

文章编号: 1003-9015(2002)02-0139-06

## 强迫激励下全混釜内酵母培养系统的混沌行为

袁其朋<sup>1</sup>, 钱忠明<sup>2</sup>

(1. 北京化工大学化学工程学院, 北京 100029; 2. 香港理工大学生物及化学科技学系, 中国 香港)

摘要: 以全混釜中酵母培养系统为对象, 固定外加激励振幅值, 改变激励频率, 运用数值方法研究了强迫激励下乙醇连续发酵系统中存在混沌的可能性。结果表明, 当激励频率  $w$  小于 0.232885 时, 系统只表现出简单的周期解, 当  $w$  大于 0.232885 小于 0.250185 时, 系统出现一对周期二吸引子, 当  $w$  增大至 0.250185 时, 系统产生一对周期四吸引子, 以后经一系列倍周期分叉出现混沌运动。当  $w > 0.258$  后, 系统出现多种周期窗口。该研究为进一步揭示生化反应系统中更复杂的非线性现象并对通过诱导振荡提高反应器性能提供了理论依据。

关键词: 混沌; 分岔; 强迫激励

中图分类号: TQ920.1; TS262.2

文献标识码: A

## 1 前言

混沌问题的研究是非线性动力学领域研究的热点之一。从 Lorenz 在研究大气对流时提出 Lorenz 方程并从中发现混沌现象以来, 混沌问题日益受到各国学者瞩目<sup>[1]</sup>。在短短二十年当中, 人们作了大量的工作, 运用数值或解析的方法来研究这一复杂现象, 分析混沌运动产生的条件和混沌的本质。

迄今为止, 在生化反应系统中, 关于混沌的研究仍非常少见, 但力学及化工领域非线性混沌理论的发展及研究方法为研究生物系统乃至整个生命现象的多样性提供了可能, 对生化系统更为深层次的研究具有重要意义。王洪礼等<sup>[2]</sup>运用分岔理论研究了自治条件下乙醇连续发酵过程中存在的振荡现象, 本文对乙醇连续发酵系统在强迫激励作用(正弦波进料)下的混沌运动进行了初步研究。

## 2 混沌运动的刻划

混沌运动具有宏观有序和微观无序的特征, 貌似随机实际上却有一定的统计学规律。通常情况下人们常用时间历程、相平面图、Poincare 截面<sup>[3]</sup>、功率谱<sup>[4]</sup>及 Lyapunov 指数<sup>[5]</sup>五种方法来定性刻划混沌运动和混沌吸引子的特征。为了确定一个运动是否是混沌运动, 必须综合考虑这五种特征才能确定。此外, 维数及熵也可用来表征混沌运动。

## 3 数学模型

## 3.1 动力学模型

在文献[2]提出的改进动力学模型的基础上, 考虑对连续培养的底物进料施以振幅为  $A$ 、频率为  $w$  的正弦扰动, 得到如下的物料衡算方程:

$$m = m_m \frac{S}{K_S + S} \left(1 - \frac{X}{X_m}\right) \left(1 - \frac{P}{P_L}\right), \quad Y_{x/s} = a + B \cdot S \quad (1)$$

收稿日期: 2001-07-03; 修订日期: 2001-12-28。

作者简介: 袁其朋(1969-), 男, 安徽萧县人, 北京化工大学副教授, 博士。

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = m \cdot X - D \cdot X \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{1}{Y_{X/S}} m \cdot X + D \cdot (S_0 - S) + A \cdot \sin(\omega t) \\ \frac{dP}{dt} = \frac{1}{Y_{X/P}} m \cdot X - D \cdot P \end{cases} \quad (2)$$

### 3.2 模型参数及计算方法

动力学模型参数如表 1 所示。

表 1 动力学模型参数表

Table 1 The dynamic model parameters

$m, h^{-1}$	$K_S, g \cdot L^{-1}$	$P_L, g \cdot L^{-1}$	$X_m, g \cdot L^{-1}$	$a,$	$B, L \cdot g^{-1}$	$Y_{X/P}$
0.24	1.6	90	100	0.0064	0.024	0.16

计算过程中选取入口糖浓度为  $S_0 = 20 g \cdot L^{-1}$ , 稀释率  $D = 0.12 h^{-1}$ , 外加激励幅值  $A = 1.0 g \cdot L^{-1}$ , 频率  $\omega$  为分叉参数, 时间步长取激励周期的 1/100。初始条件为: 菌体浓度  $X = 0.02 g \cdot L^{-1}$ , 糖浓度  $S = 0.01 g \cdot L^{-1}$ , 产物浓度  $P = 0.01 g \cdot L^{-1}$ , 计算周期为激励周期的 4000 倍。计算程序采用变步长 GILL 方法和 FFT 算法以求得时间历程和功率谱, 其中积分精度  $EPS = 10^{-10}$ 。Poincare 截面及 Lyapunov 指数分别用文献[3]和[5]提供的方法编程计算。

## 4 计算结果与讨论

### 4.1 解随参数的变化关系

图 1 给出在上述初始条件下的分叉图,  $X$  的振幅值为纵轴, 激励频率  $\omega$  为横轴。当  $\omega$  小于 0.232885 时, 系统只表现出简单的周期解; 当  $\omega$  大于 0.232885 小于 0.250185 时, 出现一对周期二吸引子; 当  $\omega$  增大至 0.250185 时, 产生一对周期四吸引子; 以后经一系列倍周期分叉出现混沌运动。图 2 给出  $\omega$  变化时, 系统周期的变化; 当  $\omega > 0.258$  后, 系统将出现多种周期窗口。

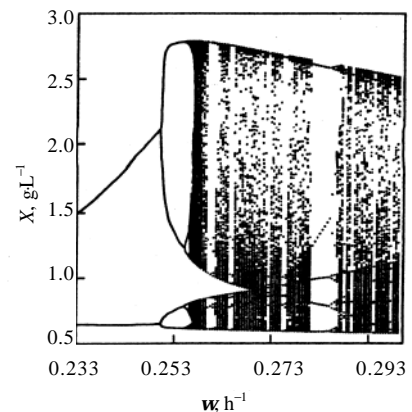


图 1 强迫激励下连续发酵系统的分叉图  
Fig.1 Bifurcation plot of continuous fermentation system under forced impulse

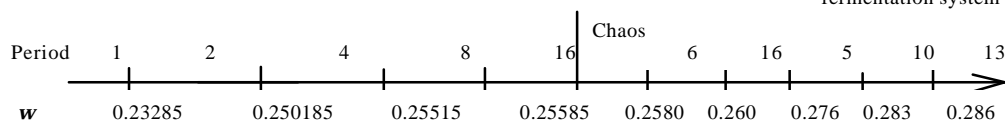


图 2 周期和混沌区域图  
Fig.2 Figure of period and chaos

### 4.2 时间历程

时间历程是观察运动特征最直观的方法, 周期运动、定常运动以及概周期运动都可以通过观察其时间历程加以判断, 而混沌运动在时间历程上类似随机运动。图 3 分别给出周期 1 至周期 16 以及混沌运动的时间历程。但由于混沌运动在时间历程上类似概周期运动或周期很长的运动, 要确证该运动是否为混沌还需要其他条件。

### 4.3 相平面图

定常解的相平面图是一个点, 周期运动的相平面图是一条闭曲线, 概周期运动的相平面图是一条稠密曲线, 混沌运动的相平面图是杂乱无章的。图 4 给出了周期 1 至周期 16 以及混沌运动的相平面图。

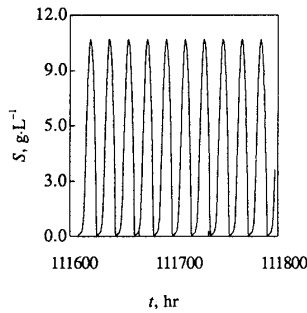


图 3(a) 周期 1 的时间历程  
Fig.3(a) Time course of period 1 ( $\omega=0.230$ )

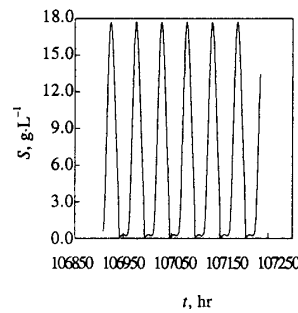


图 3(b) 周期 2 的时间历程  
Fig.3(b) Time course of period 2 ( $\omega=0.240$ )

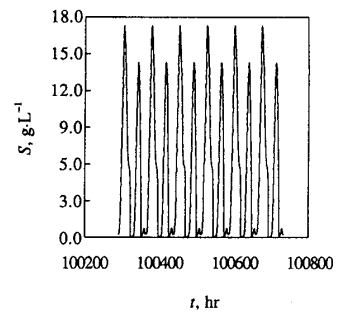


图 3(c) 周期 4 的时间历程  
Fig.3(c) Time course of period 4 ( $\omega=0.255$ )

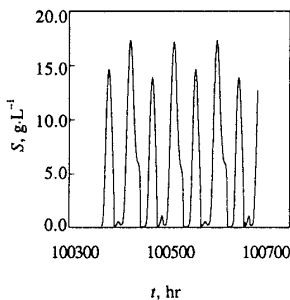


图 3(d) 周期 8 的时间历程  
Fig.3(d) Time course of period 8 ( $\omega=0.2555$ )

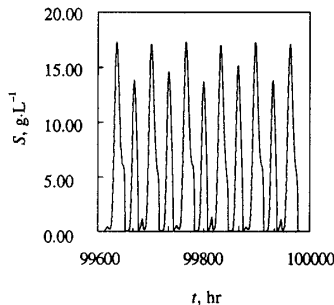


图 3(e) 周期 16 的时间历程  
Fig.3(e) Time course of period 16 ( $\omega=0.256$ )

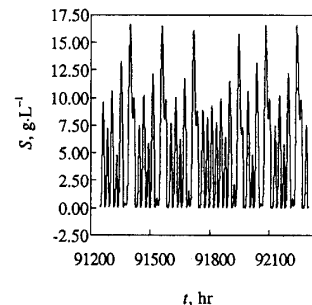


图 3(f) 混沌运动的时间历程  
Fig.3(f) Time course of chaos behavior ( $\omega=0.270$ )

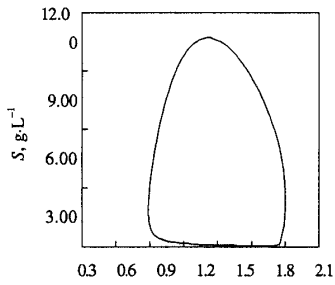


图 4(a) 周期 1 的 X-S 相图  
Fig.4(a) X-S phase-plane plot of period 1 ( $\omega=0.230$ )

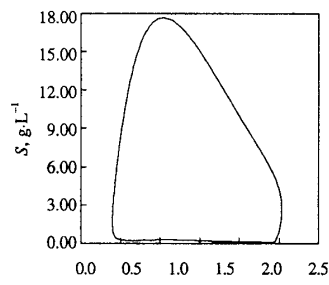


图 4(b) 周期 2 的 X-S 相图  
Fig.4(b) X-S phase-plane plot of period 2 ( $\omega=0.240$ )

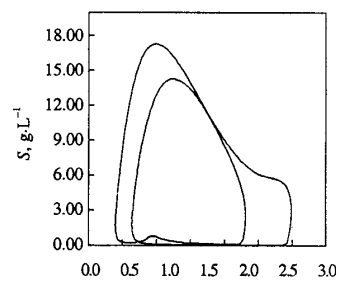


图 4(c) 周期 4 的 X-S 相图  
Fig.4(c) X-S phase-plane plot of period 4 ( $\omega=0.255$ )

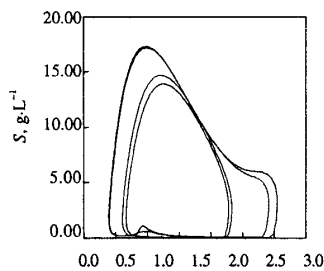


图 4(d) 周期 8 的 X-S 相图  
Fig.4(d) X-S phase-plane plot of period 8 ( $\omega=0.2555$ )

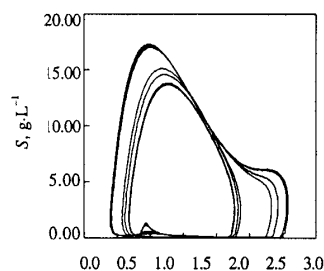


图 4(e) 周期 16 的 X-S 相图  
Fig.4(e) X-S phase-plane plot of period 16 ( $\omega=0.256$ )

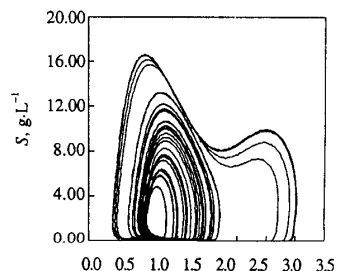


图 4(f) 混沌运动的 X-S 相图  
Fig.4(f) X-S phase-plane plot of chaos behavior ( $\omega=0.270$ )

#### 4.4 Poincare 截面

周期  $K$  的 Poincare 截面是  $K$  个点, 概周期运动的截面是一条简单闭曲线, 混沌运动的 Poincare 截面具有复杂结构, 是 Cantor 集型的曲线族。但当周期运动的周期很长时, Poincare 截面也可能由多个点组成, 因而仅从 Poincare 截面无法将混沌运动与其他运动区分开来。图 5 是混沌运动的 Poincare 截面, 可以看出该曲线具有 Cantor 集的特征。

#### 4.5 功率谱

对运动的时间历程进行 Fourier 变换, 求出它对应各频率的功率谱密度。设时间历程  $x_T(t)$  已知, 则:

$$x_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{其中: } a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$\text{于是可得功率谱密度为: } x(\omega) = \lim \frac{1}{T} \int x_T(t) e^{i\omega t} dt$$

通过  $x(\omega)$  可将混沌运动与周期运动及概周期运动区分开来。周期运动功率谱由频率成倍数关系的若干离散谱线组成, 概周期运动由若干频率不可约的离散谱线组成, 混沌运动的功率谱则是连续谱线, 但在有些情况下概周期运动离散功率谱相当密集, 与混沌运动很难区分开。故常需结合其他几种特征来确认混沌的出现。图 6 给出周期 1 至 16 及混沌运动的功率谱。

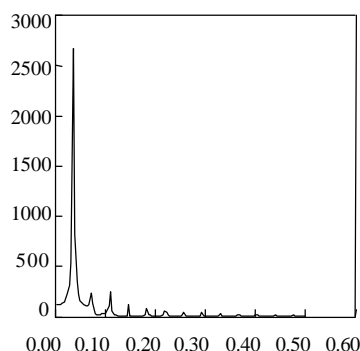


图 6(a) 周期 1 的功率谱图

Fig.6(a) Power spectrum of period 1 ( $\omega=0.230$ )

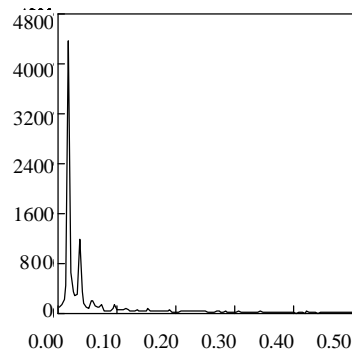


图 6(b) 周期 2 的功率谱图

Fig.6(b) Power spectrum of period 2 ( $\omega=0.240$ )

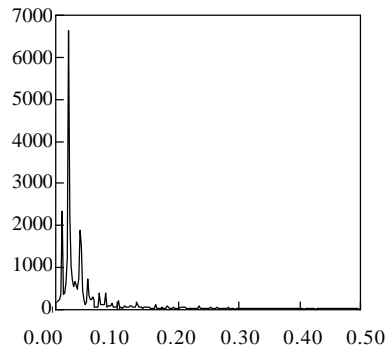


图 6(c) 周期 4 的功率谱图

Fig.6(c) Power spectrum of period 4 ( $\omega=0.255$ )

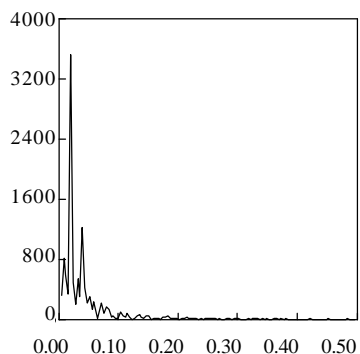


图 6(d) 周期 8 的功率谱图

Fig.6(d) Power spectrum of period 8 ( $\omega=0.2555$ )

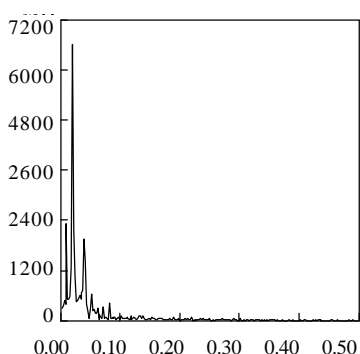


图 6(e) 周期 16 的功率谱图

Fig.6(e) Power spectrum of period 16 ( $\omega=0.256$ )

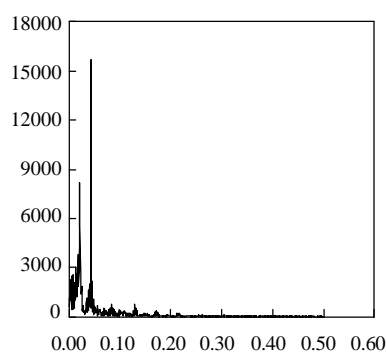


图 6(f) 混沌运动的功率谱图

Fig.6(f) Power spectrum of chaos behavior ( $\omega=0.270$ )

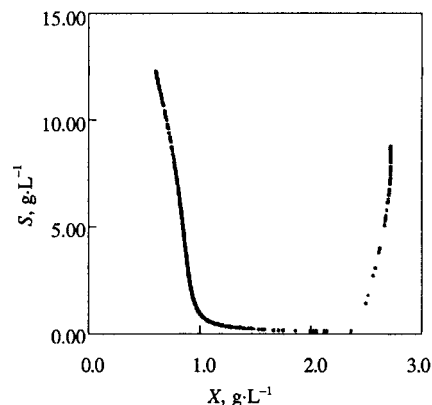


图 5 混沌运动的 Poincare 截面

Fig.5 Poincare map of chaos behavior ( $\omega=0.270$ )

#### 4.6 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数用来度量相空间中具有不同初始条件的两条相邻轨线随时间而指数式地吸引或分离的程度。一个正的 Lyapunov 指数说明存在一个奇怪吸引子，在吸引子中相近的两个点随时间的发展而很快地发生指数分离，因此，关于初始条件的信息快速消失，因为任何不确定性不管多么小，都会被放大到奇怪吸引子的尺度，即对初值具极端敏感的依赖性，关于这个系统的长期预测是不可能的。正的 Lyapunov 指数对应着混沌解，零值指数相应于周期解。

图 7 为该系统最大的 Lyapunov 指数随时间变化的值，可以清楚地看到它最终收敛到一个正值，即  $LE1 \approx 0.017$ ，因此可以断定在  $w=0.270$  的确出现了混沌。

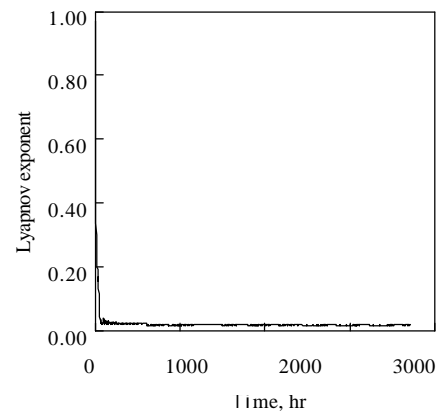


图 7 混沌运动的 Lyapunov 指数

Fig.7 Lyapunov exponent of chaos behavior ( $w=0.270$ )

#### 4.7 混沌中的多周期窗口

混沌运动具有宏观有序和微观无序的特征，在混沌运动中通常会有多周期窗口出现，如图 1 和图 2 所示。图 8 给出在  $\omega = 0.2601$  处周期 6 的时间历程、相图和功率谱图，“周期 3 意味着混沌”，而周期 6 则有可能是周期 3 倍周期分岔的结果，从这一点也可以看出，此系统确实出现了混沌。

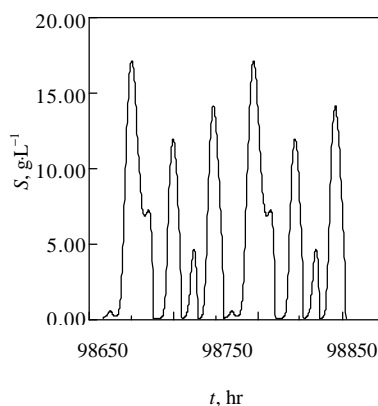


图 8(a) 周期 6 的时间历程

Fig.8(a) Time course of period 6  
( $w=0.2601$ )

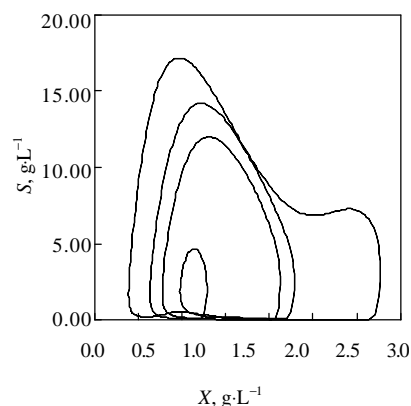


图 8(b) 周期 6 的 X-S 相图

Fig.8(b) X-S phase-plane plot of period 6  
( $w=0.2601$ )

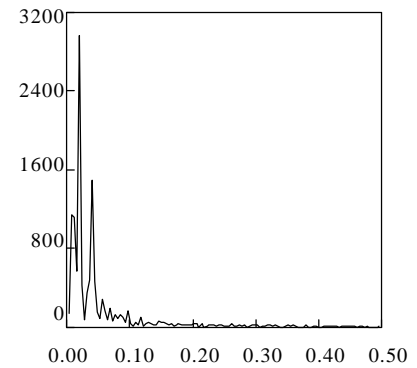


图 8(c) 周期 6 的功率谱图

Fig.8(c) Power spectrum of period 6  
( $w=0.2601$ )

## 5 结 论

(1) 在强迫激励下的乙醇连续发酵系统中存在有混沌的可能，尽管由于实验手段的限制未见有实验报道。当固定外加激励的幅值而改变其频率可以明显看出其经由倍周期分叉道路通往混沌的演化过程。

(2) 在  $w=0.2580$  时出现混沌，并在其后出现多种周期窗口，明显看出这种有序与无序的交替与统一。

(3) 混沌现象的出现为连续发酵过程的优化控制提出了新的问题，如何在生产中实现确定性控制有待进一步研究。同时，混沌中的多周期窗口与混沌出现以前的周期运动之间的差异以及选择合适的参数对系统进行控制也是以后研究的重点。

## 符号说明:

$a$	— 收率常数	$S_0$	— 反应器入口葡萄糖质量浓度, $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$
$A$	— 振幅	$X$	— 菌体浓度
$B$	— 收率常数, $\text{L}\cdot\text{g}^{-1}$	$X_m$	— 无量纲菌体抑制常数
$D$	— 稀释率, $\text{h}^{-1}$	$Y_{X/P}$	— 产物收率系数
$K_s$	— 饱和常数	$Y_{X/S}$	— 菌体收率系数
$P$	— 乙醇浓度	$m$	— 比生长速率, $\text{h}^{-1}$
$P_L$	— 乙醇抑制常数	$m_h$	— 最大比生长速率, $\text{h}^{-1}$
$S$	— 葡萄糖浓度, $\text{g}\cdot\text{L}^{-1}$	$w$	— 频率, $\text{h}^{-1}$

## 参考文献:

- [1] Gleick J. Chaos, Making a New Science(混沌: 开创新科学)[M]. Shanghai(上海): Shanghai Translation Publishing(上海译文出版社), 1991.
- [2] WANG Hong-li(王洪礼), GAO Wei-lou(高卫楼), YUAN Qi-peng(袁其朋), YAO Dong-ping(姚东平), HU Zong-ding(胡宗定), Study on oscillation behavior in biochemical reaction in CSTR (CSTR 中生化反应振荡行为研究)[J]. Chemical Reaction Engineering and Technology (化学反应工程与工艺), 1997, 13(13): 270-275.
- [3] Shaw R. Evaluating the efficiency of imagine process[J]. Naturforsch, 1981, 36a: 80-86.
- [4] Higgins R J. Fast Fouriertransform: An introduction with some minicomputer experiments[J]. American Journal of Physics, 1976, 44: 766-773.
- [5] Wolf A, Swift J B, Swinney H K. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. Physica, 16D, 1985, 285-317.

## The Chaotic Behavior of Saccharomyces Cerevisiae Culture System in CSTR

YUAN Qi-peng<sup>1</sup>, QIAN Zhong-ming<sup>2</sup>

(1. College of Chemical Engineering, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China;

2. Department of Chemistry Science and Applied Biology, Hong Kong Polytechnic University, HK, CHINA)

**Abstract:** The possibility of chaos in *S. cerevisiae* culture system in CSTR was investigated by means of numerical computation under fixing the amplitude  $A$  and changing the frequency  $w$  of forced impulse. The results show that only simple periodic solutions exist in the range of  $0 < w < 0.232885$ . Increasing  $w$  to 0.258, the attractor of period 2, 4, 8 and 16 is observed respectively. The further increase of  $w$ , the chaos occurs and the evolution process from periodic oscillation to chaos in the continuous culture system is also found. The results obtained in this paper are expected to provide basis for illustrating the more complex nonlinear phenomena and improving the productivity through inducing oscillation.

**Key words:** chaos; bifurcation; forced impulse