

求解弹性地基上四边自由板的功的互等定理法

Solution for a rectangular plate supported on elastic foundation with free edges using reciprocal theorem method

陈静云¹, 钟 阳², 殷建华³(1. 大连理工大学 土建学院, 辽宁 大连 116023; 2. 哈尔滨工业大学 交通学院, 黑龙江 哈尔滨 150006;
3. 香港理工大学 土木及结构工程系, 香港)

中图分类号: TU 470

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2001)06-0766-03

作者简介: 陈静云, 女, 1956 年生, 大连理工大学土建学院副教授, 硕士生导师, 结构工程博士。

1 引言

弹性地基上的板是土木工程中较常见的一种结构形式, 如机场跑道、公路路面等。其分析方法得到了广大理论工作者的重视。但由于问题的复杂性, 至今还很难得到令人满意的解析解。目前, 处理这类问题的方法可分为两大类: 数值法和解析法。数值法主要有有限元法和边界法^[1,2], 此类方法缺乏通用性。解析法是事先选定位移函数, 再利用边界条件决定出待定参数^[3-5], 但这类方法所得到的解非常复杂, 不便于工程应用。文献[6]把功的互等原理用于板的分析中, 并且证明了功的互等原理与叠加原理的等价性, 但并没有解决弹性地基上自由板的问题。本文利用功的互等原理推导出了弹性地基上自由板的解析解, 为这类问题的解开辟了一条新的途径。

2 基本原理

如图 1 所示, 弹性地基上四边简支矩形板, 其上作用一个可沿板面移动的单位集中力, 作用位置为 (ζ, η) 。地基按 Winkler 假定。

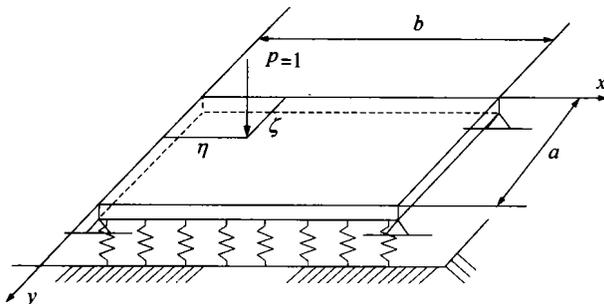


图 1 弹性地基上四边简支板

Fig. 1 The rectangular plate supported on elastic foundation with simple support edges

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + K w_1 = \frac{\delta(x - \zeta, y - \eta)}{D} \quad (1)$$

式中 w_1 为板的竖向位移; K 为地基反力刚度系数; D 为板的抗弯刚度, $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$, 其中 E 和 μ 分别为板的弹性模量和泊松比, h 为板的厚度; $\delta(x - \zeta, y - \eta)$ 为 Dirac Delta 函数。令

$$w_1(x, y, \zeta, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin k_m x \sin k_n y \quad (2)$$

式中 $k_m = m\pi/a$; $k_n = n\pi/b$ 。并将 $\delta(x - \zeta, y - \eta)$ 用双正弦级数展开, 可得

$$\delta(x - \zeta, y - \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{ab} \sin k_m \zeta \sin k_m x \sin k_n \eta \sin k_n y \quad (3)$$

将式(2)和(3)代入式(1)可得

$$w_1(x, y, \zeta, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{abDK_{mn}} \sin k_m \zeta \sin k_m x \sin k_n \eta \sin k_n y \quad (4)$$

式中 $K_{mn} = (k_m^2 + k_n^2) + K$ 。

通常称图 1 所示的板为基本系统, 称式(4)为基本解。图 2 所示的弹性地基上四边自由矩形板称之为实际系统, 其上作用任意荷载。

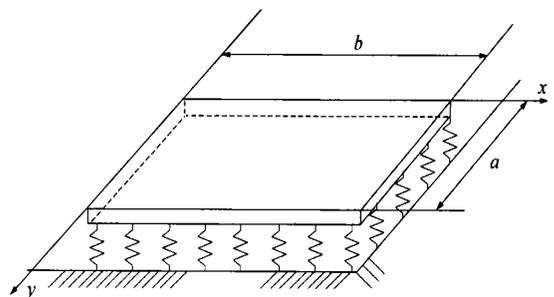


图 2 弹性地基上四边自由板

Fig. 2 The rectangular plate supported on elastic foundation with free edges

由弹性薄板理论可以得到四边简支矩形板平衡方程为

* 收稿日期: 2001-01-08

设板边位移为

$$W(x, 0) = D_1 + (D_2 + D_1)x/a + \sum_{m=1}^{\infty} B_{1m} \sin k_m x \quad (5)$$

$$W(x, b) = D_3 + (D_4 + D_3)x/a + \sum_{m=1}^{\infty} B_{2m} \sin k_m x \quad (6)$$

$$W(0, y) = D_1 + (D_3 + D_1)y/b + \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n} \sin k_n y \quad (7)$$

$$W(a, y) = D_2 + (D_4 + D_2)y/b + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sin k_n y \quad (8)$$

式中 D_1, D_2, D_3, D_4 分别为板角 $(0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b)$ 处的位移。对图 1 所示的基本系统和图 2 所示的实际系统之间应用功的互等原理, 可得

$$W(\zeta, \eta) = \int_0^a [V_{1y}(x, 0, \zeta, \eta)W(x, 0) - V_{1y}(x, b, \zeta, \eta)W(x, b)] dx + \int_0^b [V_{1x}(0, y, \zeta, \eta)W(0, y) -$$

(下接右栏)

$$V_{1x}(a, y, \zeta, \eta)W(a, y)] dy + [R_1(a, b, \zeta, \eta)D_4 - R_1(0, b, \zeta, \eta)D_3] + [R_1(0, 0, \zeta, \eta)D_1 - R_1(a, 0, \zeta, \eta)D_2] \quad (9)$$

式中 $V_{1y}(x, y, \zeta, \eta), V_{1x}(x, y, \zeta, \eta), R_1(x, y, \zeta, \eta)$ 分别为沿 x 轴和 y 轴的板边分布剪力以及板角反力。其中

$$V_{1y}(x, y, \zeta, \eta) = -D \left[\frac{\partial^3 w_1(x, y, \zeta, \eta)}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_1(x, y, \zeta, \eta)}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

$$V_{1x}(x, y, \zeta, \eta) = -D \left[\frac{\partial^3 w_1(x, y, \zeta, \eta)}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w_1(x, y, \zeta, \eta)}{\partial y^2 \partial x} \right]$$

$$R_1(x, y, \zeta, \eta) = -2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w_1(x, y, \zeta, \eta)}{\partial y \partial x}$$

将式(6)~(8)代入式(9)可得

$$W(\zeta, \eta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{1m}}{2\lambda^2} \left[\frac{\Phi(\alpha_m, m) \sinh \alpha_m (b - \eta)}{\sinh \alpha_m b} - \frac{\Phi(\beta_m, m) \sinh \beta_m (b - \eta)}{\sinh \beta_m b} \right] \sin k_m \zeta + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{2\lambda^2} \left[\frac{\Phi(\alpha_m, m) \sinh \alpha_m \eta}{\sinh \alpha_m b} - \frac{\Phi(\beta_m, m) \sinh \beta_m \eta}{\sinh \beta_m b} \right] \sin k_m \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{1n}}{2\lambda^2} \left[\frac{\Phi(\alpha_n, n) \sinh \alpha_n (a - \zeta)}{\sinh \alpha_n a} - \frac{\Phi(\beta_n, n) \sinh \beta_n (a - \zeta)}{\sinh \beta_n a} \right] \sin k_n \eta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2\lambda^2} \left[\frac{\Phi(\alpha_n, n) \sinh \alpha_n \zeta}{\sinh \alpha_n a} - \frac{\Phi(\beta_n, n) \sinh \beta_n \zeta}{\sinh \beta_n b} \right] \sin k_n \eta + D_1 \left\{ \frac{(a - \zeta)(b - \eta)}{ab} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{m\pi} \left[\frac{\sinh \alpha_m (b - \eta)}{\alpha_m^2 \sinh \alpha_m b} - \frac{\sinh \beta_m (b - \eta)}{\beta_m^2 \sinh \beta_m b} + \frac{2\lambda^2 (b - \eta)}{\alpha_m^2 \beta_m^2 b} \right] \sin k_m \zeta \right\} + D_2 \left\{ \frac{\zeta(b - \eta)}{ab} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 (-1)^m}{m\pi} \left[\frac{\sinh \alpha_m (b - \eta)}{\alpha_m^2 \sinh \alpha_m b} - \frac{\sinh \beta_m (b - \eta)}{\beta_m^2 \sinh \beta_m b} + \frac{2\lambda^2 (b - \eta)}{\alpha_m^2 \beta_m^2 b} \right] \sin k_m \zeta \right\} + D_3 \left\{ \frac{(a - \zeta)\eta}{ab} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{m\pi} \left[\frac{\sinh \alpha_m \eta}{\alpha_m^2 \sinh \alpha_m b} - \frac{\sinh \beta_m \eta}{\beta_m^2 \sinh \beta_m b} + \frac{2\lambda^2 \eta}{\alpha_m^2 \beta_m^2 b} \right] \sin k_m \zeta \right\} + D_4 \left\{ \frac{\zeta \eta}{ab} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^2 (-1)^m}{m\pi} \left[\frac{\sinh \alpha_m \eta}{\alpha_m^2 \sinh \alpha_m b} - \frac{\sinh \beta_m \eta}{\beta_m^2 \sinh \beta_m b} + \frac{2\lambda^2 \eta}{\alpha_m^2 \beta_m^2 b} \right] \sin k_m \zeta \right\} \quad (10)$$

式中 $\Phi(x, y) = x^2 - (2-\nu)y^2; \alpha_m = \sqrt{k_m^2 + \lambda^2}; \beta_m = \sqrt{k_m^2 - \lambda^2}; \alpha_n = \sqrt{k_n^2 + \lambda^2}; \beta_n = \sqrt{k_n^2 - \lambda^2}; \lambda = K^{\frac{1}{4}}$ 。

弹性地基上四边自由板的边界条件为

$$\frac{\partial^3 W(\zeta, 0)}{\partial \eta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W(\zeta, 0)}{\partial \eta \partial \zeta^2} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^3 W(\zeta, b)}{\partial \eta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W(\zeta, b)}{\partial \eta \partial \zeta^2} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial^3 W(0, \eta)}{\partial \zeta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W(0, \eta)}{\partial \eta^2 \partial \zeta} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^3 W(a, \eta)}{\partial \zeta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W(a, \eta)}{\partial \eta^2 \partial \zeta} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial^3 W(0, 0)}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial^3 W(a, 0)}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial^3 W(0, b)}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial^3 W(a, b)}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \quad (18)$$

表1 不同方法的挠度和应力计算结果

Table 1 Deflection and stress obtained by different method

位置		挠度/ 10^{-8}m					应力/ $(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$				
x/m	y/m	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0.5	0.5	0.561	0.581	0.576	0.591	0.585	0.842	0.821	0.928	0.823	0.843
0.5	0.4	0.556	0.574	0.568	0.583	0.577	0.778	0.753	0.866	0.752	0.780
0.5	0.3	0.541	0.550	0.546	0.559	0.555	0.582	0.553	0.668	0.576	0.581
0.5	0.2	0.520	0.528	0.530	0.523	0.521	0.253	0.267	0.352	0.253	0.267
0.5	0.1	0.500	0.501	0.501	0.494	0.494	0.062	0.027	0.154	0.061	0.067
0.5	0.0	0.484	0.477	0.483	0.473	0.478	0.009	0.000	0.091	0.000	0.000

注: 1, 2, 3, 4 分别为文献[1~4]的结果, 5为本文的结果。

方程式(11)~(18)分别表示板的四边分布剪力和四个板角集中力为零。

将式(10)分别代入式(11)~(18)可得到八个代数方程。由其可解出未知系数 $B_{1m}, B_{2m}, A_{1n}, A_{2n}, D_1, D_2, D_3, D_4$, 进而得到问题的理论解。计算时, m, n 的取值取决于计算精度的要求。

3 算例

为了验证本文方法的正确性, 取文献[4]中的方板作为计算实例。板的弹性模量 $E=2.0\times 10^6\text{ t/m}^2$, 泊松比 $\nu=0.167$, 地基系数 $K=4.0\times 10^3\text{ t/m}^3$, 板宽 $a=b=1\text{ m}$, 板厚 $h=0.04\text{ m}$, 集中力 $P=10\text{ t}$, 均布力 $q=1\text{ t}$ 。表1给出 m 和 n 取15项的计算结果。

由表1可看到, 本文的结果与文献[4]的结果非常接近。一般情况下 m 和 n 取25项就可以收敛。

4 结论

(1)利用功的互等定理可以得到弹性地基上四边

自由板的精确解, 由于这种方法并不需要事先选定位移函数, 并且可以满足各种边界条件。从而使得其解具有更广泛的适用性。

(2)本文的方法计算时收敛较快, 是一种较好的方法。

参考文献:

- [1] 付宝连. 应用功的互等定理求解复杂边界条件矩形板的挠曲方程[J]. 应用数学和力学, 1982, 3(3): 315~325.
- [2] 付宝连. 关于求解弹性力学平面问题的功的互等定理法[J]. 应用数学, 1989, 10(5): 437~446.
- [3] 张福范, 黄晓梅. 弹性地基上的自由矩形板[J]. 应用数学和力学, 1984, 5(3): 345~354.
- [4] 王克林, 黄义. 弹性地基上四边自由矩形板[J]. 计算结构力学及其应用, 1985, 2.
- [5] 生跃, 黄义. 双参数弹性地基上自由边矩形板[J]. 应用数学与力学, 1987, 8(4): 317~329.
- [6] Fwa T F, Shi X P, Tan S A. Analysis of concrete pavement by rectangular thick-plate[J]. J Engng Mech, ASCE, 1991, 117(12): 2830~2844.

淮河入海水道淤土段穿堤建筑物工程地基处理方案的可行性研究论证会在南京举行

我国国家级重点项目淮河入海水道工程(总投资人民币41亿元), 其阜宁段从潮河至跃进河全长29.31km, 有9座穿堤建筑物均位于高压缩性淤土地基上, 地基处理设计施工难度较大。为确保该工程质量, 江苏省淮河入海水道工程建设管理局于2001年9月14日至15日在南京召开了“淮河入海水道淤土段穿堤建筑物地基处理方案可行性研究”专家论证会, 对处理方案进行分析评估和可行性论证。

与会专家指出: ①对淤土厚25~35m的芦扬泵站, 采用塑料排水板及堆土预压法进行地基处理是合适的。为了减少部

分土方量和工期, 建议用排水板真空预压结合堆土预压法来加固, 加固范围应包括相邻一段堤基, 以便较好地协调泵站与两侧堤的沉陷; ②对淤土厚15m左右的大沙河涵闸, 设计单位提出的三种处理方案(即真空预压结合堆土预压、灌注桩和水泥土搅拌桩、搅拌桩单独加固)都是可行的, 但灌注桩方案要处理好与堤防的差异沉陷问题; ③对淤土厚10m左右的戴舍大沟涵闸, 建议将水泥搅拌桩方案和预制管桩方案进行比选; ④在初步设计阶段采用何种方案, 要根据各建筑物的实际情况, 进行技术经济比较确定。

(张美珍 供稿)