

文章编号: 1673-6338(2013)04-0380-08

# 基于双三次 Hermite 插值方法的 DEM 误差传播分析

史文中<sup>1,2</sup>, 王斌<sup>1</sup>, 刘二永<sup>3</sup>, 徐青<sup>2</sup>(1. 香港理工大学 土地测量及地理资讯学系, 香港 九龙; 2. 武汉大学 遥感信息工程学院, 湖北 武汉 430072;  
3. 福建农林大学 资源与环境学院, 福建 福州 350002)

**摘要:** 针对由双三次 Hermite 插值所生成的 DEM 数据, 提出了一种新的传播误差估计方法。传播误差估计模型所适用的空间对象包括: 线、不规则三角网(TIN) 和规则格网等 DEM 数据。基于统计学中的误差传播定律, 推导出了由非线性插值方法所生成 DEM 的误差传播公式。最后, 将由双三次 Hermite 插值方法所生成 DEM 的传播误差与先前研究中采用线性插值所生成 DEM 的传播误差进行对比分析, 由此可以更加全面地掌握通过线性插值或者非线性插值方法所生成 DEM 的误差传播规律。该成果可用于指导对实际生产 DEM 产品过程中插值方法的选择。

**关键词:** 数字高程模型; 双三次 Hermite 插值; 传播误差; 误差传播定律; 平均误差

中图分类号: P237 文献标识码: A DOI 编码: 10.3969/j.issn.1673-6338.2013.04.009

## Propagated Error Analysis of Digital Elevation Models Generated by Bi-Cubic Hermite Interpolation Methods

SHI Wenzhong<sup>1,2</sup>, WANG Bin<sup>1</sup>, LIU Eryong<sup>3</sup>, XU Qing<sup>2</sup>(1. Department of Land Surveying and Geo-Informatics, The Hong Kong Polytechnic University,  
Hong Kong Kowloon, China;

2. School of Remote Sensing and Information Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

3. School of Resources and Environment, Fujian Agriculture and Forestry University, Fuzhou 350002, China)

**Abstract:** This paper presents a new development technique in the estimation of the propagated error of DEMs, interpolated by the Hermite bi-cubic interpolation method. Propagated error estimation models are first identified for spatial objects including line, TIN, and rectangular grid DEM. The approach adopted is based on the error propagation law in statistics so as to derive the propagated error of DEMs from this nonlinear interpolation. Finally, the propagated error of DEMs interpolated by the bi-cubic Hermite method derived from this study is compared with the propagated error of DEMs interpolated by bi-linear methods, given by earlier studies. Hence, a full picture of propagated error of DEMs, regarding error propagated from original nodes, obtained by linear and non-linear methods, is now available. This result can serve as a guideline for interpolation method selection in practical DEM production.

**Key words:** DEM; bi-cubic Hermite interpolation; propagated error; error propagation law; average error

数字高程模型( DEM) 是表达地球表面地形的常用方法, 其表征形式多样, 既可以是不规则三角网(TIN), 也可以是规则格网(Rectangle) 形式。DEM 广泛应用于众多领域: 如数字地球、虚拟城市、城市规划、地形学、景观分析和土木工程等。DEM 的相关研究工作主要集中在下列两个方向: 1) 开发适用于特定地形的 DEM 生成方法等; 2)

DEM 精度估计。本文着重于第 2 个研究方向, 并把该研究结果与文献[1]的工作进行了对比。

DEM 表面可以通过对采样点使用插值算法来获得。在这些插值算法中, 双线性插值方法尤为常用, 因为它最为简便易用。然而在实际应用中, 还需要考虑 DEM 插值方法的精度估计。影响 DEM 插值表面总体精度的因素有两类: 1) 采样

收稿日期: 2013-06-04; 修回日期: 2013-07-28。

基金项目: 香港理工大学基金项目(G-YK75; 1-ZV4F; G-UA35)。

作者简介: 史文中(1963-) 男, 山西大同人, 教授, 博士, 主要从事空间数据质量与不确定性理论、高分辨率卫星影像处理技术、三维及动态 GIS 数据模型、虚拟现实、GIS 设计与应用、GIS 与遥感集成等方面的研究。

点的传播误差,即在插值过程中的传播误差估计;  
2) 在插值建模过程中产生的插值模型误差。本文侧重于对第1个误差来源的研究。

事实上,由于双三次 Hermite 插值方法使用了一些辅助信息如每个采样点的局部  $Z$  梯度,所以该方法通常优于双线性插值方法的效果。但是其先决条件至关重要,因为从传统检查点(如 DGPS)中获取坡度信息比较困难<sup>[2]</sup>。然而,现代扫描技术已经可以获取 DEM 表面面片(易于获取局部梯度)代替孤立点来计算 DEM 的垂直精度。坡度信息的容易获取极大地推动了高精度插值算法的发展,从而使得实际应用变为现实,尤其是在 GIS 中的 DEM 生成算法的选择方面。

DEM 插值算法的精度估计方面已经有了一些研究。Rees 研究了 DEM 插值方法在生成更高 DEM 分辨率方面的应用<sup>[3]</sup>,实例验证表明简单双线性或双三次插值有足够好的插值精度。而 Kidner 认为高阶插值技术比双线性插值算法精确得多<sup>[4]</sup>。Shi 结合双线性插值和双三次插值方法,提出一种 DEM 混合插值方法<sup>[5]</sup>;实验结果显示,混合插值方法对不同类型地表插值生成 DEM 均适用。需要指出的是,在该研究中假设采集后的 DEM 原始数据是没有误差的,从而影响 DEM 精度的主要误差来源是由插值模型误差造成的。

值得注意的是,DEM 精度也经常受到原始数据点误差传播的影响。在这个背景下,也有一些关于 DEM 传播误差估计的研究。Li 和 Zhu 获取了基于双线性插值方法的 DEM 规则格网的平均误差<sup>[6]</sup>。Zhou 和 Liu 讨论了基于网格的 DEM 坡度与地貌重建的误差分析<sup>[7]</sup>。Shi 提出了基于高阶插值算法的 DEM 传播误差估计模型<sup>[8]</sup>,采用一阶差分代替导数进行数值简化。Zhu 等获取了基于线性插值模型的 TIN 平均 DEM 精度<sup>[9]</sup>。文献[1]进一步计算了基于双线性插值函数的 TIN 模型和格网模型的平均线性精度。

延续以往 DEM 传播误差估计的研究,相关研究仍需继续深入,包括:1) 基于非线性插值方法对 1D, TIN 和规则格网等 DEM 数据传播误差的系统研究;2) 考虑数据点之间误差相关性的 DEM 传播误差模型。这些也是本文提出的研究目标。本文的分析基于面元展开,面元是本文的基本空间对象,即分别对应于一维的线段、二维的 TIN 和规则格网。很明显,在各对象间相互独立的假设下,本文的研究结果可以从一个面元扩展到其他所有面元,最终扩展到整个地形。

## 1 插值方法

在地理信息系统(GIS)中,通常基于 DEM 中的已知数据点,用插值方法来估计未知点的高程值。插值方法一般可以分为线性插值<sup>[1]</sup>和非线性插值<sup>[4]</sup>。而且,这两种插值方法经常被用于生成各类不同的地形曲面。双线性插值和双三次插值是线性和非线性插值方法中的两种典型算法。

连续性是插值方法选择时需要考虑的因素之一。相关的连续性包括零阶(高程收敛)、一阶(导数收敛)和二阶连续性。线性插值一般只保证了零阶连续性。连续性可能会影响 DEM 的应用,例如当添加光照时只保证零阶连续的 DEM 表面看起来不够光滑。连续性也是考虑使用非线性插值方法的因素之一。

### 1.1 基于三次 Hermite 方法的线段插值

如图1所示,这里对线段的插值其实为分段三次多项式插值。设  $A$  和  $B$  是平面区域的两个节点,其坐标分别是  $A(x_1, h_1)$  和  $B(x_2, h_2)$ ;  $h_1$  和  $h_2$  是两点的高程值,一阶导数分别是  $h'_1$  和  $h'_2$ 。这两点的(分段)三次插值函数定义为<sup>[10]</sup>

$$c(x) = \left(1 - 2 \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}\right) \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)^2 h_1 + \left(1 - 2 \frac{x - x_2}{x_2 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 h_2 + (x - x_1) \left(\frac{x - x_1}{x_1 - x_2}\right)^2 h'_1 + (x - x_2) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2 h'_2. \quad (1)$$

式中,导数  $h'_1$  和  $h'_2$  可通过数值计算获得,如差分法。幸运的是,现代激光扫描技术(如地面激光扫描)能获取表面面元(为获取局部梯度做准备)而不是简单的孤立点来计算 DEM 的垂直精度。

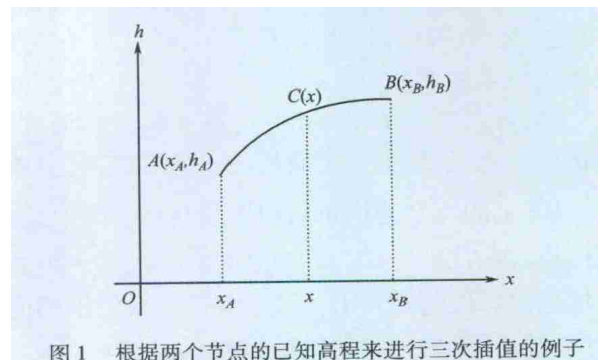


图1 根据两个节点的已知高程来进行三次插值的例子

为简便起见,将线段长度表示为  $s = x_2 - x_1$ , 分割比  $\alpha = (x - x_1) / s$ , 式(1)可以改写为

$$c(x) = (1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^2 h_1 + (3 - 2\alpha)\alpha^2 h_2 + s\alpha(1 - \alpha)^2 h'_1 + s(\alpha - 1)\alpha^2 h'_2 =$$

$$p_1 h_1 + p_2 h_2 + q_1 h'_1 + q_2 h'_2 \quad (2)$$

其中  $p_1 = (1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^2$ ;  $p_2 = (3 - 2\alpha)\alpha^2$ ;  $q_1 = s\alpha(1 - \alpha)^2$ ;  $q_2 = s(\alpha - 1)\alpha^2$ .

1.2 基于双三次 Hermite 方法的 TIN 插值

TIN 的双三次插值过程比线性插值或三次插值要略显复杂。设 A B 和 C 是 TIN 模型上的 3 个给定节点 坐标分别为  $u_A = (x_A, y_A)$   $u_B = (x_B, y_B)$  和  $u_C = (x_C, y_C)$ 。这 3 个点组成三角形  $\triangle ABC$  相应的高程值为  $h_A, h_B$  和  $h_C$ 。下面推导 TIN 模型的双三次 Hermite 插值公式。考虑如图 2 所示的 TIN 面元, 以及在 TIN 范围内随机分布的点  $u_P = (x_P, y_P)$ 。首先在 TIN 面元上通过该点绘制一条平行于某条边的线段 线段左端点(连接 A 和 B 的一端)用 D 表示 线段的右端点(连接 B 和 C 的一端)用 E 表示。对于线段  $\overrightarrow{DE}$  上的随机点  $u_P = (x_P, y_P)$  设点 P 到左端点的距离与线段总长度的比例为  $\beta$ 。该随机点也可以看成服从线段上的均匀分布。两个随机变量  $\alpha$  与  $\beta$  是独立的, 即  $Cov\{\alpha, \beta\} = 0$ 。

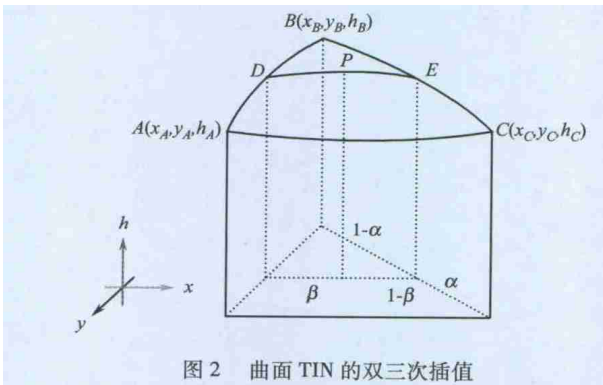


图 2 曲面 TIN 的双三次插值

如何基于三角点的地形信息(同时考虑了高程和导数)通过 Hermite 三次插值获得点 P 的近似高程? 下面给出插值过程建立的细节。

1) 通过点 P 绘制 3 条线分别平行于 TIN 面的 3 条边, 交点依次标记为 D E F G H I(后 4 个点在图 2 中未标出)。

2) 将点 D 和 E 作为端点, 基于高程和坡度, 在这两个点处通过三次插值方法建立三次多项式。 $\overrightarrow{DE}$  上的点 P 坐标可以很容易获得。类似地, 线段  $\overrightarrow{FG}$  和  $\overrightarrow{HI}$  的三次多项式也可以建立, 点 P 处的其他高程插值随之求出。取三次插值后的平均值来作为该 TIN 面元最终的插值高程值。

3) 边界点 D E 和 P 等点处的高程可以通过对 TIN 三角形顶点处的高程进行三次 Hermite 插值来获得。

与一维 Hermite 插值过程类似, 线段  $\overrightarrow{AB}$   $\overrightarrow{BC}$

和  $\overrightarrow{DE}$  的三次插值可以通过如下公式求得:

$$\left. \begin{aligned} c_{AB}(u) &= (1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^2 h_A + (3 - 2\alpha)\alpha^2 h_B + s_{AB}\alpha(1 - \alpha)^2 h'_{\overrightarrow{AAB}} + s_{AB}(\alpha - 1)\alpha^2 h'_{\overrightarrow{BAB}}; \\ c_{CB}(u) &= (1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^2 h_C + (3 - 2\alpha)\alpha^2 h_B + s_{BC}\alpha(1 - \alpha)^2 h'_{\overrightarrow{CCB}} + s_{BC}(\alpha - 1)\alpha^2 h'_{\overrightarrow{BCB}}; \\ c_{DE}(u) &= (1 + 2\beta)(1 - \beta)^2 h_D + (3 - 2\beta)\beta^2 h_E + s_{DE}\beta(1 - \beta)^2 h'_{\overrightarrow{DDE}} + s_{DE}(\beta - 1)\beta^2 h'_{\overrightarrow{EDE}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中  $h_D = c_{AB}(u_D)$ ;  $h_E = c_{CB}(u_E)$ 。

4) 通过线性插值, 可以获得  $\overrightarrow{DE}$  方向的坡度

$$\left. \begin{aligned} h'_{\overrightarrow{DDE}} &= \frac{\|u_B - u_D\|}{\|u_A - y_B\|} h'_{\overrightarrow{ADE}} + \frac{\|u_A - u_D\|}{\|u_A - u_B\|} h'_{\overrightarrow{BDE}}; \\ h'_{\overrightarrow{EDE}} &= \frac{\|u_C - u_E\|}{\|u_B - y_C\|} h'_{\overrightarrow{BDE}} + \frac{\|u_B - u_E\|}{\|u_B - u_C\|} h'_{\overrightarrow{CDE}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中  $h'_{\overrightarrow{ADE}}$  代表点 A 处平行于  $\overrightarrow{DE}$  的方向导数, 其他标记方法类似。由于  $\overrightarrow{DE}$  平行于  $\overrightarrow{AC}$ ,  $h'_{\overrightarrow{DE}}$  也可以记为  $h'_{\overrightarrow{AC}}$ 。值得注意的是, 原始 Hermite 插值函数只有一个自变量  $x$ , 而此处讨论的问题是以底平面上的散点为自变量来对高程进行插值的。所以为方便起见, 式(4)中的  $u_A = (x_A, y_A)$ , 并以  $\|u - u_A\|$  为 Hermite 插值函数的自变量。此外, 引入比例参数, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} s_{AD} &= \alpha s_{AB}; s_{CE} = \alpha s_{BC}; s_{DE} = (1 - \alpha) s_{AC}; \\ s_{BD} &= (1 - \alpha) s_{AB}; s_{BE} = (1 - \alpha) s_{BC}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

5) 为了保证构建 TIN 曲面的公平性, 针对 TIN 模型的 Hermite 双三次插值方法可以表述为

$$c_T(u_P) = \frac{1}{3}(c_{DE}(u_P) + c_{FG}(u_P) + c_{HI}(u_P)). \quad (6)$$

此处只是详细介绍了  $c_{CE}(u_P)$  的插值过程,  $c_{FG}(u_P)$  和  $c_{HI}(u_P)$  可类似给出。

由此, 可以得出

$$\begin{aligned} c_{DE}(u) &= (1 + 2\beta)(1 - \beta)^2((1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^2 h_A + (3 - 2\alpha)\alpha^2 h_B + s_{AB}\alpha(1 - \alpha)^2 h'_{\overrightarrow{HAB}} + s_{AB}(\alpha - 1)\alpha^2 h'_{\overrightarrow{BAB}}) + (3 - 2\beta)\beta^2((1 + 2\alpha)(1 - \alpha)^2 h_C + (3 - 2\alpha)\alpha^2 h_B + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & s_{BC}\alpha(1-\alpha)^2 h'_{CCB} + s_{BC}(\alpha-1)\alpha^2 h'_{BCB} + \\
 & s_{DE}\beta(1-\beta)^2 \left( \frac{u_B - u_D}{\|u_A - u_B\|} h'_{ADE} + \right. \\
 & \left. \frac{\|u_A - u_D\|}{\|u_A - u_B\|} h'_{BDE} \right) + s_{DE}(\beta-1)\beta^2 \cdot \\
 & \left( \frac{\|u_C - u_E\|}{\|u_B - u_C\|} h'_{BDE} + \frac{\|u_B - u_E\|}{\|u_B - u_C\|} h'_{CDE} \right) = \\
 & (1+2\beta)(1-\beta)^2(1+2\alpha)(1-\alpha)^2 h_A + \\
 & (1+2\beta)(1-\beta)^2(3-2\alpha)\alpha^2 h_B + \\
 & s_{AB}\alpha(1-\alpha)^2(1+2\beta)(1-\beta)^2 h'_{AAB} + \\
 & s_{AB}(\alpha-1)\alpha^2(1+2\beta)(1-\beta)^2 h'_{BAB} + \\
 & (1+2\alpha)(1-\alpha)^2(3-2\beta)\beta^2 h_C + \\
 & (3-2\alpha)\alpha^2(3-2\beta)\beta^2 h_B + \\
 & s_{BC}\alpha(1-\alpha)^2(3-2\beta)\beta^2 h'_{CCB} + \\
 & s_{BC}(\alpha-1)\alpha^2(3-2\beta)\beta^2 h'_{BCB} + \\
 & s_{DE}\beta(1-\beta)^2(s_{BD}h'_{ADE} + s_{AD}h'_{BDE})/s_{AB} + \\
 & s_{DE}(\beta-1)\beta^2(s_{CE}h'_{BDE} + s_{BE}h'_{CDE})/s_{BC} = \\
 & (1+2\alpha)(1-\alpha)^2(1+2\beta)(1-\beta)^2 h_A + \\
 & (3-2\alpha)\alpha^2 h_B + (1+2\alpha)(1-\alpha)^2 \cdot \\
 & (3-2\beta)\beta^2 h_C + s_{AB}\alpha(1-\alpha)(1+2\beta) \cdot \\
 & (1-\beta)^2((1-\alpha)h'_{AAB} + \alpha h'_{BAB}) + \\
 & s_{BC}\alpha(1-\alpha)(3-2\beta)\beta^2((1-\alpha)h'_{CCB} + \\
 & \alpha h'_{BCB}) + s_{AC}(1-\alpha)\beta(1-\beta) \cdot \\
 & ((1-\alpha)(1-\beta)h'_{ADE} + \alpha h'_{BDE} + \\
 & (1-\alpha)\beta h'_{CDE}) = \\
 & r_1 h_A + r_2 h_B + r_3 h_C + q_1 h'_{AAB} + \\
 & q_2 h'_{BAB} + q_3 h'_{CCB} + q_4 h'_{BCB} + \\
 & q_5 h'_{AAC} + q_6 h'_{BAC} + q_7 h'_{CAC}. \tag{7}
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 r_1 &= (1+2\alpha)(1-\alpha)^2(1+2\beta)(1-\beta)^2, \\
 r_2 &= (3-2\alpha)\alpha^2, \\
 r_3 &= (1+2\alpha)(1-\alpha)^2(3-2\beta)\beta^2; \\
 q_1 &= s_{AB}\alpha(1-\alpha)^2(1+2\beta)(1-\beta)^2, \\
 q_2 &= s_{AB}\alpha^2(1-\alpha)(1+2\beta)(1-\beta)^2, \\
 q_3 &= s_{BC}\alpha(1-\alpha)^2(3-2\beta)\beta^2, \\
 q_4 &= s_{BC}\alpha^2(1-\alpha)(3-2\beta)\beta^2, \\
 q_5 &= s_{AC}(1-\alpha)^2\beta(1-\beta)^2, \\
 q_6 &= s_{AC}\alpha(1-\alpha)\beta(1-\beta), \\
 q_7 &= s_{AC}(1-\alpha)^2\beta(1-\beta).
 \end{aligned}$$

因此 TIN 模型的 Hermite 双三次插值可以通过式(6) 计算得出。

**1.3 基于双三次 Hermite 方法的规则格网插值**  
 矩形的双三次插值可以通过如下两个步骤完

成: 首先假设  $y$  固定, 这样地形  $z(x, y)$  就成为单变量  $x$  的函数, 插值只需要在  $x$  方向进行; 之后  $x$  与  $y$  交换, 以类似方式沿垂直方向进行插值即可。

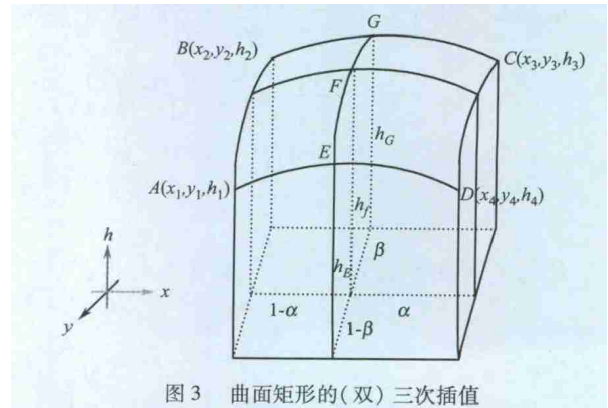


图 3 曲面矩形的(双)三次插值

如图3所示  $A, B, C$  和  $D$  是矩形模型的4个给定节点, 组成矩形  $\square ABCD$ 。独立变量坐标为  $u_A = (x_1, y_1)$ ,  $u_B = (x_2, y_1)$ ,  $u_C = (x_2, y_2)$  和  $u_D = (x_1, y_2)$  点的高程值分别为  $h_A, h_B, h_C$  和  $h_D$ 。根据文献[11] 基于矩形模型的双三次插值函数(在下文中建立) 需要满足如下的插值条件:

$$\begin{cases}
 c_R(x_i, y_i) = h(x_i, y_i), \\
 \frac{\partial}{\partial x} c_R(x_i, y_i) = \frac{\partial}{\partial x} h(x_i, y_i), \\
 \frac{\partial}{\partial y} c_R(x_i, y_i) = \frac{\partial}{\partial y} h(x_i, y_i), \\
 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} c_R(x_i, y_i) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h(x_i, y_i).
 \end{cases}$$

双三次插值方法的第 1 个条件意味着采样点的高程需要满足插值函数。第 2 个和第 3 个条件说明沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的坡度都要用到。最后一个条件是, 沿  $x$  和  $y$  轴方向的混合偏导数保证了整个地表的光滑性。若满足了以上条件, 三次插值函数就可以如下建立:

$$\begin{aligned}
 c_R(x, y) &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_i(x) \alpha_j(y) h(x_i, y_j) + \\
 & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \beta_i(x) \alpha_j(y) \frac{\partial}{\partial x} h(x_i, y_j) + \\
 & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_i(x) \beta_j(y) \frac{\partial}{\partial y} h(x_i, y_j) + \\
 & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \beta_i(x) \beta_j(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} h(x_i, y_j). \tag{8}
 \end{aligned}$$

式中, Hermite 插值的基函数如下:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(x) &= \left(1 + 2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right) \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right)^2, \\
 \alpha_2(x) &= \left(1 + 2 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^2,
 \end{aligned}$$

$$\alpha_1(y) = (1 + 2 \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}) (\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1})^2,$$

$$\alpha_2(y) = (1 + 2 \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}) (\frac{y - y_1}{y_2 - y_1})^2;$$

$$\beta_1(x) = (x - x_1) (\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1})^2,$$

$$\beta_2(x) = (x_2 - x) (\frac{x - x_1}{x_2 - x_1})^2,$$

$$\beta_1(y) = (y - y_1) (\frac{y_2 - y}{y_2 - y_1})^2,$$

$$\beta_2(y) = (y_2 - y) (\frac{y - y_1}{y_2 - y_1})^2.$$

## 2 基于误差传播定律的 DEM 传播误差估计

### 2.1 基于三次插值的线的传播误差估计

使用与 1.1 节相同的插值条件,采用  $h_1$  和  $h_2$  分别表示随机变量 (RVs)  $H_1$  和  $H_2$  的测量值,用  $h'_1$  和  $h'_2$  分别表示随机变量  $H'_1$  和  $H'_2$  的测量值。根据式 (2), 可以得出

$$C(x) = p_1 H_1 + p_2 H_2 + q_1 H'_1 + q_2 H'_2. \quad (9)$$

从而 随机变量  $C$  的方差为

$$\sigma_c^2 = \text{Var}[p_1 H_1 + p_2 H_2 + q_1 H'_1 + q_2 H'_2] =$$

$$p_1^2 \sigma_1^2 + p_2^2 \sigma_2^2 + q_1^2 (\sigma'_1)^2 + q_2^2 (\sigma'_2)^2 +$$

$$2p_1 p_2 \text{Cov}\{H_1, H_2\} + 2p_1 q_1 \text{Cov}\{H_1, H'_1\} +$$

$$2p_1 q_2 \text{Cov}\{H_1, H'_2\} + 2p_2 q_1 \text{Cov}\{H_2, H'_1\} +$$

$$2p_2 q_2 \text{Cov}\{H_2, H'_2\} + 2q_1 q_2 \text{Cov}\{H'_1, H'_2\}.$$

$$(10)$$

其中  $\sigma_i^2$  是随机变量  $H_i$  的方差;  $(\sigma'_i)^2$  是随机变量  $H'_i$  的方差。

如上文提到的,位置  $x$  在线段  $[x_1, x_2]$  上呈均匀分布,即分割比  $\alpha = (x - x_1) / s$  服从  $[0, 1]$  上的均匀分布。所以 线段  $[x_1, x_2]$  上随机变量  $C$  的平均方差表述为

$$E(\sigma_c^2) = \frac{1}{35}(13\sigma_1^2 + 9\text{Cov}\{H_1, H_2\} + 13\sigma_2^2) +$$

$$\frac{s}{210}(22\text{Cov}\{H_1, H'_1\} - 13\text{Cov}\{H_1, H'_2\} +$$

$$13\text{Cov}\{H_2, H'_1\} - 85\text{Cov}\{H_2, H'_2\}) +$$

$$\frac{s^2}{210}(2(\sigma'_1)^2 - 3\text{Cov}\{H'_1, H'_2\} +$$

$$2(\sigma'_2)^2). \quad (11)$$

特殊情况,当  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma'_1 = \sigma'_2 = 1$ , 且  $\text{Cov}\{X, Y\} = 0$  时,式 (11) 化为

$$E(\sigma_c^2) = \frac{26}{35} + \frac{s^2}{105}. \quad (12)$$

其中,参数  $s = x_2 - x_1$  代表线段长度(一维)。

### 2.2 基于双三次插值的 TIN 的传播误差估计

考虑与 1.2 节类似的情况,  $h_A, h_B$  和  $h_C$  分别表示随机变量  $H_A, H_B$  和  $H_C$  的测量值;  $h'_{\vec{AAB}}$  等表示随机变量  $H'_{\vec{AAB}}$  等的测量值。于是 根据式 (8) 可得

$$C_T(u) = r_1 H_A + r_2 H_B + r_3 H_C + q_1 H'_{\vec{AAB}} +$$

$$q_2 H'_{\vec{BAB}} + q_3 H'_{\vec{CCB}} + q_4 H'_{\vec{BCB}} +$$

$$q_5 H'_{\vec{AAC}} + q_6 H'_{\vec{BAC}} + q_7 H'_{\vec{CAC}}. \quad (13)$$

其中,  $C_T(u)$  是随机变量,对应的测量值为  $c_T(u)$ 。为方便起见,令  $C_T = C_T(u)$ 。

由于导数随机变量之间的相关性较小,若插值函数有  $n$  项,方差中就会有  $n(n - 1) / 2$  项。当  $n > 5$  时就会因为项数过多而使分析推导过程变得极其繁杂。所以,不失一般性,此处忽略导数随机变量的协方差项,即假设  $\text{Cov}\{H'_*, *\} = 0$ 。

从而 随机变量  $C_T$  的方差为

$$\sigma_{C_T}^2 = \text{Var}[r_1 H_A + r_2 H_B + r_3 H_C + q_1 H'_{\vec{AAB}} +$$

$$q_2 H'_{\vec{BAB}} + q_3 H'_{\vec{CCB}} + q_4 H'_{\vec{BCB}} +$$

$$q_5 H'_{\vec{AAC}} + q_6 H'_{\vec{BAC}} + q_7 H'_{\vec{CAC}}] =$$

$$r_1^2 \sigma_A^2 + r_2^2 \sigma_B^2 + r_3^2 \sigma_C^2 + q_1^2 (\sigma'_1)^2 +$$

$$q_2^2 (\sigma'_2)^2 + q_3^2 (\sigma'_3)^2 + q_4^2 (\sigma'_4)^2 +$$

$$q_5^2 (\sigma'_5)^2 + q_6^2 (\sigma'_6)^2 + q_7^2 (\sigma'_7)^2 +$$

$$2r_1 r_2 \text{Cov}\{H_A, H_B\} + 2r_2 r_3 \text{Cov}\{H_B, H_C\} +$$

$$2r_1 r_3 \text{Cov}\{H_A, H_C\} + \dots. \quad (14)$$

其中  $\sigma_A^2, \sigma_B^2$  及  $\sigma_C^2$  是随机变量  $H_A, H_B$  及  $H_C$  的方差;  $(\sigma'_k)^2$  表示第  $k$  个方向导数的方差,参数为  $q_k$ 。其余参数的含义可参照式 (7)。此外,随机抽取高度与 TIN 单元总高度(同一底基准面)的比值是一个满足众数为 0 的三角分布  $Tri[0, 1]$  的随机变量<sup>[11]</sup>。这是由于沿着三角形一条侧边向顶点移动,绘制平行于三角底边的线段的概率呈线性衰减。正如 2.1 节讨论的,参数变量  $\alpha$  满足众数为 0 的三角分布<sup>[12]</sup>,而参数  $\beta \sim U(0, 1)$ 。

由文献 [12] 随机变量  $C_T$  的平均方差表述为

$$E(\sigma_{C_T}^2) = \frac{52}{245}\sigma_A^2 + \frac{6}{35}\sigma_B^2 + \frac{52}{245}\sigma_C^2 +$$

$$\frac{9}{70}\text{Cov}\{H_A, H_B\} + \frac{36}{245}\text{Cov}\{H_A, H_C\} +$$

$$\frac{9}{70}\text{Cov}\{H_B, H_C\} + s_{AB}^2 (\frac{13}{2 \cdot 940}(\sigma'_1)^2 +$$

$$\frac{13}{4 \cdot 900}(\sigma'_2)^2) + s_{BC}^2 (\frac{13}{2 \cdot 940}(\sigma'_3)^2 +$$

$$\frac{13}{4 \cdot 900}(\sigma'_4)^2) + s_{AC}^2 (\frac{1}{315}(\sigma'_5)^2 +$$



$$\frac{1}{900}(\sigma'_6)^2 + \frac{1}{90}(\sigma'_7)^2 + \dots \quad (15)$$

式(15)中的  $s_{AB}$ 、 $s_{BC}$  和  $s_{AC}$  在实际中常为同一级别, 所以用  $s$  取代, 表示 TIN 边的平均长度。用  $\sigma'$  表示整体 TIN 区域方向导数的平均方差, 即视为  $\sigma' \approx \sigma'_i (i = 1, 2, \dots, 7)$ 。式(15)化为

$$E(\sigma_{C_T}^2) = \frac{52}{245}\sigma_A^2 + \frac{6}{35}\sigma_B^2 + \frac{52}{245}\sigma_C^2 + \frac{355}{429}s^2(\sigma')^2 + \frac{9}{70}\text{Cov}\{H_A, H_B\} + \frac{36}{245}\text{Cov}\{H_A, H_C\} + \frac{9}{70}\text{Cov}\{H_B, H_C\}. \quad (16)$$

式(16)就是求出的基于 Hermite 双三次插值函数的 TIN 曲面的传播误差结果。可以看出, TIN 模型的传播误差与三顶点的方差、三点之间的协方差以及三点(平均)方向导数的方差有关。

特殊情况, 当  $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C = \sigma' = 1$ , 并且  $\text{Cov}\{X, Y\} = 0$  时, 式(16)化为

$$E(\sigma_{C_T}^2) = \frac{146}{245} + \frac{355}{429}s^2. \quad (17)$$

### 2.3 基于双三次插值的矩形传播误差估计

考虑 1.3 节的相同条件, 用  $h_1$ 、 $h_2$ 、 $h_3$  和  $h_4$  分别表示随机变量  $H_1$ 、 $H_2$ 、 $H_3$  和  $H_4$  的测量值。由式(8), 可以得出

$$C_R(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_i(x) \alpha_j(y) H(x_i, y_j) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \beta_i(x) \alpha_j(y) \frac{\partial}{\partial x} H(x_i, y_j) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_i(x) \beta_j(y) \frac{\partial}{\partial y} H(x_i, y_j) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \beta_i(x) \beta_j(y) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H(x_i, y_j) = \alpha_1(x) \alpha_1(y) H(x_1, y_1) + \alpha_1(x) \alpha_2(y) H(x_1, y_2) + \alpha_2(x) \alpha_1(y) H(x_2, y_1) + \alpha_2(x) \alpha_2(y) H(x_2, y_2) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \beta_i(x) \alpha_j(y) \frac{\partial}{\partial x} H(x_i, y_j) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha_i(x) \beta_j(y) \frac{\partial}{\partial y} H(x_i, y_j) + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \beta_i(x) \beta_j(y) \frac{\partial}{\partial x \partial y} H(x_i, y_j). \quad (18)$$

其中  $C_R(x, y)$  是随机变量, 相应的测量值为  $c_R(x, y)$ 。为了引用方便, 令  $C_R = C_R(x, y)$ 。正如 2.2 节所述, 忽略导数随机变量的相关性, 即

$$\text{Cov}\{H^*, *\} = 0。随机变量  $C_R$  的方差为  $\sigma_{C_R}^2 = (\alpha_1^2(x) \alpha_1^2(y)) \sigma_1^2 + (\alpha_1^2(x) \alpha_2^2(y)) \sigma_2^2 + (\alpha_2^2(x) \alpha_1^2(y)) \sigma_3^2 + (\alpha_2^2(x) \alpha_2^2(y)) \sigma_4^2 + 2(\alpha_1^2(x) \alpha_1(y) \alpha_2(y)) \sigma_{12}^2 + 2(\alpha_1(x) \alpha_2(x) \alpha_1^2(y)) \sigma_{13}^2 + 2(\alpha_1(x) \alpha_2(x) \alpha_1(y) \alpha_2(y)) \sigma_{14}^2 + 2(\alpha_1(x) \alpha_2(x) \alpha_1(y) \alpha_2(y)) \sigma_{23}^2 + 2(\alpha_1(x) \alpha_2(x) \alpha_2^2(y)) \sigma_{24}^2 + 2(\alpha_2^2(x) \alpha_1(y) \alpha_2(y)) \sigma_{34}^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\beta_i^2(x) \alpha_j^2(y)) (\sigma_{ij}^{\partial x})^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\alpha_i^2(x) \beta_j^2(y)) (\sigma_{ij}^{\partial y})^2 + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\beta_i^2(x) \beta_j^2(y)) (\sigma_{ij}^{\partial xy})^2. \quad (19)$$$

式中, 参数  $\sigma_1^2$ 、 $\sigma_2^2$ 、 $\sigma_3^2$  及  $\sigma_4^2$  分别表示随机变量  $H(x_1, y_1)$ 、 $H(x_1, y_2)$ 、 $H(x_2, y_1)$  及  $H(x_2, y_2)$  的方差;  $(\sigma_{ij})^2$  表示两两之间的协方差;  $(\sigma_{ij}^{\partial x})^2$ 、 $(\sigma_{ij}^{\partial y})^2$  和  $(\sigma_{ij}^{\partial xy})^2$  表示矩形格网 4 个顶点处(混合)偏导数的方差。除此之外, 独立变量  $x$  和  $y$  分别服从  $[x_1, x_2]$  和  $[y_1, y_2]$  上的均匀分布。

随机变量  $C_R$  的平均方差可以如下估计:

$$E(\sigma_{C_R}^2) = \frac{169}{1225} \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 + \frac{117}{1225} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{24}^2 + \sigma_{34}^2) + \frac{81}{2450} (\sigma_{14}^2 + \sigma_{23}^2) + \frac{13}{3675} s_x^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\sigma_{ij}^{\partial x})^2 + \frac{13}{3675} s_y^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\sigma_{ij}^{\partial y})^2 + \frac{1}{11025} s_x^2 s_y^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\sigma_{ij}^{\partial xy})^2. \quad (20)$$

式(20)是基于双三次插值函数的曲面矩形传播误差的结果。结果表明规则格网模型的传播误差与 4 个顶点的方差、协方差以及(混合)偏导数的方差都相关。式(20)中的  $s_x$  和  $s_y$  通常具有相同的量级。用  $(\sigma^{\partial x})^2$  表示沿  $x$  轴方向导数的平均方差; 用  $(\sigma^{\partial y})^2$  表示沿  $y$  轴方向导数的平均方差; 用  $(\sigma^{\partial xy})^2$  表示整体 TIN 区域的平均混合方差。如此, 误差方差的期望为

$$E(\sigma_{C_R}^2) = \frac{169}{1225} \sum_{i=1}^4 \sigma_i^2 + \frac{117}{1225} (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{24}^2 + \sigma_{34}^2) + \frac{81}{2450} (\sigma_{14}^2 + \sigma_{23}^2) +$$

$$\frac{52}{3\ 675}(s_x^2(\sigma_{ij}^{\partial x})^2 + s_y^2(\sigma_{ij}^{\partial y})^2) + \frac{4}{11\ 025}s_x^2s_y^2(\sigma_{ij}^{\partial xy})^2. \quad (21)$$

特殊情况,当  $\sigma_i = 1, \sigma_j = 0, \forall i \neq j$ , 并且  $\sigma^{\partial x} = \sigma^{\partial y} = \sigma^{\partial xy} = 1$  时,式(21)化为

$$E(\sigma_{CR}^2) = \frac{676}{1\ 225} + \frac{52}{3\ 675}(s_x^2 + s_y^2) + \frac{4}{11\ 025}s_x^2s_y^2.$$

### 3 结果分析

在上文的研究中,求出了基于非线性插值——Hermite(双)三次模型的3种类型:线、TIN、规则格网DEM的传播误差模型。对于特殊情况,当节点的方差和方向导数相同且为1、协方差(高程值以及相应的导数)均为0——节点间的误差独立,3种类型的传播误差在表1中列出。表中忽略包含步长的项,因为实际中步长尺寸非常小。尽管表中是特例的结果,但代表了这几种类型的传播误差的主要趋势。因为点的协方差矩阵常常为对角占优矩阵。

表1 基于(双)线性和(双)三次插值方法的传播误差

类型	(双)线性	(双)三次
线	0.667 (2/3)	0.743 (26/35)
TIN	0.500 (1/2)	0.596 (146/245)
规则格网	0.444 (4/9)	0.552 (676/1225)

将本文获得的结果与文献[19]的线性插值结果(也在表1中列出)进行比较,可以发现假设节点处的导数为0以及节点间的协方差为0时,(双)线性函数的传播误差略小于(双)三次函数的传播误差。因为(双)三次函数扩大了属性值(坐标)与均值的距离,所以增大了误差方差。在实际中,如果点的随机误差占优势,更应该选择线性插值模型。表1中的传播误差只依赖于插值方法的选择,而不取决于观测数据。然而,众所周知,Hermite(双)三次插值方法的模型误差明显小于(双)线性插值算法的模型误差。所以在点的随机误差不明显的情况下,插值误差和传播误差方差都要考虑到。在这种情况下,(双)三次插值可能比(双)线性插值具有更好的插值效果。

### 4 传播误差模型使用实例

前面,假设点之间的协方差(包括高程和导数)为0,给出了传播误差的结果。这里,采用模拟的方法产生更多一般类型的例子来验证本文所提出的线、TIN和规则格网的传播误差模型。需

要指出的是,在这些实例中点的协方差不为0。

#### 4.1 线的传播误差

针对线段的传播误差已在2.1节中讨论过。这里举例假设  $\sigma_1^2 = 1.654\ 6, \sigma_2^2 = 1.160\ 0$ ,  $\text{Cov}\{H_1, H_2\} = -0.058\ 2$ 。同时,假设其他的协方差均为0,即  $\text{Cov}\{H_1, H'_1\} = \text{Cov}\{H_1, H'_2\} = \text{Cov}\{H_2, H'_2\} = \text{Cov}\{H_2, H'_1\} = 0$ 。为了与之前的线性插值的研究进行对比,此处将所有涉及导数的项均取为0。根据式(11),基于三次Hermite插值方法的线段平均传播误差为

$$E(\sigma_{CL}^2) = \frac{13}{35}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) + \frac{9}{35}\text{Cov}\{H_1, H_2\} = \frac{13}{35} \times (1.654\ 6 + 1.160\ 0) - \frac{9}{35} \times 0.058\ 2 = 1.030\ 5.$$

而根据文献[1],基于线性插值方法的线段平均传播误差为  $E(\sigma_{Ll}^2) = 0.918\ 8$ 。

#### 4.2 TIN的传播误差

在2.2节,设  $\sigma_1^2 = 2.732\ 5, \sigma_2^2 = 1.106\ 7, \sigma_3^2 = 1.869\ 6, \text{Cov}\{H_1, H_2\} = 0.093\ 2, \text{Cov}\{H_1, H_3\} = 0.050\ 6, \text{Cov}\{H_2, H_3\} = -0.073\ 8$ ,此处亦忽略涉及导数的项。基于式(16),采用双三次Hermite插值方法生成TIN的平均传播误差为

$$E(\sigma_{CT}^2) = \frac{1}{3}[E_1(\sigma_{CT}^2) + E_2(\sigma_{CT}^2) + E_3(\sigma_{CT}^2)] = 0.199(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + 0.135(\text{Cov}\{H_1, H_2\} + \text{Cov}\{H_1, H_3\} + \text{Cov}\{H_2, H_3\}) = 0.199(2.732\ 5 + 1.106\ 7 + 1.869\ 6) + 0.135(0.093\ 2 + 0.050\ 6 - 0.073\ 8) = 1.145\ 5.$$

而根据文献[1],基于双线性插值方法的TIN平均传播误差为  $E(\sigma_{LT}^2) = 0.963\ 0$ 。

#### 4.3 规则格网的传播误差

在2.3节中,设  $\sigma_1^2 = 3.244\ 5, \sigma_2^2 = 1.689\ 5, \sigma_3^2 = 1.296\ 7, \sigma_4^2 = 2.939\ 5, \text{Cov}\{H_1, H_2\} = -0.025\ 0, \text{Cov}\{H_1, H_3\} = 0.009\ 0, \text{Cov}\{H_1, H_4\} = 0.075\ 3, \text{Cov}\{H_2, H_3\} = -0.034\ 2, \text{Cov}\{H_2, H_4\} = -0.096\ 4, \text{Cov}\{H_3, H_4\} = -0.038\ 3$ 。

为了与之前的线性插值结果进行比较,忽略导数项。根据式(21),双三次Hermite插值方法的矩形平均传播误差为

$$E(\sigma_{CR}^2) = \frac{169}{1\ 225}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + \sigma_4^2) + \frac{117}{1\ 225}(\text{Cov}\{H_1, H_2\} + \text{Cov}\{H_1, H_4\} +$$

$$\begin{aligned} & \text{Cov}\{H_2, H_3\} + \text{Cov}\{H_3, H_4\} + \\ & \frac{81}{2450}(\text{Cov}\{H_1, H_3\} + \text{Cov}\{H_2, H_4\}) = \\ & \frac{169}{1225}(3.2445 + 1.6895 + 1.2967 + \\ & 2.9395) + \frac{117}{1225}(-0.0250 + \\ & 0.0753 - 0.0342 - 0.0383) + \\ & \frac{81}{2450}(0.0090 - 0.0964) = 1.2601. \end{aligned}$$

而根据文献[1],基于双线性插值方法的矩形平均传播误差为  $E(\sigma_{LR}^2) = 1.0112$ 。

基于(双)线性和(双)三次插值方法的平均传播误差的结果如表2所示。

表2 基于(双)线性和(双)三次插值方法的平均传播误差的例子

类型	(双)线性	(双)三次
线	0.9188	1.0305
TIN	0.9630	1.1455
规则格网	1.0112	1.2601

DEM 误差分为模型误差和传播误差。前者是由插值方法所造成的误差,后者为采集的原始数据点所包含的不确定性沿着“插值线路”(或线段1D、或 TIN 网、或 Rectangle 格网)传播的误差!所以,考虑 DEM 误差时,二者均要顾及;但由于其属性不同,不能简单地进行叠加处理。尽管高次的插值方法与线性插值方法相比容易获取更高的插值精度;根据以上结果可知,(双)线性函数的传播误差略小于(双)三次 Hermite 插值结果。所以,如果当点的随机误差相比模型误差明显占优时,应该考虑选择(双)线性插值方法。反之,应该选择高次插值。

## 5 结论

利用双三次 Hermite 插值方法,根据统计学的误差传播定律,分别针对规则和 irregular DEM 散点数据所构建的地形曲面,求出了 TIN 和规则格网中每个面元的传播误差。由于数据采集的不确定性,面元节点处的源误差会沿着每个插值面元传播到整个地形曲面。该研究结果清晰地表征了从面元节点源误差传播到整个地形曲面的平均误差。本文所提出的 DEM 传播误差延续了先前双线性插值方法的平均 DEM 传播误差工作。

影响 DEM 插值总体精度的误差来源包括:源自节点的传播误差和插值方法所造成的模型误差;本文着重考虑第1种 DEM 传播误差来源。如

文中所述,基于双线性模型的 DEM 传播误差小于双三次模型的 DEM 传播误差。然而只考虑模型误差,非线性模型比线性插值模型效果更好<sup>[4-5]</sup>。因此,在实际生产 DEM 产品过程中,需要整体考虑两类传播误差影响因素:来源于节点的误差和插值模型误差。本文研究工作丰富了 DEM 传播误差研究成果,为 DEM 生产(当节点误差为主要考虑因素)中的插值模型选择提供了实践指导。接下来的工作可以是采用其他非线性插值方法例如二次函数、径向基函数、泛克里格或样条函数等对 DEM 误差传播的进一步研究。

## 参考文献:

- [1] KYRIAKIDIS P C, GOODCHILD M F. On the Prediction Error Variance of Three Common Spatial Interpolation Schemes[J]. International Journal of Geographical Information Science, 2006, 20: 823-855.
- [2] HUNTER G J, GOODCHILD M F. Modelling the Uncertainty of Slope and Aspect Estimates Derived from Spatial Databases[J]. Geographical Analysis, 1997, 29(1): 35-49.
- [3] REES W G. The Accuracy of Digital Elevation Interpolated to Higher Resolutions[J]. International Journal of Remote Sensing, 2000, 21: 7-20.
- [4] KIDNER D B. Higher-order Interpolation of Regular Grid Digital Elevation Models[J]. International Journal of Remote Sensing, 2003, 24: 2981-2987.
- [5] SHI W Z, TIAN Y. A Hybrid Interpolation Method for the Refinement of a Regular Grid Digital Elevation Model[J]. International Journal of Geographical Information Science, 2006, 20(1): 53-67.
- [6] 李志林, 朱长青. 数字高程模型[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2000: 61-80.
- [7] ZHOU Q M, LIU X J. Error Analysis on Grid-Based Slope and Aspect Algorithms[J]. Photogrammetric Engineering & Remote Sensing, 2004, 70(8): 957-962.
- [8] SHI W Z, LI Q Q, ZHU C Q. Estimating the Propagation Error of DEM from Higher-Order Interpolation Algorithms[J]. International Journal of Remote Sensing, 2005, 26: 3069-3084.
- [9] ZHU C Q, SHI W Z. Estimation of Average DEM Accuracy Under Linear Interpolation Considering Random Error at the Nodes of TIN Model[J]. International Journal of Remote Sensing, 2005, 26: 5509-5523.
- [10] 朱长青. 计算方法及其在测绘中的应用[M]. 北京: 测绘出版社, 1997: 25-31.
- [11] CARLSON R, FRITSCH F. Monotone Piecewise Bicubic Interpolation[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1985, 22: 386-400.
- [12] CATHERINE F, MERRAN E, NICHOLAS H, et al. Statistical Distributions, Fourth Edition[M]. Hoboken N J: Wiley, 2010: 189-190.

责任编辑 陶大欣