

潘家铮极值原理的优化算法实现

郑榕明¹, 赵志宏^{1,2}, 王金安²

(1. 香港理工大学 土木与结构工程系, 香港; 2. 北京科技大学 土木与环境工程学院, 北京 100083)

摘要: 边坡极限平衡分析法通常情况下是静不定的, 需要引入一些简化假定来求得安全系数。条间力函数 $f(x)$ 作为其中的主要假设条件, 其对安全系数的影响在过去的研究中并没有得到足够的重视。对二维极限平衡法采用优化算法求得满足潘家铮极值原理的安全系数, 对于某一确定的滑裂面, 将条间力函数 $f(x_i)$ 视为控制变量, 采用模拟退火方法不断调整 $f(x_i)$ 以求解安全系数极大值, 实际上是一种下限法; 而搜索临界滑裂面的过程, 采用粒子群法或和声法搜索最危险滑动面。另外, 还探讨求解安全系数时通常会碰到的收敛性问题, 结果证明 $f(x)$ 不能随意设定, 否则会引起不符合实际的条间力。相比传统的极限平衡法, 该极值优化法极大地提高了收敛性。

关键词: 边坡工程; 安全系数; 潘家铮极值原理; 优化算法

中图分类号: P 642 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 6915(2008)04 - 0782 - 07

REALIZATION OF PAN JIAZHENG'S EXTREMUM PRINCIPLE WITH OPTIMIZATION METHODS

CHENG Yungming¹, ZHAO Zhihong^{1,2}, WANG Jin'an²

(1. Department of Civil and Structural Engineering, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong, China;

2. School of Civil and Environment Engineering, University of Science and Technology Beijing,

Beijing 100083, China)

Abstract: Slope stability analysis based on the limit equilibrium method is statically indeterminate, which requires various assumptions to evaluate the factor of safety. The interslice force function $f(x)$ is a major assumption that is important but is not adequately considered in the past. The authors propose that the factor of safety and the interslice force function can be determined in accordance with the Pan Jiazheng's extremum principle from an optimization analysis. For any prescribed failure surface, the interslice force function $f(x_i)$ is taken as the control variable; and the maximum factor of safety will be computed by tuning function $f(x_i)$ with the simulated annealing method, which is actually equivalent to a lower bound approach. For locating the critical failure surface, the particle swarm or the harmony method is used, which is an upper bound approach. In addition, the problem of convergence in evaluating the factor of safety is investigated; and it is demonstrated that interslice force function $f(x)$ cannot be arbitrarily assigned if consistent and acceptable internal forces are required. The presented approach has a further advantage that convergence during the stability analysis is greatly reduced which is not possible with all the other existing "rigorous" methods, and an interslice force function is not required in the analysis.

Key words: slope engineering; factor of safety; Pan Jiazheng's extremum principle; global optimization method

收稿日期: 2007 - 11 - 19; **修回日期:** 2008 - 01 - 11

作者简介: 郑榕明(1959 -), 男, 博士, 1992年于香港大学获博士学位, 现任副教授, 主要从事岩土力学方面的教学与研究工作。E-mail: ceymchen@polyu.edu.hk

1 引言

在边坡、坝基和其他建筑物的抗滑稳定分析中, 极限平衡法是工程中普遍采用的方法。这一方法包含 2 个步骤^[1]:

(1) 对不稳定岩体或土体内某一滑裂面, 根据静力平衡条件确定其抗滑稳定安全系数。

(2) 在所有可能的滑裂面中, 重复步骤(1), 找出相应的最小安全系数临界滑裂面。

在极限平衡的理论体系中, 步骤(1)在本质上是一个静不定的力学问题, 需要引入必要的假定, 使问题变得可解。潘家铮^[2]在详细分析了建筑物和地基抗滑稳定的各种方法后, 提出了边坡稳定分析的极值原理, 即滑坡体如能沿许多个滑面滑动, 则失稳时它将沿抵抗力最小的一个滑面破坏(极小值原理); 滑坡体的滑面确定时, 则滑面上的反力(以及滑坡体内的内力)能自行调整, 以发挥最大的抗滑能力(极大值原理)。陈祖煜等^[1, 3]基于 Drucker 准则和 Sarma 的斜条分边坡稳定分析法对此原理进行了证明。传统二维极限平衡分析法对于确定的滑面给出唯一的安全系数, 无法考虑边坡内力调整的过程。

D. G. Fredlund 和 J. Krahn^[4]提出了通用极限平衡法(GLE)的概念, 并指出其他各种方法均可看作是 GLE 法的特例或简化。条间力函数 $f(x)$ 作为 GLE 法中的主要假设条件, 其对安全系数的影响在过去的研究中并没有得到足够的重视。目前最常用的条间力函数包括常数 1.0, $\sin x$, 梯形函数以及 K. Fan 等^[5]提出的误差函数等。原则上, 对于大多数问题来说上述条间力函数都是可行的, 都能获得较为准确且可以接受的安全系数。工程实际中, 大多数设计人员为了方便起见都采用 $f(x)=1.0$ 这一假定, 此时 Morgenstern-Price 法也就变为 Spencer 法, 不过这样的假定除了简便之外没有任何理论依据。

Z. Y. Chen 和 N. R. Morgenstern^[6]认为, 对于条间力的不同假定, 只要满足合理性条件, 由极限平衡法算出的安全系数相差不大, 并且介绍了一种确定安全系数最大和最小值的近似方法, 通过 2 个例子证明了受合理性条件限制的安全系数解集的上下限是很接近的。N. R. Morgenstern 等^[7, 8]也都认为对大多数问题各种极限平衡法计算出的安全系数非常接近, 所以条间力分布形式不是实际应用过程中的主要问题, 当然个别特殊的情况例外。J. Krahn 等^[9, 10]指出 $f(x)$ 对于某些特殊情况具有重要的影响。黄梦

宏和丁桦^[11]引入载荷系数, 建立了一个满足极限平衡原理和合理性条件的数值优化模型, 通过求解一系列线性规划问题求出安全系数的全局最优解, 结果发现, 在满足合理性条件的限制下, 在极限平衡法框架下算出的安全系数仍有可能有较大差别, 而此结论与陈祖煜等人“不同的关于土条作用力的假定, 只要满足合理性条件限制, 相应的安全系数差别不大”的观点存在分歧。究竟不同条件力假定对安全系数的影响程度如何, 还是某些情况下有比较大的影响, 在通常情况下则可以忽略, 这些问题都有待进一步的研究。

此外, 严格的极限平衡法还有可能遇到收敛问题, 在寻求临界滑动面的过程中, 这些不能够收敛的滑面通常是通过赋予一个较大的安全系数而将其忽略。在极限平衡法中, 可能由于下列三个原因之一出现解答不收敛的情况: 第一, 对滑动面形状做了不切实际的假设; 第二, 由于黏聚力值太大, 造成法向力成为负值, 这两个原因均会造成数学上的不稳定性; 第三, 为了使分析成为确定性而做的某些假设, 可能构成不现实的条件而使计算无法收敛。Y. M. Cheng 等^[12]研究了边坡极限平衡分析中的迭代收敛问题, 发现迭代不收敛的原因也可能是在初始迭代时将条间剪力设为了 0。Y. M. Cheng^[13]提出采用双步 QR 法来求解安全系数, 条间力可以从矩阵直接得出而无需假设初值, 结果显示可以降低不收敛的可能。而对于那些双步 QR 法认为无物理上正确的安全系数, 可以通过反复调整 $f(x)$ 使其收敛。但是至今尚且没有完善的方法修正 $f(x)$ 使每个问题都得到收敛, 也没有简单实用的方法来保证条间力能够满足 Mohr-Coulomb 强度理论。故此, 本文希望能够找到一种相对有效的方法来提高严格极限平衡法求解的收敛率。

2 优化算法实现潘氏极值原理

2.1 优化模型建立

假设某砂土的有效黏聚力 $c'=0$, 采用 Mohr-Coulomb 强度准则来描述条间剪力, 即

$$X = E \tan \varphi' \quad (1)$$

式中: X 为条间剪力, E 为条间法向力, φ' 为有效内摩擦角。由此有 $f(x)=1.0$, $\lambda = \tan \varphi'$ 。由于极限平衡法中没有强制规定条间力必须满足 Mohr-Coulomb 强度准则, 但如果添加此项合理性条件, 特别是当 $c' \neq 0$ 时, $f(x)$ 就不再等于 1.0。事实上通

过 Spencer 法反分析来考察条间力关系，可以发现多数情况下条间力关系都不符合 M-C 强度准则。如果条间力违背 M-C 强度准则， $f(x)$ 就应当进行调整直到满足 M-C 强度准则。对于如何调整 $f(x)$ 以确保其不违背 M-C 强度准则目前尚无有效的方法来实现，所以这一繁琐的工作只能留给工程师而不是计算机自动完成。

考虑将条间力函数离散，通过指定任 2 个条块间力的关系 $f(x_i)$ ，并将所有条间力关系组合形成 $f(x)$ 。假设采用模式搜索法来寻求条间力函数的最优组合，遇到的问题是即使假定每个 $f(x_i)$ 只有 10 种可能，对于一个包含 11 个条块的滑体也将会有 10^{10} 种组合形式。如此繁琐的计算很难满足实际工程的要求，而且这种组合仍然是很粗糙的，不过现代优化方法倒是为此提供了实现的可能。

以图 1 所示边坡为例，滑体划分为 n 个土条， $n-1$ 个控制变量 $f(x_i)$ 。在 GLE 法中， $f(x)$ 的取值范围为 $[0, 1]$ ，修正系数 λ 和目标函数 FOS 均可表示为 $f(x_i)$ 的函数。对于单一滑动面，可采用全局优化的方法调整 $f(x_i)$ ，从而求得同时满足整体力和力矩平衡的安全系数上下限，此过程表述如下：

$$0 \leq f(x_i) \leq 1.0 \quad (2)$$

在执行上述优化过程中，条间力关系要满足 M-C 强度准则：

$$X \leq E \tan \varphi' + c'L \quad (3)$$

式中： L 为条块接触面的垂直长度。

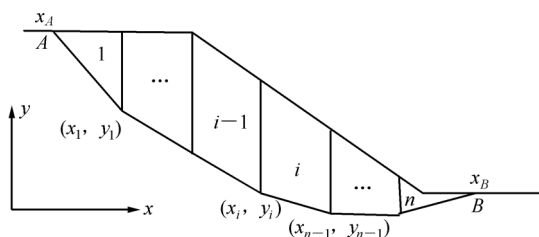


图 1 边坡滑动面及条分示意图

Fig.1 Schematic diagram of sliding surface and slices

2.2 求解方法

传统的优化方法，如单形法、变量轮换法、共轭梯度法、蒙特卡洛法等，在求解上述优化模型时，可能会面临如下困难：

(1) NP(nondeterministic polynomial)型优化问题中控制变量过多。

(2) 某些 $f(x_i)$ 的组合将会导致无解，原因大致如下：一是问题本身就没有符合物理意义的安全系数；二是违反了式(3)。其中后者更为常见，因为目

标函数的值域可能是高度非连续的，特别是对于复杂的问题很难克服。

(3) 目标函数可能存在多个局部极小值，而且目标函数也不一定是凸函数。

而在近些年迅速发展起来的智能优化算法中，只有少数几种运用到岩土工程中，比如遗传算法、模拟退火法、粒子群优化算法、和声算法、蚁群算法、禁忌搜索算法和鱼群算法等。

为了克服前面提到的 3 个困难，本文采用相对稳定的全局优化算法进行求解。对于单一滑动面，即求解步骤(1)，采用模拟退火法不断优化 $f(x_i)$ ，求解安全系数用双步 QR 法，求出满足极大值原理的最大安全系数；而寻求最危险滑动面的过程，即求解步骤(2)，则采用效率更高的和声算法或粒子群算法优化(见图 2)。虽然整个优化过程计算比较密集，但在个人计算机上采用现代优化算法能在设计允许的的时间内实现。

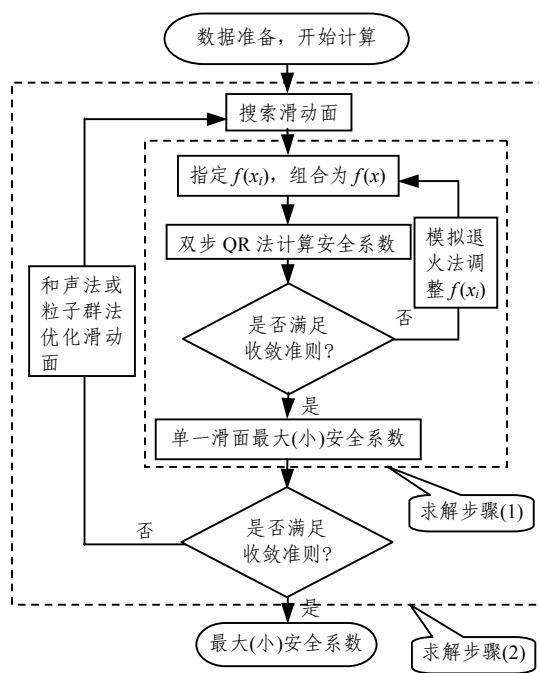


图 2 计算流程图

Fig.2 Flowchart adopted in the computation

采用优化方法不断调整 $f(x)$ 直到得出最大安全系数，可以当作指定滑动面的安全系数，而 $f(x)$ 通过优化过程直接得出的，除了最大安全系数，同样可以通过类似的优化过程得出最小安全系数，作为安全系数的下限，本文称其为极值优化法。

本文着重于方法的介绍，重点在于求解步骤(1)的实现，关于搜索临界滑裂面部分可以参考作者的相关研究^[14, 15]。

3 计算结果分析

上述优化方法已经编制成计算程序并集成到边坡稳定性分析软件 SLOPE2000 中。在优化过程中默认公差为 0.000 1, 将滑体划分为 15 个土条, 这样总共有 14 个控制变量 $f(x_i)$, 受公差控制, 优化次数为 25 000~32 000。结果发现, 有 20%~70% 的优化结果不可接受, 原因可能是违反了式(3)或是用双步 QR 法没有求得物理上接受的答案, 由于前者导致的失败是后者的 3~5 倍, 所以寻求系统的方法来满足式(3)尤为重要。

算例 1: 边坡形状及其圆弧滑面如图 3 所示, 边坡倾角为 45°, 坡高为 6 m, 滑面形状为圆弧。土的重度为 19 kN/m³, 通过变换不同的 c' 和 φ' 来考察极值优化法和 Spencer 法, 其结果见表 1。从表 1 中可以看出, 采用极值优化法计算出的安全系数上下限与 Spencer 法计算出的安全系数相差不超过 2%, 而安全系数上下限相差也不超过 3%, 由此可以推断在此情况下, 安全系数对 $f(x)$ 的变化并不敏感, 采用传统的极限平衡法(如 Spencer 法)已经能够给出不错的结果, 同时也验证了陈祖煜等“对于条间力的不同假定, 只要满足合理性条件, 由极限平衡法算出的安全系数相差不大”的结论。另外还发现, 安全系数对式(3)是否满足同样不敏感, 相反倒是条间力是否满足 M-C 强度准则对修正系数 λ 的影响比较显著, 而且极值优化法中的 λ 要比 Spencer 法的大, 大部分都在 1.0 以上。

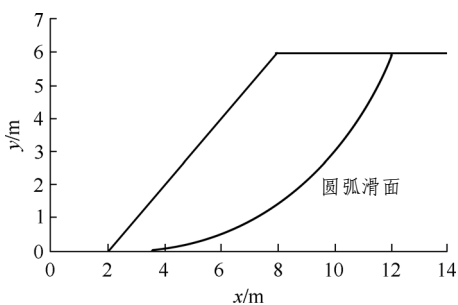


图 3 算例 1 边坡形状及其圆弧滑面示意图

Fig.3 Schematic diagram of slope with a circular failure surface for example 1

算例 2: 边坡几何形状如图 4 所示, 表层土参数为: 重度 18 kN/m³, 饱和重度 20 kN/m³, $c' = 5$ kPa, $\varphi' = 36^\circ$; 下层土参数为: 重度 15 kN/m³, 饱和重度 27 kN/m³, $c' = 3$ kPa, $\varphi' = 30^\circ$ 。计算结果见表 2。如果不考虑式(3), 在仅有下面一排土钉支护的情况

表 1 算例 1 极值优化法和 Spencer 法求得的安全系数和 λ

Table 1 Factors of safety and λ from the extremum principle and Spencer's analysis for example 1

条件	最大安全系数/ λ		最小安全系数/ λ		Spencer 法
	不满足式(3)	满足式(3)	不满足式(3)	满足式(3)	
$c' = 0$ kPa $\varphi' = 20^\circ$	0.759/ 1.867	0.749/ 1.000	0.738/ 1.888	0.743/ 1.000	0.745*/ 0.522
$c' = 0$ kPa $\varphi' = 40^\circ$	1.753/ 1.820	1.733/ 1.151	1.702/ 1.886	1.708/ 0.901	1.718/ 0.522
$c' = 5$ kPa $\varphi' = 20^\circ$	1.010/ 1.890	1.012/ 0.892	1.002/ 1.873	1.003/ 1.758	1.007/ 0.457
$c' = 5$ kPa $\varphi' = 40^\circ$	2.008/ 1.857	1.998/ 1.208	1.966/ 1.896	1.965/ 1.903	1.980/ 0.491
$c' = 10$ kPa $\varphi' = 20^\circ$	1.280/ 1.711	1.277/ 1.024	1.268/ 1.889	1.267/ 1.893	1.272/ 0.407
$c' = 10$ kPa $\varphi' = 40^\circ$	2.263/ 1.855	2.261/ 1.432	2.230/ 1.846	2.229/ 1.907	2.242/ 0.464

注: “*” 表示 Spencer 法的结果不满足式(3)。

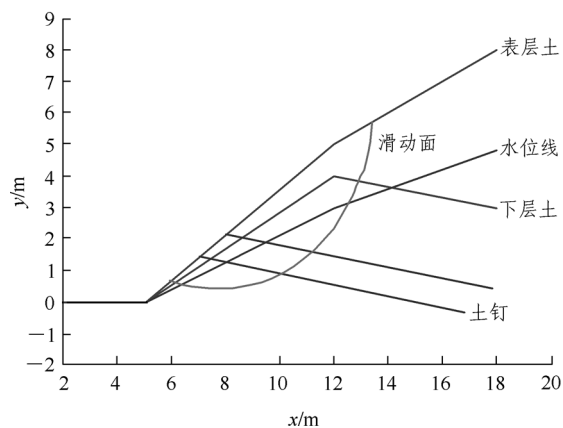


图 4 算例 2 边坡几何形状及土体参数(2 层土, 2 根土钉, 水位线)

Fig.4 Geometric and parameters of slope with 2 soil layers, 2 soil nails and a water table for example 2

表 2 极值分析和 Spencer 法求得的安全系数和 λ

Table 2 Factors of safety and λ from the extremum principle and Spencer's analysis for example 2

条件	最大安全系数/ λ		最小安全系数/ λ		Spencer 法
	不满足式(3)	满足式(3)	不满足式(3)	满足式(3)	
只有底排土钉	1.856/ 1.149	1.841/ 0.944	1.750/ 0.924	1.763/ 1.902	1.790/ 0.488
2 排土钉	2.661/ 1.435	2.600/ 1.281	2.398/ 1.149	2.498/ 2.011	2.515/ 0.547

下, 由极值优化法算出的安全系数上下限与 Spencer 法给出的结果分别相差 5.9%和 4.4%, 而在 2 排土钉同时支护的情况下, 相应的差别分别为 10.5%和 4.1%。由此可见, 当有土钉或外荷载作用时, $f(x)$

将会对结果产生比较显著的影响，而且是否满足式(3)也是应当在极值分析中重点考虑。从以上 2 个例子可以看出，相对于传统的极限平衡法，本文方法能够求解出安全系数的上下限。

算例 3: 边坡几何形状与土体参数同算例 1, 但滑动面位置较深, 同时在边坡顶部作用有 30 kPa 的均布荷载(见图 5), 在不严格满足式(3)时, 安全系数的上下限分别为 1.236 和 1.091, 当条间力严格满足式(3)时, 安全系数的上下限分别变为 1.221 和 1.184。而相应的由 Spencer 法得出的安全系数为 1.200, 再次证明了式(3)对计算结果有重要影响。

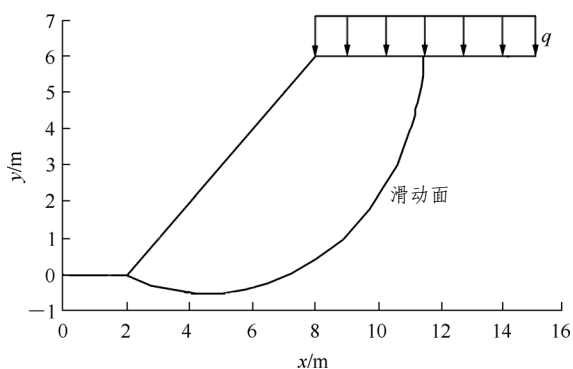


图 5 算例 3 边坡, 滑动面较深且坡顶作用有均布荷载
Fig.5 Results of a slope with a deep seated failure surface and a vertical pressure for example 3

4 收敛性研究

同样考虑算例 1, 但滑动面较陡的情况(见图 6), 分别采用 Bishop 简化法、Janbu 简化法、Swedish 法和 Sarma 法进行计算, 得出的安全系数分别为 1.542, 1.570(不修正时为 1.075), 1.526 和 1.550。采用极值优化分析但不考虑合理性条件式(3)时, 安全系数上下限分别为 1.602 和 1.547, 考虑式(3)的限制时安全系数上下限分别变为 1.564 和 1.559。而采用双步 QR 法求解 Spencer 法则无法给出物理上能够接受的结果, 可以看出 $f(x)=1.0$ 导致计算无法收敛。

考虑算例 1, 假定滑动面为圆形并且在坡顶作用 30 kPa 的均布荷载, 采用和声算法搜索临界滑动面, 在条间力不严格满足式(3)情况下计算出的安全系数上下限分别为 1.013 和 0.85, 而当严格满足式(3)的情况下安全系数上下限分别为 1.002 和 0.901。如果采用双步 QR 法和迭代法求解 Spencer 法, 得出的安全系数分别为 0.995 和 0.989, 可以看出优化分析得出的下限值要比传统的极限平衡法算出的安全

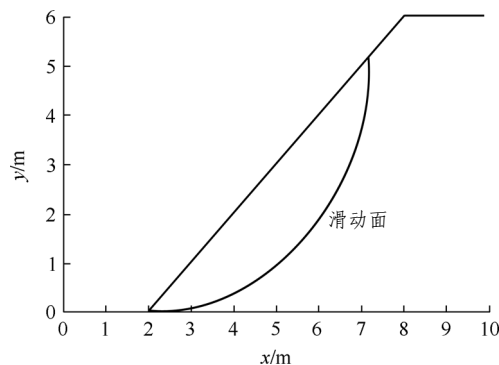


图 6 算例 1, 滑动面较陡的情况

Fig.6 Results of a slope with a steep failure surface for example 1

系数更低。采用和声搜索算法可以生成 266~488 个危险滑动面, 其中采用双步 QR 法求解 Spencer 法会有 6.2%的滑面不收敛, 而相应的采用迭代法会有 24.6%的滑面不收敛, 可见迭代法的不收敛率要更高。尽管双步 QR 法直接计算安全系数能够极大地克服迭代法的局限性, 但仍有 6.2%的滑面无法收敛, 可能是由于 $f(x)=1.0$ 的限制。对于采用本文方法计算仍无法收敛的滑面, 有可能是滑动面极其浅以至于几乎与地表面相平行, 对于这样的滑面, 即使采用 Bishop 简化法或 Janbu 简化法也无法得到收敛的结果。另一种可能是滑体厚度极薄导致在计算过程产生切断误差, 而在工程实际中这样的滑面都是可以忽略的。在大量试验的基础上, 除了高度不规则的比如锯齿形的滑面, 或者土的黏聚力很高, 或者较陡的滑动面, 会偶尔无法得出结果外, 本文方法基本上都能给出准确的安全系数。尽管采用优化算法求解安全系数比较费时, 但由于目标函数是连续的可以采用效率更高的和声算法来搜索滑动面, 从而减少整体最小分析中的搜索次数。采用 SLOPE2000 搜索危险滑动面的实际计算时间为 5~15 min, 不过这仍然是可以接受的。

算例 1 中, 如果 $c'=5$ kPa, $\phi'=20^\circ$, 大约会有 5 700 个 $f(x)$ 无法算出安全系数, 除了少数情况完全随机没有任何特点外, 大致可以分为三类: 第一类 $f(x)$ 随 x 波动, 而且波动比较剧烈; 第二类 $f(x)$ 在两端较高而在中间较低; 第三类 $f(x)$ 的形状总体看来类似式(4), 但 $f(x)$ 在 x 左边很小的间距内达到最大值, 而在 $x=0.3$ 处急剧降为接近于 0。前两种情况大约占不收敛总数的 15%, 第三类约占 80%。可能这几种情况与其他土体参数有关, 有待于进一步探究。

5 关于条间力函数 $f(x)$ 的讨论

对于算例1, 图7, 8所示为算例1在不考虑式(3)时的极大值和极小值对应的 $f(x)$ 。可以发现, 在不考虑合理性条件的情况下求解最大安全系数, 边坡左部的 $f(x)$ 接近于1.0, 当边坡破坏趋近坡趾时, 坡体内力将会重新调整以达到更高的条间剪力, 从而得到安全系数的上限, 相应的在靠近坡顶的部位 $f(x)$ 很小接近于0。而求解最小安全系数的情况与此恰巧相反, 物理意义也不太明显。不过, 如果工程师更偏向于采用下限值进行设计的话, 本文给出的方法不失为一种可行的途径。如图9, 10所示, 如果考虑合理性条件的约束, 安全系数上限变化微小, 但 $f(x)$ 会有比较明显的变化。为简单起见, 用一简单函数来拟合图7~10的曲线(见图11), 其中需要3个变量, 式(4)对于优化分析很简单, 而且以此得出的结果和前面的优化结果非常接近, 大量试验证明, 下式足以满足工程实践:

$$f(x) = \cot^{-1}(ax + b)/c \tag{4}$$

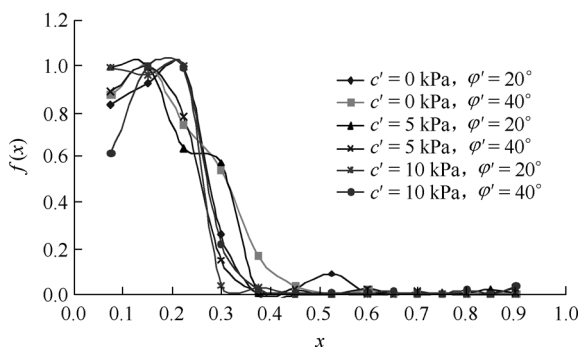


图 7 算例 1 在不考虑式(3)时的极大值对应的 $f(x)$
Fig.7 Function $f(x)$ for maximum extremum without Eq.(3) for example 1

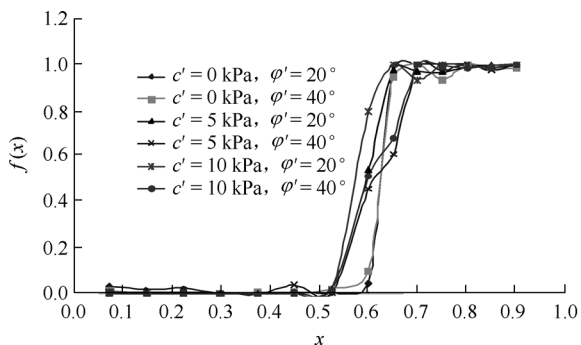


图 8 算例 1 在不考虑式(3)时的极小值对应的 $f(x)$
Fig.8 Function $f(x)$ for minimum extremum without Eq.(3) for example 1

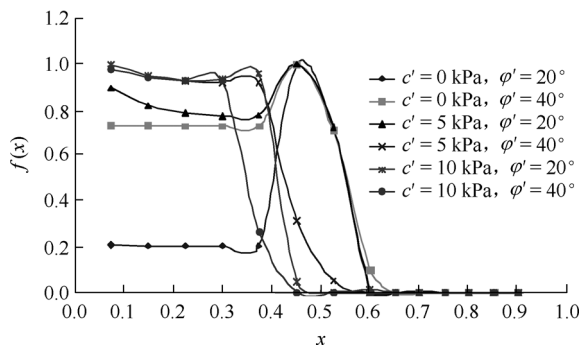


图 9 算例 1 在考虑式(3)时的极大值对应的 $f(x)$
Fig.9 Function $f(x)$ for maximum extremum using Eq.(3) for example 1

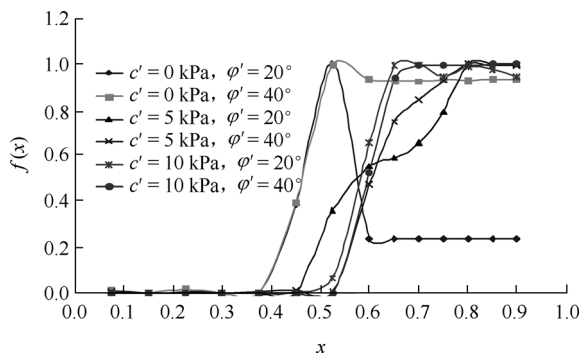


图 10 算例 1 在考虑式(3)时的极小值对应的 $f(x)$
Fig.10 Function $f(x)$ for minimum extremum using Eq.(3) for example 1

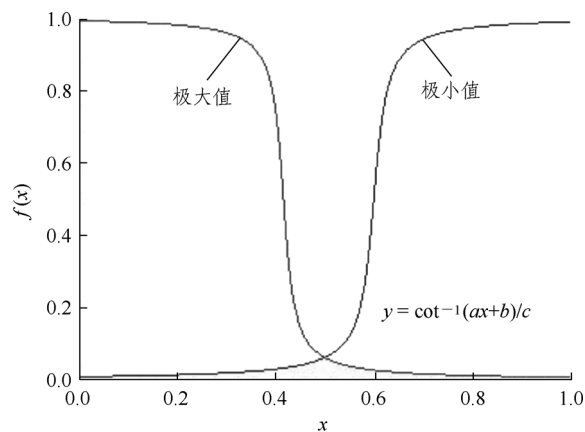


图 11 极值优化中的简化 $f(x)$
Fig.11 Simplified function $f(x)$ for the maximum and minimum extrema determination

对于一般问题, $f(x)$ 是相对平滑的; 但对于如图 4~6 所示的问题, $f(x)$ 将会变得相对不规则, 但在总体趋势上仍然同前, 即上限时 $f(x)$ 在坡趾最大坡顶最小, 下限时 $f(x)$ 在坡趾最小坡顶最大。另外, 有更多的 $f(x)$ 无法给出物理上接受的解答。采用模拟退火法优化一个极值总共需进行约 32 000 次

试算,理论上越多的试算应该得出越平滑的 $f(x)$,但是在优化过程中 FOS 的精度已经达到 0.000 1,如此高的精度,再进一步提高也不会再对结果产生显著影响。采用式(4)计算图 4~6 仍然能够得出很好的结果,所以式(4)可以适用于相对复杂的问题。

6 结 论

通过全局优化算法不断调整 $f(x)$,直至求得同时满足力和力矩平衡的安全系数上下限,从而使潘家铮极值原理能够真正应用于工程实践当中,不再局限于理论上的指导。在此基础上对 $f(x)$ 进行研究,发现,传统的极限平衡方法,比如 Spencer 法,已经能够给出足够精度的安全系数,而对于有外载作用或土钉支护等比较复杂的问题,如果没有式(3)的约束,上下限的差别将不容忽视,即使有式(3)的约束,上下限的差别仍然很明显,本文提出的方法能够计算出安全系数的上下限,这是相对于传统经典方法的一个优点。

对于求解出的安全系数上下限,根据潘家铮极值原理应该将上限作为指定滑动面的安全系数,因为滑体内力会不断重新调整直至达到土体的最大抗力后才会破坏。

参考文献(References):

- [1] 陈祖煜. 建筑物抗滑稳定分析中“潘家铮最大最小原理”的证明[J]. 清华大学学报(自然科学版), 1998, 38(1): 1 - 4.(CHEN Zuyu. On Pan's principles of soil and rock stability analysis[J]. Journal of Tsinghua University(Science and Technology), 1998, 38(1): 1 - 4.(in Chinese))
- [2] 潘家铮. 建筑物的抗滑稳定和滑坡分析[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1980: 93 - 96.(PAN Jiazheng. Analysis of stability and landslide for structures[M]. Beijing: China Water Power Press, 1980: 93 - 96.(in Chinese))
- [3] CHEN Z Y, WANG J, WANG Y J, et al. A three-dimensional slope stability analysis method using the upper bound theorem part II: numerical approaches, applications and extensions[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 2001, 38(3): 379 - 397.
- [4] FREDLUND D G, KRAHN J. Comparison of slope stability methods of analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1977, 14(3): 429 - 439.
- [5] FAN K, FREDLUND D G, WILSON G W. An interslice function for limit equilibrium slope stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1986, 23(3): 287 - 296.
- [6] CHEN Z Y, MORGENSTERN N R. Extensions to the generalized method of slices for stability analysis[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1983, 20(1): 104 - 119.
- [7] MORGENSTERN N R. Evaluation of slope stability—a 25-year perspective[C]// Stability and Performance of Slopes and Embankments: II. [S. l.]: Geotechnical Special Publication, ASCE, 1992: 1 - 26.
- [8] DUNCAN J M. State of the art: limit equilibrium and finite-element analysis of slopes[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 122(7): 577 - 596.
- [9] KRAHN J. The 2001 R.M. hardy lecture: the limits of limit equilibrium analyses[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2003, 40(3): 643 - 660.
- [10] ABRAMSON L W, LEE T S, SHARMA S, et al. Slope stability and stabilization methods[M]. 2nd ed. [S. l.]: John Wiley, USA, 2002.
- [11] 黄梦宏, 丁桦. 边坡稳定性分析极限平衡法的简化条件[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(12): 2 529 - 2 536.(HUANG Menghong, DING Hua. Some assumption conditions on limit equilibrium method for slope stability analysis[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(12): 2 529 - 2 536.(in Chinese))
- [12] CHENG Y M, LANSIVAARA T, SIU J. Impact of convergence on slope stability analysis and design[J]. Computers and Geotechnics, 2008, 35(1): 105 - 113.
- [13] CHENG Y M. Locations of critical failure surface and some further studies on slope stability analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30(3): 255 - 267.
- [14] CHENG Y M, LI L, CHI S C, et al. Particle swarm optimization algorithm for the location of the critical non-circular failure surface in two-dimensional slope stability analysis[J]. Computers and Geotechnics, 2007, 34(2): 92 - 103.
- [15] CHENG Y M, LI L, CHI S C. Performance studies on six heuristic global optimization methods in the location of critical slip surface[J]. Computers and Geotechnics, 2007, 34(6): 462 - 484.