Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

USO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA EN LA INTERPRETACION DE RESPUESTAS A PROBLEMAS DE DIVISION-MEDIDA. UN ESTUDIO CON FUTUROS MAESTROS

Maximina deL Carmen Márquez Torres

Tesis Doctorales
UNIVERSIDAD de ALICANTE
www.eltallerdigital.com

Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Departamento de Innovación y Formación Didáctica

Facultad de Educación

USO DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA EN LA INTERPRETACION DE RESPUESTAS A PROBLEMAS DE DIVISION-MEDIDA. UN ESTUDIO CON FUTUROS MAESTROS

MAXIMINA DEL CARMEN MÁRQUEZ TORRES

Tesis presentada para aspirar al grado de

DOCTORA POR LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

PROGRAMA DE DOCTORADO EN INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

Dirigida por:

MARÍA LUZ CALLEJO DE LA VEGA y CENEIDA FERNÁNDEZ VERDÚ

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero dar gracias a Dios por permitirme llegar al final de una de mis metas.

Gracias a mis tutoras: Dra. Mª Luz Callejo y la Dra. Ceneida Fernández por ayudarme en mis inicios en el doctorado y brindarme apoyo a lo largo del camino y por el tiempo que cada una dedicó, los comentarios y contribuciones científicas que han hecho posible la finalización de este trabajo.

Gracias a la Dra. Julia Valls, por todos sus comentarios para mejorar este trabajo. De igual forma al Dr. Salvador Llinares, por su apoyo a lo largo de mis estudios y por aceptarme en el programa de Doctorado.

También quiero dar las gracias a Mg Juan Luis Prieto González, por sus consejos y apoyo, por su amistad, por animarme a terminar la tesis. De igual manera agradecer el apoyo incondicional de Lic. Pedro Infante, por sus enseñanzas, por su amistad.

Gracias a la Fundación Gran Mariscal de Ayacucho, por otorgarme una beca que me permitió realizar mis estudios de Doctorado.

De igual forma quiero agradecer a Asier Bengoa, por hacer posible que finalizara mis estudios de Doctorado.

Para finalizar, quiero agradecer a Deiron Labarca, su gran apoyo, dedicación y paciencia, a mi Madre y hermanos por animarme siempre, a seguir adelante con mis estudios.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

La caracterización del conocimiento y la práctica del profesor de matemáticas es una cuestión actual en el ámbito de la educación matemática (Ponte y Chapman, 2006). El conocimiento y la práctica del profesor son constructos dependientes que ponen de manifiesto la influencia del contexto en la caracterización del conocimiento profesional del profesor y, al mismo tiempo, cómo el uso del conocimiento determina la práctica. Una idea en este ámbito es que el conocimiento profesional del profesor de matemáticas viene caracterizado por cómo se aprende y por cómo se usa en los contextos de la práctica de enseñar matemáticas. Esta idea supone que los contextos en los que se adquiere y en los que se usa el conocimiento necesario para enseñar determinan algunas características de la naturaleza del conocimiento profesional estableciéndose una relación dialéctica entre el conocimiento de los estudiantes para profesor y la práctica (Llinares, 2013). En este sentido y desde la perspectiva del aprendizaje del estudiante para maestro, la identificación de las tareas que organizan la práctica profesional del maestro es relevante por dos cosas. Primero, por el reconocimiento de la influencia del contexto en la manera en la que se usa el conocimiento; y segundo, ya que conlleva reconocer las tareas en las que el profesor debe ser competente. Esta idea subraya la relación dialéctica entre el conocimiento teórico y la práctica y genera la idea del "uso del conocimiento en contexto" (Llinares, 2013), que deriva en la noción de competencia docente del profesor de matemáticas.

El conocimiento del profesor desempeña diferentes roles en la resolución de las tareas que articulan su práctica profesional y en particular en lo relativo a la enseñanza de las matemáticas. En primer lugar, el conocimiento de matemáticas para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007) le permite identificar lo que puede ser relevante de las situaciones de enseñanza de las matemáticas. Y en segundo lugar, le permite apoyar su interpretación de los hechos y evidencias identificados como relevantes. En este sentido, el papel que desempeña el conocimiento de matemáticas para la enseñanza del profesor en la resolución de las tareas profesionales define su competencia docente. En particular, la competencia docente *mirar de una manera profesional* permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas integrando tres destrezas: identificar los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; usar el conocimiento para razonar sobre dichos aspectos, y realizar conexiones entre aspectos específicos de las situaciones de enseñanza-aprendizaje y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje (Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason, 2002; Sherin, Jacobs y Philipp, 2010) para tomar decisiones de acción. Por tanto esta competencia se centra en el uso del conocimiento para la enseñanza.

El desarrollo de la competencia docente mirar de una manera profesional es uno de los objetivos de los programas de formación de profesores y un tema de estudio relevante en las investigaciones centradas sobre el aprendizaje del profesor de matemáticas en los últimos años. Un foco de atención ha sido el pensamiento matemático de los estudiantes (Callejo y Zapatera, 2016; Fernández, Llinares y Valls, 2012; Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016; Fortuny y Rodríguez, 2012;

Magiera, Van den Kieboom y Moyer, 2013; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015; Schack et al., 2013; van Es y Sherin, 2002).

Los trabajos previos realizados sobre la competencia mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes se han centrado en dominios matemáticos específicos: Fernández et al. (2012) en el razonamiento proporcional, Schack et al. (2013) en la numeración temprana, Son (2013) con los conceptos de razón y proporción, Magiera et al. (2013) en el pensamiento algebraico, Sánchez-Matamoros et al., (2015) en el concepto de derivada y Callejo y Zapatera (2016) en la generalización lineal. Estos estudios previos indican que esta competencia no es fácil de desarrollar pero animan a pensar que sí es posible apoyar su desarrollo en los programas de formación inicial.

En esta tesis se indaga sobre el uso que hacen estudiantes para maestro del conocimiento matemático para enseñar, cuando interpretan respuestas de estudiantes de Educación Primaria en el contexto de las estructuras multiplicativas, y en particular, en problemas de división-medida. Ello permitirá obtener información para potenciar en los programas de formación inicial de profesores el desarrollo de la competencia mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes cuando éstos resuelven problemas de estructura multiplicativa.

A continuación describimos el contenido de cada capítulo y los anexos.

En el primer capítulo se presenta la problemática de la investigación. En primer lugar, se hace una revisión de las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas que se han centrado en la mirada profesional, y más específicamente en mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. Posteriormente se presenta la problemática en relación al conocimiento del profesor sobre la división con números naturales y con fracciones, en particular sobre los problemas de división-medida. Esta revisión de la literatura pone de manifiesto la necesidad de realizar más investigaciones sobre el uso del conocimiento matemático para enseñar por parte de los estudiantes para maestro cuando interpretan diferentes respuestas de alumnos de primaria a problemas de división-medida, tanto entre números naturales como entre fracciones.

En el segundo capítulo se exponen las referencias teóricas en las que se basa esta investigación. Dichas referencias se sitúan en la intersección de dos líneas de investigación: la estructura multiplicativa y el conocimiento matemático para la enseñanza y la competencia una mirada profesional. En cuanto a la estructura multiplicativa se presentan los problemas de estructura multiplicativa desde la perspectiva de Vergnaud y otros enfoques, centrándonos en los problemas de división medida. Por otro lado se describen las estrategias utilizadas y los errores más comunes por los estudiantes de Educación Primaria cuando resuelven este tipo de problemas. En relación al conocimiento matemático para la enseñanza se describen los constructos teóricos relativos al MKT con el uso de este conocimiento en la práctica docente (mirada profesional) y definiremos el concepto de mirada profesional desde la perspectiva de la interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes.

En el tercer capítulo se describe el diseño de la investigación atendiendo, en primer lugar, a los participantes y su contexto. A continuación, se presentan los instrumentos de recogida de datos explicando detalladamente las características de los cuestionarios. El Cuestionario 1 centrado en la resolución de problemas de división-medida por parte de los estudiantes para maestro y el Cuestionario 2 centrado en la interpretación de respuestas de alumnos de Educación Primaria a estos problemas. Por último, se exponen las tres fases del análisis de los datos: (i) en la primera se hizo un estudio del comportamiento global del grupo utilizando las respuestas dadas por los estudiantes para maestro a los cuestionarios 1 y 2; (ii) en la segunda se identificaron tres perfiles de los estudiantes para maestro sobre las respuestas al cuestionario 2 y (iii) en la tercera se hizo un estudio de casos de los estudiantes para maestro pertenecientes a los perfiles con mayor número de estudiantes.

En el cuarto capítulo se presentan los resultados obtenidos. En primer lugar se presentan los resultados correspondientes a la resolución de los problemas del Cuestionario 1 por los estudiantes para maestro, poniendo de manifiesto la corrección de las respuestas, los procedimientos utilizados y los errores cometidos por los estudiantes para maestro al resolver los tres problemas propuestos en el Cuestionario 1. En segundo lugar, se presentan los resultados sobre las relaciones entre las respuestas dadas al Cuestionario 1 por los estudiantes para maestro y la puntuación dada por estos a las respuestas de los alumnos de primaria del Cuestionario 2. En tercer lugar, se muestran perfiles de comportamiento de los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas y la interpretación de las respuestas de los alumnos de Educación Primaria a estos problemas. Estos perfiles nos dan características de cómo los estudiantes para maestro interpretan (puntúan y justifican) las respuestas de los estudiantes de Educación Primaria. Ejemplos de estos perfiles son mostrados en la última sección, a través de un estudio de casos.

En el quinto y último capítulo se muestran las conclusiones y la discusión sobre los resultados obtenidos dando respuesta a las preguntas de investigación. En primer lugar se discuten los resultados en relación al conocimiento de contenido matemático de los estudiantes para maestro: niveles de éxito globales en la resolución de los problemas de división-medida, procedimientos utilizados y errores. En segundo lugar, se muestran las características obtenidas a través de los resultados de cómo los estudiantes para maestro interpretan las respuestas de estudiantes de Educación Primaria a problemas de división-medida y su relación con los niveles de éxito obtenidos en la resolución de los problemas por parte de los estudiantes para maestro. Estos resultados aportan información sobre la relación entre el conocimiento especializado de contenido matemático del estudiantes para maestro y la tarea profesional de interpretar respuestas de estudiantes de Educación Primaria (desarrollo de la competencia una mirada profesional). Para concluir se exponen las implicaciones de este estudio en las formación de maestros y algunas implicaciones para futuras investigaciones.

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 1. PROBLEMÁTICA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos la problemática de investigación en dos secciones. En la primera hacemos una revisión de las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas que se han centrado en la mirada profesional, y más específicamente en mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. En la segunda se presenta la problemática en relación al conocimiento del profesor sobre la división con números naturales y con fracciones, en particular sobre la división-medida. Esta revisión de la literatura pone de manifiesto la necesidad de realizar más investigaciones sobre el uso del conocimiento matemático para enseñar por parte de los estudiantes para maestro cuando interpretan diferentes respuestas de alumnos de primaria a problemas de división-medida, tanto entre números naturales como entre fracciones.

1.1. ESTUDIOS SOBRE EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Parte de las investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas se han centrado en cómo los profesores adquieren el conocimiento necesario para enseñar matemáticas (Ball, 1990; Borko et al., 1992; Escudero y Sánchez, 2007; Llinares, 1998; Llinares y Krainer, 2006) y en la identificación y relación entre distintos tipos de conocimientos relevantes para enseñar (Shulman, 1989). Shulman identificó tres tipos de conocimientos en relación con una materia específica: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico y conocimiento curricular. El primero hace referencia a la comprensión del tema propio de un especialista; el segundo tipo de conocimiento se refiere a aspectos relacionados con el aprendizaje y al enseñanza de una materia; el tercero, está relacionado con la forma de organizar el conocimiento para la enseñanza en programaciones, textos, libros, etc. A partir de los trabajos de Shulman y de otros más específicos relativos a la enseñanza de las matemáticas, se ha desarrollado una teoría acerca de las matemáticas que los profesores necesitan conocer: *conocimiento matemático para la enseñanza*, que incluye, el *conocimiento de contenido pedagógico* y el *conocimiento de la materia* (Hill et al., 2007; Delaney, Ball, Hill, Schilling y Zopf, 2008).

La identificación del conocimiento matemático para la enseñanza emerge de estudiar las tareas de tipo profesional del profesor de matemáticas (Llinares, 2009):

(a) organizar el contenido matemático para enseñar, es decir conocer los contenidos matemáticos como objeto de enseñanza-aprendizaje,

(b) gestionar el contenido matemático en el aula, lo que implica conocer e identificar las características que puede adoptar, conocer e identificar características del discurso matemático en el aula y su relación con el aprendizaje matemático, conocer e identificar características de la gestión de debates como instrumentos de aprendizaje matemático, etc., para apoyar el progreso de los alumnos a lo largo de la realización de los problemas matemáticos, y

(c) analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos, lo que implica conocer el conocimiento de didáctica de la matemática sobre teorías

> del aprendizaje y construcción del conocimiento matemático, utilizar los conocimientos de didáctica de la matemática sobre el aprendizaje matemático para diagnosticar y dotar de significado a las producciones de los alumnos identificando posibles causas que las justifiquen.

En este sentido, el papel que desempeña el conocimiento matemático para la enseñanza del profesor en la resolución de las tareas profesionales define su competencia docente. En particular, la competencia docente *mirar de una manera profesional* las situaciones de enseñanza y aprendizaje.

1.1.1. Conocimiento profesional y competencia mirada profesional

La mirada profesional diferencia a un profesor de matemáticas de alguien que no lo es, y viene caracterizada por el modo y el contexto de uso del conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas en determinadas situaciones (Eraut, 1996). La idea es que cuando alguien llega a formar parte de un grupo profesional (como ser maestro o profesor de matemáticas) llega a ser diestro en mirar de manera profesional un cierto conjunto de fenómenos de una manera particular (Sherin, 2001), que puede poner de manifiesto modos diferentes de uso del conocimiento (replicar, aplicar, interpretar y asociar) (Eraut, 1996).

Recientemente, la caracterización y análisis del desarrollo de esta competencia docente ha empezado a ser foco de atención en el ámbito de la Educación Matemática definiéndose cuestiones relativas a su conceptualización y a su desarrollo en los programas de formación inicial y continua de maestros y profesores de matemáticas.

En relación a la conceptualización de esta competencia, Mason postuló que mirar profesionalmente implica "un movimiento o un cambio en la atención" (Mason, 2011, p. 45). Aunque esta competencia ha sido conceptualizada desde diferentes perspectivas (Mason, 2002; van Es y Sherin, 2002), la idea común en todas ellas es que mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas implica trasladarse desde la descripción de acciones del profesor a las conceptualizaciones de los estudiantes y desde comentarios evaluativos a comentarios interpretativos basados en evidencias (Bartell, Webel, Bowen y Dyson, 2013; van Es, 2011). Por tanto, esta competencia está vinculada a la capacidad de identificar e interpretar aspectos de la enseñanza de las matemáticas para fundamentar las decisiones de acción como maestros.

Desde estas perspectivas se enfatiza la importancia de los procesos de identificación de los aspectos relevantes en las situaciones de enseñanza-aprendizaje y la interpretación de los mismos basándose en unas referencias teóricas previas que avalen las decisiones de acción a tomar. Esta conceptualización de la competencia mirar profesionalmente pone el acento en el hecho de que la interpretación es un instrumento para comprender cómo los docentes usan su conocimiento en la práctica de sus labores profesionales (Llinares, 2013).

A lo largo de la última década, han sido muchas las investigaciones que han tratado de identificar diferentes contextos para ayudar a los profesores a desarrollar la competencia una mirada profesional. Van Es y Sherin (2002) y Sherin y van Es (2005) mostraron cómo profesores en servicio y docentes en su período de prácticas desarrollaban nuevas formas de identificar e interpretar interacciones de aula a través del visionado de grabaciones de interacciones que ocurrían en sus propias aulas. En este contexto los profesores han mejorado su mirada profesional desplazando su foco de atención desde las descripciones generales de las estrategias a la comprensión de los estudiantes, y desde los comentarios evaluativos a las interpretaciones basadas en evidencias. En la misma dirección Coles (2013) propuso trabajar con videoclips. Los resultados de sus investigaciones muestran que cuando los profesores habían tenido la posibilidad de compartir la reconstrucción de las palabras exactas o acciones y su cronología (*accounts of*) tal y como aparecía en el videoclip que habían observado, esto les permitía realizar interpretaciones de lo que había ocurrido aportando evidencias (*accounts for*) y evitando comentarios basados solo en juicios.

Santagata, Zanonni y Stigler (2007) muestran un marco de referencia para el análisis de lecciones de clase en el que los futuros profesores deben de identificar los objetivos de aprendizaje, el aprendizaje del estudiante en relación a estos objetivos y proporcionar estrategias de enseñanza alternativas para conseguir los objetivos. Este marco de referencia ayudó a los futuros profesores a conseguir experiencia en observar y razonar sobre los eventos de la clase. Lundeberg, Cooper, Fritzen, y Terpstra (2008) mostraron que la reflexión fundamentada en vídeos sobre su propia enseñanza ayudó a los estudiantes para maestro a proporcionar comentarios más específicos sobre la enseñanza y a centrarse más en los estudiantes en lugar de en ellos mismos. Star y Strickland (2008) indicaron que después de un módulo de enseñanza cuyo objetivo era desarrollar la habilidad de observar, los futuros profesores mejoraron su competencia de mirar de manera profesional las características del entorno de aprendizaje, el contenido matemático de la lección y la comunicación entre el profesor y el estudiante durante la lección. Scherrer y Stein (2002) señalaron mejoras en la competencia de mirar profesionalmente las interacciones entre los estudiantes y profesores cuando analizaban discusiones de la clase.

Estos estudios señalan que esta competencia se puede trabajar en los programas de formación inicial, sin embargo, su desarrollo presenta dificultades en los estudiantes para maestro y profesores de matemáticas. Para indagar de manera más específica en su desarrollo, ha surgido una línea de investigación que trata de caracterizar la competencia mirar de manera profesional el pensamiento matemáticos de los estudiantes, considerando lo específico del conocimiento de Didáctica de la Matemática en determinados ámbitos curriculares.

1.1.2. La competencia mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes

Esta competencia ha sido conceptualizada a través de la interrelación de tres destrezas: identificar los elementos matemáticos importantes en las estrategias de los estudiantes; interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y decidir qué tareas proponer a continuación que permitan el progreso conceptual del estudiante (Jacobs et al., 2010). La idea que subyace es que la actividad de identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes es un proceso de *reconstrucción e inferencia* de la comprensión a partir de la interpretación de lo que el estudiante escribe, dice, o hace. Es decir, cómo dar sentido a las producciones de los estudiantes yendo más allá de indicar solo lo que es erróneo en su respuesta. Por tanto, esta competencia permite al maestro ser diestro en la tarea profesional de analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos, utilizando los conocimientos de Didáctica de la Matemática sobre el aprendizaje matemático para diagnosticar y dotar de significado a las producciones de los alumnos.

Las investigaciones previas relacionadas con la conceptualización y desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes se han centrado en obtener dos tipos de resultados:

- Contextos y herramientas que pueden ayudar a estudiantes para maestro (o profesor de matemáticas) a desarrollar esta competencia.
- Características de cómo los estudiantes para maestro o estudiantes para profesor de matemáticas empiezan a desarrollar las destrezas de identificar, interpretar y decidir que conceptualizan la competencia, en distintos dominios matemáticos.

1.1.2.1. *Contextos y herramientas que pueden ayudar a estudiantes para maestro a desarrollar la competencia*

Estudios previos han mostrado que el uso de video-clips en los programas de formación propicia cambios en lo que los maestros son capaces de identificar, cambiando su foco de discusión desde la evaluación hasta interpretaciones basadas en evidencias (Coles, 2013; van Es y Sherin, 2002). También se ha mostrado que el uso de debates virtuales permite a los estudiantes para maestro trasladarse desde la descripción de aspectos generales de las estrategias usadas por los estudiantes a detallar evidencias relevantes de la manera en la que los estudiantes estaban comprendiendo (Fernández et al., 2012).

Las reuniones presenciales entre maestros en ejercicio, donde se discutía sobre los trabajos escritos y orales del alumnado y sobre las interacciones que se producían en el aula, también ayudaron a los maestros a interpretar las ideas matemáticas de sus estudiantes y a usar recursos para decidir hacia dónde dirigir el siguiente paso para que los alumnos siguieran progresando en su aprendizaje (Coles, Fernández y Brown, 2013; Kazemi y Franke, 2004). Del mismo modo, Crespo (2000) realizó una experiencia con estudiantes para maestro que realizaban intercambio de cartas con estudiantes de primaria en las que se les planteaba un problema y se compartían preguntas, opiniones e ideas sobre sus experiencias. Los resultados muestran que los estudiantes para maestro modificaron la manera de focalizar sus interpretaciones desde la corrección, a la interpretación con significado de las respuestas de los estudiantes. Steinberg, Empson y Carpenter (2004), en un estudio de casos con una maestra en servicio, mostraron que el hecho de mantener conversaciones sobre el pensamiento matemático de sus estudiantes durante la instrucción, le sirvió como andamiaje para investigar sobre el pensamiento de su alumnado y para percibir aspectos de este que anteriormente no había sido capaz de percibir propiciando un cambio en su manera de afrontar las prácticas de enseñanza en el aula.

El uso de respuestas de estudiantes a grupos de problemas ha mostrado también su potencial para desarrollar esta competencia. Biza, Nardi y Zachariades (2007) realizaron una investigación con docentes en servicio en la que les presentaban una tarea matemática de la cuál debían explicar los objetivos matemáticos, examinar e identificar una respuesta errónea supuestamente proporcionada por los estudiantes y describir en un texto escrito, una respuesta (*feedback*) a esta tarea. Tras los resultados obtenidos con los participantes, los autores, sugirieron que este tipo de tareas puede ser una buena herramienta para poner a los estudiantes para maestro en situación y proporcionales oportunidades de enfrentarse a una práctica real. Distintas investigaciones (Buforn y Fernández, 2014; Fernández, Llinares y Valls, 2013; Sánchez-Matamoros et al., 2015; Callejo y Zapatera, 2016) han mostrado que el uso de una tarea profesional donde se le pide a los futuros maestros o futuros profesores de matemáticas: (i) identificar los elementos matemáticos implicados en varios problemas en relación a un determinado contenido matemático, (ii) interpretar distintas respuestas de estudiantes (que muestran distintas características de la comprensión del contenido matemático) que han resuelto los diferentes problemas aportando evidencias de su comprensión en relación al contenido matemático, y (iii) proponer un nuevo problema que ayude al estudiante a progresar o consolidar su comprensión, les ayudó a trasladarse desde la descripción de aspectos generales de las estrategias usadas por los estudiantes, a detallar evidencias relevantes de la manera en la que los estudiantes estaban comprendiendo apoyando sus decisiones de acción en aspectos de la comprensión.

Por último, Ivars y Fernández (2015) e Ivars, Fernández y Llinares (2015), han mostrado que las narrativas escritas por los estudiantes para maestro, entendidas como historias en las que el autor relata, de manera secuencial, una serie de acontecimientos que cobran sentido para él, a través de una lógica interna, durante su período de prácticas no solo les ayudó a teorizar la práctica sino que les ayudó a estructurar su mirada sobre los sucesos específicos de aula y por tanto desarrollar la competencia mirar profesionalmente.

1.1.2.2. *Características de cómo los estudiantes para maestro empiezan a desarrollar las destrezas de la competencia (identificar, interpretar y decidir) en distintos dominios matemáticos*

Por otra parte, otros estudios se han centrado en caracterizar cómo los estudiantes para maestro desarrollan las destrezas de identificar, interpretar y decidir en diferentes dominios matemáticos. Fernández et al. (2012) en el razonamiento proporcional, Schack et al. (2013) en la numeración temprana, Son (2013) con los conceptos de razón y proporción, Magiera et al. (2013) en el pensamiento algebraico, Sánchez-Matamoros et al. (2015) en el concepto de derivada, Llinares et al. (2016) en la clasificación de cuadriláteros y Callejo y Zapatera (2016) en la generalización lineal.

Así, Magiera et al. (2013) mostraron que los estudiantes para maestro (en el contexto de entrevistas individuales) disponían de una limitada habilidad para reconocer el potencial de las tareas algebraicas que permitían potenciar en los estudiantes un pensamiento algebraico reconociendo solo determinadas características de las tareas, y de una limitada habilidad para reconocer e interpretar el pensamiento algebraico que demostraban los estudiantes. Fernández et al. (2013) caracterizaron la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en estudiantes para maestro de educación primaria en el dominio matemático del razonamiento proporcional. Este estudio proporciona un marco de referencia que indica un posible camino de desarrollo de esta competencia en cuatro niveles para este dominio matemático. En este camino de desarrollo de la competencia, la identificación de la discriminación entre problemas proporcionales y no proporcionales era clave para que los estudiantes para maestro interpretaran el desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes. Son (2013) examinó las interpretaciones dadas por estudiantes para maestros a respuestas de estudiantes que mostraban errores cuando averiguaban uno de los lados en rectángulos similares. Los resultados de este estudio revelaron que la mayoría de estudiantes para maestro identificaron errores de aspectos procedimentales en lugar de errores conceptuales, proporcionando acciones para guiar al estudiante a adquirir un conocimiento procedimental.

Schack et al. (2013) mostraron que después de que los estudiantes para maestro participaran en un módulo de enseñanza que progresivamente desarrollaba las tres destrezas interrelacionadas de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en relación a la numeración temprana (identificar, interpretar y decidir), éstos mejoraron en las tres destrezas. En Sánchez-Matamoros et al. (2015), después de que los futuros profesores de educación secundaria participaran en un módulo de enseñanza, diseñado para desarrollar las tres destrezas en el dominio específico de la derivada, también mejoraron en sus destrezas. Este estudio muestra que la mejora estaba ligada a cómo los futuros profesores iban entendiendo los elementos matemáticos que usaban los estudiantes de secundaria en los problemas de derivada. Llinares et al. (2016) mostraron que para que los estudiantes para profesor de secundaria pudieran interpretar las distintas características que mostraban respuestas de estudiantes a diferentes problemas de clasificación de cuadriláteros, era necesario que identificaran elementos matemáticos importantes de las clasificaciones como las relaciones de inclusión. Callejo y Zapatera (2016) identificaron en estudiantes para maestro de primaria distintos niveles en la descripción e interpretación de las respuestas de alumnos de primaria a problemas de generalización lineal; estos niveles están ligados a la identificación de los elementos matemáticos y su utilización para interpretar las respuestas de los estudiantes.

Una característica común obtenida en estos estudios es que es necesario que los estudiantes para maestro identifiquen los elementos matemáticos importantes en la resolución de los problemas (conocimiento de matemáticas) para poder interpretar la comprensión de los estudiantes e identificar distintas características de la comprensión (conocimiento del aprendizaje de los estudiantes). Esta manera de entender la competencia docente mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes considera que la identificación del profesor de los elementos matemáticos que son relevantes en el problema que deben resolver sus alumnos y en la resolución que estos pueden realizar, le permite estar en mejores condiciones para interpretar su aprendizaje y para tomar las decisiones instruccionales pertinentes.

Los resultados de las investigaciones previas ponen de manifiesto el desafío al que se enfrentan los formadores de profesores de matemáticas al tener que crear entornos de aprendizaje en los programas de formación, que permitan el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes, con el objetivo de superar las concepciones sobre el aprendizaje del tipo *todo o nada* (en el sentido de que una respuesta solo puede ser correcta o incorrecta) y poder incorporar el conocimiento sobre el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de primaria (identificando diferentes características de la comprensión) en sus interpretaciones sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Las dificultades encontradas hacen necesarias más investigaciones sobre la manera en la que interviene el conocimiento de matemáticas del estudiante para maestro en las destrezas identificadas y cómo este conocimiento se articula al interpretar las respuestas de los estudiantes. Esta situación genera cuestiones en relación a la manera en la que se integra el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el aprendizaje de los conceptos matemáticos específicos cuando los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes.

Nuestro estudio se enmarca en esta línea de investigación y en particular trata de indagar sobre el uso del conocimiento de matemáticas para enseñar por parte de los estudiantes para maestro cuando interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de primaria en relación a los problemas de estructura multiplicativa. Concretamente nos centraremos en los problemas de división-medida. En el siguiente punto se hace una revisión sobre estudios centrados en el conocimiento del profesor en relación a este tipo de problemas.

1.2. CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR SOBRE LA DIVISIÓN

Diversas investigaciones han revelado que el conocimiento necesario para la enseñanza, de los estudiantes para maestro, en relación con la división presenta deficiencias y lagunas importantes tanto respecto al conocimiento del contenido como al conocimiento pedagógico del contenido o al uso de dicho conocimiento en las tareas profesionales (Ball, 1990; Olanoff, Lo y Tobias, 2014).

Los estudios sobre el conocimiento del contenido matemático sobre la división muestran una comprensión limitada de los estudiantes para profesor en diferentes contextos. Estas investigaciones han propuesto a los participantes unas veces tareas en contextos puramente matemáticos (Kaasila, Pehkonen y Hellinen, 2010) y otras veces en contextos reales (Verschaffel, De Corte y Borghart, 1997). En algunas de ellas se ha pedido a los estudiantes para maestro enunciar problemas que se resuelvan con una operación de división (Castro y Castro, 1996; Toluk-Uçar, 2009). Estos estudios previos se han centrado en el conocimiento del algoritmo de la división y su significado, de las propiedades de la operación, la interpretación del resto en problemas de división-medida, el conocimiento tanto de los niveles de estructura de unidades en problemas de división de fracciones como de las dificultades y concepciones erróneas de los estudiantes.

Los trabajos que se han centrado en el significado de la división para los estudiantes para maestro (Tirosh y Graeber, 1990) han mostrado que una de las principales razones de sus lagunas y deficiencias, es que estos tienen un modelo primitivo de la división identificándola como reparto (Fischbein, 1987), ya que es el modelo que se usa habitualmente para introducir esta operación. En este modelo se reparte una cantidad de objetos en varios grupos y se pregunta cuántos objetos hay en cada grupo; por ejemplo, *Tengo 12 manzanas y quiero repartirlas equitativamente entre 4 amigos, ¿cuántas manzanas puedo darle a cada uno?* Se ha constatado que cuando una operación se introduce con un modelo en un contexto específico como el de los números naturales, este modelo permanece y se transfiere a otras situaciones; esto quiere decir que los estudiantes extienden las propiedades de la división en contextos con números naturales a contextos con fracciones. Ello genera concepciones erróneas sobre la división como pensar que el dividendo debe ser mayor o igual que el divisor, o que el cociente debe ser menor que el dividendo, lo que no es cierto en el conjunto de los racionales. Por otra parte, el modelo primitivo de la división como reparto dificulta la comprensión del significado de la división de fracciones que exige entender la división como medida en situaciones del tipo *Tengo 2 pizzas y quiero dar a cada niño 1/3 de pizza, ¿a cuántos niños puedo dar?*

Ball (1990) ha puesto de relieve en sus trabajos que el conocimiento de los profesores en formación sobre la división, tanto matemático como pedagógico, es insuficiente y está más basado en la memorización de algoritmos que en la comprensión conceptual. En una investigación propuso a profesores de primaria y secundaria tres tipos de tareas: división con fracciones, división por cero y división con expresiones algebraicas; se pedía a los estudiantes para profesor que las resolvieran, justificaran el procedimiento empleado y generaran explicaciones y representaciones adecuadas para los alumnos. Aunque algunos de los estudiantes para profesor fueron capaces de dar respuestas correctas, otros no lo fueron, y pocos lograron generar explicaciones acerca del significado de lo que estaban haciendo. En esta investigación, según la autora

> la mayoría de los estudiantes para maestro fueron hábiles para considerar la división en términos de división partitiva solamente: formando un cierto número de partes iguales. Este modelo de división se relaciona con menor facilidad con la división con fracciones que conllevan a la interpretación de la división como medida (p. 140).

Como ya se ha indicado, el hecho de que los estudiantes para maestro se limiten solo a la división partitiva con números naturales, puede explicar algunas dificultades que plantea la comprensión de la división con fracciones. Los resultados mostraron que el conocimiento matemático que los estudiantes para profesor de primaria o de secundaria habían aprendido en su etapa preuniversitaria era insuficiente para proporcionar el conocimiento necesario para enseñar matemáticas, lo que implica la necesidad de conocer más acerca de cómo los profesores trasforman su comprensión de las matemáticas y profundizan en ella**.**

Los trabajos de Simon (1993) sobre el conocimiento de la división que tienen estudiantes para profesor dieron como resultado, por un lado, que el conocimiento procedimental de los estudiantes para maestro era generalmente adecuado, que poseían conocimientos sobre algoritmos y simbolización, pero que estos conocimientos no estaban relacionados entre sí; por otro lado, los estudiantes para maestro tenían lagunas importantes en el conocimiento conceptual. En particular, los estudiantes para maestro tuvieron dificultad para interpretar el resto o la parte fraccionaria del cociente.

Kaasila et al. (2010) propusieron a un grupo de estudiantes para maestro de Finlandia (N=269) la siguiente tarea. "*Sabemos que 498 : 6 = 83, ¿cómo hallarías a partir de esta igualdad (sin usar el algoritmo de la división) el valor del cociente de la división 491 : 6*". Con ella querían medir la comprensión conceptual, la capacidad de razonamiento y la fluidez en el uso de procedimientos. Los resultados mostraron que la división no era suficientemente comprendida, pues sólo el 45% de los estudiantes para maestro dieron una respuesta correcta, y muchos de ellos tuvieron dificultad para calcular el resto y para comprender la relación entre diferentes operaciones. El estudio de Campbell (2002) realizado con estudiantes para maestro se centró en la comprensión de conceptos, procedimientos y términos relacionados con el algoritmo de división que implicaban el uso del teorema de la división, es decir, la igualdad que relaciona los términos de la división. A los estudiantes para maestro se les propusieron 4 tareas en las que se les pedía calcular el cociente y el resto; en ellas se presentaba el dividendo como un solo número o descompuesto de distintas formas (por ejemplo, $3^3 \times 5^2 \times 7$; $6 \times 147 + 1$); en la quinta tarea se les pedía relacionar la multiplicación con la división. Los resultados mostraron que en la resolución de estas tareas los estudiantes para maestro tuvieron dificultad por falta de una adecuada comprensión de los conceptos básicos relacionados con el teorema de la división, pues no fueron capaces de aplicar a nuevas situaciones conocimientos con los que estaban familiarizados: significados de los términos de la división, expresiones y operaciones. Ello llevó a los participantes en muchos casos a utilizar el algoritmo de la división para determinar el resto, en lugar de usar el teorema de la división que relaciona los términos de la división.

Un caso particular de esta línea de investigación sobre los problemas de división es la resolución de problemas de división-medida, en que hay que hacer grupos iguales y se busca cuántos grupos se pueden hacer. Cuando estos problemas se proponen en contextos reales es importante interpretar el significado del resto, lo que requiere en algunos casos añadir una unidad al cociente. Castro y Castro (1996) propusieron a estudiantes para maestro que redactaran el enunciado de un problema que se resolviera a través de las igualdades 15 x 5 = [¿] y 72 : 6 = [¿]. A estos estudiantes para maestro, recién ingresados en la universidad, no se les había impartido ningún tipo de enseñanza relacionado con el tema de estudio. La mayoría de los estudiantes fueron capaces de formular correctamente un problema de división, si bien sólo 2 de ellos redactaron problemas de división-medida, lo que pone de manifiesto que el significado de la división como medida estaba muy poco arraigado en estos estudiantes para maestro.

Verschaffel et al. (1997) propusieron a estudiantes para maestro, de distintos cursos y centros, resolver problemas donde era necesario hacer consideraciones realistas para dar la solución. Uno de los problemas era de división-medida y era preciso interpretar el resto de la división: "*450 soldados deben ser trasladados al campo de entrenamiento. Cada autobús del ejército puede llevar a 36 soldados. ¿Cuántos autobuses son necesarios?*" En este problema la división de 450 entre 36, da como cociente 12 y como resto 18, lo que significa que 12 autobuses pueden trasportar a una parte de los soldados pero no a todos, por tanto, se necesita un autobús más para trasportan a los 18 restantes; la solución es 13 autobuses. También se les pidió a los participantes analizar e interpretar dos soluciones diferentes de los alumnos a este problema, una en la que el alumno hacía consideraciones realistas teniendo en cuenta el significado del resto, y otra en la que no las hacía y daba como respuesta el cociente de la división, es decir, 12 autobuses. Los resultados mostraron una fuerte tendencia entre los estudiantes para maestro a excluir el conocimiento del mundo real tanto para resolver el problema como para valorar las respuestas de los alumnos.

En resumen, los problemas de división-medida presentan una problemática especial para los estudiantes para maestro, pues el significado más arraigado de esta operación es el de reparto, lo que se pone de manifiesto cuando se les pide formular un problema de división. Por otra parte, el conocimiento procedimental es poco flexible, pues tienen dificultad para aplicarlo a nuevas situaciones. También se han detectado que algunos estudiantes para maestro tienen dificultad para interpretar de manera adecuada las respuestas de los estudiantes a problemas de división-medida. Estos problemas se pueden resolver realizando una división o utilizando otros métodos alternativos a la división como sumas o restas repetidas o modelando con materiales o representaciones gráficas, entre otros. Por ello es importante que los estudiantes para maestro conozcan no solo como se resuelve este tipo de problemas, sino también las estrategias que emplean los alumnos de Primaria, las dificultades que encuentran y los errores que cometen, para poder interpretar y valorar las respuestas de los alumnos de Primaria a este tipo de problemas.

1.2.1. El caso particular de la división de fracciones

Si el significado de la división no resulta fácil a los estudiantes para maestro, aún menos cuando se trata de la división de fracciones. La división de fracciones se puede abordar simplemente como un procedimiento algorítmico que consiste en multiplicar por el inverso del divisor, pero desde el punto de vista conceptual es un tópico difícil, pues la comprensión de su significado exige relacionarlo con otros conocimientos, sistemas de representación y situaciones (Greer, 1992; Ma, 1999). Su complejidad se pone en evidencia por la cantidad de trabajos que documentan las dificultades de estudiantes para profesor y profesores sobre este tópico (Ball, 1990; Borko et al., 1992; Contreras, 1997; Simon, 1993; Tirosh, 2000; Tzur y Timmerman, 1997).

La variedad de significados de las fracciones y los retos que esto supone para el aprendizaje y la enseñanza, presenta pues una problemática especial en cuanto al conocimiento necesario para la enseñanza. Por ello el profesor debe conocer estos significados y la relación entre ellos, la importancia de identificar la unidad de medida de referencia en contextos continuos y discretos, y los distintos modos de representación de las fracciones. Por otra parte, el profesor debe conocer los significados de las operaciones elementales, que en parte coinciden y en parte difieren de los de las operaciones con números naturales, así como tener una adecuada comprensión de los algoritmos.

En las últimas décadas un gran número de investigaciones han documentado la comprensión que tienen los estudiantes para profesor y los profesores sobre las operaciones de multiplicación y división de fracciones (Amstrong y Bezuk, 1995; Ball, 1990; Borko el al., 1992; Izsák, Jacobson, de Araujo y Orrill, 2012; Sowder, Philipp, Amastrong y Schappelle, 1998; Tirosh y Graeber, 1990; Toluk-Uçar, 2009). Estas investigaciones han mostrado que, aunque muchos de ellos son capaces de realizar operaciones utilizando los algoritmos, tienen dificultades para comprender el significado de las operaciones y, en consecuencia, para saber cuáles deben utilizar en la resolución de problemas, lo que muestra que su conocimiento es más bien de tipo procedimental. Por ejemplo, Amstrong y Bezuk (1995) propusieron a profesores en ejercicio un problema que se resolvía calculando 1/3 de 3/4. Los profesores reconocieron que debían multiplicar dos fracciones, pero tenían dificultad para razonar su elección y para justificar el algoritmo de la multiplicación utilizando dibujos; también tuvieron dificultades para identificar la unidad de medida.

De igual modo muchos estudiantes para profesor o profesores tienen dificultades para resolver problemas de división de fracciones (Amstrong y Bezuk, 1995; Ball, 1990; Borko el al., 1992; Graeber y Tirosh, 1988; Rizvi y Lawson, 2007; Simon, 1993; Sowder et al., 1998; Tirosh, 2000). Un resultado importante de estos estudios es que los estudiantes para profesor o profesores confunden situaciones de división por una fracción unitaria con las de división por un entero o multiplicación por esta fracción, por ejemplo dividir por 1/3 lo confunden con dividir por 3 o con multiplicar por 1/3 (Toluk-Uçar, 2009).

Toluk-Uçar (2009) en una experiencia de desarrollo profesional con futuros maestros de primaria centrada en la formulación de problemas (*problem posing*), señala que los estudiantes para profesor tuvieron más dificultad para enunciar un problema de multiplicación o de división de fracciones que de adición o sustracción, siendo más difícil los de división que los de multiplicación, pues les costaba identificar situaciones de la vida real relacionadas con estas operaciones. Los problemas de división enunciados al comienzo de la formación respondían al significado de división-partitiva, pero al final de la misma enunciaron también problemas de división-medida, lo que les ayudó a identificar la unidad de medida. También mejoraron al final de la instrucción su competencia para generar representaciones gráficas para modelar las operaciones

Una problemática específica de los problemas de estructura multiplicativa con fracciones es saber identificar cuál es la unidad de medida (Izsák et al., 2012). En los problemas de estructura aditiva los términos se refieren a la misma unidad de medida; por ejemplo en el problema *María caminó por la mañana 1/2 km y por la tarde 1/4 km, ¿cuánto caminó en total?* los datos y la respuesta se refieren a la misma unidad, kilómetros. Sin embargo, en los problemas de estructura multiplicativa identificamos varias unidades de medida; por ejemplo en el problema *Se va a utilizar 1/2 vaso de azúcar para hacer magdalenas. Si para cada paquete de magdalenas se necesita 1/3 de vaso, ¿cuántos paquetes se pueden hacer?*, 1/2 se refiere al número de vasos, 1/3 al número de vasos por paquete, es decir una razón, y la respuesta 3/2 es el número de paquetes que se pueden hacer.

Izsák et al. (2012) han puesto de relieve la importancia de que los profesores identifiquen la unidad de medida apropiada en los problemas con fracciones y de que razonen con dos o tres niveles de estructuras de unidades. Las estructuras de unidades se refieren a las diferentes formas de ver un número o una subdivisión en partes congruentes. Por ejemplo, el número 5 se puede entender como cinco unidades separadas (un nivel de unidades) o como un grupo de 5 entendido como una sola entidad (el grupo de 5 es un segundo nivel de unidades; Figura 1.1a). El número 20 se puede entender como un bloque de 20 unidades (un nivel), compuesta por cinco unidades (segundo nivel), y cada una de las cinco unidades está compuesta por cuatro unidades separadas (tercer nivel; Figura 1.1b). Las investigaciones han mostrado que los estudiantes que fueron capaces de construir tres niveles de unidades también fueron capaces de razonar mejor sobre fracciones impropias (Olive y Steffe, 2002) y de interpretar el resultado de tomar una parte de otra parte (Steffe, 2003).

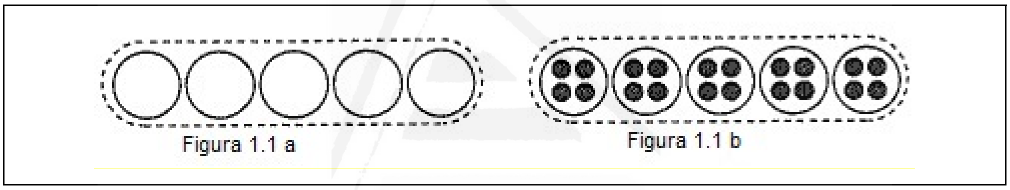


Figura 1.1. Estructuras de unidades del 5 y del 20
(Tomado de: Izsák et al., 2012, p. 399)

El problema de *repartir 2 bizcochos entre 5 niños* requiere coordinar dos o tres niveles de estructura de unidades. Se puede mostrar los dos bizcochos como un bloque (un nivel de unidades) dividido en 10 partes congruentes (segundo nivel de unidades) y la solución es 2/10 (Figura 1.2a). Usar dibujos para explicar por qué 1/5 de las dos bizcochos tomados como unidad es equivalente a 2/5 de un bizcocho o 1/5 de cada uno de las bizcochos requiere coordinar tres niveles de estructura (Figuras 1.2b, 1.2c y 1.2d), pues se puede considerar los dos bizcochos como un bloque, cada uno de los bizcochos divididos en 5 partes congruentes y cada una de las diez partes en que se divide el bloque de los dos bizcochos.

Coordinar los tres niveles de estructura en las figuras 1.2a, 1.2b y 1.2c podría facilitar comprender que 1/5 de los dos bizcochos es lo mismo que 1/5 de cada uno de los dos bizcochos combinados: 1/5 x (1+1)= 1/5 x 1 + 1/5 x 1 (Figuras 1.2b y 1.2d) o que 1/5 de los dos bizcochos es equivalente a 2/5 de un bizcocho (Figura 1.2c).

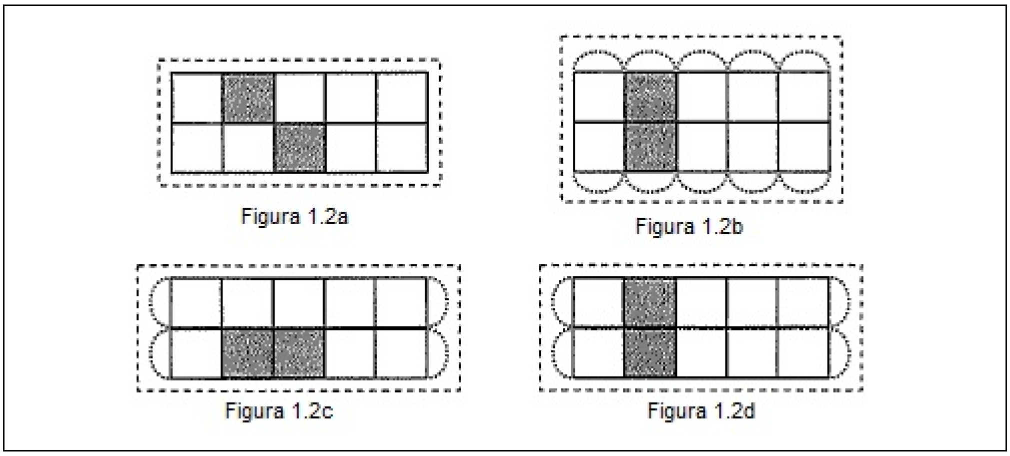


Figura 1.2. Niveles de estructura de unidades
(Tomado de: Izsák et al., 2012, p. 401)

Izsák y sus colegas (2012), tras un curso de formación de futuros maestros que puso el acento en las representaciones gráficas de la aritmética de fracciones, identificaron dos subgrupos de estudiantes para maestro: un grupo que era capaz de razonar con tres niveles de unidades y otro que se limitaba a razonar solo con dos niveles.

Otras investigaciones han mostrado la dificultad de los estudiantes para maestro de dar la solución en relación a la unidad de medida. Por ejemplo, Rosli, González y Capraro (2011) propusieron el problema de repartir 4 pizzas entre 5 personas. La mayoría de los estudiantes para maestro respondieron que 4 trozos o 4/5, en lugar de 4/5 de pizza.

Li y Kulm (2008) pidieron a estudiantes para maestro que explicaran a los estudiantes por qué 2/3 : 2 = 1/3 y 2/3 : 1/6 = 4. El 26% de los participantes usaron representaciones gráficas para explicar la división de fracciones y 22% usaron el algoritmo de multiplicar por el inverso para justificar el resultado de las operaciones. El resto fue incapaz de dar una explicación y ninguno de los participantes supo dar una explicación al algoritmo de la división de fracciones.

Tirosh (2000) realizó un estudio para examinar el conocimiento de los estudiantes para maestro sobre las concepciones erróneas de los estudiantes. Agrupó los errores identificados por los estudiantes para maestro en tres categorías, según que tuviesen una base algorítmica, intuitiva o tuvieran su origen en el conocimiento formal. Los errores algorítmicos son errores en el proceso de cálculo y se producen cuando los estudiantes se equivocan en algún paso del algoritmo como, por ejemplo, multiplicar por el inverso del dividendo, en lugar de por el inverso del divisor (error en la división). Los errores intuitivos tienen su origen en concepciones erróneas asociadas con la operación de división, por ejemplo, cuando los estudiantes solo entienden el modelo de la división como reparto o no comprenden que el dividendo pueda ser menor que el divisor o que el cociente pueda ser mayor que el divisor. Los errores en el conocimiento formal se refieren al significado de la operación de división de fracciones. La autora encontró que los estudiantes para maestro de Israel tenían dificultades en predecir los errores de los estudiantes, y que los errores que preveían eran mayoritariamente de tipo procedimental.

Isiksal y Cakiroglu (2011), en un trabajo similar al de Tirosh (2000), identificaron dos categorías más: la falta de comprensión del simbolismo de las fracciones y la falta de comprensión de los problemas. Por ejemplo, un estudiante para maestro indicó que muchos estudiantes no sabrían responder al siguiente problema: *Elif compró una botella de leche. Ella dio 1/2 de la botella que era 1 ¾ litros a su abuela. ¿Cuánto contenía la botella originalmente?*, porque ellos no entendían que la clave del problema era que la mitad de algo era 1 ¾. Esta descripción fue categorizada como falta de comprensión del problema. Tras un período de instrucción sobre la división de fracciones los estudiantes para maestro fueron capaces de identificar el origen de algunas concepciones erróneas de los estudiantes tanto desde el punto de vista procedimental como conceptual (por ejemplo, la idea de que el cociente debe ser menor que el dividendo proviene de la tendencia a generalizar propiedades de los números naturales). También Turnuklu y Yesildere (2007) encontraron que los futuros maestros en Turquía tenían dificultades en determinar las concepciones erróneas de los estudiantes.

Depaepe et al. (2015) trataron de identificar, en futuros maestros de primaria y futuros profesores de secundaria de matemáticas de primer grado, el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido en los tópicos del concepto y las operaciones con fracciones y números decimales, de forma independiente a partir de ítems que no estaban interrelacionados. En cuanto al conocimiento del contenido los resultados mostraron que los participantes tenían un conocimiento limitado de los números racionales y que tenían más dificultades con las fracciones que con los decimales; y que los ítems sobre los conceptos de decimal o fracción fueron más fáciles que los ítems sobre las operaciones. Además los participantes extendían las propiedades de los números naturales a los racionales o tenían dificultad para identificar un modelo matemático adecuado para resolver un problema.

En cuanto al conocimiento pedagógico del contenido, los participantes tenían un conocimiento limitado de las concepciones erróneas y dificultades y de las estrategias metodológicas y el uso de representaciones para la enseñanza de los números racionales. Asimismo, como en el caso del conocimiento del contenido, este conocimiento era menor en cuanto a las fracciones que en cuanto a los decimales, en cuanto a las operaciones que en cuanto a los conceptos. Por otra parte, en los ítems relacionados con las concepciones erróneas y dificultades obtuvieron mejores resultados que en los relativos a las estrategias de enseñanza y el uso de representaciones.

También obtuvieron una correlación positiva entre conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido. Esto significó que los ítems de conocimiento del contenido fueron en general más difíciles de responder que los de conocimiento pedagógico del contenido. Sin embargo, en las parejas de ítems de conocimiento del contenido-conocimiento pedagógico del contenido relacionados, algunos participantes respondieron correctamente el ítem de conocimiento pedagógico del contenido pero no el correspondiente del conocimiento del contenido, pero en la mayoría de los casos los participantes respondieron correctamente el ítem de conocimiento del contenido, pero no el ítem correspondiente conocimiento pedagógico del contenido. Por último, hay diferencias significativas entre los estudiantes para profesor de primaria y secundaria en conocimiento del contenido, pero no en conocimiento pedagógico del contenido: los futuros profesores de secundaria obtuvieron mejores resultados que los de primaria en conocimiento del contenido, pero no en conocimiento pedagógico del contenido.

Este conjunto de investigaciones son una evidencia empírica de que los estudiantes para profesor tienen lagunas importantes en cuanto al conocimiento del contenido y al conocimiento pedagógico del contenido sobre números racionales, más específicamente sobre fracciones. En lo que se refiere al conocimiento del contenido, esta limitación se pone en evidencia con la inadecuación del conocimiento conceptual (por ejemplo, no comprender el significado del algoritmo de la operación y por qué funciona), con no saber aplicar adecuadamente el conocimiento procedimental (por ejemplo, aplicando el algoritmo de la operación a la resolución de problemas) o no saber formular un problema que se resuelva con una división de dos fracciones. El limitado conocimiento pedagógico del contenido se pone de relieve por la dificultad para identificar concepciones erróneas o hacer propuestas para la instrucción, entre otros aspectos.

En este capítulo hemos visto que la mayoría de las investigaciones sobre el conocimiento profesional de los estudiantes para maestro en relación con la división se han centrado mayoritariamente en las dificultades y deficiencias que tienen los profesores o futuros profesores con determinados conceptos y procesos matemáticos relacionados con la división. Estos hechos ponen de manifiesto la necesidad de realizar más investigaciones sobre el uso del conocimiento de matemáticas para enseñar (relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el aprendizaje de los estudiantes de primaria en relación a los problemas de división-medida) por parte de los estudiantes para maestro cuando tienen que realizar una tarea profesional como es la de interpretar diferentes respuestas de alumnos de primaria a problemas de división-medida (tanto entre números naturales como entre fracciones), de ahí que en nuestra investigación nos hayamos planteado como objetivo:

- Caracterizar cómo estudiantes para maestro interpretan respuestas de alumnos de 6º curso de Educación Primaria a problemas de división-medida.

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

CAPÍTULO 2. MARCO CONCEPTUAL

Puesto que nuestro objetivo es caracterizar cómo estudiantes para maestro interpretan respuestas de alumnos de Educación Primaria a problemas de división-medida, el estudio se centra en dos marcos teóricos: el marco referente a las estructuras multiplicativas y el marco en relación al conocimiento del profesor y la competencia docente una mirada profesional.

Este capítulo está dividido en tres apartados. En el primer apartado se presentan los problemas de estructura multiplicativa desde la perspectiva de Vergnaud y otros enfoques. En el segundo, se describen las estrategias utilizadas y los errores más comunes utilizados por los estudiantes de Educación Primaria cuando resuelven problemas de división-medida. Por último, se presenta el marco del conocimiento matemático para enseñar y su relación con la competencia profesional de una mirada profesional. Estas perspectivas teóricas serán usadas para el diseño de los instrumentos y para el análisis de los datos.

2.1. PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

El análisis de la estructura multiplicativa y la investigación de la adquisición de los conceptos y relaciones de tipo multiplicativo se ha hecho desde diferentes perspectivas (Greer, 1992). Vergnaud (1983) utiliza el concepto de estructura multiplicativa con un significado amplio poniendo en relación cuatro cantidades en los problemas de una sola operación. Schwartz (1988) analiza los problemas de estructura multiplicativa en función de dos tipos de cantidades *intensivas* y *extensivas,* y considera que hay una relación entre tres cantidades. Nesher se sitúa en una perspectiva diferente, el enfoque textual, y estudia la lógica de los textos y las relaciones semánticas entre las proposiciones subyacentes en el texto. Por último, Fishbein (1987) desarrolla la teoría de los modelos implícitos o modelos primitivos de conducta de los estudiantes cuando eligen una operación para resolver problemas simples de multiplicación o división.

2.1.1. El análisis de Vergnaud de las estructuras multiplicativas

Vergnaud (1983), considera que el conocimiento está organizado en *campos* conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje. Un campo conceptual para Vergnaud es un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición. También afirma que el dominio de un campo conceptual no ocurre a corto plazo (ni en pocos meses ni en pocos años). Al contrario, nuevos problemas y nuevas propiedades deben ser estudiadas a lo largo de varios años si se quiere que los alumnos los dominen progresivamente. De nada sirve rodear las dificultades conceptuales, éstas se superan en la medida en que son detectadas y enfrentadas, pero esto no ocurre de una sola vez.

El campo conceptual hace posible el estudio de la organización de las ideas interconectadas, conceptualizaciones y representaciones durante un período de tiempo suficiente. Vergnaud (1994) se interesó por dos campos conceptuales, el de las estructuras aditivas y el de las estructuras multiplicativas, vistos estos como un conjunto de problemas que implican operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo (por ejemplo, adición, sustracción, intervalo, traslación) o de tipo multiplicativo (por ejemplo, multiplicación, división, fracción, razón, similitud). El campo conceptual de las estructuras multiplicativas consiste en todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los cuales generalmente es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones. Varios tipos de conceptos matemáticos están involucrados en las situaciones que constituyen el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y en el pensamiento necesario para dominar tales situaciones. Entre tales conceptos están el de función lineal, función no lineal, espacio vectorial, análisis dimensional, fracción, razón, tasa, número racional, multiplicación y división.

En el campo conceptual de las estructuras multiplicativas, Vergnaud (1997) identifica tres tipos de problemas multiplicativos diferentes: i) Isomorfismo de medidas, problemas cuya estructura consiste en una proporción entre dos espacios de medidas M1 y M2; ii) Un solo espacio de medidas, problemas en los que se establece una correspondencia entre dos cantidades y un operador escalar, y iii) Producto de medidas, problemas cuya estructura consiste en la composición cartesiana de dos espacios de medidas M1 y M2 en un tercero, M3.

I. El *isomorfismo de medidas* es una estructura que engloba aquellos problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M1 y M2 implicadas. La función f: $M_1 \rightarrow M_2$ es una proporcionalidad simple entre dos magnitudes M_1 y M_2 (Figura 2.1).

M1	M2
x	$y = f(x)$
x'	$y' = f(x')$

Figura 2.1. Tabla de correspondencia entre magnitudes en problemas de isomorfismos de medidas

Dentro de la estructura de isomorfismo de medidas el autor identifica cuatro grandes subclases de problemas: una subclase de multiplicación, dos subclases de división y una subclase que llama problemas generales de regla de tres.

- *Subclase de multiplicación:* la conforman aquellos problemas que responden al esquema anterior (Figura 2.1) en el caso particular de ser x = 1, conociendo *f(x)* *y x'; la incógnita es f(x')* (Figura 2.2a). Por ejemplo, *Si un kilogramo de patatas vale 2€, ¿cuánto valen 7 kilogramos de patatas?* (Figura 2.2b).

M1	M2	Kilogramos	Euros
1	*a*	1	2
b	*x*	7	x
Figura 2.2a		Figura 2.2b	

Figura 2.2. Esquema de la multiplicación.

- *Subclase de división (División-Partitiva):* La constituyen aquellos problemas que responden al esquema de la figura 2.1 y presentan la característica de ser x = 1; la incógnita es *f(1)* y se conoce a *x'* y *f(x')* (Figura 2.3a). Por ejemplo, el problema *Laura tiene 24 lápices en 6 cajas con el mismo número de lápices en cada caja, ¿cuántos lápices hay en cada caja?* (Figura 2.3b).

M1	M2	Cajas	Lápices
1	*x*	1	x
b	*c*	6	24
Figura 2.3a		Figura 2.3b	

Figura2.3. Esquema de la división-partitiva.

- *Subclase de división (División-Medida):* consiste en hallar *x'* conociendo *f(x')* y *siendo x = 1* (Figura 2.4a). Por ejemplo, *Laura tiene 24 lápices. Si hay 4 lápices en cada caja ¿cuántas cajas de lápices tiene Laura?* (Figura 2.4b).

M1	M2	Cajas	Lápices
1	*a*	1	4
x	*c*	x	24
Figura 2.4a		Figura 2.4b	

Figura 2.4. Esquema de la división-medida.

- Caso *general de la regla de tres*: viene esquematizado por la figura 2.5a. Estos problemas son el caso general de los problemas de multiplicación y división cuya resolución se apoya en propiedades de la función lineal $f(a + b) = f(a) + f(b)$ y $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Por ejemplo, *Si 4 kilogramos de patatas valen 3€, ¿cuánto valen 9 kilogramos de patatas?* (Figura 2.5b).

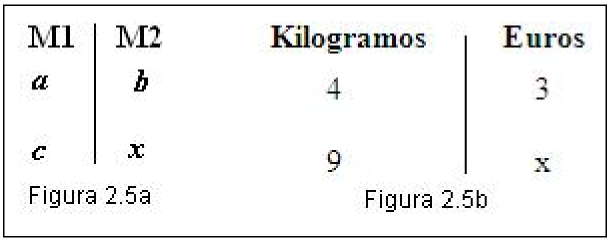


Figura 2.5. Esquema de la regla de tres

II. En los *problemas de un solo espacio de medida* (Vergnaud, 1997), aparecen dos cantidades de una única magnitud o espacio de medidas que se ven afectadas por un escalar. La estructura general de este tipo de problemas, en función de cuál sea la incógnita que presentan, se muestra en la Figura 2.6.

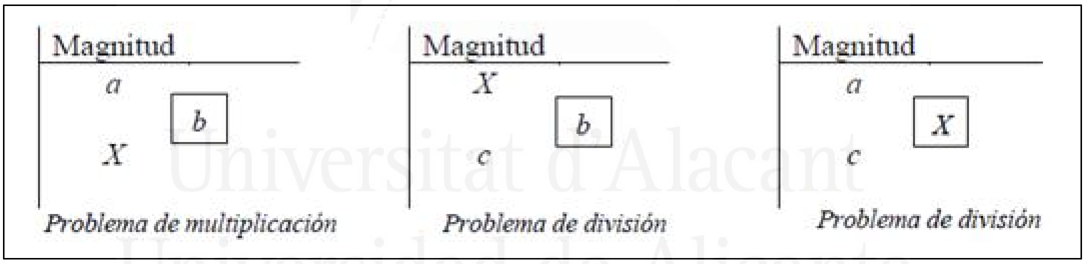


Figura 1.6. Estructura general de problemas de un único espacio de medida

Tal y como se muestra en la figura 2.6 hay tres subtipos: un problema de multiplicación y dos problemas de división. En el problema de multiplicación la cantidad incógnita X es una medida tal como se ejemplifica en el problema *Juan tiene 18 canicas. Si Pedro tiene 3 veces más canicas que Juan, ¿cuántas canicas tiene Pedro?* En los problemas de división la incógnita X puede ser una medida como es el caso del problema *Si Pedro tiene 54 canicas que son 3 veces las canicas que tiene Juan. ¿Cuántas canicas tiene Juan?* o un escalar como en el problema *Juan tiene 18 canicas y Pedro 54. ¿Cuántas veces más canicas tiene Pedro que Juan?*

III. El *producto de medidas* es una estructura que engloba tres magnitudes M1, M2 y M3, de tal manera que uno es producto cartesiano de la otras dos M1 x M2 = M3.

Dentro de esta estructura se pueden distinguir dos subtipos de problemas: (i), multiplicación, y (ii) división (Figura 2.7).

(i) *Multiplicación*, que consiste en encontrar la medida de producto, conociendo las medidas que se componen. Por ejemplo, el problema *Tengo 5 camisas y 4 pantalones, ¿de cuántas maneras diferentes me puedo vestir?*

(ii) *División*, donde hay que encontrar una de las cantidades elementales que se componen, conociendo la otra y la cantidad compuesta. Por ejemplo, el problema *Tengo 5 camisas que al combinarlas con los pantalones que tengo me puedo vestir de 20 maneras diferentes, ¿cuántos pantalones tengo?*

Figura 2.7. Estructura general de problemas de producto de medidas

En cada uno de estos subtipos, encontramos subclases de problemas donde se considera el tipo de magnitud elemental implicado: discreta, continua; por el tipo de número: enteros, decimales, números grandes o inferiores a 1 etc.

En este estudio nos vamos a centrar en los problemas de división-medida correspondientes a la estructura de *isomorfismo de medidas.* En los siguientes apartados analizamos en más profundidad este tipo de problemas desde diferentes perspectivas a la de Vergnaud.

2.1.2. El análisis de Schwartz y Kaput: enfoque de estructura de cantidades

Schwartz (1988) y Kaput (1985) se han centrado en las matemáticas como actividad de modelación, haciendo notar las relaciones entre los números y los aspectos cuantitativos de la realidad.

Schwartz (1988) indica que los números surgen básicamente en dos situaciones:

- Cuantificación de aspectos de la realidad, ya sea por conteo (magnitudes discretas) o por medida (cantidades continuas).
- Aplicación de propiedades aritméticas a cantidades ya definidas. Estas operaciones pueden ser complejas, por ejemplo, el cálculo de un coeficiente de correlación.

En estas situaciones identificamos dos tipos de cantidades: *intensivas* (I) y *extensivas* (E). Una cantidad extensiva viene expresada por una unidad simple, mientras que una cantidad intensiva viene expresada por una cantidad compuesta y es el resultado de la aplicación de operaciones matemáticas a otras cantidades. Utilizando un ejemplo de Schwartz, si consideramos un montón de granos de café con las siguientes cantidades asociadas:

Peso del café	5 libras
Coste del café	15 dólares
Precio del café	3 dólares por libra

La primera y la segunda cantidad son propiedades de todo el montón de café y son cantidades extensivas. En cambio la tercera cantidad, el precio por libra, es una propiedad de cualquier montón de café. Además, los precios y los costes pueden sumarse, pero no el precio por libra. La característica de una cantidad intensiva es que expresa numéricamente una relación multiplicativa constante entre dos cantidades, no necesariamente extensivas.

En base a esta distinción entre cantidades extensivas e intensivas surgen tres categorías de problemas de estructura multiplicativa (Kaput, 1985):

1. *Problemas asociados a la terna I, E y E'*, es decir, con una cantidad intensiva y dos cantidades extensivas. Estos problemas corresponden a los de *isomorfismo de medida* de Vergnaud.

   Hay tres tipos de problemas asociados a esta terna, uno de multiplicación y dos de división:

   - Con estructura I x E = E'.

Por ejemplo, el problema *3 personas tienen cada una 4 manzanas. ¿Cuántas manzanas tienen en total?*:

4 manzanas por persona x 3 personas = 12 manzanas

- Con estructura E'/E= I.

  Por ejemplo, el problema *3 personas tienen 12 manzanas y todas tienen el mismo número de manzanas. ¿Cuántas manzanas tiene cada una?*:

  12 manzanas: 3 personas = 4 manzanas por persona

- Con estructura E'/I=E (*problemas de división-medida*).

  Por ejemplo, el problema *Tengo 12 manzanas y le quiero dar 4 manzanas a cada persona. ¿A cuántas personas le pudo dar?*:

  12 manzanas: 4 manzanas por persona = 3 personas

2. *Problemas asociados a la terna E, E' y E''*. En este caso también hay tres tipos de problemas asociados a esta terna, uno de multiplicación E x E' = E'', y dos de división, E''/E = E' y E''/E' = E. Estos problemas son los de producto de medidas de Vergnaud.
3. *Problemas asociados a la terna I, I' e II''*. También en este caso hay tres tipos de problemas asociados a esta terna, uno de multiplicación I x I' =I'', y las dos divisiones asociadas, I''/I=I' e I''/I'=I.

Kaput (1985) afirma que debería prestarse atención no solo a los números sino también a los referentes de los números. En este sentido una diferencia entre los problemas de estructura aditiva y los de estructura multiplicativa es que los primeros son unidimensionales mientras que los segundos tienen una complejidad dimensional. Esto puede explicar por qué los problemas de estructura multiplicativa son más difíciles para los estudiantes que los de estructura aditiva.

2.1.3. El análisis de Nesher: Enfoque semántico

Los análisis de Vergnaud y de Schwartz se apoyan en el concepto físico de análisis dimensional. La diferencia entre ellos es que Schwartz considera que en la estructura multiplicativa hay una relación entre tres cantidades, mientras que Vergnaud considera que la relación es entre cuatro cantidades. Nesher, sin embargo, se sitúa en una perspectiva diferente, la lingüística. En primer lugar, formula las condiciones lógicas de los textos correspondientes a los problemas de multiplicar o dividir y luego busca las relaciones semánticas entre las proposiciones subyacentes al texto.

Nesher (1988) ha analizado las estructuras de tres clases de situaciones:

1. *Regla de proyección* (*mapping rules*) que es una subclase del isomorfismo de medidas de Vergnaud y del tipo I x E = E’ de Schwartz. En esta categoría considera dos subtipos: problemas de multiplicación y problemas de división. A su vez distingue dos tipos de problemas de dividir: *cuotitivo* y *partitivo*, según sea la incógnita el número de grupos que se forman o el número de elementos de cada grupo. Los problemas de dividir *cuotitivo* son los problemas de *división - medida.*
2. Problemas de *comparación multiplicativa*, que son los que en Vergnaud (1997) aparecen como *problemas de un solo espacio de medida* y Schwartz los engloba en el tipo I x E = E’. Este tipo de problemas adoptan según los autores diferentes denominaciones como cambio de tamaño de la misma cantidad y problemas de factor escalar. Se distingue entre problemas de comparación creciente y decreciente, según se indique *tantas veces más* o *tantas veces menos* respectivamente. Hay tres tipos de problemas de comparación multiplicativa, dependiendo de cuál sea la incógnita: la cantidad de referencia, la cantidad comparada o el factor de comparación.
3. Problemas de *multiplicación cartesiana*, incluidos en la categoría *producto de medida* de Vergnaud, y en la categoría E x E’ = E’’ de Schwartz.

2.1.4. Teoría de los modelos primitivos de Fischbein

Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) proponen una teoría que explica el rendimiento de los estudiantes en la resolución de problemas verbales. En concreto, examinaron la habilidad de los estudiantes en la elección de la operación en problemas de una sola operación.

La teoría propuesta por Fischbein y colegas es la siguiente:

> *Cada una de las cuatro operaciones elementales de la aritmética está generalmente asociada a un modelo implícito, inconsciente y primitivo. La identificación de la operación que se precisa para resolver un problema tiene lugar a través del modelo y no directamente. El modelo tiene sus propias limitaciones sobre el proceso de resolución.*

Según estos autores el modelo primitivo de la multiplicación es la adición repetida. Esto significa que una situación de grupos iguales como *3 personas tienen cada una 4 manzanas*, puede conceptualizarse como 4 manzanas + 4 manzanas + 4 manzanas, y la respuesta puede calcularse mediante una adición repetida. Para que pueda darse esta situación el multiplicador debe ser un número entero, mientras que el multiplicando puede ser un número cualquiera. Además, según este modelo el resultado de la multiplicación o producto es siempre mayor que el multiplicando, lo que no es cierto en problemas de multiplicación donde intervienen números decimales menores que la unidad.

En cuanto a la división Fischbein y sus colegas propusieron dos modelos primitivos: división-partitiva (reparto equitativo entre subconjuntos iguales) y medida (determinar cuántos subconjuntos se pueden formar de un determinado tamaño). Si la operación de un problema se percibe como división-partitiva, entonces el divisor debe ser un entero y menor que el dividendo; si se percibe como división-medida entonces el divisor debe ser menor que el dividendo. El modelo de división reparto se el primitivo intuitivo original y el de división-media se adquiere más tarde mediante la instrucción.

Cuando es necesario ampliar el dominio más allá de los enteros al conjunto de los números racionales, y tratar con nuevas situaciones, surgen problemas causados por el profundo arraigo de las primeras conceptualizaciones de las operaciones.

2.2. ESTRATEGIAS Y ERRORES DE LOS ESTUDIANTES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE DIVISIÓN-MEDIDA

En esta sección presentaremos en primer lugar el tipo de estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de los problemas de división-medida y en segundo lugar los errores que comenten en dicha resolución.

2.2.1. Estrategias que utilizan los estudiantes

Algunas investigaciones han identificado los tipos de estrategias que utilizan los estudiantes en los problemas de división-medida y cómo va evolucionando su uso a lo largo del tiempo. Los estudiantes comienzan modelando con objetos o con dibujos, formando grupos de un número fijo de objetos y contando el número de grupos; luego utilizan el conteo: cuentan a saltos, hacia adelante sumando hasta alcanzar el número dado de objetos, o hacia atrás restando desde el número dado de objetos hasta alcanzar un número menor que el sustraendo; y finalmente usan operaciones como la adición y sustracción reiteradas, la multiplicación y la división (Carpenter, 1999; Downton, 2009; Li y Silver, 2000; Vergnaud, 1983). A continuación, pasamos a describir las estrategias identificadas por los distintos autores que son alternativas a la estrategia de realizar el algoritmo de la división.

Carpenter (1999), en relación con las estrategias para la resolución de problemas de multiplicación, división-partitiva y división-medida, sugieren que al igual que la suma y la resta, al principio los niños resuelven problemas de multiplicación y división modelizando la acción y las relaciones descritas en el enunciado del problema. Con el tiempo estas estrategias se sustituyen por estrategias más eficientes basadas en el conteo, la suma y la resta o el uso de hechos numéricos derivados. En relación a los problemas de división-medida los niños al principio resuelven los problemas utilizando los siguientes procedimientos:

- *Modelización*, construyen una serie de conjuntos cada uno de los cuales contiene el número de elementos que se han indicado. Este tipo de modelización es por agrupamiento.

- *Estrategia de conteo y suma*. Los niños utilizan las mismas estrategias de conteo para resolver los problemas de división-medida que en los problemas de adición y sustracción. La diferencia entre estos conteos es que los niños en los problemas de división-medida cuentan a saltos (de 3 en 3, de 4 en 4, etc.), hacia delante o hacia atrás hasta alcanzar el número dado u otro próximo por exceso o por defecto. La solución es el número de veces de saltos.

Posteriormente usan hechos numéricos o los algoritmos de las operaciones, a medida que los van aprendiendo.

Downton (2009) identificó seis estrategias usadas por alumnos de primaria (8-9 años) sobre problemas de división-medida y que categorizó de la siguiente manera:

- *Confuso*: Estrategia que refleja la falta de comprensión de la tarea o que no está relacionada con la tarea.
- *Modelado directo*: El modelado se puede hacer repartiendo el total de objetos en grupos, usando los dedos o con dibujos. El recuento del número de grupos formados es la solución.
- *Modelado parcial*: Estrategia que se apoya parcialmente en el modelado de la situación con materiales concretos o con dibujos. Utiliza también el conteo a saltos para hallar el total.
- *Sumas o restas repetidas*: Se suma el divisor repetidamente hasta alcanzar el dividendo, o se resta el divisor al dividendo repetidamente hasta llegar a cero o a una cantidad inferior al divisor.
- *Duplicar o reducir a la mitad:* Uso de dobles, duplicando el divisor o los resultados obtenidos hasta alcanzar el dividendo, o reducir a la mitad el dividendo y los resultados obtenidos hasta alcanzar el divisor.
- *Multiplicación*: Obtener la solución con doble o mitad y estimando, atendiendo a las cantidades del divisor y el dividendo. En este caso se reconoce la multiplicación y la división como operaciones inversas.

En general la tendencia de los estudiantes que conocen el algoritmo de la división es utilizarlo para resolver los problemas de división-medida. Los estudiantes que no conocen este algoritmo usan métodos alternativos como los que se acaban de describir y a veces su nivel de éxito es mayor (Li y Silver, 2000; Silver, Shapiro y Deutsch, 1993).

2.2.2. Dificultades y errores de los estudiantes

Parte de las dificultades y errores de los alumnos de Primaria relacionados con la división que están consignados en la literatura son las mismas que las de los estudiantes para maestro (Greer, 1992). Estos errores son de tipo conceptual, procedimental o de interpretación del resto.

Los errores conceptuales tienen su origen en la identificación de la división como reparto, que es según Fischbein (1983) el modelo primitivo de esta operación, o en la generalización de las propiedades de la división con números naturales a la división con números racionales. Cuando se generalizan las propiedades del conjunto de los naturales al de los racionales, se entiende que el divisor debe ser menor que el dividendo; de esta forma cuando no sucede así los estudiantes invierten los términos de la operación. O que el cociente debe ser menor que el dividendo, de esta manera confunden dividir por 1/3 (que da como cociente una cantidad tres veces mayor que el dividendo) con dividir entre 3. Otro error de tipo conceptual en el caso de la división de fracciones es no saber identificar cuál es la unidad de medida; por ejemplo, al dividir 4 : 3/5, el resultado es 20/3 = 6 + 2/3; este 2/3 es referido a la unidad de medida que es 3/5.

En cuanto a los errores de tipo procedimental, los estudiantes cometen frecuentes errores en el algoritmo de la división con números naturales porque hacen un uso mecánico de éste, sin tener en cuenta el valor de posición de cada cifra. Esto provoca errores cuando hay un cero en el dividendo o cuando hay que poner un cero al cociente. En el caso de la división de fracciones a veces no hacen el producto cruzado en el orden convenido.

Una problemática especial es la relativa a la interpretación del resto. En la división con números naturales intervienen cuatro términos: dividendo, divisor, cociente y resto. Los errores más frecuentes suceden en los problemas de división-medida donde la respuesta no es el cociente ni el resto, sino el resto aumentado en una unidad. Este error puede tener su origen en la creencia de que la solución de un problema es directamente el resultado de una operación (Callejo y Vila, 2009). En este caso es el cociente al que se le añade una unidad porque hay que contar un grupo más.

Diversas investigaciones han tratado sobre las dificultades de los estudiantes en los problemas de división-medida con resto. Lago, Rodríguez, Enesco, Jiménez y Dopico (2008) mostraron las dificultades que tuvieron estudiantes de 1º de ESO (12 años) en la realización de problemas no-rutinarios de división con resto. Los estudiantes ejecutaron algoritmos mecánicamente sin tener en cuenta las demandas del mundo real. En el estudio, se presentaron a los alumnos problemas tanto de división-partitiva como de división-medida con cuatro tipos de resto: resto no divisible, resto divisible, resto como resultado y reajustar el cociente. Los resultados mostraron que los estudiantes tenían un concepto de la división fundamentalmente partitivo, por lo que su rendimiento descendió cuando realizaron problemas de división-medida. A pesar de que identificaban correctamente el algoritmo de resolución, no tuvieron en cuenta aspectos esenciales del enunciado y cometieron errores como: extraer indebidamente decimales en los problemas con resto, no reajustar el cociente incrementándolo parcialmente, o responder con el cociente en lugar del resto.

Por otra parte, las consideraciones realistas en el proceso de resolución de los problemas plantea dificultades en los estudiantes (Greer, Verschaffel y De Corte, 2002). En el caso de los problemas de división-medida hay que interpretar el significado del resto: unas veces hay que tenerlo en cuenta para dar la respuesta y otras se ignora; en ocasiones el resto es la respuesta y otras veces la respuesta incluye una parte fraccionaria porque se pide que no quede resto. En este tipo de problemas los estudiantes dan a veces respuestas mecánicas o absurdas. Por ejemplo, Silver et al. (1993) preguntaron a estudiantes de grado medio cuántos autobuses se necesitaban para transportar 540 personas si cada autobús tenía 40 plazas. Solo el 45% de los estudiantes dieron una respuesta correcta (14 autobuses o 13 autobuses y 1 minibús), otros respondieron 13 o 13.5 autobuses.

Li y Silver (2000) y Silver et al. (1993) encontraron que en aquellos problemas de división con resto en los que hay que añadir una unidad al cociente entero o redondear por exceso un cociente decimal para dar la respuesta, los alumnos que usaron una estrategia alternativa a la división como sumas o restas repetidas o una multiplicación, tuvieron un nivel de éxito mayor que los que utilizaron la operación de dividir. Esto puede ser debido a que estos métodos, a pesar de ser menos eficientes cuando los datos del problema son números grandes, son más intuitivos para relacionar el significado de las operaciones con la situación descrita en el problema. Por otra parte, el contexto juega un papel importante en la interpretación del resto, Carpenter (1999) considera que el contexto de un problema suele indicar el sentido que toma el resto, en respuesta a la pregunta formulada. En algunos casos no se toma en cuenta el resto en un problema; o en otros el resto es la solución al problema.

2.3. CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA

Una aportación clave en la identificación de los conocimientos necesarios para enseñar ha sido la de Shulman (1986; 1989) que distingue entre *conocimiento de la materia* y *conocimiento de contenido pedagógico*. Esta última expresión se ha utilizado para referirse a diversos aspectos relacionados con la disciplina a enseñar y con la enseñanza, por lo que es necesario un desarrollo teórico específico en el área de matemáticas.

Ball et al. (2008), a partir del esquema de Shulman, se centran de forma específica en el conocimiento que requiere el profesor para enseñar matemáticas y establecen el modelo *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT), señalando dos grandes dominios de conocimiento: (1) *Conocimiento del Contenido a Enseñar* (SMK) y (2) *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK), que a su vez subdividen cada uno de ellos en tres subdominios (Figura 2.8).

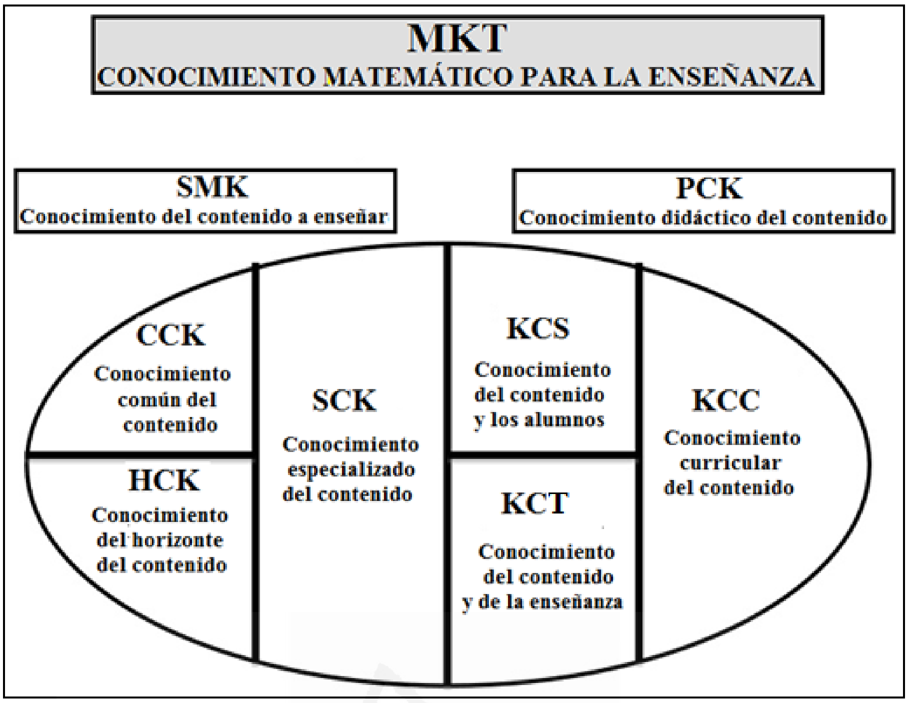


Figura 2.8. Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008, p.403)

El *Conocimiento del Contenido a Enseñanza* (SMK) se refiere al conocimiento de contenido matemático y está dividido en tres subdominios:

- El *Conocimiento Común del Contenido* (CCK) es el conocimiento matemático y las habilidades necesarias para resolver tareas que no son exclusivas de la enseñanza e incluye las habilidades del maestro para resolver problemas matemáticos, operar correctamente, aplicar definiciones y propiedades,… Es decir, es el conocimiento que cualquier persona puede usar para resolver un problema matemático.
- El *Conocimiento Matemático del Horizonte* (HCK) es el conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas y sus relaciones con otros contenidos matemáticos, e incluye las habilidades del profesor para saber la importancia de un determinado contenido matemático y para enlazarlo con otros contenidos previos y futuros.
- El *Conocimiento Especializado del Contenido* (SCK) es el conocimiento matemático específico y necesario para la docencia e incluye las habilidades del profesor para distinguir, averiguar, valorar e interpretar la validez de las respuestas de los estudiantes y explicar el origen de sus errores. Este modelo considera el conocimiento especializado de matemáticas como el conocimiento de matemáticas

que permite a los profesores implicarse en tareas específicas de la enseñanza, que incluyen cómo representar las ideas matemáticas a los estudiantes, proporcionar explicaciones matemáticas para las reglas y procedimientos y examinar y comprender métodos de resolución no usuales a los problemas.

El *Conocimiento Didáctico del Contenido* (PCK) se refiere a la integración simultánea de las matemáticas y la forma en la que los estudiantes la aprenden, y está dividido en tres subdominios:

- El *Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes* (KCS) combina los conocimientos sobre matemáticas y sobre los estudiantes e incluye las habilidades de los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá fácil, difícil, interesante, aburrido,… o los errores que cometerán con mayor frecuencia.
- El *Conocimiento del Contenido y de la Enseñanza* (KCT) combina los conocimientos sobre las matemáticas y sobre su enseñanza e incluye las habilidades de los profesores para saber los procedimientos y estrategias más adecuadas para enseñar un contenido específico.
- El *Conocimiento Curricular del Contenido* (KCC) comprende los contenidos que deben aprender los estudiantes (programas, objetivos, contenidos, orientaciones curriculares,…) e incluye los materiales y recursos que utiliza el profesor en su práctica docente.

El conocimiento de las matemáticas para la enseñanza (MKT) y el uso de este conocimiento que hace el profesor en su práctica docente (por ejemplo en tareas profesionales como interpretar respuestas de estudiantes) son constructos dependientes, ya que la práctica profesional del profesor de matemáticas se caracteriza por la forma de aplicar este conocimiento en contextos de enseñanza. Llinares (2013) caracteriza la noción de *competencia docente* como ser capaz de utilizar el conocimiento de forma adecuada para llevar a cabo tareas de enseñanza de matemáticas y un aspecto de esta competencia es mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

2.3.1. El conocimiento matemático para la enseñanza y la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

Hill, Ball y Schilling (2008) indican que el conocimiento especializado de matemáticas es un conocimiento de matemáticas, pero que define la manera en la que los profesores se implican en tareas de enseñanza particulares como interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes. Es decir, es el conocimiento de matemáticas implicado, entre otras, en la competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje (*professional noticing*) (Sherin et al., 2010).

La conceptualización de la competencia mirar profesionalmente ha sido abordada desde diversas perspectivas. Mason (2002) señalaba cuatro características de esta competencia docente: (i) identificar aspectos relevantes a partir de un objetivo que guía la observación (*intentional noticing*), (ii) describir los aspectos observados (*marking and recording*), (iii) reconocer alternativas de acción (*recognizing choices*), y (iv) validar lo observado intentando que los otros reconozcan lo que ha sido descrito o sugerido (*validating with others*). En cuanto a las destrezas necesarias para el desarrollo de esta competencia, han sido identificadas por van Es y Sherin (2002) como tres: identificar aspectos relevantes de la situación; utilizar el conocimiento del contexto en el que se desarrollan para reflexionar sobre las interacciones que suceden, y realizar conexiones entre lo acaecido en el aula y los principios generales sobre los procesos de enseñanza aprendizaje.

Esta perspectiva subraya la trascendencia de identificar los aspectos relevantes en las situaciones de enseñanza-aprendizaje e interpretarlos en función de las referencias teóricas previas (uso del conocimiento especializado). Esta conceptualización de la competencia mirar profesionalmente pone de manifiesto la importancia de la interpretación como instrumento que guía la comprensión de cómo los profesores usan su conocimiento en la práctica de sus labores profesionales (Llinares, 2013). En este estudio nos centramos en la tarea profesional de interpretar el pensamiento matemático de estudiantes de Educación Primaria a problemas de división-medida

El constructo mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es "una manera de entender cómo los maestros dan sentido a las complejidades de la clase" que implica cómo centran su atención y cómo interpretan y reflejan sus descubrimientos sobre el pensamiento matemático de los estudiantes (Weiland, Hudson y Amador, 2013).

Jacobs et al. (2010) conceptualizan esta competencia como tres destrezas interrelacionadas:

(i) describir las estrategias usadas por los estudiantes identificando los elementos matemáticos importantes,

(ii) interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes en función de los elementos matemáticos identificados en las estrategias y

(iii) decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes.

Desde esta conceptualización, mirar de una manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes implica interpretar el pensamiento matemático de los mismos, por lo que los estudiantes para maestro deben trasladarse desde la descripción de acciones del profesor a las conceptualizaciones de los estudiantes y desde comentarios evaluativos a comentarios interpretativos basados en evidencias (Bartell et al., 2013; van Es, 2010).

En este estudio, nos centraremos en cómo los estudiantes para maestro interpretan respuestas de estudiantes de Educación Primaria a problemas de división-medida. Para poder interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, los estudiantes para maestro deben identificar:

- el tipo de problema de estructura multiplicativa. Deben identificar que se trata de problemas de división-medida. Los dos primeros con números enteros y el último de una división de un entero con una fracción (ya que este último tiene una problemática particular),
- los procedimientos de resolución que permiten resolver los problemas de división-medida: división, modelización-agrupamiento, conteo a saltos… y
- los errores procedimentales y conceptuales comunes en estos problemas de división-medida.

Esto forma parte del conocimiento especializado de matemáticas del estudiante para maestro. Por lo que nos hemos centrado en la relación entre el conocimiento especializado de matemáticas y la tarea de interpretar respuestas de alumnos de Educación Primaria.

Teniendo en cuenta que nuestro objetivo es caracterizar cómo estudiantes para maestro interpretan respuestas de alumnos de 6º curso de Educación Primaria a problemas de división-medida, nos hemos planteado las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cómo resuelven los estudiantes para maestro problemas de división-medida?
- ¿Cómo estudiantes para maestro interpretan respuestas dadas por alumnos de 6º curso de Primaria (11-12 años) a problemas de división-medida?
- ¿Qué relación hay entre la corrección en la resolución de los problemas de los estudiantes para maestro y su interpretación de las respuestas de los estudiantes?

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capitulo se describen los participantes de la investigación, el diseño de los instrumentos de recogida de datos, su aplicación y el proceso de análisis seguido.

3.1. PARTICIPANTES Y CONTEXTO

Los participantes de este estudio fueron 84 estudiantes del primer curso del título de Maestro de la especialidad de *Educación Primaria* de la Universidad de Alicante. Entre estos estudiantes había 68 chicas y 16 chicos, con edades comprendidas entre 18 y 38 años (la mediana es 19 años). Los datos se recogieron en el primer semestre del curso académico 2009/2010.

En el momento de realizar la experiencia los estudiantes no habían recibido ningún tipo de enseñanza específica relacionada con el tema de estudio: los problemas de estructura multiplicativa.

La mayoría de los estudiantes accedió a los estudios universitarios realizando la prueba de Selectividad (53 estudiantes); otros habían realizado ciclos formativos de

Formación Profesional (24 estudiantes), y el resto accedió por la modalidad de mayores de 25 años (7 estudiantes).

Más de la mitad de los estudiantes (54) habían cursado bachillerato de la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales; otros habían cursado la especialidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud (13); por último, un reducido número había cursado la especialidad de Ciencias y Tecnología (5 estudiantes) o de Arte (2 estudiantes). Los estudiantes de mayor edad habían realizado el Bachillerato Unificado Polivalente (BUP) en Ciencias (7 estudiantes) o en Letras (3 estudiantes).

3.2. INSTRUMENTOS DE RECOGIDA DE DATOS

La recogida de datos se realizó a través de dos cuestionarios. A continuación, se detalla la elaboración y características de cada uno de los cuestionarios y cómo se llevó a cabo la aplicación de cada instrumento.

3.2.1. Diseño y características del Cuestionario 1

El Cuestionario 1 consta de tres problemas de estructura multiplicativa del tipo *isomorfismo de medidas*, y dentro de éstos, corresponde a un tipo más específico, problemas de *división-medida*.

Como se indicó en el capítulo II, el *isomorfismo de medidas* es una estructura que engloba aquellos problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M1 y M2 implicadas. Este tipo incluye tres clases de problemas donde la función f: $M_1 \rightarrow M_2$ es una proporcionalidad simple entre dos magnitudes M_1 y M_2 (Figura 3.1).

M1	M2
x	$y = f(x)$
x'	$y' = f(x')$

Figura 3.1. Problemas de isomorfismo de medidas

En los problemas de *división-medida* se pide hallar *x’* conociendo *f(x)* y *f(x’*), siendo *x = 1*.

La Figura 3.2 muestra los 3 problemas que forman el Cuestionario 1: *Farolas, Albergue y Pasteles.* El formato con el que se presentó a los alumnos el Cuestionario 1 se puede consultar en el anexo (pp. 1-4).

Farolas
Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintaron de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

Albergue
103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

Pasteles
Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño. ¿A cuántos niños puedo dar? ¿Qué me sobra?

Figura 3.2. Problemas propuestos en el Cuestionario 1

Estos problemas fueron seleccionados y modificados de otras investigaciones donde los alumnos de 10-14 años o los estudiantes para maestro mostraron dificultades a la hora de resolverlos (Callejo y Vila, 2009; Carpenter, Lindquist, Matthews y Silver, 1983; Verschaffel et al., 1997).

Los problemas *Farolas* y *Albergue* presentan características comunes pues los datos son números naturales, las magnitudes son discretas y hay que añadir una unidad al cociente de la división para responder a la pregunta. En los dos problemas hay que tener en cuenta que el resto es distinto de cero, por tanto, se debe formar un grupo más de *Farolas* con el resto y agregar un color más (problema de *Farolas*) y en el problema *Albergue,* por la misma razón, un grupo más de alumnos y añadir una mesa más. En el problema *Albergue* además se ha introducido un dato pertinente (número de mesas) que si bien no era necesario para obtener la solución (15 mesas) tenía la finalidad de ver si los estudiantes distinguían, para la resolución del problema, los datos necesarios de los superfluos. Una versión de este último problema fue utilizado por Callejo y Vila (2009) en una investigación sobre creencias acerca de la resolución de problemas con estudiantes de primer curso de secundaria (12-13 años).

En el problema *Pasteles* las magnitudes son continuas y se utilizan fracciones. En este problema es preciso interpretar el significado de la fracción que resulta de dividir un entero por una fracción (4 entre 3/5 que son 20/3), para responder a cuántos niños se puede dar y cuánto sobra como relación parte-todo. En este sentido, la fracción resultante 20/3 (cociente 6 y resto 2) significa que se puede dar a 6 niños y los 2 trozos que sobran son quintos de un pastel pues cada pastel se ha dividido en quintos. También podría interpretarse que sobran 2/3 de 3/5 de un pastel, que equivalen a 2/5 de un pastel.

A los estudiantes para maestro se les pidió que resolvieran los tres problemas. El objetivo de este cuestionario era identificar el conocimiento de contenido matemático de los estudiantes para maestro: si eran o no capaces de resolverlos correctamente, qué estrategias utilizaban y qué errores cometían. Más específicamente los problemas seleccionados a nuestro entender permiten poner de manifiesto la comprensión y uso de las operaciones, lo que exige conocer el significado de sus diferentes interpretaciones, el establecimiento de relaciones entre las operaciones y la destreza para resolver problemas con datos superfluos o en diferentes contextos. Por otra parte, en la selección de estos problemas se tuvo en cuenta que en los datos se utilizaran diferentes conjuntos numéricos (naturales y fracciones), y que la solución no fuese el resultado inmediato de un cálculo sino que los estudiantes para maestro tuviesen que realizar una interpretación del resto de la división para dar la respuesta correcta.

3.2.2. Diseño y características del Cuestionario 2

El Cuestionario 2 está formado por 4 respuestas diferentes dadas por estudiantes de 6º curso de *Educación Primaria* a cada uno de los problemas planteados en el Cuestionario 1. Las respuestas propuestas fueron seleccionadas atendiendo a las estrategias y errores identificados en los problemas de división-medida en investigaciones previas (Bulgar, 2003; Downton, 2009; Li y Silver, 2000; Silver et al., 1993; Tirosh, 2000), siguiendo los siguientes criterios:

- 2 respuestas que utilicen métodos alternativos a la división (sumas o restas sucesivas, conteo a saltos, modelización-agrupamiento…), una de ellas correcta (procedimiento y resultado correcto) y otra incorrecta (error conceptual o procedimental).

- 2 respuestas con división, una de ellas correcta (procedimiento y resultado correcto; en todos los problemas excepto en *Pasteles*) y otra incorrecta (error conceptual o procedimental).

El objetivo de este cuestionario era analizar cómo usaban los estudiantes para maestro el conocimiento de matemáticas para interpretar respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida en las que se emplea la división y otras estrategias alternativas a la misma, y algunas de ellas presentan errores de tipo conceptual o procedimental (conocimiento especializado del contenido). En este estudio, entendemos por *interpretar*, cómo los estudiantes para maestro puntúan las respuestas de los estudiantes de primaria mediante una escala de puntuación y qué justificaciones ofrecen a las puntuaciones dadas.

La escala de puntuación presentada a los estudiantes para maestro fue: 1 punto si consideraba que la respuesta era *totalmente correcta*, 0 puntos si pensaba que la respuesta era *totalmente incorrecta*, y medio punto (0.5 puntos) si consideraba la respuesta *parcialmente correcta***.**

La Figura 3.3. muestra el formato que presentaba el Cuestionario 2. Las respuestas de los estudiantes de primaria se identificaron con las letras A, B, C y D y en el cuadro *justificación* los estudiantes para maestro debían indicar la razón por la cual habían elegido una determinada puntuación para cada respuesta presentada. El Cuestionario 2 completo se puede consultar en el anexo (pp. 5-9).

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A Puntos A 1 2 3 Rojo 4 5 6 Verde 7 8 9 Azul 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 **Necesitó 12 colores**	**B** Puntos B 35 | 3 05 11 2 **Se necesitan 11 colores**
Justificación A	Justificación B
C Puntos C 35 | 3 05 11 2 Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color. **Solución: Necesita 12 colores**	**D** Puntos D 3 farolas 1 color 15 farolas 5 colores 30 farolas 10 colores 33 farolas 11 colores 36 farolas 12 colores **Son 12 colores**
Justificación C	Justificación D

Figura 3.3. Respuestas que fueron seleccionadas para el problema Farolas

A continuación, mostramos las características de las respuestas seleccionadas de los estudiantes de primaria para cada uno de los problemas.

3.2.2.1.Características de las respuestas del problema *Farolas*

En el problema *Farolas* las dos respuestas basadas en métodos alternativos seleccionadas fueron una modelización, respuesta A, y un procedimiento conteo a saltos, respuesta D (Figura 3.4).

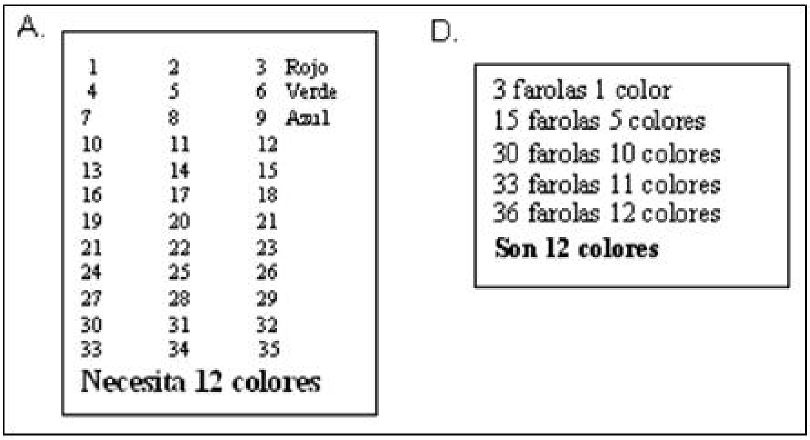


Figura 3.4. Respuestas A y D del problema Farolas

El procedimiento utilizado en la respuesta A es una enumeración donde aparecen representadas todas las *Farolas* formando grupos de tres. Esta respuesta contiene un error de tipo procedimental (error técnico), pues se repite la farola número 21. Sin embargo, el resultado es correcto.

La respuesta D es un procedimiento de conteo a saltos basado en la relación por cada 3 *Farolas* se necesita 1 color. En este procedimiento se establece una relación para múltiplos de tres partiendo del divisor 3 hasta superar el dividendo 35 (3, 15, 30, 33 y 36).

Las respuestas B y C estaban basadas en la división (Figura 3.5).

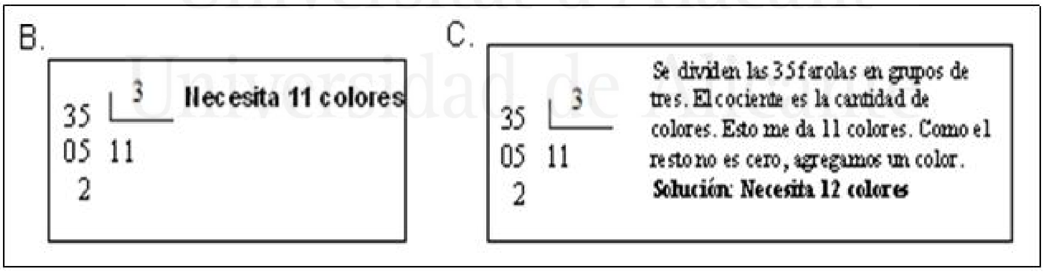


Figura 3.5. Respuestas B y C del problema Farolas

En las respuestas B y C el algoritmo de la división se utiliza de forma correcta. Sin embargo, en el momento de expresar el resultado, en la respuesta B el estudiante no toma en cuenta el resto de la división, es decir, comete un error conceptual de interpretación incorrecta de los términos de la división y, por tanto, el resultado es incorrecto, mientras que en la respuesta C sí toma en cuenta el resto (2 *Farolas* implican un grupo más por lo que se debe agregar otro color) y el resultado mostrado es el correcto.

3.2.2.2. Características de las respuestas del problema *Albergue*

Las respuestas A y D del problema *Albergue* están basadas en el algoritmo de la división (Figura 3.6).

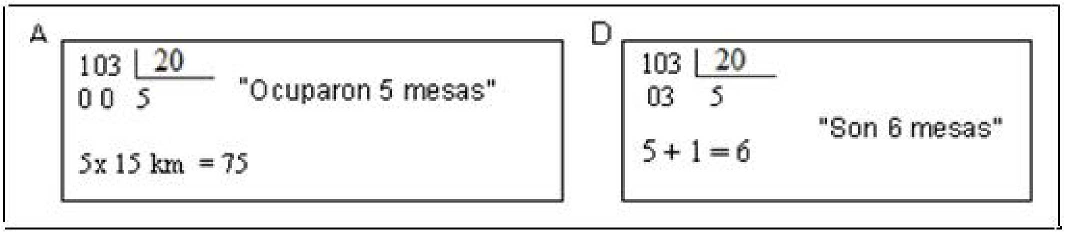


Figura 3.6. Respuestas A y D del problema Albergue

En la respuesta D el algoritmo se ha utilizado de forma correcta y se tiene en cuenta el resto de la división (3 estudiantes implica un grupo más). Aunque no explica el significado de la suma 5 + 1, el resultado es correcto. Sin embargo, en la respuesta A, el algoritmo de la división se utiliza de forma incorrecta (el resto no es cero), cometiendo un error procedimental (error técnico); también confunde el dato 15 mesas con 15 Km, por lo que el resultado es incorrecto.

Las respuestas B y C están basadas en métodos alternativos, la primera basada en sumas sucesivas y la segunda en restas sucesivas (Figura 3.7).

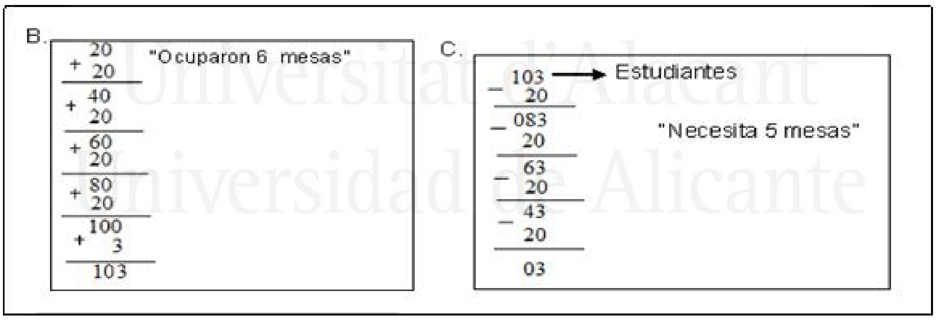


Figura 3.7. Respuestas B y C del problema Albergue

En la respuesta B se suman grupos de 20 estudiantes por mesa hasta llegar a una aproximación por defecto del total (100 estudiantes) y luego se añade 3 para completar el total de estudiantes 103, la respuesta es el número de veces que se han sumado grupos de 20 (5 veces) más un grupo de 3 estudiantes; en este caso el procedimiento y el resultado son correctos.

La respuesta C utiliza el total de estudiantes en el *Albergue* (103) y resta grupos de 20 asientos, hasta llegar a una aproximación de cero; la estrategia es correcta pero la respuesta contiene un error procedimental (error técnico) al restar 43 – 20, pues coloca 3 y no 23, por lo que el resultado es incorrecto, sin embargo, ha tenido en cuenta que los 3 estudiantes que 'sobran' deben ocupar también una mesa.

3.2.2.3. Características de las repuestas del problema *Pasteles*

Las cuatro respuestas de los alumnos de primaria al problema *Pasteles* se seleccionaron atendiendo a los procedimientos y errores identificados en investigaciones previas (Bulgar, 2003; Tirosh, 2000).

Las respuestas A y D están basadas en métodos alternativos a la división y ambas utilizan una representación gráfica dividiendo un rectángulo o un círculo en partes congruentes (modelización-agrupamiento; Figura 3.8).

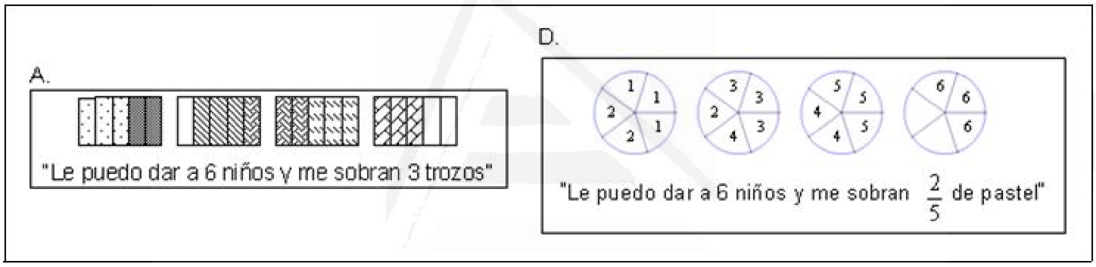


Figura 3.8. Respuestas A y D del problema Pasteles

En la respuesta A el alumno de primaria representa los cuatro pasteles con rectángulos y divide cada uno en 5/5, a continuación, lleva la unidad de medida que quiere dar a cada niño (3/5) sobre los rectángulos y cuenta cuántas veces hay 3/5. El niño comete un error procedimental de medida (sólo 2 trozos están en color negro) y no expresa lo que le sobra 3 trozos como una fracción. Además 3 trozos no puede ser la parte de pastel que sobra porque es igual al divisor de la división 20 : 3 (error conceptual).

En la respuesta D, el alumno también divide cada pastel en 5/5 e identifica con números las piezas que da a cada niño. El resultado es correcto.

Las respuestas B y C utilizan el algoritmo de la división (Figura 3.9).

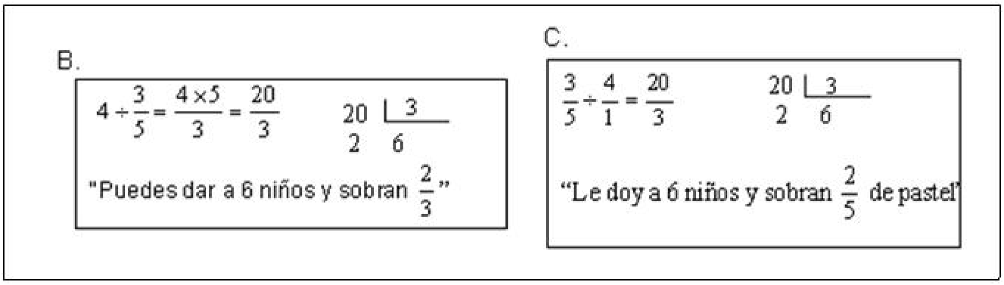


Figura 3.9. Respuestas B y C del problema Pasteles

En la respuesta B el alumno usa fracciones y divide el número de pasteles entre la fracción de pastel que debe dar a cada niño. Usa correctamente el algoritmo de la división de fracciones, pero no sabe interpretar correctamente lo que sobra (error de precisión en la respuesta, de tipo conceptual) pues los 2/3 que propone no son 2/3 de pastel sino 2/3 de la unidad de reparto (3/5 a cada niño).

En la respuesta C el alumno también usa fracciones pero invierte los términos de la división como si la operación tuviera la propiedad conmutativa (error conceptual). Además aplica el algoritmo incorrectamente (error procedimental). Pero los errores se neutralizan y el resultado es correcto identificando que la parte que sobra es 2/5 de pastel.

3.2.3. Aplicación de los instrumentos

El Cuestionario 1 fue resuelto por los estudiantes para maestro en el primer semestre de sus estudios, en su horario de clase, y dispusieron de 1 hora. Se explicó al alumnado participante el objeto del estudio, la forma de responder y su carácter voluntario. Así mismo, se brindó la posibilidad de solicitar aclaraciones a las preguntas en caso de duda.

El formato de presentación del Cuestionario 1 consistía en un cuaderno compuesto por 5 páginas. En la primera hoja se les pedía que escribieran sus datos personales, modo de acceso a la universidad y tipo de bachillerato realizado. En cada una de las hojas posteriores se presentaba el enunciado de un problema y un espacio para la realización de los cálculos. También se les dio una serie de instrucciones (Figura 3.10). Además, se indicó a los estudiantes para maestro que no debían olvidar escribir en la hoja las operaciones realizadas.

- El cuestionario consta de tres problemas y cada problema está en una hoja diferente.
- Lee detenidamente el enunciado y contesta lo que se te pregunta aunque no estés seguro/a de que esté bien.
- No borres nada, simplemente tacha con una línea
- Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido
- Tienes una hora para resolver los cuatro problemas
- No hables ni copies del compañero/a
- Puedes usar la calculadora
- Si tienes alguna duda, levanta la mano y el profesor/a te ayudará

Figura 3.10. Instrucciones del Cuestionario 1

El Cuestionario 2 fue resuelto por los estudiantes para maestro 15 días después de la realización del Cuestionario 1. Este cuestionario también lo realizaron durante el horario de clase y en aproximadamente 50 minutos. Este cuestionario estaba formado por un cuaderno de 4 hojas, la primera con las instrucciones (Figura 3.11.) y las otras tres con 4 respuestas dadas por alumnos de primaria a cada uno de los problemas del Cuestionario 1. Las cuatro respuestas de cada problema se presentaban en una página junto con un cuadro donde el estudiante debía justificar la puntuación asignada.

Este cuestionario contiene los 3 problemas que resolviste hace unos días. Te presentamos cuatro soluciones diferentes de cada problema dadas por alumnos de 6º de Primaria.

Califica cada una de estas soluciones con **1 punto, 0.5 puntos** ó **0 puntos** y escribe la puntuación en el recuadro de la derecha de cada solución:

- Cuando creas que una solución es **totalmente correcta**, califícala con **un punto** (1 punto).
- Si piensas que la solución es **totalmente incorrecta**, califícala con **cero puntos** (0 puntos).
- Califica con **medio punto** (0.5 puntos.) la solución que consideres **parcialmente correcta**.

Una misma puntuación la puedes utilizar cuantas veces creas necesario, en cualquier problema.

MUY IMPORTANTE
- En el recuadro "Justificación" debes escribir la explicación o comentario de tu calificación.
- Si no calificas alguna solución de algún problema indica la razón.
- Si no entiendes alguna solución, indícalo.

Figura 3.11. Instrucciones del Cuestionario 2

3.3.Análisis de datos

Teniendo en cuenta los datos de la investigación: las respuestas de los estudiantes para maestro a los Cuestionarios 1 y 2, el análisis de los datos se desarrolló en tres fases:

- En la primera se hizo un estudio del comportamiento global del grupo utilizando las respuestas dadas por los estudiantes para maestro a los cuestionarios 1 y 2.
- En la segunda se identificaron tres perfiles de los estudiantes para maestro sobre las respuestas al cuestionario 2.
- En la tercera se hizo un estudio de casos de los estudiantes para maestro pertenecientes a los perfiles con mayor número de estudiantes.

3.3.1. Fase 1: Comportamiento global de los estudiantes para maestro

En la primera fase se hizo un análisis global de las respuestas de los estudiantes para maestro al Cuestionario 1 y al Cuestionario 2. De las respuestas al Cuestionario 1 se estudió: la corrección de las respuestas, los procedimientos utilizados y los errores cometidos. De las respuestas al Cuestionario 2, se consideraron las puntuaciones dadas por los estudiantes para maestro.

a) Análisis de la corrección de las respuestas del Cuestionario 1

Las respuestas de los estudiantes para maestro al Cuestionario 1 fueron analizadas y clasificadas como correctas, regulares o incorrectas en cada uno de los problemas:

- **correcto** cuando tanto el procedimiento como la solución eran correctos (Figura 3.12).

	Ejemplos	Comentario
Respuesta	**Farolas**	
Correcta	35 |3 05 (11) → (11 colores distintos) 2/n +1 12 " * Explicación: (Hechos numéricos) Si fueran 36 farolas, podrían hacerse 12 agrupaciones de 3 farolas. Al ser 35 farolas, no se completan las 12 agrupaciones sino que se hacen 11 agrupaciones y sobran 2 farolas, que deberán pintarse de un color distinto a las anteriores. *Solución: ⇒ Por tanto se necesitó $\boxed{\text{12 colores distintos.}}$	El EPM realiza una división y añade una unidad al cociente explicando que al sobrarle 2 farolas se necesita otro color
	Albergue	
	103 |20 (3) (5) → mesas completas. → Sobran 3 alumnos, que deberán sentarse en la 6ª mesa.	El EPM realiza una división y añade una unidad al cociente explicando que al sobrarle 3 alumnos se necesita una mesa
	Pasteles	
	4 pasteles  5 x 4 = 20 20 ÷ 3 = 6'2 Puedo repartir 3/5 de pastel a 6 niños y me sobrarán 2/5 partes de un pastel.	El EPM representa gráficamente los pasteles divididos en quintos y lo resuelve gráficamente y con operaciones. Calcula cuantos quintos de pasteles tiene en total y realiza la división de los quintos de pastel entre el número que tiene que dar a cada niño.

*Figura 3.12. Ejemplos de respuestas **correctas** dadas por los EPM a los 3 problemas*

- **regular**, cuando los estudiantes para maestro realizaban una división e indicaban lo que sobraba pero sin darle una interpretación adecuada (Figura 3.13).

Respuesta	Ejemplos	Comentario
	Farolas	
Regular	1, 2, 3 4, 5, 6, 7, 8, 9 10, 11 ... 35 farolas, sin repetir colores. 35 ⌊3 05 11 2 Utilizarán 11 colores diferentes ya que, hay 11 grupos de 3 farolas y sobran → 2 sueltas.	El EPM realiza una división. No añade una unidad al cociente pero indica que sobran 2 farolas
	Albergue	
	103 ⌊20 3 5 → Ocuparán 5 mesas Dividimos los estudiantes entre el número de s por cada mesa (20 sillas), completan 5 mesas 3 estudiantes quedan sin sentarse.	El EPM realiza una división. No añade una unidad al cociente pero indica que 3 estudiantes se quedan sin mesas
	Pasteles	
	4 x 5 = 20 trozos en total 20 ⌊3 2 6 Sol: { Podría dar 3/5 de pastel a 6 niños y me sobrarían 2 trozos	El EPM calcula cuántos quintos de pastel tiene y lo divide entre 3. Indica a cuantos niños puede dar 3/5 de pastel pero lo que sobra no lo expresa en función de la parte del todo (quintos).

*Figura 3.13. Ejemplos de respuestas **regulares** dadas por los EPM a los 4 problemas*

- **incorrecta**, cuando no tenían en cuenta el resto de la división o la respuesta no tenía sentido (Figura 3.14).

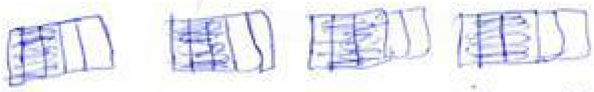
<table>
<tr><th></th><th>Ejemplos</th><th>Comentario</th></tr>
<tr><th>Respuesta</th><th colspan="2">Farolas</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Incorrecta</td><td>3 Pequeñas Rojo
3 Segundos Verde
3 Siguientes Azul
$\begin{array}{r} 35 \\ -\ 9 \\ \hline 26 \end{array}$
Utilizará 26 colores diferentes.</td><td>El EPM utiliza un procedimiento sin sentido</td></tr>
<tr><th colspan="2">Albergue</th></tr>
<tr><td>103 estudiantes
15 mesas
20 sillas
$\begin{array}{l\|l} 103 & 15 \\ \hline 130 & 6'9 \\ 05 & \end{array}$
6'9 mesas casi 7</td><td>El EPM realiza una división de estudiantes entre mesas</td></tr>
<tr><th colspan="2">Pasteles</th></tr>
<tr><td>
le puedo dar 3 quintos de pastel a 4 niños
me sobran:
$\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$</td><td>El EPM representa los pasteles divididos en quintos, reparte 3/5 de cada pastel pero ignora lo que sobra de cada pastel para continuar repartiendo.</td></tr>
</table>

Figura 3.14. Ejemplos de respuestas ***incorrectas*** *dadas por los EPM a los 4 problemas*

b) Análisis de los procedimientos utilizados en el Cuestionario 1

Atendiendo al procedimiento de resolución empleado por los estudiantes para maestro, se siguió un proceso inductivo (Strauss y Corbin, 1994) y para cada uno de los problemas se analizó el proceso de resolución seguido por los estudiantes para maestro. El análisis inductivo consistió, en un primer momento, en un análisis conjunto por parte de un grupo de tres investigadores, de una muestra de respuestas a los diferentes problemas, para generar descriptores de los procedimientos que parecían estar utilizando los estudiantes en cada tipo de problema. Estos descriptores para cada problema, se fueron refinando según se iban analizando nuevas respuestas. Este proceso se repitió para cada uno de los problemas, y finalmente, se consideraron los procedimientos en conjunto para ver si había evidencia de solapamiento entre ellos. Los procedimientos identificados son los siguientes:

- *División*. Aplicación del algoritmo de la división, ya sea con números naturales, decimales o fracciones (Figura 3.15).

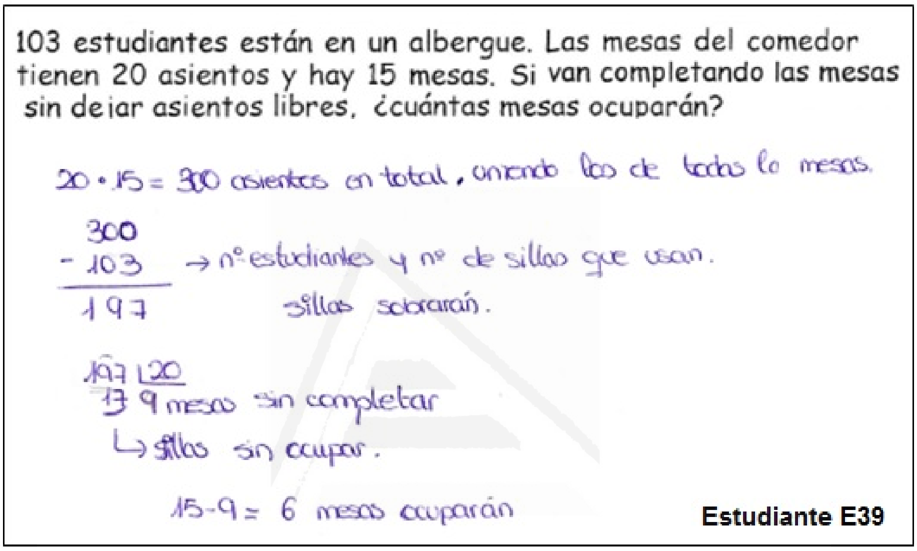


Figura 3.15. Uso del algoritmo de la división en el problema Albergue por E39

- *Procedimientos alternativos a la división:*
  - o *Sumas o restas repetidas.* La estrategia consiste en sumar o restar cantidades iguales hasta aproximarse al total o a cero respectivamente. El resultado es el número de veces que se han sumado o restado grupos iguales más una unidad (Figura 3.16).

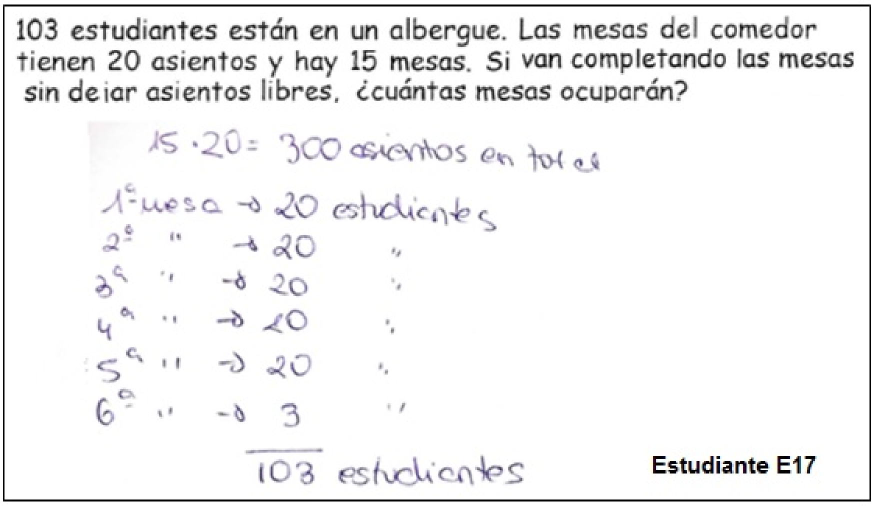


Figura 3.16. Uso de las sumas repetidas en el problema Albergue por E17

- *Modelización-agrupamiento.* Esta estrategia consiste en enumerar cada uno de los elementos del conjunto dado en un problema y agruparlos hasta llegar al total (Figuras 3.17 y 3.18). Es decir, hacer una serie de conjuntos cada uno de los cuales contiene el número de elementos que se ha indicado.

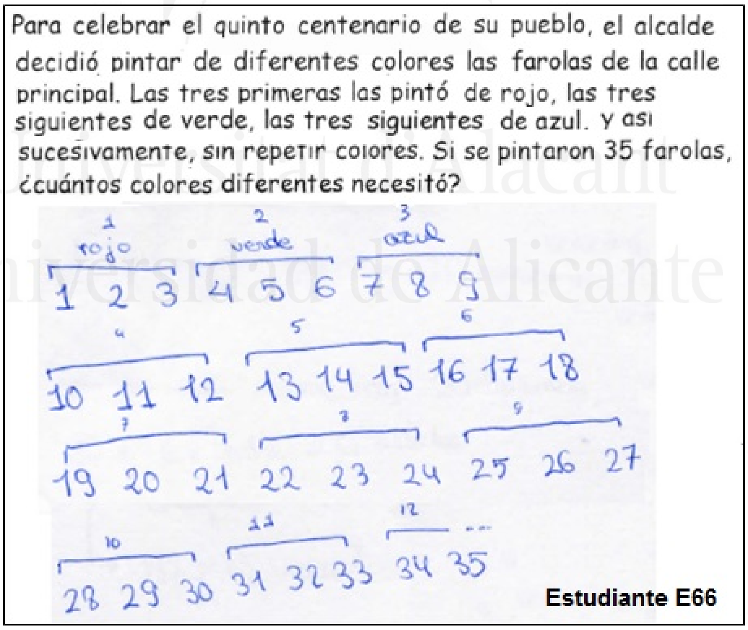


Figura 3.17. Uso de la estrategia modelización-agrupamiento en el problema Farolas por E66

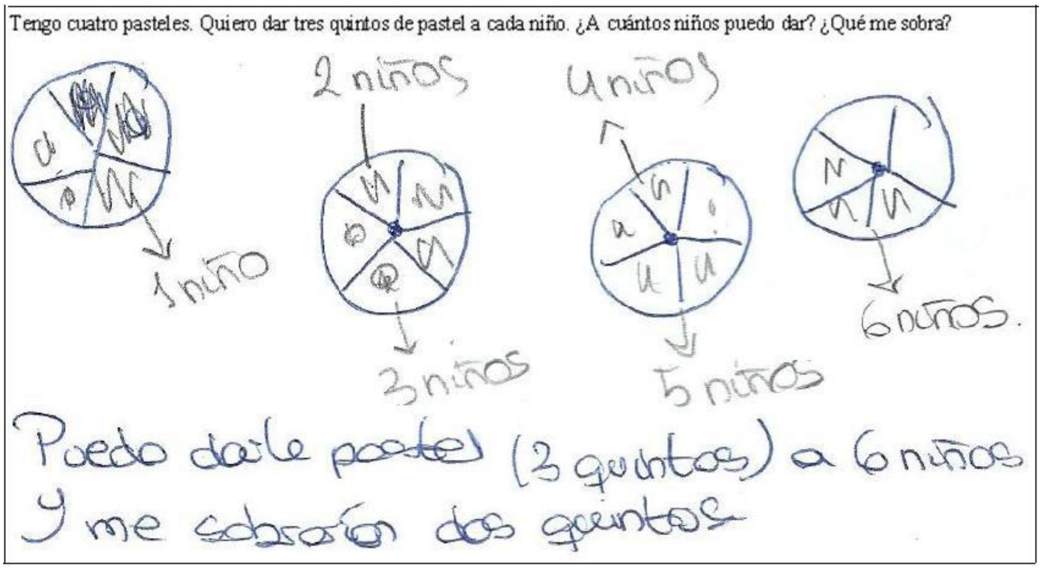


Figura 3.18. Uso de una estrategia modelización-agrupamiento en el problema Pasteles por E53

- *Regla de tres* o algoritmo de productos cruzados. Esta estrategia consiste en relacionar los datos multiplicativamente igualando los productos cruzados. Por ejemplo, en el problema *Albergue* el estudiante E19 multiplica el número de estudiantes por la unidad (103*1) y luego lo divide por el número de asientos de cada mesa (103:20) (Figura 3.19).

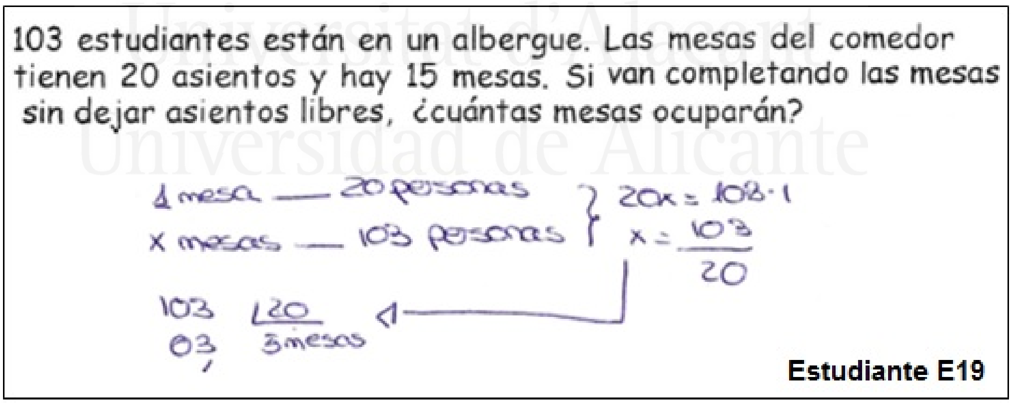


Figura 3.19. Uso de la regla de tres en el problema Albergue por E19

- *Conteo a saltos.* Estas estrategias realizan recuentos a saltos teniendo en cuenta el número de elementos en cada grupo (Figura 3.20).

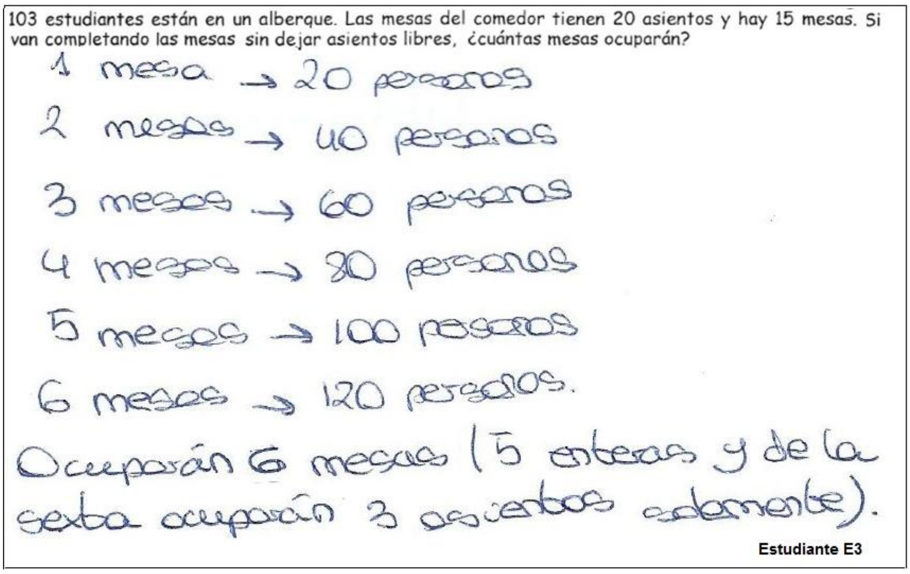


Figura 3.20. Uso de una estrategia de conteo a saltos en el problema Albergue por E3

- *Otras*. En este grupo se incluyen aquellos procedimientos no incluidos en las anteriores categorías (Figura 3.21).

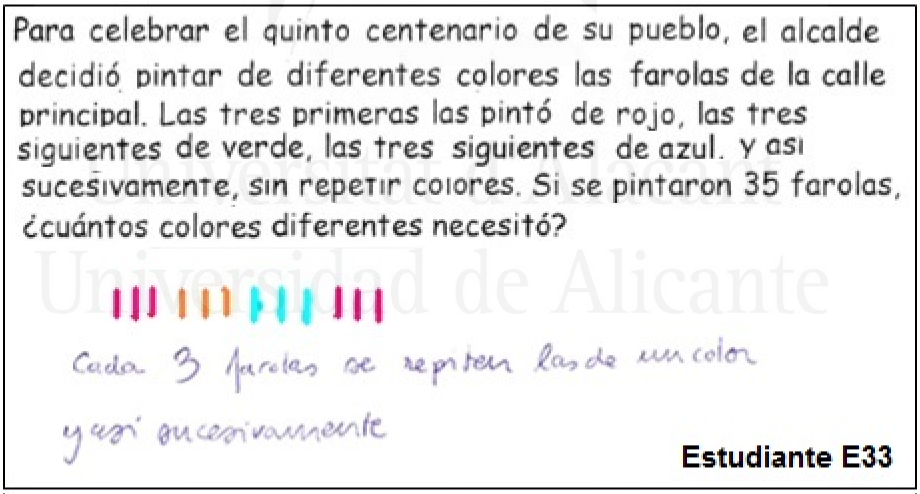


Figura 3.21. Uso de una estrategia sin sentido en el problema Farolas por E33

c) Análisis de los errores cometidos en el Cuestionario 1

Atendiendo a los errores cometidos las respuestas de los estudiantes para maestro al Cuestionario 1 fueron analizadas y clasificadas en las siguientes categorías identificadas en la literatura (Rico, 1995):

- *Datos mal usados (Datos)*: Errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos del problema y el tratamiento que le da el estudiante para maestro o por falta de comprensión del enunciado del problema: uso de datos superfluos; no utilizar algún dato necesario; intercambio entre datos; interpretación incorrecta de los datos en el contexto de la situación. Por ejemplo, en el caso del problema *Albergue* utilizar el dato superfluo que da el problema (15 mesas) (Figura 3.22.).

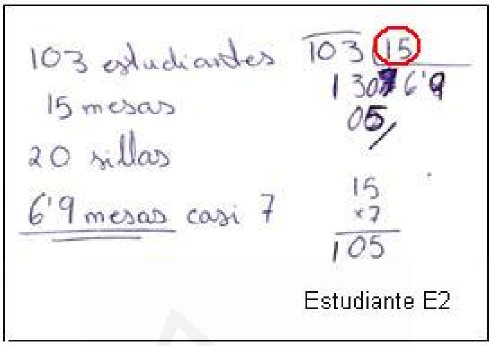


Figura 3.22. Resolución del problema Albergue por el estudiante para maestro E2

- *Error técnico.* Errores relativos a la realización de algoritmos de cálculo, a copiar mal un resultado parcial (resultado de una operación, datos de una tabla, etc.) que servirá de dato para el siguiente paso, a un mal conteo o a la manipulación incorrecta de símbolos y fórmulas algebraicas. Por ejemplo, en el caso del problema *Farolas* realizar erróneamente el conteo (Figura 3.23.).

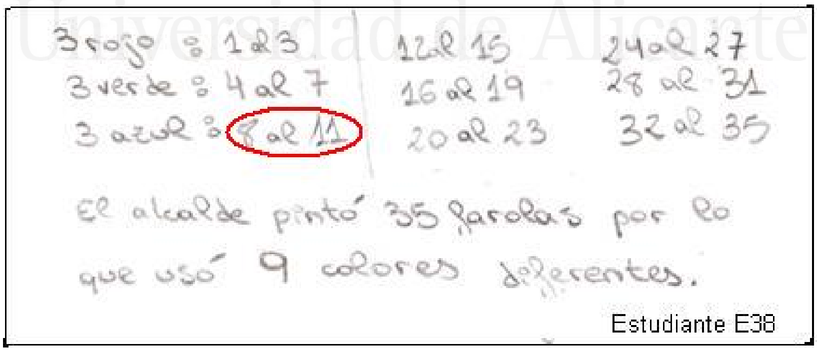


Figura 3.23. Resolución del problema Farolas por el estudiante para maestro E38

- *Interpretación incorrecta de los términos de una operación en relación a la situación planteada.* Por ejemplo asumir que el resto de una operación no debe considerarse en el resultado final. En el problema *Farolas* el estudiante para maestro

E56 no considera necesario considerar el resto para dar respuesta a la pregunta planteada ¿Cuántos colores diferentes se necesitó? (Figura 3.24.).

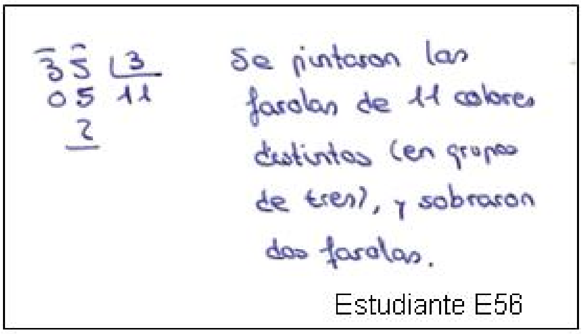


Figura 3.24. Resolución del problema Farolas por el estudiante para maestro E56

- *Falta de verificación del resultado.* Errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto pero el resultado obtenido no es la respuesta a la pregunta planteada. Si el resolutor hubiese contrastado el resultado con la pregunta del problema, el error podría haber sido subsanado como es el caso del problema *Albergue* realizado por el estudiante para maestro E6 (Figura 3.25.).

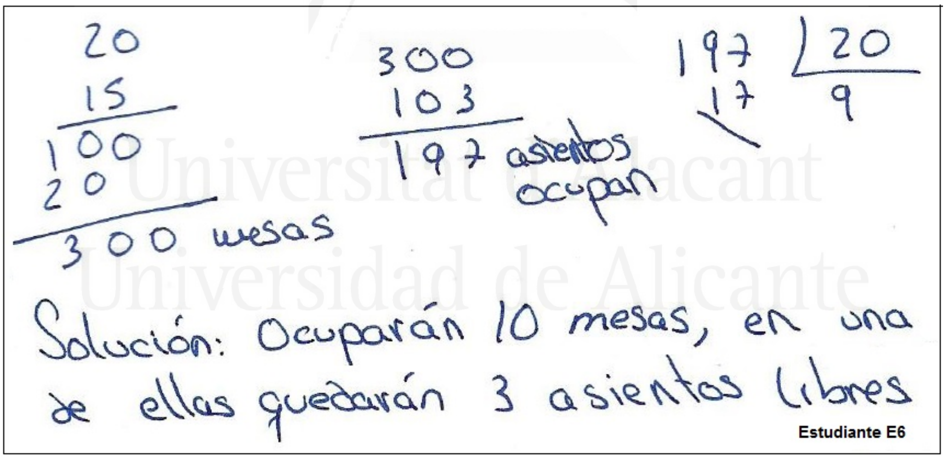


Figura 3.25. Resolución del problema Pasteles por el estudiante de E6

- *Error de precisión en la respuesta.* No expresar el resultado en términos matemáticos, por ejemplo no expresar en fracción la respuesta a la segunda pregunta del problema *Pasteles* donde el estudiante para maestro E9 da como resultado del problema 2 trozos sin indicar qué fracción de pastel representan los trozos (Figura 3.26).

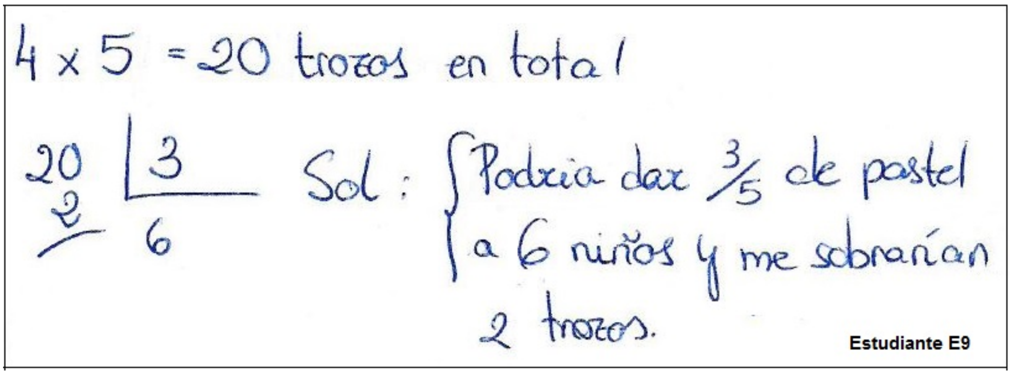


Figura 3.26. Resolución del problema Pasteles de E9

d) Análisis de las respuestas al Cuestionario 2

En relación al Cuestionario 2 se compararon las puntuaciones y justificaciones dadas por los estudiantes para maestro en:

1. Las dos respuestas basadas en la división con el fin de verificar si los estudiantes para maestro habían identificado la respuesta correcta y el error cometido.
2. Las dos respuestas correctas (sin errores de cálculo o debidos a la no interpretación del resto) con el fin de verificar si valoraban o no de igual modo los procedimientos empleados: división y alternativa.

3.3.2. Fase 2: Identificación de perfiles de comportamiento de los estudiantes para maestro

Una vez analizadas y clasificadas de forma global las respuestas al Cuestionario 1 y al Cuestionario 2, se realizó un análisis clúster o de conglomerados de las puntuaciones dadas por los estudiantes para maestro a las respuestas de los alumnos de primaria en el Cuestionario 2 con el fin de inferir diferentes perfiles de comportamiento de estos estudiantes.

El análisis clúster o de conglomerados, es una técnica estadística multivariante cuya finalidad es dividir un conjunto de objetos/individuos en grupos (o Clúster) de forma que los perfiles de los objetos/individuos en un mismo grupo sean muy similares entre sí y los objetos/individuos de clusters diferentes sean distintos (Figura 3.27.).

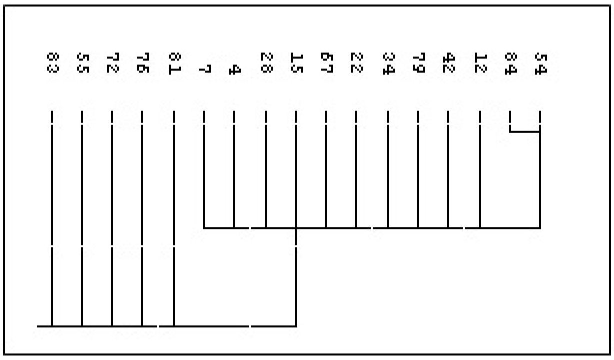


Figura 3.27. Ejemplo de diagrama de un análisis Clúster

Los datos del cuestionario 2 fueron codificados, para el análisis del Clúster, en variables mediante letras y números (Tabla 3.1.). La variable *estudiante* se identificó con la letra *E* y se le asignó un número del 1 al 84, por ejemplo, *E1* indica que es el estudiante 1. La variable problema se le asignó la inicial del nombre del problema, por ejemplo, la letra *F* problema *Farolas.* A cada letra de los problemas se le asignaron 12 variables. Cada una de estas 12 variables está formada por la inicial de cada problema, la letra de una de las opciones de las respuestas, A, B, C y D y, por último, de uno de los números 1, 2 o 3, dependiendo de las puntuaciones asignadas por los estudiantes para maestro. Si valoraba la respuesta con 1 punto, se le asignaba el número 1; si valoraba la respuesta con 0’5 puntos, se le asignaba el número 2 y por último, si el estudiante valoraba con 0 puntos la respuesta se le asignaba el número 3 a la variable. Por ejemplo, *FA1*, indica que la opción A del problema *Farolas* ha sido puntuada por el estudiante para maestro con un 1. A cada estudiante para maestro le corresponde una n-tupla compuesta por 36 componentes de ceros y unos. La codificación completa de las variables se puede ver en el anexo, pp. 9-11.

Tabla 3.1. Extracto de los datos (variables) para el análisis Clúster

Estudiantes	Variables											
	FA1	FA2	FA3	FB1	FB2	FB3	FC1	FC2	FC3	FD1	FD2	FD3	...
E1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	...
E2	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	...
E3	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	...
E4	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	...
E5	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	...
E6	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	...
E7	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	...
E8	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	...
E9	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

En nuestro caso, este análisis fue realizado mediante el programa SPSS versión 23.0 el cual nos proporcionó grupos de individuos que se comportaban de forma parecida en los tres problemas (en cuanto a las puntuaciones asignadas a las respuestas de los estudiantes), lo que nos permitió obtener 3 perfiles de comportamiento de los estudiantes en el Cuestionario 2 (Figuras 3.28.).

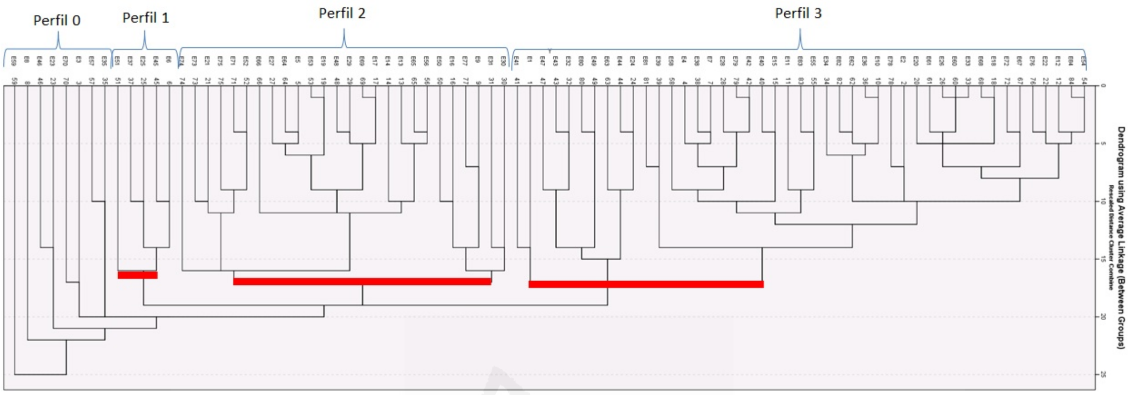


Figura 3.28. Diagrama del análisis Clúster realizado a las puntuaciones del Cuestionario 2

Las características de estos perfiles se obtuvieron analizando las puntuaciones dadas por los estudiantes para maestro pertenecientes a cada uno de los perfiles obtenidos y las justificaciones dadas a las mismas. Por ejemplo, una de las características del perfil 1, al que pertenecen 5 estudiantes, es que estos estudiantes valoran la corrección del resultado, independientemente que el proceso sea correcto o no, tal como muestran:

a) Las puntuaciones de los estudiantes del perfil.

Todos han puntuado con 1 la respuesta A del problema *Farolas* (en color verde) cuya solución es correcta pero no el proceso; con 0 la respuesta A del problema *Albergue* (en color rojo) cuyo resultado y proceso no son correctos; y con 0.5 la respuesta A del problema *Pasteles* (en color amarillo) que es parcialmente correcta y el proceso correcto (Tabla 3.2.).

b) Las justificaciones dadas por los estudiantes.

Por ejemplo, el estudiante para maestro E6 justifica la puntuación dada a la opción A del problema *Farolas* diciendo: "*Es correcta, aunque se ha equivocado a la hora de enumerar la Farolas*", y la misma opción del problema *Albergue*: *"Es* *incorrecta ya que le faltan los sobrantes, y además la división no está bien realizada"*, por último, para el problema Pasteles, indica: *"Está bien a los niños que puedes darle pastel, pero es incorrecto los trozos que sobran"*.

Tabla 3.2. Puntuaciones al cuestionario 2 de los estudiantes para maestro del Perfil 1

Estudiantes	FA1	FA2	FA3	FB1	FB2	FB3	FC1	FC2	FC3	FD1	FD2	FD3	AA1	AA2	AA3	AB1	AB2	AB3
E6	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
E25	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
E37	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
E45	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E51	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0

Estudiantes	AC1	AC2	AC3	AD1	AD2	AD3	PA1	PA2	PA3	PB1	PB2	PB3	PC1	PC2	PC3	PD1	PD2	PD3
E6	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E25	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E37	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E45	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E51	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A1	B1	C1	D1	Puntuación 1
A2	B2	C2	D2	Puntuación 0.5
A3	B3	C3	D3	Puntuación 0

3.3.3. Fase 3: Estudio de Casos

Una vez obtenidos los perfiles de comportamiento de los estudiantes para maestro se realizó un estudio de casos para triangular las características obtenidas en los perfiles con mayor número de estudiantes para maestro asignados.

Para el estudio de casos se han seleccionado 6 estudiantes para maestro (5 chicas y 1 chico). Para la selección se tuvo en cuenta el perfil o sub-perfil (Clúster) donde se encontraban de modo que los estudiantes para maestro seleccionados ejemplificaran los resultados obtenidos.

En el estudio de casos se describe la actuación del estudiante para maestro prototipo (3 estudiantes para maestro) en cada uno de los problemas, tanto en la resolución como en la puntuación de las respuestas y justificación de las mismas. En dos de los tres perfiles se han elegido algunos estudiantes para maestro que presentan ciertas discrepancias con los casos prototipos. En estos casos solo se describen las discrepancias entre los estudiantes para maestro seleccionados y los prototipos de cada perfil.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

En este capítulo se muestran, en una primera sección, los resultados correspondientes a la resolución de los problemas del Cuestionario 1 por los estudiantes para maestro, poniendo de manifiesto la corrección de las respuestas, los procedimientos utilizados y los errores cometidos por los estudiantes para maestro al resolver los tres problemas propuestos en el Cuestionario 1. Estos resultados nos darán información sobre el conocimiento matemático que tienen los estudiantes para maestro. En la segunda sección se presentan los resultados sobre las relaciones entre las respuestas dadas al Cuestionario 1 por los estudiantes para maestro y la puntuación dada por estos a las respuestas de los alumnos de primaria del Cuestionario 2. En la tercera sección se muestran perfiles de comportamiento de los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas y la interpretación de las respuestas de los alumnos de Educación Primaria a estos problemas. Estos perfiles nos dan características de cómo los estudiantes para maestro interpretan (puntúan y justifican) las respuestas de los estudiantes de Educación Primaria. Ejemplos de estos perfiles son mostrados en la última sección, a través de un estudio de casos.

4.1. Resolución de los problemas del Cuestionario 1 por los estudiantes para maestro

La Tabla 4.1 muestra el número de estudiantes para maestro que resolvió correctamente, regular o incorrectamente cada uno de los problemas.

Tabla 4.1. Los estudiantes para maestro que resolvieron correcto, regular o incorrectamente los diferentes problemas (Cuestionario 1)

Problema	Correcto	Regular	Incorrecto	Total
Farolas	64	5	15	84
Albergue	61	1	22	84
Pasteles	49	13	22	84

De manera general, podemos destacar que todos los problemas tuvieron un nivel de éxito superior al 50%. Sin embargo, los problemas con mayor nivel de éxito fueron *Farolas* (76.20%) y *Albergue* (72.61%) que presentaban características comunes ya que las magnitudes eran discretas y había que añadir una unidad al cociente de la división para responder a la pregunta. En cuanto al problema *Pasteles*, los estudiantes para maestro tuvieron más dificultad para realizar la división de un entero entre una fracción y para interpretar el resultado de la misma y así poder responder a las dos cuestiones planteadas (51.20% de éxito).

Por otra parte, cabe señalar que menos de 49 estudiantes para maestro resolvieron correctamente los tres problemas (58.30%) lo que nos indica las dificultades que tuvieron éstos a la hora de resolver los problemas de división-medida (conocimiento de matemáticas) donde debían interpretar el resto añadiendo una unidad al cociente o donde debían hacer una división de un entero entre una fracción e interpretar también el resto.

4.1.1. Procedimientos utilizados por los estudiantes para maestro en la resolución de los problemas del Cuestionario 1

Los estudiantes para maestro en la resolución de los problemas del Cuestionario 1 usaron distintos procedimientos de resolución: sumas o restas repetidas, modelización-agrupamiento, conteo a saltos, división y la regla de tres. La Tabla 4.2 muestra los procedimientos utilizados en cada uno de los problemas.

Tabla 4.2. Procedimientos usados por los estudiantes para maestro en la resolución de los problemas del Cuestionario 1

Problema	Sumas/Restas Repetidas	Modelización agrupamiento	División	Sumas/Restas Repetidas o modelización + División	Regla de tres	Conteo a saltos	Otras
Farolas	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	Sí
Albergue	Sí	No	Sí	Sí	Sí	No	Sí
Pasteles	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí

Por otra parte, cabe señalar que el número de estudiantes para maestro que utilizaron estos procedimientos no fue el mismo y tampoco el nivel de corrección con que se usaron. En la Tabla 4.3 se muestra el número de estudiantes que usaron cada procedimiento y el nivel de acierto, entre paréntesis, de los mismos.

Tabla 4.3. Número de estudiantes para maestro que han usado los distintos procedimientos en la resolución de los problemas del Cuestionario 1

Problema	Sumas/Restas Repetidas	Modelización agrupamiento	División	Sumas/Restas Repetidas o modelización + División	Regla de tres	Conteo a saltos	Otras	Total
Farolas	5(3)	3(2)	46(39)	22(20)	0	0	8(0)	84(64)
Albergue	9(7)	0	61(49)	6(4)	6(1)	0	2(0)	84(61)
Pasteles	0	36(25)	21(7)	21(15)	2(1)	1(1)	3(0)	84(49)

En el problema *Farolas* se han utilizado cuatro de los seis procedimientos identificados: sumas/restas repetidas, modelización-agrupamiento, el uso de la división y el uso de dos procedimientos para resolver el problema (sumas/restas repetidas y la división). Dentro de los procedimientos más usados se encuentra la división (56.76%) seguido del uso de dos procedimientos, división y sumas/restas repetidas (26.19%). Los procedimientos de sumas/restas repetidas y modelización agrupamiento solo los utilizaron 5 y 3 estudiantes respetivamente. El 76.20% de los estudiantes para maestro resolvieron correctamente el problema *Farolas* por alguno de los procedimientos usados, sin embargo dependiendo del procedimiento tuvieron más o menos éxito en su resolución. Así, del 56.76% que utilizó una división, un 84.78% de éstos lo resolvió correctamente. Del 26.19% que utilizó dos estrategias, un 90.90% lo resolvió correctamente. Sin embargo de los que utilizaron sumas y restas repetidas o modelización-agrupamiento (9.52% entre ambas estrategias) solo un 62.50% tuvieron éxito (entre ambas estrategias).

El problema *Albergue* fue resuelto también usando cuatro procedimientos siendo la división el más usado (72.61%), seguido del de sumas y restas repetidas con un 10.71%. El 72.61% de los estudiantes resolvieron correctamente el problema *Albergue* por alguno de los procedimientos utilizados. Cabe mencionar que del 72.61% que utilizó una división, un 80.32% lo resolvió correctamente. Del 10.71% que utilizó sumas o restas repetidas también tuvo éxito un 77.77%. Sin embargo, de los que usaron una regla de tres (7.14%) solo un 16.60% tuvieron éxito.

En el problema *Pasteles*, los estudiantes para maestro emplearon todos los procedimientos identificados excepto el de sumas y restas repetidas. En este problema el procedimiento más usado por los estudiantes para maestro fue el de modelización agrupamiento (42.85%). La división y el uso de dos procedimientos, en este caso modelización agrupamiento y división, fueron usados por el mismo número de estudiantes (25.00%). En este problema solo el 51.20% de los estudiantes lo resolvieron correctamente por alguno de los procedimientos. De los estudiantes para maestro que emplearon el procedimiento de modelización-agrupamiento (42.85%), un 69.44% lo resolvió correctamente. De los que emplearon la división (25.00%) solo tuvo éxito un 33.33% y de los que emplearon dos procedimientos, lo realizó correctamente un 71.42%.

Estos datos sugieren que el uso de la división parece que ayudó a los estudiantes para maestro en los problemas de división-medida con enteros (*Farolas* y *Albergues*), sin embargo el uso de procedimientos alternativos a la división permitió tener más éxito a los estudiantes para maestro en el problema de división-medida con fracciones (*Pasteles*). Para indagar más en esta inferencia, hemos reagrupado los procedimientos utilizados en dos grupos, en uno el procedimiento de la división y en el otro todos los procedimientos alternativos a la división (sumas o restas sucesivas, regla de tres, modelización-agrupamiento, etc.,). La Tabla 4.4 muestra el número de estudiantes para maestro que empleó cada una de estas estrategias y cuántos de ellos lo hicieron correctamente, información que se ha presentado entre paréntesis.

Tabla 4.4. Reagrupación de los procedimientos utilizados en la resolución de problemas por los estudiantes para maestro

Problemas	División	Alternativa	División + Alternativa	Otros	Total
Farolas	46(39)	8(5)	22(20)	8(0)	84(64)
Albergue	61(49)	15(8)	6(4)	2(0)	84(61)
Pasteles	21(7)	39(27)	21(15)	3(0)	84(49)

Se observa, nuevamente, que en los problemas *Farolas* y *Albergues*, el nivel de éxito fue mayor en los estudiantes para maestro que usaban dos procedimientos o una división (siendo este porcentaje mayor en *Farolas*). Sin embargo, en el problema *Pasteles* los estudiantes para maestro tuvieron más éxito cuando aplicaron procedimientos alternativos. Luego parece ser, que ante las dificultades en la realización de una división de un entero entre una fracción, los estudiantes para maestro utilizan otros procedimientos alternativos (en su mayoría, la modelización agrupamiento basada en una representación gráfica).

4.1.2. Errores cometidos en la resolución de los problemas del Cuestionario 1

En la resolución de los problemas del Cuestionario 1 se identificaron 5 tipos de errores: Datos mal usados, Error Técnico, Interpretación incorrecta de los términos de una operación, Falta de verificación del resultado y Error de precisión en la respuesta.

Los errores identificados no se produjeron de igual manera en la resolución de los tres problemas planteados. En general el error que más se cometió en los tres problemas fue el de datos mal usados y el que menos, la falta de verificación del resultado (Tabla 4.5).

Tabla 4.5. Errores cometidos por los estudiantes para maestro en la resolución de los problemas

Problemas	**Datos mal usados**	**Error Técnico**	**Interpretación incorrecta de los términos de una operación**	**Falta de verificación del resultado**	**Error de precisión en la respuesta**
Farolas	9	1	10	0	0
Albergue	16	3	5	0	0
Pasteles	19	2	2	1	12

En relación al menor número de respuestas correctas se encuentra el problema *Pasteles*. En este problema también se han cometido un mayor número de errores en comparación con los problemas *Albergue* y *Farolas*. El mayor número de los errores cometidos en *Pasteles* hace referencia a datos mal usado debido a que los estudiantes para maestro utilizaron un dibujo o gráfico para representar los 4 *Pasteles*, coloreaban 3/5 de cada pastel, sin considerar que de cada pastel sobraban 2/5 que se podían reagrupar nuevamente y dar a más niños 3/5 de pastel. Otro error que se cometió fue error de precisión en la respuesta. Este error solo se cometió en este problema (12 estudiantes) por no dar la respuesta a la segunda pregunta en forma de fracción, por ejemplo, el estudiante para maestro E60 escribió: "*puedo dar pastel a 6 niños y me sobran 2 partes de pastel*".

En el problema *Albergue*, 16 estudiantes cometieron el error datos mal usados al usar el dato superfluo, 15 mesas. En este problema solo se dieron dos errores más. En el problema *Farolas*, 9 estudiantes también cometieron el error datos mal usados al considerar que "*solo se necesitan 3 colores diferentes para pintar las farolas*" porque así lo decía el enunciado. Por otra parte, en *Farolas*, además del error anterior, se encontraron errores relacionados con la interpretación incorrecta de los términos de la operación dado que en este problema no se tuvo en cuenta el resto en la división realizada para dar el resultado del problema, por ejemplo, el E47 argumentó: "*usará 11 colores diferentes y le sobrarán 2 farolas. Si hubiesen habido 36 farolas se utilizarían 12 colores exactos*".

Los resultados obtenidos tras el análisis de los niveles de éxito, los procedimientos utilizados y los errores cometidos nos muestran que los estudiantes para maestro tuvieron dificultades en la resolución de problemas de división-medida, y en particular cuando se tenía que dividir un entero entre una fracción e interpretar el resto de la división (conocimiento de matemáticas). Por otra parte, el algoritmo de la división fue el procedimiento más empleado por los estudiantes para maestro cuando resolvían los problemas de división-medida utilizando números enteros, sin embargo, ante las dificultades que presenta la división de un entero entre una fracción, los métodos alternativos fueron los más utilizados por los estudiantes para maestro para resolver el problema *Pasteles* con éxito.

4.2. Relación entre las respuestas dadas al Cuestionario 1 por los estudiantes para maestro y la puntuación dada por estos a las respuestas de los alumnos de primaria del Cuestionario 2

En esta sección, presentaremos la relación entre las puntuaciones dadas por los estudiantes para maestro a cada una de las cuatro respuestas de los estudiantes de primaria al problema y el nivel de éxito de los estudiantes para maestro en dicho problema, en cada uno de los tres problemas.

4.2.1. Relación entre el nivel de éxito en el problema *Farolas* y las puntuaciones dadas a las respuestas de los alumnos de primaria

En la Tabla 4.6 se muestra el número de estudiantes para maestro que resolvieron el problema *Farolas* bien, regular o mal en el Cuestionario 1 (columna de la izquierda; entre paréntesis el número de respuestas bien, regular o mal) y el número de estos que puntuaron 1, 0.5 o 0 a cada una de las respuestas de los alumnos de primaria (Cuestionario 2), es decir, a las respuestas basadas en la división: B, división con error al no interpretarse el resto de la división, y C, división correcta al presentar un buen cálculo de la división y la interpretación del resto y a las respuestas A (con error técnico) y D ambas basadas en estrategias alternativas a la división.

Tabla 4.6. Respuestas de los estudiantes para maestro al problema Farolas (Cuestionario 1) y las puntuaciones dadas a las respuestas de los alumnos de primaria (Cuestionario 2)

Respuestas estudiantes para maestro Cuestionario 1	**Puntuaciones estudiantes para maestro Cuestionario 2**											
	Respuesta A (Alternativa con error)			**Respuesta B** (División con error)			**Respuesta C** (División con interpretación correcta del resto)			**Respuesta D** (Alternativa Correcta)		
	1	**0.5**	**0**	**1**	**0.5**	**0**	**1**	**0.5**	**0**	**1**	**0.5**	**0**
Correctas (64)*	21	39	4	0	28	36	59	5	0	30	29	5
Regulares (5)	1	2	2	1	3	1	5	0	0	2	2	1
Incorrectas (15)	7	4	4	1	8	6	12	2	1	5	5	5
Total 84	29	45	10	2	39	43	76	7	1	37	36	11

*El número que aparece entre paréntesis en las respuestas de los estudiantes para maestro al Cuestionario 1 son el número de estos que dio una respuesta correcta, regular o incorrecta al problema *Farolas*.

A continuación, describiremos los resultados mostrados en la Tabla 4.6 sobre la comparación de las puntuaciones dadas por los estudiantes a las respuestas del problema *Farolas* basadas: a) en una división; b) en estrategias alternativas.

4.2.1.1. Influencia de la resolución realizada y las puntuaciones dadas a las respuestas basadas en el procedimiento de la división

De los 64 estudiantes para maestro que respondieron correctamente al problema *Farolas*, 59 puntuaron la respuesta C (división correcta) con 1 y 5 con 0.5. Los argumentos de estos últimos estudiantes para maestro fueron que las justificaciones de las respuestas no eran suficientes, por ejemplo: "*no queda claro la explicación que nos da al final sobre el resto aunque la solución es correcta*" (E31). Sin embargo, sólo 36 de los 64 estudiantes para maestro identificaron que la respuesta B (división con error) era incorrecta y la puntuaron con 0. El resto de estudiantes, 28 de los 64, puntuaron la respuesta B con 0.5, justificando dicha respuesta diciendo que el alumno había utilizado la división para resolver el problema correctamente, pero él /ella sólo tomó en cuenta el resultado de la división sin interpretar el resto, por ejemplo: "*está bien planteado y la división bien hecha pero se le ha olvidado que el resto son farolas que también hay que* *pintar de otro color, por lo tanto, sería 12 colores”* (E54) o bien *“porque a pesar de que la división está bien realizada, no ha llegado a ver que le sobran dos farolas para pintar, solo ha hecho 11 grupos de 3, por lo que el resultado está mal”* (E43).

Los 5 estudiantes para maestro que resolvieron regular el problema *Farolas*, y 12 de los 15 que resolvieron mal el problema puntuaron la respuesta C (división correcta) con 1. Por tanto, aunque no fueron capaces de resolver el problema en el Cuestionario 1 si fueron capaces de identificar la respuesta correcta con división dada por un alumno de primaria en el Cuestionario 2. Por ejemplo, de los estudiantes para maestro que resolvieron el problema regular, E63 dijo: *“Además de ser rápida y concisa, lo ha explicado de forma que entendemos todas las cantidades de la división”* y el estudiante E56 dijo *“una sola operación y la explicación que la acompaña son buenas para la resolución del problema”*. De los estudiantes para maestro que resolvieron el problema mal, E38 expuso: *“Este problema yo lo he considerado correcto porque además de estar bien resuelto, lo justifica bien”*, y E17: *“Me parece la forma más correcta y precisa para la resolución del problema además está muy bien explicado”*.

4.2.1.2. Influencia de la resolución realizada y las puntuaciones dadas a las respuestas basadas en un procedimiento alternativo

Es importante destacar que 21 de 64 estudiantes para maestro que resolvieron correctamente el problema *Farolas*, calificaron la respuestas A (alternativa con error) con 1 punto y 39 de 64 las puntuaron con 0.5. Los estudiantes que puntuaron con 1 la respuesta A no reconocieron el error técnico y para ellos, la estrategia usada por el niño era correcta, por ejemplo, el estudiante E60 escribió: *“Buena presentación y deducción del problema”*, y E68: *“Este alumno ha utilizado ensayo – error pero lo ha realizado correctamente”* (en este caso el estudiante para maestro no identifica correctamente la estrategia utilizada).

Dos estudiantes puntuaron con un 0.5 la respuesta A y dieron dos tipos de argumentos. Uno de ellos (E22) se apoyó en el hecho de que si bien la estrategia usada era correcta el niño había repetido un número (error técnico) y argumentó: *“el niño se ha equivocado al escribir los números, pero ha entendido el problema”*. El otro (E54) se basó en que la justificación del niño no era suficiente sin considerar el "error técnico": *"está bien planteado y el resultado es correcto, pero le falta explicar cómo sabe que son 12 colores"*.

Por su parte, 30 de los 64 estudiantes para maestro que resolvieron correctamente el problema *Farolas* calificaron con un 1 la respuesta D (alternativa correcta), 29 de los 64 la puntuaron con 0.5 y 5 de 64 la puntuaron con 0. Para justificar la puntuación 0.5 ofrecieron tres tipos de argumentos. El primer tipo de argumento era que el resultado era correcto pero no entendían claramente el razonamiento del niño, por ejemplo, el estudiante E7 escribió: *"La solución es correcta, pero la estrategia realizada no es suficientemente comprensible para llegar a la solución"*. Otro argumento fue que aunque el resultado era correcto, la justificación de la respuesta era necesaria, por ejemplo, E35 dijo: *"El resultado está bien pero no expresa ni justifica qué estrategia ha utilizado"*. Finalmente, otro argumento fue que aunque el resultado era correcto, un alumno de 6º curso debería saber otras maneras de resolver el problema: *"El resultado está bien pero un alumno de 6º de primaria ya tendría que conocer otro mecanismo para resolver el problema"* (E69). Los estudiantes que puntuaron con un 0, no entendieron la estrategia del alumno de primaria, por ejemplo, E70 dijo: *"No entiendo muy bien lo que hace, aunque la respuesta es correcta. Puede que haya llegado desde un mecanismo externo a lo explicado en clase"*.

Cabe señalar que hubo más estudiantes para maestro que puntuaron con 1 la respuesta C (división con interpretación correcta del resto) que la D (alternativa Correcta): 76 frente a 37. Los argumentos que dieron los estudiantes para maestro que no puntuaron con 1 la respuesta D muestran su falta de conocimiento en relación al aprendizaje de los estudiantes (estrategias y dificultades- conocimiento especializado de contenido matemático) o la creencia de que los métodos alternativos no son tan válidos como los procedimientos basados en los algoritmos (en este caso en la división). Esto también se observa en el hecho de que casi penalizaron por igual la respuesta basada en el procedimiento de la división con un error conceptual (interpretación incorrecta del resto) que el procedimiento alternativo correcto.

Por otra parte, el hecho de que algunos estudiantes para maestro que resolvieron mal o regular el problema, interpretaran correctamente la respuesta basada en una división correcta, nos muestra que el Cuestionario 2 ayudó a los estudiantes para maestro a identificar la repuesta correcta basada en el procedimiento de la división.

4.2.2. Relación entre el nivel de éxito en el problema *Albergue* y las puntuaciones dadas a las respuestas

La Tabla 4.7 muestra el número de estudiantes para maestro que resolvieron el problema *Albergue* bien, regular o mal (Cuestionario 1) y el número de estudiantes para maestro que puntuaron 1, 0.5 o 0 en cada una de las respuestas de los alumnos de primaria (Cuestionario 2).

Tabla 4.7. Respuestas de los estudiantes para maestro al problema Albergue (Cuestionario 1) y las puntuaciones dadas a las respuestas de los alumnos de primaria (Cuestionario 2)

Respuestas estudiantes para maestro Cuestionario 1	**Puntuaciones estudiantes para maestro Cuestionario 2**											
	Respuesta A (División con error)			**Respuesta B** (Alternativa correcta)			**Respuesta C** (Alternativa con error)			**Respuesta D** (División con interpretación correcta del resto)		
	1	**0.5**	**0**	**1**	**0.5**	**0**	**1**	**0.5**	**0**	**1**	**0.5**	**0**
Correctas (61)*	0	4	57	38	22	1	2	34	25	51	9	1
Regulares (1)	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
Incorrectas (22)	0	0	22	6	12	2	1	7	12	18	4	0
Total	0	5	79	44	35	3	4	41	37	69	14	1

* El número que aparece entre paréntesis en las respuestas de los estudiantes para maestro al Cuestionario 1 es el número de estos que dio una respuesta correcta, regular o incorrecta al problema *Albergue*.

Al igual que en el problema *Farolas*, se muestran los resultados en cuanto a la comparación de las puntuaciones dadas por los estudiantes para maestro a las respuestas basadas en a) una división: las respuestas A (división con error) y D (división con interpretación correcta del resto), y b) estrategias alternativas: B (alternativa correcta) y C (alternativa con error técnico).

4.2.2.1. Influencia de la resolución realizada y las puntuaciones dadas a las respuestas basadas en una división

De los 61 estudiantes para maestro que resolvieron correctamente el problema *Albergue,* 57 puntuaron la respuesta A (división incorrecta) con 0 y 4 con 0.5. Los 4 estudiantes para maestro que puntuaron la división incorrecta (A) con 0.5 identificaron el error pero le dieron importancia al hecho de que los alumnos de primaria resolvieron el problema con una división. Por ejemplo, el estudiante E18 lo justificó así: *“No es correcto del todo porque aunque sabe que hay que dividir, no ha resuelto bien la división. El resto no es cero, también ha confundido datos y se ha sacado unos km que no había”*, y E1: *“La estrategia es adecuada pero la división no está bien hecha. El resto debería ser 3 en lugar de cero. “5*15km=75” no tiene sentido. Falta sumar una mesa”*. Los 22 estudiantes para maestro que resolvieron incorrectamente el problema puntuaron también la respuesta A con 0.

En relación a la respuesta D (división correcta), 51 de los 61 que habían resuelto bien el problema la puntuaron con 1. Sin embargo, 9 de estos 61 puntuaron la división correcta (D) con 0.5 dando justificaciones basadas en la poca claridad de los alumnos de primaria al explicar por qué se había añadido una unidad al resultado, por ejemplo, el estudiante E11 dijo: *“El niño sabe lo que hace pero no explica el porqué de las seis mesas. El resultado está bien”* y E77: *“El resultado está bien, no ha explicado por qué le suma un 1 al resultado que le ha dado la división. Para conseguir el punto entero, tiene que explicarlo.*” 18 de los 22 estudiantes para maestro que resolvieron incorrectamente el problema *Albergue* puntuaron la división correcta (D) con 1. Por ejemplo, el estudiante E6 argumentó: “*Correcta, ha añadido los alumnos que sobran en otra mesa*”, y E2*: “La estrategia es adecuada y el resultado también”.*

Cabe señalar que mayoritariamente, los estudiantes que resolvieron bien el problema identificaron bien la respuesta correcta basada en la división así como un porcentaje alto de los que no fueron capaces de resolver el problema en el Cuestionario 1. Por lo que de nuevo se observa que el Cuestionario 2 permitió a los estudiantes para maestro identificar correctamente las repuestas basadas en el procedimiento de la división.

4.2.2.2. Influencia de la resolución realizada y las puntuaciones dadas a las respuestas basadas en procedimientos alternativos

De los 61 estudiantes para maestro que respondieron correctamente al problema *Albergue,* 38 puntuaron con 1 la respuesta B (suma repetida correcta) y 22 la puntuaron con 0.5, aportando estos últimos explicaciones sobre la falta de justificación en la respuesta, por ejemplo, el estudiante E5 argumentó: *"Se ve claramente el proceso que se ha seguido para resolverlo y el resultado está correcto pero le falta justificar o por lo menos indicar qué es cada cardinal";* o bien en la no competencia del método utilizado para un alumno de sexto curso de primaria, por ejemplo, E32 escribió *"El niño ha ido sumando los asientos que hay en una mesa, más los de la otra y así sucesivamente hasta que ha llegado al número de estudiantes, luego ha visto cuantas veces lo ha hecho y esas son las mesas que necesita. Este planteamiento y el resultado son correctos, pero un niño de 6º curso de primaria debería usar otro tipo de estrategia para resolverlo".*

De los 61 estudiantes para maestro que resolvieron correctamente el problema *Albergue*, 25 puntuaron la respuesta con restas repetidas con error (C) con 0 y 34 con 0.5. Algunos estudiantes para maestro que puntuaron esta respuesta con un 0 argumentaron que el alumno de primaria no dio la respuesta correcta, porque no tuvo en cuenta el resto, pero no se dieron cuenta del error al restar, por ejemplo E29 escribió: *"La solución es incorrecta porque el niño no entiende el valor de 3 que sobra".* Los estudiantes para maestro que puntuaron esta respuesta con 0.5 explicaron que el método no era competente para alumnos de 6º curso de primaria, por ejemplo, E70 escribió: *"El proceso es un poco liado pero de todas formas no da la solución correcta al problema ya que olvida que sobran 3 alumnos y no les da mesa a esos tres alumnos"*; otros sin embargo expresaron que el método era correcto y el resultado incorrecto, por ejemplo, E11 argumentó: *"El niño sabe lo que está haciendo y aunque el resultado no es el correcto, el procedimiento es adecuado".*

De nuevo se observa en este problema que los estudiantes para maestro valoraron más la división que la estrategia alternativa.

4.2.3. Relación entre el tipo de respuestas dadas al problema *Pasteles* y las puntuaciones dadas a las respuestas

La Tabla 4.8 muestra la relación de estudiantes para maestro que resolvieron el problema *Pasteles* correctamente, regular o incorrectamente (Cuestionario 1) y el número de estudiantes para maestro que puntuaron 1, 0.5 o 0 en cada una de las respuestas de los alumnos de primaria (Cuestionario 2).

Tabla 4.8. Respuestas de los estudiantes para maestro al problema Pasteles (Cuestionario 1) y las puntuaciones dadas a las respuestas de los alumnos de primaria (Cuestionario 2)

Respuestas estudiantes para maestro Cuestionario 1	**Puntuaciones estudiantes para maestro Cuestionario 2**											
	Respuesta A (Alternativa con error)			**Respuesta B** (División con interpretación incorrecta del resto)			**Respuesta C** (División con error)			**Respuesta D** (Alternativa correcta)		
	1	**0.5**	**0**	**1**	**0.5**	**0**	**1**	**0.5**	**0**	**1**	**0.5**	**0**
Correctas (49)	1	34	14	8	34	7	32	10	7	44	5	0
Regulares (13)	2	10	1	4	8	1	9	2	2	11	2	0
Incorrectas (22)	2	13	7	3	17	2	17	3	2	21	1	0
Total (84)	5	56	22	15	58	10	57	15	11	75	8	0

Al igual que en los problemas anteriores, se muestran los resultados en cuanto a la comparación de las puntuaciones dadas por los estudiantes para maestro a las respuestas basadas en: a) una división: respuestas C (división con error) y B (división con interpretación correcta del resto), y b) estrategias alternativas: respuestas D (alternativa correcta) y A (alternativa con error técnico).

4.2.3.1. Influencia de la resolución realizada y las puntuaciones dadas a las respuestas basadas en una división

De los 49 estudiantes para maestros que resolvieron el problema correctamente, 8 puntuaron la respuesta B (división con interpretación incorrecta del resto) con 1, basando sus argumentos en que la operación utilizada era adecuada y el resultado correcto; ninguno de ellos mencionó el error conceptual. Por ejemplo, el estudiante E61 argumentó: *"Realiza bien la operación y llega a la solución correcta"*. Y 31 de ellos puntuaron la respuesta C (división con un error procedimental y otro conceptual) también con 1 pues consideraron que tanto la estrategia utilizada como el resultado eran correctos, sin advertir los errores cometidos (cabe recordar que el resultado en esta respuesta era correcto porque se compensaban los errores). Por ejemplo, el estudiante E33 escribió: *"La estrategia y la solución son correctas y le doy la máxima nota ya que ha entendido el problema y además ha efectuado las operaciones correctas para solucionarlo"*, y E5 dijo: *"Realiza correctamente los algoritmos y el resultado es correcto"*.

Por otra parte, de estos estudiantes para maestro que resolvieron correctamente el problema 7 puntuaron la respuesta B con 0; sus argumentos se basaron en que el resultado no era correcto, así el estudiante E21 comenta: *"El resultado de la operación o conclusión a la que llega no es correcta"*. Y otros 10 puntuaron C con 0.5, pues sólo advirtieron un error, la inversión de los términos de la división, y ninguno se dio cuenta de que el algoritmo se había aplicado de forma incorrecta, por ejemplo, el estudiante E69 escribió: *"El niño ha hecho la división mal y ha sido suerte que le diera lo mismo. Pero como tiene la mitad del problema bien, le he puesto esa nota"*.

La tendencia a puntuar mejor la respuesta C que la B también se constata en los estudiantes para maestro que resolvieron regular o mal el problema. Sin embargo, de los 13 estudiantes para maestro que resolvieron regular el problema, 8 puntuaron B con 0.5 y 1 estudiante con 0, y en la respuesta C, 2 estudiantes puntuaron con 0.5 y 2 con 0 puntos. En la respuesta B los estudiantes resaltaron el hecho de que la respuesta tiene un error, pues lo que sobra debe ser expresado en quintos y no en tercios: *"El cálculo que ha utilizado está bien, pero no ha tenido en cuenta que lo que le ha quedado es 2 partes de 5, no 2 partes de 3"* (E44). En la respuesta C, los 4 estudiantes hacen referencia tanto a los errores presentes en la respuesta como a que el resultado es correcto, por ejemplo: "*Pese a que la solución es correcta, en la operación de división hay un error puesto que en una división con fracciones se multiplica así:* $\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{3}{20}$ *de modo que no sé en qué se ha basado para plantearlo*" (E9). De los que puntuaron con 0, E39 afirmó *"está mal porque ha dividido lo que tiene que dar a cada persona entre las personas que hay.*

Después se habrá dado cuenta que 3:20 no podía ser y lo ha puesto bien, el resultado le da bien pero el planteamiento que es lo que importa está mal”.

De los 22 estudiantes para maestro que resolvieron el problema de forma incorrecta, 17 puntuaron la respuesta B con 0.5 y sólo 2 la puntuaron con 0 puntos. Estos estudiantes advirtieron el error y consideraron que la estrategia/planteamiento utilizado era el correcto: “*Ha resuelto bien todo, pero no interpreta bien el resultado. La estrategia es correcta*” (E78). Los que puntuaron con 0 puntos se centraron en que el resultado era incorrecto. También encontramos en este mismo grupo 3 estudiantes que puntuaron la respuesta C con 0.5 y 2 que la puntuaron con 0 puntos. Los argumentos para puntuar con 0.5 se centraron en que la estrategia utilizada era adecuada y el resultado era correcto aunque invirtiera los términos de la división, “*el resultado es correcto, la división de la fracción sería 4: 3/5 pero al final el resultado lo hace correcto*” (E17). Los que puntuaron con 0 puntos, basaron sus argumentos en que la división no era correcta: “*No sería una buena división, no queda claro 2/5 y la división*” (E25).

4.2.3.2. Influencia de la resolución realizada y las puntuaciones dadas a las respuestas basadas en procedimientos alternativos

De los 49 estudiantes para maestro que resolvieron el problema correctamente, 14 puntuaron la respuesta A (alternativa con error) con 0 y 5 la respuesta D (alternativa correcta) con 0.5 puntos. Los que puntuaron con 0 la respuesta A basaron sus argumentos en que el resultado era incorrecto, por ejemplo, el estudiante E48 dijo: “*Solución incorrecta ya que sobran 2/5 trozos*”. Los que puntuaron con 0.5 la respuesta D consideraron que, aunque el resultado era correcto, deberían haber operado con fracciones. En este caso, el estudiante E65 argumentó: “*Lo ha realizado correctamente, no obstante la dificultad residía en operar con números fraccionarios*”.

También encontramos que de los 13 estudiantes para maestro que resolvieron regular el problema, 11 puntuaron la respuesta correcta D con 1 punto. Estos estudiantes no fueron capaces de resolver el problema en el Cuestionario 1, pero fueron capaces de identificar la respuesta correcta en el Cuestionario 2, por ejemplo, el estudiante E78 indicó "*el resultado es correcto, ha utilizado una estrategia que ha considerado adecuada y ha sabido interpretar el resultado*".

Por otra parte de los 22 estudiantes que resolvieron mal el problema, 13 puntuaron la respuesta A con 0.5 y 21 la respuesta D con 1 punto. Nuevamente se pone en evidencia que aunque los estudiantes no fueron capaces de resolver el problema correctamente en el Cuestionario 1, lograron identificar la respuesta correcta en el Cuestionario 2, tal como manifiesta el estudiante E44: "*Está muy bien expresado y ha llegado a repartir a los 6 niños los 3/5 de pastel y sabe que sobran 2/5*".

En el problema *Pasteles* se observa que los estudiantes para maestro puntuaron mejor la respuesta con resultado correcto aunque tuviese dos errores (uno conceptual y otro procedimental) que una respuesta con un error conceptual donde el resultado no era correcto. Por otra parte, también se observa que puntuaron mejor la respuesta alternativa correcta que en los anteriores, pues de los 49 estudiantes para maestro que resolvieron correctamente el problema, 44 puntuaron la respuesta alternativa correcta (D) con un 1, 11 de los 13 estudiantes para maestro que lo resolvieron de forma regular también le dieron la puntuación de 1, y también 21 de los 22 que lo resolvieron incorrectamente.

Los resultados mostrados en esta sección donde se ha relacionado el nivel de éxito de los estudiantes para maestro en la resolución de los tres problemas y la puntuación (y justificación) dada a las respuestas de los alumnos de Educación Primaria ponen de manifiesto que:

- Aquellos estudiantes para maestro que fueron capaces de resolver el problema en el Cuestionario 1, identificaron como correcta la respuesta centrada en la división de los alumnos de primaria en el Cuestionario 2. Por lo tanto, parece ser que el haber tenido éxito con la resolución del problema en el Cuestionario 1 les ayudó a identificar esta respuesta correcta, pero no fue una condición necesaria pues parece ser que, por sus características, el Cuestionario 2 ayudó a los estudiantes para maestro a identificar procedimientos correctos y errores.
- La corrección o no de la respuesta dada por el estudiante de Educación Primaria ha influido en la forma de valorar la misma. Algunos estudiantes para maestro se

centraron más en la corrección o no de la respuesta que en el proceso seguido por el alumno de primaria. Por ejemplo, algunos estudiantes para maestro no identificaron el error o los errores cometidos en el procedimiento (*Farolas* y *Pasteles*) cuando el resultado era correcto. Tal y como se ha comentado anteriormente, en el problema *Pasteles* los estudiantes para maestro puntuaron mejor la respuesta con resultado correcto aunque tuviese dos errores (uno conceptual y otro procedimental) que una respuesta con un error conceptual donde el resultado no era correcto.

- Por otro lado se observa que algunos estudiantes para maestro puntuaron mejor (o por igual) una respuesta basada en una división con un error conceptual que una respuesta centrada en un procedimiento alternativo (en los problemas *Farolas* y *Albergue*). Este hecho fue explicado por los estudiantes para maestro considerando que el procedimiento de división era el más competente y adecuado para los alumnos de 6º de primaria. Por otra parte, otros estudiantes para maestro no comprendieron los procedimientos alternativos a la división.

4.3. IDENTIFICACIÓN DE LOS PERFILES DE COMPORTAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO

En este apartado se caracteriza el comportamiento de los estudiantes para maestro en relación a la puntuación dada a las respuestas de los tres problemas. El objetivo de esta sección es mostrar características comunes y diferentes en los comportamientos que tienen los estudiantes para maestro cuando puntúan respuestas de los alumnos de primaria a los tres problemas de división-medida. El análisis Clúster realizado para esta caracterización, ha dado lugar a tres perfiles donde han quedado agrupados 76 de los 84 estudiantes para maestro (90.50%) participantes en esta investigación.

I. Perfil 1: Resultado correcto en cualquier procedimiento

El perfil 1 está compuesto por cinco estudiantes para maestro de los 76 que han sido agrupados en el Clúster, (6.50%), que han puntuado las respuestas de los tres problemas tal como sigue (Tabla 3.2, capítulo anterior):

a. En el problema *Farolas* todos los estudiantes (100%) valoran con 1 la respuesta A alternativa con error técnico y respuesta correcta), y con un cero la respuesta B (división correcta y respuesta incorrecta). Todos excepto uno de ellos (80%) valoran la respuesta C (división correcta) con 0.5 y uno de ellos con 1. Sin embargo, la respuesta D (alternativa correcta) la valoran desde las tres posibilidades, con un 1, un estudiante (20%), dos estudiantes (40%) con 0.5 y los otros dos (40%) con 0.

b. En el problema *Albergue* todos los estudiantes (100%) valoran con 0 la respuesta A (división incorrecta y respuesta incorrecta). Dos estudiantes (40%) valoran con 1 la respuesta B (alternativa correcta) y tres (60%) con 0.5. Cuatro estudiantes para maestro (80%) valoran con 0.5 la respuesta C (alternativa con error, si bien en el resultado se ha tenido en cuenta el número de alumnos que quedan sin sentarse), y uno (20%) con cero. Por último, otros cuatro estudiantes (80%) valoran con 1 la respuesta D (división correcta), y uno (20%) de ellos con 0.5.

c. En el problema *Pasteles* cuatro estudiantes (80%) valoran con 0.5 la respuesta A (alternativa parcialmente correcta) y estos mismos estudiantes valoran con 1 la respuesta D (alternativa correcta); el quinto estudiante (20%) en ambos casos no hace ningún tipo de valoración. Las respuestas B (división con error en la interpretación del resto), y C (división con procedimiento incorrecto y respuesta correcta) son valoradas por dos estudiantes (40%) con 1; otros dos (40%) valoran la B con 0.5 y la C con 0.

En función de las puntuaciones realizadas y las justificaciones dadas a estas, podríamos decir que los estudiantes para maestro del perfil 1 valoran:

a. el resultado correcto independientemente que el proceso lo sea o no

Por ejemplo, el estudiante para maestro E45 para justificar la puntuación 1 dada a la opción A del problema *Farolas* indica: “*Mediante este proceso de resolución, el niño se ha guiado de una secuencia numérica fácil, por lo que creo que es una forma útil de resolución*”.

También el estudiante para maestro E3 ha puntuado con 1 la respuesta de la opción A del problema *Farolas* teniendo en cuenta el resultado: “*El problema está resuelto correctamente*”.

b. las respuestas debidamente justificadas

Por ejemplo, el estudiante E25 ha puntuado con 0.5 la opción C del problema *Farolas* y del problema *Albergue* por considerar que no están bien justificadas. Por ejemplo, en relación al problema *Farolas* indica: *"Estaría bien planteado, porque hay una explicación del resto 2, pero no queda del todo claro porqué de 2, cogemos un color más, si realmente es cada 3 colores"*. En relación al problema *Albergue*, dice: *"Sería una buena solución pero especificando que 5* [mesas] *estarían completas y la 6* [sexta] *por 3 personas. Total 6 mesas / 5 con 20 personas y 1 con 3 personas"*.

c. el uso indistinto del procedimiento de división y alternativos

Por ejemplo, la estudiante para maestro E6 puntúa con 1 la opción D de los tres problemas. Para justificar la puntuación dada en el problema *Farolas* dice: *"Es correcta aunque creo que debería decir que sobraban 2 farolas y por eso añada otro color"*. La puntuación dada al problema *Albergue* la justifica diciendo: *"Es correcta, ha añadido los alumnos que sobraban a otra mesa"*. Y por último, la puntuación dada en el problema *Pasteles* la argumenta: *"Es correcta habría una forma más sencilla de solucionarlo"*.

En la tabla 4.9 se muestran las características de este perfil.

Tabla 4.9. Características del Perfil 1

	Características
Perfil 1	• Valorar más un resultado correcto (en respuestas con errores conceptuales y procedimentales) que el proceso
	• Valorar las respuestas debidamente justificadas
	• Valorar por igual el uso de procedimientos distintos: división y alternativos

II. Perfil 2: Resultado correcto en el procedimiento división y gráfico

El perfil 2 está compuesto por veintiséis (34%) de los setenta y seis estudiantes para maestro agrupados en el Clúster. Las puntuaciones de estos veintiséis estudiantes a las respuestas a los tres problemas fueron las siguientes (Tabla 4.10):

a. En el problema *Farolas*, 18 estudiantes para maestro (69%) calificaron con 0.5 la opción A (alternativa con error técnico y respuesta correcta), 6 (23%) con un 1 y 2 (8%) con un 0. Por su parte, 23 estudiantes (88.50%) calificaron con 0 la opción B (división con error en la interpretación del resto), 1 con un 1 (3.50%) y 2 (8%) con 0.5. La opción C (división correcta) fue valorada con un 1 por 24 (92%) estudiantes y con 0.5 por 2 (8%) estudiantes para maestro. Por último, la opción D (alternativa correcta), fue valorada con 0.5 por 20 estudiantes (77%), 5 (19%) con un 1 y 1 (4%) con 0.

b. En el problema *Albergue*, 25 estudiantes para maestro (96%) valoraron con cero la respuesta A (división con error), un estudiante (4%) con 0.5. La opción B (alternativa correcta) fue valorada por 17 estudiantes (65%) con 0.5 y por 9 estudiantes (35%) con un 1. La opción C (alternativa con error), fue valorada por 23 estudiantes (88.50%) con 0 y 3 estudiantes (11.50%) con 0.5. Por último la opción D (división correcta), fue valorada con 1 por 17 (65%) estudiantes para maestro, 9 estudiantes (35%) la valoraron con 0.5.

Tabla 4.10. Puntuaciones al cuestionario 2 de los estudiantes para maestro del Perfil 2

Estudiantes	Variables														
	FA1	FA2	FA3	FB1	FB2	FB3	FC1	FC2	FC3	FD1	FD2	FD3	AA1	AA2	AA3
E5	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E9	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E13	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E14	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E16	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E17	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E19	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
E21	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E27	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E29	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E30	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0
E31	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
E48	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E50	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
E52	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
E53	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1
E58	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E64	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E65	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E66	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
E69	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E71	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E73	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E74	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E75	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
E77	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1

Estudiantes	AB1	AB2	AB3	AC1	AC2	AC3	AD1	AD2	AD3	PA1	PA2	PA3	PB1	PB2	PB3	PC1	PC2	PC3	PD1	PD2	PD3
E5	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E9	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
E13	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
E14	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
E16	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E17	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E19	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E21	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
E27	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E29	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E30	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E31	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E48	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E50	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
E52	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
E53	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E58	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E64	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E65	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
E66	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E69	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E71	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
E73	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
E74	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E75	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E77	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0

A1	B1	C1	D1	Puntuación 1
A2	B2	C2	D2	Puntuación 0.5
A3	B3	C3	D3	Puntuación 0

c. En el problema *Pasteles*, la opción A (alternativa con error) 14 estudiantes (54%) la han puntuado con 0, 10 estudiantes (38) con 0.5 y 2 (8%) con un 1. La opción B (división con error en la interpretación del resto), ha sido calificada con 0.5 por 16 estudiantes (61.50%), con 1 por 3 estudiantes (11.50%) y con 0 por 7 (27%). La opción C (división con error y resultado correcto) ha sido calificada con 1 por 19 (73%) estudiantes y con 0.5 por 7 (27%). Por último, la opción D (alternativa correcta), ha sido valorada con 1 por 23 (88.50%) estudiantes y 3 (11.50%) estudiantes con 0.5.

Del análisis conjunto de las puntuaciones proporcionadas y las justificaciones dadas, podríamos decir que los estudiantes para maestro del perfil 2 valoran que:

a. el resultado sea correcto desde un proceso correcto

Por ejemplo, el estudiante para maestro E30 justificó su puntuación a las opciones A y B del problema *Farolas* en los siguientes términos:

"*A: 0.5, repite 2 veces el número 21, pero consigue llegar a la solución final…*"

B: 0, es incorrecto ya que no tiene en cuenta el resto 2, el cual significaría añadir un color más".

b. el procedimiento utilizado sea la división

Por ejemplo, el estudiante para maestro E17 justifica la puntuación dada a las opciones A y C del problema *Albergue*, diciendo:

"*B: 0.5, el resultado es correcto, pero se puede utilizar otra estrategia* [procedimiento] *para resolverlo en menos tiempo.*

D: 1, me parece la forma más correcta y precisa para la resolución del problema además está muy bien explicado"

Y el estudiante para maestro E16 justifica su puntuación al apartado B del problema *Albergue* diciendo:

"B: 0.5, porque aunque el problema está bien resuelto, los niños de 6º deberían ya conocer la forma más rápida y precisa de llegar a la solución.

D: 0.5, este problema es más directo en su resolución pero la operación 5+1=6 debería haber sido explicado. (5 mesas completas y como nos quedan 3 niños, 1 mesa más)"

De igual forma que lo estudiantes anteriores, E65, justifica los apartados B y D del problema *Albergue*:

"*B: 0.5, ha sabido resolver correctamente pero no con la estrategia más adecuada.*

D: 1, ha escogido la estrategia correcta y ha reflexionado sobre el resultado".

Si bien, en el caso del problema *Pasteles* admiten un procedimiento alternativo: modelización con un gráfico. Por ejemplo, el estudiante para maestro E36 justifica la opción D del problema *Pasteles* que ha puntuado con 1, diciendo: *"Esta es la misma estrategia* [procedimiento] *que utilicé yo. Pienso que los dibujos* [representación gráfica] *ayudan a entender el problema y a hacerlo más cercano y real. Se ve claramente los trozos que sobran y a los niños a los que da pastel".*

En la tabla 4.11 se muestran las características de este perfil.

Tabla 4.11. Características del perfil 2

	Características
Perfil 2	• Valorar un resultado correcto desde un proceso correcto
	• Valorar más el procedimiento de la división que los procedimientos alternativos en problemas con números naturales
	• Valorar el procedimiento alternativo en el problema de división de un entero entre una fracción.

III. Perfil 3: Resultado correcto o parcialmente correcto en cualquier procedimiento

El perfil 3 está compuesto por cuarenta y cinco estudiantes para maestro (59%) de los setenta y seis agrupados por el Clúster. Estos cuarenta y cinco estudiantes para maestro han puntuado las respuestas de los alumnos de primaria a los tres problemas de la siguiente manera (Tabla 4.12):

a. En el problema *Farolas*, 23 estudiantes para maestro (51%) calificaron con 0.5 la opción A (alternativa con error técnico y resultado correcto), 17 estudiantes (38%) con 1 y 5 estudiantes (11%) con un 0. Por su parte, 35 (78%) estudiantes calificaron con 0.5 la opción B (división con error en la interpretación del resto) y 10 estudiantes (22%) con 0. La opción C (división correcta), fue valorada con 1 por los 45 estudiantes (100%). Por último, la opción D (alternativa correcta) fue valorada con 1 por 28 estudiantes (62%), con 0.5 por 12 estudiantes (27%) con 0.5 y con 0 por 5 estudiantes (11%).

b. En el problema *Albergue*, 42 estudiantes (93%) valoraron con 0 la respuesta A (división incorrecta y resultado incorrecto) y 3 estudiantes (7%) con 0.5. La opción B (alternativa correcta), fue valorada por 31 estudiantes (69%) con 1, por 13 estudiantes (29%) con 0.5 y por un estudiante (2%) con 0. La opción C (alternativa con error) fue valorada por 34 estudiantes (75.50%) con 0.5 y por 11 estudiantes (24.50%) con 0. Por último, la opción D (división correcta), fue valorada con 1 por 44 estudiantes para maestro (98%), un estudiante (2%) la valoró con 0.5.

c. En el problema *Pasteles*, la opción A (alternativa con error fue valorada con 0.5 por 38 (85%) estudiantes, 6 estudiantes (13%) lo califican con 0 y un estudiante con 1 (2%). La opción B (división con error en la interpretación del resto) ha sido calificada con 0.5 por 37 estudiantes (82%), por 5 estudiantes (11%) con 1 y por 3 estudiantes (7%) con 0. La opción C (división con errores y resultado correcto) ha sido calificada con un 1 por 32 estudiantes (71%), por 6 estudiantes (13%) con 0.5 y por 7 (16%) estudiantes con 0. Por último, la opción D (alternativa correcta) ha sido valorada con 1 por 44 estudiantes (98%) y un estudiante (2%) la valoró con 0.5.

Tabla 4.12. Puntuaciones al cuestionario 2 de los estudiantes para maestro del Perfil 3

Estudiantes	Variables																																			
	FA1	FA2	FA3	FB1	FB2	FB3	FC1	FC2	FC3	FD1	FD2	FD3	AA1	AA2	AA3	AB1	AB2	AB3	AC1	AC2	AC3	AD1	AD2	AD3	PA1	PA2	PA3	PB1	PB2	PB3	PC1	PC2	PC3	PD1	PD2	PD3
E1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
E2	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E4	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E7	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E10	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E11	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E12	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E15	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E18	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E20	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E22	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E24	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E26	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E28	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E32	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E33	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E34	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E36	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E38	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E39	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E40	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E41	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E42	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E43	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E44	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E47	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
E49	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E54	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
E55	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E58	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E60	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E61	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E62	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E63	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E67	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E68	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E72	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E76	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
E78	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E79	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E80	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E81	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
E82	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E83	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E84	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0

A1	B1	C1	D1	Puntuación 1
A2	B2	C2	D2	Puntuación 0.5
A3	B3	C3	D3	Puntuación 0

Del análisis conjunto de las puntuaciones y las justificaciones dadas a estas por los estudiantes para maestro del perfil 3, podríamos decir que estos estudiantes valoran:

a. la corrección del procedimiento independientemente de la corrección o incorrección de la respuesta

Por ejemplo, en el problema *Farolas* el estudiante para maestro E43, justificó su puntuación a la opción B diciendo:

"B: 0.5, porque a pesar de que la división está bien realizada, no ha llegado a ver que le sobran dos farolas para pintar, solo ha hecho 11 grupos de 3, por lo que el resultado está mal."

También el estudiante para maestro E1, en el problema *Albergue*, valoró el procedimiento independientemente de la incorrección de la solución dando el siguiente argumento:

"A: 0.5, la estrategia [procedimiento] *es adecuada pero la división no está bien hecha. El resto debería ser 3 en lugar de cero. "5*15km=75" no tiene sentido. Falta sumar una mesa."*

En el problema *Pasteles* el estudiante para maestro E36 puntuó las opciones A y B valorando independientemente la solución y el procedimiento en los siguientes términos:

"A: 0.5, media solución está bien, pero la otra mitad no. Sí que les puede dar a 6 niños pero sobran 2/5, no 3 trozos.

B: 0.5, el proceso que ha hecho es ir restando trozos, pero no le sobran 2/3 sino 2/5."

b. el uso indistinto de procedimientos de división y alternativos

Por ejemplo, en el problema *Farolas* el estudiante para maestro E43, justificó su puntuación a las opciones C y D diciendo:

"C: 1, porque el procedimiento y el resultado son correctos.

D: 1, porque el procedimiento y el resultado son correctos"

En el problema *Pasteles* el estudiante para maestro E36 puntuó con la máxima puntuación las opciones C y D al considerar que los dos procedimientos utilizados eran correctos aunque él solo conocía uno de ellos y era el que había utilizado en el cuestionario 1 tal como indica:

"C: 1, esta estrategia está bien, no la había pensado. Le sale en el cociente los niños que les puede dar y en el resto lo que queda 2 y como tienen que ser quintos de pastel pues 2/5 son los trozos que sobran.

D: 1, ésta es la misma estrategia que utilicé yo. Pienso que los dibujos ayudan a entender el problema y lo hacen como más cercano y real. Se ve claramente los trozos que sobran y a los niños a los que dar pastel.".

En la tabla 4.13 se muestran las características del perfil 3.

Tabla 4.13. Características del perfil 3

	Características
Perfil 3	• Valorar los procedimientos correctos independientemente de que la respuesta dada sea incorrecta o correcta
	• Valorar por igual el uso de procedimientos distintos: división y alternativos

Terminamos esta sección mostrando a través de la tabla 4.14 las características de los tres perfiles.

Se observa que las dos características importantes que dan lugar a las tres formas distintas de interpretar las respuestas de los alumnos de Educación Primaria son: la valoración por igual o no de los dos procedimientos, división y alternativos, y la valoración del resultado y/o proceso. Esta última característica está relacionada con la capacidad de identificar los errores procedimentales y conceptuales que aparecían en las respuestas de los alumnos de Educación Primaria. A continuación se ejemplifican las características de estos perfiles a través de un estudio de casos.

Tabla 4.14. Características de los tres perfiles

	Características
Perfil 1	• Valorar más un resultado correcto (en respuestas con errores conceptuales y procedimentales) que el proceso
	• Valorar las respuestas debidamente justificadas
	• Valorar por igual el uso de procedimientos distintos: división y alternativos
Perfil 2	• Valorar un resultado correcto desde un proceso correcto
	• Valorar más el procedimiento de la división que los procedimientos alternativos en problemas con números naturales • Valorar el procedimiento alternativo en el problema de división de un entero entre una fracción.
Perfil 3	• Valorar los procedimientos correctos independientemente de que la respuesta dada sea incorrecta o correcta
	• Valorar por igual el uso de procedimientos distintos: división y alternativos

4.4. ESTUDIO DE CASOS

En esta sección presentamos un estudio de ocho casos de estudiantes para maestro. Para cada uno de los perfiles estudiaremos en primer lugar un caso prototipo. Posteriormente, para cada uno de los perfiles 2 y 3 estudiaremos casos que perteneciendo al mismo perfil que el prototipo presentan algunas diferencias con este. En el perfil 2 estudiaremos dos casos y el en perfil 3 estudiaremos 3 casos. Los casos prototipos los vamos a describir mostrando en primer lugar cómo resolvieron cada uno de ellos los tres problemas y posteriormente cómo puntuaron cada uno de los problemas y las justificaciones dadas. Los casos que presentan discrepancias con los casos prototipo solo serán estudiados a partir de estas discrepancias.

4.4.1. Casos del perfil 1

En esta sección estudiamos el caso de *Marta* (E45). Esta estudiante para maestro pertenece al perfil 1 y responde a las características de este perfil. En este perfil no se ha observado ninguna discrepancia.

- **El caso de *Marta* (E45)**

Marta es una estudiante de 18 años. Cursó Bachillerato en la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales con la asignatura de matemáticas y accedió a la universidad por la modalidad Selectividad.

Esta estudiante resolvió de forma correcta dos problemas, *Farolas* y *Pasteles*, y de manera regular el problema *Albergue*. En relación a la interpretación de las respuestas de los alumnos de primaria, cabe señalar que valoró más los resultados correctos independientemente de la corrección del proceso. Esto se observa cuando en el problema *Farolas* puntúa con un 1 la respuesta basada en un procedimiento alternativo con un error en el proceso y respuesta correcta (A) y con un 1 la respuesta C de *Pasteles* centrada en una división con dos errores que se compensaban dando una respuesta correcta (Tabla 4.15). Por otro lado se observa que penaliza las respuestas que no tienen el resultado o proceso explicado (o justificado). Por ejemplo, en el problema *Farolas* puntúa con 0.5 las respuestas correctas centradas en procedimientos alternativos y de la división. Esta estudiante para maestro puntúa por igual los procedimientos alternativos y la división. Cabe señalar que esta estudiante utilizó procedimientos de modelización-agrupamiento en el problema *Farolas* y *Pasteles.*

Tabla 4.15. Procedimientos utilizados por Marta (E45) en la resolución problemas (Cuestionario 1) y puntuaciones dadas a los problemas (Cuestionario 2)

		Puntuaciones asignadas a las respuestas			
		A	**B**	**C**	**D**
Farolas	Modelización Gráfico Correcta	1	0	0.5	0.5
Albergue	División Regular	0	1	0.5	1
Pasteles	Modelización Gráfico correcta	0.5	1	1	1

A continuación, describimos el comportamiento de *Marta* en la resolución de los problemas (Cuestionario 1) y en la valoración de las respuestas (Cuestionario 2).

- **Problema *Farolas***

Marta resolvió bien el problema *Farolas* utilizando una representación gráfica (modelización-agrupamiento). Sin embargo, no interpretó como correctas las respuestas C y D puntuándolas con 0.5 al considerar, desde su punto de vista que las justificaciones dadas por el alumno de primaria eran breves: *"…vemos que el niño entiende el algoritmo de la división con todos sus componentes, solo que la justificación me parece muy breve. Se le debería enseñar a argumentar más su respuesta"* (Figura 4.1).

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

C Puntos C: 0'5 35 ⌊3 05 11 2 Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color. **Solución: Necesita 12 colores**	**D** Puntos D: 0'5 3 farolas 1 color 15 farolas 5 colores 30 farolas 10 colores 33 farolas 11 colores 36 farolas 12 colores **Son 12 colores**
Justificación C - En este caso vemos que el niño entiende el algoritmo de la división con todas sus componentes, solo que la justificación me parece breve. Se le debería enseñar a argumentar más su respuesta.	Justificación D - Para conseguir llegar a esta solución, vemos que el niño se ha guiado por el suceso de series numéricas. Ya que podemos comprobar que se ha fijado en múltiplos de 3, y ha comprobado que son 12 colores.

Figura.4.1. Justificación de Marta (E45) a la puntuación dada a las respuestas C y D de Farolas

Marta puntuó con 0 la respuesta con error B, la justificó indicando que el niño no había tenido en cuenta el resto: *"…Pero no se ha dado cuenta que si le sobran dos farolas se le debe añadir un color"*. Sin embargo, al no identificar el error técnico cometido en el proceso de la respuesta A, ésta la puntuó con 1, y lo justificó describiendo el procedimiento utilizado por el alumno y valorándolo: *"Mediante este* *proceso de resolución, el niño se ha guiado de una secuencia numérica fácil. Por lo que creo que es una forma útil de resolución”* (Figura 4.2).

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A (Puntos A: 1)

1	2	3 Rojo
4	5	6 Verde
7	8	9 Azul
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
21	22	23
24	25	26
27	28	29
30	31	32
33	34	35

Necesitó 12 colores

B (Puntos B: 0)

35 | 3
05 11
2

Se necesitan 11 colores

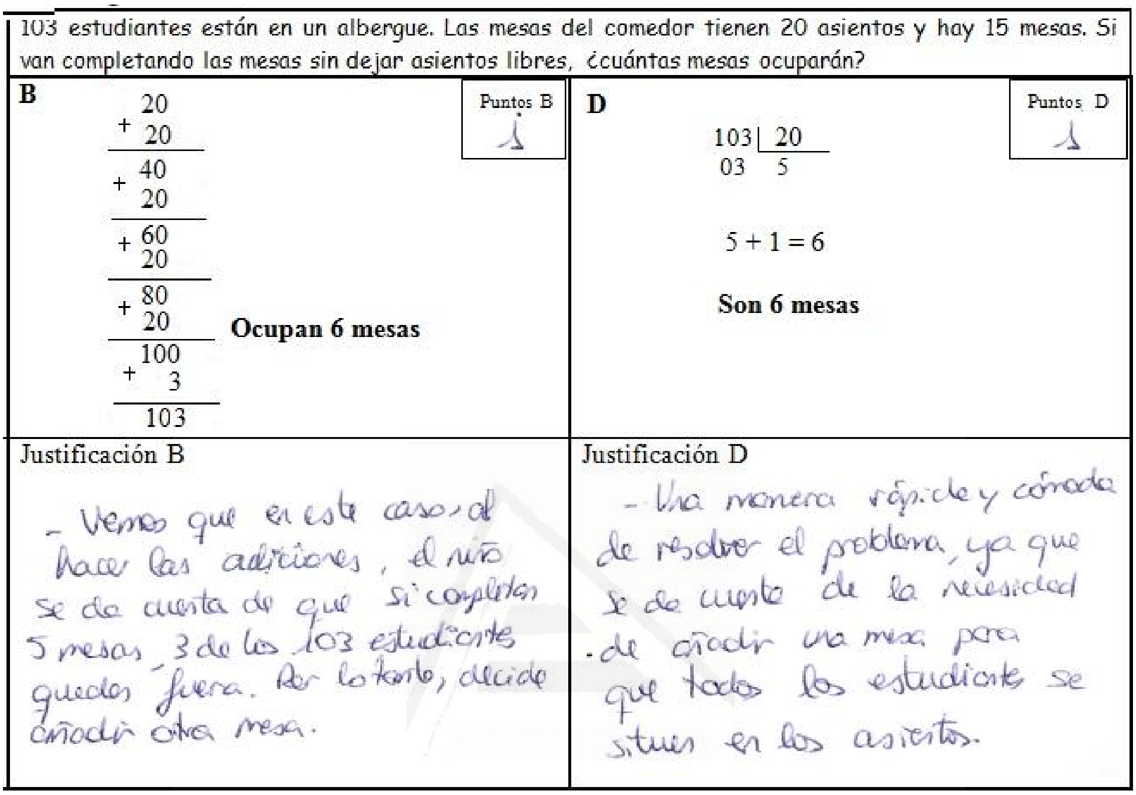
Justificación A	Justificación B
- Mediante este proceso de resolución, el niño se ha guiado de una secuencia numérica fácil. Por lo que creo que es una forma útil de resolución.	- En este caso el niño, guiado por la división, ha querido igualar las farolas a los colores. Pero no se ha dado cuenta que si le sobran 2 farolas, se le debe añadir un color.

Figura.4.2. Justificación de Marta (E45) a las puntuaciones dadas a las respuestas A y B de Farolas

- **Problema *Albergue***

Marta resolvió regular el problema *Albergue*. Para su resolución utilizó el procedimiento división pero aunque fue consciente del resto, entendió que las mesas debían estar completas y no añadió una unidad al cociente, tal como indica en la justificación dada a su respuesta: *“Ocupan 5 mesas y como sobran 3 estudiantes no podrían ocupar otra mesa, por lo tanto, solo ocuparían 5 mesas y tendrán que ocupar otra mesa dejando asientos libres”*. Sin embargo, *Marta* sí reconoció las respuestas totalmente correctas, B (Sumas repetidas) y D (División), que puntuó con 1. En este caso sí entendió la necesidad de aumentar una mesa más, por ejemplo, en el caso del procedimiento división, indica: “*Una manera rápida y cómoda de resolver el problema* [refiriéndose a la división], *ya que se da cuenta de la necesidad de añadir una mesa para que todos los estudiantes se sitúen en los asientos*”. Para el caso del procedimiento

"Sumas repetidas" dice: "*Vemos que en este caso al hacer las adiciones, el niño se da cuenta de que si completa 5 mesas, 3 de los 103 estudiantes quedan fuera, por lo tanto, decide añadir una mesa*" (Figura 4.3).



103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

B	D
20 + 20 = 40; 40 + 20 = 60; 60 + 20 = 80; 80 + 20 = 100; 100 + 3 = 103. **Ocupan 6 mesas** — Puntos B: 1	103 ÷ 20 = 5, resto 03. 5 + 1 = 6. **Son 6 mesas** — Puntos D: 1
Justificación B	Justificación D
- Vemos que en este caso, al hacer las adiciones, el niño se da cuenta de que si completa 5 mesas, 3 de los 103 estudiantes quedan fuera. Por lo tanto, decide añadir otra mesa.	- Una manera rápida y cómoda de resolver el problema, ya que se da cuenta de la necesidad de añadir una mesa para que todos los estudiantes se sitúen en los asientos.

Figura.4.3. Justificación de Marta (E45) a las puntuaciones dadas a las respuestas B y D de Albergue

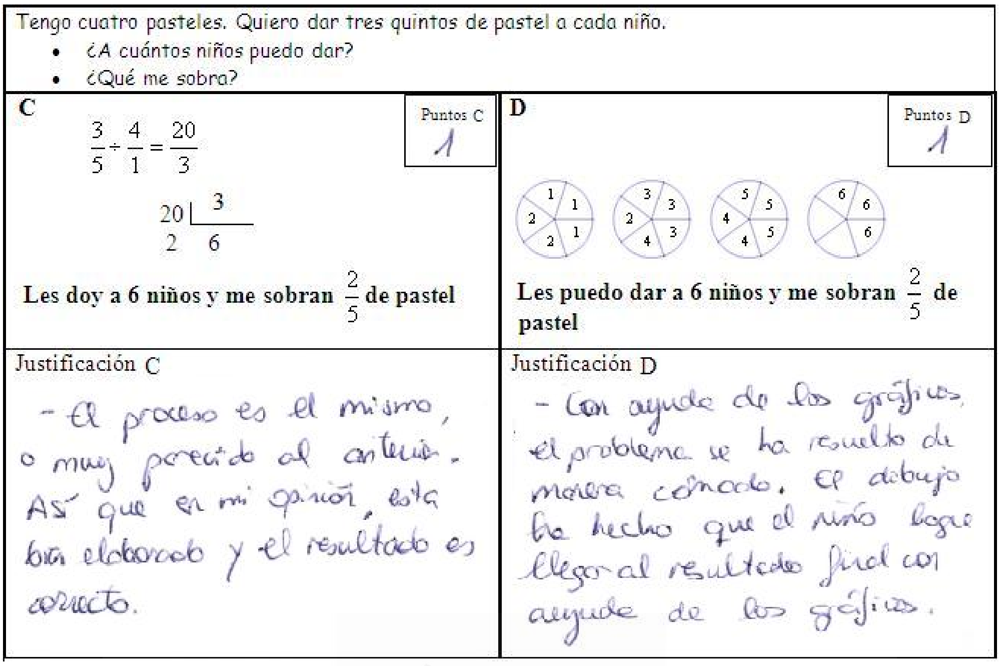
Las respuestas con errores A (División) y C (Restas repetidas) las puntuó con 0 y 0.5, respectivamente. En ambos casos *Marta* no ha sido consciente o no ha explicitado los errores técnicos cometidos, en el procedimiento división, el resto no es correcto, y en el de restas sucesivas, la última sustracción es incorrecta. (Figura 4.4).

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?	
A Puntos A: 0 103 | 20 0 0 5 5x 15 km = 75 **Ocupan 5 mesas**	**C** Puntos C: 0'5 103 → *"Estudiantes"* − 20 083 − 20 63 − 20 43 − 20 03 103 **Necesitan 5 mesas**
Justificación A - Cuando el niño realiza la división podemos comprobar que no serían 5 mesas, ya que 3 de los estudiantes, quedarán sin asiento. El dato de las mesas es un dato para liar, por lo que ha hecho que el niño se confunda, y hace esa multiplicación sin sentido.	Justificación C -Veo que aquí el niño no ha entendido muy bien el proceso de deber completar todas las mesas, es decir todos los asientos.

Figura 4.4. Justificación de Marta (E45) a las puntuaciones dadas a las respuestas A y C del problema Albergue

- **Problema *Pasteles***

Marta resolvió bien el problema *Pasteles* utilizando un procedimiento alternativo a la división (modelización con representación gráfica). Puntuó con 1 las respuestas de los alumnos que daban como resultado dar a 6 niños y sobra 2/5, por tanto no identificó los errores en la respuesta C (Figura 4.5). También puntuó con 1 la respuesta B (división con error en la interpretación del resto), y con 0.5 la respuesta A (alternativa con error técnico, Figura 4.6). En las puntuaciones realizadas se pone de manifiesto la importancia que para *Marta* tiene que los alumnos lleguen a una solución correcta, por ejemplo, para justificar la puntuación dada a la respuesta C, indica: "*El proceso es el mismo o parecido al anterior* [respuesta B]. *Así que en mi opinión está bien elaborado y el resultado es correcto*"



Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

C — Puntos C: 1

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

$20 \,\underline{|\ 3\ }$; $2 \quad 6$

Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

D — Puntos D: 1

Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

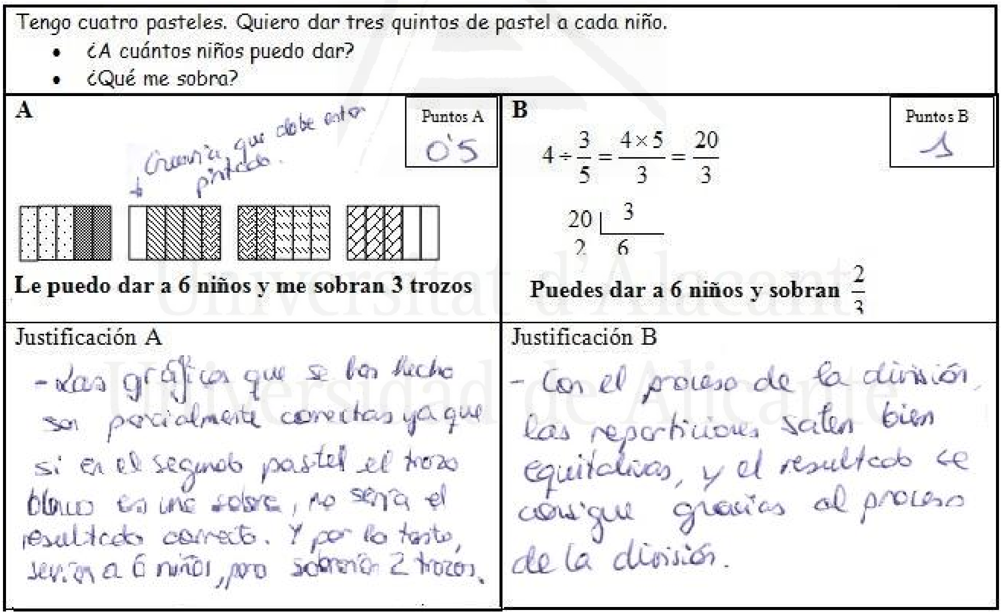
Justificación C

- El proceso es el mismo, o muy parecido al anterior. Así que en mi opinión, está bien elaborado y el resultado es correcto.

Justificación D

- Con ayuda de los gráficos, el problema se ha resuelto de manera cómoda. El dibujo ha hecho que el niño logre llegar al resultado final con ayuda de los gráficos.

Figura 4.5. Justificación de Marta (E45) a la puntuación dada a las respuestas C y D de Pasteles



Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A — Puntos A: 0'5

Creería que debe estar pintado.

Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos

B — Puntos B: 1

$$4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

$20 \,\underline{|\ 3\ }$; $2 \quad 6$

Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Justificación A

- Las gráficas que se han hecho son parcialmente correctas ya que si en el segundo pastel el trozo blanco es uno sobre, no sería el resultado correcto. Y por lo tanto, serían a 6 niños, pero sobrarían 2 trozos.

Justificación B

- Con el proceso de la división las repeticiones salen bien equitativas, y el resultado se consigue gracias al proceso de la división.

Figura 4.6. Justificación de Marta (E45) a la puntuación dada a las respuestas A y B de Pasteles

En resumen, *Marta* resolvió correctamente dos de los tres problemas y el tercero regular. En su interpretación de las respuestas dadas a estos tres problemas por los alumnos de primaria, puso de manifiesto la importancia que para ella tiene el que el resultado de un problema sea correcto independientemente de que los procesos lo sean o no, también le dio importancia a que estas respuestas estuviesen debidamente justificadas y valoró por igual tanto los procedimientos de división como los alternativos, siendo pues un ejemplo prototipo del perfil 1.

4.4.2. Casos del perfil 2

En esta sección estudiamos, en primer lugar, un caso prototipo de este perfil, el caso de *Salud* (E48), y en segundo lugar, dos casos que presentan ciertas singularidades en relación a las características de este perfil, el caso de *María* (E77) y el de *Raquel* (E58), singularidades producto de las interpretaciones realizadas y que se manifiestan a través de las puntuaciones dadas a las distintas respuestas de los alumnos de Primaria a los tres problemas (Tabla 4.16).

Tabla 4.16. Puntuaciones dadas a los problemas por los casos de estudio del perfil 2

	Problemas											
	Farolas				***Albergue***				***Pasteles***			
Casos	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
Salud	0.5	0	1	0.5	0	0.5	0	1	0	0.5	1	1
María	0.5	0	1	0.5	0	1	0	0.5	0.5	0	0.5	1
Raquel	1	0.5	1	0.5	0	1	0.5	1	1	0	1	1

Singularidades en relación al caso prototipo

- **El caso de *Salud* (E48)**

Salud, es una estudiante de 19 años. Cursó Bachillerato en la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales con la asignatura de matemáticas y accedió a la Universidad por la modalidad Selectividad.

Esta estudiante resolvió de forma correcta dos problemas, *Farolas* y *Pasteles*. Se observa que puntuó con un 1 las respuestas correctas centradas en el procedimiento de la división, en *Farolas y Albergue*. Sin embargo, las respuestas correctas de estos problemas basadas en un procedimiento alternativo (modelización-agrupamiento; suma repetida) las puntuó con 0.5. Luego penalizó el uso de procedimientos alternativos a la división en este problema. Sin embargo, puntuó con un 1 la respuesta correcta basada en un procedimiento alternativo (modelización) en el problema *Pasteles* (cabe señalar que esta estudiante para maestro empleó una modelización basada en una representación gráfica para resolver este último problema). También se observa que valoró los resultados correctos siendo los procesos correctos (sin identificar los errores) pues puntuó con 1 la opción C de *Pasteles* (división con error pero resultado correcto) y puntuó con 0.5 la alternativa con error y con respuesta correcta de *Farolas* (Tabla 4.17).

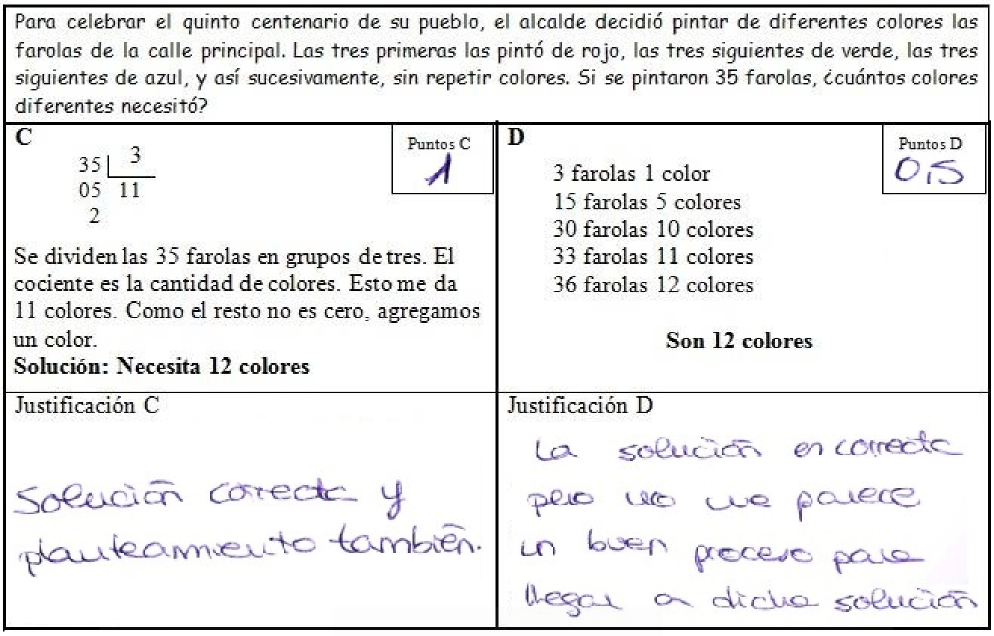
Tabla 4.17. Procedimientos utilizados por Salud (E48) en la resolución problemas (Cuestionario 1) y puntuaciones dadas a los problemas (Cuestionario 2)

		Puntuaciones asignadas a las respuestas			
		A	**B**	**C**	**D**
Farolas	División correcta	0.5	0	1	0.5
Albergue	División Incorrecta	0	0.5	0	1
Pasteles	Modelización Gráfico correcta	0	0.5	1	1

A continuación, describimos el comportamiento de *Salud* en la resolución de los problemas (Cuestionario 1) y en la valoración de las respuestas (Cuestionarios 2).

- **Problema *Farolas***

Salud resolvió bien el problema *Farolas* utilizando una división. De las dos respuestas correctas del problema solo identificó la respuesta C (división) puntuándola con 1. Esta puntuación la justificó diciendo: "*Solución correcta y planteamiento también*". Sin embargo, la respuesta correcta D (alternativa correcta), la puntuó con 0.5 argumentando que: "*La solución es correcta pero no me parece un buen proceso para llegar a dicha solución*" (Figura 4.7).



Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

C	D
Puntos C: 1 35 | 3 05 11 2 Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color. **Solución: Necesita 12 colores**	Puntos D: 0,5 3 farolas 1 color 15 farolas 5 colores 30 farolas 10 colores 33 farolas 11 colores 36 farolas 12 colores **Son 12 colores**
Justificación C Solución correcta y planteamiento también.	Justificación D La solución es correcta pero no me parece un buen proceso para llegar a dicha solución

Figura.4.7. Justificación de Salud (E48) a la puntuación dada a las respuestas C y D de Farolas

Salud puntuó las respuestas con error A y B con 0.5 y 0, respectivamente. La puntuación de la respuesta A (alternativa con error) la justificó diciendo: *"La solución es correcta, sin embargo, pienso que el planteamiento no es muy correcto ya que si se tratara de un número mayor este proceso no valdría"*, parece que *Salud* no advirtió el error de proceso y nuevamente pone de manifiesto la importancia que para ella tiene el procedimiento de división. La respuesta B (división con error en la interpretación del resto), puntuada con 0, la argumentó diciendo: "*Al no ser correcta la solución a pesar que iba bien en el planteamiento*". Las dos argumentaciones dadas por *Salud* ponen de manifiesto sus preferencias por el procedimiento de división y que la respuesta del problema sea correcta (Figura 4.8).

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A Puntos A: 0,5

1	2	3 Rojo
4	5	6 Verde
7	8	9 Azul
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
21	22	23
24	25	26
27	28	29
30	31	32
33	34	35

Necesitó 12 colores

B Puntos B: 0

35 |3
05 11
2

Se necesitan 11 colores

Justificación A
La solución es correcta, sin embargo, pienso que el planteamiento no es muy correcto ya que si se tratara de un número mayor este proceso no valdría.

Justificación B
Al no ser correcta la solución a pesar que iba bien en el planteamiento la puntuación es de 0.

Figura.4.8. Justificación de Salud (E48) a la puntuación dada a las respuestas A y B de Farolas

- **Problema *Albergue***

Salud no resolvió correctamente el problema *Albergue*. La estudiante en la resolución de este problema utilizó el procedimiento de división, si bien no se percató que el dato 15 mesas era un dato superfluo y lo utilizó en su resolución lo que le llevó a un resultado incorrecto (Figura 4.9).

Albergue
103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

Resolución:

15 mesas x 20 asientos = 300 asientos

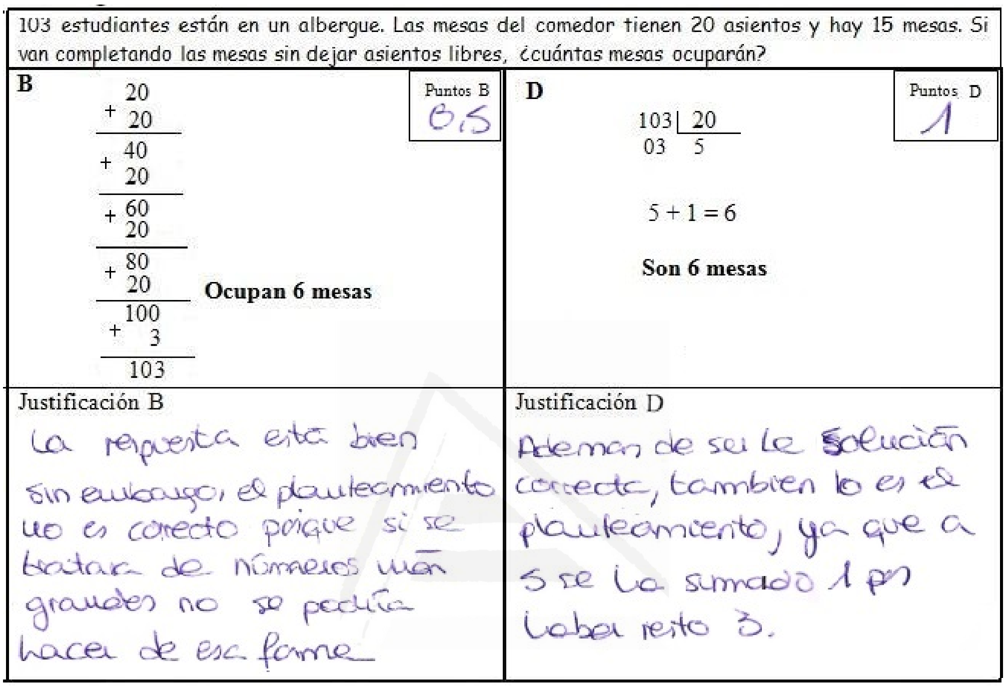
300 asientos – 103 estudiantes = 197 asientos ocupados por estudiantes.

197 |15
047 13
02

Solución: Los estudiantes ocuparán 13 mesas ~~menos~~ menos 2 asientos que les sobrarán

Figura 4.9. Resolución por Salud (E48) del problema Albergue (Cuestionario 1)

En relación a la interpretación de las respuestas dadas a este problema por los alumnos de primaria, *Salud* identificó solo una de las respuestas totalmente correctas, solución D (división) que puntuó con 1, la respuesta B (alternativa correcta) la puntuó con 0.5 justificando esta puntuación por el procedimiento utilizado al igual que en el problema *Farolas* (Figura 4.10).



103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

B

20 + 20 = 40; 40 + 20 = 60; 60 + 20 = 80; 80 + 20 = 100; 100 + 3 = 103

Ocupan 6 mesas

Puntos B: 0,5

D

103 | 20
03 5

5 + 1 = 6

Son 6 mesas

Puntos D: 1

Justificación B

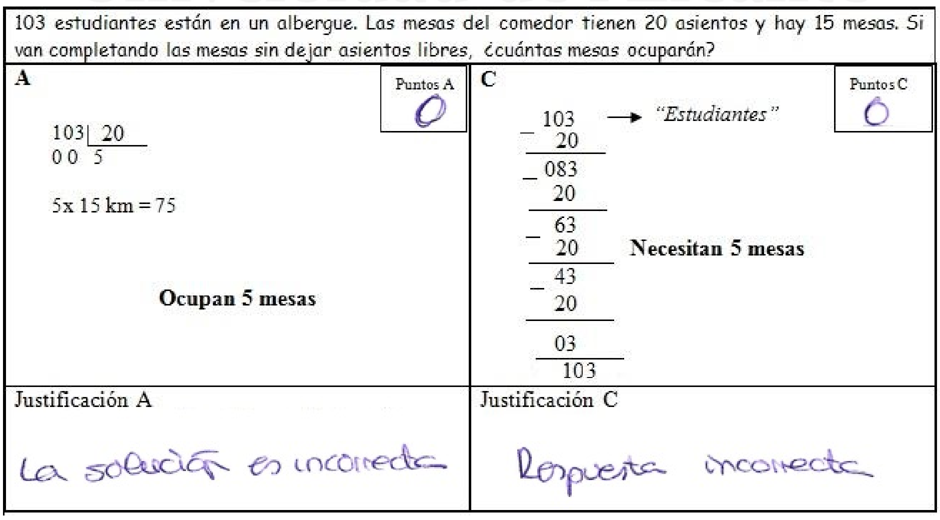
La respuesta está bien sin embargo, el planteamiento no es correcto porque si se trata de números más grandes no se podría hacer de esa forma

Justificación D

Además de ser la solución correcta, también lo es el planteamiento, ya que a 5 se la sumado 1 por haber resto 3.

Figura 4.10. Justificación de Salud (E48) a la puntuación dada a las respuestas B y C de Albergue

Las respuestas A (división con error) y C (alternativa con error), las puntuó con 0 porque en ambos casos el resultado era incorrecto (Figura 4.11).



103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

A

103 | 20
0 0 5

5x 15 km = 75

Ocupan 5 mesas

Puntos A: 0

C

103 → "Estudiantes"
− 20
083
− 20
63
− 20
43
− 20
03
103

Necesitan 5 mesas

Puntos C: 0

Justificación A

La solución es incorrecta

Justificación C

Respuesta incorrecta

Figura 4.11. Justificación de Salud (E48) a la puntuación dada a las respuestas A y C de Albergue

- **Problema *Pasteles***

Salud resolvió bien el problema *Pasteles* utilizando una estrategia alternativa a la división, modelización con una representación gráfica. Puntuó con 1 las respuestas D (alternativa correcta) y C, (división con resultado correcto pero con dos errores – uno conceptual- que se compensaban), al no ser consciente de dichos errores (Figura 4.12).

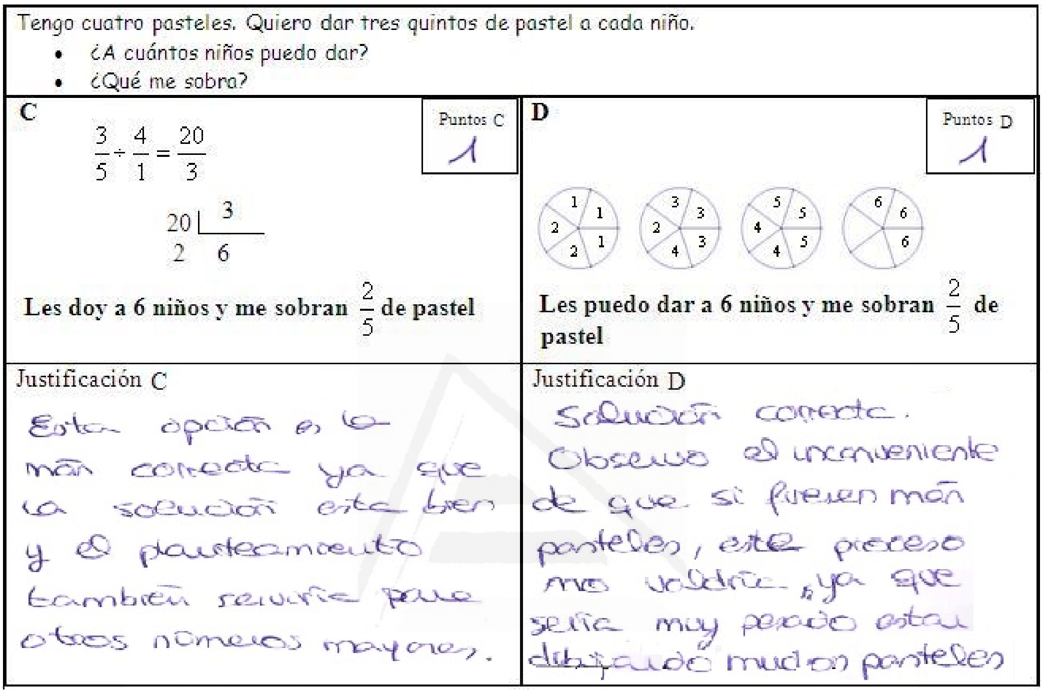
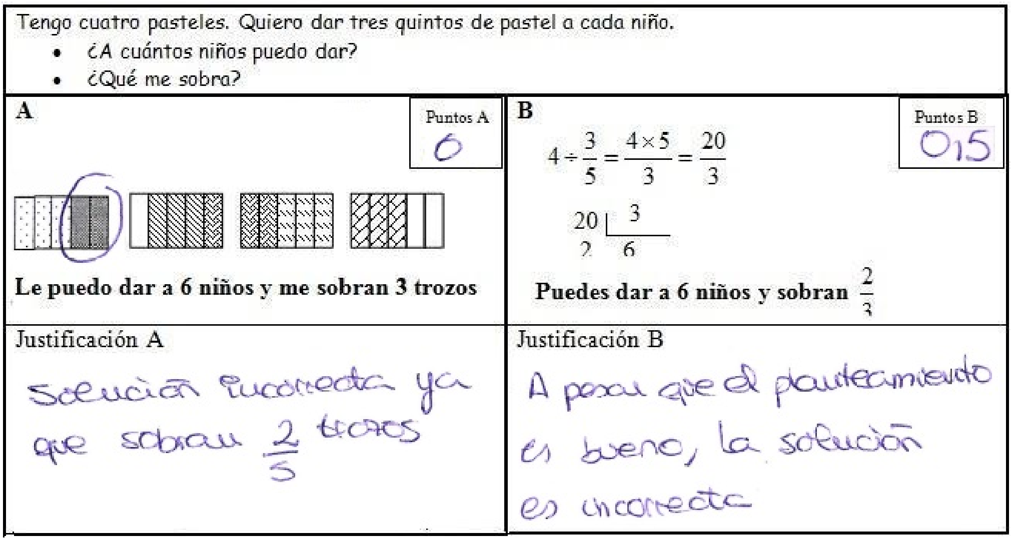


Figura 4.12. Justificación de Salud (E48) a la puntuación dada a las respuestas C y D de Pasteles

Las respuestas con solución parcialmente correcta A y B las puntuó con 0 y 0.5, respectivamente, porque en la respuesta A el resultado y el gráfico eran incorrectos y la respuesta B, porque aunque la interpretación del resto era incorrecta, el procedimiento (división) era correcto (Figura 4.13)



Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño. • ¿A cuántos niños puedo dar? • ¿Qué me sobra?	
A Puntos A: 0 **Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos**	**B** Puntos B: 0,5 $4\div\frac{3}{5}=\frac{4\times5}{3}=\frac{20}{3}$ $20 \,\lfloor 3$; $2 \quad 6$ **Puedes dar a 6 niños y sobran** $\frac{2}{3}$
Justificación A Solución incorrecta ya que sobran $\frac{2}{5}$ trozos	Justificación B A pesar que el planteamiento es bueno, la solución es incorrecta

Figura 4.13. Justificación de Salud (E48) a la puntuación dada a las respuestas A y B de Pasteles

En resumen, *Salud* resolvió correctamente dos de los tres problemas, *Farolas* y *Pasteles*, identificó las respuestas correctas realizadas por división en los problemas *Farolas* y *Albergue* y el procedimiento alternativo, modelización con representación gráfica, en el problema *Pasteles*, mostrando preferencia por el procedimiento de la división y por los resultados correctos (siendo los procesos correctos), de ahí, que la hayamos elegido como ejemplo prototipo del perfil 2.

A continuación, vamos a describir dos casos que presentan singularidades en relación al caso prototipo.

- **El caso de *María* (E77)**

María, es una estudiante de 18 años. Cursó Bachillerato en la especialidad de Ciencias de la naturaleza y la *Salud*, solo cursó la asignatura de matemáticas en primero y accedió a la universidad por la modalidad Selectividad.

Esta estudiante resolvió de forma correcta tres problemas por dos procedimientos distintos (ver anexo pp. 26-32). *María*, al igual que *Salud*, valoró más el procedimiento basado en una división que las alternativas. Esto se observa cuando puntúa con un 1 la respuesta correcta centrada en el procedimiento de la división, en *Farolas* y con un 0.5 la alternativa. Sin embargo, penaliza la respuesta centrada en una división correcta del problema *Albergue* por falta de justificación y puntúa con 1 la alternativa correcta (al centrarse en sumas repetidas). Esto nos indica que los estudiantes para maestro de este grupo no valoraron por igual los procedimientos alternativos, valorando más las sumas/restas repetidas que los procedimientos basados en modelización en los problemas de división-medida con enteros. Por otro lado, también interpretó adecuadamente la respuesta correcta de modelización con representación gráfica en *Pasteles.* Al igual que *Salud*, valora mejor las repuestas incorrectas con resultado correcto. Sin embargo a diferencia de *Salud, María* identifica algunos de los errores penalizándolos aunque la respuesta tuviera un resultado correcto (por ejemplo respuesta C de *Pasteles*) (Tabla 4.18).

Tabla 4.18. Procedimientos utilizados por María (E77) en la resolución problemas (Cuestionario 1) y puntuaciones dadas a los problemas (Cuestionario 2)

		Puntuaciones asignadas a las respuestas			
		A	**B**	**C**	**D**
Farolas	División y modelización correctas	0.5	0	1	0.5
Albergue	División y modelización correctas	0	1	0	0.5
Pasteles	Modelización y división correctas	0.5	0	0.5	1

A continuación, pasamos a describir las interpretaciones que ha realizado *María* y que presentan ciertas diferencias con las realizadas por *Salud*, ejemplo prototipo de este perfil (Tabla 4.19).

Tabla 4.19. Puntuaciones discrepantes de María (E77) dadas al cuestionario 2 en relación al prototipo del perfil 2

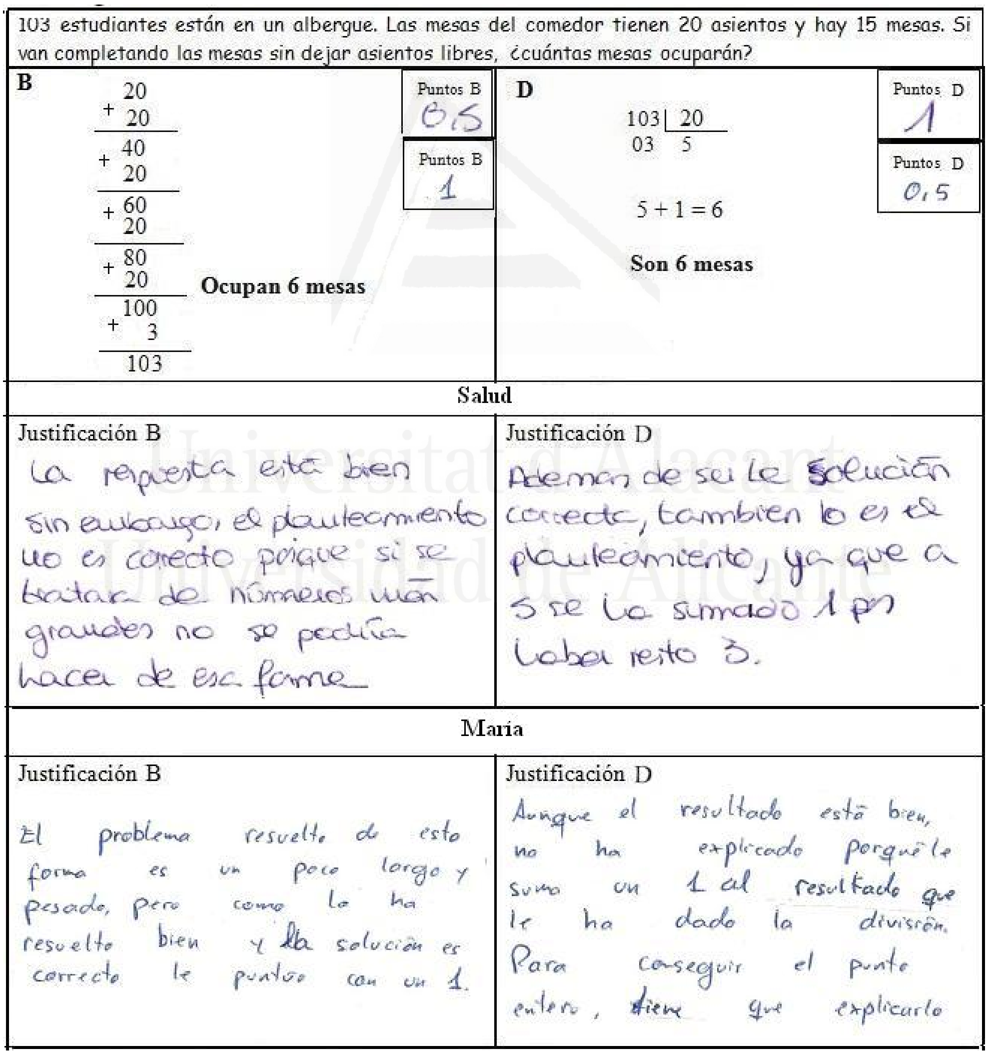
	Problemas											
	Farolas				***Albergue***				***Pasteles***			
Casos	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
Salud	0.5	0	1	0.5	0	0.5	0	1	0	0.5	1	1
María	0.5	0	1	0.5	0	1	0	0.5	0.5	0	0.5	1

Singularidades en relación al caso prototipo

Como podemos observar, el mayor número de discrepancias se encuentran en el problema *Pasteles*. En el problema *Albergue*, como ya hemos indicado, las discrepancias se encuentran en los casos de respuesta correcta. Pasamos a describir cada una de ellas.

- **Problema *Albergue***

María resolvió, a diferencia de *Salud*, correctamente el problema *Albergue* por dos procedimientos, división y modelización con representación gráfica. En relación a la interpretación de las respuestas correctas, B y D, dadas a este problema por los alumnos de primaria, *María* identificó las dos respuestas, si bien solo una de ellas, la B (alternativa correcta con sumas repetidas), la puntuó con 1. La opción D (división) la puntuó con 0.5 al considerar que si bien era correcta no estaba debidamente justificada. Aunque las dos estudiantes para maestro son partidarias del procedimiento de la división y de los resultados correctos y justificados, *María* enfatiza más el resultado correcto y justificado que el procedimiento utilizado y *Salud* al contrario (Figura 4.14).



103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

B	D
20 + 20 = 40; 40 + 20 = 60; 60 + 20 = 80; 80 + 20 = 100; 100 + 3 = 103 **Ocupan 6 mesas**	103 ⌊ 20; 03 5; 5 + 1 = 6 **Son 6 mesas**
Puntos B: 0,5 / Puntos B: 1	Puntos D: 1 / Puntos D: 0,5

Salud

Justificación B	Justificación D
La respuesta esta bien sin embargo, el planteamiento no es correcto porque si se tratara de números más grandes no se podría hacer de esa forma	Ademas de ser la solución correcta, tambien lo es el planteamiento, ya que a 5 se la sumado 1 por haber resto 3.

María

Justificación B	Justificación D
El problema resuelto de esta forma es un poco largo y pesado, pero como lo ha resuelto bien y la solución es correcta le puntúo con un 1.	Aunque el resultado está bien, no ha explicado porqué le suma un 1 al resultado que le ha dado la división. Para conseguir el punto entero, tiene que explicarlo

Figura 4.14. Diferencias entre las justificaciones dadas por María (77) y Salud (E48) a la puntuación de las respuestas B y D de Albergue

- **Problema *Pasteles***

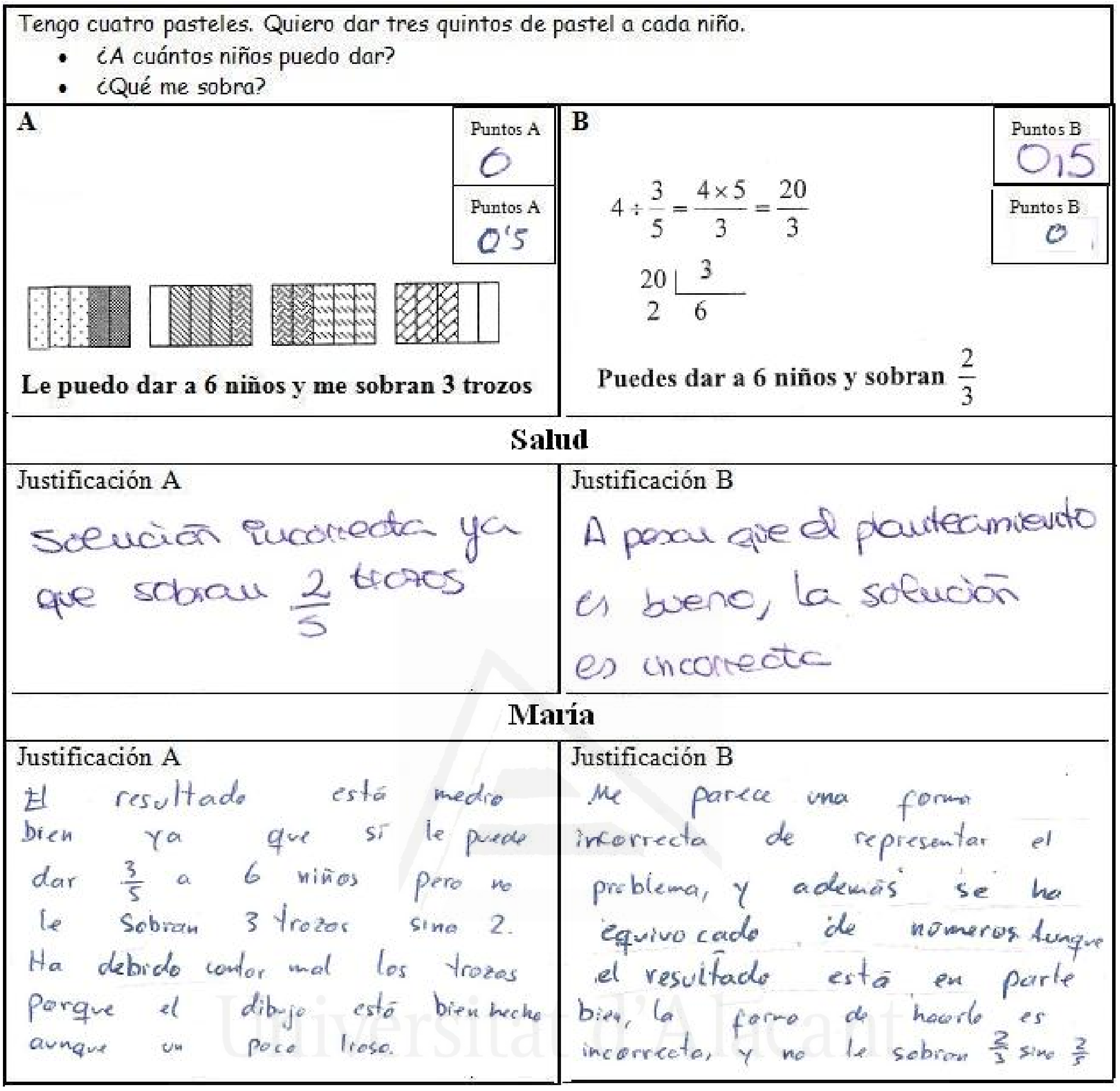
María resolvió bien el problema *Pasteles* por dos procedimientos, modelización con representación gráfica y división, e identificó la respuesta correcta (D) puntuándola con 1 al igual que *Salud*. Sin embargo, puntuó de distinta manera las respuestas de las opciones A, B y C. Las diferencias entre estas puntuaciones son debidas al conocimiento de contenido especializado que poseen las estudiantes. *María* ha sido capaz de identificar, en parte, el error conceptual cometido en la respuesta C (división con error y respuesta correcta) dada por el estudiante, *Salud*, no. (Figura 4.15).

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.
- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

Salud	María
C $\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$; $20 \div 3$: cociente 6, resto 2. Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel. Puntos C: 1	C $\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$; $20 \div 3$: cociente 6, resto 2. Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel. Puntos C: 0,5
Justificación C: Esta opcion es la mas correcta ya que la solucion esta bien y el planteamiento tambien serviria para otros numeros mayores.	Justificación C: El resultado es correcto pero en la operación se ha equivocado. La fracción que debe darle como resultado es $\frac{3}{20}$ y no $\frac{20}{3}$.

Figura 4.15. Diferencias entre la justificación dada por María (77) y Salud (E48) a la puntuación de la respuesta C de Pasteles

Las respuestas con solución parcialmente correcta (A y B) también fueron puntuadas de distinta manera por ambas estudiantes para maestro. *María* dio mayor importancia al procedimiento (modelización con representación gráfica) que al resultado parcialmente correcto; *Salud*, por el contrario, siguió enfatizado la corrección del resultado (Figura 4.16).



Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A	B
Puntos A: 0 Puntos A: 0'5 Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos	Puntos B: 0,5 Puntos B: 0 $4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$ 20 | 3 2 6 Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Salud

Justificación A	Justificación B
Solución incorrecta ya que sobran $\frac{2}{5}$ trozos	A pesar que el planteamiento es bueno, la solución es incorrecta

María

Justificación A	Justificación B
El resultado está medio bien ya que sí le puede dar $\frac{3}{5}$ a 6 niños pero no le sobran 3 trozos sino 2. Ha debido contar mal los trozos porque el dibujo está bien hecho aunque un poco lioso.	Me parece una forma incorrecta de representar el problema, y además se ha equivocado de números aunque el resultado está en parte bien, la forma de hacerlo es incorrecta, y no le sobran $\frac{2}{3}$ sino $\frac{2}{5}$

Figura 4.16. Diferencias entre la justificación dada por María (77) y Salud (E48) a la puntuación de las respuesta A y B de Pasteles

En resumen, las diferencias entre *María* y *Salud* pertenecientes al perfil 2 se encuentra en que *María* valora algún procedimiento alternativo (sumas y restas repetidas en el problema *Albergue*) y que *María* valora más el proceso correcto que el tener un resultado correcto. Esto último está relacionado con el hecho de que *María* ha sido capaz de identificar algunos de los errores procedimentales y conceptuales (que forma parte del conocimiento especializado del estudiante para maestro).

- **El caso de Raquel (E58)**

Raquel, es una estudiante de 31 años. Esta estudiante cursó un plan de estudios anterior al actual, Bachillerato unificado y polivalente (BUP). Estudio el curso de orientación universitaria (COU) en la especialidad de Ciencias y accedió a la Universidad desde un ciclo formativo de formación profesional (FP) en Educación Infantil.

Esta estudiante resolvió de forma correcta dos de los tres problemas, *Farolas* y *Albergue*. El problema *Pasteles* lo resolvió regular al no haber sido capaz de indicar cuántos trozos de pastel sobraban en función del total (ver anexo pp.33-39). Al igual que *Salud* valoró mejor los procedimientos basados en una división que los procedimientos alternativos. Aunque a diferencia de *Salud* parece ser que *Raquel* valoró el procedimiento alternativo basado en el uso de sumas o restas repetidas del problema *Albergue*. Por otro lado, también valora más los resultados correctos. Se observa cuando puntúa las dos respuestas con resultado correcto y con errores conceptuales con un 1 sin identificar los errores. Sin embargo, a diferencia de *Salud*, valora el hecho de que el procedimiento sea correcto y que el alumno no haya alcanzado la solución correcta (respuesta B de *Farolas*- división correcta pero sin interpretación correcta del resultado y respuesta C de *Albergue* que es el procedimiento alternativo centrado en restas sucesivas con un error al dar la respuesta) (Tabla 4.20).

Tabla 4.20. Procedimientos utilizados por Raquel (E58) en la resolución problemas (Cuestionario 1) y puntuaciones dadas a los problemas (Cuestionario 2

		Puntuaciones asignadas a las respuestas			
		A	**B**	**C**	**D**
Farolas	División correcta	1	0.5	1	0.5
Albergue	División correcta	0	1	0.5	1
Pasteles	División Regular	1	0	1	1

En relación a la interpretación de las respuestas, *Raquel* presenta diferencias en los tres problemas (Figura 4.21).

Tabla 4.20. Puntuaciones discrepantes de María (E77) dadas al cuestionario 2 en relación al prototipo del perfil 2

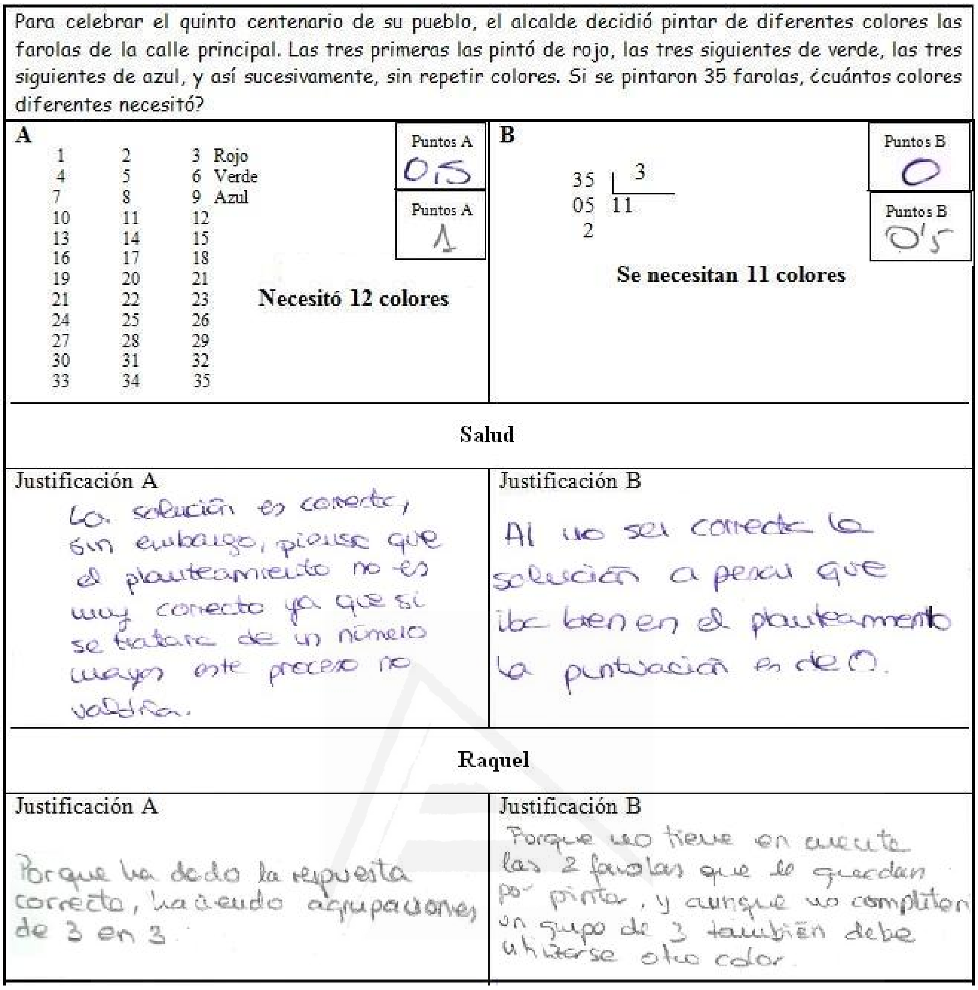
	Problemas											
	Farolas				***Albergue***				***Pasteles***			
Casos	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
Salud	0.5	0	1	0.5	0	0.5	0	1	0	0.5	1	1
Raquel	1	0.5	1	0.5	0	1	0.5	1	1	0	1	1

Singularidades en relación al caso prototipo

A continuación, pasamos a describir las interpretaciones que ha realizado *Raquel* y que presentan ciertas diferencias con las realizadas por *Salud*, ejemplo prototipo de este perfil (Tabla 4.21).

- **Problema *Farolas***

Raquel resolvió correctamente el problema *Farolas* igual que *Salud*. *Raquel* puntuó de distinta forma que *Salud* las opciones A y B. *Raquel* puntuó con 1 la opción A, al no ser consciente del error de proceso de esta respuesta, error que si percibió *Salud*. Sin embargo, puntuó con 0.5 la opción B al considerar que el procedimiento era correcto aunque no el resultado, dado que el alumno de primaria no había tenido en cuenta el resto. *Salud* le dio más importancia a la respuesta incorrecta, de ahí que puntuase con cero (Figura 4.17).



Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A		
1	2	3 Rojo
4	5	6 Verde
7	8	9 Azul
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
21	22	23
24	25	26
27	28	29
30	31	32
33	34	35

Necesitó 12 colores

Puntos A: 0,5
Puntos A: 1

B

35 | 3
05 11
2

Se necesitan 11 colores

Puntos B: 0
Puntos B: 0'5

Salud

Justificación A	Justificación B
La solución es correcta, sin embargo, pienso que el planteamiento no es muy correcto ya que si se tratara de un número mayor este proceso no valdría.	Al no ser correcta la solución a pesar que iba bien en el planteamiento la puntuación es de 0.

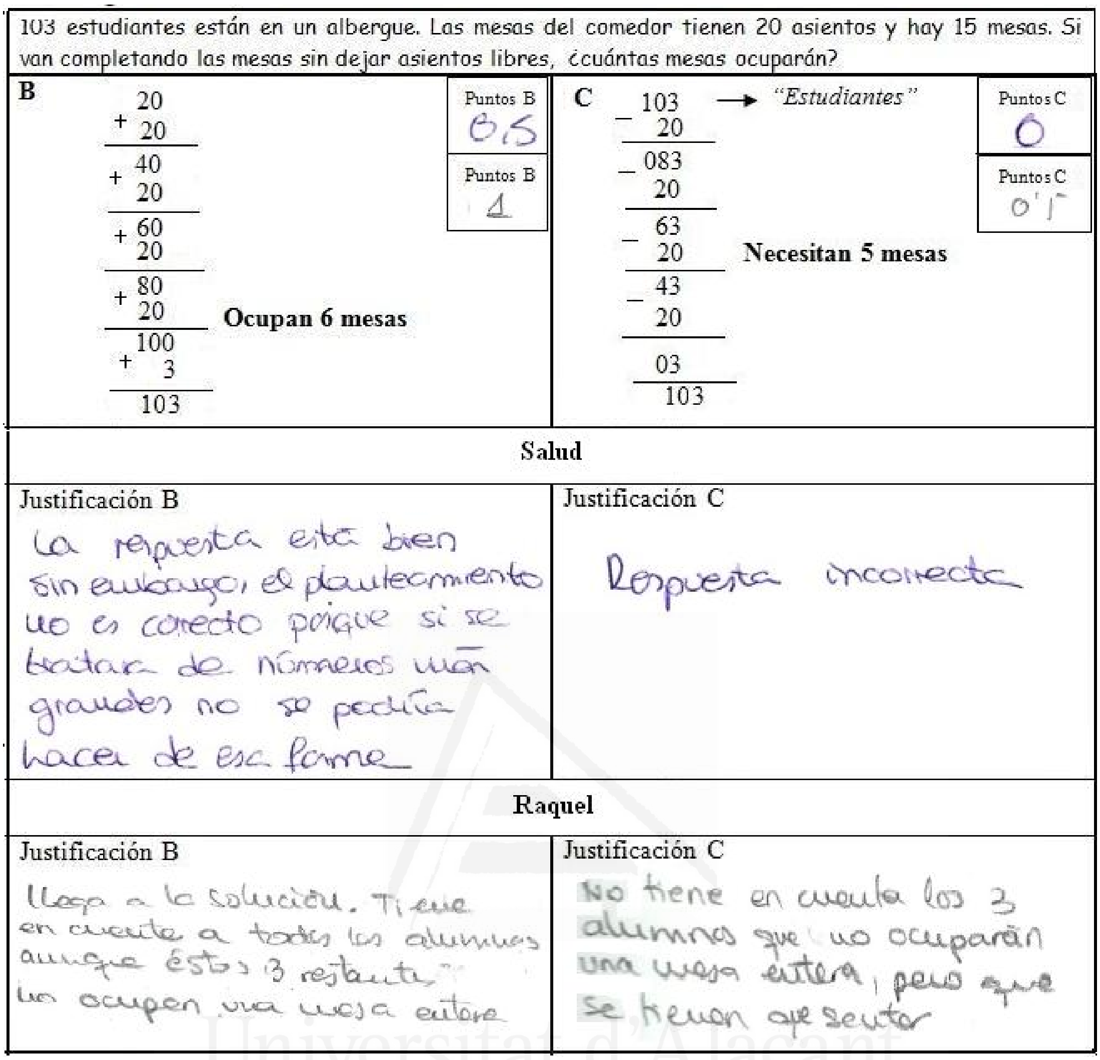
Raquel

Justificación A	Justificación B
Porque ha dado la respuesta correcta, haciendo agrupaciones de 3 en 3.	Porque no tiene en cuenta las 2 farolas que le quedan por pintar, y aunque no completen un grupo de 3 también debe utilizarse otro color.

Figura 4.17. Diferencias entre las justificaciones dadas por Raquel (58) y Salud (E48) a la puntuación de las respuestas A y B de Farolas

- **Problema *Albergue***

Raquel, a diferencia de *Salud*, resolvió correctamente el problema *Albergue* por el procedimiento de división. En relación a la interpretación de las respuestas B y C, dadas a este problema por los alumnos de primaria, *Raquel* las puntuó de distinta manera que *Salud*. La respuesta B (alternativa con sumas repetidas correcta), la puntuó con 1 y *Salud* con 0.5, dado que. *Raquel*, a diferencia de *Salud*, valoró el procedimiento alternativo. La opción C (división con error) la puntuó con 0.5 al considerar nuevamente el procedimiento, independientemente de la corrección del resultado, al contrario que *Salud* (Figura 4.18).



103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

B

20 + 20 = 40; 40 + 20 = 60; 60 + 20 = 80; 80 + 20 = 100; 100 + 3 = 103

Ocupan 6 mesas

Puntos B: 0,5

Puntos B: 1

C

103 → *"Estudiantes"*

103 − 20 = 083; 083 − 20 = 63; 63 − 20 = 43; 43 − 20 = 03; 103

Necesitan 5 mesas

Puntos C: 0

Puntos C: 0'1

Salud

Justificación B	Justificación C
La respuesta está bien sin embargo, el planteamiento no es correcto porque si se tratara de números más grandes no se podría hacer de esa forma	Respuesta incorrecta

Raquel

Justificación B	Justificación C
Llega a la solución. Tiene en cuenta a todos los alumnos aunque éstos 3 restantes no ocupen una mesa entera	No tiene en cuenta los 3 alumnos que no ocuparán una mesa entera, pero que se tienen que sentar

Figura 4.18. Diferencias entre las justificaciones dadas por Raquel (E58) y Salud (E48) a la puntuación de las respuestas B y C de Albergue

- **Problema *Pasteles***

Raquel resolvió regular el problema *Pasteles.* Para resolverlo utilizó el procedimiento de división, pero no interpretó adecuadamente el resto y, en consecuencia, solo fue capaz de decir correctamente a cuántos niños se podía dar pastel, pero no cuánto sobraba. Puntuó únicamente de distinta manera que *Salud* la respuesta A. Para *Raquel* la respuesta A era correcta de ahí que la puntuase con un 1 ya que consideró que el error del alumno de primaria había sido debido a un error de conteo (Figura 4.19).

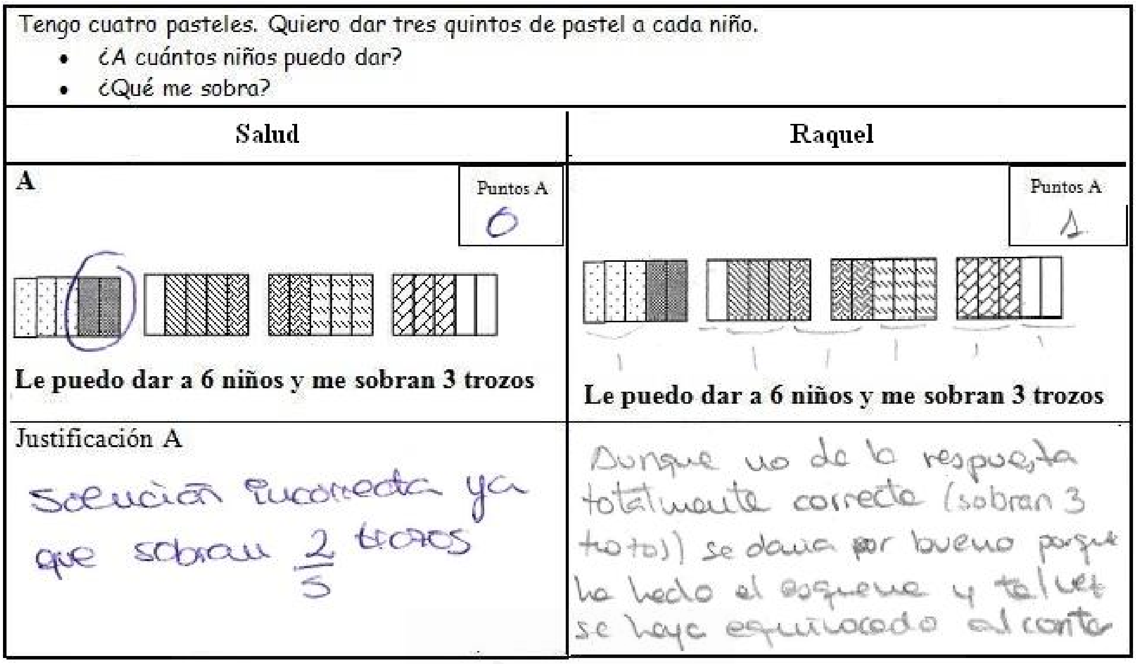


Figura 4.19. Diferencias entre las justificaciones dadas por Raquel (E58) y Salud (E48) a la puntuación de la respuesta A de Pasteles

En resumen, las diferencias entre *Salud* y *Raquel* pertenecientes al perfil 2 se encuentra en que *Raquel* valora algún procedimiento alternativo (sumas y restas repetidas en el problema *Albergue*) y que aunque *Raquel* puntúa con un 1 las repuestas que tienen un resultado correcto sin identificar los errores al igual que *Salud*, en las respuestas que no han alcanzado un resultado correcto valora el hecho de utilizar un procedimiento correcto.

Los resultados relativos a las discrepancias de *Salud* con *María* y *Raquel* hacen referencia a la mayor o menor importancia que estas estudiantes le dan al resultado y al procedimiento correcto. Así *Salud* solo valora aquellas respuestas con resultado correcto, *María* valora más el proceso correcto que el resultado ya que ha sido capaz de identificar los errores conceptuales y procedimentales de las respuestas. *Raquel* valora aquellas respuestas con resultado correcto, igual que *Salud*, pero también valora el hecho de utilizar un procedimiento correcto en las respuestas incorrectas (puntuando algunas que tenían el resultado incorrecto con un 0.5).

4.4.3. Casos del perfil 3

En esta sección estudiamos en primer lugar un caso prototipo de este perfil, el caso de *Susana* (E67), y en segundo lugar, un caso que presenta ciertas singularidades en relación a las características de este perfil, el caso de *Esteban* (E82), singularidades fruto de las interpretaciones realizadas y manifestadas a través de las puntuaciones dadas a las respuestas de los alumnos de primaria a los tres problemas (Tabla 4.21).

Tabla 4.21. Puntuaciones dadas a los problemas por los casos de estudio del perfil 3

	Problemas											
	Farolas				***Albergue***				***Pasteles***			
Casos	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
Susana	0.5	0.5	1	1	0	1	0.5	1	0.5	0.5	0.5	1
Esteban	1	0.5	1	1	0	1	0	1	0	0.5	1	1

□ *Singularidades en relación al caso prototipo*

- **El caso de Susana (E67)**

*Susana***,** es una estudiante de 18 años. Cursó Bachillerato en la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales con la asignatura de matemáticas y accedió a la Universidad por la modalidad Selectividad.

Esta estudiante resolvió de forma correcta los tres problemas e identificó las respuestas correctas puntuándolas con 1 (tanto las basadas en procedimientos alternativos como las basadas en una división), es decir, valoró los resultados correctos desde procesos correctos y debidamente justificados. Puntuó con 0.5 aquellas respuestas cuya solución no era correcta pero sí el procedimiento, por tanto, valoró los procedimientos correctos independientemente de que el resultado lo fuese o no (Tabla 4.22).

Tabla 4.22. Procedimientos utilizados en la resolución problemas (Cuestionario 1) y puntuaciones dadas a los problemas (Cuestionario 2)

		Puntuaciones asignadas a las respuestas			
		A	**B**	**C**	**D**
Farolas	División correcta	0.5	0.5	1	1
Albergue	Sumas repetidas correcta	0	1	0.5	1
Pasteles	Modelización Gráfica correcta	0.5	0.5	0.5	1

A continuación, describimos el comportamiento de *Susana* en la resolución de los problemas y en la valoración de las respuestas (Cuestionarios 1 y 2).

- **Problema *Farolas***

Susana resolvió bien el problema *Farolas* utilizando una división e identificó las respuestas totalmente correctas (C y D). Dio 1 punto a la respuesta C (división) tanto por el planteamiento como por el indicio de comprensión del problema. También puntuó con 1 la respuesta D (alternativa) pero echó en falta una mayor explicación (Figura 4.20).

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

C	D
35 | 3 05 11 2 Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color. **Solución: Necesita 12 colores** Puntos C: 1	3 farolas 1 color 15 farolas 5 colores 30 farolas 10 colores 33 farolas 11 colores 36 farolas 12 colores **Son 12 colores** Puntos D: 1

Justificación C	Justificación D
El problema está muy bien planteado, se nota que el niño lo ha entendido correctamente	El problema es correcto. Aunque podría haber ampliado la respuesta.

Figura.4.20. Justificación de Susana (E67) a la puntuación dada a las respuestas C y D de Farolas

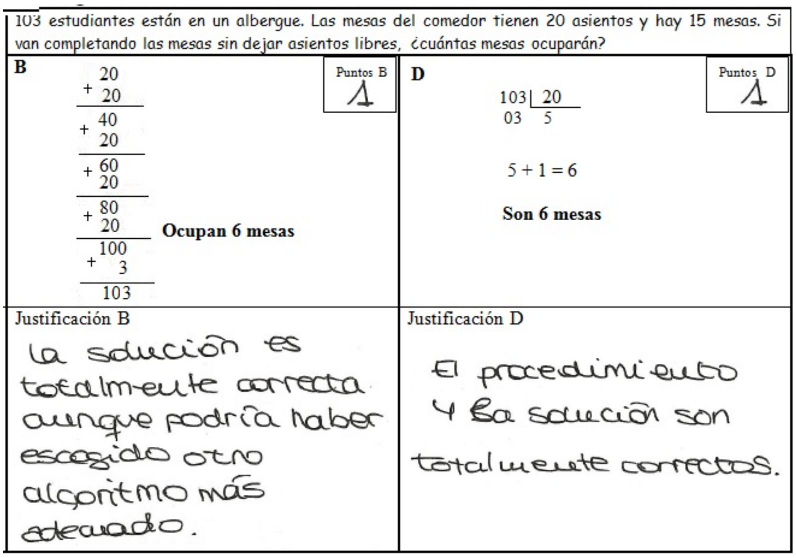
Susana puntuó las respuestas con error (A y B) con 0.5. La respuesta A (alternativa con error técnico) la justificó indicando que el resultado era correcto *"aunque el procedimiento no se entiende muy bien"*, si bien parece que *Susana* no advirtió el error de enumeración. La respuesta B porque el alumno aplicó el algoritmo de la división correctamente *"pero no se ha dado cuenta de que el resto es 2"* (Figura 4.21).

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?	
A Puntos A: 0'5 1 2 3 Rojo 4 5 6 Verde 7 8 9 Azul 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 **Necesitó 12 colores**	**B** Puntos B: 0'5 35 | 3 05 11 2 **Se necesitan 11 colores**
Justificación A La solución es correcta aunque el procedimiento no se entiende muy bien.	Justificación B El niño ha sabido elegir el algoritmo correcto pero no se ha dado cuenta de que el resto es 2.

Figura.4.21. Justificación de Susana (E67) a la puntuación dada a las respuestas A y B de Farolas

- **Problema *Albergue***

Susana también resolvió bien el problema *Albergue*, utilizando una estrategia alternativa a la división (modelización con representación gráfica). Identificó las respuestas totalmente correctas que puntuó con 1 (respuesta B, sumas repetidas y D, división). Pero en el caso de las sumas repetidas, opción B, consideró que el alumno *"podría haber escogido otro algoritmo más adecuado"* (Figura 4.22).


103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

B

Puntos B 1

20 + 20 = 40; 40 + 20 = 60; 60 + 20 = 80; 80 + 20 = 100; 100 + 3 = 103

Ocupan 6 mesas

D

Puntos D 1

103 | 20
03   5

5 + 1 = 6

Son 6 mesas

Justificación B

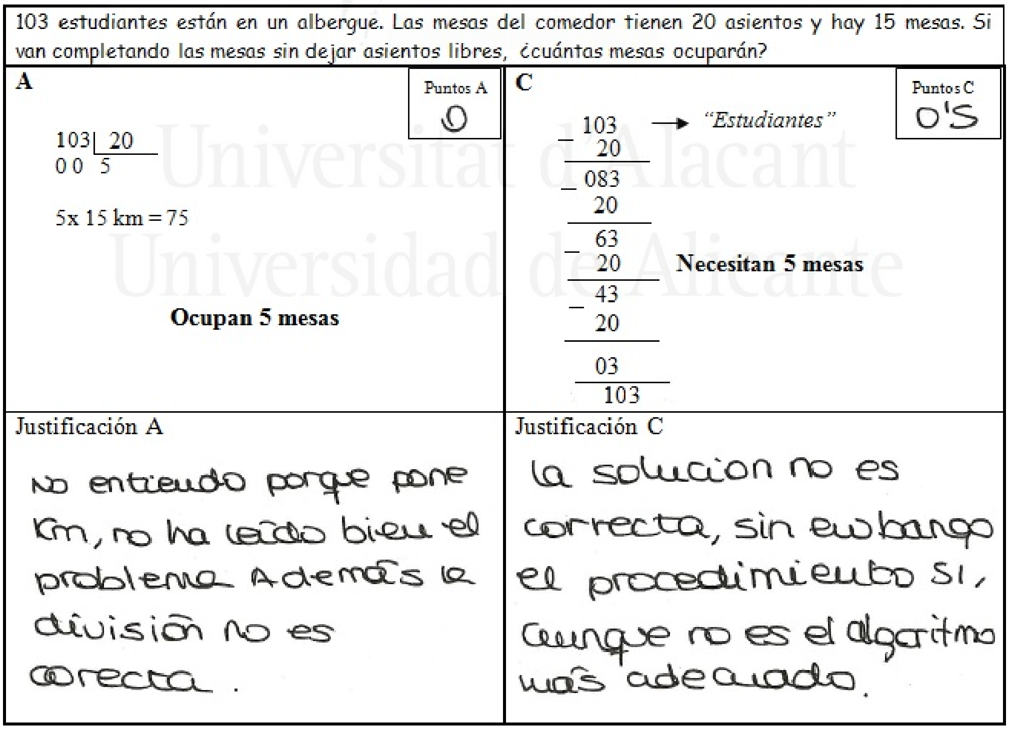
la solución es totalmente correcta aunque podría haber escogido otro algoritmo más adecuado.

Justificación D

El procedimiento y la solución son totalmente correctos.

Figura.4.22. Justificación de Susana (E67) a la puntuación dada a las respuestas B y D de Albergue

Las respuestas A (división con error) y C (restas repetidas con error), las puntuó con 0 y 0.5, respectivamente. La respuesta A porque el resultado y el procedimiento no eran correctos y la respuesta C porque aunque el resultado no era correcto y sí el procedimiento, este no era el más adecuado (Figura 4.23).


103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

A

Puntos A 0

103 | 20
0 0   5

5x 15 km = 75

Ocupan 5 mesas

C

Puntos C 0'5

103 → "Estudiantes"
103 − 20 = 083; 083 − 20 = 63; 63 − 20 = 43; 43 − 20 = 03

103

Necesitan 5 mesas

Justificación A

no entiendo porque pone km, no ha leído bien el problema Además la división no es correcta.

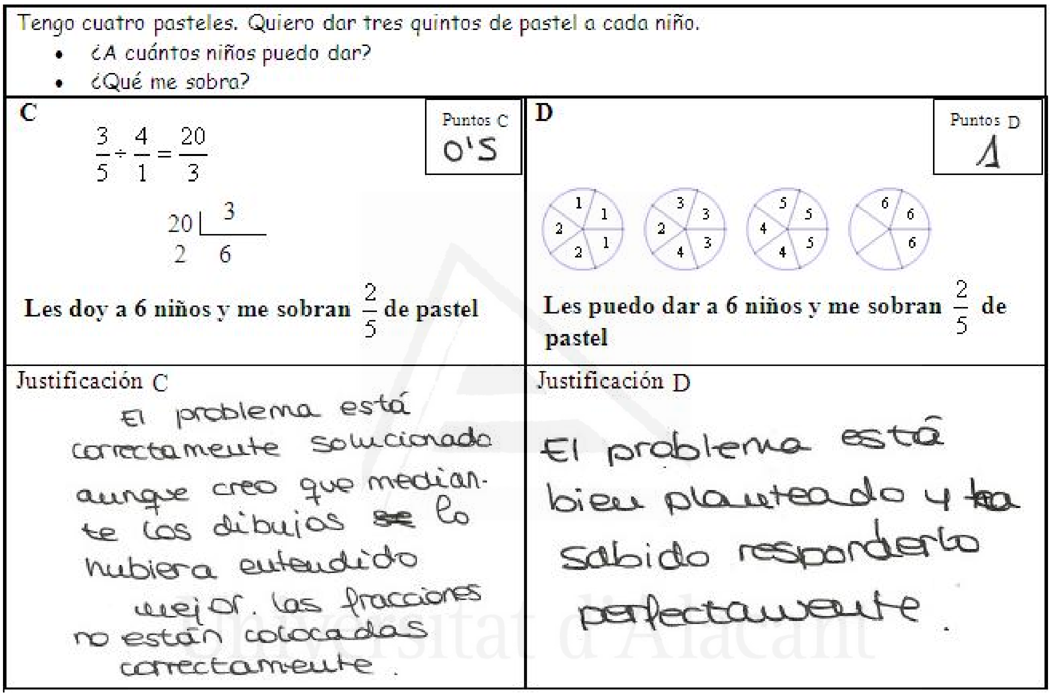
Justificación C

la solucion no es correcta, sin embargo el procedimiento si, aunque no es el algoritmo más adecuado.

Figura 4.23. Justificación de Susana (E67) a la puntuación dada a las respuestas A y C de Albergue

- **Problema *Pasteles***

Susana hizo bien el problema *Pasteles* a partir de la estrategia alternativa a la división, modelización con una representación gráfica. Identificó la respuesta correcta D (representación gráfica) puntuándola con 1. La respuesta C (resultado correcto pero procedimiento con error conceptual) la puntuó con 0.5, justificando esta última, por el error conceptual cometido por el alumno de primaria tal como indica: *"las fracciones no están colocadas correctamente"* (Figura 4.24).


Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.
- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

C	D
Puntos C: 0'5 $\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$ 20 | 3 2 6 **Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel**	Puntos D: 1 **Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel**
Justificación C El problema está correctamente solucionado aunque creo que mediante los dibujos ~~se~~ lo hubiera entendido mejor. las fracciones no están colocadas correctamente.	Justificación D El problema está bien planteado y ~~ha~~ sabido responderlo perfectamente.

Figura 4.24. Justificación de Susana (E67) a la puntuación dada a las respuestas C y D de Pasteles

También puntuó con 0.5 las respuestas con solución parcialmente correcta, A y B (Figura 4.25). La puntuación dada a estas respuestas está motivada por los errores cometidos por los alumnos de primaria en cada uno de ellas. En la respuesta A *Susana* indica: *"se ha hecho un lío a la hora de dibujar"*. En la respuesta B: *"la solución no es totalmente correcta, son 3/5"* (Figura 4.25)

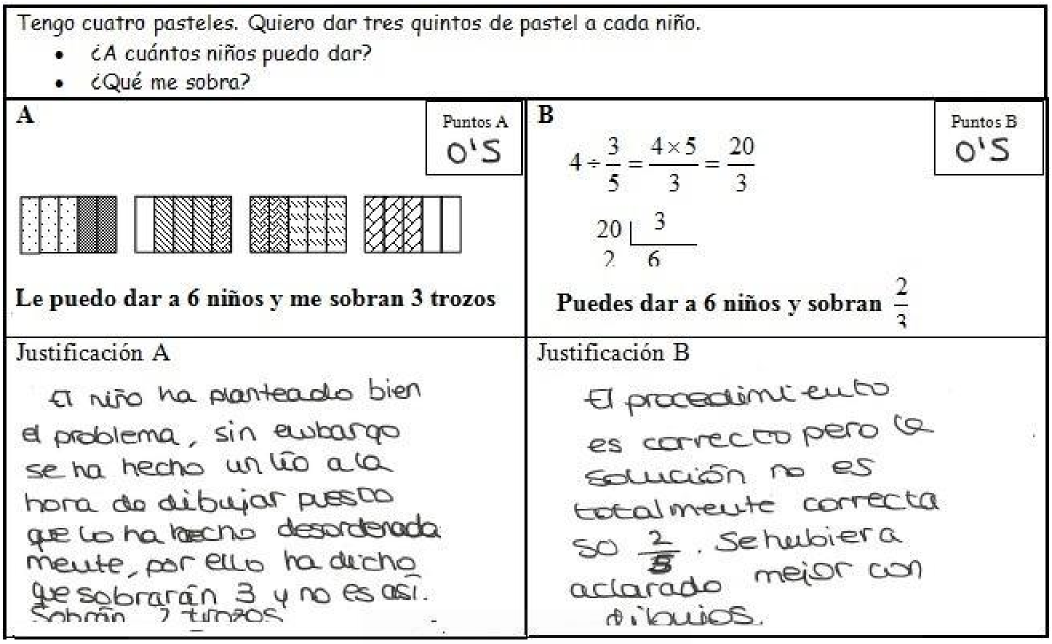


Figura 4.25. Justificación de Susana (E67) a la puntuación dada a las respuestas A y B de Pasteles

En resumen, *Susana* resolvió correctamente los tres problemas. Identificó las respuestas correctas que puntuó de la misma forma y mostró su preferencia por el procedimiento de la división en los problemas *Farolas* y *Albergue*, pues consideró que "*es el algoritmo más adecuado*", y por la representación gráfica en *Pasteles*, pues piensa que una estrategia alternativa a la división como hacer una representación gráfica es más clara y fácil de entender: *"se hubiera aclarado mejor con dibujos"* (respuesta B*); "mediante los dibujos lo hubiera entendido mejor"* (Respuesta C). Esta preferencia no se traduce en las puntuaciones que da a las respuestas, pues en los casos donde el procedimiento como la respuesta eran correctos los puntuó con 1.

A continuación, vamos a describir el caso de *Esteban* (E82) que presenta singularidades en relación al caso prototipo.

- **El caso de Esteban (E82)**

Esteban es un estudiante de 18 años. Cursó Bachillerato en la especialidad de Humanidades y Ciencias Sociales, no cursó la asignatura de Matemáticas y accedió a la Universidad por Selectividad.

Este estudiante resolvió los tres problemas correctamente Los problemas *Farolas* y *Albergue* con una división y el de *Pasteles* mediante modelización con una representación gráfica (ver anexo pp.54-60). En el Cuestionario 2, al igual que *Susana* valoró por igual las respuestas correctas basadas en la división que en un procedimiento alternativo. La principal diferencia con *Susana*, es que *Esteban* no identificó los errores de las respuestas que tienen un resultado correcto valorándolas con un 1 (Tabla 4.25).

Tabla 4.25. Procedimientos utilizados por Esteban (E82) en la resolución problemas (Cuestionario 1) y puntuaciones dadas a los problemas (Cuestionario 2)

		Puntuaciones asignadas a las respuestas			
		A	**B**	**C**	**D**
Farolas	División correcta	1	0.5	1	1
Albergue	División correcta	0	1	0	1
Pasteles	Modelización gráfica correcta	0	0.5	1	1

A continuación, pasamos a describir las interpretaciones que ha realizado *Esteban* y que presentan ciertas diferencias con las realizadas por Susana, prototipo de este perfil (Tabla 4.24).

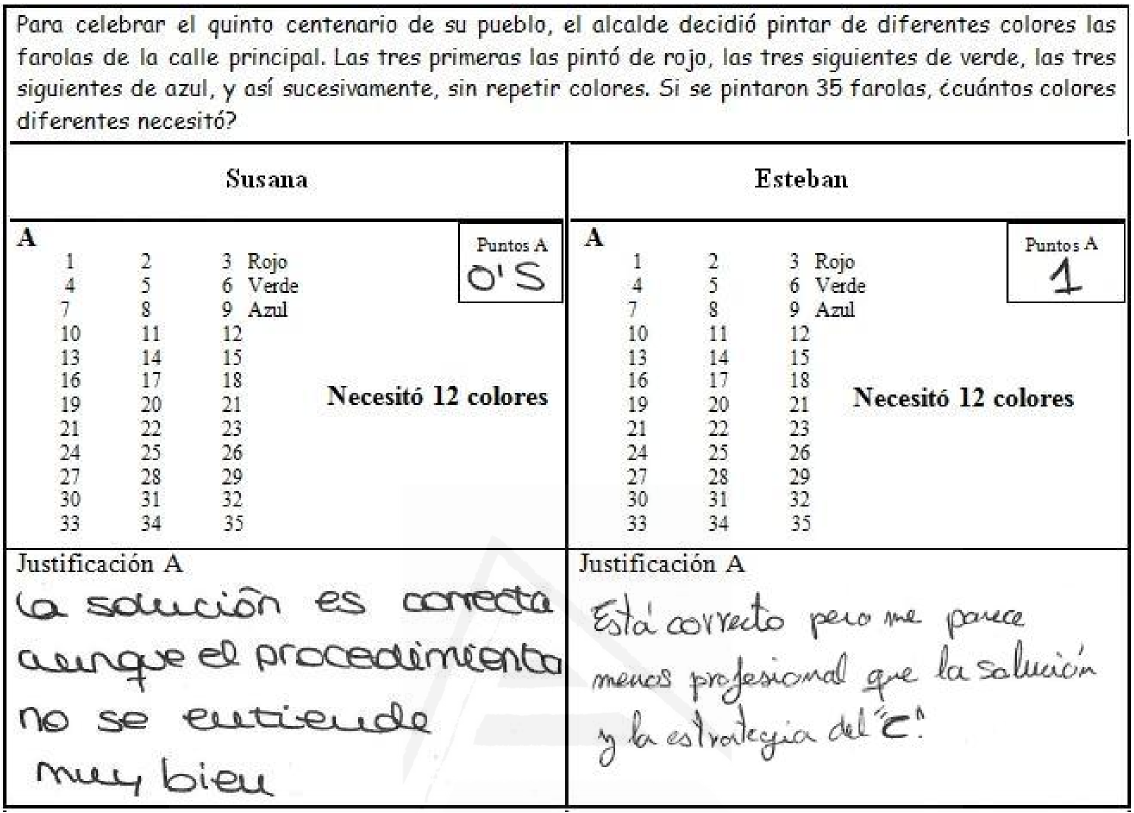
Tabla 4.26. Puntuaciones discrepantes de Esteban (E82) dadas al cuestionario 2 en relación al prototipo del perfil 3

	Problemas											
	Farolas				***Albergue***				***Pasteles***			
Casos	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**D**
Susana	0.5	0.5	1	1	0	1	0.5	1	0.5	0.5	0.5	1
Esteban	1	0.5	1	1	0	1	0	1	0	0.5	1	1

Singularidades en relación al caso prototipo

- **Problema *Farolas***

Esteban resolvió, correctamente el problema *Farolas* con una división. La discrepancia observada con *Susana* en la interpretación de la respuesta A se encuentra en el hecho de que *Esteban* no identificó el error cometido en el procedimiento y aunque no influyó en su puntuación indicó que no le parecía profesional el procedimiento (Figura 4.29).



Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

Susana	Esteban
A — Puntos A: 0'5	A — Puntos A: 1
1 2 3 Rojo 4 5 6 Verde 7 8 9 Azul 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 **Necesitó 12 colores**	1 2 3 Rojo 4 5 6 Verde 7 8 9 Azul 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 **Necesitó 12 colores**
Justificación A la solución es correcta aunque el procedimiento no se entiende muy bien	Justificación A Está correcto pero me parece menos profesional que la solución y la estrategia del "C".

Figura 4.29. Diferencia entre la justificación dada por Esteban (E82) y Susana (E67) a la puntuación de la respuesta A Farolas

- **Problema *Albergue***

Esteban resolvió, correctamente el problema *Albergue* con una división. En su interpretación de la respuesta C no solo fue consciente de que el resultado no era correcto, sino que además, aunque no lo explicite, parece que identificó el error cometido en el procedimiento, resta sucesiva mal hecha, de ahí que puntuase la respuesta con un cero y no con 0.5 como hizo *Susana*. Aunque hace mención a su preferencia por el procedimiento de la división, esta preferencia no influye en su puntuación, como se observa en la opción A del problema *Farolas* y a lo largo del cuestionario (Figura 4.30).

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?	
C — 103 − 20 = 083; 083 − 20 = 63; 63 − 20 = 43; 43 − 20 = 03; 103 → "Estudiantes". Necesitan 5 mesas. Puntos C: 0'5	C — 103 − 20 = 083; 083 − 20 = 63; 63 − 20 = 43; 43 − 20 = 03; 103 → "Estudiantes". Necesitan 5 mesas. Puntos C: 0'
Susana	**Esteban**
Justificación C: la solucion no es correcta, sin embargo el procedimiento si, aunque no es el algoritmo más adecuado.	Justificación C: No es correcto. Es un procedimiento costoso respecto al "D"

Figura 4.30. Diferencia entre la justificación dada por Esteban (E82) y Susana (E67) a la puntuación de la respuesta C de Albergue

- **Problema *Pasteles***

Esteban resolvió bien el problema *Pasteles* con una representación gráfica. Esteban interpretó las respuestas A y C de la misma forma que *Susana*. *Esteban* puntuó con 0 la opción A al tener en cuenta tanto el resultado como el error del procedimiento que llevó al alumno de primaria a dar una solución incorrecta; sin embargo *Susana* consideró que era un error de conteo y no lo penalizó. En la opción C Esteban no es consciente del error conceptual por lo que considera correcta la respuesta, de ahí las discrepancias. Las diferencias entre estas puntuaciones son debidas principalmente a la identificación o no de los errores (conocimiento de contenido especializado) (Figura 4.31).

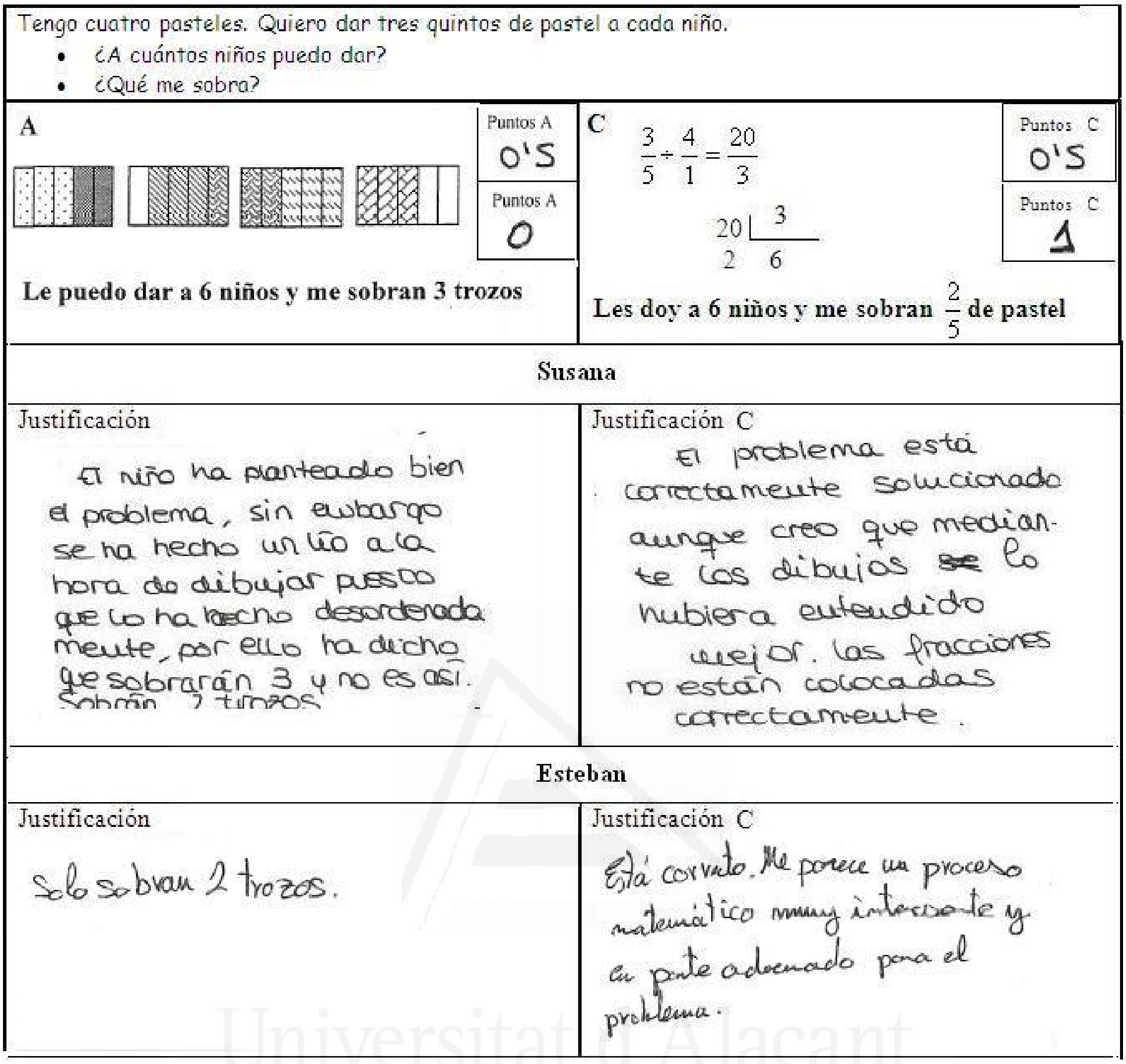


Figura 4.31. Diferencia entre la justificación dada por Esteban (E82) y Susana (E67) a la puntuación de las respuestas A y C de Pasteles

En resumen, las diferencias de *Esteban* con *Susana* residen en la identificación o no de errores (es decir, en el conocimiento especializado de contenido de *Susana* y *Esteban*). *Susana* que identificó los errores valoró más el proceso que un resultado correcto. *Esteban* por el contrario valoró más las respuestas con resultado correcto que el proceso (al no haber identificado los errores).

CAPÍTULO 5. CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

CAPÍTULO 5. CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

Este estudio se enmarca en la línea de investigación sobre el conocimiento del profesor y tiene como objetivo caracterizar cómo estudiantes para maestro interpretan respuestas de alumnos de 6º curso de Educación Primaria a problemas de división-medida con resto. La mayoría de las investigaciones realizadas hasta el momento se han centrado en cómo los estudiantes para maestro resuelven problemas de división-medida identificando sus dificultades. Para que los maestros puedan desempeñar tareas específicas de la enseñanza tales como interpretar respuestas de estudiantes en cuanto a la comprensión de conceptos o procedimientos matemáticos, y examinar y comprender procedimientos no usuales de resolución de problemas, es necesario que tengan un conocimiento de contenido matemático especializado que va más allá de saber resolver los problemas de división-medida con resto y con fracciones. En este caso el conocimiento de matemáticas especializado comprende: conocer los distintos significados de la división y los procedimientos de resolución de los problemas de división-medida (modelización, conteo a saltos, sumas y restas repetidas, multiplicación, división, representaciones gráficas, etc.), así como la forma en que va evolucionando el uso de estas estrategias a lo largo de la escolaridad y las dificultades más comunes que encuentran los alumnos. El uso de este conocimiento permitirá a los profesores realizar tareas específicas de la enseñanza como interpretar las respuestas de estudiantes identificando los procedimientos utilizados y las dificultades más comunes (competencia mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes).

Para indagar y examinar el conocimiento especializado de contenido matemático de los estudiantes para maestro, se ha analizado no solo cómo resuelven los estudiantes para maestro los problemas de división-medida, sino también como interpretan las respuestas dadas por alumnos de 6º curso de primaria utilizando distintos procedimientos, a los mismos problemas que ellos previamente habían resuelto. En este estudio, se ha entendido por interpretar, cómo los estudiantes para maestro evalúan las respuestas de los estudiantes puntuándolas con 0, 0.5 o 1 y qué justificaciones ofrecen a las puntuaciones dadas.

En las siguientes secciones se discuten los resultados obtenidos con estudios previos, dando respuesta a nuestro objetivo y nuestras preguntas de investigación: (i) ¿cómo resuelven los estudiantes para maestro problemas de división-medida?, (ii) ¿cómo estudiantes para maestro interpretan respuestas dadas por alumnos de 6º curso de Primaria (11-12 años) a problemas de división-medida? y (iii) ¿qué relación hay entre la corrección en la resolución de los problemas de los estudiantes para maestro y su interpretación de las respuestas de los estudiantes?. Finalmente, se destacan algunas implicaciones para la formación de maestros y para futuras investigaciones.

5.1. EL CONOCIMIENTO DE CONTENIDO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Más del 70% de los estudiantes para maestro resolvió de manera correcta los problemas de división-medida *Farolas* y *Albergue* donde intervienen números naturales, y un poco más del 50% el problema *Pasteles* donde está implicada una división de un entero entre una fracción. Esto nos indica las dificultades que tuvieron los estudiantes para maestro a la hora de resolver los problemas de división-medida (conocimiento de matemáticas) donde debían interpretar el resto añadiendo una unidad al cociente o donde debían hacer una división de un entero entre una fracción e interpretar también el resto. Nuestros resultados muestran una tendencia entre los estudiantes para maestro a excluir el conocimiento del mundo real para interpretar el resto de la división entre dos enteros y dar una respuesta correcta al problema de división-medida al igual que en el estudio de Verschaffel et al. (1997). Este resultado se extiende, y de forma más acentuada, a los problemas de división-medida en los que está implicada la división de un entero entre una fracción.

El procedimiento más empleado en la resolución de los problemas *Farolas* y *Albergue* fue el de la división y en menor medida otros procedimientos alternativos a la división como la modelización-agrupamiento o las sumas o restas repetidas. En general la tendencia de los estudiantes que conocen el algoritmo de la división es utilizarlo para resolver los problemas de división-medida. Tendencia que se ha demostrado en estudios previos en estudiantes de Educación Primaria (Li y Silver, 2000; Silver et al., 1993). En el problema *Pasteles* el procedimiento más utilizado fue el alternativo: modelización con una representación gráfica.

Además, en los problemas *Farolas* y *Albergues*, el nivel de éxito fue mayor en los estudiantes para maestro que usaban dos procedimientos (división y procedimiento alternativo) o una división. Sin embargo, en el problema *Pasteles* los estudiantes para maestro tuvieron más éxito cuando aplicaron procedimientos alternativos. Luego parece ser, que ante las dificultades en la realización de una división de un entero entre una fracción, los estudiantes para maestro utilizan otros procedimientos alternativos (en su mayoría, la modelización agrupamiento basada en una representación gráfica). Las dificultades de la división de un entero entre una división son debidas a la dificultad de identificar cuál es la unidad de medida (Izsák et al., 2012; Rosli et al., 2011). Es decir, en el problema de este estudio *Pasteles*, se tenía que realizar la división 4 entre 3/5 que son 20/3, para responder a cuántos niños se puede dar pastel y cuánto sobra. La fracción resultante 20/3 (cociente 6 y resto 2) significa que se puede dar a 6 niños y los 2 trozos que sobran son quintos de un pastel pues cada pastel se ha dividido en quintos. También podría interpretarse que sobra 2/3 de 3/5 de un pastel, que equivale a 2/5 de un pastel. Muchos estudiantes para maestro no relacionaban los 2 trozos que sobraban con el todo o decían que sobraba 2/3 del pastel sin identificar correctamente la unidad de medida.

En relación a los errores cometidos por los estudiantes para maestro, los más comunes en la resolución de los problemas de división-medida con enteros son los datos mal usados y la interpretación incorrecta de los términos de una operación. El primero fue más común el problema *Albergue* por el uso del dato superfluo que había en el problema; el segundo fue común en ambos problemas ante las dificultades de asumir que el resto de una operación no debe considerarse en el resultado final. En la resolución del problema *Pasteles* con la división de un entero entre una fracción, los errores más comunes fueron los datos mal usados y error de precisión en la respuesta. El primero se dio cuando los estudiantes para maestro no utilizaban algún dato necesario o no interpretaban correctamente los datos del problema. Por ejemplo, las dificultades con la identificación de la unidad de medida. El segundo se dio cuando los estudiantes para maestro no expresaban el resultado en términos matemáticos, por ejemplo no expresaba en fracción la respuesta a la segunda pregunta del problema pasteles diciendo "2 trozos".

5.2. EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE CONTENIDO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO EN LA TAREA PROFESIONAL DE INTERPRETAR

En este punto, se muestra en primer lugar los resultados obtenidos de la relación que hay entre la corrección en la resolución de los problemas de los estudiantes para maestro y su interpretación de las respuestas de los estudiantes. En segundo lugar se muestran las características obtenidas a través de los resultados (perfiles) de cómo los estudiantes para maestro interpretan las respuestas de estudiantes de Educación Primaria a problemas de división-medida.

5.2.1. Relación entre la corrección en la resolución de los problemas y la interpretación dada a las respuestas de los estudiantes de Educación Primaria

La mayoría de los estudiantes para maestro que había resuelto correctamente los problemas *Farolas* y *Albergue*, puntuó con un 1 las respuestas de los estudiantes de primaria basados en una división con interpretación correcta del resto, sin embargo, solo aproximadamente la mitad de ellos, puntuó con un 1 las respuestas basadas en un procedimiento alternativo correcto. En las justificaciones que dieron los estudiantes para maestro a las puntuaciones de 0 y 0.5 en las respuestas basadas en un procedimiento alternativo correcto, algunos indicaron que el procedimiento empleado no era adecuado para un alumno de 6º curso. Otros expresaron que el procedimiento era poco claro o que no era suficientemente comprensible, lo que denota falta de conocimiento relativo a los procesos de construcción del conocimiento matemático, que forma parte del conocimiento especializado de contenido matemático. Sin embargo, estos estudiantes para maestro sí puntuaron con un 1 la respuesta alternativa correcta del problema *Pasteles*, quizás porque ellos también utilizaron esa misma estrategia (modelización – representación gráfica) en la resolución de este problema, ante la dificultad de la división de un entero entre una fracción.

Por otra parte, algunos estudiantes para maestro que había resuelto correctamente los problemas no identificaron los errores cometidos por los estudiantes de Educación Primaria cuando la solución era correcta. Esto se pone de manifiesto cuando puntúan con un 1 la respuesta A de *Farolas* (procedimiento alternativo con un error procedimental) y cuando puntúan con un 1 la respuesta B de *Pastales* (división con un error procedimental y otro conceptual). El hecho de que los estudiantes para maestro que han resuelto bien los problemas no hayan sido capaces de advertir los errores que contienen las distintas respuestas dadas por los alumnos de primaria a los tres problemas pone de manifiesto que saber resolver correctamente un problema (conocimiento común de matemáticas) no es suficiente para poder interpretar adecuadamente las respuestas de los alumnos (conocimiento especializado de matemáticas), pues es preciso conocer no solo distintos procedimientos de resolución sino también identificar los errores que cometen los alumnos (Tirosh, 2000). Otra posible interpretación es que los estudiantes para maestro pudieron considerar suficiente revisar el resultado debido a la creencia de que “en la resolución de un problema el resultado es más importante que el proceso” (Callejo y Vila, 2009). Esta segunda interpretación pone de manifiesto el papel que pueden jugar las creencias sobre la resolución de problemas en el proceso de interpretar y valorar las respuestas dadas por alumnos de Educación Primaria.

Se observa que los estudiantes para maestro tienen mayor tendencia a puntuar con 1 las respuestas del problema *Farolas* basadas en procedimientos alternativos con error, que las respuestas basadas en una división con error. Parece ser que estos estudiantes para maestro penalizaron más un error en la división que un error en procedimientos alternativos. Una posible interpretación de este hecho viene dada por una de las características del problema *Farolas* del cuestionario: la respuesta basada en un procedimiento alternativo con un error tenía un resultado correcto (problema *Farolas*) mientras que la respuesta basada en una división con error tenía un resultado incorrecto. Por tanto, puede ser que los estudiantes para maestro valoraran más la corrección del resultado que el procedimiento utilizado. En relación al problema *Albergue,* los estudiantes para maestro penalizaron más la división con error que la alternativa. En este caso, posiblemente esto pueda ser debido a que las respuestas división con error del cuestionario, presentaban error en la propia división mientras que en la respuesta alternativa con error, se trataba de un error de conteo que podía pasar desapercibido. Algunos estudiantes para maestro penalizaron menos este error en el conteo subrayando que el procedimiento utilizado era correcto. En el problema *Pasteles*, se invierte la tendencia presentada por los estudiantes para maestro en el problema *Farolas* y *Albergue.* En el problema *Pasteles* los estudiantes para maestro puntúan más la división con error que la alternativa con error. Posiblemente, esto sea debido a que la respuesta división con error, presenta un resultado correcto y el error es conceptual, lo que nos indica que estos estudiantes para maestro tienen un conocimiento de contenido especializado limitado.

Por otra parte, cabe señalar que algunos estudiantes para maestro que resolvieron regular o de forma incorrecta los problemas fueron capaces de identificar las respuestas de los alumnos de Educación Primaria como correctas (al igual que los estudiantes para maestro que habían resuelto el problema correctamente, puntuaron en menor medida con un 1 los procedimientos alternativos correctos). Estos resultados podrían explicarse por las características del Cuestionario 2, en el que se presentaban al mismo tiempo varias respuestas de alumnos de primaria con diferentes características, hecho que parece que ayudó a algunos estudiantes para maestro a identificar las respuestas correctas a los problemas, incluso sin haber respondido de manera correcta en el cuestionario 1. También ponen de manifiesto nuevamente que los procedimientos de la división son más aceptados por los estudiantes para maestro que los alternativos, en los problemas *Farolas* y *Albergue*, exceptuando el alternativo de modelización con representación gráfica, en el problema *Pasteles*.

La asimetría que se ha puesto de manifiesto entre los papeles de resolutor y de evaluador del proceso de resolución también fue constatada por Verschaffel et al. (1997). Estos autores usaron el problema “*450 soldados deben ser trasladados a su lugar de entrenamiento. Cada autobús del ejército tiene capacidad para 36 soldados, ¿cuántos autobuses son necesarios?”*, y obtuvieron que el 86.2% de los estudiantes para maestro que habían dado un resultado incorrecto (cociente de la división) reconocieron y puntuaron la respuesta con resultado correcto (cociente de la división más una unidad) de manera adecuada. De la misma manera Magiera et al. (2013) encontraron que el conocimiento que los estudiantes para profesor ponían de manifiesto sobre las relaciones algebraicas cuando resolvían problemas, no estaba relacionado con su habilidad para reconocer algunas características del pensamiento algebraico que mostraban las respuestas escritas de los estudiantes. Esta investigación revelaba que los estudiantes para profesor reconocían algunas características del pensamiento algebraico en mayor medida que otras y sus autores sugieren que esto puede ser debido a que los estudiantes para profesor, en tareas de reconocer las características del pensamiento algebraico en las respuestas escritas de los estudiantes, se apoyaban en aquello que fue enfatizado durante el curso de formación y no en su propio conocimiento.

La asimetría identificada en nuestra investigación y de los autores citados puede interpretarse por el hecho de que el conocimiento necesario para resolver un problema y el conocimiento para interpretar las respuestas de los alumnos de Primaria son diferentes (Ball et al., 2008), aunque estén relacionados. Para resolver los problemas de primaria, los estudiantes para maestro pueden hacer uso del conocimiento común de contenido matemático, pero para interpretar la respuesta de los estudiantes interviene también el conocimiento especializado de contenido matemático que forma parte del contenido del curso de formación. Proponer a los estudiantes para maestro realizar parejas de tareas del tipo *resolución-interpretación de las respuestas* puede ayudarles a profundizar en el conocimiento especializado de matemáticas, en particular, relacionado con los problemas de división-medida con resto y de división-medida con fracciones. Este tipo de tarea puede permitir a los estudiantes para maestro a reconocer los diversos procedimientos de resolución que emplean los alumnos de Primaria y cómo éstos van evolucionado desde los más primitivos como la modelización, el conteo o las sumas y restas repetidas, etc., a otros más sofisticados como la división (Downton, 2009) y a reconocer, por ejemplo, los errores que cometen en la interpretación del resto en el contexto de la situación planteada en el problema.

5.2.2. Características de cómo los estudiantes para maestro interpretan las respuestas de estudiantes de Educación Primaria a problemas de división-medida

El estudio de los perfiles de comportamiento de los estudiantes para maestro sobre la puntuación de las diferentes respuestas a los problemas *Farolas*, *Albergue y Pasteles* y el posterior análisis de la justificación dada junto con el análisis de casos, ha permitido identificar tres maneras diferentes de cómo los estudiantes para maestro interpretan las respuestas de los estudiantes de Educación Primaria a problemas de división-medida con resto. Estas tres maneras de interpretar vienen determinadas por dos características: la valoración por igual o no de los dos procedimientos, división y alternativos, y la valoración del resultado y/o proceso. Esta última característica está relacionada con la capacidad de identificar los errores procedimentales y conceptuales que aparecían en las respuestas de los alumnos de Educación Primaria.

La primera manera de interpretar (perfil 1) se centra en valorar más un resultado correcto (en respuestas con errores conceptuales y procedimentales) que el proceso y en valorar por igual el uso de distintos procedimientos: división y alternativos. El hecho de valorar más un resultado correcto que el proceso se observa cuando en el problema *Farolas* puntúa con un 1 la respuesta basada en un procedimiento alternativo con un error en el proceso y respuesta correcta y con un 1 la respuesta C de *Pasteles* centrada en una división con dos errores que se compensaban dando una respuesta correcta. Por otro lado, este grupo de estudiantes para maestro puntúa con un 1 tanto el procedimiento alternativo como el de la división.

La segunda manera de interpretar (perfil 2) se centra en valorar más el procedimiento de la división que los procedimientos alternativos en problemas con números naturales. Sin embargo en el problema de un entero entre una fracción se valoran más los procedimientos alternativos. Este grupo de estudiantes para maestro penalizó el uso de procedimientos alternativos a la división en los problemas de división-medida con números naturales. Sin embargo, este grupo de estudiantes presenta diferencias en función de cómo valoraron los resultados/procesos correctos. Así, algunos de ellos valoraron más los resultados correctos (sin identificar los errores). Otros valoraron el procedimiento alternativo basado en sumas repetidas y se centraron más en que el proceso fuera correcto que en tener un resultado correcto identificando algunos errores procedimentales y conceptuales. Un tercer grupo también valoró el procedimiento alternativo basado en sumas repetidas y valoró el hecho de utilizar un procedimiento correcto (independientemente de si el resultado era correcto o no). Este grupo de estudiantes tampoco identifican los errores procedimentales ni conceptuales.

La tercera manera de interpretar (perfil 3) se centra en valorar por igual el uso de procedimientos basados en una división y los alternativos y en valorar los procedimientos correctos independientemente de que el resultado sea correcto o incorrecto ya que son capaces de identificar los errores procedimentales y conceptuales de las respuestas. Dentro de este grupo de estudiantes, hay un subgrupo que aunque valoró el proceso (el procedimiento) y no el resultado, no identificó los errores en las respuestas de los estudiantes de Educación Primaria.

De estas tres maneras de interpretar, los resultados nos muestran que aquellos estudiantes para maestro que valoraron más los procedimientos basados en una división que los alternativos justificaron su valoración de dos maneras diferentes: (i) la estrategia utilizada no era la más competente para un niño de 6º de Educación Primaria o (ii) por la falta de justificación. Los primeros identificaron el procedimiento correcto pero valoraron el hecho de que existen estrategias más eficientes basadas en los hechos numéricos como es la división. Esto es parte del conocimiento especializado del contenido matemático. En los segundos se infiere que no identificaron el procedimiento utilizado por el alumno de Educación Primaria.

Aquellos estudiantes para maestro que valoraron más un resultado correcto que un procedimiento correcto no identificaron los errores conceptuales y procedimentales de las respuestas de los alumnos de Educación Primaria. La identificación de errores también es parte del conocimiento especializado de contenido matemático.

Estos resultados ponen de manifiesto la necesidad de que el estudiante para maestro identifique los elementos matemáticos importantes en los problemas de división-medida con resto y con números enteros. En este caso es importante que identifiquen el significado del resto (añadir una unidad más al cociente) y el significado de la división-medida. En el problema de división-medida con fracciones se añade la problemática de la interpretación de resto en relación a la identificación de cuál es la unidad de medida. Si los estudiantes para maestro no son capaces de identificar el tipo de problema y sus elementos tendrán dificultades en la interpretación de las respuestas de estudiantes de Educación Primaria donde estén implicados diferentes procedimientos y diferentes errores procedimentales y conceptuales. Este es el caso de los estudiantes para maestro que no fueron capaces de identificar los errores o que no fueron capaces de identificar el procedimiento alternativo usado por el estudiante de Educación Primaria.

Nuestros resultados subrayan la importancia de la relación entre las destrezas de identificar elementos matemáticos importantes e interpretar el pensamiento matemáticos de los estudiantes para el desarrollo de la competencia docente mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes. Es decir, es necesario que los estudiantes para maestro identifiquen los elementos matemáticos importantes de los problemas para poder interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes identificando distintos procedimientos de resolución o errores conceptuales (Callejo y Zapatera, 2016; Llinares et al., 2016; Magiera et al., 2013; Sánchez-Matamoros et al., 2015; Schack et al., 2013; Son, 2013). Nuestros resultados apoyan estos estudios anteriores y aportan características para el dominio particular de las estructuras multiplicativas, y en particular, para los problemas de división-medida con resto.

5.3. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DE MAESTROS Y FUTURAS INVESTIGACIONES

En lo que se refiere al conocimiento de matemáticas del maestro, y teniendo en cuenta los resultados obtenidos, nuestra investigación pone de relieve que, aunque los estudiantes para maestro tuvieron entre un 50% y un 75% de éxito en la resolución de los problemas, estos no fueron capaces de interpretar, en igual proporción, las respuestas de alumnos de primaria a esos mismos problemas (conocimiento especializado de contenido matemático). Estos resultados subrayan la necesidad de desarrollar la competencia necesaria para que los maestros puedan identificar los distintos procedimientos de resolución de problemas de estructura multiplicativa e interpretarlos en el marco del currículum de primaria. Para ello se debe tener en cuenta el grado de comprensión que tienen los alumnos del significado de la división, el razonamiento multiplicativo y el nivel de dominio del algoritmo de esta operación (Downton, 2009; Li y Silver, 2000), así como de los principales errores que cometen.

Las tareas para los estudiantes para maestro formadas por la dupla resolver-interpretar respuestas permiten conectar distintos dominios de conocimientos necesarios para la enseñanza al proponer la realización de una tarea profesional para el maestro como es interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes. La realización de este tipo de tareas implica conocer las matemáticas y las teorías del aprendizaje y construcción del conocimiento matemático, ya que en su resolución se utilizan conocimientos de didáctica de la matemática sobre el aprendizaje matemático para diagnosticar y proponer justificaciones y procesos de intervención. Luego el propio proceso de resolución de la segunda tarea puede producir conocimiento en la medida en que los estudiantes para maestro pueden identificar respuestas correctas que ellos mismos no han elaborado y, en algunos casos, a pesar incluso de no haber sabido resolver correctamente los problemas propuestos. Este proceso de construcción del conocimiento profesional está vinculado a la forma en la que se presenta a los estudiantes para maestro el conocimiento científico de Didáctica de la Matemática que es pertinente para estas situaciones.

Si la tarea de análisis e interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes se propone cuando los estudiantes para maestro aún no han recibido formación específica acerca de los problemas de estructura multiplicativa, como se hizo en esta investigación, la forma en que los estudiantes para maestro responden a la misma proporciona información al formador sobre las referencias iniciales de estos estudiantes acerca de este tipo de problemas, lo que le ayudará a adecuar el conocimiento de Didáctica de la Matemática, que en el programa de formación se convierte en objeto de aprendizaje. Además, sirve de punto de reflexión inicial para los estudiantes para maestro.

En el caso de que los estudiantes para maestro hayan recibido formación específica, estas tareas permiten desarrollar la competencia mirar de una manera profesional (*professional noticing*) el pensamiento matemático de los estudiantes en la medida en que los estudiantes para maestro ejerciten las destrezas de (a) identificar las estrategias usadas por los alumnos, (b) interpretar la comprensión matemática que ponen de manifiesto y (c) tomar decisiones relativas a la enseñanza teniendo en cuenta dicha comprensión (Jacobs et al., 2010) al integrar el uso de un conocimiento específico en la realización de tareas profesionales como es el interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes de Educación Primaria.

Nuestro trabajo se ha centrado no sólo en el análisis de los procedimientos de resolución de problemas de división-medida empleados por los futuros maestros, como han hecho otros trabajos, sino también en la forma en que interpretan respuestas de alumnos de primaria que emplean distintos procedimientos. Los resultados obtenidos ofrecen a los formadores unas referencias iniciales acerca de los conocimientos de los estudiantes para maestro sobre problemas de división-medida y el uso que hacen de estos conocimientos en una de las tareas profesionales que deberán realizar en su profesión: ser capaz de interpretar las respuestas de los alumnos.

Nuestra investigación se ha centrado en un aspecto específico de las estructuras multiplicativas, los problemas de división-medida. Estas estructuras abarcan distintos tipos de razonamientos (cuantitativo, multiplicativo, proporcional y con números racionales) y diversos conceptos (fracciones, decimales, razón, proporción y porcentajes). Diversas investigaciones han profundizado en la problemática de su enseñanza y en la necesidad de interrelacionar estos conocimientos, y han formulado recomendaciones para la formación de profesores (Sowder et al., 1998) en la línea del conocimiento de contenido pedagógico de Shulman (1986) que propone "incorporar los aspectos del contenido que guardan más relación con su enseñanza" (p. 9).

Por último, cabe señalar que las tendencias en las puntuaciones dadas por los estudiantes para maestro pueden indicar que en la interpretación de los procedimientos y las respuestas de los estudiantes interviene el conocimiento del profesor y sus creencias sobre la resolución de problemas. Aunque no tenemos evidencias de que las creencias de los estudiantes para maestro están en el origen de su forma de valorar las respuestas de los estudiantes, los trabajos sobre creencias de futuros maestros (Cos y Valls, 2006; Llinares, 2002) ofrecen buenas razones para apoyar nuestra interpretación y poder asumir que las creencias sobre los procedimientos que se deben emplear en la resolución de problemas de división-medida han podido jugar un papel importante en la valoración e interpretación de las respuestas de los alumnos de primaria por parte de los estudiantes para maestro. Este aspecto debería ser investigado en futuros trabajos.

REFERENCIAS

REFERENCIAS

Amstrong, B.E. y Bezuk, N. (1995). Multiplication and division of fractions: The search for meaning. En J. T. Sowder y B.P. Schappelle (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 85-119). Albany, NY: State University of New York Press.

Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal for Teacher Education, 5*9(5), 389-407.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 57-79.

Biza, I., Nardi, E. y Zachariades, T. (2007). Using tasks to explore teacher knowledge in situation-specific contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 301-309.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C., Underhill, R., Jones, D. y Agard, P. (1992). Learning to teach hard mathematics: Do novice teachers and their instructors give up too easily? *Journal for Research in Mathematics Education, 23(3)*, 194-222.

Buforn, Á. y Fernández, C. (2014). Pre-service primary school teachers' specialized content knowledge for teaching of proportional reasoning. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 21-41.

Bulgar, S. (2003). Children’s sense-making of division of fractions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 319-334.

Callejo, M.L. y Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students’ belief systems: two case studies. *Educational Studies in Mathematics*, *72*(1), 11-126.

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers’ noticing of students’ understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*. DOI: 10.1007/s10857-016-9343-1.

Campbell, S. (1996). On pre-service teachers’ understanding of division with remainder. En L. Puig, y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp.177-184). Valencia, España: PME.

Campbell, S. (2002). Coming to terms with division preservice teachers'' understanding. En S.R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory. Research in Cognition and Instruction* (pp. 15-40). Westport, CT: Greenwood.

Carpenter, T. P. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W. y Silver E. A. (1983). Result of the third NAEP Mathematics Assessment: Secondary School. *Mathematics Teacher*, *76*(9), 652-659.

Castro, E. y Castro, E. (1996). Conocimiento de contenido pedagógico de los estudiantes de Magisterio sobre la estructura multiplicativa. En J. Giménez, S. Llinares, S. y V. Sánchez (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de Primaria. Cuestiones desde la Educación matemática* (pp.119-141). Granada: Comares.

Coles, A. (2013). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(3), 165-184.

Coles, A., Fernández, C. y Brown, L. (2013). Teacher noticing and growth indicators for mathematics teacher development. En Lindmeier, A. M. y Heinze, A. (Eds), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education* (vol. 2, pp. 209-216).Kiel, Germany: PME.

Contreras, J. N. (1997). Learning to teach algebraic division for understanding: A comparison and contrast between two experienced teachers. En J. A. Dossey, J. O. Swafford, M. Parmantie y A. E. Dossey (eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 535-544). Bloomington-Normal, IL: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Cos, A. y Valls, J. (2006). Debates virtuales y concepciones de estudiantes para maestro sobre resolución de problemas. *Zetetiké, 14 (25)*, 7-28.

Crespo, S. (2000). Seeing more tan right and wrong answers: Prospective teachers' interpretations of students' mathematical work. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 155-1881.

Delaney, S., Ball, D.L., Hill, H., Schilling, S. y Zopf, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching: adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 171-197.

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersh, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., Verschaffel, L., Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education, 45*, 82-92.

Downton, A. (2009). A study of comparative performance on partitive and quotitive division in solving division word problems. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 465-472). Thessaloniki, Greece: PME.

Eraut, M. (1996), *Developing Professional Knowledge and Competence*. Londres: The Falmer Press

Escudero, I. y Sánchez, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behaviour 26(4)*, pp. 312-327.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education, 44,* 747-759

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary Teacher's Professional Noticing of Students' Mathematical Thinking. *The Mathematics Enthusiast. Special Issue: International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education, vol. 10*(1&2), 441-468.

Fischbein, E. (1983). Intuition and Analytical Thinking in Mathematics Education. *International Reviews on Mathematical Education*, *15*(2), 68-74.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Fortuny, J. M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 23-37.

Graeber, A. O., Tirosh, D. y Glover, R. (1986). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 95-102.

Graeber, A. O. y Tirosh, D. (1988). Multiplication and division involving decimals: Preservice elementary teachers' performance and beliefs. *The Journal of Mathematical Behavior*.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situation. En D. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295). New York: McMillan.

Greer, B., Verschaffel, L. y De Corte, E. (2002). "The answer is really 4.5": Beliefs about word problems. En G. Leder, E. Pehkonen y G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (pp.271-292). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hill, H., Ball, D.L. y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Isiksal, M. y Cakiroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education 14*(3), 213-230.

Ivars, P. y Fernández, C. (2015). Aprendiendo a mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el contexto de las prácticas de enseñanza. El papel de las narrativas. *ENSAYOS. Revista de la Facultad de Educación de Albacete, 30*(1), 45-54.

Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2015) Sharing narratives in online discussions, a context for helping pre-service teachers to develop the noticing skill. En *EDULEARN15 Proceedings* (pp. 3041-3049).

Izsák, A., Jacobson, E., de Araujo, Z. y Orrill, C. H. (2012). Measuring mathematical knowledge for teaching fractions with drawn quantities. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 391-427.

Jacobs, V., Lamb, L. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Kaasila, R., Pehkonen, E. y Hellinen (2010). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 247-261.

Kaput, J. (1985). *Multiplicative word problems and intensive quantities: An integrated software response* (pp. 85-19). Harvard Graduate School of Education, Educational Technology Center.

Kazemi, E. y Franke, M. L. (2004). Teacher learning in mathematics: Using student work to promote collective inquiry. *Journal of mathematics teacher education*, *7*(3), 203-235.

Lago, M.O., Rodríguez, P., Enesco, I., Jiménez, L. y Dopico, C. (2008). Me sobran cuatro y no sé qué hacer con ellas. Un estudio sobre los problemas de división con resto en 1º de ESO. *Anales de Psicología, 24* (2), 201-212.

Li, Y. y Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM, 40(5)*, 833-843.

Li, Y. y Silver, E.A. (2000). Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder (DWR) problem. *Journal of Mathematical Behavior*, *19*(2), 233-246.

Llinares, S. (1998) *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *17,* 51-63.

Llinares, S. (2002). Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. En G.C. Leder, E. Pehkonen y G. Tonner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 159-209). Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 51*, 92-101.

Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación matemática*, 7(10), 53-62.

Llinares, S. (2013). Professional Noticing: A component of the Mathematics Teacher's Professional Practice. *SISYPHUS. Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teacher and teacher educator as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.

Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticípate secondary students' answers. *EURASIA. Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 12*(8). DOI: 10.12973/eurasia.2016.1295a

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Magiera, M.T., van den Kieboom, L.A. y Moyer, J.C. (2013). An exploratory study of pre-service middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 93-113.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 35–50). New York: Routledge.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. *Number concepts and operations in the middle grades, 2*, 19-40.

Olanoff, D., Lo, J.-J. y Tobias, J.M. (2014). Mathematical content knowledge for teaching elementary mathematics: A focus on fractions. *The Mathematical Enthusiast, 11*(2), 267-310.

Olive, J. y Steffe, L. P. (2002). Schemes, schemas and director systems: An integration of Piagetian scheme theory with Skemp's model of intelligent learning. En D. O. Tall y M.O. J. Thomas (Eds.), *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics A tribute to Richard Skemp* (pp. 97-130). Flaxton, Australia: Post Pressed.

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2006). Mathematics Teachers' Knowledge and Practices. En A. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp.461-494). Sense Publishers: Rotterdam/Taipei.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrik, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (vol. 3, pp. 69-108). Grupo Editorial Iberoamérica, Méjico.

Rizvi, N.F. y Lawson, M. J. (2007). Prospective teachers' knowledge: Concept of division. *International Educational Journal*, *8*, 377-392.

Rosaen, C. L., Lundeberg, M., Cooper, M., Fritzen, A. y Terpstra, M. (2008). Noticing: how does investigation of video records change how teachers reflect on their experiences? *Journal of teacher Education*, *59,* 347-360.

Rosli, R.., González, E.G. y Capraro, M.M. (2011). A case study of three preservice teachers on the units and unitizing of fractions. En L.R. Wiest y T. Lamberg (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1682-1689). Reno, NV: University of Nevada, Reno

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers'noticing of students'understanding of the derivative concept. *International journal of science and mathematics education*, *13*(6), 1305-1329.

Santagata, R., Zannoni, C. y Stigler, J. W. (2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of mathematics teacher education*, *10*(2), 123-140.

Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(5), 379-397.

Scherrer, J. y Stein, M.K. (2012). Effects of a coding intervention on what teachers learn to notice during whole-group discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, DOI 10.1007/s10857-012-9207-2.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hierbert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operation in the middle grades* (pp. 41-52). National Council of Teachers or Mathematics.

Sherin, M. G. (2001). Developing a professional vision of classrooms events. En T. Wood, B.S. Nelson y J. Warfields (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 75-93). Hillsdale, NJ: Erlbaurm.

Sherin, M., Jacobs, V. y Philipp, R. (Ed) (2010). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes.* New York: Routledge.

Sherin, M. G. y van Es, E. A. (2005). Using video to support teachers' ability to notice classroom interactions. *Journal of technology and teacher education*, *13*(3), 475.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: Una perspectiva contemporánea. En M.C. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza, I. Enfoques, teorías y métodos* (pp. 9-91). Barcelona: Paidós/MEC.

Silver, E.A., Shapiro, L.J. y Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: An examination of middle school students' solution processes and their interpretation of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 117-135.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*, 5-25.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*, 49-70.

Sowder, J., Armstrong, B.E., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L. y Tompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*, 127–155.

Sowder, J.T., Philipp, R.A., Armstrong, B.E. y Schappelle, B.P. (1998). *Middle-grade teachers' mathematical Knowledge and its relationship to instruction: A research monograph*. Albany, N.Y.: State University of New York Press.

Star, J. R. y Strickland, S. K. (2008). Learning to observe: Using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. *Journal of mathematics teacher education*, *11*(2), 107-125.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 237-295.

Steinberg, R. M., Empson, S. B. y Carpenter, T. P. (2004). Inquiry into children's mathematical thinking as a means to teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*(3), 237-267.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: An overview. En N.K. Denzin y Y. Lincoln (Eds). *Handbook of Qualitative Research* (pp. 273-285). Thousand Oaks: Sage.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of división of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

Tirosh, D. y Graeber, A.O. (1990). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers' thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21(2)*, 98–108.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education 25*, 166-175.

Turnuklu, E. B., y Yesildere, S. (2007). The Pedagogical Content Knowledge in Mathematics: Pre-Service primary mathematics teachers' perspectives in Turkey. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 1*. 1-13.

Tzur, R. y Timmerman, M. (1997). Why do we invert and multiply? Elementary teachers' struggle to conceptualize division of fractions. En J. A. Dossey, J. O. Swafford, M. Parmantie y A. E. Dossey (eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 553-559). Bloomington-Normal, IL: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs y R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp.134-151). New York: Routledge.

van Es, E. A. y Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571-595.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Adquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel, y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of the mathematics* (pp. 41-59). Nueva York: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1997). *El niño, la matemática y la realidad*. México: Trillas.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Borghart, E. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 339-359.

Weiland, I. S., Hudson, R. A. y Amador, J. M. (2014). Preservice formative assessment interviews: the development of competent questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(2), 329-352.

ÍNDICE ANEXO

CUESTIONARIO 1

CUESTIONARIO I

Nombre: ____

Fecha: _____________ Edad: ________

Acceso a la Universidad (marca la opción correspondiente)

☐ Mayores de 25

☐ Ciclos formativos FP

Indicar cuál: ……………………………………………………………………

Indica si hiciste alguna asignatura de matemáticas en el Ciclo Formativo: …………………………………………………………………………………....

☐ Selectividad

Otros: ……………………………………………

Bachillerato:
☐ Ciencias de la Naturaleza y de la Salud
☐ Humanidades y Ciencias Sociales
☐ Ciencias y Tecnología
☐ Artes
☐ BUP Ciencias
☐ BUP Letras
☐ COU

Indica si hiciste alguna asignatura de matemáticas en Bachillerato y en qué curso: ……………………………………………………………………………………….

Instrucciones
I Parte

- El cuestionario consta de cuatro problemas y cada problema está en una hoja diferente.
- Lee detenidamente el enunciado y contesta lo que se te pregunta aunque no estés seguro/a de que esté bien.
- No borres nada, simplemente tacha con una línea
- Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido
- Tienes una hora para resolver los cuatro problemas
- No hables ni copies del compañero/a
- Puedes usar la calculadora
- Si tienes alguna duda, levanta la mano y el profesor/a te ayudará

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintaron de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

CUESTIONARIO 2

CUESTIONARIO II

Nombre: ____

Fecha: ____________

II Parte

Este cuestionario contiene los 4 problemas que resolviste hace unos días.

Te presentamos cuatro soluciones diferentes de cada problema dadas por alumnos de 6º de Primaria.

Califica cada una de estas soluciones con **1 punto**, **0.5 puntos** ó **0 puntos** y escribe la puntuación en el recuadro de la derecha de cada solución:

- Cuando creas que una solución es **totalmente correcta**, califícala con **un punto** (1 punto).
- Si piensas que la solución es **totalmente incorrecta**, califícala con **cero puntos** (0 puntos).
- Califica con **medio punto** (0.5 puntos.) la solución que consideres **parcialmente correcta**.

Una misma puntuación la puedes utilizar cuantas veces creas necesario, en cualquier problema.

MUY IMPORTANTE

- En el recuadro "Justificación" debes escribir la explicación o comentario de tu calificación.
- Si no calificas alguna solución de algún problema indica la razón.
- Si no entiendes alguna solución, indícalo.

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintaron de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A

Puntos A

1	2	3 Rojo
4	5	6 Verde
7	8	9 Azul
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
21	22	23
24	25	26
27	28	29
30	31	32
33	34	35

Necesitó 12 colores

Justificación A

B

Puntos B

35 |3
05 11
2

Se necesitan 11 colores

Justificación B

C

Puntos C

35 |3
05 11
2

Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color.
Solución: Necesita 12 colores

Justificación C

D

Puntos D

3 farolas 1 color
15 farolas 5 colores
30 farolas 10 colores
33 farolas 11 colores
36 farolas 12 colores

Son 12 colores

Justificación D

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

A

Puntos A

103 | 20
0 0   5

5x 15 km = 75

Ocupan 5 mesas

Justificación A

B

Puntos B

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\ 20 \\ \hline 40 \\ +\ 20 \\ \hline 60 \\ +\ 20 \\ \hline 80 \\ +\ 20 \\ \hline 100 \\ +\ 3 \\ \hline 103 \end{array}$$

Ocupan 6 mesas

Justificación B

C

Puntos C

$$\begin{array}{r} 103 \\ -\ 20 \\ \hline 083 \\ -\ 20 \\ \hline 63 \\ -\ 20 \\ \hline 43 \\ -\ 20 \\ \hline 03 \end{array}$$

→ *"Estudiantes"*

Necesitan 5 mesas

Justificación C

D

Puntos D

103 | 20
03   5

5 + 1 = 6

Son 6 mesas

Justificación D

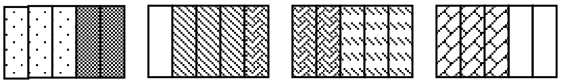
Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A

Puntos A



Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos

Justificación A

B

Puntos B

$$4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$$

Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Justificación B

C

Puntos C

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

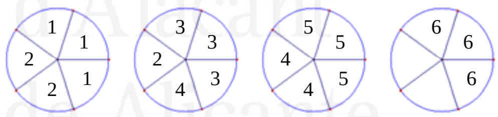
$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$$

Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ **de pastel**

Justificación C

D

Puntos D



Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ **de pastel**

Justificación D

VARIABLES PARA EL CLÚSTER

DATOS DE LAS VARIABLES

Los datos del cuestionario 2 fueron codificados en variables meidante letras y números. La variable "estudiante" se identificó con la letra "E" y se le asignó un número del 1 al 84, por ejemplo, "E1" indica que es el estudiante 1. La variable problema se le asignó la inicial del nombre del problema, por ejemplo, la letra "F" problema *Farolas.* A cada letra de los problemas se le asignaron 12 variables. Cada una de estas 12 variables está formada por la inicial de cada problema, la letra de una de las opciones de las respuestas, A, B, C y C y, por último, de uno de los números 1, 2 0 3, dependiendo de las puntuaciones asignadas por los estudiantes para maestro. Si valoraba la respuesta con 1 punto, se le asignaba el número 1; si valoraba la respuesta con 0'5 puntos, se le asignaba el número 2 y por último, si el estudiante valoraba con 0 puntos la respuesta se le asignaba el número 3 a la variable. Por ejemplo, "FA1", indica que la opción A del problema *Farolas* ha sido puntuada por el estudiante maestro con un 1. A cada estudiante le corresponde una n-tupla compuesta por 36 componentes de ceros y unos.

	FA1	FA2	FA3	FB1	FB2	FB3	FC1	FC2	FC3	FD1	FD2	FD3	AA1	AA2	AA3	AB1	AB2	AB3	AC1	AC2	AC3	AD1	AD2	AD3	PA1	PA2	PA3	PB1	PB2	PB3	PC1	PC2	PC3	PD1	PD2	PD3
E1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
E2	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E3	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E4	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E5	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E6	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E7	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E8	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E9	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0
E10	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E11	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E12	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E13	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
E14	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
E15	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E16	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E17	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E18	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E19	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E20	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E21	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
E22	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E23	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
E24	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E25	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E26	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E27	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E28	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E29	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E30	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E31	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E32	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E33	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E34	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E35	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E36	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E37	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E38	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E39	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E40	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E41	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
E42	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E43	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E44	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E45	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E46	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
E47	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
E48	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E49	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E50	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
E51	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E52	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
E53	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0

	FA1	FA2	FA3	FB1	FB2	FB3	FC1	FC2	FC3	FD1	FD2	FD3	AA1	AA2	AA3	AB1	AB2	AB3	AC1	AC2	AC3	AD1	AD2	AD3	PA1	PA2	PA3	PB1	PB2	PB3	PC1	PC2	PC3	PD1	PD2	PD3
E54	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
E55	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E56	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
E57	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
E58	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E59	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E60	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E61	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E62	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E63	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E64	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E65	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
E66	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E67	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E68	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E69	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E70	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
E71	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
E72	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E73	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
E74	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
E75	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E76	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
E77	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
E78	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E79	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E80	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
E81	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
E82	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E83	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
E84	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
Sum	29	45	10	2	39	43	76	7	1	37	36	11	0	6	78	44	36	4	5	42	37	69	14	1	3	57	23	15	56	12	57	15	11	75	8	0

ESTUDIO DE CASOS

ESTUDIO DE CASOS: PERFIL 1

45

Nombre: MARTA BERJA SAMPEDRO

Fecha: 17-11-09 Edad: 18 años

Acceso a la Universidad (marca la opción correspondiente)

☐ Mayores de 25 ☐ Ciclos formativos FP ☒ Selectividad

Otros: ....

Bachillerato: ☐ Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

☒ Humanidades y Ciencias Sociales (Matemáticas Sí) 1º y 2º

☐ Ciencias y Tecnología

☐ Artes

Instrucciones
I Parte

- El cuestionario consta de cuatro problemas y cada problema está en una hoja diferente.
- Lee detenidamente el enunciado y contesta lo que se te pregunta aunque no estés seguro/a de que esté bien.
- No borres nada, simplemente tacha con una línea
- Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido
- Tienes una hora para resolver los cuatro problemas
- No hables ni copies del compañero/a
- Puedes usar la calculadora
- Si tienes alguna duda, levanta la mano y el profesor/a te ayudará

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

III III III III III III III III III III III II

RRR VVV AAA

(a)

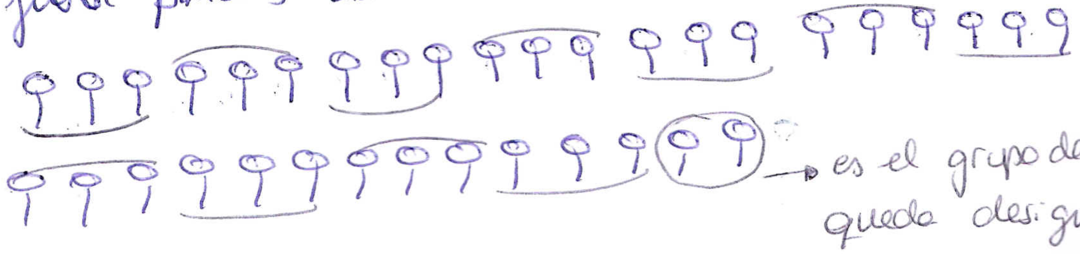
- Como podemos comprobar con el dibujo anterior, es que utilizaríamos 12 colores distintos, pero pintando dos farolas de un color.

Ya que como podemos observar con ayuda del gráfico, es que, por ejemplo:

(3 rojo, 3 verde, 3 azul, 3 amarillo, 3 lila, 3 marrón, 3 blanco, 3 negro, 3 granate, 3 fucsia, 3 dorado, 3 plata, y 2 con el color rosa.)

- Por medio de la sucesión podemos comprobar que no se podrían utilizar los colores equitativamente en todas las farolas, ya que al realizar la operación de 35 : 3, para averiguar si utilizaríamos colores de manera equitativa en todas las farolas.

Por tanto podemos concluir diciendo que se necesitaron 12 colores, aunque dos de las treinta y cinco farolas, fueran pintadas de un color.



→ es el grupo de farolas que queda desigual

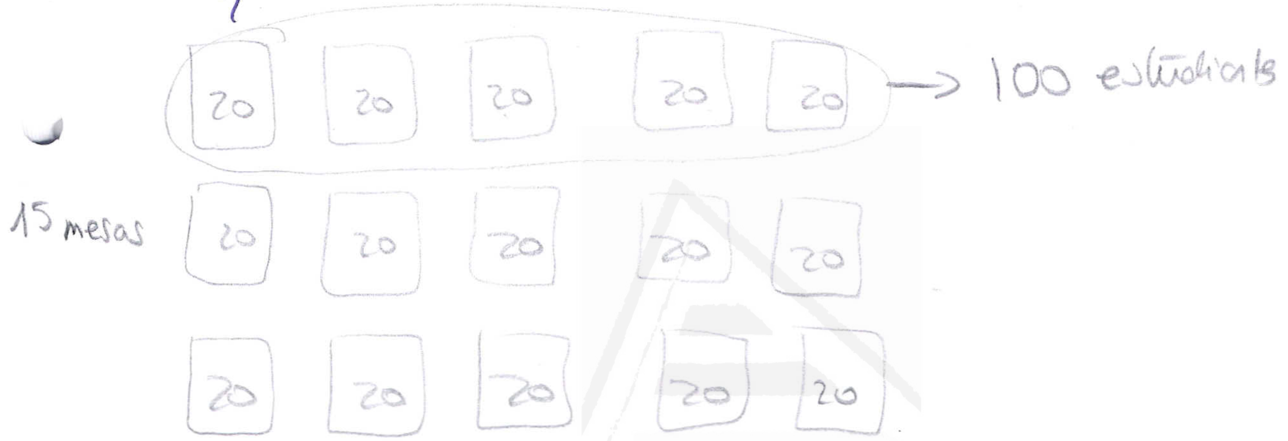
Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

20 asientos 15 mesas

- 103 estudiantes.

* En primer lugar yo cojo y dibujo las mesas que hay en el comedor. (15 mesas)



* Como debemos averiguar que hacemos para completar las mesas sin dejar asientos libres, procedemos a realizar la operación.

$$103 \div 20 = 5 \text{ (resto } 3)$$

103 | 15

$20 \times 15 = 300$ asientos

2300 | 103
206 2
094

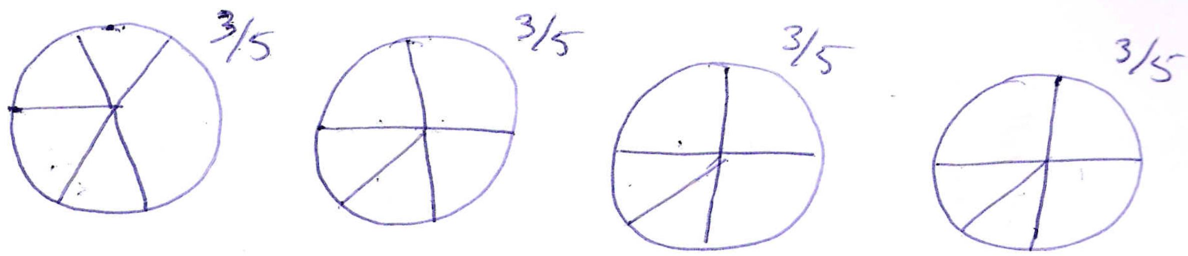
$20 \times 5 = 100$ asientos

- Ocupan 5 mesas, y como sobrarían 3 estudiantes no podrían ocupar otra mesa, por lo tanto, solo ocuparán 5 mesas y tendrán que ocupar otra mesa dejando asientos libres.

Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?



- El gráfico ayuda a la resolución del problema.

~~Puedo darle a 4 niños, sobrándome 8/5 es decir 1 pastel y 3/5 de otro.~~

- Ahora analizamos la gráfica.

Le doy a 6 niños

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\boxed{\frac{18}{5}}$$

y me sobran $\frac{2}{5}$

$$\frac{20}{5}-\frac{18}{5}=\boxed{\frac{2}{5}}$$

- Para llegar a esta afirmación, hemos podido observar que si doy a cada niño $\frac{3}{5}$ de pastel y hacemos la operación de fracciones, nos sobran $\frac{2}{5}$, es decir, la "cuarta parte" de un pastel..

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A

Puntos A: 1

1	2	3	Rojo
4	5	6	Verde
7	8	9	Azul
10	11	12	
13	14	15	
16	17	18	
19	20	21	
21	22	23	
24	25	26	
27	28	29	
30	31	32	
33	34	35	

Necesitó 12 colores

B

Puntos B: 0

$$\begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ 2 & \end{array}$$

Se necesitan 11 colores

Justificación A

- Mediante este proceso de resolución, el niño se ha guiado de una secuencia numérica fácil. Por lo que creo que es una forma útil de resolución.

Justificación B

- En este caso el niño, guiado por la división, ha querido igualar las farolas a los colores. Pero no se ha dado cuenta que si le sobran 2 farolas, se le debe añadir un color.

C

Puntos C: 0'5

$$\begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ 2 & \end{array}$$

Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color.

Solución: Necesita 12 colores

D

Puntos D: 0'5

3 farolas 1 color
15 farolas 5 colores
30 farolas 10 colores
33 farolas 11 colores
36 farolas 12 colores

Son 12 colores

Justificación C

- En este caso vemos que el niño entiende el algoritmo de la división con todas sus componentes, solo que la justificación me parece breve. Se le debería enseñar a argumentar más su respuesta.

Justificación D

- Para conseguir llegar a esta solución, vemos que el niño se ha guiado por el suceso de series numéricas. Ya que podemos comprobar que se ha fijado en múltiplos de 3, y ha comprobado que son 12 colores.

45

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

A

Puntos A: 0

103 | 20
0 0 5

5x 15 km = 75

Ocupan 5 mesas

B

Puntos B: 1

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\ 20 \\ \hline 40 \\ +\ 20 \\ \hline 60 \\ +\ 20 \\ \hline 80 \\ +\ 20 \\ \hline 100 \\ +\ 3 \\ \hline 103 \end{array}$$

Ocupan 6 mesas.

Justificación A

- Cuando el niño realiza la división podemos comprobar que no sería 5 mesas, ya que 3 de los estudiantes, quedarían sin asiento. El dato de las mesas es un dato para liar, por lo que ha hecho que el niño se confunda, y haga esa multiplicación sin sentido.

Justificación B

- Vemos que en este caso, al hacer las adiciones, el niño se da cuenta de que si completan 5 mesas, 3 de los 103 estudiantes quedan fuera. Por lo tanto, decide añadir otra mesa.

C

Puntos C: 0'5

$$\begin{array}{r} 103 \\ -\ 20 \\ \hline 083 \\ -\ 20 \\ \hline 63 \\ -\ 20 \\ \hline 43 \\ -\ 20 \\ \hline 03 \end{array}$$

103 → *"Estudiantes"*

Necesitan 5 mesas

D

Puntos D: 1

103 | 20
03 5

5 + 1 = 6

Son 6 mesas

Justificación C

-Veo que aquí el niño no ha entendido muy bien el proceso de deber completar todas las mesas, es decir todos los asientos.

Justificación D

- Una manera rápida y cómoda de resolver el problema, ya que se da cuenta de la necesidad de añadir una mesa para que todos los estudiantes se sitúen en los asientos.

45

Pasteles

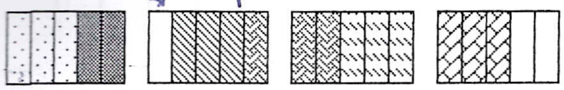
Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuantos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A

Puntos A: 0'5

Creería que debe estar pintado.



Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos

Justificación A

- Las gráficas que se han hecho son parcialmente correctas ya que si en el segundo pastel el trozo blanco es uno sobre, no sería el resultado correcto. Y por lo tanto, serían a 6 niños, pero sobrarían 2 trozos.

B

Puntos B: 1

$$4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Justificación B

- Con el proceso de la división, las reparticiones salen bien equitativas, y el resultado se consigue gracias al proceso de la división.

C

Puntos C: 1

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

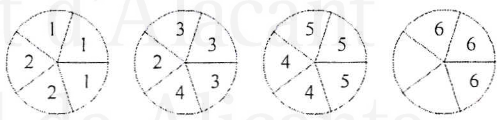
Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación C

- El proceso es el mismo, o muy parecido al anterior. Así que en mi opinión, está bien elaborado y el resultado es correcto.

D

Puntos D: 1



Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación D

- Con ayuda de los gráficos, el problema se ha resuelto de manera cómoda. El dibujo ha hecho que el niño logre llegar al resultado final con ayuda de los gráficos.

ESTUDIO DE CASOS: PERFIL 2

48

Nombre: Mª Salud Navarro Verdú

Fecha: 17/11/09 Edad: 19

Acceso a la Universidad (marca la opción correspondiente)

☐ Mayores de 25 ☐ Ciclos formativos FP ☒ Selectividad

Otros: ....

Bachillerato:

☐ Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

☒ Humanidades y Ciencias Sociales matemáticas

☐ Ciencias y Tecnología

☐ Artes

Instrucciones
I Parte

- El cuestionario consta de cuatro problemas y cada problema está en una hoja diferente.
- Lee detenidamente el enunciado y contesta lo que se te pregunta aunque no estés seguro/a de que esté bien.
- No borres nada, simplemente tacha con una línea
- Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido
- Tienes una hora para resolver los cuatro problemas
- No hables ni copies del compañero/a
- Puedes usar la calculadora
- Si tienes alguna duda, levanta la mano y el profesor/a te ayudará

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

DATOS

35 farolas

Las 3 primeras pintadas de rojo

" " siguientes " de verde

" " siguientes " de azul

y así sucesivamente

¿cuántos colores diferentes necesitó?

RESOLUCIÓN

~~estrategia: observar patrones o regularidades.~~

$$\begin{array}{l|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ 2 & \end{array}$$

Solución: Necesito 12 colores diferentes porque si solo hubiera hecho uso de 11 colores le hubieran quedado 2 farolas sin pintar.

48

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A

Puntos A: 0,5

1	2	3 Rojo
4	5	6 Verde
7	8	9 Azul
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
21	22	23
24	25	26
27	28	29
30	31	32
33	34	35

Necesitó 12 colores

B

Puntos B: 0

35 | 3
05 11
2

Se necesitan 11 colores

Justificación A

La solución es correcta, sin embargo, pienso que el planteamiento no es muy correcto ya que si se tratara de un número mayor este proceso no valdría.

Justificación B

Al no ser correcta la solución a pesar que iba bien en el planteamiento la puntuación es de 0.

C

Puntos C: 1

35 | 3
05 11
2

Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color.

Solución: Necesita 12 colores

D

Puntos D: 0,5

3 farolas 1 color
15 farolas 5 colores
30 farolas 10 colores
33 farolas 11 colores
36 farolas 12 colores

Son 12 colores

Justificación C

Solución correcta y planteamiento también.

Justificación D

La solución es correcta pero no me parece un buen proceso para llegar a dicha solución.

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

DATOS

103 estudiantes

15 mesas → cada mesa tiene 20 asientos

¿cuántas mesas ocuparán los 103 estudiantes?

RESOLUCIÓN:

15 mesas × 20 asientos = 300 asientos

300 asientos − 103 estudiantes = 197 asientos ocupados. por estudiantes.

197 | 15
047   13
02

SOLUCIÓN: Los estudiantes ocuparán 13 mesas ~~mesas~~ menos 2 asientos que sobrarán.

48

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

A

Puntos A: 0

```
103 | 20
00    5
```

5x 15 km = 75

Ocupan 5 mesas

B

Puntos B: 0,5

```
   20
 + 20
 ----
   40
 + 20
 ----
   60
 + 20
 ----
   80
 + 20
 ----
  100
 +  3
 ----
  103
```

Ocupan 6 mesas

Justificación A

La solución es incorrecta

Justificación B

La respuesta está bien sin embargo, el planteamiento no es correcto porque si se tratara de números más grandes no se podría hacer de esa forma

C

Puntos C: 0

```
  103   → "Estudiantes"
-  20
 ----
  083
-  20
 ----
   63
-  20
 ----
   43
-  20
 ----
   03
```

Necesitan 5 mesas

D

Puntos D: 1

```
103 | 20
03    5
```

5 + 1 = 6

Son 6 mesas

Justificación C

Respuesta incorrecta

Justificación D

Además de ser la solución correcta, también lo es el planteamiento, ya que a 5 se a sumado 1 por haber resto 3.

Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

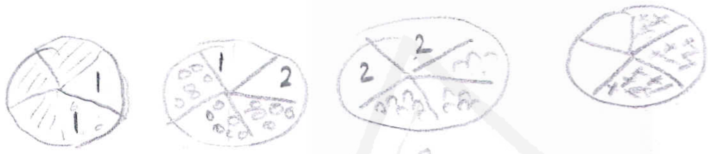
DATOS

4 pasteles

$\frac{3}{5}$ dar a cada niño.

¿A cuántos niños puedo dar?

¿Qué sobra?



Solución: Puedo dar pastel a 6 niños y me sobra $\frac{2}{5}$

48

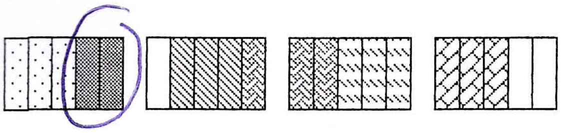
Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuantos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A

Puntos A: 0



Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos

B

Puntos B: 0,5

$$4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Justificación A

Solución incorrecta ya que sobran $\frac{2}{5}$ trozos

Justificación B

A pesar que el planteamiento es bueno, la solución es incorrecta

C

Puntos C: 1

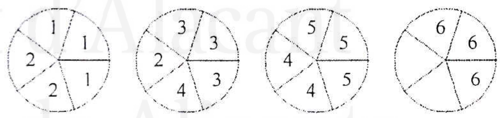
$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ **de pastel**

D

Puntos D: 1



Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ **de pastel**

Justificación C

Esta opción es la más correcta ya que la solución está bien y el planteamiento también serviría para otros números mayores.

Justificación D

Solución correcta. Observo el inconveniente de que si fuesen más pasteles, este proceso no valdría, ya que sería muy pesado estar dibujando muchos pasteles

(77)

Nombre: María de Nazaret Henarejos Quesada

Fecha: 17-11-09 Edad: 18

Acceso a la Universidad (marca la opción correspondiente)

☐ Mayores de 25 ☐ Ciclos formativos FP ☒ Selectividad

Otros: ....

Bachillerato: ☒ Ciencias de la Naturaleza y de la Salud → Matemáticas sólo en 1º

☐ Humanidades y Ciencias Sociales

☐ Ciencias y Tecnología

☐ Artes

Instrucciones
I Parte

- El cuestionario consta de cuatro problemas y cada problema está en una hoja diferente.
- Lee detenidamente el enunciado y contesta lo que se te pregunta aunque no estés seguro/a de que esté bien.
- No borres nada, simplemente tacha con una línea
- Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido
- Tienes una hora para resolver los cuatro problemas
- No hables ni copies del compañero/a
- Puedes usar la calculadora
- Si tienes alguna duda, levanta la mano y el profesor/a te ayudará

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

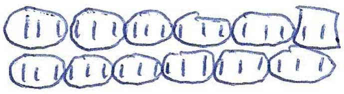
Para resolver este problema es necesario saber cuántos grupos de 3 podemos hacer con 35 farolas. Para ello realizamos la siguiente operación

$$\begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \cline{2-2} 05 & 11 \\ 2 & \end{array}$$

Por lo tanto, podemos decir que se utilizaron 12 colores distintos. Decimos que son 12 colores porque hemos formado 11 grupos de 3 farolas cada uno (cada grupo de 3 farolas se pintará de un color distinto) y las 2 farolas que quedan se pintarán también de otro color distinto para no repetir el color anterior.

Por lo tanto el resultado es 12 colores

Este problema también se podría haber resuelto sin necesidad de hacer ninguna operación, simplemente ~~agrupando farolas:~~ haciendo grupos de 3.



11 grupos de 3 farolas y sobran 2.

Por lo tanto al igual que en el caso anterior el resultado es 12

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

Hay 3 formas:

1: Primero vamos a calcular cuántas asientos hay en total:

15 x 20 = 300 asientos
mesas asientos

Ahora vamos a calcular cuántos asientos quedan libres.

  300 asientos
− 103 estudiantes
  197 asientos libres

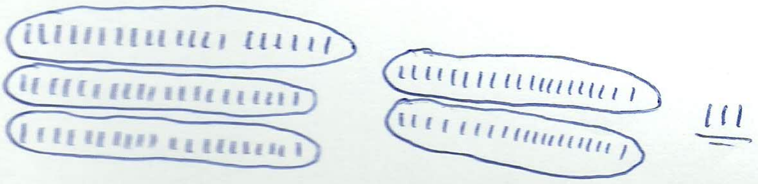
Como quedan libres 197 asientos, vamos a calcular cuantas mesas ~~hay~~ pueden haber en 197 asientos.

197 |20
17   9 mesas

Quedan libres 9 mesas y 17 asientos
Por tanto han ocupado 6 mesas
ya que había 15 mesas y 5 de esas 15 se llenan y en la número 6 se ocupan 3 asientos.

2: 103 |20
3   5 mesas

Los 103 estudiantes ocupan 5 mesas completas y ocupan 3 asientos de la mesa número 6.

3: 

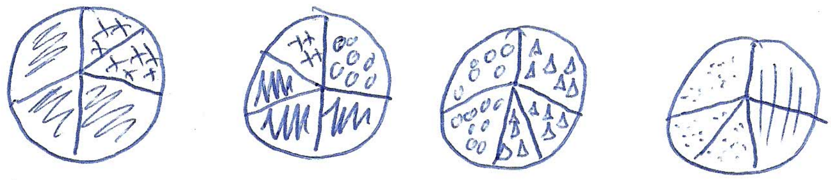
Se ocupan 5 mesas y 3 asientos de la mesa 6, es decir 6 mesas.

Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

Se puede hacer con dibujos:



- Le puedo dar $\frac{3}{5}$ a 6 niños
- Me sobran $\frac{2}{5}$

O con operaciones

- Divimos cada tarta en 5 trozos, $5 \cdot 4 = 20$ y en total tenemos 20 trozos.

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

→ podemos repartir 3 trozos $\left(\frac{3}{5}\right)$ a ~~cada~~ 6 niños y nos sobran 2 trozos $\left(\frac{2}{5}\right)$

77

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A

Puntos A: 0'5

1	2	3 Rojo
4	5	6 Verde
7	8	9 Azul
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
21	22	23
24	25	26
27	28	29
30	31	32
33	34	35

Necesitó 12 colores

Justificación A

La solución que ha dado es correcta, pero en la resolución se ha equivocado y ha repetido el número 21 dos veces lo que hace que le de un resultado erróneo pues el número 35 tendría que estar en la 2ª columna y no en la 3ª. Pero como el resultado está bien le puntúo con un 0,5

B

Puntos B: 0

$$\begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ 2 & \end{array}$$

Se necesitan 11 colores

Justificación B

Creo que la solución es incorrecta porque el niño no ha tenido en cuenta las 2 farolas que le quedan. Estas 2 farolas hay que pintarlas de otro color para no repetir el color anterior y por tanto serían 12 colores. Como él dice que son 11, está mal resuelto.

C

Puntos C: 1

$$\begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ 2 & \end{array}$$

Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color.

Solución: Necesita 12 colores

Justificación C

Esta solución me parece la más correcta pues ha razonado bien y ha encontrado la solución correcta

D

Puntos D: 0,5

3 farolas 1 color
15 farolas 5 colores
30 farolas 10 colores
33 farolas 11 colores
36 farolas 12 colores

Son 12 colores

Justificación D

No ha razonado de dónde salen las 36 farolas y el problema dice que hay 35. Aunque el resultado está bien, le falta explicar cómo ha llegado a esa conclusión.

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

A

Puntos A: 0

$$\begin{array}{r|l} 103 & 20 \\ \hline 00 & 5 \end{array}$$

5x 15 km = 75

Ocupan 5 mesas

Justificación A

En primer lugar ha resuelto mal la división y en segundo lugar ha dado mal el resultado porque no son 5 sino 6 las mesas que ocupan. Además se ha inventado la operación 5 x 15 Km = 75. No ha leído bien el problema y no lo ha resuelto bien por ello le puntúo con un 0

B

Puntos B: 1

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\ 20 \\ \hline 40 \\ +\ 20 \\ \hline 60 \\ +\ 20 \\ \hline 80 \\ +\ 20 \\ \hline 100 \\ +\ 3 \\ \hline 103 \end{array}$$

Ocupan 6 mesas.

Justificación B

El problema resuelto de esta forma es un poco largo y pesado, pero como lo ha resuelto bien y ~~la~~ la solución es correcta le puntúo con un 1.

C

Puntos C: 0

$$\begin{array}{r} 103 \\ -\ 20 \\ \hline 083 \\ -\ 20 \\ \hline 63 \\ -\ 20 \\ \hline 43 \\ -\ 20 \\ \hline 03 \end{array}$$

103 → *"Estudiantes"*

Necesitan 5 mesas

Justificación C

No ha tenido en cuenta los 3 estudiantes que le quedan sin mesa, y además ha hecho la resta mal pues 43-20 = 23 y no 3. Por ello le puntúo con un 0. Además la solución también está mal

D

Puntos D: 0,5

$$\begin{array}{r|l} 103 & 20 \\ \hline 03 & 5 \end{array}$$

5 + 1 = 6

Son 6 mesas

Justificación D

Aunque el resultado está bien, no ha explicado porqué le suma un 1 al resultado que le ha dado la división. Para conseguir el punto entero, ~~tiene~~ tiene que explicarlo

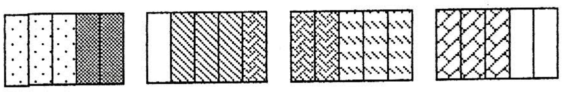
Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuantos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A

Puntos A: 0'5



Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos

Justificación A

El resultado está medio bien ya que sí le puede dar $\frac{3}{5}$ a 6 niños pero no le sobran 3 trozos sino 2. Ha debido contar mal los trozos porque el dibujo está bien hecho aunque un poco lioso.

B

Puntos B: 0

$$4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Justificación B

Me parece una forma incorrecta de representar el problema, y además se ha equivocado de números. Aunque el resultado está en parte bien, la forma de hacerlo es incorrecta, y no le sobran $\frac{2}{3}$ sino $\frac{2}{5}$

C

Puntos C: 0,5

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

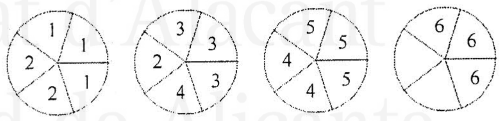
Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación C

El resultado es correcto pero en la operación se ha equivocado. La fracción que debe darle como resultado es $\frac{3}{20}$ y no $\frac{20}{3}$.

D

Puntos D: 1



Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación D

Esta es la forma más correcta de resolverlo. El resultado es el correcto

58

Nombre: RAQUEL

Fecha: 17-NOV-09 Edad: 31

Acceso a la Universidad (marca la opción correspondiente)

☐ Mayores de 25 ☒ Ciclos formativos FP ☐ Selectividad

Otros: ....E. Infantil

Bachillerato:

☐ Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

☐ Humanidades y Ciencias Sociales

☐ Ciencias y Tecnología

☐ Artes

BUP y COU
Ciencias puras
Mat. 1° a 3° y COU

Instrucciones
I Parte

- El cuestionario consta de cuatro problemas y cada problema está en una hoja diferente.
- Lee detenidamente el enunciado y contesta lo que se te pregunta aunque no estés seguro/a de que esté bien.
- No borres nada, simplemente tacha con una línea
- Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido
- Tienes una hora para resolver los cuatro problemas
- No hables ni copies del compañero/a
- Puedes usar la calculadora
- Si tienes alguna duda, levanta la mano y el profesor/a te ayudará

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

35 |3
05 11
 2

Necesito 12 colores diferentes:
Con 11 colores pintó 11 grupos de 3.
y con 1 color pintó las 2 que le quedaban hasta llegar a las 35.

* He agrupado el nº 35 en grupos de 3, con lo que me han salido 11 grupos y me sobran 2

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres´siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A

Puntos A: 1

1	2	3	Rojo
4	5	6	Verde
7	8	9	Azul
10	11	12	
13	14	15	
16	17	18	
19	20	21	
21	22	23	
24	25	26	
27	28	29	
30	31	32	
33	34	35	

Necesitó 12 colores

Justificación A

Porque ha dado la respuesta correcta, haciendo agrupaciones de 3 en 3

B

Puntos B: 0'5

$$\begin{array}{l|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ \ \ 2 & \end{array}$$

Se necesitan 11 colores

Justificación B

Porque no tiene en cuenta las 2 farolas que le quedan por pintar, y aunque no completen un grupo de 3 también debe utilizarse otro color.

C

Puntos C: 1

$$\begin{array}{l|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ \ \ 2 & \end{array}$$

Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color.

Solución: Necesita 12 colores

Justificación C

Porque lo explica todo

D

Puntos D: 0'5

3 farolas 1 color
15 farolas 5 colores
30 farolas 10 colores
33 farolas 11 colores
36 farolas 12 colores

Son 12 colores

Justificación D

Por dar la respuesta correcta, aunque se deduce lo que se ha hecho (al final ir añadiendo grupos de 3).

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

Puesto que cada mesa tiene 20 asientos y tenemos la condición de no dejar ningún asiento de una mesa ~~las~~ sin completar, agruparemos a los estudiantes en grupos de 20, con lo q tendremos las mesas que ocuparán.

$$\begin{array}{r|l} 103 & 20 \\ \hline 03 & 5 \end{array}$$

Los estudiantes ocuparán 5 mesas completas y otra mesa con sólo 3 asientos.

Por tanto ocuparán 6 mesas.

Albergue

58

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

A

Puntos A: 0

$$\begin{array}{r|l} 103 & 20 \\ \hline 00 & 5 \end{array}$$

5x 15 km = 75

Ocupan 5 mesas

Justificación A

Parece no haber entendido el problema.

B

Puntos B: 1

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\ 20 \\ \hline 40 \\ +\ 20 \\ \hline 60 \\ +\ 20 \\ \hline 80 \\ +\ 20 \\ \hline 100 \\ +\ 3 \\ \hline 103 \end{array}$$

Ocupan 6 mesas.

Justificación B

Llega a la solución. Tiene en cuenta a todos los alumnos aunque éstos 3 restantes no ocupen una mesa entera

C

Puntos C: 0'5

$$\begin{array}{r} 103 \\ -\ 20 \\ \hline 083 \\ -\ 20 \\ \hline 63 \\ -\ 20 \\ \hline 43 \\ -\ 20 \\ \hline 03 \end{array}$$

103 → *"Estudiantes"*

Necesitan 5 mesas

Justificación C

No tiene en cuenta los 3 alumnos que no ocuparán una mesa entera, pero que se tienen que sentar

D

Puntos D: 1.

$$\begin{array}{r|l} 103 & 20 \\ \hline 03 & 5 \end{array}$$

5 + 1 = 6

Son 6 mesas

Justificación D

Respuesta correcta, aunque un poco abstracto

58

Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

4 pasteles.

Tengo que hacerlos en porciones más pequeñas (en quintos) y ~~a~~ averiguar la cantidad de "pedacitos" (quintos) que tengo.

~~4 · 5 = 20 →~~

$4 \text{ pasteles} \cdot 5 \text{ porciones}/\text{pastel} = 20 \text{ porciones}$

Puesto que tengo que repartir las 20 porciones entre niños repartiendo 3 porciones a cada uno, tendremos:

$\frac{20 \text{ porc}}{3 \text{ porc}/\text{niño}} = 6'66$ niños → puedo dar a 6 niños

y me sobrarán 2 porciones.

$20 \mid 3$
$2 \quad 6$

porque $6 \cdot 3 = 18$, hasta 20, faltan 2.

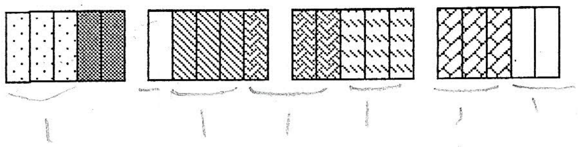
Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuantos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A

Puntos A: 1



Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos

Justificación A

Aunque no de la respuesta totalmente correcta (sobran 3 trozos) se daría por bueno porque ha hecho el esquema y tal vez se haya equivocado al contar

B

Puntos B: 0'5

$$4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Justificación B

La 2ª parte no la sabido interpretarla.

C

Puntos C: 1

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

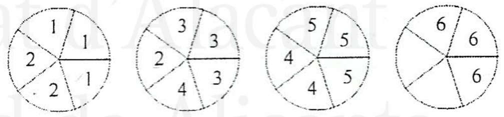
Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ **de pastel**

Justificación C

Todo correcto.

D

Puntos D: 1



Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ **de pastel**

Justificación D

Todo correcto.

ESTUDIO DE CASOS: PERFIL 3

(67)

Nombre: Susana Galiana Noudedou

Fecha: 17-11-09 Edad: 18

Acceso a la Universidad (marca la opción correspondiente)

☐ Mayores de 25 ☐ Ciclos formativos FP ☒ Selectividad

Otros: ....

Bachillerato:
- ☐ Ciencias de la Naturaleza y de la Salud
- ☒ Humanidades y Ciencias Sociales matemáticas SÍ
- ☐ Ciencias y Tecnología
- ☐ Artes

Instrucciones
I Parte

- El cuestionario consta de cuatro problemas y cada problema está en una hoja diferente.
- Lee detenidamente el enunciado y contesta lo que se te pregunta aunque no estés seguro/a de que esté bien.
- No borres nada, simplemente tacha con una línea
- Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido
- Tienes una hora para resolver los cuatro problemas
- No hables ni copies del compañero/a
- Puedes usar la calculadora
- Si tienes alguna duda, levanta la mano y el profesor/a te ayudará

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

Nº farolas pintadas: 35.

~~El alcalde del pueblo necesito tres colores distintos: rojo, azul y verde.~~

En el problema observamos que la información que facilita del número de farolas (35 farolas) y el número de farolas que pinta es importante, puesto que para solucionar el problema debemos dividir el número de farolas entre 3, puesto que pinta 3 del mismo color. Es importante la información complementaria "sin repetir colores"

$$\begin{array}{l|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ \ \ 2 & \end{array}$$

11 colores
2 → 1 color más

Solución: el alcalde del pueblo necesitó 12 colores distintos.

Farolas Entrevista

67

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A

Puntos A: 0'5

1	2	3	Rojo
4	5	6	Verde
7	8	9	Azul
10	11	12	
13	14	15	
16	17	18	
19	20	21	
21	22	23	
24	25	26	
27	28	29	
30	31	32	
33	34	35	

Necesitó 12 colores

Justificación A

La solución es correcta aunque el procedimiento no se entiende muy bien.

B

Puntos B: 0'5

$$\begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ 2 & \end{array}$$

Se necesitan 11 colores

Justificación B

El niño ha sabido elegir el algoritmo correcto pero no se ha dado cuenta de que el resto es 2..

C

Puntos C: 1

$$\begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ 2 & \end{array}$$

Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color.

Solución: Necesita 12 colores

Justificación C

El problema está muy bien planteado, se nota que el niño lo ha entendido correctamente.

D

Puntos D: 1

3 farolas 1 color
15 farolas 5 colores
30 farolas 10 colores
33 farolas 11 colores
36 farolas 12 colores

Son 12 colores

Justificación D

El problema es correcto. Aunque podría haber ampliado la respuesta.

Albergue
103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

15 mesas

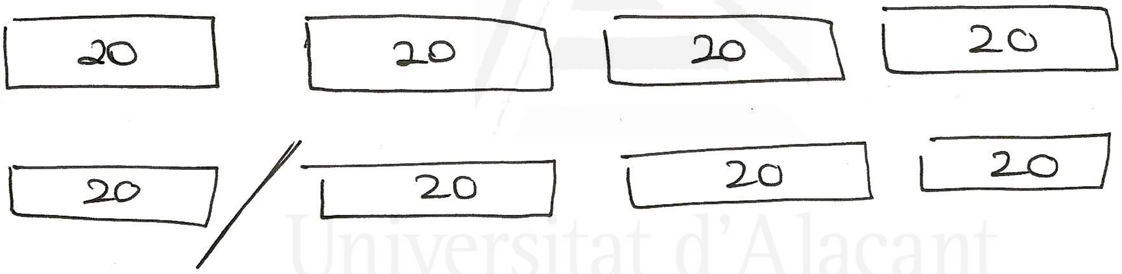
20 asientos

103 estudiantes

$$\begin{array}{r} 300 \\ -\ 103 \\ \hline 197 \end{array}$$ asientos ~~ocupa~~ sin ocupar

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 20 \\ \hline 00 \\ 30 \\ \hline 300 \end{array}$$ asientos

~~103 | 20~~ ~~103~~



20 + 20 + 20 + 20 + 20 = 100 → 5 mesas.

Solución: los alumnos ocuparán 5 mesas y 3 asientos de una sexta mesa.

Entre

~~300 103~~

$300 - 103 = 197$

$20 \times 15 = 300$

67

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y ~~hay~~ 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

A

Puntos A: 0

103 | 20
0 0   5

5x 15 km = 75

Ocupan 5 mesas

Justificación A

No entiendo porque pone km, no ha leído bien el problema. Además la división no es correcta.

B

Puntos B: 1

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\ 20 \\ \hline 40 \\ +\ 20 \\ \hline 60 \\ +\ 20 \\ \hline 80 \\ +\ 20 \\ \hline 100 \\ +\ 3 \\ \hline 103 \end{array}$$

Ocupan 6 mesas

Justificación B

La solución es totalmente correcta aunque podría haber escogido otro algoritmo más adecuado.

C

Puntos C: 0'5

$$\begin{array}{r} 103 \\ -\ 20 \\ \hline 083 \\ -\ 20 \\ \hline 63 \\ -\ 20 \\ \hline 43 \\ -\ 20 \\ \hline 03 \end{array}$$

103 → *"Estudiantes"*

Necesitan 5 mesas

Justificación C

La solución no es correcta, sin embargo el procedimiento sí, aunque no es el algoritmo más adecuado.

D

Puntos D: 1.

103 | 20
03   5

5 + 1 = 6

Son 6 mesas

Justificación D

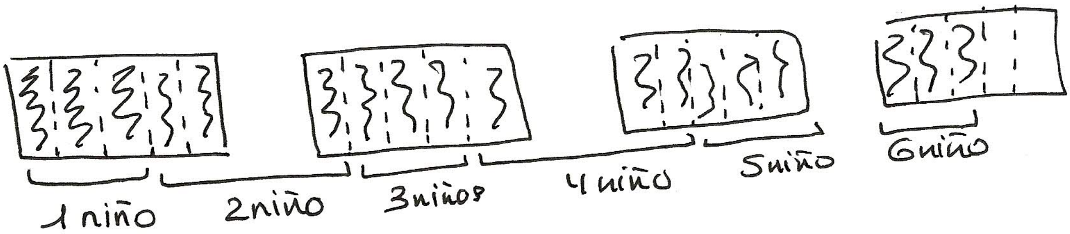
El procedimiento y la solución son totalmente correctos.

Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

4 PASTELES



Solución: le podrá dar pastel a 6 niños y le sobrarán 2 quintos de pastel.

En este problema la mejor forma de solucionarlo es mediante los dibujos, puesto que se observa claramente el número de trozos repartidos entre los niños. El uso do operaciones será más complicado para la resolución del problema por niños de Primaria.

Cate

67

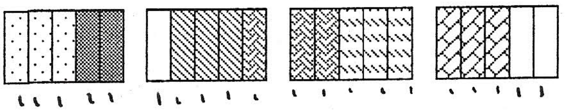
Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuantos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A

Puntos A: 0'5



Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos

Justificación A

El niño ha planteado bien el problema, sin embargo se ha hecho un lío a la hora de dibujar puesto que lo ha hecho desordenadamente, por ello ha dicho que sobrarán 3 y no es así. Sobrán 2 trozos.

B

Puntos B: 0'5

$$4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Justificación B

El procedimiento es correcto pero la solución no es totalmente correcta so $\frac{2}{5}$. Se hubiera aclarado mejor con dibujos.

C

Puntos C: 0'5

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

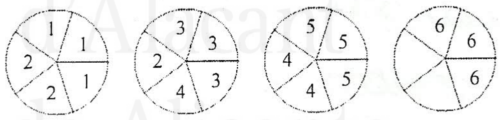
Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación C

El problema está correctamente solucionado aunque creo que mediante los dibujos ~~se~~ lo hubiera entendido mejor. Las fracciones no están colocadas correctamente.

D

Puntos D: 1



Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación D

El problema está bien planteado y ha sabido responderlo perfectamente.

32

Nombre: mª Jesús

Fecha: 17/11/09 Edad: 21

Acceso a la Universidad (marca la opción correspondiente)

☐ Mayores de 25 ☒ Ciclos formativos FP ☐ Selectividad

Otros: ....

Bachillerato: ☒ Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

En primero obligatorias
En segundo no.

☐ Humanidades y Ciencias Sociales

☐ Ciencias y Tecnología

☐ Artes

Instrucciones
I Parte

- El cuestionario consta de cuatro problemas y cada problema está en una hoja diferente.
- Lee detenidamente el enunciado y contesta lo que se te pregunta aunque no estés seguro/a de que esté bien.
- No borres nada, simplemente tacha con una línea
- Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido
- Tienes una hora para resolver los cuatro problemas
- No hables ni copies del compañero/a
- Puedes usar la calculadora
- Si tienes alguna duda, levanta la mano y el profesor/a te ayudará

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

$$\begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ 2 & \end{array}$$

Se necesitaron 12 colores diferentes y el último color solo pintó 2 farolas.

Razonamiento:

El enunciado nos señala que las farolas se pintan en grupos de 3, 3 de un color, 3 de otro y así sucesivamente ~~hay~~ hasta pintarlas todas, 35.

Por lo que para saber cuántos colores tenemos que usar, hemos dividido las farolas totales, 35, en paquetes de 3 y el resultado nos dice que hacen falta 12 colores, pero que el último grupo de 3 no está completo, solo se pintaron 2.

Albergue
103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

103 estudiantes.
20 asientos
15 mesas.

103 |20
03 5

Ocuparán 5 mesas completas y sobrarán 3 estudiantes que estarán en otra mesa.

Razonamiento:

El enunciado nos señala que hay 103 estudiantes, por otro lado que las mesas del comedor tienen 20 asientos, y que hay 15 mesas.

De aquí lo que podemos deducir es lo siguiente:

Dividimos el nº de alumnos (103) entre los asientos que tiene una mesa (20), ya que cada 20 asientos ocupados significa que hay 1 mesa llena, por lo que el resultado que nos da son que hay 5 mesas de 20 asientos llena y otra mesa con 3 personas.

Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

Tengo 4 pasteles.

$\frac{3}{5}$ de pastel

$\cancel{\frac{3}{5} \text{ de } 4 = \frac{12}{5}}$

$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{5}$

$+ \qquad +$

$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} - \frac{1}{5} = \frac{5}{5}$

$\frac{12}{5}$ ~~a sobran~~ $2.$ $\frac{10}{15} + \frac{10}{15} = \frac{20}{15}$

le puedo dar $\frac{3}{5}$ a 6 niños

y me sobran $\frac{2}{5}$.

Razonamiento:

Me he ayudado de la representación gráfica para resolver el problema.

He pintado 4 pasteles y los he dividido en 5 trozos, he ido cogiendo $\frac{3}{5}$ de cada pastel y el resultado es:

se lo pueden dar $\frac{3}{5}$ a 6 niños y sobran $\frac{2}{5}$.

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A

Puntos A: 0

1	2	3 Rojo
4	5	6 Verde
7	8	9 Azul
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
21	22	23
24	25	26
27	28	29
30	31	32
33	34	35

Necesitó 12 colores

Justificación A

El resultado es el correcto, pero el procedimiento no lo es, por lo que no se puede saber si lo ha deduci_do el niño o se ha copiado.

B

Puntos B: 0'5

```
35 |_3__
05  11
 2
```

Se necesitan 11 colores

Justificación B

He puntuado 0'5, ya que la solución no es del todo correcta, debería poner que hay 12 colores, ya que sobran 2. Por ello, porque lo ha entendido pero no lo ha hecho bien del todo, pongo 0'5.

C

Puntos C: 1

```
35 |_3__
05  11
 2
```

Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color.

Solución: Necesita 12 colores

Justificación C

Ya que lo ha planteado de forma correcta y además pone la justifica_ción de por qué 12 colores.

D

Puntos D: 1

3 farolas 1 color
15 farolas 5 colores
30 farolas 10 colores
33 farolas 11 colores
36 farolas 12 colores

Son 12 colores

Justificación D

El resultado y el procedimi_ento son correcto.

32

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

A

Puntos A: 0

$$\begin{array}{r|l} 103 & 20 \\ \hline 00 & 5 \end{array}$$

5x 15 km = 75

Ocupan 5 mesas

B

Puntos B: 0'5

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\ 20 \\ \hline 40 \\ +\ 20 \\ \hline 60 \\ +\ 20 \\ \hline 80 \\ +\ 20 \\ \hline 100 \\ +\ 3 \\ \hline 103 \end{array}$$

Ocupan 6 mesas

Justificación A

El planteamiento de la división esta bien, pero el resultado no es correcto y la comprobación de la multiplicación tampoco.

Justificación B

El niño ha ido sumando los asientos que hay en una mesa, mas lo de otra y así sucesivamente hasta que ha llegado al nº de estudiante, y luego ha visto cuantas veces lo ha hecho y esas son las mesas que necesitaba. (atrás)

C

Puntos C: 0

$$\begin{array}{r} 103 \\ -\ 20 \\ \hline 083 \\ -\ 20 \\ \hline 63 \\ -\ 20 \\ \hline 43 \\ -\ 20 \\ \hline 03 \end{array}$$

103 → *"Estudiantes"*

Necesitan 5 mesas

D

Puntos D: 1.

$$\begin{array}{r|l} 103 & 20 \\ \hline 03 & 5 \end{array}$$

5 + 1 = 6

Son 6 mesas

Justificación C

El planteamiento es correcto pero no adecuado para un niño de 6º de primaria. Y el resultado no es correcto.

Justificación D

El planteamiento es correcto y propio de un niño de 6º de primaria y el resultado es correcto.

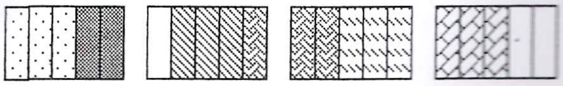
Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuantos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A

Puntos A: 0'5



Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos

Justificación A

Una parte del problema es correcta, ya que se les puede dar pastel a 6 niños, pero no sobran 3 trozos, sino 2. En este caso como el niño se ha confundido a contestado mal y por ello el 0'5.

B

Puntos B: 1.

$$4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$$

Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Justificación B

El planteamiento y el resultado son correctos. Y el planteamiento es de nivel de un niño de 6º de primaria.

C

Puntos C: 1.

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 6 \end{array}$$

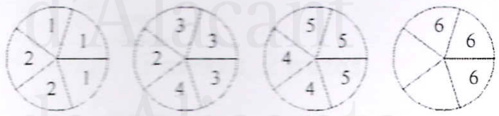
Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación C

El planteamiento y la respuesta es correcta

D

Puntos D: 1.



Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación D

El planteamiento también es de un niño de 6º de primaria, lo hace más fácil, y la respuesta es correcta.

82

Nombre: Esteban Moreno Martin

Fecha: 17/11/09 Edad: 18

Acceso a la Universidad (marca la opción correspondiente)

☐ Mayores de 25 ☐ Ciclos formativos FP ☒ Selectividad

Otros: ....

Bachillerato:

☐ Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

☒ Humanidades y Ciencias Sociales Matemáticas NO

☐ Ciencias y Tecnología

☐ Artes

Instrucciones
I Parte

- El cuestionario consta de cuatro problemas y cada problema está en una hoja diferente.
- Lee detenidamente el enunciado y contesta lo que se te pregunta aunque no estés seguro/a de que esté bien.
- No borres nada, simplemente tacha con una línea
- Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido
- Tienes una hora para resolver los cuatro problemas
- No hables ni copies del compañero/a
- Puedes usar la calculadora
- Si tienes alguna duda, levanta la mano y el profesor/a te ayudará

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

35 | 3
0 2 | 11

R/ Ha necesitado 12 colores diferentes.

Grupos de farolas.

Farolas con las que no se ha llegado a formar un grupo.

Explicación: Si hay 35 farollas y las pintan de tres en tres, divido 35 entre 3 y me saldrán los grupos de farolas que se han hecho. Si el resto es 0 no sumo un grupo más, pero si el resto es 1 ó 2 le sumo otro ~~gru~~ color como he hecho anteriormente.

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

Estrategia 1

1º $\underbrace{20}_{\text{Asientos}} \times 5 = \underbrace{100}_{\text{estudiantes}}$.

Estrategia 2

2º $103 \,\lfloor 20$
3) 5

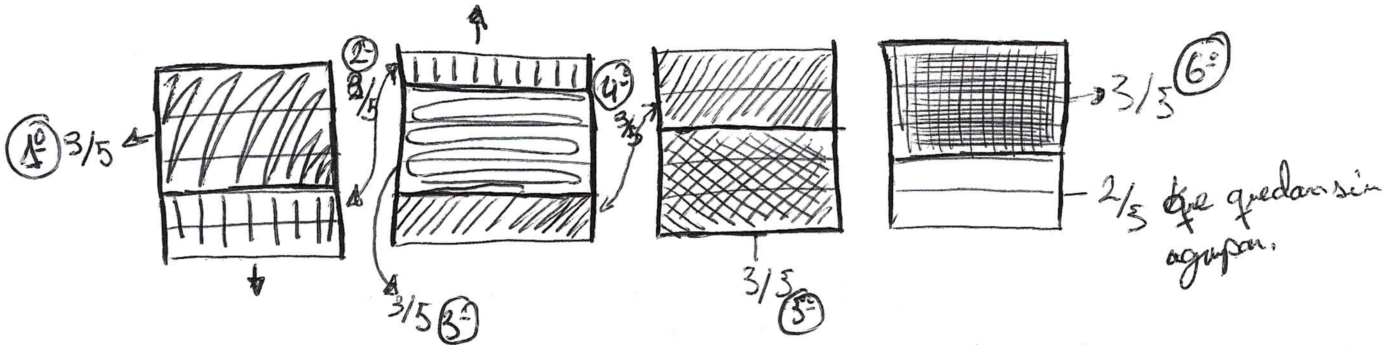
R/ En total ~~las~~ se llenarán por completo 5 mesas de 20 asientos, y la sexta estará formada por 3 individuos. ~~Mesas llenas~~
Mesas utilizadas: 6.

Explicación: En este caso al utilizar ~~la~~ el número 103, redondeo y sé que 20x5 = 100, por lo que se llenan 5 mesas por completo y la 6ª queda utilizada solo por 3.

Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?



R/ He podido formar 6 grupos de 3/5, y me ha sobrado 2/5.
Le reparto a 6 niños.

Explicación: Para este problema que utiliza una baja cantidad de pasteles he utilizado la estrategia de la representación gráfica o en dibujo. Si hubiera sido una cantidad mayor hubiera utilizado otra estrategia.

82

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A

Puntos A: 1

1	2	3 Rojo
4	5	6 Verde
7	8	9 Azul
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
21	22	23
24	25	26
27	28	29
30	31	32
33	34	35

Necesitó 12 colores

B

Puntos B: 0'5

35 | 3
05 11
2

Se necesitan 11 colores

Justificación A

Está correcto pero me parece menos profesional que la solución y la estrategia del "C".

Justificación B

El proceso por el cual a querido realizarlo me parece adecuado, aunque la solución no sea correcta.

C

Puntos C: 1

35 | 3
05 11
2

Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color.

Solución: Necesita 12 colores

D

Puntos D: 1

3 farolas 1 color
15 farolas 5 colores
30 farolas 10 colores
33 farolas 11 colores
36 farolas 12 colores

Son 12 colores

Justificación C

De entre todos los problemas resueltos éste me parece el de más calidad, y es más avanzado que los restantes.

Justificación D

Me ~~pare~~ parece correcta la utilización de 3.

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

A — Puntos A: 0

$$\begin{array}{r|l} 103 & 20 \\ \hline 00 & 5 \end{array}$$

5x 15(km)= 75

Ocupan 5 mesas

B — Puntos B: 1 ~~[illegible]~~

$$\begin{array}{r} 20 \\ +\ 20 \\ \hline 40 \\ +\ 20 \\ \hline 60 \\ +\ 20 \\ \hline 80 \\ +\ 20 \\ \hline 100 \\ +\ 3 \\ \hline 103 \end{array}$$

Ocupan 6 mesas

Justificación A

No está correcto. ¿Qué significa "5 x 15 Km"? ¿De donde salen los Km?

Justificación B

Está correcto pero me parece mejor la estrategia "D".

C — Puntos C: 0 ~~[illegible]~~

$$\begin{array}{r} 103 \\ -\ 20 \\ \hline 083 \\ -\ 20 \\ \hline 63 \\ -\ 20 \\ \hline 43 \\ -\ 20 \\ \hline 03 \end{array}$$

103 → *"Estudiantes"*

Necesitan 5 mesas

D — Puntos D: 1

$$\begin{array}{r|l} 103 & 20 \\ \hline 03 & 5 \end{array}$$

5 + 1 = 6

Son 6 mesas

Justificación C

No es correcto. Es un procedimiento costoso respecto al "D"

Justificación D

En mi opinión es ~~la solución~~ el proceso más sencillo y avanzado, y da un resultado correcto.

82

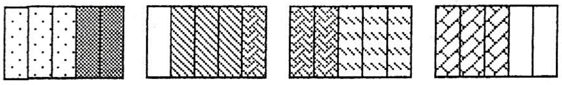
Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuantos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A

Puntos A
0



Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos

B

Puntos B
0'5

$$4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Justificación A

Solo sobran 2 trozos.

Justificación B

No comprendo.

C

Puntos C
1

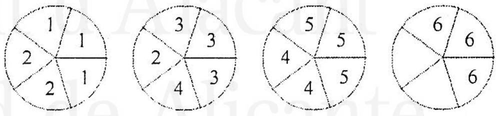
$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

D

Puntos D
1



Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación C

Está correcto. Me parece un proceso matemático muy interesante y en parte adecuado para el problema.

Justificación D

Otra manera de dar la solución correcta, usando la estrategia de la representación gráfica.

Nombre: MANUEL BROTONS VICENTE (10)

Fecha: 17-11-09 Edad: 23

Acceso a la Universidad (marca la opción correspondiente)

☐ Mayores de 25

☒ Ciclos formativos FP

Indicar cuál: ED. INFANTIL

Indica si hiciste alguna asignatura de matemáticas en el Ciclo Formativo: NO

☐ Selectividad Sí que la hice, pero entré con la nota del C.F.

Otros: ....

Bachillerato:

☐ Ciencias de la Naturaleza y de la Salud

☒ Humanidades y Ciencias Sociales

☐ Ciencias y Tecnología

☐ Artes

☐ BUP Ciencias

☐ BUP Letras

☐ COU

Indica si hiciste alguna asignatura de matemáticas en Bachillerato y en qué curso(s): En 1º de Bachillerato, hace 8 años.

Instrucciones
I Parte

- El cuestionario consta de cuatro problemas y cada problema está en una hoja diferente.
- Lee detenidamente el enunciado y contesta lo que se te pregunta aunque no estés seguro/a de que esté bien.
- No borres nada, simplemente tacha con una línea
- Explica brevemente con tus palabras el razonamiento que has seguido
- Tienes una hora para resolver los cuatro problemas
- No hables ni copies del compañero/a
- Puedes usar la calculadora
- Si tienes alguna duda, levanta la mano y el profesor/a te ayudará

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

$$\begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \hline 05 & 11 \\ 2 & \end{array}$$

Se utilizaron 12 colores diferentes.
Se utilizaron 11 colores para pintar 3 farolas con cada color.
Del color número 12 sólo se pintaron 2 farolas.

10

Farolas

Para celebrar el quinto centenario de su pueblo, el alcalde decidió pintar de diferentes colores las farolas de la calle principal. Las tres primeras las pintó de rojo, las tres siguientes de verde, las tres siguientes de azul, y así sucesivamente, sin repetir colores. Si se pintaron 35 farolas, ¿cuántos colores diferentes necesitó?

A

Puntos A: 1

1	2	3 Rojo
4	5	6 Verde
7	8	9 Azul
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21
21	22	23
24	25	26
27	28	29
30	31	32
33	34	35

Necesitó 12 colores

Justificación A

La respuesta es correcta y merece esa nota, pero añadiría un comentario para que el alumno se diera cuenta que se ha descontado y ha repetido el nº 21. Con un fallo así podría haberse equivocado. Digamos que ha tenido suerte con la solución.

B

Puntos B: 0

35 | 3
05 11
2

Se necesitan 11 colores

Justificación B

El procedimiento era correcto pero no ha pensado en las 2 farolas restantes.

C

Puntos C: 1

35 | 3
05 11
2

Se dividen las 35 farolas en grupos de tres. El cociente es la cantidad de colores. Esto me da 11 colores. Como el resto no es cero, agregamos un color.

Solución: Necesita 12 colores

Justificación C

Porque la solución es correcta y la explicación del problema lo deja muy claro.

D

Puntos D: 1

3 farolas 1 color
15 farolas 5 colores
30 farolas 10 colores
33 farolas 11 colores
36 farolas 12 colores

Son 12 colores

Justificación D

Se ha basado en hecho numéricos y ha dado con la solución correcta.

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?

103 | 20
03 | 5

se ocuparon 5 mesas completas y 3 alumnos se sentaron en una 6ª mesa

10

Albergue

103 estudiantes están en un albergue. Las mesas del comedor tienen 20 asientos y hay 15 mesas. Si van completando las mesas sin dejar asientos libres, ¿cuántas mesas ocuparán?	
A Puntos A: 0 $103 \div 20$: cociente 5, resto 00 5x 15 km = 75 **Ocupan 5 mesas**	**B** Puntos B: 1 20 + 20 = 40 40 + 20 = 60 60 + 20 = 80 80 + 20 = 100 100 + 3 = 103 **Ocupan 6 mesas**
Justificación A A parte que la respuesta es incorrecta, el niño ha metido 15 Km que se saca de la manga sin sentido. Y la división está mal tambien.	Justificación B Procedimiento y solución correctas
C Puntos C: 0 103 → *"Estudiantes"* 103 − 20 = 083 083 − 20 = 63 63 − 20 = 43 43 − 20 = 03 **Necesitan 5 mesas**	**D** Puntos D: 1 $103 \div 20$: cociente 5, resto 03 5 + 1 = 6 **Son 6 mesas**
Justificación C El procedimiento era correcto pero al final se ha equivocado al restar y el resultado es erroneo.	Justificación D Procedimiento y solución correctas.

Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuántos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

10

En total tengo 20 trozos de pasteles.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Puedo dar 3 trozos a 6 niños y me sobran 2 trozos.

10

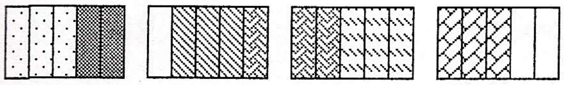
Pasteles

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- ¿A cuantos niños puedo dar?
- ¿Qué me sobra?

A

Puntos A: 0'5



Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos

Justificación A

El procedimiento era correcto pero se ha equivocado al hacer los grupos de 3.

La primera respuesta es correcta pero la segunda no.

B

Puntos B: 0'5

$$4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$

Justificación B

Operaciones correctas pero en la solución se ha confundido. No sobran $\frac{2}{3}$ sino $\frac{2}{5}$.

La primera respuesta es correcta pero la segunda no.

C

Puntos C: 1

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

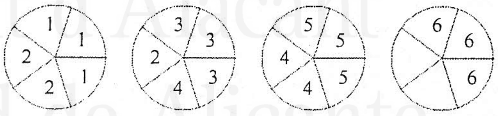
Les doy a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación C

Operaciones y resultados correctos.

D

Puntos D: 1



Les puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel

Justificación D

Procedimiento y resultados correctos.