlegung.“

Der Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie geht bei der Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen a und b mit Hilfe der Primfaktorzerlegung einher. Für die Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen a und b mit Hilfe des euklidischen Algorithmus geht die Existenz der Division mit Rest ein.

c) Für zwei natürlichen Zahlen a und b gilt

$$\mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b) = a \cdot b \iff \mathrm{kgV}(a,b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}(a,b)}.$$

d) Da 1 Teiler der natürlichen Zahlen a und b ist, gilt $1 \in T(a) \cap T(b)$, also $T(a) \cap T(b) \neq \emptyset$. Die gemeinsamen Teiler von a und b sind stets kleiner oder gleich a und b, also besitzt die Menge $T(a) \cap T(b)$ nur endlich viele Elemente, und damit stets ein größtes Element. Wegen $a \cdot b \in V(a) \cap V(b)$ gilt $V(a) \cap V(b) \neq \emptyset$, also existiert nach dem Wohlordnungsprinzip stets ein kleinstes Element in dieser Menge.

Aufgabe 2 (Themengebiet „Primfaktorzerlegung“): Diese Aufgabe behandelt die Primfaktorzerlegung zweier natürlicher Zahlen und die Anwendung dieser Zerlegung auf schulrelevante Themen. Die erste Teilaufgabe wird sehr schwach gelöst; möglicherweise verlangt die allgemeine Aufgabenstellung zu viel Abstraktionsvermögen, was im vorliegenden Fall nicht vorhanden ist. Insgesamt kann der Bezug zwischen den gegebenen natürlichen Zahlen a und b zu den Objekten $\mathrm{ggT}(a,b)$ und $\mathrm{kgV}(a,b)$ nicht hergestellt werden, da die Beziehungen

$$\mathrm{ggT}(a,b) = p_1^{\min(k_1,\ell_1)} \cdot p_2^{\min(k_2,\ell_2)} \cdot p_3^{\min(k_3,\ell_3)}$$

und

$$\mathrm{kgV}(a,b) = p_1^{\max(k_1,\ell_1)} \cdot p_2^{\max(k_2,\ell_2)} \cdot p_3^{\max(k_3,\ell_3)} \cdot p_4^{k_4}$$

nicht bekannt sind; insgesamt treffen die Lösungsansätze nicht annähernd den Kern der korrekten Argumentation. Den Bezug zum Hauptnenner der beiden gegebenen vollständig gekürzten Brüche über das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Nenner n_1 und n_2 können viele Studierende ebenfalls nicht herstellen, obwohl diese Thematik bereits Inhalt der sechsten Jahrgangsstufe ist. Eine etwaige Veranschaulichung an einem konkreten Beispiel hätte diesen Zusammenhang aufgezeigt. Dies zeigt auch, dass die Studierenden Schwierigkeiten haben, gelernte Inhalte auf den Schulstoff (was in der Vorlesung nicht thematisiert wird) anzuwenden bzw. zu transferieren. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Es ist

$$\mathrm{kgV}(a,b) = p_1^{\max(k_1,\ell_1)} \cdot p_2^{\max(k_2,\ell_2)} \cdot p_3^{\max(k_3,\ell_3)} \cdot p_4^{k_4}$$

sowie

$$\mathrm{ggT}(a,b) = p_1^{\min(k_1,\ell_1)} \cdot p_2^{\min(k_2,\ell_2)} \cdot p_3^{\min(k_3,\ell_3)}.$$

b) Für zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{z_1}{n_1}$ und $\frac{z_2}{n_2}$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Nenner $\mathrm{kgV}(n_1, n_2)$ der Hauptnenner dieser Brüche. Verwendung findet diese Beziehung bei der Addition und Subtraktion sowie bei der Anordnung von Brüchen.

Aufgabe 3 (Themengebiet: „Primzahlen“): Für einen der zentralen Begriffe der entsprechenden Vorlesung, nämlich den Begriff der Primzahl, sollen zwei gleichwertige Charakterisierungen angegeben und daraufhin entschieden werden, ob eine gegebene Zahl eine Primzahl darstellt. Die Leistungen in dieser Aufgabe sind gemäß der dargestellten Diagramme sehr auffällig; sehr häufig wird die Bewertung mit einem von vier möglichen Punkten erreicht. Dies ergibt sich, da die „Schuldefinition“ für eine Primzahl angegeben wird, sonst aber keine gleichwertige Charakterisierung ergänzt werden kann; die korrekte Entscheidung samt schlüssiger Begründung, dass $2^{1000} - 1$ keine Primzahl ist, wird von genau einer Person geliefert. Für diese Aufgabe kann kein typisches Fehlerbild festgestellt werden, da meist nur genau eine Definition (zwei gleichwertige Charakterisierungen werden von der Aufgabenstellung gefordert) für den Begriff Primzahl gegeben wird und die Entscheidung, ob die gegebene Zahl eine Primzahl ist, häufig geraten und dabei keine bzw. eine ungenügende Begründung gegeben wird. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Zwei gleichwertige Charakterisierungen für den Begriff „Primzahl“ sind:

- Natürliche Zahlen, die genau zwei Teiler besitzen, heißen Primzahlen.
- $p \geq 2$ heißt Primelement, wenn für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid (a \cdot b)$ stets $p \mid a$ oder $p \mid b$ gilt; ein positives Primelement heißt Primzahl.

b) Nach der dritten binomischen Formel ergibt sich

$$2^{1000} - 1 = (2^{500} - 1) \cdot (2^{500} + 1),$$

weswegen die natürliche Zahl $2^{1000} - 1$ mehr als zwei Teiler besitzt und folglich keine Primzahl darstellt.

Aufgabe 4 (Themengebiet: „Eigenschaften algebraischer Strukturen“): Zu erläutern ist der charakteristische Unterschied zwischen den beiden elementaren algebraischen Strukturen kommutativer Ring $(R, +, \cdot)$ und Körper $(K, +, \cdot)$. Ferner sollen für einen angeordneten Körper $(K, +, \cdot, <)$ die Monotoniegesetze der Addition und der Multiplikation formuliert werden. Da viele Studierende die grundlegenden Eigenschaften der beiden algebraischen Strukturen kommutativer Ring und Körper nicht kennen, kann der Unterschied, dass nur im Körper $(K, +, \cdot)$ für jedes $a \in K \setminus \{0\}$ ein multiplikativ inverses Element existiert, nicht erläutert werden. Die Antworten sind völlig bezuglos wie beispielsweise, dass der Körper K mehr Elemente besitzt als der Ring R, so dass typische Fehler nicht herausgestellt werden können. Ferner kann in den meisten Fällen diesen beiden algebraischen Strukturen auch kein expliziter Zahlenbereich zugeordnet werden; den Unterschied an den Beispielen darzustellen, stellt eine Folgerung respektive Anwendung aus Teilaufgabe a) dar und scheitert daher ebenfalls. Die Formulierung der Monotoniegesetze der Addition und Multiplikation kann besser bearbeitet werden als die anderen Teilaspekte. Ein typischer Fehler bei der Argumentation für beide Gesetzmäßigkeiten ist die fehlende Quantifizierung der Körperelemente, da jeweils eine All-Aussage vorliegt. Für das Monotoniegesetz der Multiplikation

$$\text{für alle } a, b, c \in K \text{ mit } a < b \text{ und } 0 < c \text{ gilt } a \cdot c < b \cdot c$$

wird die Formulierung häufig erbracht, aber der zentrale Aspekt für das Körperelement c mit $0 < c$ fast immer vergessen, was in diesem Zusammenhang einen entscheidenden Fehler darstellt. Insgesamt kann diese Aufgabe in die Gruppe der schwach bearbeiteten Aufgaben eingestuft werden.

Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Für alle $a \in K \setminus \{0\}$ existiert ein multiplikativ inverses Element in K; diese Aussage gilt für den kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ nicht zwingend, da nicht jedes Element $a \in R \setminus \{0\}$ ein multiplikativ inverses Element in R besitzen muss.

b) Der kommutative Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der ganzen Zahlen besitzt etwa zu $5 \in \mathbb{Z}$ kein multiplikativ inverses Element, da $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$ mit $5 \cdot \frac{1}{5} = 1 = \frac{1}{5} \cdot 5$. Dagegen besitzt jedes Element $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein multiplikativ inverses Element a^{-1}. Die Menge der reellen Zahlen ist ein Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

c)
- Für alle a, b, $c \in K$ mit $a < b$ gilt $a + c < b + c$ *(Monotoniegesetz der Addition).*
- Für alle a, b, $c \in K$ mit $a < b$ und $0 < c$ gilt $a \cdot c < b \cdot c$ *(Monotoniegesetz der Multiplikation).*

Aufgabe 5: (Themengebiet: „Gleichungslehre im Kontext der Zahlenbereichserweiterung“): Zentraler Kernpunkt dieser Aufgabe stellt das Lösen von Gleichungen in speziell vorgegebenen Zahlenbereichen dar; ferner sollen diese Zahlenbereiche in eine Beziehung zueinander gestellt werden. Ein typisches Fehlerbild zeigt sich darin, dass die Voraussetzung der natürlichen Parameter übersehen und damit die Aufgabenstellung in diesem Sinn falsch interpretiert wird. In der Regel können passende Beispiele für die Teilaufgaben a) bis c) gegeben werden, aber in vielen Fällen scheitert die Angabe einer Gleichung für das letzte Beispiel. Es zeigen sich unzureichende Kenntnisse für den Zahlenbereich der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, vor allem in der Interpretation bzw. Vorstellung, dass im Körper der komplexen Zahlen Quadrate negativ sein können. Gerade dieser Aspekt motiviert die Zahlenbereichserweiterung von den reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen; im ersten Teil des Vorlesungszyklus wird dieser Sachverhalt im Rahmen der grundlegenden Begrifflichkeiten und Methoden aufgegriffen und im zweiten bei der Besprechung des Körpers der komplexen Zahlen intensiviert. Die sinnvolle Anordnung der gegebenen fünf Zahlenbereichen gelingt hingegen sehr gut. Im Gesamtbild nimmt diese Aufgabe eine Position in den gut gelösten Aufgaben ein. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Die Gleichung $x + 1 = 0 \iff x = -1 \in \mathbb{Z}$ ist in $\mathbb{Z}$, wegen $-1 \notin \mathbb{N}$ jedoch nicht in $\mathbb{N}$ lösbar.

b) Die Gleichung $2 \cdot x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ ist in $\mathbb{Q}$, wegen $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ jedoch nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar.

c) Die Gleichung $x^2 - 2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ist in $\mathbb{R}$, wegen $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ jedoch nicht in $\mathbb{Q}$ lösbar.

d) Die Gleichung $x^2 + 1 = 0 \iff x^2 = -1 \iff x = \pm i$ ist in $\mathbb{C}$, wegen $\pm i \notin \mathbb{R}$ jedoch nicht in $\mathbb{R}$ lösbar.

e) Es ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 6 (Themengebiet: „Grundlagen der Gleichungslehre“): Grundlage dieser Aufgabenstellung ist eine Bruchgleichung, deren Definitions- und Lösungsmenge über einer gegebenen Grundmenge bestimmt werden soll; ferner soll der allgemeine Zusammenhang dieser drei für eine (beliebige) Gleichung charakteristischen Mengen dargestellt werden. Für die gegebene Bruchgleichung sollen Definitions- und

Lösungsmenge bestimmt werden, was auch größtenteils fehlerfrei durchgeführt wird. Diese Aufgabe verläuft nach einem Schema; dieser Aufgabentyp wird in der Vorlesung im Rahmen der Rechengesetze von Körpern $(K, +, \cdot)$ besprochen. Dennoch können auch bei dieser eher einfachen Aufgabenstellung Rechenfehler, aber auch elementare Bruchstellen in der Lösungsstrategie dieses Gleichungstyps festgestellt werden. Die Definitionsmenge wird in der Regel richtig bestimmt, indem die Nenner auf beiden Seiten der Bruchgleichung betrachtet und die entsprechenden Belegungen reeller Zahlen ausgeschlossen werden, welche für die Terme (Nenner) jeweils den Termwert 0 liefern. Die unzureichenden Lösungsstrategien zeigen sich in der fehlenden Bildung des Hauptnenners auf der linken Seite der Gleichung (auch wenn dieser Lösungsweg nicht der einzig mögliche ist). Oft wird die Gleichung unsystematisch mit äquivalenten aber nicht zielführenden Umformungen manipuliert und nicht final gelöst, da die nun vorliegende Gleichung deutlich schwieriger scheint. In der abschließenden Teilaufgabe soll der allgemeine Zusammenhang zwischen Grundmenge G, Definitionsmenge D sowie Lösungsmenge L einer Gleichung geschildert werden; einige Studierende können keinerlei Zusammenhang herstellen, sie sehen diese drei charakteristischen Mengen einer Gleichung völlig losgelöst voneinander und können keinen gegenseitigen Bezug erkennen. Viele Lösungen scheitern zudem an der sauberen Formalisierung, da die gewünschte Beziehung $L \subseteq D \subseteq G$ nicht mit korrekten Mengensymbolen formuliert werden kann. Diese Aufgabe kann in den vergleichsweise guten Bereich eingestuft werden; dennoch muss beachtet werden, dass diese Aufgabe von Lernenden der Mittelstufe der Schule fehlerfrei gelöst werden müsste. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Die Definitionsmenge ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$; für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$ ergibt sich

$$\frac{3\,x-4}{x-3} - 4 = \frac{5-2\,x}{2\,x} \iff \frac{3\,x-4-4\cdot(x-3)}{x-3} = \frac{5-2\,x}{2\,x}$$
$$\iff \frac{-x+8}{x-3} = \frac{5-2\,x}{2\,x} \iff (-x+8)\cdot 2\,x = (5-2\,x)\cdot(x-3) \iff$$
$$-\,2\,x^2 + 16\,x = -2\,x^2 + 11\,x - 15 \iff 5\,x = -15 \iff x = -3;$$

damit ergibt sich als Lösungsmenge $L = \{-3\}$.

b) Es gilt $L \subseteq D \subseteq G$.

6.2 Testerhebungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“

Die im Folgenden dargestellten Testerhebungen beziehen sich thematisch auf die Inhalte der Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“, welche im Sommersemester 2011 gehalten wurde. Beide Testerhebungen sind einheitlich mit 24,00 Punkten bewertet. Diese fanden an einem Termin (nach vier Semesterwochen Mitte November 2011) statt, wodurch in beiden Erhebungen (bis auf wenig verfrühte Abgaben) gleiche Teilnehmerzahlen herrschen. Folgende Schwerpunktthemen werden in den Testerhebungen behandelt: in der ersten sind die zentralen Gebiete

- Relationen: Relation als Graph einer Abbildung, Äquivalenzrelation und Ordnung,
- Laplacewahrscheinlichkeiten,
- hypergeometrische und Binomialverteilung,
- bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

sowie in der zweiten

- Eigenschaften von Kongruenzabbildungen und Ähnlichkeitsabbildungen,
- Satzgruppe des Pythagoras,
- Kommensurabilität und angeordnete Körper,
- trigonometrische Beziehungen am regulären Dreieck,
- komplexe Zahlen: Lösbarkeit quadratischer Gleichungen, Polardarstellung sowie Real- und Imaginärteildarstellung, $\mathbb{C}$ als Beispiel für einen nicht angeordneten Körper.

6.2.1 Erste Testerhebung zu Grundlagen der Mathematik II

Vorstellung der Testaufgaben

Die erste Testerhebung zu „Grundlagen der Mathematik II“ besteht aus sechs Aufgaben mit jeweils vier Punkten, insgesamt sind also 24,00 Punkte erreichbar.

1. a) Man erläutere, unter welchen Bedingungen eine Relation R zwischen zwei nichtleeren Mengen M und N Graph einer Abbildung $f : M \to N$ ist.

   (2)

   b) Man entscheide mit Begründung, ob folgende Relationen

   $$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \mid x^2 = y\} \text{ bzw. } R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$$

   Graph einer Abbildung sind. (2)

2. a) Man definiere die Begriffe Ordnung und Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge $M \neq \emptyset$. (2)

b) Man entscheide mit Begründung, ob die Relation

$$R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \text{ teilt } n\}$$

eine Ordnung oder eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist. (2)

3. a) Für einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiere man den Begriff Laplacewahrscheinlichkeit. (2)

b) Beim zweimaligen Werfen eines fairen Würfels werden die Ereignisse

A = „Die Augensumme beträgt 6.“
B = „Die Augensumme beträgt 7.“

betrachtet. Man bestimme $P(A)$ und $P(B)$ und entscheide dann, welches Ereignis wahrscheinlicher ist. (2)

4. a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit für mindestens fünf Richtige beim Zahlenlotto „6 aus 49“ (es werden aus 49 Kugeln die 6 Gewinnzahlen gezogen). Welche Verteilung liegt vor? (2)

b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mannschaft in vier Spielen höchstens einmal gewinnt, wobei die Siegwahrscheinlichkeit für jedes Spiel $\frac{1}{3}$ beträgt. Welche Verteilung liegt vor? (2)

5. a) Man betrachte in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die Ereignisse A, B und gebe die Definition für die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B an. (2)

b) Ein Ehepaar hat zwei Kinder, wovon das jüngere ein Junge ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist auch das ältere Kind ein Junge? (Die Geburtenwahrscheinlichkeit für Junge und Mädchen sei gleich.) (1)

c) Ein Ehepaar hat zwei Kinder, wovon eines der beiden ein Junge ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist auch das andere Kind ein Junge? (Die Geburtenwahrscheinlichkeit für Junge und Mädchen sei gleich.) (1)

6. a) Man betrachte in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die Ereignisse A, B und gebe die Definition für die stochastische Unabhängigkeit von A und B an. (2)

b) Man betrachte den Wurf eines fairen Würfels mit den beiden Ereignissen

A = „Die Augenzahl ist ungerade.“
B = „Die Augenzahl ist eine Primzahl.“

Man untersuche die Ereignisse A und B auf stochastische Unabhängigkeit. (2)

Quantitative Analyse der Punkteverteilung

Insgesamt haben an dieser Testerhebung 73 Studierende teilgenommen. Die Gesamtverteilung der Leistungen der Studierenden wird im üblichen Säulendiagramm (wie bei den Erhebungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“) dargestellt.

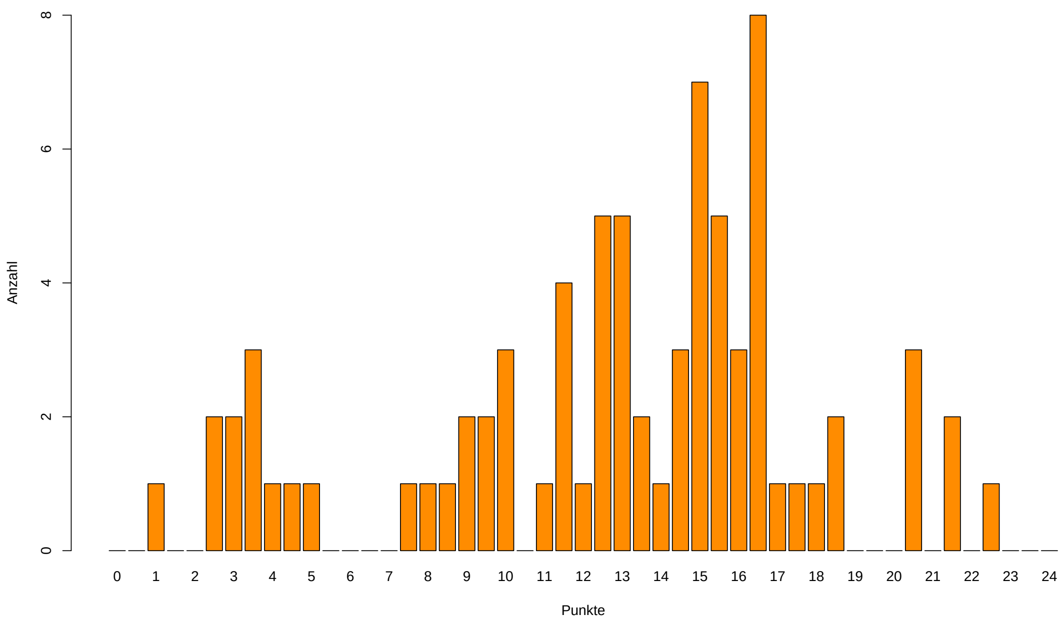

Abbildung 6.7: Punkteverteilung der ersten Testerhebung (II)

Einen Einblick in das Gesamtergebnis liefert folgende Übersicht:

- das arithmetische Mittel liegt bei 12,87 Punkten,
- der Median liegt mit 13,50 Punkten leicht höher als das arithmetische Mittel,
- mit $\bar{x} < x_{med} < x_{mod}$ liegt eine (leicht) rechtssteile Verteilung vor,
- die Spannweite der Punkte beträgt $d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 22{,}50 - 1{,}00 = 21{,}50$,
- die mittlere Hälfte der erzielten Leistungen wird durch den Interquartilabstand $d_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 16{,}50 - 10{,}00 = 6{,}50$ beschrieben,
- die Streuung der Punkte beträgt 5,03 Punkte um das arithmetische Mittel.

Die Ergebnisse in der Testerhebung liegen auf einem mittelmäßigen Niveau, das arithmetische Mittel und der Median sind etwa bei der Hälfte der Maximalpunktzahl. Sehr gute Ergebnisse (von 19,00 bis 24,00) können von den Studierenden nur in geringem Maße erzielt werden, die sehr schwachen (von 0,00 bis 5,00 Punkten) sind im Vergleich dazu öfter zu erkennen. 16,50 Punkte ist die am häufigsten erbrachte Leistung. Betrachtet man die Aufgabenstruktur dieser Erhebung, kann Folgendes festgehalten werden: die beiden Aufgaben zum Themengebiet Relationen haben nur einen leichten Bezug zu Inhalten der Schulmathematik (Einführung des Begriffs Funktion über Relationen), die übrigen vier Aufgaben der ersten Testerhebung beschäftigen sich mit elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung, was zentrale Gegenstände des Stochastikunterrichts sind. Die gestellten Aufgaben der ersten Testerhebung sind zu einem sehr großen Teil durch Schulwissen zu beantworten. Die erbrachten Ergebnisse erstrecken sich fast auf das komplette Punktespektrum, was anhand der oben angegebenen Spannweite d_{Sp} deutlich wird. Das Gesamtbild kann wie geschildert als mittelmäßig bzw. leicht positiv eingestuft werden, da das arithmetische Mittel leicht oberhalb der Hälfte der Gesamtpunktzahl liegt; dennoch wurde aufgrund der Stoffauswahl und des Schwierigkeitsgrads ein besseres Ergebnis erwartet. Die folgende Beschreibung der Einzelaufgaben soll einen genaueren Einblick in deren Struktur, Inhalt und Fehlerbilder geben.

Quantitative Analyse der Einzelaufgaben

Für die Analyse der sechs Einzelaufgaben wird auf folgende Tabelle mit typischen Lagemaßen zurückgegriffen. Diese numerischen Werte geben eine erste Tendenz, wie die einzelnen Aufgaben ausgefallen sind. Ferner wird ebenfalls ein Säulendiagramm und ein Kern-Dichteschätzer für jede Einzelaufgabe angegeben wie bei der Analyse der Testerhebungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“.

Tabelle 6.3: Lagemaße der Einzelaufgaben für die erste Testerhebung (II)

Lagemaße	A1	A2	A3	A4	A5	A6
x_{min}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$x_{0,25}$	1,00	1,00	2,00	1,00	1,50	2,00
x_{med}	2,00	2,50	3,00	2,00	2,00	3,00
$\bar{x}$	1,84	2,16	2,62	1,78	1,77	2,64
$x_{0,75}$	3,00	3,50	4,00	3,00	2,50	4,00
x_{max}	4,00	4,00	4,00	4,00	3,50	4,00
max. Punktzahl	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00

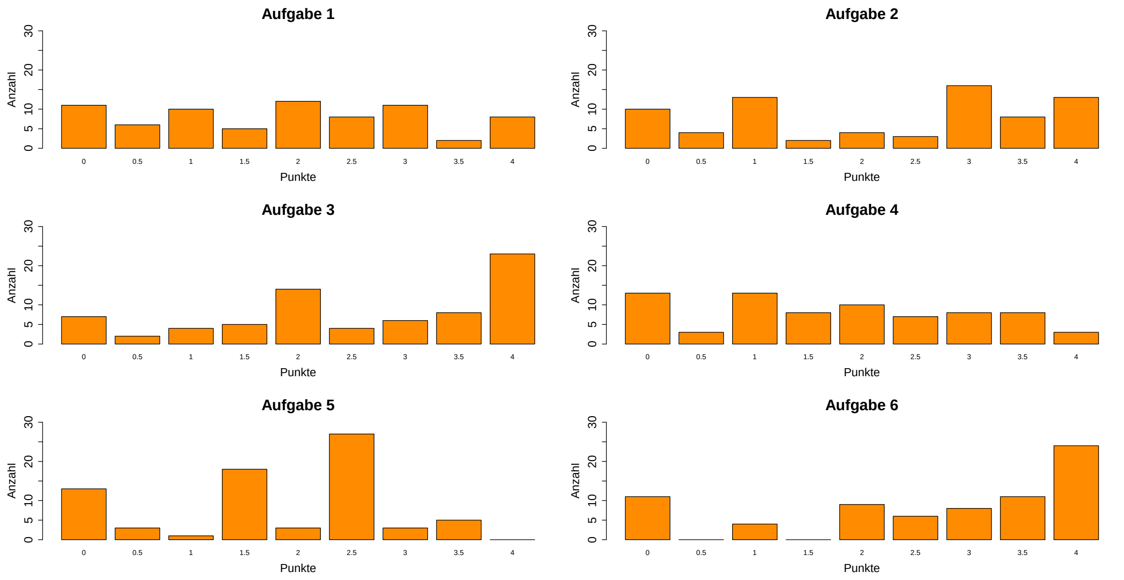

Abbildung 6.8: Punkteverteilung der Einzelaufgaben für die erste Testerhebung (II)

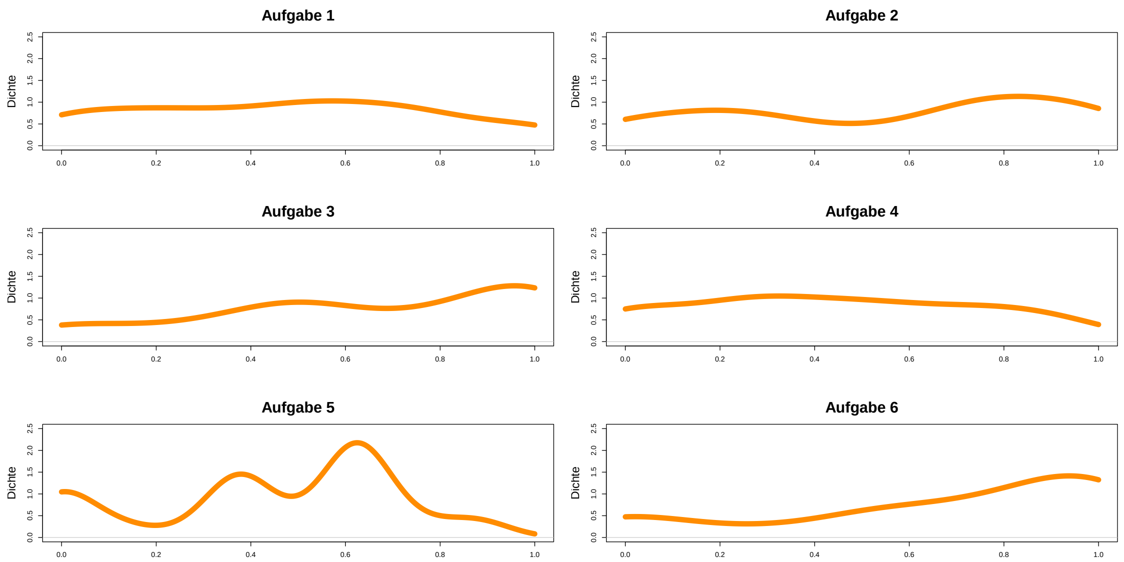

Abbildung 6.9: Dichtekurven der Einzelaufgaben für die erste Testerhebung (II)

Die Auswertung der Einzelaufgaben zeigt folgende Trends:

- vergleichsweise gut gelöst werden die Aufgaben 3 und 6,
- im mittleren Bereich findet sich Aufgabe 2,

- schwache Leistungen werden bei den Aufgaben 1, 4 und 5 verbucht.

In einer Kategorie können die Aufgaben 3 und 6 eingeteilt werden. Hinsichtlich aller Lagemaße stimmen die Werte der beiden Aufgaben überein; die Diagramme bestätigen die Analogien ebenfalls. In beiden Fällen erreichen etwa ein Drittel der Testteilnehmenden volle Punktzahl, was auch die Auffälligkeit von $x_{0,75} = x_{max}$ erklärt. Ferner erzielen bei Aufgabe 3 etwa nur ein Viertel aller Studierenden weniger als die Hälfte der Maximalpunkzahl, bei Aufgabe 6 verbuchen über zwei Drittel der Teilnehmenden mehr als Hälfte der Maximalpunkzahl.

Aufgabe 2 sticht bei beiden Diagrammen aufgrund der relativ symmetrischen Verteilung bezüglich der halben Maximalpunktzahl heraus; mit einem Median von 2,50 erreichen etwa 50 % der Teilnehmenden bis zu 2,50 Punkte, der andere Teil mindestens diesen Wert. Das arithmetische Mittel von 2,16 spricht (sowie der Median) für ein leicht positives Gesamtergebnis.

Als ähnlich können die Aufgaben 1 und 4 eingestuft werden. Alle möglichen Punktezahlen werden relativ gleichmäßig erreicht, wobei bei Aufgabe 1 leicht bessere Leistungen erbracht werden; diese Tatsache veranschaulicht die ähnlich verlaufende, aber leicht nach rechts verschobene Dichtekurve von Aufgabe 1 im Vergleich zu Aufgabe 4. Für beide Aufgaben stimmen x_{min}, $x_{0,25}$, x_{med}, $x_{0,75}$ und x_{max} überein.

Auffallend sind die Ergebnisse bei Aufgabe 5. Für den Modalwert etwa ergibt sich $x_{mod} = 2{,}50 = x_{0,75}$; es zeigen sich starke Ausprägungen bei 0,00 bzw. 1,50 Punkten. Diese drei Gipfel werden auch in der Dichtkurve deutlich. Hinsichtlich des arithmetischen Mittels gleicht Aufgabe 5 am ehesten Aufgabe 4 (fast identische Werte), dennoch weichen die übrigen Lagemaße voneinander ab. Die gleiche Anzahl an Personen erzielt mehr bzw. weniger als die Hälfte der Maximalpunktzahl. Diese Aufgabe kann somit nicht sinnvoll in eine Gruppe aufgenommen werden (diese wird aufgrund der deskriptiven Ergebnisse den schwach bearbeiteten Aufgaben zugeordnet).

Qualitative und inhaltliche Analyse der Einzelaufgaben

Nachdem die numerische Analyse der Leistungen der einzelnen Aufgaben geschildert ist, werden nun die jeweiligen Inhalte diskutiert. In der einleitenden Passage wurden bereits in kurzen Stichpunkten die globalen Inhalte genannt; diese sollen nun differenzierter für jede Aufgabe aufgeschlüsselt werden:

Aufgabe 1 (Themengebiet „Relationen“): Zentraler Inhalt der Aufgabe ist die Beziehung einer Relation zwischen zwei nichtleeren Mengen und dem Graph einer Abbildung zwischen diesen Mengen. Die Definition, welche die Beziehung einer Relation zwischen zwei nichtleeren Mengen und dem Graph einer Abbildung zwischen diesen Mengen darstellt, kann in vielen Fällen richtig dargestellt werden.

Der Aspekt, dass es für alle Elemente $x \in M \neq \emptyset$ genau ein $y \in N \neq \emptyset$ geben muss, so dass das Paar $(x, y) \in R$ ist, wird fast vollständig genannt; kritische Anmerkung für diesen Punkt ist die Quantifizierung der Elemente der beiden nichtleeren Mengen. Der zweite Teil der Definition (siehe Erwartungshorizont) wird in einigen Fällen weggelassen oder teilweise nur ungenügend formuliert; auch hier ist die Quantifizierung für die Elemente der beiden Mengen oft nicht vorhanden. Nach der Abgrenzung, unter welchen Bedingungen eine Relation zwischen zwei nichtleeren Mengen genau ein Graph einer Abbildung zwischen diesen Mengen ist, soll diese Definition auf das folgende Beispiel angewendet werden:

$$R_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \mid x^2 = y\big\} \text{ bzw. } R_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mid x = y^2\big\}\,;$$

die erste Relation R_1 kann in den meisten Fällen richtig interpretiert werden, mit der Begründung, dass die Relation R_1 die Normalparabel, also den Graph der Funktion

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad f_1(x) = x^2,$$

darstellt. Für die zweite Relation R_2 wird zwar die richtige Tendenz (R_2 stellt nicht den Graph einer Abbildung dar) gegeben, aber keine Begründung dafür geliefert. Dies hängt mit dem zweiten Teil der obigen Definition zusammen, der gar nicht oder zum Teil nicht korrekt formuliert wird, und damit nicht auf das gegebene Beispiel angewendet werden kann. Auch wenn dieser Aspekt der Definition von Studierenden richtig wiedergegeben wird, kann dieser in vielen Fällen dennoch nicht auf das Beispiel bezogen werden, so dass die Definition zwar bekannt ist, aber kein verknüpfendes Transferwissen vorhanden scheint. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Eine Relation R zwischen M und N ist genau dann Graph einer Abbildung (Funktion) $f : M \to N$, wenn

   - $\forall x \in M\ \exists y \in N \quad : \quad (x, y) \in R \qquad$ und
   - $\forall x \in M\ \forall y_1, y_2 \in N \quad : \quad \big((x, y_1) \in R \wedge (x, y_2) \in R \Longrightarrow y_1 = y_2\big)$;

   damit gibt es nämlich zu jedem $x \in M$ genau ein $y \in N$ mit $(x, y) \in R$; mit $R = G_f$ wird also jedem $x \in M$ in eindeutiger Weise ein $y \in N$ mit $y = f(x)$ zugeordnet.

b) Die Relation

$$R_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \mid x^2 = y\big\}$$

   ist der Graph der Abbildung $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f_1(x) = x^2$, während die Relation

$$R_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mid x = y^2\big\}$$

   wegen $(1, -1) \in R_2$ und $(1, 1) \in R_2$ mit $-1 \neq 1$ nicht Graph einer Abbildung ist.

Aufgabe 2 (Themengebiet „Relationen“): Diese Aufgabe zum Themengebiet Relationen behandelt die Begriffe Ordnung und Äquivalenzrelation; dabei sollen zuerst diese Begriffe definiert und danach für eine konkret gegebene Relation entschieden werden, ob eine Ordnung oder eine Äquivalenzrelation vorliegt. Die Definitionen können in der Regel sicher formuliert werden; Schwierigkeiten zeigen sich lediglich beim Begriff der Antisymmetrie für R sowie bei der Quantifizierung der Elemente der Menge M. Ferner ist die fehlende Exaktheit in der Formulierung zu kritisieren. Bei der Anwendung auf das gegebene Beispiel wird häufig vergessen zu zeigen, dass R nicht symmetrisch ist; die Antisymmetrie wird trotz der häufig nicht exakten Darstellung in der Definition zielsicher nachgewiesen. Die Reflexivität ist in fast allen Fällen korrekt gezeigt. Die Argumentation für die Transitivität ist oft unzureichend, da der Übergang über das verbindende Element nicht klar dargelegt wird. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Sei M eine nichtleere Menge. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt eine Ordnung auf der Menge M, wenn für alle x, y, $z \in M$ gilt:

- Es ist $(x, x) \in R$. *(Reflexivität)*
- Aus $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$ folgt stets $x = y$. *(Antisymmetrie)*
- Aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt stets $(x, z) \in R$. *(Transitivität)*

Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt eine Äquivalenzrelation auf der Menge M, wenn für alle x, y, $z \in M$ gilt:

- Es ist $(x, x) \in R$. *(Reflexivität)*
- Aus $(x, y) \in R$ folgt stets $(y, x) \in R$. *(Symmetrie)*
- Aus $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ folgt stets $(x, z) \in R$. *(Transitivität)*

b) Es ist $R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \text{ teilt } n\}$ eine Ordnung auf $\mathbb{N}$; für alle m, n, $k \in \mathbb{N}$ gilt

- Es ist $n \mid n$; damit ist R reflexiv.
- Aus $m \mid n$ und $n \mid m$ folgt stets $m = n$; damit ist R antisymmetrisch.
- Wegen $2 \mid 4$, aber $4 \nmid 2$ ist R nicht symmetrisch.
- Aus $k \mid m$ und $m \mid n$ folgt stets $k \mid n$; damit ist R transitiv.

Aufgabe 3 (Themengebiet „Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung“): Das Themengebiet sind Laplacewahrscheinlichkeiten. Dabei soll der Begriff definiert und darauf aufbauend konkrete Wahrscheinlichkeiten berechnet und verglichen werden. Die Abgrenzung des Begriffs Laplacewahrscheinlichkeit für einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum wird von einem hohen Anteil der Studierenden richtig erbracht; dennoch werden teilweise notwendige Voraussetzungen wie die Gleichwahrscheinlichkeit der Elementarereignisse nicht erwähnt. Ferner zeigen sich in der Exaktheit der Formulierung leichte Mängel, insgesamt scheint der Begriff aber verstanden worden zu sein. Nun soll die Definition auf ein Beispiel angewendet werden; beim zweimaligen Würfel mit einem fairen Würfel soll entschieden werden, welches der beiden Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \text{„Die Augensumme beträgt 6.“} \\ B &= \text{„Die Augensumme beträgt 7.“} \end{aligned}$$

wahrscheinlicher ist. Bei der konkreten Anwendung des Begriffs auf das Beispiel ist die Hauptfehlerquelle, dass für das Ereignis A das Ergebnis $(3,3)$ nur einmal auftreten kann und damit die Anzahl der für das Ereignis A günstigen Ergebnisse falsch abgezählt wird. Bei einigen Lösungen ist der Lösungsansatz im Allgemeinen nicht zielführend, dabei können keine typischen Fehler erkannt werden. Zudem wird nicht berücksichtigt, dass alle Augenzahlen mit der gleichen Wahrscheinlichkeit eintreten können, wobei diese Voraussetzung zum Teil in der Definition noch richtig formuliert wird. Bei der aufzählenden Darstellung der für die beiden Ereignisse günstigen Ergebnisse zeigen sich keine Probleme. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Sind alle n Elementarereignisse $\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\}$ „gleichwahrscheinlich“, gilt also $p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$, so ergibt sich

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega};$$

dann heißt P die Laplacewahrscheinlichkeit oder Gleichverteilung auf Ω.

b) Für das Zufallsexperiment kann als Ergebnisraum

$$\Omega = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

gewählt werden; damit ist $|\Omega| = 6^2 = 36$, wobei die Elementarereignisse als gleichwahrscheinlich vorausgesetzt werden können. Es ist

$$\begin{aligned} A &= \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}, \\ B &= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}, \end{aligned}$$

und damit

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} \qquad \text{und} \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Damit ist das Ereignis $B =$ „Die Augensumme beträgt 7.“ wahrscheinlicher.

Aufgabe 4 (Themengebiet: „Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung“): Betrachtet werden in der Aufgabenstellung Beispiele für die Binomialverteilung und für die hypergeometrische Verteilung. Die Berechnung für das Zahlenlottobeispiel beruht auf der hypergeometrischen Verteilung, da die Aufgabenstellung auf ein Urnenexperiment mit Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge zurückgeführt werden kann. Für das vorliegende Ereignis sind fünf oder sechs Richtige zu betrachten und die Wahrscheinlichkeiten dieser disjunkten Ereignisse zu addieren. In einigen Fällen werden zwar die beiden Teilereignisse (fünf oder sechs Richtige) beachtet, aber dann miteinander multipliziert anstatt diese zu addieren. Viele Lösungsstrategien erscheinen ohne eine erkennbare Logik, so dass eine Fehleranalyse nicht möglich ist. Die Zusatzfrage, welche Verteilung im gegebenen Fall vorliegt, wird selten beantwortet und falls doch, sehr häufig falsch. Der Aspekt „mindestens“ in der Aufgabenstellung bereitet kein Problem. Die Benennung der entsprechenden Verteilung für das zweite Beispiel wird besser erbracht als im ersten Fall, die Berechnung ist aber mit Mängeln behaftet; so wird der Aspekt „höchstens“ oft übergangen und die Formel für die Binomialverteilung falsch interpretiert, indem der Faktor $\binom{n}{k}$ vergessen wird. Ferner zeigen sich Abstraktionsprobleme, da die Rollen von n, k und p in der Darstellung

$$P(\{k\}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

falsch zugeordnet werden und teilweise k echt größer als n gewählt wird. Die vorliegende Situation kann in einem passenden Urnenmodell als Ziehen mit Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge interpretiert werden. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Beim Zahlenlotto „6 aus 49“ werden aus 49 Kugeln die 6 Gewinnzahlen gezogen; dabei ist die Wahrscheinlichkeit für mindestens fünf Richtige

$$p = \frac{\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} + \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0}}{\binom{49}{6}}.$$

Es liegt eine hypergeometrische Verteilung vor.

b) Die Wahrscheinlichkeit für höchstens einen Sieg in vier Spielen bei der gegebenen Konstellation ist

$$p = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Es liegt eine Binomialverteilung vor.

Aufgabe 5: (Themengebiet: „Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung“): Bestimmendes Thema ist die bedingte Wahrscheinlichkeit zweier Ereignisse sowohl in abstrakter Begriffsabgrenzung als auch in der Anwendung auf ein konkretes Beispiel. Die Definition für den Begriff bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A unter der Bedingung B wird sicher formuliert, dennoch zeigt sich als häufiger Fehler das Vergessen der Voraussetzung $P(B) > 0$ für das Ereignis B. Viele Studierende erbringen die Begriffsabgrenzung erst gar nicht. In den Teilaufgaben b) und c) findet dann die Definition konkrete Anwendung. Teilaufgabe b) können viele Lernende ohne Verwendung der bedingten Wahrscheinlichkeit korrekt lösen, indem sie aus rein logischen Gründen die Wahrscheinlichkeit von 50 % postulieren, dass auch das ältere Kind ein Junge ist; falls über die bedingte Wahrscheinlichkeit argumentiert wird, ergeben sich zielsichere Lösungsansätze, es können also keine typischen Fehlerquellen dargelegt werden. Teilaufgabe c) kann hingegen in keinem einzigen Fall korrekt gelöst werden, da viele Studierende die Aufgabe nicht bearbeiten oder der richtige Ansatz mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeit nicht erfolgt; die Aufgabenstellung abstrahiert das Konstrukt von Teilaufgabe b) leicht, weswegen die schwache Bearbeitung verwundert. In vielen Fällen (falls bearbeitet) wird ebenfalls als gesuchte Wahrscheinlichkeit 50 % genannt, da kein Unterschied zu den inhaltlichen Aspekten von b) erkannt wird. Ein Ansatz über die bedingte Wahrscheinlichkeit wird leider in keiner Bearbeitung erbracht. Somit kann der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit nur auf sehr einfache Aufgabentypen angewendet werden. Der Ergebnisraum $\Omega = \{(J,J),(J,M),(M,J),(M,M)\}$ ist für die beiden Beispiele identisch, ebenso die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B) = P(\{(J,J)\}) = \frac{1}{4}$; einzig die Informationen aus den Aufgabenstellungen „ein Ehepaar hat zwei Kinder, wovon das jüngere ein Junge ist“ bzw. „ein Ehepaar hat zwei Kinder, wovon eines der beiden ein Junge ist“ variieren, was an der Bedingung, also für das Ereignis B eine Änderung bewirkt; diese einfache Abstraktion kann nicht erbracht werden. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum. Für das Ereignis $B \in \mathcal{A}$ gelte $P(B) > 0$; dann tritt das Ereignis $A \in \mathcal{A}$ unter der Bedingung, dass B eintritt, mit der bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ein.

b) Es ist $\Omega = \{(J,J),(J,M),(M,J),(M,M)\}$. Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{P\left(\{(J,J)\}\right)}{P\left(\{(J,J),(J,M)\}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

c) Es ist wiederum $\Omega = \{(J,J),(J,M),(M,J),(M,M)\}$. Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{P\left(\{(J,J)\}\right)}{P\left(\{(J,J),(J,M),(M,J)\}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 6 (Themengebiet: „Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung“): Grundlegende Thematik bei dieser Aufgabe ist die stochastische Unabhängigkeit zweier Ereignisse A und B; es soll (wie bei den bisherigen Aufgaben) der Begriff definiert und anschließend praktisch auf ein Beispiel angewendet werden. Der Begriff der stochastischen Unabhängigkeit wird zum größten Teil korrekt definiert, es zeigen sich keine typischen Fehlerbilder. Die Anwendung der stochastischen Unabhängigkeit auf das Beispiel ist sehr ansprechend; es können bis auf Rechenfehler und falsches Abzählen keine typischen Fehler eruiert werden. Es sind die entsprechenden günstigen Ergebnisse für die Ereignisse A, B und $A \cap B$ zu zählen und anschließend die Ausdrücke $P(A) \cdot P(B)$ und $P(A \cap B)$ miteinander zu vergleichen. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Die beiden Ereignisse A, $B \in \mathcal{A}$ heißen stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

b) Es ist zuerst $A = \{1,3,5\}$ und $B = \{2,3,5\}$ und damit $P(A) = \frac{1}{2}$ und $P(B) = \frac{1}{2}$. Ferner ist $A \cap B = \{3,5\}$ und damit $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Wegen $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ sind die Ereignisse A und B stochastisch abhängig.

6.2.2 Zweite Testerhebung zu Grundlagen der Mathematik II

Vorstellung der Testaufgaben

Die zweite Testerhebung zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ (ebenfalls nach vier Semesterwochen Mitte November 2011 durchgeführt, zusammen mit der ersten Testerhebung) besteht aus sechs Aufgaben mit jeweils vier Punkten, insgesamt sind also 24,00 Punkte erreichbar.

1. a) Man definiere den Begriff Kongruenzabbildung (Bewegung). (1)

   b) Die Kongruenzabbildungen Drehung und Parallelverschiebung können als Doppelachsenspiegelungen interpretiert werden. Man gebe für beide Fälle jeweils die Lage der beiden Spiegelachsen an. (1)

   c) Man erläutere den Zusammenhang zwischen Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildung. (2)

2. a) Man formuliere (unter Berücksichtigung der nötigen Voraussetzungen) die Satzgruppe des Pythagoras. (2)

   b) Wegen $3^2 + 4^2 = 5^2$ bezeichnet man $(3, 4, 5)$ als pythagoräisches Tripel. Man gebe ein weiteres solches pythagoräisches Tripel aus natürlichen Zahlen an. (1)

   c) Man formuliere die Umkehrung des Satzes des Pythagoras. (1)

3. a) Für zwei Größen G_1 und G_2 definiere man den Begriff Kommensurabilität und gebe ein Beispiel für inkommensurable Größen an. (2)

   b) Man erläutere, warum der angeordnete Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ der rationalen Zahlen nicht vollständig ist. (2)

4. a) Bekanntlich ist $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Man bestimme hiermit die Werte von $\sin 135°$ und $\sin 315°$ sowie $\cos 135°$ und $\cos 315°$. (2)

   b) Man formuliere (unter Berücksichtigung der nötigen Voraussetzungen) den Cosinussatz und stelle dann den Zusammenhang zum Satz des Pythagoras her. (2)

5. a) Über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bestimme man die Lösungen der Gleichung
$$x^2 = 6\,x - 25$$
   und skizziere diese Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene. (2)

   b) Man bestimme die Polardarstellung der komplexen Zahl $z_1 = 3 + 3\,i$ sowie ferner die Real- und Imaginärteildarstellung der komplexen Zahl $z_2 = 4 \cdot E(45°)$. (2)

6. a) Man entscheide mit Begründung, ob der Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ anordnungsfähig ist. (1)

   b) Welches Vorzeichen besitzt die imaginäre Einheit i? (1)

   c) Bekanntlich ist $i^2 = -1$. Man berechne damit i^{17}. (1)

   d) Man gebe neben den bekannten Körpern $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ein weiteres Beispiel für einen Körper an. (1)

Quantitative Analyse der Punkteverteilung

Insgesamt haben an dieser Erhebung 66 Studierende teilgenommen (sieben verfrühte Abgaben und daher sieben Personen weniger als in der ersten Testerhebung zur Vorlesung Grundlagen der Mathematik II). Die 24,00 Punkte verteilen sich auf sechs Aufgaben mit jeweils vier Punkten. Die Auswahl der Testfragen deckt die zweite Hälfte des Vorlesungsstoffes ab. Folgendes Säulendiagramm stellt die Gesamtverteilung der Leistungen der Studierenden in dieser Testerhebung dar.

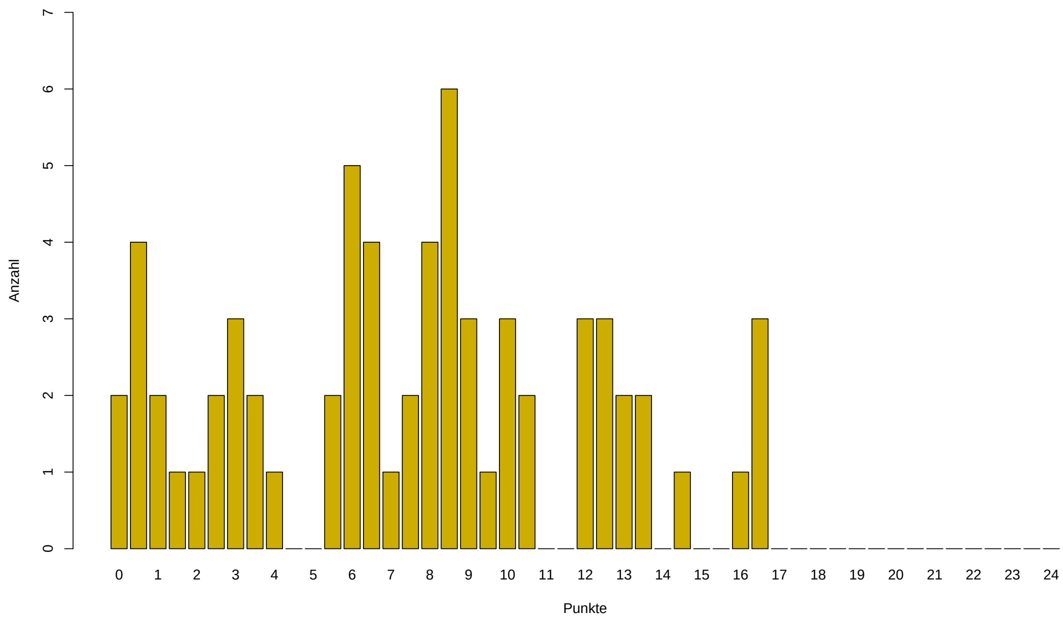

Abbildung 6.10: Punkteverteilung der zweiten Testerhebung (II)

Einen Einblick in das Gesamtergebnis liefert folgende Übersicht:

- das arithmetische Mittel liegt bei 7,55 Punkten,
- der Median liegt bei 8,00 Punkten,
- mit $\bar{x} \approx x_{med} \approx x_{mod}$ liegt eine relativ symmetrische Verteilung vor,
- die Spannweite der Punkte beträgt $d_{Sp} = x_{max} - x_{min} = 16{,}50 - 0{,}00 = 16{,}50$,
- die mittlere Hälfte der erzielten Leistungen wird durch den Interquartilabstand $d_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 10{,}38 - 3{,}63 = 6{,}75$ beschrieben,
- die Streuung der Punkte beträgt 4,51 Punkte um das arithmetische Mittel.

Der Modalwert dieser Verteilung liegt bei 8,50 Punkten. Auffallend ist, dass keiner der Studierenden 17,00 Punkte oder mehr erreichen kann. Betrachtet man das obige Säulendiagramm, so zeichnen sich drei Gruppen ab; die schwache Gruppe punktet gehäuft im Intervall von 0,00 bis 4,00 Punkten, die ausgeprägte mittlere Gruppe zwischen 5,50 und 10,50 sowie die starke Gruppe von 12,00 bis 16,50 Punkten. In der Gesamtschau können die Leistungen als sehr schwach eingestuft werden, da der Median x_{med} sowie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ etwa bei einem Drittel der Maximalpunktzahl liegen. Die Ergebnisse dürften bei weitem nicht ein so schwaches Gesamtbild abgeben, da die Inhalte wiederum kaum die Grenzen der Schulmathematik überschreiten und die geprüften Gebiete eingehend in der Vorlesung besprochen wurden. Diese Erhebung enthält viele Aspekte von Elementargeometrie, die in der Schule bereits in der Mittelstufe präsent sind; die Behandlung der komplexen Zahlen findet nicht in allen Richtungen der Oberstufenmathematik als Additum zu den üblichen Stoffinhalten statt. Die folgende Beschreibung der Einzelaufgaben soll einen genaueren Einblick in deren Struktur, Inhalt und Fehlerbilder geben.

Quantitative Analyse der Einzelaufgaben

Für die Analyse der sechs Einzelaufgaben wird auf folgende Tabelle mit den Lagemaßen zurückgegriffen. Diese numerischen Werte geben eine erste Tendenz, wie die einzelnen Aufgaben ausgefallen sind. Ferner wird ebenfalls ein Säulendiagramm und ein Kern-Dichteschätzer für jede Einzelaufgabe angegeben wie bei der Analyse der Testerhebungen zu den Inhalten der Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“.

Tabelle 6.4: Lagemaße der Einzelaufgaben für die zweite Testerhebung (II)

Lagemaße	A1	A2	A3	A4	A5	A6
x_{min}	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
$x_{0,25}$	0,00	0,50	0,00	0,50	0,00	0,50
x_{med}	0,50	1,50	0,75	1,50	1,00	1,00
$\bar{x}$	1,22	1,37	1,11	1,64	1,39	0,82
$x_{0,75}$	2,50	2,00	2,00	2,88	2,38	1,00
x_{max}	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00
max. Punktzahl	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00	4,00

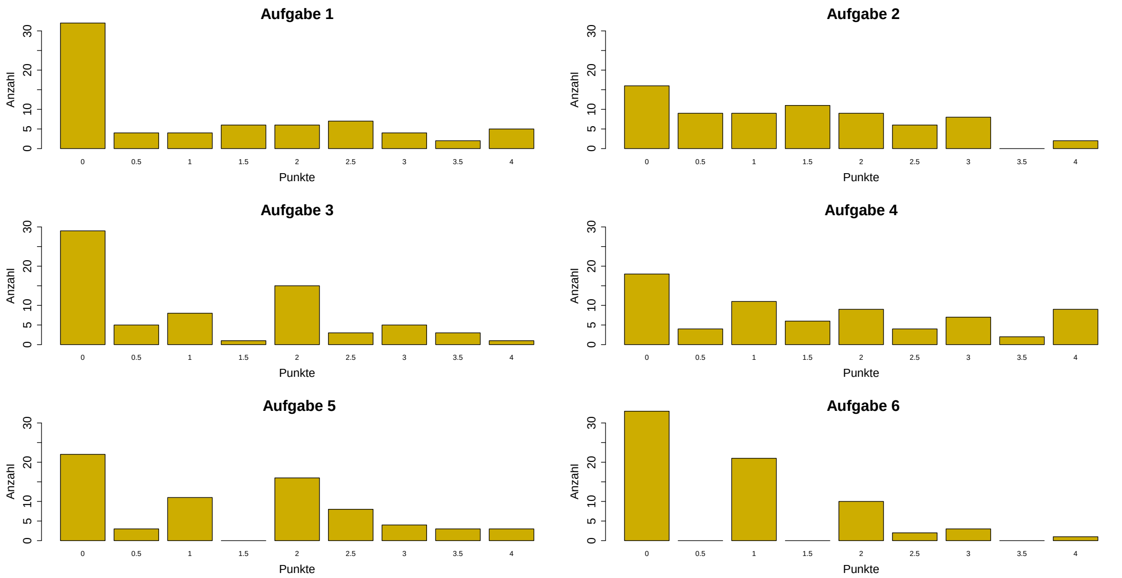

Abbildung 6.11: Punkteverteilung der Einzelaufgaben für die zweite Testerhebung (II)

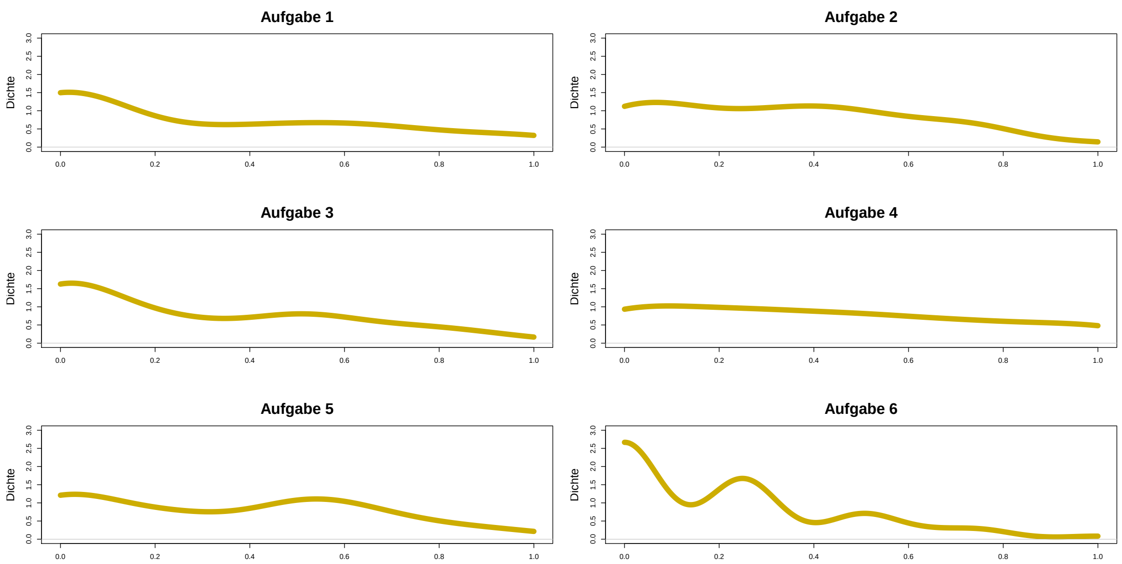

Abbildung 6.12: Dichtekurven der Einzelaufgaben für die zweite Testerhebung (II)

Sehr prägnant ist, dass alle sechs Aufgaben schwach bearbeitet werden; bei keiner Aufgabe reicht der arithmetische Mittelwert an die Hälfte der Maximalpunktzahl, bei Aufgabe 6 mit $\bar{x} = 0{,}82$ gerade einmal ein Fünftel der vier zu erzielenden Punkte. Betrachtet man ferner jeweils die Werte für das erste Quartil, so liegen diese für drei Aufgaben bei 0,00 Punkten, bei den übrigen drei Aufgaben bei 0,50 Punkten. Mit

Hilfe der beiden Diagramme sowie der obigen Tabelle werden die sechs gestellten Aufgaben folgendermaßen charakterisiert:

- vergleichsweise gut bearbeitet wird Aufgabe 4,
- vergleichsweise mittelmäßig bearbeitet werden die Aufgaben 2 und 5,
- vergleichsweise schwach bearbeitet werden die Aufgaben 1 und 3,
- vergleichsweise sehr schwach bearbeitet wird Aufgabe 6.

Aufgabe 4 zeigt im schwachen Gesamtbild dieser Erhebung das beste Ergebnis. Mit den stärksten Werten beim arithmetischen Mittel sowie beim 75 %-Quantil sticht diese im Vergleich positiv hervor. Das unterste Quartil ist auch hier schwach, aber das oberste Quartil zwischen 2,88 und 4,00 Punkten ist vergleichsweise deutlich besser. In den Diagrammen ergeben sich keine Auffälligkeiten, dennoch ist zu erwähnen, dass die Maximalpunktzahl im Vergleich zu den übrigen Aufgaben deutlich häufiger erzielt wird. Ein Drittel der Studierenden erreicht mehr als zwei von vier möglichen Punkten; dies kann bei keiner der anderen Aufgaben beobachtet werden.

In den mittleren Bereich kann Aufgabe 2 im Gesamtkontext eingeordnet werden. Bis auf die Punktzahl 3,50 werden alle anderen zu erreichenden Bewertungseinheiten gleichmäßig erreicht, der Median liegt bei 1,50 und das arithmetische Mittel bei 1,37 Punkten. Die homogene Verteilung spiegelt das ausgeglichene Bild bei den Werten der Lagemaße wieder. Die Dichtekurve verläuft ohne starke Auslenkungen, fällt aber in der oberen Punktehälfte ab. Der arithmetische Mittelwert von Aufgabe 5 ist sehr ähnlich zu dem von Aufgabe 2, dennoch weichen andere Lagemaße wie $x_{0{,}25}$, x_{med}, $x_{0{,}75}$ voneinander ab. Die Diagramme veranschaulichen Gipfel bei 0,00 und 2,00 Punkten; die Auslenkung im Kern-Dichteschätzer in der oberen Punktehälfte (zwei bis vier Punkte) spricht für ein besseres Bild dieser Aufgabe im Vergleich zu Aufgabe 2, was den höheren Wert für das 75 %-Quantil erklärt. Da aber die Hälfte der Studierenden maximal einen Punkt erreicht, sind auch die schwächeren Werte für $x_{0{,}25}$ und x_{med} im Vergleich zu Aufgabe 2 zu erklären.

Aufgabe 1 ist vergleichsweise schwach bearbeitet. Der Median bei 0,50 besagt, dass die Hälfte der Teilnehmenden nicht mehr als einen halben Punkt bei dieser Aufgabe erreichen kann. Knapp die Hälfte der Studierenden verbleibt bei 0,00 Punkten; die übrigen Punkebereiche werden alle relativ homogen erreicht. Aufgabe 3 wird ebenfalls schwach bearbeitet; das arithmetische Mittel ($\bar{x} = 1{,}11$) weist mit Ausnahme des Mittelwerts von Aufgabe 6 den geringsten Wert auf. Die starke Ausprägung bei 0,00 bzw. die leichte bei 2,00 Punkten spiegelt sich auch in der entsprechenden Dichtekurve wieder. 42 der 66 Studierenden erreichen nicht die Hälfte der Gesamtpunktzahl, lediglich 12 Personen mehr als die Hälfte. Die extreme Ausprägung bei $x = 0{,}00$ bedingt, dass $x_{min} = x_{0{,}25}$ gilt, also das schwächste Viertel erzielt keinen Punkt.

Aufgabe 6 wird sehr schwach bearbeitet. Das unterste Quartil erreicht exakt 0,00 Punkte, das stärkste Quartil liegt zwischen einem und vier Punkten. Im Säulendiagramm erkennt man den Modalwert bei 0,00 Punkten und weitere Ausprägungen bei 1,00 bzw. 2,00 Punkten; diese extreme Verteilung erklärt das kurvenartige Bild in der entsprechenden Dichtekurve, welche aufgrund der Normierung diese Auslenkungen bei $x = 0{,}00$, $x = 0{,}25$ und $x = 0{,}50$ besitzt. 32 Personen erzielen 0,00 Punkte und 20 Personen genau die Bewertung 1,00 Punkte, damit also fast 80 % der Studierenden maximal ein Viertel der Gesamtpunktzahl.

Qualitative und inhaltliche Analyse der Einzelaufgaben

Nachdem die numerische Analyse der Leistungen der einzelnen Aufgaben geschildert ist, werden nun die jeweiligen Inhalte diskutiert. In der einleitenden Passage wurden bereits in kurzen Stichpunkten die globalen Inhalte genannt; diese sollen nun differenzierter für jede Aufgabe aufgeschlüsselt werden:

Aufgabe 1 (Themengebiet „Kongruenzabbildungen“): Zentrale Thematik ist der Begriff Kongruenzabbildung, ihre speziellen Darstellungen sowie der Bezug zum Begriff Ähnlichkeitsabbildung. Die Definition des Begriffs Kongruenzabbildung (ein Begriff aus der Mittelstufe der Schule) wird oft nicht exakt eingegrenzt, sondern nur Eigenschaften der Abbildungen genannt, was nicht den Kern der Begriffsabgrenzung trifft. Es sollen ferner die beiden Kongruenzabbildungen Drehung und Parallelverschiebung als Doppelachsenspiegelungen aufgefasst und daraufhin jeweils die Lage der beiden Spiegelachsen erläutert werden. Die Lage der Achsen bei der Parallelverschiebung wird möglicherweise oft aufgrund des Namens „Parallelverschiebung“ richtig interpretiert, Erläuterungen fehlen in der Regel, ebenso wie die Beziehung zwischen dem Abstand der beiden Spiegelachsen und dem Abstand zwischen Bild und Urbild der Parallelverschiebung. Die Lage der Spiegelachsen für die orientierungstreue Kongruenzabbildung Drehung kann in sehr seltenen Fällen geschildert werden; oft wird die Orthogonalität der Achsen erwähnt, was sich aber nur auf einen Sonderfall der Drehung, nämlich auf die Drehung um 180° (Punktspiegelung), bezieht. Ebenso wird kein Bezug zum gerichteten Winkel zwischen den beiden Spiegelachsen und dem gerichteten Winkel zwischen Bild und Urbild hergestellt. Der Zusammenhang bzw. der Unterschied zwischen Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen scheint vom Großteil der Studierenden nicht verstanden. Häufig wird die Ähnlichkeitsabbildung als Spezialfall der Kongruenzabbildung interpretiert; in einigen Fällen kann zwar der Begriff der Ähnlichkeitsabbildung richtig erläutert werden, dennoch fällt es dann vielen Studierenden sehr schwer, einen Zusammenhang zu thematisieren. Dieser Aufgabentyp (Formulierung von Zusammenhängen durch Aufzeigen von Unterschieden und Gemeinsamkeiten) zeigt ein Problemfeld; obwohl das mathematische Wissen für die Begrifflichkeiten (zum großen Teil) vorhanden ist, scheint das transferierende Denken und das abstrahierende Kalkül ein zu hohes Kompetenzniveau anzusprechen, welches nicht erreicht wird. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Eine bijektive Selbstabbildung $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ auf der Punktmenge $\mathcal{P}$ der Anschauungsebene, die sowohl abstandstreu als auch winkeltreu ist, heißt Kongruenzabbildung (Bewegung).

b) Bei einer Drehung mit dem Drehzentrum Z und dem Drehwinkel 2δ schneiden sich die beiden Spiegelachsen im Drehzentrum Z unter dem gerichteten Winkel δ. Bei einer Parallelverschiebung in Richtung von einer Spiegelachse zur anderen mit der Länge $2\,d$ sind die beiden Spiegelachsen parallele und zum Schub orthogonale Geraden mit Abstand d.

c) Jede Ähnlichkeitsabbildung ist eine Komposition einer Kongruenzabbildung und einer zentrischen Streckung; jede Kongruenzabbildung ist eine spezielle Ähnlichkeitsabbildung.

Aufgabe 2 (Themengebiet „Satzgruppe des Pythagoras“): Zentrale Thematik dieser Aufgabe ist die Satzgruppe des Pythagoras; diese soll formuliert werden ebenso wie die Umkehrung des Satzes von Pythagoras. Ferner soll zusätzlich zu einem konkret gegebenen pythagoräischen Tripel ein weiteres aufgeführt werden. In Teilaufgabe a) wird häufig für den Satz des Pythagoras nur der formale Ausdruck $a^2 + b^2 = c^2$ dargelegt, ohne die notwendigen Voraussetzungen, dass ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ der Länge c und den beiden Katheten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ der Längen b bzw. a sowie dem rechten Winkel $\sphericalangle ACB$ beim Eckpunkt C betrachtet wird; damit ist der formale Ausdruck völlig wertlos und hat somit keinerlei Aussagekraft. Ferner zeigen sich Bruchstellen bei der Formulierung von Katheten- und Höhensatz, da die entsprechenden Seitenlängen in den dargestellten Beziehungen nicht genauer charakterisiert werden. In Teilaufgabe b) soll ausgehend vom gegebenen pythagoräischen Tripel $(3, 4, 5)$ ein weiteres Tripel bestehend aus natürlichen Zahlen angegeben werden; bei dieser Aufgabe kann kein festes Fehlerbild dargelegt werden, da in der Regel ein korrektes Tripel angegeben (häufig $(5, 12, 13)$) oder die Aufgabe nicht bearbeitet wird. Schließlich soll in Teilaufgabe c) die Umkehrung des Satzes von Pythagoras formuliert werden; vielen Studierenden scheint nicht bewusst zu sein, dass dieser Satz umkehrbar ist, obwohl dies in der Vorlesung und in den Übungen behandelt wurde. Es zeigen sich ferner elementare Probleme, was es bedeutet, einen gegebenen Satz umzukehren. Diese Teilaufgabe kann in zwei Fällen gelöst werden. Auch hier kann kein Fehlermuster ermittelt werden. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Sei ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{AB}$ der Länge c und den Katheten $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BC}$ der Längen b bzw. a sowie $\sphericalangle ACB = \gamma = 90°$. Ferner sind die Hypotenusenabschnitte $\overline{AH}$ bzw. $\overline{HB}$ der Längen q bzw. p

mit dem Höhenfußpunkt H der Höhe h von C auf die Hypotenuse $\overline{AB}$. Dann ist

- $a^2 + b^2 = c^2$ (Satz des Pythagoras),
- $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$ (Kathetensatz),
- $h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz).

b) Beispielsweise sind $(5, 12, 13)$ oder $(6, 8, 10)$ weitere pythagoräische Tripel.

c) Gilt in einem Dreieck ΔABC mit $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$ und $c = \overline{AB}$ die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, so ist das Dreieck ΔABC rechtwinklig mit dem Innenwinkel $\gamma = 90°$.

Aufgabe 3 (Themengebiet: „Kommensurabilität“, „$\mathbb{Q}$ als Körper“): Für zwei Größen G_1 und G_2 soll der Begriff Kommensurabilität abgegrenzt und auch ein Beispiel für inkommensurable Größen gegeben werden. An dieser Stelle sei angemerkt, dass dies nicht Inhalt des Schulkanons ist, dennoch in der Vorlesung behandelt wurde. Ferner werden Eigenschaften des angeordneten Körpers $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ betrachtet. Die Definition besagt, dass es eine gemeinsame Maßeinheit ME sowie natürliche Zahlen n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ gibt mit $G_1 = n_1$ ME und $G_2 = n_2$ ME, also G_1 und G_2 genau dann kommensurabel sind, wenn $\frac{G_1}{G_2} \in \mathbb{Q}$ gilt. Folglich sind etwa die Seite und die Diagonale eines Quadrats ein Beispiel für inkommensurable Größen, was doch wieder an Schulinhalte erinnert, die aber nicht in diesem Kontext thematisiert bzw. mit dieser Begrifflichkeit in Verbindung gebracht werden. Die Definition ist einigen Lernenden bewusst, doch gelingt keine exakte Formalisierung, da die gemeinsame Maßeinheit ME sowie die Darstellung der beiden Größen $G_1 = n_1$ ME und $G_2 = n_2$ ME mit natürlichen Zahlen n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ nicht zielführend in die Definition integriert wird. Das Beispiel für zwei nicht kommensurable Größen kann in einigen Fällen richtig erbracht werden; auffallend ist aber, dass trotz formal richtiger Definition als Beispiel etwa die Seiten eines Rechtecks mit den Längen 2 und 3 genannt werden. Damit scheint der Begriff Kommensurabilität vielen Studierenden verständnismäßig schwer zu fallen, da das Prinzip des gleichen Maßes nicht durchdrungen wird. In Teilaufgabe b) soll erläutert werden, warum der angeordnete Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ nicht vollständig ist. Die Aufgabe wird oft nicht bearbeitet; ferner werden nicht ausreichende Lösungen wie beispielsweise das Fehlen von $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}$ angegeben, ohne diese weiter zu begründen. Weitere Fehlermuster können nicht erkannt werden. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Zwei Größen G_1 und G_2 heißen kommensurabel, wenn es eine gemeinsame Maßeinheit ME sowie natürliche Zahlen n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $G_1 = n_1$ ME und

$G_2 = n_2$ ME gibt; damit sind G_1 und G_2 genau dann kommensurabel, wenn ihr Quotient

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{n_1 \text{ ME}}{n_2 \text{ ME}} = \frac{n_1}{n_2} \in \mathbb{Q}$$

rational ist. Somit sind etwa die Seite und die Diagonale eines Quadrats wegen $d = \sqrt{2} \cdot s$ und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ nicht kommensurabel.

b) Der Dedekindsche Schnitt

$$S = \left\{q \in \mathbb{Q} \mid q < \sqrt{2}\right\} \quad \text{und} \quad D = \left\{q \in \mathbb{Q} \mid q > \sqrt{2}\right\}$$

definiert kein Element in $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4 (Themengebiet: „Trigonometrie“): Aufbauend auf der Beziehung $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sollen weitere Werte für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ mit $\alpha > 90°$ abgeleitet und ferner der Zusammenhang zwischen dem Cosinussatz und dem Satz des Pythagoras hergestellt werden. Auf der Grundlage von $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sollen die entsprechenden Werte im 2. bzw. 4. Quadranten über die Beziehung $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$ und $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$ bzw. $\sin\alpha = -\sin(360° - \alpha)$ und $\cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$ hergeleitet werden. Vielen Studierenden scheinen diese trigonometrischen Zusammenhänge von sin und cos nicht bekannt zu sein, weswegen die Berechnung der gewünschten Werte ohne Taschenrechner nicht möglich ist. Die in der Angabe geforderten Werte von sin und cos werden aufgrund der Angabe von $\sin 45°$ und $\cos 45°$ geraten, da das Vorzeichen von $\frac{\sqrt{2}}{2}$ bei $\sin 135°$ und $\sin 315°$ bzw. $\cos 135°$ und $\cos 315°$ jeweils vertauscht ist und keine Begründung für die angegeben Werte vorliegt. In Teilaufgabe b) soll der Cosinussatz unter Berücksichtigung aller nötigen Voraussetzungen formuliert und daraufhin der Zusammenhang zum Satz des Pythagoras hergestellt werden. Formale Fehlerquellen sind (wie schon bei Aufgabe 2) die exakte Benennung der beteiligten Größen sowie ferner der Mangel an korrekter Formelsprache. Dies zeigt sich beispielsweise beim Versuch den Cosinussatz folgendermaßen zu formulieren:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 + a + b + \cos\gamma;$$

der Bezug zum Satz des Pythagoras kann (unter der Voraussetzung der richtigen Darstellung des Cosinussatzes) in sehr vielen Fällen korrekt hergestellt werden. Leider ist für einen gewissen Teil der Studierenden die Bearbeitung dieser Aufgabe ohne Taschenrechner und Formelsammlung offensichtlich nicht möglich, vermutlich aus Gründen fehlender Kenntnisse von Formeln und trigonometrischen Beziehungen, obwohl die zu betrachtenden Beziehungen elementare Grundlagen der Mittelstufenmathematik sind. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Es ist $\sin 135° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\sin 315° = -\sin 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sowie $\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\cos 315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Mit den üblichen Bezeichnungen im Dreieck ΔABC gilt

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$,
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$,
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$.

Es ist

$$c^2 = a^2 + b^2 \iff 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma = 0 \iff \cos\gamma = 0 \iff \gamma = 90°.$$

Aufgabe 5: (Themengebiet: „Lösen quadratischer Gleichungen in $\mathbb{C}$ sowie Darstellung von $z \in \mathbb{C}$“): Die Aufgabe beinhaltet die Bestimmung der Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen sowie die Darstellung komplexer Zahlen in Real- und Imaginärteilform und in Polarform. Die quadratische Gleichung $x^2 = 6\,x - 25$ besitzt die negative Diskriminante $\Delta = b^2 - 4\,a\,c = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -64$; dieser Sachverhalt veranlasst einige Studierende für obige quadratische Gleichung die leere Menge $L = \emptyset$ als Lösungsmenge zu formulieren. Bei korrekter Bestimmung der Lösungsmenge scheitern manche Teilnehmenden an der Skizze der beiden Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene, da ihnen nicht klar ist, welche Bedeutung den beiden Koordinatenachsen zukommt bzw. dass eine komplexe Zahl $z = a + i\,b \in \mathbb{C}$ den Imaginärteil b besitzt, welcher auf der Hochwertachse angetragen wird. In Teilaufgabe b) werden die beiden Darstellungsformen einer komplexen Zahl z an Beispielen erörtert. So soll zuerst $z_1 = 3 + 3\,i$ in die Polardarstellung mit dem entsprechenden Betrag $|z_1|$ und dem Argument φ_1 (gerichteter Winkel, den z_1 mit der positiven Realteilachse einschließt) umgeformt werden. Die Berechnung des Betrags $|z_1|$ gelingt den Studierenden ohne typische Fehler, aber die Bestimmung des Argument φ_1 bzw. der Zusammenhang zwischen Betrag z_1 und Argument φ_1 ergibt eine Bruchstelle, da das Argument φ_1 über (einfache) trigonometrische Beziehungen ($\cos\varphi_1 = \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{|z_1|}$ und $\sin\varphi_1 = \frac{\mathrm{Im}(z_1)}{|z_1|}$) am rechtwinkligen Dreieck und Betrachtung des entsprechenden Quadranten hergeleitet werden muss. Die Umkehrung, also die Darstellung von $z_2 = 4 \cdot E(45°)$ mit Real- und Imaginärteil gelingt den Studierenden besser, da ihnen der Bezug $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ zum Großteil bekannt ist und damit direkt von der gegebenen Darstellung in die gesuchte durch Einsetzen gerechnet werden kann. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Es ist

$$x^2 = 6\,x - 25 \iff x^2 - 6\,x + 25 = 0 \iff x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 25}}{2} =$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64\,i^2}}{2} = \frac{6 \pm 8\,i}{2} = 3 \pm 4\,i.$$

Die Lösung $x_1 = 3 + 4\,i$ stellt in der Gaußschen Zahlenebene den Punkt $(3, 4)$, die Lösung $x_2 = 3 - 4\,i$ den Punkt $(3, -4)$ dar, wobei die Rechtswertachse als Realteilachse und die Hochwertachse als Imaginärteilachse interpretiert wird.

b) Es ist

- $z_1 = 3 + 3\,i = 3\,\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = 3\,\sqrt{2} \cdot E(45°)$,
- $z_2 = 4 \cdot E(45°) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right) = 2\,\sqrt{2} + 2\,\sqrt{2}\,i$.

Aufgabe 6 (Themengebiet: „Verschiedene Aspekte zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$“): Die Aufgabe beinhaltet verschiedene Gesichtspunkte zu den komplexen Zahlen wie beispielsweise die fehlende Anordnungsfähigkeit des Körpers $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, die Berechnung von i^{17} und die Angabe eines Beispiels für einen Körper (außer $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$). Diese Aufgabe wird im Vergleich zu den übrigen fünf Aufgaben mit Abstand am schwächsten bearbeitet. Die korrekte Begründung bei Teilaufgabe a) kann von lediglich fünf Studierenden geliefert werden; in den meisten übrigen Fällen wird kein Lösungsversuch getätigt, da anscheinend nicht bekannt ist, dass in einem angeordneten Körper $(K, +, \cdot, <)$ jedes Quadrat a^2 für alle Elemente $a \in K$ stets nichtnegativ ist. Teilaufgabe b) können vier Studierende korrekt beantworten, für die meisten besitzt die imaginäre Einheit i aber ein negatives Vorzeichen. Die einfache Berechnung in c) gelingt bei dieser Aufgabe am besten, wobei über die Hälfte der Studierenden selbst diese Teilaufgabe nicht korrekt bearbeiten kann, was auf Mängel bei einfachen Rechenmethoden schließen lässt. Lediglich fünf Studierende können bei Teilaufgabe d) einen weiteren Körper neben den in der Aufgabenstellung geschilderten angeben; in vielen Lösungen wird der Zahlenbereich $\mathbb{Z}$, in einigen Fällen sogar der Zahlenbereich $\mathbb{N}$ als Körper deklariert. Im Erwartungshorizont liegt etwa:

a) Für $i \in \mathbb{C}$ ist $i^2 = -1$, also ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nicht anordnungsfähig, da das Quadrat der komplexen Zahl $i \in \mathbb{C}$ negativ ist.

b) i hat wegen a) kein Vorzeichen.

c) Es ist $i^{17} = i^{16} \cdot i = 1 \cdot i = i$.

d) Es ist etwa $\mathbb{Z}_5$ ein weiteres Beispiel für einen Körper.

6.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Rekapitulierend sollen die Ergebnisse der Testerhebungen zum Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik I + II“ zusammengefasst und ihre Bedeutung in der Längsschnittstudie dargelegt werden. Für die Testerhebung zum ersten Teil des Zyklus ergibt sich:

- arithmetischer Mittelwert $\bar{x}_{\text{Test 1}} = 10{,}90$ (mit $n_{\text{Test 1}} = 121$),
- arithmetischer Mittelwert $\bar{x}_{\text{Test 2}} = 8{,}66$ (mit $n_{\text{Test 2}} = 108$),
- gewichtetes arithmetisches Mittel (zu bilden aufgrund des unterschiedlichen Stichprobenumfangs in den beiden Tests) $\bar{x}_{\text{Erhebung 1}} = 9{,}84$.

Für die Erhebung zum zweiten Teil des Zyklus ergibt sich:

- arithmetischer Mittelwert $\bar{x}_{\text{Test 1}} = 12{,}87$ (mit $n_{\text{Test 1}} = 73$),
- arithmetischer Mittelwert $\bar{x}_{\text{Test 2}} = 7{,}55$ (mit $n_{\text{Test 2}} = 66$),
- gewichtetes arithmetisches Mittel $\bar{x}_{\text{Erhebung 2}} = 10{,}34$.

Die Aufgaben der vier Einzeltests behandeln genau die Inhalte der beiden Veranstaltungen des Zyklus, es werden grundlegende Begriffe und Methoden verlangt sowie die Zahlenbereiche von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen mit jeweils spezifischen Anwendungen thematisiert; dabei werden viele Schulinhalte vom höheren Standpunkt der universitären Mathematik problematisiert, die sich auch in den Testerhebungen zum Schulwissen in den Gebieten Algebra, Geometrie und Stochastik (nicht aber in Analysis) finden lassen. Themengebiete aus den Testerhebungen zum Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik I + II“ sind unter anderem:

- **Algebra**: Teilbarkeitslehre, Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie, Primzahlen und deren Anwendung, Eigenschaften elementarer algebraischer Strukturen, Gleichungslehre im Kontext der Zahlenbereichserweiterung, Grundlagen der Gleichungslehre.
- **Geometrie**: Eigenschaften von Kongruenzabbildungen und Ähnlichkeitsabbildungen, Satzgruppe des Pythagoras, trigonometrische Beziehungen am regulären Dreieck.
- **Stochastik**: Kombinatorik (Urnenmodell), elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Laplacewahrscheinlichkeiten, hypergeometrischer und Binomialverteilung, bedingter Wahrscheinlichkeit und stochastischer Unabhängigkeit.

Aufgrund der bisherigen Charakterisierung (deskriptive Ergebnisse und Bezug zu den Schulwissenstests) werden die beiden Testerhebungen nun in den Zusammenhang der Längsschnittstudie eingeordnet, welche folgende zeitliche und inhaltliche Struktur aufweist:

Tabelle 6.5: Struktur der Längsschnittstudie

Semester	WS 10/11	SS 11	WS 11/12	SS 12
Erhebung	Vortest	Test Grundl. I	Test Grundl. II	Nachtest
Vorlesung	Grundl. I	Grundl. II	(Lin Alg I)	(Lin Alg II)

In der obigen Tabelle wird der zeitliche Verlauf der vier Erhebungen (Vortest, Testerhebung zu den Inhalten der Vorlesung Grundlagen der Mathematik I, Testerhebung zu den Inhalten der Vorlesung Grundlagen der Mathematik II und Nachtest) skizziert; dabei wird vermerkt, im Rahmen welcher Veranstaltung diese Erhebungen durchgeführt wurden. Die Veranstaltungen Lineare Algebra I + II haben keinen Bezug zu den Inhalten der Erhebungen, es sind lediglich die Vorlesungen, in denen die Testerhebungen zum Vorlesungszyklus Grundlagen der Mathematik II und der Nachtest stattgefunden haben. Die Längsschnittuntersuchung erstreckt sich vom Wintersemester 2010/11 bis zum Sommersemester 2012 (ersten vier Fachsemester; Grundstudium), in diesem Zeitraum wurden die Erhebungen chronologisch in den oben erwähnten Veranstaltungen erfasst.

Der Vortest (zu Beginn des Wintersemester 2010/11) misst das Schulwissen zu Studienbeginn ohne universitäre Einflüsse, der Nachtest (während des Sommersemesters 2012) erfasst dieses Wissen, nachdem die Studierenden den Zyklus „Grundlagen der Mathematik“ gehört haben (es zeigen sich signifikante Steigerungen in Algebra, Geometrie und Stochastik); in diesem Zwischenraum (Sommersemester 2011 und Wintersemester 2011/12) werden die Inhalte des Zyklus in Testerhebungen analysiert, was die obigen Ergebnisse zeigen. Mit Mittelwerten um die 10,00 Punkte fallen die Erhebungen nicht sonderlich gut aus; zu beachten ist aber, dass die Studierenden dieses Wissen über die Vorlesungsinhalte (mehr oder weniger) spontan nach jeweils etwa einem halben Jahr abrufen. Dennoch kann man nun einen positiven Zusammenhang zwischen diesen eher schwachen Leistungen und der Entwicklung des Schulwissens zwischen Vor- und Nachtest ableiten: die Testerhebungen zum Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ messen universitäres mathematisches Wissen und thematisieren gleichzeitig viele Schulinhalte vom Anspruch der Hochschulmathematik aus; obwohl das universitäre Wissen nicht sonderlich ausgeprägt erscheint (vgl. die schwachen Mittelwerte), haben diese Kenntnisse dann im Nachtest einen positiven Effekt auf die Leistungen im Schulwissen, da in drei Gebieten erhebliche Leistungssteigerungen erzielt werden, nur im Kontrollgebiet Analysis nicht. Damit zeigt sich wie in der Einleitung dieses Kapitels dargestellt, dass die beiden Facetten der Mathematik einen Einfluss aufeinander haben, nämlich dass die universitäre Mathematik die Schulmathematik positiv verstärkt.

Die universitäre fachwissenschaftliche Ausbildung im Unterrichtsfach Mathematik an der Ludwig-Maximilians-Universität München stützt sich im ersten Studienjahr auf grundlegende Methoden und Begrifflichkeiten der Mathematik und beleuchtet systematisch die grundlegenden Zahlenbereiche von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen. Damit werden schulische Inhalte aufgegriffen und die Universitätsmathematik gibt damit Perspektiven, die Schulmathematik tiefer zu durchdringen. Die Exaktheit in der Argumentation der Universitätsmathematik erklärt Aspekte, die in der Schulmathematik nur auf Plausibilitätsbetrachtungen beschränkt sind. Diese Kernpunkte könnten womöglich die signifikant besseren Ergebnisse im Nachtest im Vergleich zum Vortest erklären, beide Erhebungen bestehen aus den gleichen Aufgaben mit schultypischen Inhalten. Obwohl die Leistungen in den Testerhebungen zu den Inhalten der beiden Vorlesungen Grundlagen der Mathematik I + II nicht besonders gut sind, bleibt bei den Studierenden ein nachhaltiger Effekt in Bezug auf schultypisches mathematisches Wissen, was als erfreulich anzusehen ist. Die deutlich besseren Leistungen im Nachtest können auch durch weitere (nicht untersuchte) Einflüsse bedingt werden, wie etwa durch die Inhalte der fachdidaktischen Ausbildung im Unterrichtsfach Mathematik. Die Ergebnisse haben einen explorativen Charakter.

7 Diskussion der Ergebnisse

Dieses Dissertationsprojekt soll mit einer Rückschau abgerundet werden, in der die zentralen Ergebnisse der Arbeit nochmals zusammengestellt und diskutiert werden. Dabei werden zunächst die Ergebnisse zum schultypischen mathematischen Wissen der Studierenden zu Studienbeginn von drei Kohorten erläutert. Daraufhin erfolgt eine Interpretation der Leistungen von G8-Absolventinnen und -Absolventen, auch kontrastierend zu den Ergebnissen der G9-Absolventinnen und -Absolventen. Des Weiteren werden die Leistungen im mathematischen Vorwissen bezüglich des Einflusses erklärender Variablen untersucht und schließlich die Leistungsentwicklung des schultypischen Wissens nach etwa zwei Studienjahren unter Einbezug der neukonzipierten Studieneingangsphase diskutiert.

7.1 Schultypisches mathematisches Wissen

Das schulische mathematische Wissen der Studierenden wird mit Hilfe von Testerhebungen in den vier Bereichen Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik untersucht. Getestet werden drei Jahrgänge, nämlich die Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Wintersemester 2010/11 bzw. 2011/12 bzw. 2012/13. Es werden zunächst die zentralen Ergebnisse für diese drei Testgruppen zusammengefasst:

Tabelle 7.1: Arithmetische Mittelwerte der Einzelfächer und des Mittelwerts der drei Testgruppen

Fach	WS 10/11	WS 11/12	WS 12/13
Algebra	18,87	18,87	18,89
Geometrie	11,23	12,70	12,05
Analysis	13,55	14,46	10,01
Stochastik	9,25	9,69	7,29
Mittelwert	13,51	14,25	12,06
Anzahl	139	77	133

Die Ergebnisse im mathematischen Schulwissen liegen im Mittel für alle drei Jahrgänge leicht über der Hälfte der Maximalpunktzahl von 24,00 Bewertungseinheiten; die Ergebnisse in Algebra bzw. Geometrie sind relativ konstant für alle Gruppen und auf sehr gutem (bei etwa 80 % der Maximalpunktzahl) bzw. mittelmäßigem Niveau (bei etwa 50 % der Maximalpunktzahl). In Analysis streuen die Leistungen am stärksten: die der ersten beiden Jahrgänge liegen über der Hälfte der Maximalpunktzahl, die der dritten Testgruppe zwei Punkte darunter. In Stochastik ist ein ähnlicher Trend zu erkennen, da auch in diesem Fall die Gruppe Wintersemester 2012/13 um etwa zwei Bewertungseinheiten abfällt; insgesamt sind die Ergebnisse in Stochastik sehr schwach, diese befinden sich etwa bei einem Drittel der Maximalpunktzahl. Diese Beschreibung der erzielten Leistungen gibt einen Überblick zum mathematischen Vorwissen aus der Schule der Studierenden des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen an der Ludwig-Maximilians-Universität München über einen Zeitraum von drei Jahren.

Die Inhalte der Aufgaben erstrecken sich auf verschiedene Themenschwerpunkte der Sekundarstufe I + II, was die jeweilige Einordnung in die entsprechenden Kernpunkte der bayerischen Lehrpläne für die sechsstufige Realschule und das achtjährige Gymnasium zeigt. Ferner fokussieren die Inhalte der Aufgaben die verschiedenen Facetten der Bildungsstandards; es werden die unterschiedlichen Aspekte der allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die Leitideen der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen sowie die Anforderungsbereiche der allgemeinen mathematischen Kompetenzen repräsentiert.

Im Rahmen der Dissertation wird eine spezifische Studiengruppe untersucht (Lehramt an Grund-, Haupt- oder Realschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik) und spezielle Forschungsfragen fokussiert. Daher sind auch die Testinstrumente spezifisch auf die Zielgruppe und die Kerninteressen der Fragestellung abgestimmt (vgl. 2.2.1 und 2.2.2). Es wird das fachmathematische Wissen (an dieser Stelle schultypische Kenntnisse) der Studierenden analysiert, gemäß dem Modell von Shulman ein spezieller Aspekt des matter content knowledge (kein curriculares Wissen) und gemäß dem Modell von Bromme das Fachwissen (keine fachdidaktischen Kenntnisse) [110], [26], [27]. Die Aufgaben für die Messung des schulischen mathematischen Wissens sind in die vier Bereiche Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik unterteilt; diese greift die Differenzierung in der TEDS-M-Studie auf. Folgende Aspekte werden dort bei der Messung der fachmathematischen Kompetenzen thematisiert [22, S. 172]:

- **Arithmetik**: natürliche, ganze, rationale, irrationale, reelle und komplexe Zahlen mit ihren Eigenschaften und Rechenregeln, Bruch- und Prozentrechnung, arithmetische Folgen, Teilbarkeit, Kombinatorik.

- **Geometrie**: Messen geometrischer Größen, Abbildungen, Geometrie der Ebene und des Raumes.

- **Algebra**: Folgen, Terme, Gleichungen und Ungleichungen, proportionale Zuordnungen, lineare, quadratische und exponentielle Funktionen, Anfänge der Analysis eingeschränkt auf Grenzwerte und Stetigkeit, lineare Algebra.
- **Stochastik**: Darstellung, Beschreibung und Interpretation von Daten, klassische Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Im Rahmen der Dissertation werden folgende Themenschwerpunkte gesetzt:

- **Algebra**: Behandlung von Termen, Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen, Gleichungssysteme, Prozentrechnung, Bruchrechnung, Gleichungslehre, Eigenschaften von Quadratwurzeln, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze.
- **Geometrie**: Flächeninhalts- und Umfangsbestimmung von Kreis und Quadrat, Flächeninhaltsbestimmung von Rechteck und Quadrat unter Verwendung des Satzes von Pythagoras, Kongruenzabbildungen (Drehung, Punktspiegelung und Parallelverschiebung), Innenwinkelsumme im Dreieck, Gleichungen im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, geometrische Örter (Umkreis- und Inkreismittelpunkt des Dreiecks), Zusammenhang von Cosinussatz und Satz des Pythagoras.
- **Analysis**: Bedeutung der Parameter bei quadratischen Funktionen, Beschreibung von Alltagssituationen mit Funktionen, Logarithmus- und Exponentialfunktion und Umkehrfunktion, Zusammenhang zwischen Funktion und ihrer Ableitungsfunktion, Zusammenhang zwischen Stammfunktion und Integrandenfunktion, Grenzwertbestimmung und Asymptoten.
- **Stochastik**: Urnenexperimente: Ziehen mit bzw. ohne Wiederholung und mit bzw. ohne Beachtung der Reihenfolge, Permutationen, Laplacewahrscheinlichkeit, hypergeometrische Verteilung, bedingte Wahrscheinlichkeit, elementare Aussagen über Wahrscheinlichkeiten.

Es ergeben sich inhaltlich und strukturell Gemeinsamkeiten, dennoch werden im Dissertationsprojekt andere Schwerpunkte gesetzt und die Gebiete anders gewichtet. Ferner sind dabei fast alle Aufgaben im offenen Format konzipiert, so dass im Lösungsweg der bearbeiteten Aufgaben Fehlerbilder eruiert und eingeordnet werden können. Die Diskussion dieser zu den schultypischen Aufgaben in den vier Gebieten ist in Kapitel 5 bei der Analyse der Einzelaufgaben in Vor- und Nachtest erbracht worden. (In Kapitel 6 werden auch die Fehlerbilder bei den Aufgaben zum universitären mathematischen Wissen untersucht.)

Es werden nun wieder die obigen Ergebnisse der drei Gruppen fokussiert: die Leistungen für die drei Gruppen sind etwa bei halber Maximalpunktzahl, obwohl nur schultypisches Wissen geprüft wird. Besonders zukünftige Realschullehrkräfte müssen diese Inhalte sicher beherrschen, um diese auf einem ansprechenden Niveau unterrichten zu können; dies bezieht sich vor allem auf die Aspekte der Sekundarstufe I, die auch von den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss im Fach

Mathematik beschrieben werden [71], [106, S. 235]. Ferner haben die Studierenden die allgemeine Hochschulreife und damit eine bescheinigte Studierfähigkeit; Roppelt geht sogar noch einen Schritt weiter und bemerkt in diesem Zusammenhang:

> „Es ließe sich diskutieren, ob Grundkompetenzen auf hohem Niveau als hinreichend angesehen werden können, um von vertiefter Allgemeinbildung hinsichtlich mathematischer Kompetenzen insgesamt zu sprechen. Eine allgemeine Befähigung zum Studium setzt jedenfalls Kenntnisse voraus, die über die Inhalte der Sekundarstufe I und die hier definierten Grundkompetenzen hinausgehen.“ [106, S. 236].

Die Leistungen der Studierenden im mathematischen Vorwissen aus der Schule sind auf schwachen Niveau, wenn man bedenkt, dass alle Testpersonen die allgemeine bzw. fachgebundene Hochschulreife besitzen. Die Ergebnisse in Geometrie müssten deutlich besser ausfallen, da die Inhalte den Anspruch der Mittelstufe der Schulmathematik nicht überschreiten. Im Teilgebiet Stochastik muss beachtet werden, dass in der nichtgymnasialen Ausbildungsrichtung der Oberstufe der Schule (vor allem in der technischen Ausbildungsrichtung der Fachoberschule) keine bzw. nur in geringem Maße Inhalte dieser Disziplin vermittelt werden; das ist eine Erklärung für die schwachen Leistungen in diesem Gebiet für eine spezielle Gruppe der Testpersonen. Für die Gymnasialgruppen sind die Ergebnisse zwar besser, aber auch nicht auf ausreichend hohem Niveau. Die Inhalte und der zeitliche Umfang für die gymnasiale und nichtgymnasiale Ausbildungsrichtung im Fach Stochastik sind in Kapitel 3 diskutiert worden (vgl. 3.5.3); dabei werden Begründungen für das schwache Abschneiden der Studierenden in dieser Teildisziplin geschildert. Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass ein solides Basiswissen in der Schulmathematik für das spätere Unterrichten in der Klasse (unabhängig vom Schultyp) eine unverzichtbare Voraussetzung ist; aufgrund der erzielten Leistungen der drei Testgruppen (Studienanfängerinnen und Studienanfänger der Wintersemester 2010/11 bzw. 2011/12 bzw. 2012/13; insgesamt etwa 350 Testpersonen) muss in Frage gestellt werden, ob diese Basiskenntnisse vorliegen.

Die Ergebnisse der TEDS-M-Studie zeigen, dass fast die Hälfte der deutschen Haupt- oder Realschullehrkräfte ein fachmathematisches (und auch mathematikdidaktisches) Wissen aufweist, das dem untersten TEDS-M-Kompetenzniveau entspricht. Demnach haben diese Lehrkräfte zum Teil selber Schwierigkeiten, mathematische Nichtstandardaufgaben zu lösen, die auf dem Niveau der zu unterrichtenden Lernenden liegen [20, S. 6]. Dieser Aspekt bezieht sich in der TEDS-M-Studie zwar auf Lehrkräfte, kann aber auch auf die Studierenden des Lehramts an Haupt- oder Realschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik übertragen werden.

7.2 Leistungsbild der G8-Absolventinnen und -Absolventen

Die Diskussion über G8- und G9-Schulleistungen ist vor allem in Bayern sehr aktuell und andauernd im Fokus. Die Tatsache, dass die Fähigkeiten von Studierenden im Fach Mathematik vor allem zu Studienbeginn bemängelt werden, wird durch die Verkürzung der Schulzeit im G8-System noch deutlich kritischer gesehen, da die Lücke zwischen den beiden Bildungsinstitutionen vergrößert wird:

> „Im Zuge der in vielen Bundesländern bevorstehenden Verkürzung der gymnasialen Schulausbildung (G8) ist schon jetzt absehbar, dass sich die Lücke vergrößern wird." [29, S. 110].

Ein weiterer Kritikpunkt am G8-System ist folgender: das Gymnasium hat unter anderem die Aufgabe, Schülerinnen und Schüler bei der Studienwahl zu unterstützen, was auch durch Vertiefungsmöglichkeiten für ein Fach realisiert werden kann; durch den Wegfall der Leistungskurse im G8-System (in Bayern) wird diese Möglichkeit deutlich eingeschränkt [80, S. 89].

Die Ergebnisse der Dissertation zeigen, dass G8-Absolventinnen und -Absolventen im Vergleich zu den G9-Absolventinnen und -Absolventen in den vier Vorwissenstests minimal besser sind, wenn man für G9-Absolventinnen und -Absolventen Grund- und Leistungskurs nicht trennt; betrachtet man diese Gruppen differenziert, so sind die Leistungen von Studierenden mit achtjähriger Abiturausbildung ähnlich zu denen der Leistungskursteilnehmenden und deutlich über denen der Grundkursteilnehmenden. Zwischen den Testpersonen der G8- und der Grundkursgruppe zeigen sich vor allem Leistungsunterschiede in den Gebieten Analysis und Stochastik, also in Bereichen der Sekundarstufe II. Die Inhalte der Stochastik werden im G8-Zug (in Bayern) verteilt in jeder Jahrgangsstufe (5. bis 12. Klasse) mit insgesamt 94 Stunden im Vergleich zu 44 Stunden im Grundkurs kompakt in Klassenstufe 12 unterrichtet, was die Differenzen im Leistungsbild bei dieser Teildisziplin erklärt. Die Leistungskursgruppe (114 Stunden in den Klassenstufen 12 und 13) zeigt in diesem Fach ähnliche Leistungen wie die G8-Gruppe; die inhaltlichen Ansprüche im G8-Zug sind im Vergleich zum Leistungskurs aber deutlich geringer, obwohl vom zeitlichen Umfang her nur 20 Stunden Differenz vorliegen. Diese inhaltliche Kürzung im G8-System ist auch der Verteilung auf alle Klassenstufen geschuldet, da die inhaltlichen Ansprüche sukzessive und kontinuierlich aufbereitet werden müssen. Bei der Interpretation dieser Ergebnisse der Dissertation müssen die geringen Gruppengrößen der G8-Absolventinnen und -Absolventen beachtet werden: im Jahrgang Wintersemester 2011/12 waren 16 und im Jahrgang Wintersemester 2012/13 dann 23 G8-Absolventinnen und -Absolventen an den Testerhebungen beteiligt; damit sind die Ergebnisse nicht repräsentativ, geben aber einen ersten explorativen

Ansatz für diese Thematik im Fach Mathematik. Die Ergebnisse der Dissertation zeigen, dass die Leistungen von G8-Absolventinnen und -Absolventen (im Fach Mathematik) nicht so schlecht sind wie es in vielen Diskussionen dargestellt wird.

Im Rahmen der TIMS-Studie (Trends in International Mathematics and Science Study) konnte gezeigt werden, dass die Leistungen von Lernenden, die ein achtjähriges Gymnasium besuchen, am Ende der Sekundarstufe II signifikant besser sind als die von Lernenden mit neunjähriger Gymnasialbildung [58, S. 4], [8]. Ferner sind die Erkenntnisse der Kess-Studie (Kompetenzen und Einstellungen von Schülerinnen und Schülern) zu nennen: diese ist eine Längsschnittstudie, die von Hamburger Schulforscherinnen und -forschern vom Landesinstitut für Lehrerbildung und Schulentwicklung durchgeführt wurde. Dabei wurden die Leistungen eines Schuljahrgangs in verschiedenen Klassenstufen untersucht, beginnend mit der vierten Klasse (insgesamt vier Erhebungen). In der Kess 12-Studie steht dieser Jahrgang kurz vor dem Abschluss des Abiturs, der Stichprobenumfang liegt bei knapp 4000 Lernenden [46]. Die Ergebnisse der G8-Lernenden (aus der Kess 12-Studie) werden mit Leistungen von G9-Lernenden der LAU-Studie (Aspekte der Lernausgangslage und der Lernentwicklung) mit dem gleichen Testdesign verglichen (diese Studie wurde sechs Jahre zuvor durchgeführt) [46], [16], [15]. Das mathematische Wissen der Abiturientinnen und Abiturienten wurde mit zwei unterschiedlich ausgerichteten Testerhebungen erfasst: der erste Test (mathematische Grundbildung) umfasst die inhaltlichen Bereiche Zahlen und Zahlenverständnis, Proportionalität, Algebra, Messen und Schätzen (der Mittelwert der Kompetenzskala wurde auf 500 und die Standardabweichung auf 100 Skalenpunkte festgelegt) [126, S. 6]. Der zweite Test (voruniversitäre Mathematik) beinhaltet das Verständnis der Konzepte und Operationen der Mathematik in der gymnasialen Oberstufe mit den Gebieten Zahlen, Gleichungen und Funktionen, Analysis, Geometrie, Aussagenlogik und Beweisen sowie Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (der Mittelwert der Kompetenzskala wurde auf 100 und die Standardabweichung auf 30 Skalenpunkte festgelegt) [126, S. 7]. Die Ergebnisse der G8-Absolventinnen und -Absolventen (aus der Kess-Studie) sind dabei leicht besser als die G9-Absolventinnen und -Absolventen (aus der LAU-Studie). Insgesamt lässt sich festhalten (nicht nur auf das Fach Mathematik bezogen):

> „Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass die Testbesten des Kess-Jahrgangs in allen untersuchten Kompetenzbereichen insgesamt höhere Lernstände verzeichnen als die Testbesten des LAU-Jahrgangs - ein Hinweis darauf, dass unter den Rahmenbedingungen des G8 die Leistungsspitze erfolgreich gefördert werden konnte. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass unter den erhöhten Anforderungen des G8 mehr Abiturientinnen und Abiturienten höhere Lernstände erreicht haben.“ [126, S. 13].

7.3 Einfluss exogener Variablen auf das Leistungsbild im mathematischen Vorwissen

Die Regressoren wurden mit Hilfe eines Fragebogens erhoben, der persönliche und studienbezogene Angaben, Studien- und Berufswahlmotive sowie Lernstrategien erfasst. Dieser beinhaltet 42 Fragen und erfährt folgende Aufgliederung:

- **persönliche Voraussetzungen** (drei Fragen): Alter, Geschlecht und Fachsemester.
- **studienbezogene Voraussetzungen** (acht Fragen): Studiengang, Kombinationsfächer (neben Mathematik), Art der Hochschulreife, Bundesland, in dem die Hochschulreife erlangt wurde, mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe der Schule, bisheriger Bildungsweg, Priorität des Faches Mathematik im Vergleich zu den Kombinationsfächern, Brückenkursbesuch.
- **Studien- und Berufswahlmotive** (24 Fragen) untergliedert in die Themenblöcke: Studieninteresse (drei Fragen), Gründe für die Wahl des Unterrichtsfaches Mathematik (fünf Fragen), intrinsische Studienwahlmotive (zwei Fragen), extrinsische Studienwahlmotive (sechs Fragen), intrinsische Berufswahlmotive (vier Fragen) und extrinsische Berufswahlmotive (vier Fragen).
- **Lernstrategien** (sieben Fragen).

Der Fragebogen orientiert sich an den Items der beiden Fragebögen EMIL (Eilerts-Mathematik-Inventar-Lehrerbildung) von Eilerts und FEMOLA (Fragebogen zur Erfassung der Motivation für die Wahl des Lehramtsstudiums) von Pohlmann und Möller [39, S. 97], [87, S. 195-196], [94].

Für den ersten Block (persönliche und studienbezogene Voraussetzungen) zeigen die Ergebnisse der Dissertation, dass der studierte Lehramtstyp und die mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe der Schule signifikanten Einfluss auf das Leistungsbild der Studierenden im mathematischen Vorwissen (Algebra, Geometrie, Analysis und Stochastik) haben. Andere Faktoren in dieser Kategorie wie Alter, Art der Hochschulreife, Bildungsbiografie, Priorisierung der Fächer, Bundesland, in dem das Abitur erlangt wurde, Brückenkursbesuch haben keinen bedeutsamen Einfluss auf die erzielten Leistungen.

Beide Faktoren haben gewisse institutionelle Bedingungen: so unterliegt das Studium für ein Lehramt an Grundschulen einer örtlichen Zulassungsbeschränkung [81], so dass die Gruppe relativ gute Noten im Abitur (und wohl auch im Fach Mathematik) erbracht hat und somit ein solides mathematisches Grundwissen aufweist. Ferner könnten Studierende für das Lehramt an Realschulen einen höheren fachwissenschaftlichen Anspruch an das Fach Mathematik haben als Studierende für das

Lehramt an Hauptschulen; diese Gruppe könnte eher auf pädagogische und psychologische Aspekte fokussiert sein, da diese Faktoren für den späteren Beruf eine größere Rolle spielen als spezifisches Wissen in einem Fach. Die Untersuchungen zeigen, dass die Grundschulgruppe vergleichsweise sehr gute, die Realschulgruppe gute und die Hauptschulgruppe sehr schwache Leistungen im mathematischen Vorwissen erbringen. Zu beachten sind die geringen Stichprobenumfänge der beiden Gruppen Grund- und Hauptschule. Die TEDS-M-Studie zeigt, dass Grundschullehrkräfte mit dem Unterrichtsfach gute fachmathematische und fachdidaktische Kompetenzen aufweisen (im Vergleich zu den entsprechenden Lehrkräften ohne Unterrichtsfach Mathematik). Ferner zeigen Haupt- und Realschullehrkräfte sehr schwache fachwissenschaftliche und fachdidaktische Leistungen; diese haben wie oben erwähnt teilweise Schwierigkeiten, anspruchsvolle Aufgaben zu lösen, die auf dem Niveau der zu unterrichtenden Lernenden liegen [20, S. 6].

Ferner haben die Studierenden eine unterschiedliche mathematische Vorbildung, je nachdem über welchen Weg die Hochschulreife erlangt wurde, d.h. über den klassischen Weg im Gymnasium oder über Fach- bzw. Berufsoberschulen. Der gymnasiale Sektor unterteilt sich in Grund- und Leistungskurs im G9 sowie die G8-Ausbildung (in Bayern erster Abschlussjahrgang im Jahr 2011); die Fach- und Berufsoberschulen setzen gewisse Schwerpunkte wie technischer, wirtschaftlicher und künstlerischer Ausbildungsweg. Daher sind die Einflüsse dieses Regressors auf das mathematische Vorwissen nachvollziehbar, da inhaltliche und zeitliche Intensivierung der Mathematik unterschiedliches Gewicht an den verschiedenen Schultypen erfahren. Vor allem die guten Leistungen von Leistungskurs- und G8-Gruppe sind zu betonen und die eher schwachen von Fach- und Berufsoberschulgruppe (von Ausnahmen wie der FOS-Gruppe im Jahrgang WS 10/11 abgesehen). Die Leistungen in den vier Fächern variieren zudem stark, was unter anderem durch die unterschiedlichen Ausbildungsrichtungen im Nichtgymnasialsektor zu begründen ist. Die gymnasiale Ausbildung in der Oberstufe bewirkt ein besseres Leistungsbild im mathematischen Vorwissen als die nichtgymnasiale Ausrichtung.

Für die übrigen Faktoren dieses Blocks, die keinen bedeutsamen Einfluss auf das Leistungsbild im mathematischen Vorwissen haben, zeigen sich folgende Auffälligkeiten: betrachtet man den Regressor Alter, so zeigen die Studierenden unter 21 Jahren bessere Leistungen als die ältere Vergleichsgruppe (mindestens 21 Jahre), vor allem im Teilgebiet Stochastik (vgl. 3.2.1). Die jüngere Vergleichsgruppe beginnt das Studium direkt nach Beendigung der Schullaufbahn, so dass eine höhere Affinität zu den Inhalten der Oberstufe vorhanden ist, weswegen die Ergebnisse in Stochastik (und auch in Analysis) besser sind. Für die ältere Vergleichsgruppe ist zum Teil mehr zeitliche Distanz zu diesen Schulinhalten, was ein Grund für die schwächeren Ergebnisse sein kann (Ausnahme: Studierende von der Berufsoberschule, die in der Regel zur älteren Vergleichsgruppe zählen, aber dennoch direkt nach der Schule das Studium beginnen). Ferner zeigt sich, dass die weiblichen Studierenden besser abschneiden als die männlichen (vgl. 3.2.2). Ein Effekt dabei ist, dass die Studierenden für das Lehramt an Grundschulen fast ausschließlich weiblich sind und diese Gruppe wie oben beschrieben vergleichsweise sehr gute Ergebnisse erzielt und damit das Leistungsbild für die weibliche Gruppe verbessert; zu beachten sind die deutlich differierenden Gruppengrößen von weiblichen (etwa drei Viertel) und männlichen (etwa ein Viertel) Studierenden. Eilerts konnte zeigen, dass weibliche Studierende für das gymnasiale Lehramt signifikant bessere Leistungen in Mathematik (untersucht mit Hilfe von Klausurergebnissen) erzielen als männliche, dieser Effekt aber bei Studierenden des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen ausbleibt [39, S. 167].

An der Untersuchung waren auch Studierende aus höheren Fachsemestern (ab dem dritten Fachsemester; etwa 12 %) beteiligt, die leicht bessere Leistungen (vor allem in Geometrie und Analysis) erbringen als die Studierenden im ersten Fachsemester, was durch die Studienerfahrung und die dabei bereits erlernten Inhalte (in der Fachwissenschaft und der Fachdidaktik) zu erklären ist (vgl. 3.2.3). Für das Kombinationsfach neben Mathematik im Realschulbereich ergeben sich für die drei Jahrgänge sehr variierende Konstellationen, da das Fach Mathematik in dieser Lehramtsausrichtung mit zahlreichen Fächern kombinierbar ist; daher wird auf eine Interpretation und Diskussion der Ergebnisse verzichtet, obwohl dieser Regressor im ersten Jahrgang (Wintersemester 2010/11) einen signifikanten Einfluss auf das Leitungsbild im mathematischen Vorwissen bewirkt hat (vgl. 3.2.5).

Es werden nun die Variablen betrachtet, die durch die Angaben zu Studien- und Berufswahlmotiven sowie Lernstrategien erfasst wurden; diese Items erfahren eine starke Adaption zu denen des Fragebogens EMIL von Eilerts [39, S. 286]. In der Dissertation haben folgende Items besonderen Einfluss auf das Leistungsbild im mathematischen Vorwissen (vgl. 3.3):

- Bereits vor Studienbeginn hatten die gewählten Studiengebiete einen hohen Stellenwert für Sie (F14, Kategorie Studieninteresse; vgl. 3.3.1).
- Die Qualität des Mathematikunterrichts hat Sie zu Ihrer Studienwahl motiviert (F15, Kategorie Gründe für das Unterrichtsfach Mathematik; vgl. 3.3.2).
- Ihre Fähigkeiten und Begabungen im Fach Mathematik haben die Studienwahl veranlasst (F18, Kategorie Gründe für das Unterrichtsfach Mathematik; vgl. 3.3.2).

Der Einfluss der erklärenden Variablen auf das mathematische Vorwissen macht sich besonders für den Block „Gründe für das Unterrichtsfach Mathematik“ bemerkbar: so zeigen Studierende, die zustimmen, dass die Qualität des Mathematikunterrichts bzw. die eigenen Begabungen und Fähigkeiten in Mathematik ein Motivationsgrund für das Lehramtsstudium im Fach Mathematik sind, signifikant bessere Leistungen als die entsprechenden Vergleichsgruppen. Ferner erzielen Studierende, die dem Fach Mathematik vor Studienbeginn bereits einen hohen Stellenwert zugesprochen haben, signifikant bessere Leistungen. Dies sind alles Faktoren, die sich auf die Zeit vor Studienbeginn beziehen. Zukünftige Erwartungen und Faktoren wie etwa die Steigerung der Leistung im Fach Mathematik sowie intrinsische und extrinsische Studien- und Berufswahlgründe haben dagegen kaum Einfluss auf das Leistungsbild:

> „A preexisting interest and knowledge as well as high quality education during school lead to better results. In contrast items referring to expectations for the future for example question 21 (improving skills), question 28, 29 & 31 (intrinsic motivation for choice of profession) and question 32, 34 & 35 (extrinsic motivation for choice of profession) have no influence on present results in mathematical knowledge. [56, S. 32].

Eilerts konnte feststellen, dass speziell für Studierende des Lehramts an Grund-, Haupt- oder Realschulen die Regressoren intrinsische Studienwahlmotive und Interesse am Lehramtsstudium einen signifikanten Einfluss auf den mathematischen Kompetenzerwerb bewirken [39, S. 188].

Im Zusammenhang mit Studien- und Berufswahlmotiven soll ein Ergebnis des vom Bayerischen Staatsministerium für Bildung und Kultus, Wissenschaft und Kunst geförderten Projekts „Wirksamkeit von Lehrerbildung - Biografiemanagement und Kompetenzentwicklung in der dreiphasigen Lehrerbildung“ angefügt werden; dabei konnten für Lehramtsstudierende mit Mathematik bzw. naturwissenschaftlichen Fächern folgende Kernpunkte zusammengetragen werden:

> „Angehende Lehrkräfte mathematisch-naturwissenschaftlicher Fächer weisen eine Berufswahlmotivation und ein Selbstbild auf, das nur geringfügig von dem Studierender mit anderen Fächern differiert. Bestehende Vermutungen einer geringen Orientierung an pädagogischen Motiven sowie eine starke Betonung fachlicher Interessen bestätigen sich nicht.“ [62, S. 40].

Der Einfluss der Lernstrategien auf das Leistungsbild im mathematischen Vorwissen spielt keine bedeutsame Rolle (Ausnahme Frage 38: Zuhilfenahme von Literatur, nichtzustimmende Gruppe signifikant besser; vgl. 3.4). Eilerts konnte feststellen, dass kognitive und metakognitive Lernstrategien einen deutlichen Einfluss auf den mathematischen Kompetenzerwerb bewirken [39, S. 188]. Das Lernverhalten wird sich im Laufe der Studiendauer verändern und anders priorisieren, da Lernstrategien im Rahmen des erziehungswissenschaftlichen Studiums und in Fachdidaktikveranstaltungen thematisiert werden und die Studienerfahrung auch einen starken Einfluss auf dieses Verhalten nehmen wird. Die Dissertation beschäftigt sich nicht mit der Entwicklung des Lernverhaltens der Studierenden.

7.4 Leistungsentwicklung des schultypischen mathematischen Wissens

In der Längsschnittstudie wird das schulische mathematische Wissen in Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik zu Studienbeginn (Vortest) mit dem Wissen in diesen Gebieten (mit dem gleichen Testdesign) nach etwa zwei Studienjahren (Nachtest) verglichen, wobei die Studierenden in dieser Zwischenzeit die beiden neukonzipierten Vorlesungen „Grundlagen der Mathematik I + II“ besucht haben. Es können zwischen beiden Erhebungszeitpunkten signifikante Steigerungen in den Gebieten Algebra, Geometrie und Stochastik festgestellt werden. In Analysis bleiben die Leistungen annähernd gleich; dieses Fach dient als kontrollierendes Element, da keine sinnvolle Vergleichsgruppe installiert werden konnte und die Inhalte dieser Disziplin nicht in den beiden oben erwähnten Veranstaltungen berücksichtigt werden.

Die Steigerung kann auf den neukonzipierten Vorlesungszyklus zurückgeführt werden, da Inhalte der drei Gebiete Algebra, Geometrie und Stochastik dabei vom höheren Standpunkt der universitären Mathematik betrachtet werden. Es werden Inhalte der elementaren Stochastik (elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung im Rahmen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sowie kombinatorische Überlegungen als Anwendungsgebiet der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$) und der Elementargeometrie (einführende Motivation zur Behandlung der reellen Zahlen $\mathbb{R}$) als größere zusammenhängende Blöcke besprochen. Thematiken, die der schulischen Disziplin Algebra im Rahmen der Veranstaltung zukommen, sind zum einen an verschiedenen Stellen bei der Besprechung der Zahlenbereiche und zum anderen bei der Behandlung der elementaren Zahlentheorie (Teilbarkeitslehre und Primzahlen; Zahlenbereich $\mathbb{Z}$) zu finden. Durch die Betrachtung von Schulinhalten vom höheren Standpunkt der universitären Mathematik werden Lücken im Schulwissen geschlossen und gleichzeitig der Abstraktionsgrad infolge der axiomatisch-deduktiven Struktur der Hochschulmathematik vermindert.

An dieser Stelle werden die drei Bruchstellen zwischen Schul- und Hochschulmathematik von Bauer und Partheil aufgegriffen [7, S. 86-87]: es handelt sich um die Bruchstellen „Lerninhalte“, „Anforderungen und Ziele“ und „Argumentation“ (vgl. 2.1.2). Diese markanten Punkte werden im Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik“ speziell berücksichtigt: durch die Behandlung der Elementargeometrie (im Rahmen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$) ergibt sich hinsichtlich der „Lerninhalte“ keine große Kluft zu Themenbereichen der Schulgeometrie. Die elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein sich überschneidender Inhalt der Schulmathematik und der universitären Mathematik; die inhaltliche Betonung dieser Thematik im Vorlesungszyklus hält Balance zur Ausrichtung dieses Gebiets im Rahmen der Schule, so dass die Bruchstelle „Anforderungen und Ziele“ nicht (ausgeprägt) betroffen ist. Die Bruchstelle „Argumentation“ lässt sich aufgrund der unterschiedlichen Ausrichtungen der Mathematik in beiden Bildungsinstitutionen (algorithmische und beispielorientierte Schulmathematik bzw. axiomatisch-deduktiv aufgebaute Universitätsmathematik) nicht völlig vermeiden; die Thematisierung der elementaren Zahlentheorie in der Vorlesung erfährt (zur Recht) einen axiomatischen Aufbau, dennoch wird stets ein starker Bezug zu den entsprechenden Inhalten der Schulmathematik hergestellt, so dass dieser Bruchstellen entgegengewirkt wird (Beispiel: Besprechung des algebraischen Konstrukts Körper (axiomatischer Ansatz) mit Bezug zur Bestimmung der Lösungsmenge von Gleichungen über einem gegebenen Körper).

Folgende Themengebiete aus den Testerhebungen in Algebra, Geometrie und Stochastik werden im Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik" besprochen:

- **Algebra**: Teilbarkeitslehre, Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie, Primzahlen und deren Anwendung, Eigenschaften elementarer algebraischer Strukturen, Gleichungslehre im Kontext der Zahlenbereichserweiterung, Grundlagen der Gleichungslehre.
- **Geometrie**: Eigenschaften von Kongruenzabbildungen und Ähnlichkeitsabbildungen, Satzgruppe des Pythagoras, trigonometrische Beziehungen am regulären Dreieck.
- **Stochastik**: Kombinatorik (Urnenmodell), elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Laplacewahrscheinlichkeiten, hypergeometrischer und Binomialverteilung, bedingter Wahrscheinlichkeit und stochastischer Unabhängigkeit.

Diese Erkenntnisse zeigen, dass universitäre Inhalte einen signifikanten Einfluss auf das schulische mathematische Wissen haben; durch das Kontrollgebiet Analysis können diese Effekte bestätigt werden, da die Steigerungen nicht etwa auf das Ausscheiden von schwachen Studierenden zurückgeführt werden können, die das Studium beendet haben und damit nicht am Nachtest beteiligt waren. Die Ergebnisse in Analysis sind in Vor- und Nachtest annähernd gleich.

Da der Vorlesungszyklus wie eben dargestellt viele Schulinhalte von einer Metaebene fokussiert, ist dies ein möglicher Ansatz zur Überwindung der ersten Bruchstelle der doppelten Diskontinuität von Felix Klein.

> „Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkt mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; natürlich vergisst er daher alle diese Sachen rasch und gründlich." [63, S. 1].

An den Universitäten wird viel zur Überbrückung der Kluft beim Übergang zwischen Schule und Hochschule unternommen; zwei Ansätze sollen kurz dargestellt werden, welche die bereits beschriebenen Projekte ergänzen (vgl. 2.1.3). Die Technische Universität München versucht mit der TUM School of Education ein Projekt aufzubauen, welches die Ausbildungsqualität von Lehrkräften verbessern und das Lehramtsstudium in den MINT-Bereichen attraktiv machen soll [102, S. 5]. Als Leitbild für dieses Bestreben wird folgende Intention verfolgt:

> „Ein wesentlicher Aspekt ist dabei, dass Studierende im Rahmen der Lehramtsausbildung ihre Expertise mit einem deutlichen Berufsfeldbezug entwickeln können. Es geht somit darum, fachliche, fachdidaktische und pädagogische Kompetenzen gleichermaßen und aufeinander abgestimmt zu entwickeln. Es soll so ein breites und vielfältig anwendbares Wissen aufgebaut werden, wobei Gelegenheiten zum Sammeln von Erfahrungen, zum Üben und Reflektieren gegeben werden und Rückmeldung ein wichtiger Bestandteil ist." [102, S. 5].

Ein zentrales Merkmal ist also die Interaktion und die gegenseitige Ergänzung von fachwissenschaftlichen, fachdidaktischen und erziehungswissenschaftlichen Komponenten, um den Erwerb von aufbauendem Wissen zu ermöglichen; dieser Anspruch wird im Fach Mathematik wie folgt umgesetzt (vgl. 2.1.3):

> „In Bezug auf die Mathematik heißt das konkret, dass von Anfang an schulbezogene Themen und die klassischen Vorlesungsinhalte etwa von Linearer Algebra, Analysis, Algebra, Geometrie oder Wahrscheinlichkeitstheorie aufeinander bezogen werden." [102, S. 5].

Die Humboldt-Universität zu Berlin versucht mit dem HU-Modell die Kleinsche doppelte Diskontinuität (erste Bruchstelle) unter anderem mit Modulen an der Schnittstelle von Fachwissenschaft und Fachdidaktik zu überwinden, indem Thematiken wie Arithmetik, Elementargeometrie und Stochastik ergänzend mit der jeweiligen Didaktikveranstaltung gelehrt werden, um eine direkte Verbindung herzustellen und diese Wissensdomänen miteinander zu vernetzen [102, S. 6].

Der Leitgedanke der Veranstaltungen „Grundlagen der Mathematik I + II" ist in der fachwissenschaftlichen Ausrichtung ähnlich zum HU-Modell; es werden die zentralen Schwerpunkte auf die Gebiete elementare Zahlentheorie, elementare Stochastik und Elementargeometrie gelegt. Die Struktur der Veranstaltungen orientiert sich am Aufbau des Zahlensystems und behandelt die klassischen Zahlenbereiche mit jeweils spezifischen Anwendungen. Ein Brückenkurs mit dem gleichen Leitgedanken komplettiert die Studieneingangsphase (erstes Studienjahr: Brückenkurs und Vorlesungszyklus „Grundlagen der Mathematik"). Die gegenseitige Ergänzung mit entsprechenden Veranstaltungen der Fachdidaktik erfolgt nicht.

Ein weiteres Resultat der Längsschnittuntersuchung kann im Hinblick auf die beiden Regressoren studierter Lehramtstyp und mathematische Schwerpunktsetzung in der Oberstufe gewonnen werden. Die im Vortest aufgezeigten Disparitäten im Leistungsbild der Vergleichsgruppen (schwache Ergebnisse von Hauptschulgruppe bzw. Grundkursgruppe) sind im Nachtest nicht mehr zu beobachten. Alle Gruppen erreichen im Nachtest ein relativ homogenes Leistungsniveau auf einem deutlich höheren Punktespektrum als im Vortest. Die beiden oben diskutierten Regressoren besitzen keinen signifikanten Einfluss mehr auf das Leistungsbild im Nachtest, ebenso wenig die restlichen Prädiktoren, die bereits im Vortest keine bedeutsame Rolle eingenommen haben. Diese Beobachtung kann durch die Leistungssteigerungen der Studierenden in den Gebieten Algebra, Geometrie und Stochastik im Nachtest erklärt werden, also den Bereichen, die in der Studieneingangsphase vom höheren Standpunkt der Mathematik im universitären Rahmen thematisiert werden.

7.5 Schlussbemerkung

Die Dissertation setzt sich mit den fachmathematischen Kenntnissen angehender Mathematiklehrkräften an Grund-, Haupt- oder Realschulen auseinander, eine zentrale Thematik im aktuellen Forschungsdiskurs. Die Untersuchung baut auf einer explorativen Quer- und Längsschnittstudie auf. Die Querschnittstudie fokussiert das schultypische mathematische Wissen von Studienanfängerinnen und Studienanfängern über einen Zeitraum von drei Jahren und analysiert den Einfluss spezieller Faktoren auf diese Kenntnisse und ermöglicht dabei einen Leistungsvergleich zwischen G9- und G8-Absolventinnen und -Absolventen. Die Längsschnittstudie thematisiert das schulische mathematische Wissen der Studierenden zu Studienbeginn und die Entwicklung dieser kognitiven Fähigkeiten über einen Zeitraum von zwei Jahren. Dabei wird der Einfluss der neukonzipierten Studieneingangsphase auf die fachmathematischen Kenntnisse der Lernenden untersucht. Diese Ausrichtung des ersten Studienjahrs setzt sich mit den Gedanken von Felix Klein auseinander und stellt einen möglichen Ansatz zur Überwindung der ersten Bruchstelle der „Doppelten Diskontinuität“ dar.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Literatur

[1] Ableitinger, C., Kramer, J. und Prediger, S. (Hrsg.). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Springer Spektrum, 2013.

[2] Aguirre, J. M., Haggerty, S. M. und Linder, C. J. »Student-teachers' conceptions of science, teaching and learning: a case study in preservice science education«. In: *International Journal of Science Education* 12 (1990), S. 381–390.

[3] Allport, G. *Persönlichkeit. Struktur, Entwicklung und Erfassung der menschlichen Eigenart*. Beltz, 1959.

[4] Anderson, L. W. *A taxonomy for learning, teaching and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Langenscheidt Elt., 2001.

[5] Backhaus, K. *Multivariate Analysemethoden*. Springer, 2010.

[6] Bandura, A. *Self-efficacy. The Exercise of Control*. W.H. Freeman und Company, 1998.

[7] Bauer, T. und Partheil, U. »Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik«. In: *Mathematische Semesterberichte* 56 (2009), S. 85–103.

[8] Baumert, J., Bos, W. und Lehmann, R. (Hrsg.). *TIMSS/III. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie - Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe*. Band 2. Leske + Budrich, 2000.

[9] Baumert, J. und Kunter, M. »Professionelle Kompetenz von Lehrkräften«. In: *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* 9(4) (2006), S. 469–520.

[10] Baumert, J. (Hrsg.). *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Leske + Budrich, 2001.

[11] Baumert, J. *Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz (COACTIV): Dokumentation der Erhebungsinstrumente.* Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, 2009.

[12] Bayerische Staatsregierung. *Ausgestaltung der inhaltlichen Prüfungsanforderungen für die Erste Staatsprüfung nach Kapitel II der Lehramtsprüfungsordnung I zu den einzelnen Fächern (Kerncurricula).* 2008. url: `https://www.verkuendung-bayern.de/kwmbl/jahrgang:2009/heftnummer:2/seite:34`.

[13] Bayerische Staatsregierung. *Ordnung der Ersten Prüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen (Lehramtsprüfungsordnung I - LPO I).* 2008. url: `http://www.gesetze-bayern.de/jportal/portal/page/bsbayprod.psml?showdoccase=1&doc.id=jlr-LehrPrOBY2008rahmen&doc.part=X&doc.origin=bs`.

[14] Bayerische Staatsregierung. *Ordnung der Ersten Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen (Lehramtsprüfungsordnung I - LPO I).* 2002. url: `http://www.gesetze-bayern.de/jportal/portal/page/bsbayprod.psml?showdoccase=1&doc.id=jlr-LehrPrOBY2002rahmen&doc.part=X&doc.origin=bs`.

[15] Behörde für Schule und Berufsbildung (Hrsg.). *LAU - Aspekte der Lernausgangslage und der Lernentwicklung Klassenstufen 11 und 13. Bd. 9: HANSE - Hamburger Schriften zur Qualität im Bildungswesen.* Waxmann, 2012.

[16] Behörde für Schule und Berufsbildung (Hrsg.). *LAU - Aspekte der Lernausgangslage und der Lernentwicklung Klassenstufen 5, 7 und 9. Bd. 8: HANSE - Hamburger Schriften zur Qualität im Bildungswesen.* Waxmann, 2011.

[17] Bühner, M. und Ziegler, M. *Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler.* Pearson Studium, 2009.

[18] Biermann, M. und Blum, W. »Realitätsbezogenes Beweisen. Der Schorle-Beweis und andere Beispiele«. In: *Mathematik Lehren* 110 (2002), S. 19–22.

[19] Blessing, A. »Wer wird Lehrer? Eine empirische Untersuchung zu den beruflichen Motiven und zur Selbsteinschätzung persönlicher Eignung bei künftigen Lehrerinnen und Lehrern«. Magisterarb. Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd, 2005.

[20] Blömeke, S. *Kompetenzen deutscher Mathematiklehrer im internationalen Vergleich. Zentrale Ergebnisse der internationalen Vergleichsstudie TEDS-M*. 2008. url: `http://tedsm.hu-berlin.de/publik/Downloads/teds-m-zusammenfassung.pdf`.

[21] Blömeke, S., Kaiser, G. und Lehmann, R. *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und Referendare*. Waxmann, 2008.

[22] Blömeke, S., Kaiser, G. und Lehmann, R. *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Mathematiklehrkräften für die Sekundarstufe I im internationalen Vergleich*. Waxmann, 2010.

[23] Blömeke, S., Kaiser, G. und Lehmann, R. *TEDS-M 2008. Professionelle Kompetenz und Lerngelegenheiten angehender Primarstufenlehrkräfte im internationalen Vergleich*. Waxmann, 2010.

[24] Blömeke, S. *Kompetenzen von Lehramtsstudierenden in gering strukturierten Domänen. Erste Ergebnisse aus TEDS-LT*. Waxmann, 2011.

[25] Brauckmann, S. und Neumann, M. »Berufliche Gymnasien in Baden-Württemberg: Geschichte und heutige Ausgestaltung«. In: *Wege zur Hochschulreife in Baden-Württemberg. TOSCA - Eine Untersuchung an allgemein bildenden und beruflichen Gymnasien*. Köller, O. (Hrsg.). Leske + Budrich, 2004, S. 69–111.

[26] Bromme, R. *Der Lehrer als Experte: zur Psychologie des professionellen Wissens*. Hans Huber, 1992.

[27] Bromme, R. »Kompetenzen, Funktionen und unterrichtliches Handeln des Lehrers«. In: *Psychologie des Unterrichts und der Schule. Enzyklopädie der Psychologie*. Weinert, F. E. (Hrsg.). Bd. 3. Hogrefe, 1997, S. 177–212.

[28] Bronstein, I. N. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, 2005.

[29] Cramer, E. und Walcher, S. »Schulmathematik und Studierfähigkeit«. In: *Mitteilungen der DMV* 18 (2010), S. 110–114.

[30] Danckwerts, R. *Mathematikleherbildung neu denken*. 2008. url: `http://www.uni-siegen.de/uni/publikationen/extrakte/ausgaben/200805/5.html`.

[31] Danckwerts, R., Prediger, S. und Vasarhelyi, E. »Perspektiven der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für die Sekundarstufen«. In: *GDM-Mitteilungen* 76 (2003), S. 72–74.

[32] Deci, E. L. und Ryan, R. M. »Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik«. In: *Zeitschrift für Pädagogik* 39 (1993), S. 223–238.

[33] Deci, E. L. und Ryan, R. M. *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*. Plenum, 1985.

[34] Diedrich, M., Thussbas, C. und Klieme, E. »Professionelles Lehrerwissen und selbstberichtete Unterrichtspraxis im Fach Mathematik«. In: *Zeitschrift für Pädagogik* 45 (2002), S. 107–123.

[35] Dorier, J.-L., Robinet, A. und Rogalski, M. »The Obstacle of Formalism in Linear Algebra«. In: *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer, 2000, S. 85–100.

[36] Dreyfus, T. *Advanced Mathematical Thinking Processes*. Kluwer, 1991.

[37] Dubinsky, E. und McDonald, M. »APOS. A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research«. In: *The Teaching and Learning at University Level.* Holton, D. (Hrsg.). Kluwer, 2001, S. 275–282.

[38] Dudenredaktion (Hrsg.). *Duden*. Bibliographisches Institut GmbH, 2011.

[39] Eilerts, K. *Kompetenzorientierung in der Mathematik-Lehrerausbildung*. LIT Verlag, 2009.

[40] Elbaz, F. *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Nichols, 1983.

[41] Fahrmeir, L. *Statistik. Der Weg zur Datenanalyse*. Springer, 1999.

[42] Fischer, A. »Gegenseitige Beeinflussungen von Darstellungen und Vorstellungen zum Vektorraumbegriff«. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 28 (2007), S. 311–330.

[43] Fischer, A. »Vorstellungen zur linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und -ergebnisse von Studierenden«. Diss. Universität Dortmund, 2006.

[44] Förderverein Mathematik in Wirtschaft, Universität und Schule an der Ludwig-Maximilians-Universität München e.V. *Mathe-*

LMU.de Nr. 28. Techn. Ber. Mathematisches Institut der Universität München, Oktober 2013.

[45] FREUDENTHAL, H. *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Klett, 1979.

[46] FRIEDMANN, J. *Studie zum verkürzten Gymnasium: Turbo-Abiturienten lernen besser*. Techn. Ber. Spiegel-Online, 2012. URL: `http://www.spiegel.de/schulspiegel/wissen/kess-studie-zu-g8-und-g9-acht-jahre-gymnasium-reichen-aus-a-869483.html`.

[47] FRIEDRICH, H. F. und MANDL, H. »Lernstrategien: Zur Strukturierung des Forschungsfelds«. In: *Handbuch Lernstrategien*. MANDL, H. und FRIEDRICH, H. F. (Hrsg.). Hogrefe, 2006, S. 1–13.

[48] FURDEK, A. *Fehler-Beschwörer*. Books on Demand GmbH, 2001.

[49] GRÜNWALD, N. »Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik: Erfahrungen aus Internationaler und Deutscher Sicht«. In: *Global J. of Engng. Educ* 8 (2004), S. 283–294.

[50] GROSS, J. *Grundlegende Statistik mit R*. Vieweg + Teubner, 2010.

[51] HAGER, W., PATRY, J.-L. und BREZING, H. (Hrsg.). *Evaluation psychologischer Interventionsmaßnahmen: Standards und Kriterien: Ein Handbuch*. Hans Huber, 2000.

[52] HANNA, G. »The Ongoing Value of Proof«. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 18 (1997), S. 171–185.

[53] HATZINGER, R., HORNIK, K. und NAGEL, H. *R - Einführung durch angewandte Statistik*. Pearson Studium, 2011.

[54] HEFENDEHL-HEBEKER, L. *Mathematik besser verstehen (MBV)*. 2009. URL: `http://www.uni-due.de/didmath/ag_hefendehl-hebeker/mbv.shtml`.

[55] HERRMANN, A. »Mathematik besser verstehen«. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (2012), S. 979–980.

[56] HILZ, F. und RIEDL, L. »Motivation and skill: Our future teachers in mathematics«. In: *The Journal of Didactics* 4(1) (2013), S. 15–36.

[57] HIMME, A. »Gütekriterien der Messung: Reliabilität, Validität und Generalisierbarkeit«. In: *Methodik der empirischen Forschung*. ALBERS, S. (Hrsg.). Deutscher Universitäts-Verlag, 2006, S. 383–400.

[58] Homuth, C. *Der Einfluss des achtjährigen Gymnasiums auf den Kompetenzerwerb*. Techn. Ber. Otto-Friedrich-Universität Bamberg, 2012. URL: `http://www.uni-bamberg.de/fileadmin/bagss/2012-12-28_Kompetenzerwerb_am_G8.pdf`.

[59] KDHM. *Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik*. 2011. URL: `http://www.khdm.de`.

[60] Keitel, C. und Otto, M. »Probleme der Profession und des professionellen Wissens des Mathematiklehrers«. In: *Mathmatisch - physikalische Semesterberichte* 26 (1979), S. 154–157.

[61] Kessler, W. *Multivariate Datenanalyse für die Pharma-, Bio- und Prozessanalytik: ein Lehrbuch*. John Wiley, 2006.

[62] Kiel, E. *Abschlussbericht Wirksamkeit von Lehrerbildung - Biografiemanagement und Kompetenzentwicklung in der dreiphasigen Lehrerbildung*. Techn. Ber. Universität München, 2011. URL: `http://epub.ub.uni-muenchen.de/view/subjects/1111.html`.

[63] Klein, F. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*. Springer, 1924.

[64] Klieme, E. »Was sind Kompetenzen und wie lassen sie sich messen?« In: *Pädagogik* 6 (2004), S. 10–13.

[65] Klieme, E. und Rakoczy, K. »Unterrichtsqualität aus Schülerperspektive: Kulturspezifische Profile, regionale Unterschiede und Zusammenhänge mit Effekten von Unterricht«. In: *Deutsches PISA-Konsortium, PISA 2000*. Leske + Budrich, 2003, S. 333–359.

[66] Klieme, E. *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards - Eine Expertise*. Techn. Ber. Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung, Frankfurt a. M., 2003.

[67] Köller, O., Baumert, J. und Neubrand, J. »Epistemologische Überzeugungen und Fachverständnis im Mathematik- und Physikunterricht«. In: *TIMSS/III.. Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie - Mathematische und naturwissenschaftliche Bildung am Ende der Schullaufbahn. Band 2. Mathematische und physikalische Kompetenzen am Ende der gymnasialen Oberstufe*. Baumert, J., Bos, W. und Lehmann, R. (Hrsg.). Leske + Budrich, 2000, S. 229–269.

[68] Künsting, J. und Lipowsky, F. »Studienwahlmotivation und Persönlichkeitseigenschaften als Prädikatoren für Zufriedenheit und Strategienutzung

im Lehramtsstudium«. In: *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie* 25(2) (2011), S. 105–114.

[69] Krauss, S. »Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der COACTIV-Studie«. In: *Journal für Mathematikdidaktik* 29 (2008), S. 223–258.

[70] Kucklick, C. »Gute Lehrer«. In: *Geo* Februar (2011), S. 24–48.

[71] Kultusministerkonferenz (Hrsg.). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss.* Kluwer, 2004.

[72] Kultusministerkonferenz. *Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik.* 2002. URL: `http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/1989/1989_12_01-EPA-Mathe.pdf`.

[73] Kultusministerkonferenz. *Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung.* 2008. URL: `http://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2008/2008_10_16_Fachprofile-Lehrerbildung.pdf`.

[74] Kultusministerkonferenz. *Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II.* KMK, 2004.

[75] Kunter, M. und Klusmann, U. »Kompetenzmessung bei Lehrkräften - Methodische Herausforderungen«. In: *Unterrichtswissenschaft* 38(1) (2010), S. 66–68.

[76] Larcher, S. und Oelkers, J. »Deutsche Lehrerbildung im internationalen Vergleich«. In: *Handbuch Lehrerbildung.* Blömeke, S. (Hrsg.). Klinkhardt, 2004, S. 128–150.

[77] Leviathan, T. »Bridging a Cultural Gap«. In: *Mathematics Education Research Journal* 20(2) (2008), S. 105–116.

[78] Lienert, G. und Raatz, U. *Testaufbau und Testanalyse.* Beltz, 1994.

[79] Lipowsky, F. *Wege von der Hochschule in den Beruf.* Klinkhardt, 2003.

[80] Lorbeer, W. und Reiss, K. »Mathematische Kompetenzentwicklung im Übergang zwischen Schule und Hochschule: Ist der Kulturschock unabwendbar?« In: *Mathematische Kompetenzen entwickeln und erfassen.* Hergert, W. und Richter, K. (Hrsg.). Franzbecker, 2010, S. 87–98.

[81] Ludwig-Maximilians-Universität. *Auswahlkriterien und Grenzwerte bei örtlicher Zulassungsbeschränkung*. url: https://www.uni-muenchen.de/studium/beratung/vor/studienplatz/studienplatz/zulassungsbeschr/zulas_oertl/index.html.

[82] Luhmann, M. *R für Einsteiger*. Beltz, 2010.

[83] Max-Planck-Institut für Bildungsforschung. *COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung mathematischer Kompetenz*. 2011. url: http://www.mpib-berlin.mpg.de/coactiv/index.html.

[84] Max-Planck-Institut für Bildungsforschung. *TOSCA*. 2010. url: http://www.tosca.mpg.de/tosca/index.html.

[85] Meyer, H. *Was ist guter Unterricht?* Cornelsen, 2004.

[86] Müller, G., Steinbring, H. und Wittmann, E. *Ein Konzept zur Bildungsreform aus fachdidaktischer Sicht*. Techn. Ber. Universität Dortmund, 2002.

[87] Nolle, T. *Psychosoziale Basiskompetenzen und Lernorientierung bei Lehramtsstudierenden in der Eingangsphase des Lehramtsstudiums*. Klinkhardt, 2013.

[88] Oerter, R. und Montada, L. *Entwicklungspsychologie*. Beltz, 1998.

[89] Oesterreich, D. *Die Berufswahlentscheidung von jungen Lehrern*. Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, 1987.

[90] Oser, F. und Oelkers, J. (Hrsg.). *Die Wirksamkeit der Lehrerbildungssysteme: Von der Allrounderbildung zur Ausbildung professioneller Standards*. Rüegger, 2001.

[91] Padberg, F. *Didaktik der Bruchrechnung*. Spektrum Akademischer Verlag, 2009.

[92] Part, I. »Kognitive und affektive Haltungen von Lehramtsstudierenden der Mathematik - eine empirische Langzeitstudie«. Diss. Johannes Kepler Universität Linz, 2009.

[93] Piaget, J. *Nachahmung, Spiel und Traum*. Klett, 1975.

[94] Pohlmann, B. und Möller, J. »Fragebogen zur Erfassung der Motivation für die Wahl des Lehramtsstudiums (FEMOLA)«. In: *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie* 24 (2010), S. 73–84.

[95] Porst, R. *Fragebogen. Ein Arbeitsbuch.* Verlag für Sozialwissenschaften, 2008.

[96] Prenzel, M. *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland: Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.). Waxmann, 2004.

[97] Prenzel, M. *PISA 2006: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland: Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* PISA-Konsortium Deutschland (Hrsg.). Waxmann, 2007.

[98] Prenzel, M., Kramer, K. und Drechsel, B. *Selbstbestimmt motiviertes Lernen in der kaufmännischen Erstausbildung.* Leske + Budrich, 2001.

[99] Pruscha, H. *Statistisches Methodenbuch.* Springer, 2006.

[100] Reichel, H.-C. »Brauchen wir eine spezielle Mathematik-Fachausbildung für Lehramtskandidaten?« In: *DMV-Mittelungen* 2 (2000), S. 33–36.

[101] Reiss, K. und Schmieder, G. *Basiswissen Zahlentheorie. Eine Einführung in Zahlen und Zahlbereiche.* Springer, 2005.

[102] Reiss, K. »Konzepte der Lehrerbildung«. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht* (2010), S. 91–98.

[103] Rheinberg, F. »Intrinsische Motivation und Flow-Erleben«. In: *Motivation und Handeln.* Heckhausen, J. und Heckhausen, H. (Hrsg.). Springer, 2010, S. 365–388.

[104] Rheinberg, F. *Motivation.* Kohlhammer, 2004.

[105] Rogalski, M. »The Teaching Experimented in Lille«. In: *On The Teaching of Linear Algebra.* 2000, S. 133–149.

[106] Roppelt, A. »Mathematische Grundkompetenzen von Studierenden«. In: *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium.* Heinze, A. und Grüssing, M. (Hrsg.). Waxmann, 2009, S. 233–244.

[107] Rychen, D. und Salganik, L. (Hrsg.). *Key Competencies for a Successful Life and Well-Functioning Society.* Hogrefe, 2003.

[108] Schiefele, U. und Wild, K.-P. »Lernstrategien im Studium: Ergebnisse zur Faktorenstruktur und Reliabilität eines neuen Fragebogens«. In: *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie* 15(4) (1994), S. 185–200.

[109] Schwarz, B. »Professionelle Kompetenz von Mathematiklehramtsstudierenden. Eine Analyse der strukturellen Zusammenhänge«. Diss. Universität Hamburg, 2011.

[110] Shulman, L. »Those who understand: Knowledge Growth in Teaching.« In: *Educational Researcher* 15 (1986), S. 4–14.

[111] Skemp, R. R. *The Psychologie of Learning Mathematics*. Penguin, 1971.

[112] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. *Lehrplan Berufsoberschule*. url: `http://www.isb.bayern.de/berufliche-oberschule/lehrplan/berufsoberschule/`.

[113] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. *Lehrplan Fachoberschule*. url: `http://www.isb.bayern.de/berufliche-oberschule/lehrplan/fachoberschule/`.

[114] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. *Lehrplan Grundschule*. url: `http://www.isb.bayern.de/grundschule/lehrplan/grundschule/`.

[115] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. *Lehrplan Gymnasium*. url: `http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp?MNav=6&QNav=4&TNav=0&INav=0&LpSta=6&STyp=14&Fach=30`.

[116] Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München. *Lehrplan Realschule*. url: `http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp?MNav=5&QNav=4&TNav=0&INav=0&LpSta=6&STyp=5&Fach=30`.

[117] Stein, M. *Beweisen*. Franzbecker, 1986.

[118] Tall, D. »From school to university: The transition from elementary to advanced mathematical thinking.« In: *Proc. 7th Conf. of the Australasian Bridging Mathematics Network*. Thomas, M. (Hrsg.). 1997, S. 1–20.

[119] Tall, D. »The Psychology of Advanced Mathematical Thinking.« In: *Advanced Mathematical Thinking*. Tall, D. (Hrsg.). Kluwer, 1991, S. 3–21.

[120] Tall, D. »The Transition to Formal Thinking in Mathematics«. In: *Mathematics Education Research Journal* 20(2) (2008), S. 5–24.

[121] TENORHT, H. E. *Kerncurriculum Oberstufe. Mathematik, Deutsch, Englisch.* Beltz, 2001.

[122] THOM, R. »Modern Mathematics: does it exist?« In: *Developments in Mathematical Education.* HOWSON, A. G. (Hrsg.). Cambridge University Press, 1973, S. 194–209.

[123] TOUTENBURG, H. und HEUMANN, C. *Deskriptive Statistik.* Springer, 2009.

[124] TRAUTMANN, U. *Schulleistungen von Abiturienten: Regionale, schulreformbezogene und soziale Disparitäten.* Waxmann, 2007.

[125] TUKEY, J. W. *Exploratory data analysis.* Addison-Wesley, 1977.

[126] VIELUF, U., IVANOV, S. und NIKOLOVA, R. *Kompetenzen und Einstellungen von Schülerinnen und Schülern am Ende der Jahrgangsstufe 12 (KESS 12) - Zusammenfassung der zentralen Befunde -.* Techn. Ber. Behörde für Schule und Berufsbildung, 2012. URL: `http://bildungsverlauf.de/fileadmin/downloads/bsb-kess-12-zusammenfassung.pdf`.

[127] VINNER, S. »Concept Definition and Concept Image and the Notion of Function«. In: *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 12 (1983), S. 239–305.

[128] WAGNER, D., HEINZE, A. und FISCHER, A. »Mathematiklernen in der Schule - Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium«. In: *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium.* GRÜSSING, M. und HEINZE, A. (Hrsg.). Waxmann, 2009, S. 245–264.

[129] WAGNER, R. F. *Modul Pädagogische Psychologie.* Klinkhardt, 2009.

[130] WEINERT, F. E. *Leistungsmessung in Schulen.* Beltz, 2001.

[131] WIGFIELD, A. und ECCLES, F. »Expectancy-Value Theory of Achievement Motivation«. In: *Contemporary Educational Psychology* 25 (2000), S. 68–81.

[132] WILD, K.-P. *Lernstrategien im Studium. Strukturen und Bedingungen.* Waxmann, 2000.

[133] WITTMANN, G. »Schülerkonzepte und epistemologische Probleme«. In: *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2. Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.* TIETZE, U.-P., KLIKA, M. und WOLPERS, H. (Hrsg.). Vieweg, 2000, 2000, S. 132–148.

[134] Zimbardo, P. *Psychologie*. Springer, 1992.

A Fragebogen und Vorwissenstests

Ludwig-Maximilians-Universität München
Mathematisches Institut

Fragebogen zur Erfassung Ihrer persönlichen Angaben und Ihrer universitären Präferenzen

Liebe Studierende,

ich möchte Sie recht herzlich bitten, die vorliegenden Fragen zur Erfassung Ihrer persönlichen Angaben und Ihrer universitären Präferenzen zu beantworten. Dieser Fragebogen ist Teil meiner angestrebten Promotion, welche sich mit den fachwissenschaftlichen Kompetenzen von Lehramtsstudierenden mit dem Unterrichtsfach Mathematik auseinandersetzt.

Die Bearbeitung und das Resultat des Fragebogens sowie der Vorwissensaufgaben haben keinerlei Auswirkungen für Sie persönlich, da die Bearbeitung völlig **anonym** ist. Der persönliche Code, bestehend aus dem ersten und zweiten Buchstaben des Vornamens Ihrer Mutter sowie aus dem ersten und zweiten Buchstaben des Vornamens Ihres Vater (Bsp.: Margareta und Werner: MAWE), dient lediglich der Zuordnung der Daten des Fragebogens zu den erzielten Leistungen in den Testerhebungen. Sollten sich Fragen ergeben, können Sie sich gerne jederzeit an mich wenden.

Die vorliegenden Fragen und Aufgaben sollen Sie nicht abschrecken, sondern einen Überblick geben, wie der allgemeine Stand Ihrer Vorwissenskenntnisse ist. Die Analyse Ihrer Vorwissenskenntnisse stellt einen zentralen Gegenstand in meiner Untersuchung dar. Vielen Dank für Ihre Unterstützung und die zuverlässige Beantwortung der Fragen.

Leonhard Riedl

I) Angaben zu Ihrer Person und zu Ihrem Studium

1. Angabe Ihrer persönlichen Daten.

Ihr Alter ....

Ihr Geschlecht ....

Ihr aktuelles Fachsemester ....

Ihr persönlicher Code (**siehe erste Seite**) ....

2. Angabe zur Wahl Ihres Lehramtstudiums.

☐ Studium für das Lehramt an Realschulen

☐ Studium für das Lehramt an Hauptschulen

☐ Studium für das Lehramt an Grundschulen

3. Angabe Ihrer Kombinations- bzw. Didaktikfächer (neben Mathematik).

für das Lehramt an Realschulen ....

für das Lehramt an Hauptschulen ....

für das Lehramt an Grundschulen ....

4. An welchem Schultyp haben Sie Ihre Hochschulreife erworben?

☐ Gymnasium

☐ Berufsoberschule

☐ Fachoberschule

☐ sonstiges ....

5. Welche Art der Hochschulreife besitzen Sie?

☐ allgemeine Hochschulreife

☐ fachgebundene Hochschulreife

☐ Fachhochschulreife

☐ sonstiges ....

6. In welchem Land bzw. Bundesland haben Sie Ihre Hochschulreife erworben?

Angabe des Bundeslandes ....

sonstiges Land ....

7. Welchen Schwerpunkt hatte Mathematik in Ihrer Schulausbildung?

☐ Pflichtfach (Gymnasium, **G8**)

☐ Grundkurs (Gymnasium, **G9**)

☐ Leistungskurs (Gymnasium, **G9**)

☐ Ausbildungsrichtung (Fachoberschule) ....

☐ Ausbildungsrichtung (Berufsoberschule) ....

☐ sonstiges ....

8. Angaben zu Ihrem bisherigen Bildungsweg.

☐ abgeschlossenes Hochschulstudium

☐ abgeschlossene Berufsausbildung

☐ sonstige Bildungsabschlüsse ....

☐ keine der genannten Angaben (direkt von der Schule)

9. Welche Priorität hat Mathematik bei Ihrer Studienwahl?

☐ Das Fach Mathematik genießt höhere Priorität.

☐ Alle Fächer genießen die gleiche Priorität.

☐ Die Kombinations– bzw. Didaktikfächer genießen höhere Priorität.

10. Haben Sie am Brückenkurs vor Semesterbeginn teilgenommen?

☐ ja

☐ nein

II) Studien- und Berufswahlmotive

Geben Sie bitte jeweils Ihre Tendenz zu folgenden Aussagen an. (Bitte jeweils nur eine Antwort (Kreuz) pro Frage.)	trifft gar nicht zu					trifft völlig zu
Studieninteresse						
11. Das Studium soll Ihren persönlichen Neigungen entsprechen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
12. Das Studium soll Ihre Persönlichkeit positiv beeinflussen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
13. Bereits vor Studienbeginn hatten die gewählten Studiengebiete einen hohen Stellenwert für Sie.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Gründe für das Unterrichtsfach Mathematik						
14. Die Qualität des Mathematikunterrichts hat Sie zu Ihrer Studienwahl motiviert.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
15. Lehrkräfte haben Sie zu Ihrer Studienwahl bewogen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
16. Mathematische Lehrinhalte haben zu Ihrer Studienwahl geführt.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
17. Ihre Fähigkeiten und Begabungen im Fach Mathematik haben die Studienwahl veranlasst.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
18. Der logische Charakter der Mathematik hat Sie für die Studienwahl überzeugt.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Intrinsische Studienwahlmotive						
19. Sie zeigen starkes Interesse an den Studieninhalten.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
20. Sie möchten Ihre Fähigkeiten im Fach Mathematik steigern.	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Geben Sie bitte jeweils Ihre Tendenz zu folgenden Aussagen an. (Bitte jeweils nur eine Antwort (Kreuz) pro Frage.)	trifft gar nicht zu					trifft völlig zu
Extrinsische Studienwahlmotive						
21. Die Studienwahl ist durch die relativ kurze Regelstudienzeit begünstigt.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
22. Das Studium ist vom fachwissenschaftlichen Anspruch gut machbar.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
23. Die Studienwahl ist eine Notlösung aufgrund fehlenden Interesses an anderen Fächern.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
24. Die Studienwahl ist durch lokale Begebenheiten (Wohnort, ...) begünstigt.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
25. Die Studienwahl ist aufgrund der Studienplatzsituation getroffen worden.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
26. Die Studieninhalte ermöglichen Ihnen Chancen in anderen Berufsfeldern.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Intrinsische Berufswahlmotive						
27. Sie begeistern sich, mathematische Inhalte zu erklären.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
28. Sie arbeiten gerne mit Kindern und/oder Jugendlichen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
29. Sie glauben an Ihre pädagogischen und didaktischen Fähigkeiten.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
30. Sie erwarten Vielseitigkeit im Lehrerberuf.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
Extrinsische Berufswahlmotive						
31. Der Lehrerberuf gilt als ein sicherer Arbeitsplatz.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
32. Der Lehrerberuf genießt hohes Ansehen in der Öffentlichkeit.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
33. Der Lehrerberuf bietet günstige Arbeitsbedingungen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
34. Sie studieren das Unterrichtsfach Mathematik, weil Lehrer mit dieser Fachrichtung gesucht sind.	☐	☐	☐	☐	☐	☐

III) Lernstrategien

Geben Sie bitte jeweils Ihre Tendenz zu folgenden Aussagen an. (Bitte jeweils nur eine Antwort (Kreuz) pro Frage.)	trifft gar nicht zu					trifft völlig zu
35. Sie üben grundsätzlich schriftlich bei der Vorbereitung zu Prüfungen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
36. Sie strukturieren und visualisieren mathematische Inhalte anhand von Skizzen und Schaubildern.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
37. Sie ziehen bei mathematischen Problemstellungen zusätzliche Literatur oder Hilfsmittel zu Rate.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
38. Sie lassen nicht locker, obwohl Sie keine Lösung für die gegebene Problemstellung finden.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
39. Sie beschäftigen sich zuerst mit den theoretischen Grundlagen, bevor Sie sich praktisch mit Problemstellungen auseinandersetzen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
40. Sie prüfen gelernte Inhalte kritsch und hinterfragen diese.	☐	☐	☐	☐	☐	☐
41. Sie fassen wichtige Inhalte von Texten oder Mitschriften schriftlich zusammen.	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Algebra

1. Man vereinfache folgende Terme soweit wie möglich

   a) $\dfrac{x^3 + 3\,x^2 + 2\,x}{x^2 + x}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, (1)

   b) $\dfrac{x^2 + 4\,x + 4}{x^2 - 4}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. (1)

2. Man gebe die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ an, die von den natürlichen Zahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ohne Rest geteilt wird. (1)

3. Im Tierpark zahlen Erwachsene und Kinder unterschiedliche Eintrittspreise. Zwei Erwachsene und zwei Kinder zahlen zusammen 26 Euro, ein Erwachsener und drei Kinder zahlen hingegen 21 Euro. Welche Eintrittspreise werden für Erwachsene bzw. Kinder berechnet? (2)

4. Ein Sportgeschäft bietet einem Fußballverein 40% Rabatt für neue Trainingsanzüge. Damit kostet ein Trainingsanzug nur noch 42 Euro. Man ermittle den ursprünglichen Preis des Anzugs. (2)

5. a) Man ordne folgende Brüche der Größe nach: $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ und $\frac{7}{12}$. (1)

   b) Man gebe drei Bruchzahlen zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ an. (2)

   c) Man wandle die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{6}$ in Dezimalzahlen um. (2)

   d) Man wandle die Dezimalzahlen 0,4 und $2{,}\overline{3}$ in Brüche um. (1)

6. Für alle $x \in \mathbb{R}$ löse man folgende Gleichungen.

   a) $\frac{1}{2}\,x - 3 = x - 10$, (1)

   b) $x^2 - 4\,x + 6 = 3$, (1)

   c) $7^x + 3 = 52$. (1)

7. Seien a, b und $c \in \mathbb{R}^+$ mit

$$a \cdot b = c, \quad b \cdot c = 12 \quad \text{sowie} \quad b = 3 \cdot c.$$

   Man gebe a, b und c explizit an. (2)

8. Seien $a,\ b \in \mathbb{R}^+$. Welche der folgenden Aussagen sind gültig? (Man kreuze die richtigen Antworten an.) (2)

Aussagen	wahr	falsch
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	☐	☐
$\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$, für $a \geq b$	☐	☐
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	☐	☐
$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$	☐	☐

9. Seien a, $b \in \mathbb{R}^+$ und n, $m \in \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen sind gültig? (Man kreuze die richtigen Antworten an.) (2)

Aussagen	wahr	falsch
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	☐	☐
$a^n + b^n = (a + b)^n$	☐	☐
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	☐	☐
$a^n \cdot b^m = (a \cdot b)^{n \cdot m}$	☐	☐

10. Seien a, $b \in \mathbb{R}^+$. Welche der folgenden Aussagen sind gültig? Dabei bezeichnet ln den natürlichen Logarithmus. (Man kreuze die richtigen Antworten an.) (2)

Aussagen	wahr	falsch
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$	☐	☐
$\ln(a + b) = \ln a \cdot \ln b$	☐	☐
$\ln(a : b) = \ln a - \ln b$	☐	☐
$\ln(a - b) = \ln a : \ln b, \quad$ für $a > b$ und $b \neq 1$	☐	☐

Geometrie

1. Gegeben sei ein Kreis und ein Quadrat mit gleichem Umfang. Man begründe rechnerisch, welcher der beiden geometrischen Figuren den größeren Flächeninhalt besitzt. (4)

2. In einem Rechteck sei die Länge $a = 4\,cm$ und die Diagonale $d = 5\,cm$ gegeben. Man berechne den Flächeninhalt des Rechtecks. (2)

3. In einem Quadrat sei die Diagonale $d = 4\sqrt{2}\,cm$ gegeben. Man berechne den Flächeninhalt des Quadrats. (2)

4. Die Kongruenzabbildungen Drehung, Punktspiegelung und Parallelverschiebung können als Doppelachsenspiegelungen interpretiert werden. Man beschreibe die gegenseitige Lage der beiden Spiegelachsen

   a) für eine Drehung, (1)

   b) für eine Punktspiegelung, (1)

   c) für eine Parallelverschiebung. (1)

5. In einem Dreieck verhalten sich die Winkel

   $$\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4.$$

   Wie groß sind die Winkel α, β und γ? (2)

6. In der Ebene seien die Punkte $P = (3, 0)$ und $Q = (0, 3)$ sowie die Gleichung $y = x + 1$ der Geraden g gegeben.

   a) Man gebe eine Gleichung der Geraden h an, die die Punkte P und Q enthält. (3)

   b) Man gebe eine Gleichung der Geraden k an, die parallel zur Geraden g ist und den Punkt P enthält. (3)

7. Jedes beliebige Dreieck besitzt einen Umkreis sowie einen Inkreis. Man beschreibe (in Worten) die Lage

   a) für den Umkreismittelpunkt, (1)

   b) für den Inkreismittelpunkt. (1)

8. Im allgemeinen Dreieck gilt der Kosinussatz

   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

   Sei nun $\gamma = 90°$. Welcher Satz und welche besondere Dreiecksform ergeben sich für diese Wahl des Winkels γ? (1)

9. Welches geometrische Gebilde wird durch die Gleichung $x + y = 5$

   a) in der Ebene $\mathbb{R}^2$, (1)

   b) im Raum $\mathbb{R}^3$ (1)

   beschrieben?

Analysis

1. Gegeben seien die drei Funktionen

   a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 + 3,$
   b) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = (x+3)^2,$
   c) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = 3\,x^2.$

   Man beschreibe, wie diese drei Funktionen aus der Normalparabel mit der Funktionsvorschrift
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2,$$
   hervorgehen. (3)

2. Mit welchen Funktionstypen können folgende Situationen beschrieben werden?

   a) Handyvertrag mit Grundgebühr und fester Minuteneinheit. (1)
   b) Anzahl an Bakterien nach t Jahren, wenn das Wachstum $k\,\%$ pro Jahr beträgt. (2)

3. Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$, ist umkehrbar.

   a) Man begründe, warum f umkehrbar ist. (1)
   b) Man gebe den Definitionsbereich und den Wertebereich der Umkehrfunktion an. (2)

4. Man gebe eine (differenzierbare) Funktion f mit $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ an. Dabei bezeichne f' die erste Ableitung der Funktion f. (1)

5. Gegeben seien die differenzierbaren Funktionen f und g mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$; f' und g' bezeichnen jeweils die erste Ableitung von f und g. Man finde die wahre Aussage und widerlege die falsche Aussage mit einem Gegenbeispiel.

   a) Es gilt: $\quad f = g \Longrightarrow f' = g'.$
   b) Es gilt: $\quad f' = g' \Longrightarrow f = g.$ (3)

6. Sei F eine Stammfunktion von f. Die Funktion f ist für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Dabei gilt:
   $$f(2) = 0 \qquad \text{und} \qquad f'(2) < 0.$$
   Man begründe, welche besondere Stelle die Stammfunktion F an der Abszisse $x = 2$ besitzt. (2)

7. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$, gilt

$$\int_{-2}^{2} x^2\,dx = 2\int_{0}^{2} x^2\,dx.$$

Für die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3$, gilt

$$\int_{-2}^{2} x^3\,dx \neq 2\int_{0}^{2} x^3\,dx.$$

Man begründe diesen Sachverhalt (eventuell mit Skizzen der beiden Graphen G_f und G_g). (3)

8. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Die Funktion ist für $x = 2$ nicht definiert, also gilt $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

a) Man bestimme $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (2)

b) Man bestimme das Verhalten von f an der Stelle $x = 2$. (3)

c) Man gebe die senkrechte und waagrechte Asymptote von G_f an. (1)

Stochastik

1. An zwei Tischen gibt es drei bzw. vier freie Plätze. Auf wie viele Arten kann man sieben Gäste auf die beiden Tische verteilen? (1)

2. Aus einer Gruppe von n Herren und einer Dame sollen k Personen ausgewählt werden.

   a) Wie viele Möglichkeiten der Auswahl gibt es insgesamt? (1)

   b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Dame in die Auswahl kommen soll? (1)

   c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn die Dame nicht in die Auswahl kommen darf? (1)

3. a) Man berechne die Anzahl aller vierstelligen Zahlen, die sich mit den Ziffern 1 bis 9 bilden lassen, wenn in jeder dieser vierstelligen Zahlen keine Ziffer mehrfach auftritt. (1)

   b) Man berechne die Anzahl der vierstelligen Zahlen, die sich aus den Ziffern 1 bis 9 bilden lassen, wenn jede dieser Ziffern auch mehrmals verwendet werden darf. (1)

4. Eine Fußballmannschaft besteht bekanntlich aus elf Spielern. Die elf Spieler verlassen vor Spielbeginn der Reihe nach die Mannschaftskabine. Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind dabei möglich? (1)

5. Aus einem Karton mit 50 Glühbirnen, von denen 20% defekt sind, werden drei Glühbirnen (gleichzeitig) zufällig entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?

   a) Keine der drei Glühbirnen ist defekt. (2)

   b) Alle drei Glühbirnen sind defekt. (2)

6. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, beim dreimaligen Würfeln jeweils dieselbe Augenzahl zu werfen. (2)

7. In einer Urne befinden sich 20 Kugeln mit den Ziffern 1 bis 20. Es wird eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?

   a) Die Zahl der gezogenen Kugel ist durch 4 teilbar. (1)

   b) Die Zahl der gezogenen Kugel ist größer als 13. (1)

   c) Die Zahl der gezogenen Kugel ist eine Quadratzahl. (1)

8. In einer Urne befinden sich fünf rote und fünf gelbe Kugeln. Es wird zweimal nacheinander gezogen.

   a) Man berechne die Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln, wenn **mit** Zurücklegen gezogen wird. (2)

   b) Man berechne die Wahrscheinlichkeit für zwei gleichfarbige Kugeln, wenn **ohne** Zurücklegen gezogen wird. (2)

9. Für jede Wahrscheinlichkeit p gilt: (Man kreuze die richtigen Antworten an.) (2)

Aussagen	wahr	falsch
$0 \leq p \leq 1$	☐	☐
$0 < p < 1$	☐	☐
$0 \leq 1 - p \leq 1$	☐	☐
$p\,(1 - p) > \frac{1}{4}$	☐	☐

10. Sei p_1 die Wahrscheinlichkeit für den Sieg einer Fußballmannschaft. Für die Wahrscheinlichkeit p_2, dass die Fußballmannschaft zwei Spiele hintereinander gewinnt, gilt: (Man kreuze die richtigen Antworten an.) (2)

Aussagen	wahr	falsch
$p_2 = p_1^2$	☐	☐
$p_2 = 2\,p_1$	☐	☐
$p_2 = p_1\,(1 - p_1)$	☐	☐
$p_2 \leq p_1$	☐	☐

B Testerhebungen zu „Grundlagen der Mathematik I“

Grundlagen der Mathematik I: Test 1

1. a) Man entscheide für die Abbildungen f_1 bis f_4 die Injektivität und Surjektivität. (Zutreffendes bitte ankreuzen) (2)

Abbildungsvorschrift	injektiv	surjektiv
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2$	☐	☐
$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ f_2(x) = x^2$	☐	☐
$f_3 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R},\ f_3(x) = x^2$	☐	☐
$f_4 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+,\ f_4(x) = x^2$	☐	☐

   b) Man gebe an, welche Abbildungen aus a) umkehrbar sind und bestimme dafür die Umkehrabbildung f^{-1} sowie deren Definitions- und Wertebereich. (2)

2. a) Man definiere für eine Abbildung $f : M \to N$ sowie $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ die Begriffe „Bild“ und „Urbild“. (2)

   b) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, bestimme man das Bild $f\left([-1; 2[\right)$. (1)

   c) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, bestimme man das Urbild $f^{-1}\left([1; 4[\right)$. (1)

3. Man leite für a, $b \in \mathbb{R}$ die binomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \qquad \text{und} \qquad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$

aus den Rechengesetzen der reellen Zahlen her. Welche Rechengesetze gehen dabei in jedem Schritt ein? (4)

4. Man betrachte für eine ganze Zahl z die beiden Aussagen

$$A\text{: „}z \text{ ist gerade.“} \qquad \text{und} \qquad B\text{: „}3\,z + 1 \text{ ist ungerade.“}$$

Man zeige

   a) die Implikation $A \Longrightarrow B$ durch einen direkten Beweis, (1)

   b) die Implikation $B \Longrightarrow A$ durch einen indirekten Beweis, (1)

   c) die Implikation $B \Longrightarrow A$ durch einen Widerspruchsbeweis. (1)

   d) Man gebe zwei weitere schulrelevante Sätze an, die üblicherweise durch einen Widerspruchsbeweis gezeigt werden. (1)

5. a) Auf welchen Aussagentyp lässt sich die vollständige Induktion anwenden? (1)

   b) Welche Axiome liegen dieser Methode zu Grunde? (1)

   c) Man entscheide mit Begründung, ob die vollständige Induktion auf dem Zahlenbereich $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen realisierbar ist. (1)

6. Man betrachte ein Urnenexperiment, bei dem aus einer Urne mit n Kugeln, die von 1 bis n durchnummeriert sind, k Kugeln gezogen werden.

   a) Man gebe für obiges Urnenexperiment die Anzahl der Möglichkeiten unter den Aspekten Reihenfolge bzw. Wiederholung mit Hilfe allgemeiner Formeln an. (2)

   b) Man gebe für jeden der vier Fälle ein Anwendungsbeispiel an, das sich auf Teilaufgabe a) bezieht. (2)

   c) Wie lassen sich „Permutationen“ als Urnenexperiment interpretieren? (1)

Grundlagen der Mathematik I: Test 2

1. a) Man gebe zwei Möglichkeiten an, wie der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen a und b bestimmt werden kann. (1)

   b) Man formuliere den „Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie“. Bei welcher der obigen Bestimmungsmethoden geht dieser Satz ein? Welcher Satz ist für die andere Methode grundlegend? (2)

   c) Wie lässt sich das $\mathrm{kgV}(a, b)$ aus dem $\mathrm{ggT}(a, b)$ bestimmen? (1)

   d) Warum gibt es für zwei natürliche Zahlen a und b stets einen größten gemeinsamen Teiler sowie ein kleinstes gemeinsames Vielfaches? (1)

2. Man betrachte die Primfaktorzerlegungen der beiden natürlichen Zahlen

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot p_4^{k_4} \qquad \text{und} \qquad b = p_1^{\ell_1} \cdot p_2^{\ell_2} \cdot p_3^{\ell_3}$$

   mit den natürlichen Exponenten $k_1, \ldots, k_4$ und $\ell_1, \ldots, \ell_3$; ferner seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

   a) Man bestimme $\mathrm{kgV}(a, b)$ und $\mathrm{ggT}(a, b)$. (2)

   b) Welche Bedeutung hat das $\mathrm{kgV}(n_1, n_2)$ für zwei vollständig gekürzte Brüche $\frac{z_1}{n_1}$ und $\frac{z_2}{n_2}$? Wo findet diese Verwendung? (1)

3. a) Man gebe zwei gleichwertige Charakterisierungen für den Begriff „Primzahl“ an. (2)

   b) Man entscheide mit Begründung, ob $2^{1000} - 1$ eine Primzahl ist. (2)

4. a) In welcher Eigenschaft unterscheiden sich die algebraischen Strukturen „kommutativer Ring“ $(R, +, \cdot)$ und „Körper“ $(K, +, \cdot)$? (1)

   b) Man zeige anhand zweier geeigneter Zahlenbereiche den in a) erwähnten Unterschied zwischen $(R, +, \cdot)$ und $(K, +, \cdot)$. (2)

   c) Man betrachte einen angeordneten Körper $(K, +, \cdot, <)$. Man formuliere das Monotoniegesetz der Addition und das Monotoniegesetz der Multiplikation. (1)

5. Man gebe je ein Beispiel für eine Gleichung mit natürlichen Parametern an,

   a) die im Zahlenbereich $\mathbb{Z}$, jedoch nicht im Zahlenbereich $\mathbb{N}$ lösbar ist, (1)

   b) die im Zahlenbereich $\mathbb{Q}$, jedoch nicht im Zahlenbereich $\mathbb{Z}$ lösbar ist, (1)

   c) die im Zahlenbereich $\mathbb{R}$, jedoch nicht im Zahlenbereich $\mathbb{Q}$ lösbar ist, (1)

   d) die im Zahlenbereich $\mathbb{C}$, jedoch nicht im Zahlenbereich $\mathbb{R}$ lösbar ist. (1)

   e) Man ordne die Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ in einer sinnvollen Beziehung zueinander an. (1)

6. a) Auf der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ bestimme man die Definitionsmenge D sowie die Lösungsmenge L für die Gleichung $\dfrac{3\,x - 4}{x - 3} - 4 = \dfrac{5 - 2\,x}{2\,x}$. (2)

   b) Man formuliere den allgemeinen Zusammenhang zwischen Grundmenge G, Definitionsmenge D sowie Lösungsmenge L einer Gleichung. (1)

C Testerhebungen zu „Grundlagen der Mathematik II“

Grundlagen der Mathematik II: Test 1

1. a) Man erläutere, unter welchen Bedingungen eine Relation R zwischen zwei nichtleeren Mengen M und N Graph einer Abbildung $f : M \to N$ ist. (2)

   b) Man entscheide mit Begründung, ob folgende Relationen

   $$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \mid x^2 = y\} \text{ bzw. } R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \mid x = y^2\}$$

   Graph einer Abbildung sind. (2)

2. a) Man definiere die Begriffe Ordnung und Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge $M \neq \emptyset$. (2)

   b) Man entscheide mit Begründung, ob die Relation

   $$R = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \text{ teilt } n\}$$

   eine Ordnung oder eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist. (2)

3. a) Für einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definiere man den Begriff Laplacewahrscheinlichkeit. (2)

   b) Beim zweimaligen Werfen eines fairen Würfels werden die Ereignisse

   $$\begin{aligned} A &= \text{„Die Augensumme beträgt 6."} \\ B &= \text{„Die Augensumme beträgt 7."} \end{aligned}$$

   betrachtet. Man bestimme $P(A)$ und $P(B)$ und entscheide dann, welches Ereignis wahrscheinlicher ist. (2)

4. a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit für mindestens fünf Richtige beim Zahlenlotto „6 aus 49“ (es werden aus 49 Kugeln die 6 Gewinnzahlen gezogen). Welche Verteilung liegt vor? (2)

   b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine Mannschaft in vier Spielen höchstens einmal gewinnt, wobei die Siegwahrscheinlichkeit für jedes Spiel $\frac{1}{3}$ beträgt. Welche Verteilung liegt vor? (2)

5. a) Man betrachte in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die Ereignisse A, B und gebe die Definition für die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B an. (2)

   b) Ein Ehepaar hat zwei Kinder, wovon das jüngere ein Junge ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist auch das ältere Kind ein Junge? (Die Geburtenwahrscheinlichkeit für Junge und Mädchen sei gleich.) (1)

   c) Ein Ehepaar hat zwei Kinder, wovon eines der beiden ein Junge ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist auch das andere Kind ein Junge? (Die Geburtenwahrscheinlichkeit für Junge und Mädchen sei gleich.) (1)

6. a) Man betrachte in einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die Ereignisse A, B und gebe die Definition für die stochastische Unabhängigkeit von A und B an. (2)

b) Man betrachte den Wurf eines fairen Würfels mit den beiden Ereignissen

$$\begin{aligned} A &= \text{„Die Augenzahl ist ungerade."} \\ B &= \text{„Die Augenzahl ist eine Primzahl."} \end{aligned}$$

Man untersuche die Ereignisse A und B auf stochastische Unabhängigkeit. (2)

Grundlagen der Mathematik II: Test 2

1. a) Man definiere den Begriff Kongruenzabbildung (Bewegung). (1)

   b) Die Kongruenzabbildungen Drehung und Parallelverschiebung können als Doppelachsenspiegelungen interpretiert werden. Man gebe für beide Fälle jeweils die Lage der beiden Spiegelachsen an. (1)

   c) Man erläutere den Zusammenhang zwischen Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildung. (2)

2. a) Man formuliere (unter Berücksichtigung der nötigen Voraussetzungen) die Satzgruppe des Pythagoras. (2)

   b) Wegen $3^2+4^2=5^2$ bezeichnet man $(3,4,5)$ als pythagoräisches Tripel. Man gebe ein weiteres pythagoräisches Tripel aus natürlichen Zahlen an. (1)

   c) Man formuliere die Umkehrung des Satzes des Pythagoras. (1)

3. a) Für zwei Größen G_1 und G_2 definiere man den Begriff Kommensurabilität und gebe ein Beispiel für inkommensurable Größen an. (2)

   b) Man erläutere, warum der angeordnete Körper $(\mathbb{Q},+,\cdot,<)$ der rationalen Zahlen nicht vollständig ist. (2)

4. a) Bekanntlich ist $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Man bestimme hiermit die Werte von $\sin 135°$ und $\sin 315°$ sowie $\cos 135°$ und $\cos 315°$. (2)

   b) Man formuliere (unter Berücksichtigung der nötigen Voraussetzungen) den Cosinussatz und stelle dann den Zusammenhang zum Satz des Pythagoras her. (2)

5. a) Über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bestimme man die Lösungen der Gleichung

   $$x^2 = 6\,x - 25$$

   und skizziere diese Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene. (2)

   b) Man bestimme die Polardarstellung der komplexen Zahl $z_1 = 3+3\,i$ sowie die Real- und Imaginärteildarstellung der komplexen Zahl $z_2 = 4\cdot E(45°)$. (2)

6. a) Man entscheide mit Begründung, ob der Körper $(\mathbb{C},+,\cdot)$ anordnungsfähig ist. (1)

   b) Welches Vorzeichen besitzt die imaginäre Einheit i? (1)

   c) Bekanntlich ist $i^2=-1$. Man berechne damit i^{17}. (1)

   d) Man gebe neben den bekannten Körpern $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ ein weiteres Beispiel für einen Körper an. (1)

D Statistische Grundlagen

Statistische Grundlagen

Dieser Abschnitt behandelt die in der Arbeit verwendeten statistischen Verfahren; es werden Elemente der deskriptiven und induktiven Statistik beschrieben, die Hauptkomponentenanalyse als explorative Methode dargestellt und Kernpunkte von Testgütekriterien skizziert. Die folgenden Ausführungen stützen sich größtenteils auf die Werke „Statistik. Der Weg zur Datenanalyse“ von Fahrmeir et al. [41], „Statistisches Methodenbuch“ von Pruscha [99], „R Einführung durch angewandte Statistik“ von Hatzinger et al. [53] und „Testaufbau und Testanalyse“ von Lienert und Raatz [78].

Deskriptive Methoden

Es werden zuerst deskriptive Aspekte für die Datenerhebung und -analyse geschildert. Dabei werden grundlegende Punkte für die Datenerhebung sowie Methoden zur Darstellung und Beschreibung aufgeführt. Die beschreibende Statistik ist für die Präsentation umfangreicherer Datensätze geeignet, da insbesondere graphische Darstellungen verwendet werden, die typische Kenngrößen wie arithmetisches Mittel und Median erfassen. Des Weiteren dient die deskriptive Statistik dazu, einen ersten Überblick über den Datensatz zu erhalten.

Grundlagen der Datenerhebung

Für eine Datenerhebung und deren Beschreibung betrachtet man zunächst die Aspekte Gesamtheit und Merkmale [41, S. 15]:

- **Grundgesamtheit**: Menge der Objekte, an denen die interessierenden Größen erfasst werden (alle Studierende mit dem Unterrichtsfach Mathematik).
- **Teilgesamtheit**: Teilmenge der Grundgesamtheit (z.B. werden speziell Studierende betrachtet, die Leistungskurs Mathematik besucht haben).
- **Stichprobe**: tatsächlich untersuchte Teilmenge der Grundgesamtheit.
- **Merkmal**: interessierende Größe (z.B. Leistungen in den Testerhebungen).
- **Merkmalausprägung**: konkreter Wert des Merkmals (Punktezahlen bei der Testerhebung).

Ferner sind für die Datenanalyse Merkmalstypen und Skalen von Bedeutung; bei Merkmalstypen unterscheidet man diskrete (endlich oder abzählbar unendlich viele Ausprägungen) und stetige (alle Werte eines Intervalls sind mögliche Ausprägungen) Merkmale. Bei Skalenniveaus für Merkmale sind neben nominal- und ordinalskalierten Ausprägungen vor allem metrische von Interesse. Bei nominalskalierten

Merkmalstypen sind die Ausprägungen Namen, weshalb keine Ordnung möglich ist (z.B. Angabe des studierten Lehramtstyps) [41, S. 20]; bei ordinalskalierten können die Ausprägungen zwar geordnet werden, aber Abstände können nicht interpretiert werden (z.B. Schulnoten) [41, S. 20]. Schließlich sind bei metrisch skalierten Merkmalstypen die Ausprägungen intervall- und verhältnisskaliert, es können nun also Abstände interpretiert werden und die Ausprägungen besitzen einen absoluten Nullpunkt [41, S. 20]. Wenn im Folgenden von metrischen Daten die Rede ist, sind stets reelle Daten $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gemeint.

Darstellung von Daten

Es sollen nun die grundlegenden statistischen Methoden zur Darstellung eindimensionaler Daten vorgestellt werden. Dazu betrachtet man die Stichprobe, welche die beobachteten oder gemessenen Werte $x_1, \ldots, x_n$ eines Merkmals X bezüglich der Untersuchungseinheiten einer Erhebung mit dem Umfang n umfasst.

- Häufigkeiten

  Die vorgegebene Stichprobe kann zusammengefasst werden, indem man ein Merkmal mit den Ausprägungen $a_1, \ldots, a_k$ mit $k \leq n$ betrachtet. Eine für jedes Skalenniveau sinnvolle Abgrenzung für die absolute bzw. relative Häufigkeit einer Ausprägung a_j mit $j \in \{1, \ldots, k\}$ ist die Anzahl bzw. der Anteil von Werten der Stichprobe, die mit a_j übereinstimmen. Zusammenfassend gilt [41, S. 32]:

  – $h(a_j) = h_j$ ist die absolute Häufigkeit der Ausprägung a_j, also die Anzahl x_i aus $x_1, \ldots, x_n$, welche die Ausprägung a_j besitzen,

  – $f(a_j) = \dfrac{h_j}{n} = f_j$ ist die relative Häufigkeit der Ausprägung a_j,

  – $h_1, \ldots, h_k$ definiert die absolute Häufigkeitsverteilung,

  – $f_1, \ldots, f_k$ definiert die relative Häufigkeitsverteilung.

- Säulendiagramme

  Für diskrete Merkmale sind Säulendiagramme geeignet, vor allem wenn die Merkmalausprägung k der unterschiedlichen Merkmale sehr klein ist. Es werden auf der horizontalen Achse die Ausprägungen eines Merkmals abgetragen und auf der vertikalen Achse die absolute (bzw. relative) Häufigkeit der jeweiligen Ausprägung in Form von Säulen (Rechtecke mittig über der Ausprägung) dargestellt [41, S. 35].

- Histogramme

  Liegt ein zumindest ordinalskaliertes Merkmal mit vielen Ausprägungen vor, so können diese sinnvoll gruppiert und in Klassen benachbarter Intervalle

  $$[c_0, c_1[\,, [c_1, c_2[\,, \ldots, [c_{k-1}, c_k[$$

  eingeteilt werden. Nun kann entsprechend dem Säulendiagramm die absolute bzw. relative Häufigkeit auf der vertikalen Achse abgetragen werden; dies führt aber zu unerwünschten Effekten, da bei verschiedener Breite und daraus resultierend verschiedener Rechteckfläche optisch auch verschiedene Häufigkeiten interpretiert werden. Die Fläche über den Intervallen soll so gewählt sein, dass sie gleich oder proportional zu den absoluten bzw. relativen Häufigkeiten ist. Aus $A = b \cdot h$ und der Klassenbreite d_j mit $d_j = c_j - c_{j-1}$ ergibt sich die abzutragende Höhe gleich oder proportional zu $\frac{h_j}{d_j}$ bzw. $\frac{f_j}{d_j}$. Damit befolgt das Histogramm das Prinzip der Flächentreue, was bedeutet, dass die dargestellten Flächen direkt proportional zu den absoluten bzw. relativen Häufigkeiten sind [41, S. 41-42].

- Empirische Verteilungsfunktion und Dichtekurven

  Betrachtet man ein metrisches Merkmal mit einem großen Umfang der Erhebung n, so sind Histogramme für gruppierte Daten oft nicht ausreichend, da Informationen verdeckt werden können und diese abhängig von der Wahl der Klassen sind. Ferner wird durch ein Histogramm die Darstellung eines stetigen Merkmals aufgrund der Treppenfunktionen nicht gerecht, da dieses Merkmal durch eine stetige Kurve beschrieben werden sollte. Ist der Umfang der Erhebung n ausreichend groß, so kann das stetige Merkmal besser durch die empirische Verteilungsfunktion angenähert werden. Die absolute kumulierte Häufigkeitsverteilung eines Merkmals X ist die Anzahl an Beobachtungswerten, die kleiner oder gleich einer beliebig vorgegebenen Zahl $x \in \mathbb{R}$ sind, also

  $$H(x) = \text{ Anzahl der Werte } x_i \text{ mit } x_i \leq x.$$

  Mit den entsprechenden Ausprägungen (eines zumindest ordinalskalierten) Merkmals $a_1 < \ldots < a_k$ ergibt sich

  $$H(x) = h(a_1) + \ldots + h(a_j),$$

  wobei a_j die größte Ausprägung mit $a_j \leq x$ ist und es gilt $a_{j+1} > x$ [41, S. 49]. Daraus lässt sich nun die relative kumulierte Häufigkeitsverteilung oder empirische Verteilungsfunktion ableiten [41, S. 50]:

  $$F(x) = \frac{H(x)}{n} = \text{ Anzahl der Werte } x_i \text{ mit } x_i \leq x$$

bzw.

$$F(x) = f(a_1) + \ldots + f(a_j).$$

F (und H) sind monoton wachsende Treppenfunktionen und an den Sprungstellen rechtsseitig stetig [41, S. 50]. Es werden nun Histogramme durch eine stetige Kurve, eine sogenannte Dichtekurve approximiert; um diesen Begriff abzugrenzen, wird an das Histogramm die Nichtnegativität der Treppenfunktionen sowie die Forderung, dass die überdeckte Fläche gleich 1 ist, gestellt. Eine stetige Funktion f ist eine Dichtekurve, wenn $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und die vom Graphen G_f und der Rechtswertachse begrenzte Gesamtfläche den Inhalt 1 besitzt. Damit ist die Fläche, die über ein bestimmtes Intervall $[a, b]$ von x-Werten begrenzt ist, als Anteil an x-Werten anzusehen, die genau in dieses Intervall $[a, b]$ fallen [41, S. 88]. Die Schwäche eines Histogramms ist die Klasseneinteilung und die daraus resultierende optische Verzerrung; wie eben geschildert ist es nicht günstig, eine stetige Dichtekurve durch eine Treppenfunktion darzustellen, deren Sprungstellen die Klassengrenzen sind. Um dieser Situation zu entgehen, kann man ein gleitendes Histogramm verwenden, indem man für einen beliebigen x-Wert ein Intervall $]x - h, x + h[$ der Breite $2\,h$ wählt und die Dichtekurve an der entsprechenden Stelle x durch

$$\hat{f}(x) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \text{ Anzahl der Daten } x_i \in \,]x - h, x + h[}{2\,h}$$

annähert [41, S. 99]. Da aber die gleitenden Histogramme immer noch unstetige Treppenfunktionen sind (es werden Rechteckfenster summiert), werden anstelle der Rechteckskerne stetige Kerne verwendet. Mit Hilfe dieser stetigen Kerne kann die Dichtekurve durch Kern-Dichteschätzer approximiert werden [41]. Sei dazu K eine beschränkte, nichtnegative Kernfunktion, die symmetrisch ist, also $K(x) = K(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, sowie normiert ist (die vom Graphen G_K und der Rechtswertachse beschränkte Gesamtfläche besitzt ebenfalls den Inhalt 1); in der Regel ist K auf $]-\infty, 0]$ monoton wachsend und auf $]0, \infty]$ monoton fallend; zu den Werten $x_1, \ldots, x_n$ ist dann

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n \cdot h} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

mit $x \in \mathbb{R}$ ein Kern-Dichteschätzer für f [41, S. 101]. Die Monotonieeigenschaft der Dichteschätzer bewirkt, dass näher bei x liegende Datenpunkte stärker gewichtet werden als weiter von x entfernte. Ferner besitzt die vom Graphen $G_{\hat{f}}$ und der Rechtswertachse beschränkte Fläche den Inhalt 1. Der Kern-Dichteschätzer $\hat{f}$ wird durch die Bandbreite h beeinflusst; ist h groß, so sind die Fenster weit und damit die Kurve annähernd unimodal, was aber dazu führen kann, dass wichtige Daten verloren gehen. Ist h hingegen klein, wird die Kurve stark oszillierend und es könnten unwichtige Informationen zu viel Gewicht erhalten [41, S. 101].

Lage- und Streumaße

Lagemaßzahlen dienen der Beschreibung für das Zentrum eines reellen Datensatzes; welches Lagemaß für einen bestimmten Datensatz sinnvoll ist, hängt unter anderem von der Datenstruktur und dem Skalenniveau des Merkmals ab. Streumaße sind verschiedene Maßzahlen, die die Streubreite des Datensatzes um einen geeigneten Lageparameter herum beschreiben.

- Arithmetisches Mittel

  Es wird aus dem reellen Datensatz $x_1, \ldots, x_n$ gebildet, indem die beobachteten Werte summiert und durch den Stichprobenumfang n dividiert werden. Es ist

  $$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

  das arithmetische Mittel ist für metrische Merkmale sinnvoll definiert und ausreißerempfindlich [41, S. 53].

- Median

  Er ist so definiert, dass höchstens die Hälfte der Daten unterhalb und höchstens die Hälfte der Daten oberhalb von ihm liegen. Dazu werden die Daten der Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ der Größe nach sortiert, also $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$. Es ist

  $$x_{med} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right), & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

  Der Median ist für ordinalskalierte und metrische Merkmale sinnvoll und nicht ausreißerempfindlich. Mindestens 50 % der Daten sind kleiner oder gleich x_{med} und mindestens 50 % der Daten sind größer als oder gleich x_{med} [41, S. 56].

- Modus

  Der Modus x_{mod} ist die Ausprägung mit größter Häufigkeit; der Modus ist eindeutig, wenn die Häufigkeitsverteilung ein eindeutiges Maximum besitzt. Der Modus ist auch für nominalskalierte Merkmale sinnvoll. Im Säulendiagramm entspricht der Modus dem Rechteck mit der größten Höhe [41, S. 57].

- Lageregeln

  Die empirische Verteilung zu den metrischen Daten wird als symmetrisch angesehen, wenn die Daten annähernd symmetrisch um den Median liegen. Ist dies nicht der Fall, so wird sie als schief bezeichnet, und zwar als rechtsschief (linkssteil), wenn die x_i rechts von x_{med} tendenziell weiter vom Median entfernt sind als die x_i links von x_{med}. Im umgekehrten Fall nennt man sie linksschief (rechtssteil).

Für metrisch skalierte Merkmale können das arithmetische Mittel, der Median und der Modus verwendet werden, um Aussagen über die Symmetrie bzw. die Schiefe der Häufigkeitsverteilung zu treffen. Als Lageregeln gelten etwa:

– symmetrische Verteilung: $\bar{x} \approx x_{med} \approx x_{mod}$,

– linkssteile Verteilung: $\bar{x} > x_{med} > x_{mod}$,

– rechtssteile Verteilung: $\bar{x} < x_{med} < x_{mod}$;

je stärker die drei Lagemaße sich unterscheiden, desto schiefer ist die Verteilung [41, S. 60].

- Quantile und Boxplot

Zur Visualisierung eines reellen Datensatzes $x_1, \ldots, x_n$ bietet sich ein Boxplot an. Dazu werden Quantile benötigt, die in gewisser Weise den Begriff des Medians verallgemeinern. Um die Quantile zu definieren, wird die nach der Größe geordnete Stichprobe $x_{(1)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$ betrachtet.

Jeder Wert x_p mit $0 < p < 1$, für den mindestens ein Anteil p der Daten kleiner oder gleich x_p und mindestens ein Anteil $1 - p$ größer oder gleich x_p ist, heißt p-Quantil [41, S. 89]. Es ist

$$\frac{\text{Anzahl } (x_i \leq x_p)}{n} \geq p \quad \text{sowie} \quad \frac{\text{Anzahl } (x_i \geq x_p)}{n} \geq 1 - p.$$

Oft bezieht man sich auf Quartile, nämlich $x_{0,25}$ und $x_{0,75}$, so dass die unter- bzw. oberhalb des Median liegenden Daten halbiert werden. Mit Hilfe der Einteilung in Quartile erhält man in etwa 25 % der Daten unterhalb von $x_{0,25}$ bzw. oberhalb von $x_{0,75}$. Es liegen zwischen diesen Quartilen die mittleren ca. 50 % der Daten; dieser Bereich wird als Interquartilabstand $d_Q = x_{0,75} - x_{0,25}$ definiert. Über die Quartile können auch Aussagen über die Schiefe einer Verteilung gemacht werden; liegt $x_{0,75}$ weiter vom Median x_{med} als $x_{0,25}$ entfernt, so ist die Verteilung linkssteil. Entsprechend kann man für eine rechtssteile Verteilung argumentieren. Da mit Hilfe der Quartile keine Aussagen über die Enden der Verteilung getroffen werden können, werden im Zusammenhang mit den Quartilen das Minimum $x_{min} = x_{(1)}$ und das Maximum $x_{max} = x_{(n)}$ betrachtet. Darüber kann die Spannweite $d_{Sp} = x_{max} - x_{min}$ definiert werden. Insgesamt kann eine Fünf-Punkte-Zusammenfassung festgehalten werden; diese besteht aus den Lagemaßen $x_{min}, x_{0,25}, x_{med}, x_{0,75}, x_{max}$ und wird graphisch im Boxplot zusammengefasst. Er ist geeignet, um Aussagen über die

Symmetrie der Verteilung und über Ausreißer zu machen. Im Boxplot wird die Schachtel über $x_{0,25}$ (Anfang), $x_{0,75}$ (Ende) und d_Q (Länge) festgelegt, der Median ist innerhalb der Schachtel markiert und die zwei Linien außerhalb der Box enden mit x_{min} bzw. x_{max} [41, S. 67]. Oft werden verallgemeinerte Boxplots verwendet, die eine leichte Modifizierung aufweisen, da in verallgemeinerten Boxplots auch Ausreißer dargestellt werden. Die Bedeutung von $x_{0,25}$, x_{med} und $x_{0,75}$ entspricht im verallgemeinerten Boxplot der obigen Beschreibung. Eine andere Bedeutung im verallgemeinerten Boxplot können x_{min} und x_{max} erfahren; für den reellen Datensatz $x_1, \ldots, x_n$ ist der obere Whisker im verallgemeinerten Boxplot definiert als

$$\min\left\{x_{0,75} + \frac{3}{2}\, d_Q;\ \max\{x_1, \ldots, x_n\}\right\}$$

und der untere Whisker im verallgemeinerten Boxplot als

$$\max\left\{x_{0,25} - \frac{3}{2}\, d_Q;\ \min\{x_1, \ldots, x_n\}\right\}.$$

Die Werte $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ außerhalb der Whisker (oberhalb des oberen Whiskers bzw. unterhalb des unteren Whiskers) werden als Ausreißer bezeichnet und mit Punkten im verallgemeinerten Boxplot visualisiert.

- Standardabweichung und Varianz

Die Standardabweichung s bzw. ihr Quadrat s^2, die Varianz, sind geeignete Maßzahlen, um Aussagen über die Streuung der Daten um das arithmetische Mittel $\bar{x}$ treffen zu können. Man definiert für die Werte $x_1, \ldots, x_n$ die Varianz

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \quad \text{sowie die Standardabweichung} \quad s = \sqrt{s^2}.$$

Dabei gibt die Differenz $x_i - \bar{x}$ an, wie stark x_i vom arithmetischen Mittel $\bar{x}$ abweicht; jedoch kann diese Differenz sowohl positiv wie negativ sein. Daher betrachtet man die stets nichtnegativen Abweichungen $(x_i - \bar{x})^2$, wobei die Varianz das Mittel dieser quadrierten Abweichungen darstellt; durch das Quadrieren geht die Maßeinheit verloren, die aber durch die Standardabweichung s wieder hergestellt wird, und damit die Streuung um $\bar{x}$ mit der korrekten Maßeinheit gemessen wird. Die Varianz s^2 und die Standardabweichung s reagieren empfindlich gegenüber Ausreißern, da starke Abweichungen von $\bar{x}$ stark in die Summation eingehen [41, S. 70].

Induktive Methoden

Die induktive Statistik versucht mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung allgemeine Schlussfolgerungen über die erhobenen Daten für umfassendere Grundgesamtheiten zu ziehen. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf das statistische Testen und die Beschreibung der verwendeten Testverfahren [41, S. 13], [99].

Grundprinzip des statistischen Testens

Um einen statistischen Test durchführen zu können, muss zunächst das inhaltliche Problem quantifiziert werden, bevor anschließend Modellannahmen getroffen werden. Das nun inhaltlich quantifizierte Problem wird als statistisches Testproblem über den Modellparametern formuliert; dabei werden Nullhypothese H_0 und Alternative H_1 festgesetzt. Nun wird das Signifikanzniveau α festgelegt, mit dem man sich höchstens für die Alternative H_1 entscheidet, obwohl die Nullhypothese H_0 zutrifft (Irrtums- bzw. Fehlerwahrscheinlichkeit). Es wird nun eine Zufallsvariable X mit den $X_1, \ldots, X_n$ unabhängigen Wiederholungen (bzw. mit den Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$) betrachtet. Für die Bestimmung des Ablehnungsbereichs des Tests muss eine geeignete Prüfgröße bzw. Teststatistik aus $X_1, \ldots, X_n$ gebildet werden, die sensibel für das Testproblem ist; zudem muss die Verteilung der Prüfgröße unter H_0 bestimmt werden können, da aus dieser Verteilung die kritischen Werte des Ablehnungsbereichs bestimmt werden können. Damit wird nun der Ablehnungsbereich so konzipiert, dass in ihm alle Werte zusammengefasst werden, die für H_1 sprechen, und die Wahrscheinlichkeit des Ablehnungsbereichs unter H_0 höchstens gleich dem Signifikanzniveau α ist. Nun wird für die Stichprobe der Wert der Prüfgröße berechnet und entschieden, ob dieser Wert im Ablehnungsbereich liegt oder nicht; liegt dieser im Ablehnungsbereich, so wird H_0 verworfen. Man unterscheidet zwischen einseitigen

$$H_0 : „\leq\text{“} \quad \text{gegen} \quad H_1 : „>\text{“} \qquad \text{bzw.} \qquad H_0 : „\geq\text{“} \quad \text{gegen} \quad H_1 : „<\text{“}$$

und zweiseitigen Testproblemen H_0: „=“ gegen H_1: „$\neq$“. Alternativ kann man statistische Tests über den p-Wert durchführen; der p-Wert gibt die Wahrscheinlichkeit an, unter H_0 den Wert der Prüfgröße oder einen in Richtung von H_1 extremeren Wert zu erhalten. Anstelle die Prüfgröße mit einem bestimmten kritischen Wert zu vergleichen, um über die Ablehnung von H_0 zu entscheiden, vergleicht man nun den p-Wert mit dem Signifikanzniveau α; die Nullhypothese H_0 ist dann zu verwerfen, wenn der p-Wert kleiner ist als α [41, S. 412-415].

Unterschied von Lagemaßen in zwei Gruppen

Im Folgenden werden zwei Merkmale X und Y unterschieden; beschrieben werden dabei Welch-Test (Zwei-Stichproben-t-Test mit unbekannten Varianzen, parametrisch) und der Wilcoxon-Rangsummentest (nichtparametrisch). Häufig werden Fragestellungen untersucht, die Unterschiede zwischen zwei Gruppen hinsichtlich des arithmetischen Mittelwerts bzw. des Medians darlegen sollen (Beispiel: Leistungen in den Testerhebungen von männlichen und weiblichen Studierenden). Deskriptiv bietet sich eine parallele Boxplotgraphik an, die sofort einen ersten Eindruck für die Verteilung in beiden Gruppen zeigt und Aussagen über die Symmetrie der Verteilung und mögliche Ausreißer zulässt. Induktiv kann man einen Welch-Test (parametrisch: Normalverteilung für die zugrundeliegenden Merkmale X und Y) bzw. einen Wilcoxon-Rangsummentest (nichtparametrisch: Annahme der Normalverteilung für die zugrundeliegenden Merkmale X und Y kann nicht verwendet werden) zur Analyse heranziehen. Es werden in der vorliegenden Arbeit lediglich zweiseitige Testprobleme behandelt, so dass auch nur diese Typen in der folgenden Beschreibung behandelt werden.

- Welch-Test

  Dieser Test besteht aus folgenden Komponenten [41, S. 457-459]:

  - Annahme: $X_1, \ldots, X_n$ bzw. $Y_1, \ldots, Y_m$ sind unabhängige Wiederholungen von X bzw. Y. Es liegen Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$ von $X_1, \ldots, X_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_m$ von $Y_1, \ldots, Y_m$ vor.
  - Hypothesen:
  $$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{gegen} \quad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y.$$
  - μ_X bzw. μ_Y sind die unbekannten Erwartungswerte und $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ die unbekannten Varianzen von X bzw. Y.
  - Teststatistik (bzw. Prüfgröße):
  $$T = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}}};$$
  $\bar{x}$ und s_x^2 bzw. $\bar{y}$ und s_y^2 sind jeweils Mittelwert und Varianz der beiden Gruppen.
  - Verteilung: wenn $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ gilt, so ist die Prüfgröße unter der Nullhypothese mittels einer t-Verteilung mit k Frei-

heitsgraden approximiert: $T \sim t(k)$ mit den Freiheitsgraden

$$k = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_x^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{s_y^2}{m}\right)^2}{m-1}};$$

(k ist eine reelle Zahl; zur Bestimmung der eigentlichen Freiheitsgrade rundet man k zu einer ganzen Zahl ab).

– Ablehnungsbereich: $|T| > t_{\frac{1-\alpha}{2}}(k)$, wobei $t_{\frac{1-\alpha}{2}}(k)$ das $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$-Quantil der $t(k)$-Verteilung ist.

- Wilcoxon-Rangsummentest

Ein Welch-Test benötigt als Voraussetzung die Normalverteilung in beiden Gruppen; oft ist dies in vielen Anwendungen nicht gegeben. In diesem Fall kann ein nichtparametrischer Test, der Wilcoxon-Rangsummentest, verwendet werden. Dieser nützt anstelle der eigentlichen Werte Rangzahlen. Wenn die Verteilung in beiden Gruppen annähernd gleich ist, so sollten auch die Rangzahlen in beiden Gruppen etwa gleich sein. Folgende Komponenten charakterisieren den Test [41, S. 459-460]:

– Annahme: $X_1, \ldots, X_n$ bzw. $Y_1, \ldots, Y_m$ sind unabhängige Wiederholungen von X bzw. Y sowie X und Y besitzen stetige Verteilungsfunktionen. Es liegen Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$ von $X_1, \ldots, X_n$ bzw. $y_1, \ldots, y_m$ von $Y_1, \ldots, Y_m$ vor.
– Hypothesen:

$$H_0 : m_x = m_y \quad \text{gegen} \quad H_1 : m_x \neq m_y.$$

– m_x bzw. m_y sind die unbekannten Mediane der Grundgesamtheit in der Gruppe X bzw. Y.
– Man bildet aus den Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_m$ die Ränge $\text{Rang}(x_1), \ldots, \text{Rang}(x_n), \text{Rang}(y_1), \ldots, \text{Rang}(y_m)$ (der Rang einer einzelnen Beobachtung entspricht ihrer Position in der sogenannten gepoolten Stichprobe, also, wenn alle Beobachtungswerte $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_m$ der Größe nach geordnet und durchnummeriert werden). Die Teststatistik T_W ist bestimmt durch

$$T_W = \sum_{i=1}^{n} \text{Rang}(x_i) = \sum_{i=1}^{n+m} i \cdot V_i$$

mit

$$V_i = \begin{cases} 1, & i\text{-te Beobachtung in der gepoolten Stichprobe ist ein } x_i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

– Ablehnungsbereich: $T_W > w_{\frac{1-\alpha}{2}}(n,m)$ oder $T_w < w_{\frac{\alpha}{2}}(n,m)$, wobei $w_{\frac{1-\alpha}{2}}(n,m)$ bzw. $w_{\frac{\alpha}{2}}(n,m)$ das $\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$- bzw. $\frac{\alpha}{2}$-Quantil der Verteilung von W ist.

Unterschied von Lagemaßen in mehreren Gruppen

Betrachtet man mehr als zwei Gruppen, genügen die eben (für zwei Vergleichsgruppen) dargelegten Welch-Test bzw. Wilcoxon-Rangsummentest für die Analyse möglicher Unterschiede hinsichtlich der Lagemaße nicht mehr. Für diese Situation wird eine einfaktorielle Varianzanalyse (parametrisch) oder ein Kruskal-Wallis-Test (nichtparametrisch) verwendet.

- Einfaktorielle Varianzanalyse

  Dieses Verfahren ist die Verallgemeinerung des Welch-Tests im Falle von mehr als zwei Gruppen; für $k = 2$ Gruppen ist dieses Verfahren gleichwertig zum Welch-Test (bei der Varianzanalyse wird die Varianzhomogenität vorausgesetzt). Es werden nun $k > 2$ Gruppen betrachtet (mit $k \in \mathbb{N}$). Der Index i gibt die Gruppe und j die j-te Beobachtung in Gruppe i an. Der Index i kann die Werte 1 bis k annehmen, j die Werte 1 bis n_i; es ist die Gesamtstichprobenlänge $n = n_1 + \ldots + n_k$. Dieser Test besteht aus folgenden Komponenten [50, S. 179-182]:

  – Annahme: $y_{i,j}$ mit $i \in \{1, \ldots k\}$ und $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ sind Realisierungen der unabhängigen Zufallsvariablen $Y_{i,j}$.
  – Hypothesen:
  $$H_0 : \mu_1 = \ldots = \mu_k$$
  gegen
  $$H_1 : \exists(\ell, m) \text{ für } \ell, m \in \{1, \ldots k\} \text{ und } \ell \neq m \text{ mit } \mu_\ell \neq \mu_m.$$
  – es ist $Y_{i,j} \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ mit $\mu_1, \ldots, \mu_k$ und Varianzhomogenität (es gilt $\sigma^2 = \sigma_1^2 = \ldots = \sigma_k^2$), wobei $\mu_1, \ldots, \mu_k$ und σ^2 unbekannt sind.

  Ferner ergibt sich mit dem arithmetischen Mittelwert für die Gruppe i

  $$\bar{y}_{i,\diamond} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j}$$

und dem gesamten arithmetischen Mittelwert aller k Gruppen

$$\bar{y}_{*,\diamond} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{i,j}$$

dann die gesamte Streuung

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{i,j} - \bar{y}_{*,\diamond})^2}_{=SQT} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{i,j} - \bar{y}_{i,\diamond})^2}_{=SQR} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} n_i \cdot (\bar{y}_{i,\diamond} - \bar{y}_{*,\diamond})^2}_{=SQE}$$

mit der Gesamtstreuung SQT, der Streuung zwischen den Gruppen SQE und der Streuung innerhalb der Gruppen SQR. Für die Konstruktion der Prüfgröße werden die Werte SQE und SQR durch die entsprechenden Freiheitsgrade dividiert und es ergeben sich der mittlere quadratische Fehler zwischen den Gruppen (MQE) und der mittlere quadratische Fehler innerhalb der Gruppen (MQR) mit

$$MQE = \frac{SQE}{k-1} \qquad \text{bzw.} \qquad MQR = \frac{SQR}{n-k}.$$

- Teststatistik (bzw. Prüfgröße):

  $$F = \frac{MQE}{MQR};$$

  es liegt eine F-Verteilung mit $k-1$ und $n-k$ Freiheitsgraden vor; H_0 wird verworfen, wenn die Streuung zwischen den Gruppen deutlich größer ist als innerhalb der Gruppen, also der berechnete Wert der Prüfgröße das $(1-\alpha)$-Quantil der $F(k-1, n-k)$-Verteilung überschreitet [41, S. 525-527].
- Ablehnungsbereich: $F > F_{1-\alpha}(k-1, n-k)$, wobei $F_{1-\alpha}(k-1, n-k)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der $F(k-1, n-k)$-Verteilung ist.

Die einfaktorielle Varianzanalyse kann nur anzeigen, ob Unterschiede zwischen mindestens zwei Gruppen vorliegen, nicht zwischen wie vielen und welchen. Um zu prüfen, zwischen welchen Gruppen dies der Fall ist, bieten sich Post-hoc-Tests wie beispielsweise die Tukey HSD-Methode an [53, S. 347].

• Kruskal-Wallis-Test

Der Kruskal-Wallis-Test ist das nichtparametrische Pendant zur einfaktoriellen Varianzanalyse und stellt eine Verallgemeinerung des Wilcoxon-Rangsummentests für $k > 2$ Gruppen dar. Es wird in diesem Fall auf eine genauere Schilderung des Testproblems verzichtet, da ähnliche Überlegungen wie im

Fall des Wilcoxon-Rangsummentests angestellt werden. Für die k Gruppen mit den entsprechenden Medianen lauten die Hypothesen:

$$H_0 : m_{x_1} = \ldots = m_{x_k}$$

gegen

$$H_1 : \exists(\ell, p) \text{ für } \ell, p \in \{1, \ldots k\} \text{ und } \ell \neq p \text{ mit } m_{x_\ell} \neq m_{x_p}.$$

Bei der Konstruktion der entsprechenden Prüfgröße wird wiederum der Rang für jede der n Beobachtungen in den gepoolten Stichproben bestimmt und daraus werden dann die Rangsummen für die einzelnen Gruppen gebildet. Die Darstellung beschränkt sich auf die geschilderten Grundzüge des Verfahrens. Auch in diesem Fall müssen Post-hoc-Tests verwendet werden, um die expliziten Unterschiede zwischen den Gruppen herauszustellen.

Multiple lineare Regression

Schließlich wird noch das Modell der multiplen linearen Regression vorgestellt; dabei wird versucht, den Einfluss von p Regressoren (Beispiel: Geschlecht, Fachsemester, studierter Lehramtstyp, usw.) auf eine Zielgröße (Beispiel: Leistungen in den Testerhebungen) zu analysieren. Das grundlegende Modell der multiplen linearen Regression ist

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_{i,1} + \ldots + \beta_p \cdot x_{i,p} + \varepsilon_i$$

mit $i \in \{1, \ldots, n\}$; dabei sind $Y_1, \ldots, Y_n$ beobachtbare metrische Zufallsvariablen, $x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}$ Realisierungen der Zufallsvariablen X_j und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ nicht beobachtbare Zufallsvariablen, die unabhängig und identisch verteilt sind mit dem Erwartungswert $E(\varepsilon_i) = 0$ und der Varianz $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$. Die Regressionskoeffizienten $\beta_0, \ldots, \beta_p$ und die Fehlervarianz σ^2 sind aus den Daten y_i, $x_{i,1}, \ldots, x_{i,p}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ zu schätzen [41, S. 495]. Mit der Annahme der Normalverteilung für die Fehlerterme $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ folgt für die Zielvariable auch die Annahme der Normalverteilung, es gilt also $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$. Nun müssen die Regressionskoeffizienten $\beta_0, \ldots, \beta_p$ mittels eines Kleinste-Quadrate-Schätzers ermittelt werden; man bestimmt die geschätzten Werte $\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_p$ so, dass die Summe der quadratischen Abweichungen bezüglich der Werte $\beta_0, \ldots, \beta_p$ minimal ist, also [41, S. 496]

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot x_{i,1} - \ldots - \beta_p \cdot x_{i,p})^2 \longrightarrow \min_{\beta_0, \ldots, \beta_p}.$$

Um eindeutige Lösungen für $\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_p$ zu erhalten, muss $n \geq p+1$ gelten und keine Variable X_j mit $j \in \{0, \ldots, p\}$ (mit $X_0 = 1$) darf sich als Linearkombination der restlichen X_k mit $k \neq j$ darstellen lassen [41, S. 496]. Nun wird der Wert von σ^2

geschätzt (Kleinste-Quadrate-Schätzer); es ist

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p-1} \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon_i}^2 = \frac{1}{n-p-1} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{Y}_i \right)^2$$

mit den Residuen $\hat{\varepsilon_i} = Y_i - \hat{Y}_i$ und $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x_{i,1} + \ldots + \hat{\beta}_p \cdot x_{i,p}$ [41, S. 497]. Wie für die einfaktorielle Varianzanalyse wird nun die Streuungszerlegung betrachtet (als Vorüberlegung zur Bestimmung der Prüfgröße und um die Güte des Regressionsmodells zu beurteilen); es ist

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y} \right)^2}_{=SQT} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y}_i - Y_i \right)^2}_{=SQR} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{Y} - \bar{Y} \right)^2}_{=SQE}$$

mit der Gesamtstreuung SQT, der durch die Regression erklärten Streuung (SQE) und der Reststreuung (SQR). Aus diesen Größen kann ein Maß für die Güte des Regressionsmodells berechnet werden; das Bestimmtheitsmaß ist

$$R^2 = \frac{SQE}{SQT} = 1 - \frac{SQR}{SQT},$$

also durch den Quotienten aus der durch die Regression erklärten Streuung und der Gesamtstreuung bestimmt; es gilt $0 \leq R^2 \leq 1$ [41, S. 498]. Umso näher der Wert von R^2 bei 1 liegt, desto besser wird die Zielvariable durch die Regression erklärt und umso kleiner ist der Fehlerterm ε_i. Eine weitere entscheidende Frage dieser Methode ist, ob die Regressoren überhaupt zur Erklärung der Zielgröße beitragen; dafür wird ein Overall-F-Test durchgeführt. Folgendes Modell liegt zugrunde [41, S. 500]:

- Annahme: $Y_1, \ldots, Y_n$ sind metrische Zufallsvariablen und $x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}$ Realisierungen der Zufallsvariablen X_j.
- Hypothesen:

$$H_0 : \beta_1 = \ldots = \beta_p = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1 : \exists j \text{ für } j \in \{1, \ldots, p\} \text{ mit } \beta_j \neq 0.$$

- $\beta_0, \ldots, \beta_p$ sind die Regressionskoeffizienten im zugrundeliegenden Modell der multiplen linearen Regression.
- Teststatistik (bzw. Prüfgröße):

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n-p-1}{p} = \frac{SQE}{SQR} \cdot \frac{n-p-1}{p};$$

  Es ist SQT die Gesamtstreuung, SQE die durch die Regression erklärte Streuung und SQR die Reststreuung; das Bestimmtheitsmaß R^2 ist der Quotient

aus der durch die Regression erklärten Streuung und der Gesamtstreuung.
- Verteilung: Unter der Nullhypothese H_0 ist die Prüfgröße mittels einer F-Verteilung mit $F \sim F(p, n-p-1)$ approximiert.
- Ablehnungsbereich: $F > F_{1-\alpha}(p, n-p-1)$, wobei $F_{1-\alpha}(p, n-p-1)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der $F(p, n-p-1)$-Verteilung ist.

H_0 besagt, dass keiner der Regressoren $X_1, \ldots, X_p$ einen Einfluss auf die Zielgröße hat; falls H_0 verworfen wird, trägt wenigstens einer der Regressoren signifikant zur Erklärung der Zielgröße bei. Auch hier zeigt sich wiederum eine Analogie zur einfaktoriellen Varianzanalyse; wird die Nullhypothese H_0 bei der Teststatistik der Varianzanalyse verworfen, so liegen zwischen mindestens zwei Gruppen bedeutsame Unterschiede hinsichtlich der arithmetischen Mittelwerte vor. Um diese Unterschiede genauer zu analysieren, wendet man Post-hoc-Tests an. Zur Bestimmung des passenden Regressionsmodells (möglichst hoher Erklärungswert des Modells über das Bestimmtheitsmaß bzw. adjustiertes Bestimmtheitsmaß und gleichzeitig möglichst wenig Paramater) kann beispielsweise auf den F-to-remove-Test oder den AIC-Wert (Akaike Information Criterion, ein Maß für die Qualität der Anpassung des Regressionsmodells beruhend auf dem Maximum-Likelihood-Ansatz) zurückgegriffen werden [50, S. 213-214], [99, S. 120].

Hauptkomponentenanalyse

Im Folgenden werden die Ziele und die Grundlagen der Hauptkomponentenanalyse geschildert; die Ausführungen stützen sich auf die Ausführungen von Hatzinger et al. aus dem Buch „R Einführung durch angewandte Statistik“ [53, S. 381-404].

Zentrale Ziele der Hauptkomponentenanalyse sind: [53, S. 384]:

- Reduktion einer größeren Anzahl miteinander korrelierter Variablen auf eine geringere Anzahl an unkorrelierten Variablen, wobei der Großteil der Informationen beibehalten werden soll,
- Aufdecken einer Struktur, die einer Vielzahl von Variablen zugrunde liegt,
- Erzeugung neuer Variablen (Hauptkomponenten), die mit den ursprünglichen Variablen hoch korrelieren.

Die Hauptkomponentenanalyse ist eine explorative Methode, es gibt also kein Vorwissen über die zugrunde liegenden Muster der Variablen; sie kann dazu dienen, grundlegende Hinweise auf Strukturen der vorliegenden Daten zu liefern. Sie beruht auf den Kovarianzen (Korrelationen) zwischen allen Variablen [53, S. 384].

Bestimmung der Hauptkomponenten und ihrer Anzahl

Typische Vorgehensweise ist die Extraktion der Hauptkomponenten; die Grundidee ist dabei [53, S. 386]:

- Suchen der größten Gruppe von Items, die untereinander hoch korreliert sind; diese bilden die erste Hauptkomponente,
- Suchen der zweitgrößten Gruppe von Items, die untereinander hoch korreliert sind, aber mit der ersten Gruppe möglichst gering korrelieren, usw.

Das Auffinden weiterer Gruppen, die untereinander hoch, aber nur gering mit vorangegangenen Gruppen korrelieren, wird immer schwieriger, weswegen eine Trennschärfe zwischen wichtigen und unwichtigen Hauptkomponenten geschaffen werden muss. Für die Anzahl der Hauptkomponenten verwendet man zwei Kriterien (es gibt keine allgemeingültige Regel): man untersucht numerisch die Eigenwerte und graphisch den Screeplot. Die Bedeutung der Eigenwerte ist folgende [53, S. 387]:

- jede Hauptkomponente besitzt einen Eigenwert,
- die Größe des jeweiligen Eigenwerts beschreibt den Anteil an der Gesamtvarianz der Daten, die durch diese Komponente erklärt wird; je größer die Anzahl der Items, die gemäß des oben geschilderten Verfahrens zu einer Gruppe zusammengefasst werden und je höher die Korrelationen innerhalb dieser Gruppe sind, umso größer wird auch der Eigenwert der entsprechenden Hauptkomponente, der durch diese Gruppe gebildet wird, sein,
- die Größe des Eigenwerts entspricht dem Erklärungswert der Hauptkomponente,
- besitzt eine Komponente einen kleinen Eigenwert, so trägt sie nur wenig zur Aufklärung der Gesamtstreuung bei; ferner ist die Anzahl der Items in dieser Gruppe gering, die Korrelation der Items untereinander relativ gering, aber die Korrelation zu Items anderer Gruppen relativ hoch.

Die Daten der Items werden standardisiert, d.h. die Werte besitzen Mittelwert 0 und Varianz 1; damit entspricht aber die Gesamtvarianz sowie die Summe der Eigenwerte der Anzahl der Items. Folglich kann für jeden Eigenwert der Anteil an erklärter Varianz berechnet werden, indem der Eigenwert durch die Anzahl der Items dividiert wird. Schließlich besagt das Eigenwertkriterium, dass Hauptkomponenten mit einem Eigenwert größer als 1 berücksichtigt werden; Hauptkomponenten mit einem Eigenwert kleiner als 1 liefern weniger Erklärungswert als das ursprüngliche Item. Die graphische Alternative ist der sogenannte Screeplot; bei diesem wird die Hauptkomponentennummer (x-Achse) gegen die entsprechenden Eigenwerte (y-Achse) abgetragen. Die gewonnenen Punkte werden mit Linien verbunden (Polygonzug). Berücksichtigung finden alle Hauptkomponenten, die im Plot links der Knickstelle liegen. Häufig weisen die ersten Hauptkomponenten hohe Eigenwerte (über dem Wert 1) auf und fallen relativ schnell ab und bleiben auf einem konstant niedrigen Niveau (unter dem Wert 1), so dass sich dadurch eine Knickstelle ergibt [53, S. 388]. Beide Methoden sind lediglich Orientierungshilfen zum Finden der richtigen Anzahl an Hauptkomponenten [53, S. 388].

Interpretation der Hauptkomponenten

Als Ergebnis der Hauptkomponentenanalyse erhält man unter anderem die Komponentenladungsmatrix, welche die sogenannten Komponentenladungen enthält. Diese sind Korrelationskoeffizienten zwischen den ursprünglichen Items und den Hauptkomponenten; dabei sucht man die entsprechenden Items, die eine hohe Korrelation zu einer Hauptkomponente zeigen („die hoch auf eine Hauptkomponente laden“) [53, S. 389]. Die Einträge der Komponentenladungsmatrix geben an, wie stark jedes Item auf einer Hauptkomponente „lädt“. Graphisch kann man die Hauptkomponenten als Achsen im kartesischen Koordinatensystem betrachten und die Einträge als Punkte in diesem. Je näher ein Item bei einer Achse (Hauptkomponente) liegt, desto stärker ist die Beziehung zu dieser. Je weiter der Abstand zum Ursprung ist, desto wichtiger ist dieses Item für die Komponente. Ziel ist es nun, Hauptkomponenten zu erhalten, die möglichst unabhängig voneinander sind, also möglichst auf einer Achse liegen. Dabei werden die Achsen so rotiert, dass diese durch die Itemgruppe gehen [53, S. 389].

Die Bedeutung der Rotation der Komponentenstruktur ist folgende [53, S. 391]:

- Drehung des Koordinatensystems, welches die Komponentenstruktur abbildet, so dass die Items (Punkte im Koordinatensystem) möglichst nahe an den gedrehten Achsen liegen, wobei jedes Item nur einer Komponente zukommt.
- Neuverteilung der Korrelation zwischen Items und Hauptkomponenten.
- Änderung des Erklärungswertes einzelner Hauptkomponenten gemäß einer gleichmäßigen Verteilung; damit fällt etwa der Erklärungswert der zweitwichtigsten Hauptkomponente zur wichtigsten Komponente nicht so stark ab wie im unrotierten Modell. Der Anteil der erklärten Varianz durch die extrahierten Variablen verändert sich aber nicht.
- Unterscheidung der Rotationsmethoden in orthogonale und schiefwinklige Rotation; bei orthogonaler Rotation bleiben die rechten Winkel zwischen den Achsen erhalten; dies bedeutet, dass die Hauptkomponenten unkorreliert sind. Bei schiefwinkliger Rotation wird eine Korrelation zwischen den Hauptkomponenten zugelassen.
- Unter den orthogonalen Methoden der Rotation wird als Standardvariante die Varimax-Rotation verwendet; dabei werden die Achsen so transformiert, dass für jede Hauptkomponente einige wenige Items hohe Ladung, die übrigen Items Ladungen nahe der Null besitzen.

Mathematische Grundidee

Der zugrundeliegende Datensatz hat die Struktur einer $n \times m$-Matrix; man betrachtet n Versuchspersonen, an denen jeweils m Merkmale gemessen werden. Veranschaulicht werden also n Punkte im m-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^m$. Ziel der Hauptkomponentenanalyse ist es, diese Datenpunkte so in einen k-dimensionalen Unterraum $U \subsetneq \mathbb{R}^m$ mit $k < m$ zu projizieren, dass dabei möglichst wenig Information verloren geht und die vorliegende Struktur in Form von Korrelation in den Datenpunkten zusammengefasst wird. Die Daten liegen als Punkte in einem m-dimensionalen kartesischen Koordinatensystem vor [61, S. 23].

Die Berechnung erfolgt über eine lineare Regression der Datenpunkte im $\mathbb{R}^m$. Der Fehler ist dabei die Summe der euklidischen Abstände zwischen der Regressionsgeraden und den Datenpunkten. Dieser Fehler wird für alle Geraden berechnet, die durch das Zentrum (Mittelwert) der Daten laufen. Die Gerade v_1 mit dem kleinsten Fehler ist die erste Hauptkomponente. Danach wird eine weitere Gerade v_2 gesucht, die durch den Mittelpunkt der Daten geht und senkrecht zur ersten Geraden ist. Ferner muss aber der aufsummierte Abstand zwischen den Datenpunkten und der von v_1 und v_2 aufgespannten Ebene $E = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$ wieder minimal werden. Die zweite Gerade entspricht dann der zweiten Hauptkomponente. Danach wird eine dritte, vierte bis m-te Gerade gesucht, die dann die dritte, vierte bis m-te Hauptkomponente bilden [61, S. 25-27].

Der Abstand zwischen dem Zentrum der Daten und einem Datenpunkt ist unabhängig davon, welche Gerade durch das Zentrum als Referenzgerade betrachtet wird. Mit dem Satz von Pythagoras kann der Abstand in einen Anteil in Richtung der Referenzgeraden und einen Anteil rechtwinklig dazu zerlegt werden. Eine Minimierung der Abstände rechtwinklig zur Referenzgeraden (Länge einer Kathete) bedeutet unter Beibehaltung der Gültigkeit des Satzes von Pythagoras also eine Maximierung der Abstände in Richtung der Referenzgeraden (Länge der anderen Kathete). Die aufsummierten Quadrate der Abstände in Richtung der Referenzgeraden bilden die Varianz der Daten in dieser Richtung. Die erste Achse v_1 soll so durch die Datenpunkte gelegt werden, dass die Varianz der Daten in dieser Richtung maximal wird. Die zweite Achse v_2 steht auf der ersten Achse senkrecht; in ihrer Richtung ist die Varianz am zweitgrößten usw. Damit gibt es für die m-dimensionalen Daten m Achsen, die aufeinander senkrecht stehen. Die totale Varianz der Daten ist die Summe der Varianzen in die entsprechenden Richtungen. Mit den m konstruierten Achsen wird nun ein neues kartesisches Koordinatensystem durch die Datenpunkte gelegt. Dieses kann als orthogonale Transformation der Variablenachsen dargestellt werden. Wird nun durch die ersten k Achsen (mit $k < m$) ein hinreichend großer Prozentsatz der totalen Varianz erklärt, erscheinen die Hauptkomponenten, die durch die neuen Achsen repräsentiert werden, ausreichend für den Informationsgehalt der Daten. Die totale Varianz der Daten ist ein Maß für ihren Informationsgehalt [61, S. 25-27].

Folgendes Modell liegt zugrunde: es werden m Zufallsvariablen X_j für $j \in \{1, \ldots, m\}$ betrachtet und zu einem $\mathbb{R}^m$-wertigen Vektor

$$x = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}$$

zusammengefasst. Der Vektor x hat als Erwartungsvektor den Nullvektor sowie die $m \times m$-Kovarianzmatrix A, die symmetrisch und positiv semidefinit ist; es wird die Invertierbarkeit von A, also die positive Definitheit von A, vorausgesetzt. Die Eigenwerte λ_j für $j \in \{1, \ldots, m\}$ der Matrix A finden sich in der Diagonalmatrix

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

wobei $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_m$ gilt. Die Eigenvektoren v_j für $j \in \{1, \ldots, m\}$ der Eigenwerte λ_j werden in der orthogonalen Komponentenladungsmatrix

$$P = (v_1, \ldots, v_m) = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{m,1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1,m} & \ldots & v_{m,m} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_m(\mathbb{R})$$

zusammengefasst, und es gilt $D = P^\top \cdot A \cdot P$. Die Komponentenladungen sind die Korrelationskoeffizienten zwischen den ursprünglichen Items und den Hauptkomponenten (Spalten der Komponentenladungsmatrix) [53, S. 389]. Der Zufallsvektor x wird linear transformiert und es ergibt sich

$$x \mapsto y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = P^\top \cdot x = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \ldots & v_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m,1} & \ldots & v_{m,m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & v_{1,1} \cdot X_1 & + & \ldots & + & v_{1,m} \cdot X_m \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_m & = & v_{m,1} \cdot X_1 & + & \ldots & + & v_{m,m} \cdot X_m \end{array} .$$

Die Varianz von y_1 ist also $\operatorname{Var}(y_1) = \lambda_1$. Damit hat die Hauptkomponente y_1 den größten Anteil an der Gesamtvarianz der Daten, y_2 den zweitgrößten Anteil usw.

Prüfen der Voraussetzungen

Eine Prüfung, ob sich die vorliegenden Daten für eine Hauptkomponentenanalyse eignen, kann über das Kaiser-Meyer-Olkin-Kriterium erfolgen [53, S. 395]. Dieses gibt das Ausmaß an Korrelation an, das in den vorliegenden Daten steckt und berücksichtigt dabei auch das Ausmaß an partieller Korrelation, d.h. wie stark die Korrelation zweier Variablen durch die Korrelation mit anderen Variablen beeinflusst wird. Das Kriterium nimmt Werte zwischen 0,00 und 1,00 an, Werte unter 0,50 gelten als nicht akzeptabel, Werte über 0,80 als sehr gut. Ein weiteres Verfahren zur Prüfung der Voraussetzungen ist der Bartlett-Test auf Spherizität [53, S. 392]; dieser testet, ob die Variablen überhaupt untereinander korrelieren; dafür muss die Nullhypothese, dass alle Korrelationen Null sind, abgelehnt werden.

Testgütekriterien

Die folgenden Ausführungen zu Testgütekriterien stützen sich auf die Ausführungen von Lienert und Raatz [78]. Ein Test ist ein Routineverfahren zur Untersuchung von empirisch abgrenzbaren Merkmalen mit dem Ziel, quantitative Aussagen treffen zu können [78, S. 1].

Ein guter Test soll die Hauptgütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität erfüllen. Als weitere Forderungen an einen Test können die Nebengütekriterien Normierung, Vergleichbarkeit, Ökonomie und Nützlichkeit gestellt werden [78, S. 7]. Es werden zunächst die Hauptgütekriterien erläutert:

- **Objektivität**: Dieses Kriterium beschreibt den Grad, in dem die Testergebnisse unabhängig von der Untersuchungsperson sind [78, S. 7]; man unterscheidet dabei:
  - **Durchführungsobjektivität**: Grad der Unabhängigkeit der Testergebnisse von beliebigen Verhaltensvariationen der Untersuchungspersonen, die Einfluss auf Testpersonen und Ergebnisse nehmen können [78, S. 8].
  - **Auswertungsobjektivität**: Art der Auswertung (etwa numerisch oder kategorial) des registrierten Testverhaltens nach vorgegebenen Regeln [78, S. 8]; diese Form der Objektivität ist stark vom Testdesign abhängig.
  - **Interpretationsobjektivität**: Grad der Unabhängigkeit der Interpretation der Testergebnisse, d.h. diese Form der Objektivität liegt dann vor, wenn aus den gleichen Auswertungsergebnissen verschiedener Testpersonen die gleichen Schlussfolgerungen gezogen werden [78, S. 8].

- **Reliabilität**: Dieses Kriterium beschreibt den Grad der Genauigkeit, mit dem ein Test ein bestimmtes Merkmal misst, unabhängig, ob er dieses Merkmal auch zu messen beansprucht [78, S. 9]. Der Grad der Reliabilität wird durch einen Wert gekennzeichnet, der angibt, in welchem Maße das Testergebnis reproduzierbar ist [78, S. 9]. Man unterscheidet verschiedene Zugänge, dieses Kriterium zu fassen:

  – **Paralleltest-Reliabilität**: Einer Stichprobe von Testpersonen werden zwei miteinander (streng) vergleichbare Tests vorgelegt und deren Ergebnisse werden korreliert [78, S. 9].

  – **Retest-Reliabilität**: Einer Stichprobe von Testpersonen wird zweimal derselbe Test vorgelegt und die Korrelation beider Ergebnisreihen bestimmt [78, S. 9].

  – **Innere Konsistenz eines Tests** (dabei unterscheidet man nochmals zwei Methoden): bei der Testhalbierung wird einer Stichprobe von Testpersonen ein Test einmal vorgelegt; danach werden die Items in zwei gleichwertige Hälften unterteilt und das Testergebnis einer einzigen Testperson für beide Teiltests ermittelt [78, S. 10]. Bei der Konsistenzanalyse hingegen werden die Items eines Tests als multipel halbierte Testteile aufgefasst, und die Reliabilität etwa über Kennwerte der Trennschärfe ermittelt [78, S. 10]. Ein Maß für die innere Konsistenz eines Tests ist die Kennzahl Cronbachs α; diese ist definiert als die durchschnittliche Korrelation zwischen den betrachteten Items und kann Werte von $-\infty$ bis 1 annehmen. Man berechnet die Kenngröße folgendermaßen:

  $$\alpha = \frac{n}{n-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sigma_X^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sigma_{Y_i}^2\right),$$

  wobei n der Anzahl der Items oder Subskalen entspricht sowie σ_X^2 der Varianz der beobachteten Gesamttestscores und $\sigma_{Y_i}^2$ der Varianz des Items oder der Subskala i [78, S. 192].

- **Validität**: Dieses Kriterium beschreibt den Grad der Genauigkeit, mit dem ein Test das Merkmal, das er messen soll, tatsächlich misst bzw. vorhersagt [78, S. 10]. Man unterscheidet verschiedene Aspekte für dieses Kriterium:

  – **Inhaltliche Validität**: Der Test bzw. die Items sind so konstruiert, dass sie das zu erfassende Merkmal repräsentieren, d.h. der Test bzw. die Items stellen das optimale Kriterium für das Merkmal dar [78, S. 10].

  – **Konstruktvalidität**: Auf der Grundlage von theoretischen Erwägungen und anschließenden empirischen Untersuchungen wird entschieden, ob ein Test ein bestimmtes Konstrukt erfasst [78, S. 11].

  - **Kriterienbezogene Validität**: Es werden zunächst die Testergebnisse einer Stichprobe von Testpersonen mit einem Außenkriterium korreliert, welches vom Test unabhängig erhoben wird. Je größer die Gemeinsamkeit des von Test und Außenkriterium erfassten Anteils des zu messenden Merkmals, desto größer ist die kriteriumsbezogene Validität des Tests [78, S. 11].

Nun werden noch die Nebengütekriterien von Tests in Kurzform skizziert:

- **Normierung**: Über einen Test sollen Angaben vorliegen, die als Bezugssystem für die Einordnung des individuellen Testergebnisses dienen können. Damit werden die Ergebnisse verschiedener Tests vergleichbar (etwa Transformation auf Normalverteilung) [78, S. 11].
- **Vergleichbarkeit**: Ein Test ist dann vergleichbar, wenn mehrere Paralleltestformen und validitätsähnliche Tests vorliegen [78, S. 12].
- **Ökonomie**: Ein Test ist ökonomisch, wenn er eine kurze Durchführungszeit beansprucht, wenig Material verbraucht, als Gruppentest durchführbar ist und gut auszuwerten ist [78, S. 12].
- **Nützlichkeit**: Ein Test ist dann nützlich, wenn er ein Merkmal misst, für dessen Untersuchung ein praktisches Bedürfnis besteht [78, S. 13].

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit erkläre ich an Eidesstatt, dass die Dissertation von mir selbstständig, ohne unerlaubte Beihilfe angefertigt ist.

München, 10. Juni 2015