UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO

LAMBAYEQUE – PERÚ

MODELOS DE OLIGOPOLIO.

Segunda Versión (2017)

Vela Meléndez Lindon[1]

(Cabrejos Moreno Lesly, Cabrera Rojas Jans, Huamán Guevara Wendy, Inoñan Chávez Leslie, Paucar Cornejo Andrea, Quispe Luna Verónica)[2]

LAMBAYEQUE – PERU

2017

[1] Economista, docente responsable de la materia.

[2] Estudiantes del séptimo ciclo de la Escuela Profesional de Economía de la Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque

INDICE

INDICE DE GRÁFICOS

INDICE DE CUADROS

RESUMEN

El presente trabajo, despliega un resumen exploratorio de los principales modelos de oligopolio, mediante la recopilación de una serie de trabajos académicos que exponen los avances teóricos realizados en este tema y su desarrollo desde una perspectiva matemática, Precisando para ello, asuntos concretos sobre las distintas conjeturas que se han deslizado en el estudio y tratamiento de los modelos oligopólicos. La primera sección del documento, explica el desarrollo teórico de los modelos de competencia en cantidades o también denominados, estáticos, desplegando así, la introducción de los diversos puntos sobre los cuales se sostienen los modelos de Cournot y Bertrand, respectivamente. La segunda sección, por su parte, expone con brevedad, la formalización de los modelos oligopólicos que se desarrollan en la competencia a través de dos etapas, especificándose el estudio del modelo de Stackelberg. La tercera sección, está determinada para el estudio conciso de las interacciones estratégicas que se manifiestan en el conjunto de los modelos oligopólicos, abordando con ello, el análisis imprescindible de la Teoría de Juegos. Finalmente, la cuarta sección del presente trabajo, busca concretizar el abordaje de la teoría económica en la materialización y aplicación de los modelos oligopólicos a la realidad.

ABSTRACT

This paper presents an exploratory summary of the main models of oligopoly, by means of the compilation of a series of academic papers that expose the theoretical advances made in this topic and its development from a mathematical perspective. Different conjectures that have slipped in the study and treatment of oligopoly models. The first section of the paper explains the theoretical development of competence models in quantities or also denominated static, deploying the introduction of the various points on which the models of Cournot and Bertrand, respectively. The second section, on the other hand, briefly exposes the formalization of the oligopoly models that are developed in the competition through two stages, specifying the study of the Stackelberg model. The third section is determined for the concise study of the strategic interactions that are manifested in the set of oligopoly models, addressing with this, the essential analysis of the Game theory. Finally, the fourth section of the present paper seeks to concretize the approach of economic theory in the materialization and application of oligopoly models to reality.

PALABRAS CLAVES

Oligopolio, Modelos oligopólicos, Modelo de Cournot, Modelo de Bertrand, Modelo de Stackelberg, Modelo de Kreps y Scheinkman.

KEYWORDS

Oligopoly, Oligopoly models, Cournot model, Bertrand model, Stackelberg model, Kreps and Scheinkman model.

Introducción

Los mercados, en general - desde un punto de vista empírico- parecen fluir entre la combinación estructural de modelos como el de competencia perfecta y monopolio, esbozando características que le permiten desplazarse entre los extremos de éstos, en un determinado momento. Pero en realidad, ¿Cuál es el comportamiento de los mercados en el entorno real? La respuesta teórica a esta interrogante, lógicamente nos conduce a la composición propuesta por los modelos oligopólicos, puesto que, éstos encajan con las distintas conductas que manifiestan los mercados en el escenario real, potenciando así, un estudio - menos incierto - que nos permita entender y establecer los factores definitivos en la conducta de los mercados.

En particular, la conducta de los mercados en nuestro país, parece no ser la excepción a la regla, y por el contrario, éstos suelen manifestar específicas variantes conductuales, las mismas que, pueden ser analizadas, específicamente, bajo la perspectiva, de los principales modelos oligopólicos. En estos modelos, a menudo, existen pocos productores, los cuales, por su condición de insuficientes, pueden comercian productos que pueden ser sustitutos entre sí, se suma a ello, la característica – principal- de interdependencia que se genera entre éstos, condicionando y afectando, así, las decisiones que decidan ejecutar los demás participantes del mercado.

Indefectiblemente, las cualidades manifiestas en los mercados oligopólicos, en realidad, resultan ser un aspecto clave, puesto que, permiten modelar la mayoría de mercados oligopólicos existentes, concentrando el esfuerzo investigativo de múltiples economistas. Por lo tanto, componer una teoría del oligopolio que exponga la estructura industrial de los mercados, implica la comprensión holística de cada uno de éstos, por ello, es quizá, ésta la implicación más intrincada en la búsqueda de una teoría del oligopolio perfectamente comprensible de la realidad.

De este modo, la utilización de enfoques teóricos, desde una perspectiva exploratoria, permite que la información obtenida para el presente trabajo, contribuya a formular un sumario sobre los principales modelos oligopólicos, proporcionando así, un análisis puntual de cada uno de ellos.

Este trabajo de investigación, se compone de cuatro secciones, cada uno de las cuales, tiene como finalidad sintetizar los principales discernimientos teóricos desarrollados a partir del estudio de la conducta de los mercados en los distintos modelos oligopólicos.

La primera sección del documento, puntualiza una explicación concisa sobre el desarrollo teórico de los modelos de competencia, para lo cual, se ha determinado un despliegue introductorio de los diversos puntos sobre los cuales se sostienen los modelos de Cournot y Bertrand, respectivamente.

La segundo sección, constituye la formalización de modelos oligopólicos analizados bajo el esquema de competencia a través de dos etapas, en el cual, se enfatiza y especifica el estudio del modelo de Stackelberg.

La tercera sección, está determinada para el estudio conciso de las interacciones estratégicas que se manifiestan en el conjunto de los modelos oligopólicos, abordando con ello, el análisis imprescindible de la Teoría de Juegos. Finalmente, dentro de la estructura del documento de investigación, se halla la cuarta sección, cuya finalidad, es concretizar el abordaje de la teoría económica en la aplicación y materialización de los modelos oligopólicos a la realidad.

Las limitaciones inherentes dentro del proceso recopilatorio del presente trabajo, permiten que este trabajo sea sujeto del análisis y crítica respectiva, consecuencia natural de la investigación académica. Indiferentemente a ello, la realización de este trabajo de investigación, tiene como principal finalidad, contribuir dentro de la discusión e investigación académica, relacionada a los modelos oligopólicos y su comprensión de las determinantes en la conducta de los mercados.

CAPÍTULO I

MODELOS DE COMPETENCIA EN CANTIDADES O ESTÁTICO

Modelos de competencia en cantidades o estáticos

Como se ha mencionado en la página introductoria, los modelos oligopólicos, están caracterizados por la presencia de pocos productores que compiten en el mercado y comercian productos que son sustitutos entre sí. De esta forma, la competencia que se genera entre las empresas, está condicionada además, por la existencia de interdependencia entre los competidores, restringiendo así, las decisiones que puedan ejecutarse por parte de éstos.

En particular, los modelos oligopólicos estáticos, se distinguen de otros modelos, puesto que, manifiestan un solo período de interacción competitiva, en el cual, las empresas toman y ejecutan acciones de manera simultánea. Se despliega, en esta sección, el estudio de modelos específicos. El primero de ellos, denominado modelo de Cournot, confiere vital importancia al nivel de producción de su competidor, mientras que su contraparte, el modelo de Bertrand, discierne respecto del planteamiento de Cournot, indicando que las empresas en realidad, se enfrentan mediante la fijación de precios.

En ese contexto, ambos planteamientos - desde la óptica de sus autores- buscan la obtención de un resultado perfectamente competitivo, que optimice las decisiones que toman las empresas para maximizar sus beneficios. A continuación, se detalla una descripción concisa sobre ambos modelos.

1.1.Modelo de Cournot

1.1.1. Definición del modelo.

El modelo de Cournot, fue planteado por el matemático francés Antoine Augustin Cournot. Este modelo oligopólico básico, establece que cada empresa se considera a sí misma “seguidora”, designando con ello, un rol de importancia al nivel de producción de su competidor, con la finalidad de alcanzar y tomar las decisiones óptimas referidas a su producción.

Por ello, bajo la perspectiva de este modelo, la empresa seguidora asume que su competidor mantendrá fija su producción, lo que Cournot denominó como un “juego estático” - con información completa - , donde las empresas seguidoras tendrán estrategias que le permitirán tomar las mejores decisiones y maximizar así, sus beneficios.

De este modo, como lo definen, García Carpio & Perez Reyes (2012), “el modelo de Cournot es un modelo clásico, en donde la variable de decisión es el nivel de producción y en el cual, las empresas toman decisiones simultáneamente” (p.2).

Para tener un equilibro de oligopolio competitivo a lo de Cournot; debemos tener en cuenta dos características importantes según (García Carpio & Perez Reyes, 2012, p. 13):

- Función de demanda inversa lineal : P(Q) = a- bQ

Donde:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i \quad \text{y} \quad n=2$$

- Función de costos: $C(q_i) = F_i + c_i q_i$; para i= 1,2

Con estas dos características, podremos encontrar el equilibrio de Cournot, cuya significancia, hace referencia al punto en el cual, dos empresas eligen una cantidad, que será optima dada la cantidad de empresas competidoras.

Por otro lado, la existencia de dos empresas, plantea posiciones sobre las cuales, estas, pueden optar por la determinación de la cantidad de producción propia, respecto de la cantidad elegida por su competidor. De esta forma, dos autores en particular, despliegan su punto de vista en relación al modelo oligopólico de Cournot, sustentando que:

> Cada empresa seguidora supone que la producción de su competidora se mantiene fija de un periodo a otro, pero, en realidad, ambas se alteran. Sólo en el punto de equilibrio se cumplen, de hecho, las maximizan sus beneficios dadas las expectativas de una de ellas sobre su producción de la otra. Por este motivo, generalmente pasan de alto la forma en que se alcanza el equilibrio y solo se fijaran el comportamiento de las empresas en esta situación. (Varian Hal, 1999, p.492).
>
> Supongamos que la competencia de dos empresas adoptan formas algo diferentes y decide cuanto producir "q_1" y "q_2". Dadas estas opciones de cantidades de producción, el precio se ajustará al nivel del precio del mercado $P(q_1\ y\ q_2)$, donde $P(\cdot) = x^{-1}(\cdot)$ es la función de la demanda inversa, este modelo se le conoce como el Modelo de Cournot[3]. (Mas - Colell, Whinston D., & Green R., 1995, p. 326).

De lo anterior, podríamos deducir que el punto óptimo donde ambas empresas toman las mejores decisiones, se ubicará en el nivel social óptimo (competitivo) de la producción del mercado, sin embargo, para que esto suceda, la empresa seguidora debe tener un conjunto de opciones óptimas de cantidad y así, tener una mejor respuesta en sus decisiones ante su competidora.

Por su parte, Pindyck & Rubinfleld (2009), indica que "la esencia del modelo de Cournot radica en que cada una de las empresas considera fijo el nivel de producción de su competidora cuando decide la cantidad que va a producir" (p. 516).

[3] Mas - Colell, Whinston D., y Green R.(1995): "Suppose now that competition between the two firms takes a somewhat different form: The two firms simultaneously decide how much to produce, q_1 and q_2. Given these quantity choices,price adjusts to the level that clears the market $P(q_1\ y\ q_2)$, where $P(\cdot) = x^{-1}(\cdot)$ is the inverse demand function. This model is known as the Cournot model". Traducción propia.

Asimismo, Kafka (1978), determina que: "la idea básica de este modelo Cournot es que cada empresa asume que la otra mantendrá su producción y esto hará que la cantidad vendida en el mercado sea competitiva" (p. 102).

1.1.2. Supuestos.

Nicholson (2005), señala que el modelo de Cournot, está determinado bajo el siguiente supuesto, el cual indica que, "cada empresa reconoce que sus decisiones respecto a la producción, afectan el precio. Pero sus decisiones respecto al nivel de producción, no afectan las decisiones de otra empresa cualquiera" (p.418).

Conjuntamente con la indicación del anterior autor, Pindyck & Rubinfeld (2009), señala que, "las empresas producen un bien homogéneo, cada una considera fijo el nivel de producción de sus competidoras y todas deciden simultáneamente la cantidad que van a producir" (p. 516).

De igual modo, Varian Hal (1999), propone que "cada empresa espera la decisión de la producción de su competidora, y así ellas puedan tomar una decisión optima de su producción" (p.492).

Por último, (Rojas, 2015), indica que el producto debe ser homogéneo y que el beneficio de cada empresa es la cantidad que producirá cada empresa y del precio de mercado, que a la vez es la función producida por cada empresa

$$\pi^i = (q_i; q_j) = P(q_i + q_j)q_j - CT_i \qquad \forall_i = i, j$$

Este autor, afirma además, que el equilibrio es dado por la solución de Nash, considerando que es aquella retribución de las cantidades, lo que hace que ninguna empresa obtenga incentivos unilaterales para desviarse.

$$(q_i^c, q_j^c)$$

Es un equilibrio de Nash-Cournot si se cumple:

$$\pi^{i}\left(q_{i}^{c}, q_{j}^{c}\right) \geq \pi^{i}\left(q_{i}, q_{j}^{c}\right) \pi^{j}\left(q_{i}^{c}, q_{j}^{c}\right) \geq \pi^{j}=\left(q_{i}^{c}, q_{j}\right) \ ; \quad \forall q_{i}, q_{j} \in Q$$

Finalmente, puede concluirse que los supuestos expresados por los autores en mención, son los siguientes:

- Cada empresa decide su cantidad óptima que va a producir simultáneamente.
- Al conocer la elección de producción de la empresa competidora, la empresa seguidora podrá fijar la cantidad de producción y además, fijará su cantidad maximizadora de los beneficios.
- La suma de las ofertas individuales y la demanda del mercado por el producto, da como resultado el precio del mercado, es por ello que, el precio eliminará cualquier exceso de oferta o demanda.
- La variable importante es la cantidad que se producirá.
- El producto que ofrecen las empresas son homogéneos.

1.1.3. Hipótesis.

En este punto, el planteamiento que manifiestan los diferentes autores, es de suma relevancia, puesto que, permite dilucidar las convergencias y semejanzas existentes entre cada uno de ellos.

Para, Tarziján M. & Paredes M. (2006), la hipótesis del modelo Cournot está conformada de la siguiente manera:

- Al determinar el nivel de la producción, cada empresa considera fijo el nivel de producción de su rival, y esto influirá a que la empresa seguidora obtenga una "respuesta óptima" a lo que cree que producirá su rival.

- La suma de las ofertas individuales de cada empresa y de la demanda de mercado por el producto dará como resultado el precio, este precio eliminará cualquier excedente de la demanda o la oferta.
- Las empresas decidirán la cantidad a producir simultáneamente
- Existen algunas barreras a la entrada al mercado.

De la misma forma, Vasquez Cordano (2015), señala que “el poder del mercado de cada empresa está limitado por la elasticidad de demanda, pues cuando mayor sea la elasticidad de demanda menor será el margen del precio- costo” (p. 11)

Además, podemos agregar a ello, que las empresas que ofrecen un producto homogéneo, lo ofrecerán de manera paralela y cooperativa.

1.1.4. Equilibrio con dos empresas.

Este equilibrio, se presenta en un mercado con solo dos empresas abstecedoras; donde la demanda del bien, está representada por la función, $X = f(P)$, donde:

$X =$ Consumo total del bien

$P =$ Precio

De esto, se desprende que la función de la demanda inversa está expresada como:

$$P = F^{-1}(X) = P(X)$$

Conjuntamente, asumimos que la función de costo de cada empresa estaría dada por $C_i\,(q_i)$, en donde: “q_i”, sería la producción de la empresa *“i”*, $Y_1 = 1, 2$, por tanto, la producción total del mercado (Q) estará compuesta por la suma de la producción de cada empresa:

$$Q = \ q_1 + q_2$$

Al igualar el consumo total (X) con la producción total (Q), tendríamos:

$$X = Q$$

$$X = q_1 + q_2$$

Por tanto, la función de la demanda inversa sería:

$$P(X) = P(q_1 + q_2)$$

La ganancia de cada empresa se reflejará en el volumen de producción de la empresa y de su competidora:

$$\pi_1(q_1 + q_2) = q_1 * p\,(q_1 + q_2) - C_1(q_1)$$

$$\pi_2(q_1 + q_2) = q_2 * p\,(q_1 + q_2) - C_2(q_2)$$

De esto, podemos deducir que la ganancia de cada empresa, se verá afectada no solo con el nivel de producción de la misma empresa, sino que también dependerá del comportamiento del nivel de producción de la empresa competidora; es decir, en el caso que la empresa competidora (empresa 2), incremente su nivel de producción, presionará a que la empresa 1, reaccione bajando sus precios y reduciendo sus ganancias. Esto debido a que la empresa 2, al aumentar el nivel de producción, reducirá sus propios precios, sin alterar sus ganancias.

Sin embargo, la empresa 1, se verá obligada a reducir sus precios sin un aumento del nivel de producción, disminuyendo consecuentemente sus ganancias.

Por ello, para evitar que cualquiera de las dos empresas resulte afectada, cada empresa deberá maximizar sus ganancias considerando el nivel de producción elegida por la empresa competidora.

Aplicando la condición de primer orden para cada función de ganancia tendremos:

$$P\,(q_1 + q_2) + q_1 * p'\,(q_1 + q_2) = C_1'\,(q_1)$$

$$P\,(q_1 + q_2) + q_2 * p'\,(q_1 + q_2) = C_2'\,(q_2)$$

Esta condición de primer orden, nos muestra que cada empresa *"i",* elige un nivel de producción "q_i", donde surge una igualdad entre el ingreso marginal y el costo marginal, considerando que el ingreso marginal dependerá del volumen de producción de la empresa competidora.

Asimismo, para que las empresas determinen el volumen de producción "q_i", que maximice sus ganancias, ésta debe estar en función del volumen de producción de la empresa competidora.

$$q_1 = R_1 (q_2)$$

$$q_2 = R_2 (q_1)$$

Donde "R_1" y "R_2", son funciones de reacción de la empresa frente al volumen de producción que la competidora asume.

Por ello, el equilibrio de este mercado estará dado por la solución de un juego simultáneo, donde las cantidades de equilibrio (q_1*, q_2*), surgen de la intersección de las curvas de reacción, esto se ve reflejado en un modelo de ecuaciones simultaneas. Gráficamente esto sería:

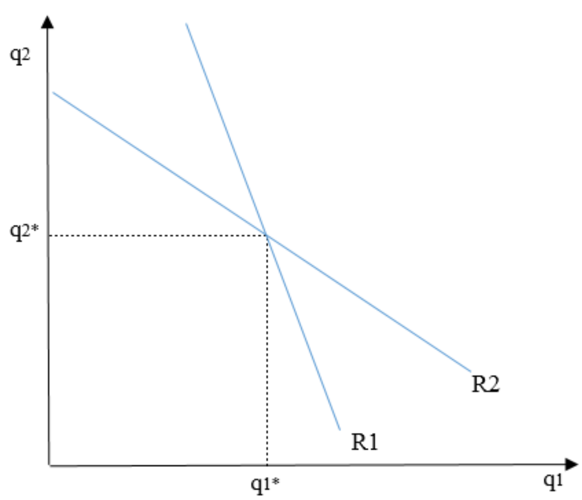


Figura 1. Equilibrio de Cournot

En la figura 1, podemos observar que las pendientes de la curva de reacción son negativas (R_1, R_2), esto debido a que las ganancias de la empresa, se encuentran en función decreciente de la producción de la empresa competidora.

Por consiguiente, si una de las empresas decide aumentar su producción, en consecuencia, reducirá las ganancias de la empresa competidora, debido a la reducción de sus ingresos por ventas, ya que ésta, se enfrenta a un nivel de precios más bajos, para contrarrestar esto, la empresa competidora tendrá que disminuir sus costos de producción, lo que significa que tendrá que reducir a su vez el nivel de producción.

La intersección de las curvas de reacción (y_1^*, y_2^*), dan lugar al equilibrio de Nash, en el cual, las empresas maximizan sus ganancias y los intereses de ambas coinciden, por lo tanto, no tendrán motivo alguno para modificar su nivel de producción.

Determinadas las cantidades de equilibrio (y_1^*, y_2^*), tendremos finalmente, que los precios de equilibrio serían, $P^* = P\ (y_1^*, y_2^*)$.

1.1.5. Equilibrio con "$\boldsymbol{n}$" empresas.

En este punto veremos cómo se determina un equilibrio de Cournot, en el cual, participan varias empresas, las mismas que, están a la expectativa del nivel de producción que elijan las demás empresas de la industria, concertando la descripción de un punto de equilibrio de la producción en esta situación.

De este modo, indicamos que la función de la demanda inversa - en este caso- sería $p = p(Q)$, en donde "Q", expresa la producción total obtenida de la suma de la producción de cada empresa de la industria, $Q = q_1 + q_2 + \cdots + \ q_n$.

Además, cada empresa presenta una función de costos $C_i = C_i(q_i)$, por tanto, la función de ganancias estaría definida como:

$$\pi_i = P\left(\sum_{i=1}^{\pi} q_i\right) q_i - C_i(q_i)$$

$$\pi_i = p(Q) \times q_i - C_i(q_i)$$

Maximizando la función de ganancias, obtenemos:

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_i} = p(Q) - p'(Q) q_i - C_i'(q_i) = 0$$

La ecuación denotada anteriormente, es una función de reacción de la empresa “i”. Esta función, muestra la elección óptima de producción de la empresa en mención, tomando en cuenta las decisiones de las empresas competidoras, exactamente de la producción agregada de sus rivales, denotada como, $Q_{-i} = Q - q_i$. De este modo, se determina que es este un caso de “equilibrio de Nash”, donde "n" empresas consideran las posibles reacciones de las empresas competidoras al momento de elegir su nivel de producción.

De la ecuación anterior, surgen los precios de Cournot, los mismos que, son una versión generada de la regla de Lerner.

$$\frac{p - CMg_i}{p} = \frac{p_i'(Q) q_i}{p}$$

$$\frac{p - CMg_i}{p} = \frac{\alpha_i}{\varepsilon^D}$$

De esta manera, la ecuación “ $\alpha_i = \frac{q_i}{Q}$”, demuestra la participación que la empresa “i” tiene en las ventas totales del mercado, deduciendo que, mientras mayor sea el α_i, mayor poder de mercado tendrá dicha empresa, generando una mayor posibilidad de cobrar un sobreprecio.

Ante el supuesto de que todas las empresas tengan igual tamaño, función de costos, equivalente Costo Marginal y similar participación en el mercado $\alpha_i = \frac{1}{n}$, conllevará a que la función de Lerner quede expresada de la siguiente manera:

$$\frac{p - CMg_i}{p} = \frac{\frac{1}{n}}{\varepsilon^D}$$

$$\frac{p - CMg_i}{p} = \frac{1}{n\,\varepsilon^D}$$

De la ecuación anterior, podemos deducir que el poder de cada empresa para cobrar un sobreprecio está en proporción inversa al número de empresas; es decir, a mayor número de empresas, menor será la posibilidad de que cada empresa pueda cobrar por encima del precio dela industria, ocasionando con ello, una aproximación al precio de equilibrio competitivo.

Esta resulta ser, una desventaja para las empresas, ya que impacta en las ganancias de cada una de ellas, generando su reducción. Esto se genera a partir de las externalidades negativas que se producen cuando las empresas entran a competir entre ellas y eligen un nivel de producción por encima del óptimo, afectando negativamente el precio, sin tomar en cuenta que esto afecta - del mismo modo - al precio de la industria.

1.1.6. Equilibrio con información asimétrica.

Equilibrio con información asimétrica

En este equilibrio consideramos que por lo menos una empresa, no está conforme o segura de la información que es de dominio público como los factores de demanda y los costos de las empresas rivales, en este tipo de casos se presentan información asimétrica.

Consideramos que existen dos empresas (1,2); donde la función inversa de la demanda es $p(Q) = a - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$, la cual representa la producción total del mercado.

Por otro lado tendremos la función de costos, la cual es diferente para cada empresa por tanto tendremos que:

$C_1(q_1) = C\ q_1$ $\longrightarrow$ Función de costos de la empresa 1.

$C_2\ (q_2) = \begin{cases} C_a\ q_2\ con\ probabilidad\ \theta \\ C_b\ q_2\ con\ probabilidad\ 1-\theta \end{cases}$ $\longrightarrow$ Función de costos de la empresa 2.

Con $C_b < C_a$

En este caso la empresa 2 conoce el CMg de la empresa rival C_1 y su propio CMg ya sea C_a o C_b, sin embargo la empresa 1 solo conoce sus costos y tiene como referencia que la empresa 2 tiene costos C_a con probabilidad θ o C_b con probabilidad $1-\theta$ por lo tanto no cuenta con información precisa.

Para poder determinar el punto de equilibrio se analizará las funciones de mejor respuesta para ambas.

a) La mejor respuesta de la empresa 2

Asume como costo de la empresa C_a, la función de ganancias sería:

$$\pi_2 = IMg_2 - CMg_2$$

$$\pi_{2C_a} = p(Q) \times q_2 - C_a \times q_2$$

Reemplazando $p(Q) = a - (q_1 + q_2)$

$$\pi_2 = q_2 \times (a - (q_1 + q_2)) - C_a \times q_2$$

$$\pi_2 = q_2 \times (a - q_1 - q_2) - C_a \times q_2$$

$$\pi_2 = aq_2 - q_1q_2 - q_2^2 - C_aq_2$$

La empresa 2 maximiza sus ganancias, entonces la condición de primer orden para la obtención de la función de mejor respuesta será:

$$aq_2 - q_1q_2 - q_2^2 - C_aq_2 = 0$$

$$a - q_1 - 2q_2 = C_a$$

$$q_2 = \frac{a - q_1 - C_a}{2}$$

Si el costo que asume es "C_b" entonces la función de ganancia es:

$$\pi_{2C_b} = p(Q) \times q_2 - C_b \times q_2$$

Reemplazando $p(Q) = a - (q_1 + q_2)$

$$\pi_{2C_b} = q_2 \times (a - (q_1 + q_2)) - C_b \times q_2$$

$$\pi_{2C_b} = q_2 \times (a - q_1 - q_2) - C_b \times q_2$$

$$\pi_{2C_b} = aq_2 - q_1q_2 - q_2^2 - C_bq_2$$

La empresa 2 maximiza sus ganancias, entonces la condición de primer orden para la obtención de la función de mejor respuesta será:

$$aq_2 - q_1q_2 - q_2^2 - C_bq_2 = 0$$

$$a - q_1 - 2q_2 = C_b$$

$$q_{2C_b} = \frac{a - q_1 - C_b}{2}$$

b) La mejor respuesta para la empresa 1.

Como la empresa 1 no conoce los costos de la empresa 2, esta maximizará sus ganancias de la siguiente manera:

$$\pi_1 = \theta\left[a - (q_1 + q_{2C_a}) - C\right] \times q_1 + (1 - \theta)\left[a - (q_1 + q_{2C_b}) - C\right] \times q_1$$

$$\pi_1 = \theta\left[aq_1 - q_1^2 - q_1q_{2C_a} - Cq_1\right] + (1 - \theta)\left[aq_1 - q_1^2 - q_1q_{2C_b} - Cq_1\right]$$

La empresa 1 maximiza sus ganancias, entonces la condición de primer orden para la obtención de la función de mejor respuesta será:

$$\pi_1 = \theta\left[a - 2q_1 - q_{2C_a} - C\right] + (1-\theta)\left[a - 2q_1 - q_{2C_b} - C\right]$$

$$\theta\left[a - 2q_1 - q_{2C_a} - C\right] + (1-\theta)\left[a - 2q_1 - q_{2C_b} - C\right] = 0$$

$$\theta\left(a - q_{2C_a} - C\right) - 2q_1\theta + (1-\theta)\left(a - q_{2C_b} - C\right) - (1-\theta)(2q_1) = 0$$

$$\theta\left(a - q_{2C_a} - C\right) + (1-\theta)\left(a - q_{2C_b} - C\right) = 2q_1\theta + (1-\theta)(2q_1)$$

$$\theta\left(a - q_{2C_a} - C\right) + (1-\theta)\left(a - q_{2C_b} - C\right) = 2q_1\theta + 2q_1 - 2q_1\theta$$

$$q_1 = \frac{\theta\left(a - q_{2C_a} - C\right) + (1-\theta)\left(a - q_{2C_a} - C\right)}{2}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$q_1 = \frac{\theta\left(a - \left(\frac{a - q_1 - C_a}{2}\right) - C\right) + (1-\theta)\left(a - \left(\frac{a - q_1 - C_b}{2}\right) - C\right)}{2}$$

$$q_1^* = \frac{a - 2C + \theta C_a + (1-\theta)C_b}{3}$$

$$q_{2(C_a)}^* = \frac{a - 2C_a + C}{3} + \frac{(1-\theta)}{6}(C_a - C_b)$$

$$q_{2(C_b)}^* = \frac{a - 2C_b + C}{3} + \frac{\theta}{6}(C_a - C_b)$$

Con los resultados anteriores, podemos hacer la comparación con el equilibrio de Cournot con información completa y costos (C_1, C_2) aplicando esto el equilibrio sería:

$$\overline{q_1} = \frac{a - 2C_1 + C_2}{3}$$

$$\overline{q_2} = \frac{a - 2C_2 + C_1}{3}$$

En el modelo con información incompleta donde asumimos que los costos son:

$$C_1 = C \; ; C_2 = C_a = C_b.$$

La producción de la empresa 1 asumiendo los costos C_a de la empresa 2 sería entonces:

$$q_{1(C_a)} = \frac{a - 2C + C_a}{3}$$

Por otro lado, la producción de la empresa 1 asumiendo los costos "C_b" de la empresa 2 sería entonces:

$$q_{1(C_b)} = \frac{a - 2C + C_b}{3}$$

Se obtiene entonces que:

$$\overline{q_{1(C_a)}} \geq q^* \geq \overline{q_{1(C_b)}}$$

Finalmente, podemos observar:

$$q_{2\,(C_a)}^{*} > \frac{a - 2C_a + C}{3}$$

$$q_{2\,(C_b)}^{*} < \frac{a - 2C_b + C}{3}$$

Esto ocurre porque la empresa 2 ajusta su cantidad de producción tomando en cuenta sus costos y la de la empresa 1, quien toma una cantidad intermedia debido a que no sabe con certeza cuales son los costos de la empresa 2.

1.1.7. Equilibrio de Nash-Cournot

John Nash, matemático y ganador del premio Nobel de Economía en el año 1994, por sus aportes a la Teoría de juegos, ha contribuido- sin lugar a dudas- a la determinación del equilibrio en un mercado oligopólico, basándose en la elección de estrategias en un mercado donde existen dos empresa (duopolio).

De este modo, Fernández-Baca (2010), considera que “(…) un conjunto de estrategias es un equilibrio de Nash, si ninguno de los jugadores puede aumentar sus ganancias con otra estrategia distinta, tomando en cuenta las estrategias que están tomando su contrincantes” (p.163). Es decir, ningún jugador puede tomar otra decisión en la que salga más favorecido, sin considerar la estrategia que toma el otro jugador. Matemáticamente, el equilibrio de Nash, se puede definir como:

$$\pi_i\left(q_i^*, q_j^*\right) \geq \pi_i\left(q_i, q_j^*\right)$$

$$\pi_j\left(q_i^*, q_j^*\right) \geq \pi_i\left(q_i^*, q_j\right)$$

Donde, (q_i^*, q_j^*), son las estrategias elegidas por cada empresa o jugador (i, j, respectivamente), en las que éstos, obtienen ganancias en relación a la elección del otro jugador o competidor.

Como se mencionó en los párrafos anteriores (punto 1.1.1.), en el modelo de Cournot, las empresas en el contexto de un mercado de duopolio, deciden de manera simultánea la cantidad de producción, pues, toman como dada la cantidad de producción de la competencia.

Denotando matemáticamente el modelo, consideramos la existencia de dos empresas (i, j), cuyo costo marginal (CMg) es igual a cero, las cuales - y como se distingue en éste modelo - pueden predecir la cantidad a producir del competidor (ya sea q_i, q_j), basando en ello la maximización de sus beneficios.

Como se determinó anteriormente, el mercado funciona como un duopolio, entonces, la producción total del mercado (Q), será igual a “$q_i + q_j$”, además supondremos que la curva de demanda de la empresa *“i”* está denotada de la siguiente forma:

$$P_i = a - b\ (\ q_i + \ q_i)$$

Donde:

$$I = aq_i - bq_i^2 - bq_iq_j$$

$$IMg_i = a - 2bq_i - bq_j$$

Por consiguiente, despejando “q_i”, obtendremos la función de reacción de la empresa *“i”:*

$$q_i = \frac{a - bq_j}{2b}$$

Esta ecuación, determina la mejor elección de la empresa *“i”* en relación a la elección de la empresa *“j”,* y debido a que las empresas se comportan de la misma manera, la empresa *“j”*, también tendrá como función de reacción la misma estructura de la ecuación anterior.

Por tanto, al intersectarse las funciones de reacción de ambas empresas, lograremos encontrar el equilibrio de Cournot.

De este modo, Varian, Hal R. (1999), define que:

> “En el equilibrio de Cournot, cada empresa maximiza beneficios, dadas sus expectativas sobre la decisión de producción de la otra empresa y, además, esas expectativas se confirman: cada empresa elige el nivel óptimo de producción que la otra espera que produzca. En el equilibrio de Cournot, a ninguna de ella le resulta rentable variar se producción una vez que descubre la decisión que ha tomado realmente la otra”. (p.529)

1.2.Modelo de Bertrand

Para el matemático y economista Joseph Bertrand, el modelo de Cournot no coincide con lo que realmente un mercado oligopólico considera como variable de competencia, puesto que, mientras Cournot considera que las cantidades de producción del bien de una empresa son la variable estratégica, por su parte, Bertrand establece que las empresas en realidad, compiten mediante la fijación de precios, para comprender mejor, se explicará el modelo en el siguiente punto.

1.2.1. Definición del modelo.

Pindyck & Rubinfeld (2009), definen al modelo de Bertrand, como un "Modelo de oligopolio en el que las empresas producen un bien homogéneo, cada una considera fijo el precio de sus competidoras y todas deciden simultáneamente el precio que va a cobrar". (p.523). De este modo, el mercado es el que determina las cantidades para cada empresa.

Pero si bien es cierto, que las empresas compiten disminuyendo sus precios, de tal manera que puedan captar clientes de la competencia y así obtener mayores beneficios, llega un punto de equilibrio, en el cual no pueden cambiar sus precios, puesto que, ya no existe ningún incentivo y es ahí, donde se denota que el precio es igual al costo marginal $(P = CMg)$.

En el caso de un duopolio, para las empresas *"i, j"*, se precisa que la demanda de sus productos está en función de los precios que establezca cada empresa, es decir, $D = f(P_i, P_j)$, en donde se advierte que existen tres situaciones a las que se enfrentan mediante éste modelo:

- Cuando la empresa *"i"*, decide establecer un precio mayor a la empresa *"j"*, la demanda de su producto será igual a cero (Si $P_i > P_j$, entonces $D_i = 0$).

- Cuando la empresa *"i"*, establece el mismo precio que la empresa *"j"*, la demanda por su producto se dividirá el mercado. Si $P_i=P_j$, entonces $\frac{1}{2}[D(P_i)]$.
- Cuando la empresa *"i"*, establece un precio por debajo del precio de la empresa *"j"*, la demanda por su producto será igual a la demanda del mercado. Si $P_i < P_j$, entonces $D(P_i)$.

1.2.2. Supuestos.

Algunos de los supuestos básicos en este modelo de oligopolio serían, según lo mencionado por, (Vasquez, 2015), son:

- Los precios son las variables estratégicas para las empresas.
- Los precios son fijados de forma simultánea y no cooperativa.
- Barreras de entrada a nuevos productores.

Asimismo, Pereyra & Triunfo (s.f.); señalan que:

- Las empresas producen productos homogéneos, llegando a ser sustitutos perfectos por parte de los consumidores.
- De la misma manera, cada duopolista fijará un precio por debajo del de la empresa rival, lo que hará que éste último actúe de la misma forma.
- El resultado será que su precio se iguale al costo marginal, teniendo así una solución competitiva.

Igualmente, Rojas (2015) añade como supuesto adicional, la capacidad ilimitada de los productores para cubrir la demanda que enfrentan con costos unitarios constantes.

1.2.3. Hipótesis.

Fernández - Baca (2010), señala que las empresas en competencia fijarán un precio más bajo para lograr una mayor participación en el mercado, lo que posteriormente causaría una "guerra de precios", que acabará cuando las empresas obtengan ganancias extraordinarias.

Algo muy interesante que se observa en el modelo de Bertrand, es que "el precio de mercado no depende ni del número de empresas ni del tamaño relativo entre aquellas existentes, sino de las diferencias de costos entre las empresas que operan en el mercado" (García Carpio & Pérez – Reyes, 2012, p. 57).

Por ello, García Carpio & Pérez – Reyes (2012) señalan que, si se considera las restricciones de capacidad, ocasionaría que ambas empresas sean incapaces de cubrir todo el mercado por sí solas, considerándose la posibilidad e "(…) diferenciar productos entre ellas, lo cual reduce la intensidad de la competencia en precios, o se incluyen aspectos dinámicos en el juego (lo cual puede dar lugar a conductas como la "colusión tácita" y el sostenimiento de beneficios extraordinarios)" (p. 59).

1.2.4. Equilibrio con costes marginales constantes.

Dentro de este punto, podemos considerar la situación de dos competidores de igual eficiencia, con productos homogéneos y con costos constantes (Fernández - Baca, 2010). Sea la función de demanda del mercado "$Q = D(p)$", al mismo tiempo que, cada empresa posea un costo "c" por unidad producida; por tanto, la función de beneficio para dichas empresas será:

$$\Pi' \,(p_i\,, p_j\,) = (p_i - c)\; D_i\,(p_i\,, p_j\,), \forall\; i, j = 1, 2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Donde “D_i”, es la demanda del producto de la empresa *“i”,* que está definida por:

$$D_i\ (p_i\ , p_j\ ) = \begin{cases} D\ (p_i) & si \quad p_i < p_j \\ D\frac{(p_j)}{2} & si \quad p_i = p_j \\ 0 & si \quad p_i > p_j \end{cases} \qquad \ldots\ldots\ (2)$$

Entonces, se podría tener cuatro configuraciones posibles del equilibrio que se señalan a continuación (Cordano, 2015):

- $p_i > p_j > c$: No es equilibrio debido a que cualquier empresa gana reduciendo su precio.
- $p_i > p_j = c$: No es un equilibrio debido a que la empresa *“j”* gana incrementando ligeramente su precio.
- $p_i = p_j > c$: No es equilibrio porque cualquier empresa gana reduciendo su precio.
- $p_i = p_i = c$: Esta expresión sería el equilibrio de Nash, ninguna empresa tendrá incentivos para desviarse.

Logramos observar en (1), que las ganancias de dichas empresas están en función de los precios, debido a que, efectivamente, la variable de gran relevancia en este modelo son los precios. Por ello, la empresa podrá obtener ganancias positivas si el precio es mayor al costo marginal, además de que la cantidad vendida no sea nula, sin embargo, estas ganancias no pueden ser superiores a las ganancias monopólicas, $\pi^M = \max(p - c)\ D(p)$.

Por lo tanto, la ganancia de la industria se encontrará en el siguiente intervalo:

$$0 \leq \pi^1 + \pi^2 \leq \pi^M$$

Así, el único equilibrio de Nash en precios o el equilibrio de Bertrand, se definirá como aquel en el que cada empresa fijará su precio al nivel del costo marginal, dado que dichas empresas eligen los precios simultáneamente y de forma no cooperativa ,con el fin de maximizar sus ganancias.

Este equilibrio, está definido por la combinación de precios, (p_1^*, p_2^*) = (c, c), donde *"c"* es el costo marginal. Por tanto, no existirá otro equilibrio de Nash debido a que las empresas siempre encontrarán incentivos para modificar sus precios.

Por ejemplo: si $p_1 = p_2$ > c, de manera que, $q_1 = q_2 = \mathrm{D}(p_i)/2$, entonces cualquier rival tendrá el incentivo para aumentar su mercado bajando su precio. Ahora, si la empresa 1, fija un nuevo precio p_1', y $p_2 > p_1'$ > c, la empresa 1, lograría tener todo el mercado; entonces la empresa 2, quién tendría ganancias nulas; fijaría un nuevo precio "p_2'", la expresión anterior pasaría a ser $p_1' > p_2'$ > c. Para el siguiente periodo la empresa 1, tendría ganancias nulas, entonces volvería a bajar su precio por debajo del de la empresa 2.

Esta guerra por bajar los precios y tratar de acaparar todo el mercado, finalizará cuando ambas competidoras fijen precios idénticos al nivel de sus costos marginales, logrando que cada uno obtenga la mitad del mercado, $q_1 = q_2 = \mathrm{D}(c)/2$.

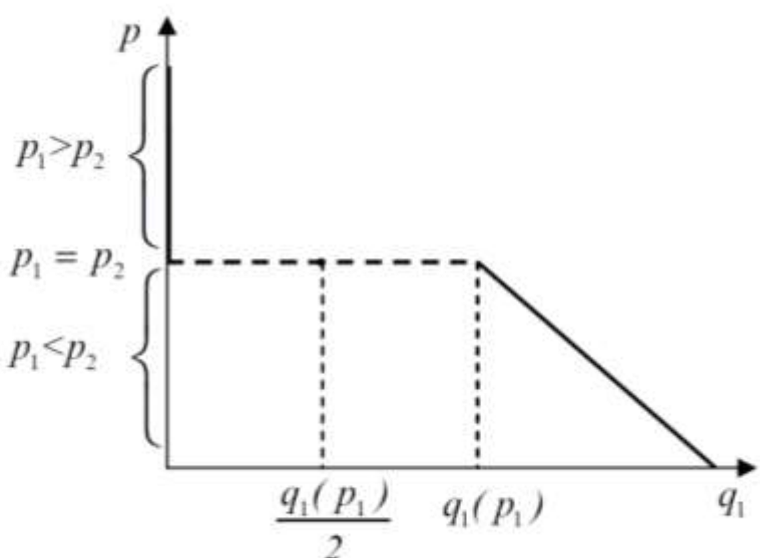


Figura 2. Demanda residual a la que se enfrenta la empresa 1 para distintos precios

Fuente: García & Pérez-Reyes (2012).

Para representar gráficamente lo anterior, consideremos el caso de un duopolio, donde si la empresa 2 vende a “p_2 emayor al de su competidor, su demanda será cero, la cual está señalada por la línea gruesa vertical. Si la empresa 1, vende al mismo precio que la empresa 2, entonces se repartirán el mercado en partes iguales (lo cual puede diferir completamente en la realidad). Por otra parte, si la empresa 1, vende a un precio menor respecto de la empresa 2, entonces abastecerá toda la demanda a “ p_1 " (García Carpio & Pérez-Reyes, 2012).

Para denotar la curva de reacción de las empresas que compiten, tenemos lo siguiente:

$$p_1\,(p_2) = \begin{cases} p^M & si\, p_2 > p^M \\ p_2 - \varepsilon & si\, c \leq p_2 \leq p^M \\ c & si\, p_2 < c \end{cases}$$

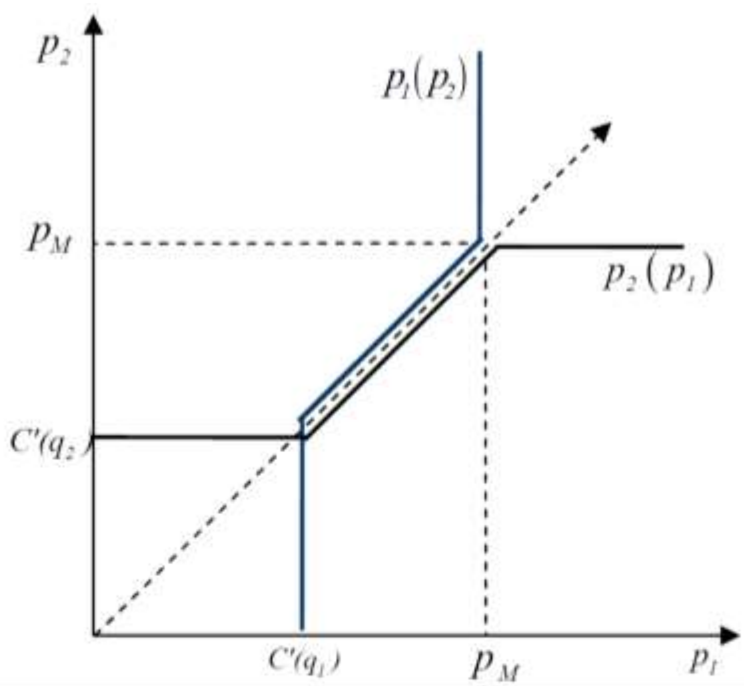


*Figura 3.*Curva de reacción de las empresas compitiendo a lo Bertrand
Fuente: García Carpio & Pérez-Reyes (2012).

En la figura 3, observamos que la empresa 1, cobrará un precio monopólico si la empresa 2, cobra un precio mayor que éste último, y lo mismo al costo marginal si la empresa 2 cobra por debajo de éste costo. Lo anterior, son los extremos de las funciones de reacción. Precisamente:

> "(…) para los puntos intermedios, cuando la oferta del competidor está entre costo marginal y el precio de monopolio, la mejor respuesta sería ofertar un precio ligeramente menor que la otra empresa, es decir a la izquierda de la recta de 45%" (García Carpio & Pérez - Reyes, 2012, p. 58)".

Pero lo expuesto en el párrafo anterior, podría cambiar si se toma en cuenta las restricciones de capacidad, por parte de las empresas, para cubrir la demanda a la que se enfrentan.

En el caso de "n" empresas, con igual eficiencia y con costos constantes, el equilibrio de Nash, estaría dado por la combinación de precios:

$$(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*) = (c, c, \ldots, c).$$

Por otra parte, un caso especial en este modelo, se da cuando las empresas tienen costos desiguales, manteniendo con ello, el supuesto de costos constantes (rendimientos de escala constante). De este modo, al existir "n" empresas, donde sus costos son $c_1 < c_2 \leq \ldots \leq c_n$, el equilibrio estaría dado cuando la empresa 1, acapare todo el mercado con un precio $p = c_2 - \varepsilon$, donde, $\varepsilon \rightarrow 0$, es decir, un precio ligeramente más bajo que el de su más cercana competidora, solo si "c_2", no supera el precio monopólico de una empresa con costo marginal "c_1". En consecuencia, predomina la empresa más eficiente, es decir, la empresa 1, la cual es parcialmente disciplinada por la presencia de la empresa 2.

En contraste con el equilibrio de Cournot, la industria queda en manos de la empresa con costos inferiores, pero en semejanza con el equilibrio de Cournot y a diferencia del equilibrio de Bertrand, el precio a pagar por los consumidores será superior al costo marginal.

Precisamente, se podría visualizar la solución de Bertrand, como la solución del equilibrio en una subasta, donde cada empresa propone su precio en sobre cerrado, comprometiéndose a acaparar todo el mercado con dicho precio , por lo tanto, gana aquella empresa que proponga el precio más bajo. Se podría decir que éste, sería un juego con un único movimiento. Este deseo de ganar la subasta, conlleva a que las empresas ofrezcan el pecio más bajo en comparación con su rival, lo cual corresponderá a su costo marginal solo cuando los costos son idénticos.

Por otra parte, para el caso de las empresas con costos desiguales, la empresa que tenga los costos más bajos, será la que gane, pero, el precio a pagar será ligeramente menor al de la segunda empresa más eficiente.

1.2.5. Equilibrio con costes marginales no constantes.

Este equilibrio, es un planteamiento realizado por Francis Edgeworth, economista británico, que introdujo costos marginales no constantes en el modelo de Bertrand, generando una versión ampliada del modelo.

Para la formulación de este equilibrio, supondremos la existencia de dos empresas oferentes,(i, j), las cuales, presentarán limitaciones en su capacidad instalada así como en su producción, (q_i, q_j), es decir, no podrán cubrir toda la demanda del mercado. Asimismo, ambas empresas, tienen costos marginales iguales a "Cmg" , hasta el punto donde termina su capacidad productiva, con lo cual, posteriormente estos costos tienden al infinito.

Por ello, cuando el mercado se encuentra en equilibrio su demanda se expresa como, "$D(P_e) = q_i + q_j$", donde la cantidad ofertada cubre toda la demanda. Este equilibrio tiene diferentes comportamientos según la cantidad de producción, observemos:

a) Cuando las cantidades de producción son suficientemente pequeñas.

En esta situación, las empresas emplean toda su capacidad instalada para producir una cantidad limitada de productos vendidos a "P_e", empleando los supuestos anteriores, las demandas residuales de cada empresa están expresadas de la siguiente manera:

$$d_i = D(P_m) - q_j \quad (*)$$

- Demanda de la empresa "i", a distintos precios después que la empresa "j" abasteció el mercado.

$$d_j = D(P_m) - q_i \quad (**)$$

- Demanda de la empresa "j" a distintos precios después que la empresa "i" abasteció el mercado.

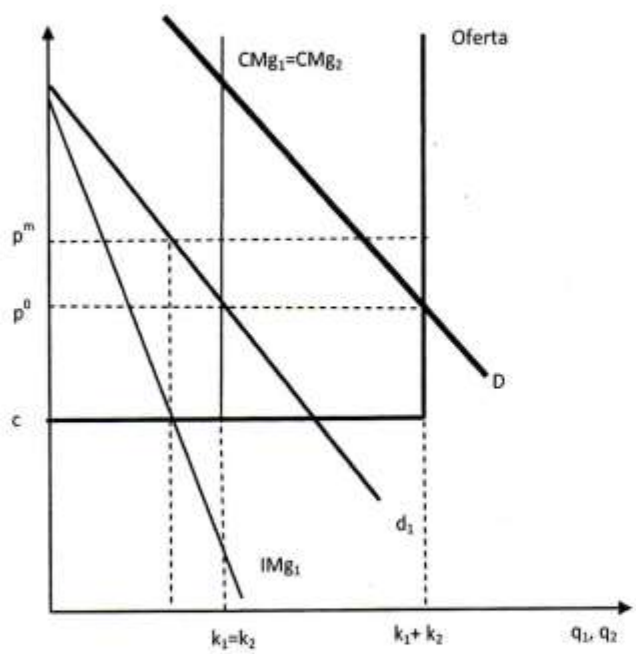


Figura 4: Equilibrio de Bertrand cuando las capacidades productivas son relativamente grandes

Fuente: Fernández – Baca (2010)

Se ha determinado la introducción de la figura 4, con la finalidad de distinguir fácilmente el comportamiento de la curva de costo marginal obtenida a partir de la curva de demanda residual, cabe mencionar que dentro del gráfico 4, las empresas (i, j), estarán bajo la denominación de empresa (1,2), respectivamente.

Asimismo, podemos observar que la empresa 1, (i), obtiene $Img_1 > Cmg_1$, vendiendo k_1 (q_i) unidades a "$P^o(P_e)$", con lo cual, se origina que dichas empresas no tengan incentivos para cambiar el precio, habiendo sin embargo, empleando su máxima capacidad de producción. Por ello, resultaría conveniente para la empresa aumentar el precio, siempre y cuando el ingreso que sacrifica por dejar de vender, es mayor al costo que ahorra por dejar de producir.

b) Cuando las cantidades de producción son relativamente grandes.

Este tipo de equilibrio inestable, denominado "Ciclo de precios de Edgeworth", es la nominación que se le otorga, debido a que, los precios no se mantienen fijos, sino que constantemente oscilan entre un rango. En este caso, las empresas percibirán, $Img < Cmg$, siendo beneficioso para ambas empresas, establecer un precio superior (P_s), es decir, reducir sus ventas hasta el punto en que la curva de "Img" y "Cmg" se igualen.

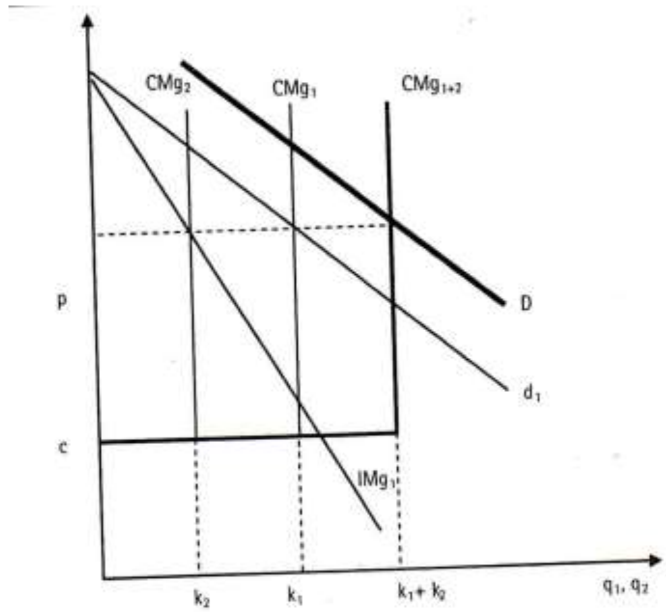


Figura 5. Equilibrio de Bertrand cuando las capacidades productivas son pequeñas
Fuente: Fernández – Baca (2010).

Podemos advertir en la figura 5, que hay existencia de una demanda insatisfecha en consecuencia de un “P^m (P_s)”, al que las empresas venden sus productos, provocando con ello, que las empresas actúen individualmente y que con el objetivo de obtener más clientes, decidan aumentar su producción y reducir sus precios.

Consecuentemente, éstos disminuyen hasta llegar al equilibrio inicial “$P^o(P_e)$”, una vez que se encuentra en este punto, tienden nuevamente a subirlo hasta alcanzar “P^m (P_s)”; así pues, esto sucedería constantemente siendo “$P^o(P_e)$” y “P^m (P_s)”, el rango en el que oscila el precio.

1.2.6. Equilibrio con bienes diferenciados.

A diferencia del modelo convencional de Bertrand, en este caso, los productos ofrecidos en el mercado, presentarán diferentes características, tales como forma, envase, diseño, etc. Es decir, no son sustitutos perfectos entre sí, lo cual, permitirá al fabricante, distinguir su producto del resto.

Para simplificar el modelo, supondremos nuevamente la existencia de dos empresas (i, j), las cuales ofrecen sus productos a un "P_i" y "P_J", respectivamente, presentando las siguientes funciones de demanda:

$$q_i = \propto_i - \beta_i P_i + \gamma P_J$$

$$q_J = \propto_J + \gamma P_J - \beta_J P_J$$

Además, las empresas utilizan sus precios como variables estratégicas con la finalidad de maximizar sus ganancias, presentando costos iguales a "Cmg", siendo sus funciones de beneficio las especificadas en la parte superior del texto, con lo cual, las empresas toman como dado el precio de su competidora:

$$Max.\pi_i(P_i, P_J) = \left(\propto_i - \beta_i P_i + \gamma P_J\right) - (P_i - Cmg)$$

$$Max.\pi_j(P_i, P_J) = \left(\propto_J + \gamma P_J - \beta_J P_J\right) - (P_j - Cmg)$$

Para maximizar estos beneficios, aplicamos condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial \pi_i(P_i, P_J)}{\partial P_i} = \alpha_i + \beta_i Cmg - 2\beta_i P_i + \gamma P_j = 0$$

$$\frac{\partial \pi_j(P_i, P_J)}{\partial P_j} = \alpha_i + \beta_j Cmg + \gamma P_i - 2\beta_j P_j = 0$$

De este modo, despejamos en función de "P_i, P_J", obteniendo las siguientes funciones de reacción:

$$R_i(P_j) = \frac{Cmg}{2} + \frac{(\alpha_i + \gamma P_j)}{2\beta_i}$$

$$R_j(P_i) = \frac{Cmg}{2} + \frac{(\alpha_j + \gamma P_i)}{2\beta_j}$$

Como podemos observar, las ecuaciones de las curvas de reacción son positivas, lo que significa que presentan una relación directa, es decir, si una de las empresas decide disminuir su precio, la otra también actuará de la misma manera, con la intención de no perder la parte del mercado que tiene bajo su poder.

1.2.7. Soluciones a la paradoja de Bertrand.

La paradoja de Bertrand plantea que resulta suficiente la existencia de dos empresas para llegar a un equilibrio competitivo, es decir, la existencia de dos empresas es suficiente para eliminar el poder de mercado y los beneficios dentro de él, como producto de que los precios sean iguales a los costos marginales, $(P = Cmg)$. La solución a esta paradoja, plantea tres supuestos básicos:

a) Solución de Edgeworth.

Edgeworth, plantea una solución a la paradoja de Bertrand, a través de la introducción de restricciones de capacidad, lo que significa, que ninguna de las empresas puede vender al mercado más de lo que produce, por lo cual, resulta imposible que una de las empresas abastezca al mercado en su totalidad.

Para mejor entendimiento, imaginemos a dos empresas,(i, j), donde ambas ofrecen su capacidad plena, siendo así que, la empresa "i", muestra $q_i < D_t$; en esta situación ¿$P_e = Cmg,$ sigue siendo un equilibrio?

Si por ejemplo la empresa"j" , decide aumentar su precio, entonces la empresa "i", enfrentaría la demanda total de mercado, a la cual no puede abastecer completamente $(q_i < D_t)$, por lo que algunos consumidores recurrirán a la empresa "j", a pesar de que tenga un precio mayor, trayendo $\pi > 0$, debido a una demanda residual mayor a cero, así como $(P_i < Cmg_i)$. Dicho esto, puede concluirse que el modelo de Bertrand, no es una solución de equilibrio.

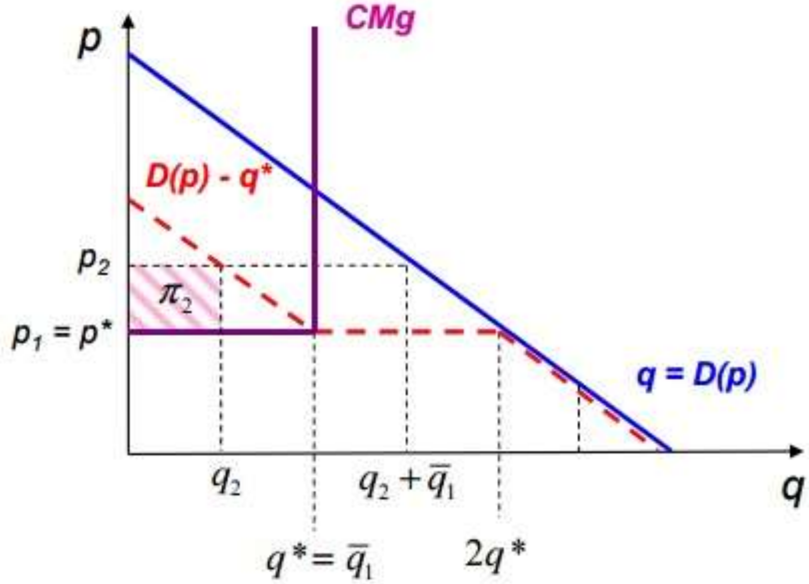


Figura 6. Explicación gráfica de la solución Edgeworth a la Paradoja de Bertrand – Restricciones de capacidad

Fuente: Vásquez (2015)

b) Dimensión Temporal.

Este planteamiento, determina que los jugadores juagarán repetidas veces y tendrán posibilidad de reacción, dejando de lado el supuesto crucial de la Paradoja de Bertrand en el que solo se efectúa una sola jugada.

Por ello, (Vásquez, 2015) afirma: "no es claro que la empresa se beneficie bajando su precio por debajo del de su competidora. Tendría que evaluar sus ganancias a corto plazo (el crecimiento de su mercado) con las perdidas debido a la guerra de precios” (p.14).

Analizaremos entonces ¿Por qué $P_i = P_j > Cmg$, no es un equilibrio?

Supongamos que la empresa “i”, decide disminuir su precio, beneficiándose de ello y atrayendo todo el mercado, como el supuesto indica que habrá una sola jugada, la empresa “j”, perderá la parte del mercado que tenía bajo su poder, obteniendo beneficios nulos ($\pi = 0$).

Como no es seguro que la empresa “i” se beneficie después de haber establecido un precio menor al de su competidora ($P_i < P_j$), ésta tendría que evaluar sus ganancias en el corto plazo y compararlas con la pérdida de productos, como consecuencia natural de la guerra de precios.

c) Diferenciación del producto.

La guerra de precios en el Modelo de Bertrand, puede ser disipada si los productos ofrecidos en el mercado contienen diferencias en sus características, lo que produciría que las empresas no fijen “$P_i, P_j = Cmg$”.

> Levantemos el supuesto de productos perfectamente sustitutos, si los productos se diferencian ligeramente, la competencia e los precios pierde intensidad (se relaja) por lo que la presión competitiva entre las firmas se reduce → aparecen diferenciales de precios. Ejemplo: diferenciación horizontal (localización espacial, monopolios locales). (Vásquez, 2015, p.14).

1.3.Cournot frente Bertrand

Hay distintas opiniones respecto a ¿cuál de los modelos de duopolio sería el adecuado para un mercado real?, para poder responder a la pregunta planteada anteriormente, es necesario, definir cuáles son las estrategias de cada modelo - cantidades o precios- que se encuentran al alcance de las empresas.

En el mercado real, una de las variables estratégicas elegidas por las empresas son cantidades que se producirán y con ello, seguidamente, se determina precio.

> En otras palabras podemos encontrar dos etapas en el que las empresas seleccionan primero, de una manera simultánea, la capacidad que podrá producir, y luego, conociendo la capacidad de sus competidores, fijará simultáneamente los precios. Esto nos quiere decir que primero habrá una competencia mediante cantidades y luego una competencia mediante precios (Fernández - Baca, 2010, p. 320).

Esto, nos permite dilucidar que la competencia a través de los precios es la etapa final del proceso de competencia de las cantidades que se producirán, puesto que, las empresas tomarán decisiones sobre la capacidad de producción, y finalmente se enfrentarán entre sí en el mercado.

De este modo, para tomar decisiones sobre el intercambio y la cantidad que se producirá en el mercado, el modelo oligopólico de Bertrand, nos indica que, éste se adecua perfectamente cuando las empresas no tienen restricciones en su producción. En contraparte a ello, el modelo oligopólico de Cournot, se manifiesta como el más adecuado para observar cómo compiten las empresas al momento de tomar sus decisiones en cuanto éstas irán a producir.

Para poder elegir cuál de las teorías es la adecuada, deberíamos comparar el supuesto que nos propone la teoría con el comportamiento del mercado, para que haya una comparación justa entre ambos modelos, se debe salir del marco de los juegos estáticos y pasar a un análisis dinámico que considere la conjeturas de cada jugador respecto a las reacciones futuras de sus competidores. (Fernández - Baca, 2010, p. 321).

CAPÍTULO II

COMPETENCIA EN DOS ETAPAS

Competencia en dos etapas

2.1.Modelo de Stackelberg

2.1.1. Definición del modelo.

Este modelo es denominado como el modelo de Stackelberg, en honor al primer economista que mediante un estudio de la industria, pudo advertir que las empresas competían en cantidades pero jerárquicamente, es decir que, existía una empresa líder (L) y una empresa seguidora (S). En este contexto, se describe que la empresa seguidora espera que la empresa líder tome las decisiones del nivel de producción, para luego acatarla y en base a ello, lograr maximizar sus ganancias, mientras que, la empresa líder conoce cómo se comporta la empresa seguidora, incorporando esta información en la elección de su nivel de producción.

Tarziján M. & Paredes M. (2006), aseguran que:

> Muchas decisiones se toman secuencialmente, esto es, uno de los competidores decide qué hacer después de haber observado la decisión del otro. Por ejemplo, si una empresa es líder del mercado o se ha instalado antes que otra firma, esto le permite tomar decisiones con antelación. (p.208)

Este modelo es muy semejante al modelo de Cournot, sin embargo, a diferencia de este, el modelo de Stackelberg está caracterizado por analizar el comportamiento secuencial de las firmas, mientras que, en el modelo de Cournot, el comportamiento de las firmas es considerado simultáneo.

Esto, se produce debido a que en el primer modelo no existen diferencias, ni ventajas notables para ni una de las empresas, mientras que, en el segundo modelo, una de ellas aprovecha la desigualdad, obteniendo así, el dominio sobre las demás otras.

2.1.2. Supuestos.

Para el desarrollo de este modelo, es necesario, resaltar las siguientes suposiciones:

- Las empresas deben contar con productos homogéneos.
- La estrategia de mercado, se basará en el nivel de producción a elegir.
- El modelo es un duopolio, en donde existirán dos empresas una líder y una empresa seguidora.
- Existencia de una empresa con dominio sobre las otras, convirtiéndose así, en la líder y siendo la primera en decidir el nivel de producción.

2.1.3. El problema del seguidor.

Este problema, determina que el seguidor desea maximizar sus beneficios:

$$\pi_2 = p(q_1 + q_2)q_2 - C_2(q_2)$$

Las ganancias de la empresa seguidora estarán en función del nivel de producción de la empresa líder, la cual, ya está predeterminada por la empresa seguidora, denotándola, por consiguiente, como una constante.

Por ello, la empresa seguidora anhela un nivel de producción donde se muestre la igualdad entre el Ingreso Marginal y el Costo Marginal; por tanto obtendremos que:

$$IMg_2 = CMg_2$$

$$p(q_1 + q_2)q_2 = C_2(q_2)$$

Donde:

$$\frac{\partial p}{\partial q_2} = [(\partial q_2) \times p(q_1 + q_2) + \partial p(q_1 + q_2) \times q_2] = CMg_2$$

$$\frac{\partial p}{\partial q_2} = [p(q_1 + q_2) + \partial p(q_1 + q_2) \times q_2] - CMg_2$$

Una interpretación adecuada para el ingreso marginal es, que a medida que el nivel de producción aumenta, aumentará con ello los ingresos, determinado esencialmente, por el incremento que acaecerá de las ventas en el mercado, sin embargo, esto tiene un efecto negativo en los precios, puesto que los presionará a la baja, reduciendo así, el nivel de ganancias de la empresa.

Además, podemos observar que la maximización de las ganancias de la empresa seguidora dependen del nivel de producción elegido por la empresa líder, lo cual puede ser expresado como:

$$q_2 = f(q_1)$$

Abreviando esto, podemos decir que la producción de la empresa 2, (S), estará en función a la producción dada por la empresa 1, (L); a la cual, se le denomina función de reacción.

Para crear una curva de reacción, asumiremos una demanda lineal, con una función de la demanda inversa que adopta la siguiente forma:

$$p(q_1 + q_2) = (a - b(q_1 + q_2))$$

Asumiendo que los costos serán cero. La función de beneficio estaría dada por:

$$\pi_2(q_1 + q_2) = [a - b(q_1 + q_2)] \times q_2$$

Por lo tanto:

$$\pi_2(q_1 + q_2) = aq_2 - b(q_1 q_2) \times bq_2^2$$

De la expresión anterior, se pueden desprender líneas isobeneficios, las cuales, representan combinaciones de “q_1” y “q_2”, satisfaciendo la siguiente fórmula:

$$\overline{\pi_2} = aq_2 - b(q_1q_2) \times bq_2^2$$

Gráficamente, esto puede expresarse como:

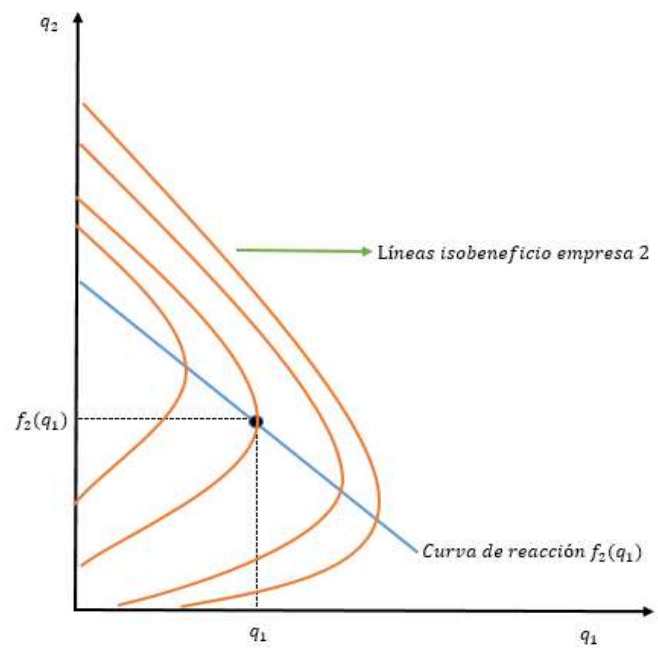


Figura 7. Curva de reacción.
Fuente: Varian (1999)

En la figura 7, podemos observar la curva de reacción, la cual, muestra el nivel de producción que maximiza los beneficios de la empresa 2 ,(S), frente al nivel de producción de la empresa 1 ,(L), es decir, cuando la empresa 1 ,(L), decide producir en “q_1”, la empresa 2, (S) buscará producir en un punto que alcance la línea de isobeneficio, en este caso, determinada por, $f_2(q_1)$.

Asimismo, podemos observar que las curvas situadas más a la izquierda producen un mayor beneficio a la empresa 2, (S), por tanto, podemos asegurar que mientras menor sea la producción de la empresa 1, (L), mayor será los beneficios de la empresa 2, (S).

Con lo cual, la curva de reacción está representada como la línea recta de la figura. Matemáticamente, esta puede obtenerse de la siguiente manera:

$$I = [a - b(q_1 + q_2)] \times q_2$$

$$IMg_2(q_1, q_2) = aq_2 - bq_1q_2 - q_2^2$$

$$IMg_2(q_1, q_2) = a - bq_1 - 2bq_2$$

Asumiendo que el costo es cero, se concluirá que el costo marginal también será cero.

$$IMg_2 = CMg_2$$

$$a - bq_1 - 2bq_2 = 0$$

$$q_2 = \frac{a - bq_1}{2b} \longrightarrow \qquad \text{Función de reacción}$$

2.1.4. El problema del líder.

Así como la empresa seguidora para tomar la decisión del nivel de producción se basa en el nivel de producción de la empresa líder, esta tendrá como referencia la conducta que tomará la empresa seguidora. Varian (1999), asegura que:

> Probablemente éste también es consciente de que sus medidas influyen en el nivel de producción que elige el seguidor. La función de reacción, $f_2(q_1)$ resume esta relación. Por lo tanto, al elegir su nivel de producción debe darse cuenta de la influencia que ejerce en el seguidor. (p.522).

El problema de maximización del beneficio, será entonces:

$$\pi_{1(}q_1, q_2) = p(q_1 + q_2)q_1 - C_1(q_1)$$

Esta ecuación sujeta a: $f_2(q_2)$

Nos permite reemplazar, obteniendo que:

$$\pi_{1(}q_1, q_2) = p(q_1 + f_2(q_1))q_1 - C_1(q_1)$$

Con lo cual, el líder discierne que la producción total de la industria estará resuelta por su producción y la del seguidor es decir, $q_1 + f_2(q_2)$, reconociendo con ello, la influencia que tiene sobre el seguidor.

Esto se refleja en la función de reacción obtenida en el problema del seguidor:

$$f_2(q_1) = q_2 = \frac{a - bq_1}{2b}$$

Asimismo, considerando que los costos son cero, entonces, los beneficios del líder serán:

$$\pi_{1(}q_1, q_2) = p(q_1 + q_2)q_1 - C_1(q_1)$$

Asumiendo esta igualdad: $p(q_1 + q_2) = (a - b(q_1 + q_2))$, tendremos que:

$$\pi_{1(}q_1, q_2) = (a - b(q_1 + q_2))\, q_1$$

$$\pi_{1(}q_1, q_2) = aq_1 - bq_1^2 - \mathrm{b}q_1q_2$$

Por lo tanto, la producción del seguidor dependerá de la del líder, a través de la función de reacción $f_2(q_1) = q_2$, por cual, tendremos que:

$$\pi_{1(}q_1, q_2) = aq_1 - bq_1^2 - \mathrm{b}q_1\left(\frac{a - bq_1}{2b}\right)$$

$$\pi_{1(}q_1, q_2) = aq_1 - bq_1^2 - \frac{abq_1 + b^2q_1^2}{2b}$$

$$\pi_{1(}q_1, q_2) = \frac{a}{2}q_1 - \frac{b}{2}q_1^2$$

De esta manera, el ingreso marginal es:

$$IMg = \partial\pi_{1(}q_1, q_2)$$

$$IMg = \frac{a}{2} - bq_1$$

$$IMg = CMg$$

$$\frac{a}{2} - bq_1 = 0$$

$$q_1^* = \frac{a}{2b}$$

Hallando el valor de producción tendríamos:

$$q_2^* = \frac{a - bq_1^*}{2b}$$

$$q_2^* = \frac{a - b\left(\frac{a}{2b}\right)}{2b}$$

$$q_2^* = \frac{a}{4b}$$

Por lo tanto de las ecuaciones definidas tendremos que la producción total es:

$$Q = q_1^* + q_2^*$$

$$Q = \frac{a}{2b} + \frac{a}{4b}$$

$$Q = \frac{3a}{4b}$$

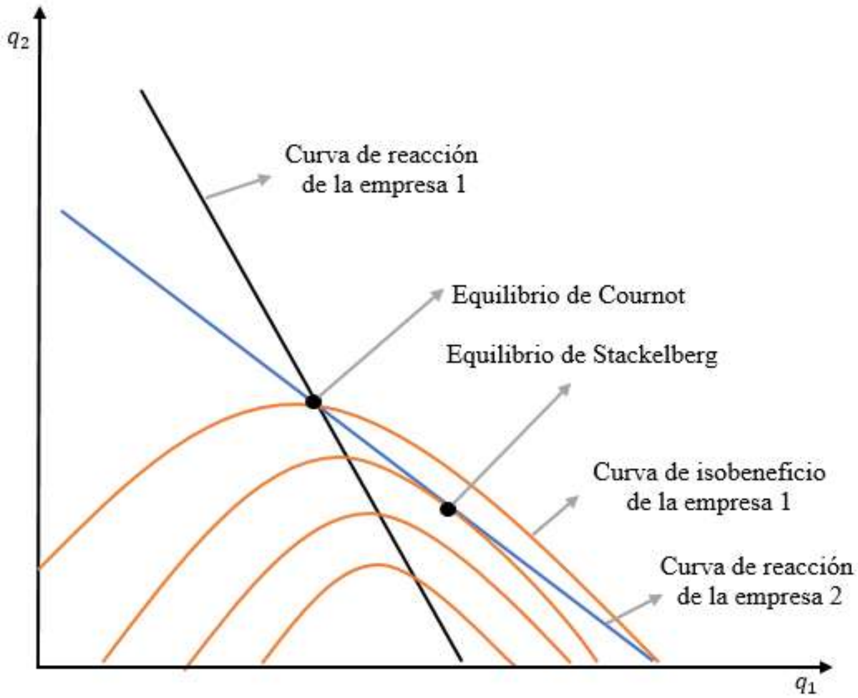


Figura 8. Curvas de reacción de la empresa 1 y 2.

Fuente: Varian (1999)

En la figura anterior, podemos distinguir las curvas de reacción de la empresa 1 y 2, las cuales forman el punto de equilibrio de Cournot. Asimismo, se puede apreciar el punto de equilibrio Stackelberg y la curva de isobeneficio de la empresa 1, la cual, tiene la misma forma de las curvas de isobeneficio de la empresa 2, pero rotadas en 90°.

De este modo, la empresa 1, obtiene más beneficios en la curva de isobeneficio más baja, ya que, a medida que la empresa 2, reduzca su nivel de producción, mayor será el precio de esta y mayor el beneficio obtenido.

2.1.5. Equilibrio de una empresa líder y una seguidora.

La evolución de las industrias oligopólicas, depende, esencialmente, de dos factores determinantes (competencia estratégica y rivalidad). De este modo, la empresa presupone las posibles reacciones de su competidora, ante una acción propia y además, puede calcular el efecto de esta respuesta sobre sus beneficios y el equilibrio del mercado.

De este modo, Stackelberg decide introducir en este comportamiento secuencial, la existencia de jerarquías entre empresas; dando origen así, a la empresa líder, quien será la primera en decidir su nivel de producción, prediciendo la respuesta de su seguidora y la empresa seguidora, será aquella que maximizará sus beneficios a partir del nivel de producción elegido por la empresa líder.

Así pues, supondremos la existencia de dos empresas, la empresa " i", denominada empresa líder y la empresa "j", denominada empresa seguidora, respectivamente. Ambas poseen costos idénticos entre sí e iguales a "c", además la demanda total de mercado es igual a la suma de demandad individuales, denotada como:

$$(Q = q_i + q_j)$$

Pues bien, empecemos con la empresa "i", ésta, presenta una demanda, expresada como, $P = a - bq_i - bq_j$, y decide, además, su nivel de producción después de predecir la respuesta de la empresa "j". Así, el nivel de producción que maximice los beneficios de la empresa líder, estará determinado por la función de reacción de Cournot de la empresa seguidora.

$$R_j;\ q_j = \frac{j - q_i}{2}$$

De este modo, remplazamos "R_j" en la función de demanda, obteniendo:

$$P = a - bq_i - b\left(\frac{j - q_i}{2}\right)$$

Usando la definición, $S(a = c + sb)$, (García Carpio & Pérez-Reyes, 2012).

Obtenemos la siguiente ecuación:

$$P = c + bq_i - \frac{bJ}{2} - \frac{bq_i}{2}$$

Mediante la cual, obtendremos ingresos expresados a continuación:

$$\mathrm{I_i} = \left(\mathrm{c} + \frac{\mathrm{bj - bq_i}}{2}\right) * \mathrm{q_i}$$

$$I_i = q_i c + {q_i}^{-2} - ({q_i}^{-2})^{-2}$$

La empresa "i", maximiza sus beneficios, cuando su nivel de producción, se encuentre ubicado en el punto donde $Img_i = c$.

Por ello, mediante la aplicación de condiciones de primer orden, obtenemos que:

$$Img_i = c + \frac{bj}{2} - bq_i\ ,\ Img_i = c$$

$$c + \frac{bj}{2} - bq_i = c$$

$$q_i = \frac{j}{2}$$

Esto expresa que la empresa líder (i), producirá el doble que su seguidora (j), obteniendo beneficios iguales a $\pi_i = 2\pi_j$, como resultado de la ventaja de ser el primero en moverse.

2.1.6. Índice de Lerner en el modelo de Stackelberg.

Utilizando los supuestos explicados anteriormente, la empresa líder maximiza beneficios de la siguiente forma.

Aplicando condiciones de primer orden, obtenemos que:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = \frac{\partial P(Q)}{\partial Q} * \frac{\partial Q}{\partial q_i} + P(Q) - \frac{\partial c(q_i)}{\partial q_i} = 0$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = \frac{\partial P(Q)}{\partial Q} * \left[\frac{\partial q_i}{\partial q_i} + \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right] q_i + P(Q) + \ P(Q) = \frac{\partial c(q_i)}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial P(Q)}{\partial Q} * \left[1 + \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right] q_i + P(Q) = \frac{\partial c(q_i)}{\partial q_i}$$

Seguidamente, procedemos a multiplicar y dividir por, "Q/P" :

$$\frac{\partial P(Q)}{\partial Q} * \frac{Q}{P} * \frac{P}{Q}\left[1 + \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right] q_i + P(Q) = \frac{\partial c(q_i)}{\partial q_i}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{Q}{P} q_i + \frac{P}{Q}\frac{\partial q_j}{\partial q_i} q_i\right] + P(Q) = c'(q_i)$$

Asimismo, "$S_{j=\frac{q_j}{Q}}$", representa la participación de la empresa líder en el mercado:

$$P(Q) - c'(q_i) = \ -\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{Q}{P} q_i + \frac{P}{Q}\frac{\partial q_j}{\partial q_i} q_i\right]$$

$$P(Q) - c'(q_i) = \ -\frac{P}{\varepsilon}\left[\frac{q_i}{P} + \frac{q_i}{Q}\frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right]$$

Finalmente, obtenemos como resultado al índice de Lerner de la empresa líder, bajo la forma:

$$IL_i = \frac{P(Q) - c'(q_i)}{P} = \ \frac{1}{\varepsilon}\left[S_i + S_I \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right]$$

$$IL_i = -\frac{S_i\left(1 + \frac{\partial q_j}{\partial q_i}\right)}{\varepsilon} - \frac{S_i\left(1 + \frac{\partial R_j}{\partial q_i}\right)}{\varepsilon}$$

$$IL_i = -\frac{S_i}{\varepsilon}\left[1 - \frac{\partial R_j}{\partial q_i}\right]$$

2.2.Modelo de rivalidad en dos etapas de Kreps y Scheinkman

Durante muchos años, se ha discutido sobre la rivalidad generada entre las empresas oligopólicas, respecto de los precios (Bertrand) o la cantidad a producir (Cournot). Para el año 1983, los economistas David Kreps y José Scheinkman[4], especificaron una extensión de los modelos duopolistas de Cournot y Bertrand, demostrando la existencia de un modelo que pudiese explicar las conjeturas reales del mercado y que fuese semejante a la realidad.

2.2.1. Definición del modelo.

En este contexto, los economistas Kreps y Scheinkman, desarrollaron un modelo compuesto por dos etapas. La primera etapa de este modelo, permite la elección de la cantidad a producir por parte de las empresas, lo que conlleva, consecuentemente, a la fijación de precios en la segunda etapa.

Por ello, será la maximización de las ganancias el resultado del modelo en la primera etapa, el mismo que, será semejante al equilibrio de Nash- Cournot. Seguidamente, también se determinará la cantidad a producir, tomando en cuenta el resultado del equilibrio, conllevando así, a que se determinen los precios.

[4] Kreps, D. & Scheinkman, J. (1983). *Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes.* The Bell Journal of Economics, Vol. 14, No. 2 (Autumn, 1983), pp. 326-337. En este trabajo, ambos investigadores establecen que cada una de las empresas realiza la elección de su capacidad en forma secreta, por lo cual, una vez hecha la elección, se procederá a escoger el precio de oferta.

> La capacidad se establece en la primera etapa por dos productores. La demanda es entonces determinada por la competencia de precios similar a Bertrand, y los productores toman el costo cero frente a las restricciones de capacidad generadas por las decisiones de la etapa inicial (Stephen, 2001, p. 4)[5].

Para encontrar el equilibrio de este modelo de dos etapas, se determina que en la primera etapa, la empresa seleccionará la capacidad de producción, siendo suficiente para los resultados de equilibrio de Cournot. De esta forma, con esta producción seleccionada, se logrará escoger el precio.

Por ello, Fernández - Baca (2010), afirma que si tenemos un racionamiento eficaz obtendremos como resultado que "este juego en dos etapas es equivalente a un juego en una sola etapa donde las empresas seleccionan las cantidades que van a lanzar al mercado, y luego existe un árbitro que determina el precio que equilibra el mercado" (p.322).

Asimismo, Pérez & Espejo (2006), definen al modelo de Kreps y Scheinkman, como un juego en dos periodos, denominado "juegos dinámico finito", consistente en dos etapas.

• En la primera etapa, las empresas determinan su capacidad productiva (tomando una decisión de mediano plazo bajo el nivel de reversibilidad de la inversión).

• En la segunda etapa, las empresas rivalizan los precios, proporcionando una capacidad determinada en el primer periodo (en esta etapa, es ésta, una decisión de corto plazo, que permite que los precios se ajusten con mayor velocidad)

Para obtener una condición optima en la segunda etapa, es necesaria, una inducción hacia atrás, en la cual, se definirá cuál de los subjuegos alcanzará la maximización de sus

[5] Stephen (2001): "Capacity is set in the first stage by two producers. Demand is then determined by Bertrand-like price competition, and production takers place at zero cost to capacity constraints generated by the first-stage decisions". Traducción propia

beneficios, permitiendo, además, la demostración de los precios resultantes en un modelo de equilibrio de Cournot.

De igual forma, cuando existen restricciones de capacidad, se suaviza la competencia. Los precios de equilibrio no son tan bajos, pesto que, superan a los costos marginales, generando la obtención de beneficios positivos en las empresas. Como menciona, García Carpio & Pérez - Reyes (2012): "las empresas evitan acumular demasiada capacidad para suavizar la competencia en precios, es como un compromiso de que no van a bajar mucho los precios." (p.5).

Esto demuestra, la existencia de una sincronización donde se reconoce que la inversión en capacidad de toma de tiempo no puede cambiar rápidamente los precios.

2.2.2. Supuestos.

Fernández - Baca (2010), plantea que: "el capital es una variable de ajuste lento, mientras que los precios se pueden ajustar rápidamente" (p. 319). Esto, nos conduce a un juego de dos etapas, en el cual, la empresa seleccionará primero la capacidad que producirá simultáneamente, de este modo, podrá conocer a sus competidores, y con ello, poder fijar simultáneamente los precios. Así, se puede determinar que primero se competirá entre cantidades producidas y posteriormente entre precios.

De la misma forma, Tarziján M. & Paredes M. (2006), añade – dentro de los supuestos- que "(…) las firmas cobran precios iguales y terminan con un nivel de capacidad equivalente a la cantidad que hubieran elegido bajo Cournot" (p. 212). Esta contribución por parte del autor, nos permite deducir que este juego de dos etapas, tendrá como resultado un equilibrio semejante al de Cournot en una primera etapa. De igual manera, la decisión de producción (largo plazo), se producirá antes de la toma de decisión de los precios (corto plazo).

El modelo de Kreps y Scheinkman destaca las situaciones en las que cada modelo es apropiado. Sugiere que el modelo de Cournot es apropiado cuando las empresas tienen limitaciones de capacidad y las inversiones en capacidad son lentas. Por otra parte, el modelo de Bertrand podría ser apropiado en situaciones donde hay rendimientos constantes a escala y las empresas no son limitadas por la capacidad. [6] (Church & Ware, 2000, p.6).

En resumen, podríamos expresar que el modelo de Cournot, se aplicaría en el largo plazo de una etapa, con el fin de poder reconocer que las inversiones en su capacidad de producción, ya que es ésta lenta, además, los incentivos para fijar los precios son más agresivos en la segunda etapa. Por lo tanto, las empresas limitan sus inversiones para moderar la competencia de precios en la segunda etapa.

Conjuntamente, podríamos agregar que en el modelo de Kreps y Scheinkman, éstos suponen que el producto de dos empresas rivales es homogéneo.

Partiendo de los supuestos anteriores expuestos, se concluye que dentro de los principales supuestos, se encuentran:

• El capital es una variable de ajuste lento.

• Los precios pueden ajustarse rápidamente.

• El modelo, como tal, consiste en un juego de dos etapas: en la primera etapa, se tomará la decisión de la producción (largo plazo) y en la segunda etapa, se producirá antes de la toma de decisión de los precios (corto plazo).

• La capacidad de producción de la empresa es limitada.

2.2.3. Hipótesis.

[6] Church & Ware (2000): "The model of Kreps and Scheinkman highlights the situations under which each model is appropriate. It suggests that the Cournot model is appropriate when firms are capacity constrained and investments in capacity are sluggish. On the other hand, the Bertrand model might be appropriate in situations where there are constant returns to scale and firms are not capacity constrained". Traducción propia.

Dentro de los planteamientos dilucidados por diversos autores, se puede determinar las semejanzas y divergencias existentes entre cada uno de ellos.

Por ello, Hibert (2012), especifica que la hipótesis para el modelo de Kreps y Scheinkman, se estructura de la siguiente forma:

• En la primera parte del juego las empresas invierten en capacidad, compitiendo, así sobre precios, (El equilibrio involucra que cada empresa invierta en capacidad a la cantidad de Cournot).

• En la segunda etapa, se denota el equilibrio de Nash en precios, dada la capacidad, las empresas, fijan el precio, tal que, pueden producir a toda su capacidad.

• Esta sincronización reconoce que la inversión en capacidad toma tiempo y no puede ser cambiada rápidamente, con lo cual, los precios pueden ser ajustados.

Por otro lado, Gibbons (1992), señala que en "algunas circunstancias el resultado de Cournot se da en un modelo de tipo de Bertrand en el cual las empresas se enfrentan a restricciones de capacidad (que escogen a un cierto coste antes de elegir los precios)" (p. 48).

Sin embargo, una comparación de estos dos modelos requerirá salir de los juegos estáticos, y transitar a un análisis dinámico, que permita especificar las reacciones futuras de los competidores de cada empresa.

2.3.Inversiones estratégicas

Para que se facilite un juego de estrategias, las empresas deben tomar decisiones muy importantes, basándose – principalmente-en términos de inversión y capacidad. En esta situación, se considera dos tipos de empresas, la primera de ellas, denominada "empresas establecidas", (las cuales, que tienen capacidad instalada para atender el mercado), asimismo existen “empresas entrantes”, (las cuales son, posibles competidores que ingresarán al mercado).

De este modo, mediante la inversión estratégica, se pretende disuadir la entrada de la competencia, puesto que, es este un modelo que explica claramente esta situación. Por lo cual, el modelo planteado por Spence[7] y Dixit[8] en los años 1977 – 1979, 1979 -1980, respectivamente, busca estudiar la reacción anticipada de una empresa establecida y las barreras existentes a la entrada de la competencia.

2.3.1. Modelo Spence-Dixit.

En general, Spence y Dixit, complementaron y reinterpretaron el modelo de Stackelberg, de manera que, mientras Stackelberg consideraba como variable estratégica la cantidad; para ambos autores, este punto de vista era el correcto, sin embargo, la cantidad debería ser interpretada como la capacidad que posee la empresa establecida; para ello, definiremos de forma más minuciosa el modelo de dichos autores en el siguiente punto.

a) Definición del modelo.

En el modelo de Spence - Dixit, o también denominado “modelo de inversión estratégica”, se plantea que la empresa establecida, aquella en la que se vislumbra –según la perspectiva de algunos autores – una notable ventaja ,(debido a la estrategia del que mueve primero), reacciona de manera anticipada ante la posible entrada de la competencia, estableciendo así, barreras a la entrada. Por consiguiente, en este modelo se consideran dos aspectos para el análisis de la estrategia de la empresa establecida, según, UDESA (s.f):

---

[7] Michael Spence, economista y profesor canadiense. Ganador, en el año 2001, del Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel. Se le retribuyó el premio gracias a sus investigaciones acerca de la asimetría de los mercados.

[8] Avidanash Dixit, economista estadounidense de origen indio, profesor de la Universidad de Princeton. Ha destinado sus investigaciones hacia el desarrollo de múltiples áreas, principalmente se ha abocado al estudio de la organización industrial, teoría de juegos, economía pública. Ha sido distinguido con el Premio John von Neumann, en el año 2001.

> La primera versión corresponde a invertir en capacidad ociosa para satisfacer la demanda cuando se desate una guerra de precios. (…) La segunda versión corresponde a una situación de competencia por precios en el corto plazo, mientras que en el largo plazo las empresas compiten por la vía de acumulación de capital. (p.220)

Expresando matemáticamente el modelo, se puede decir que, en el primer periodo la empresa establecida (A), elige la capacidad a utilizar asociada a un costo ($K_A C_O$), una vez que esto sucede, en el segundo periodo, la empresa entrante (E), observa la capacidad incurrida por la empresa establecida (K_A), y decide si entrar o no al mercado. De esta forma, en este punto la empresa "*A*", puede aumentar su capacidad, pero no disminuirla.

Seguidamente, las empresas eligen las cantidades de producción (q_A, q_B), la elección por la capacidad la dará "A" (empresa establecida), de tal manera que se tendría "K_A" y "K_B". Tirole (1990), esboza de manera concreta lo dicho con respecto a los costos, de manera que, producir una unidad del producto requiere de un costo denotado como *"c"*.

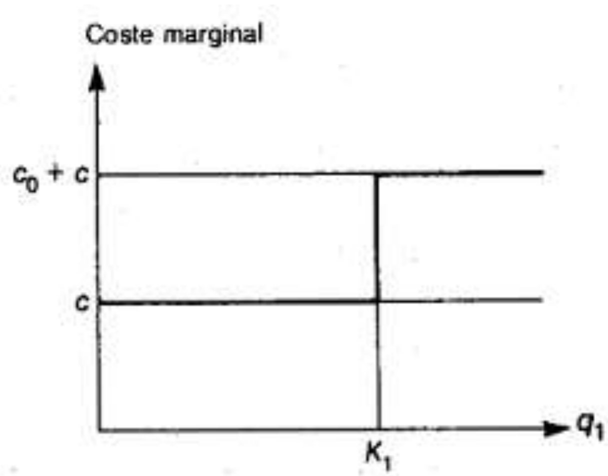


Figura 9. Coste marginal a corto plazo.

Fuente: Tirole (1990)

Conjuntamente, se puede obtener gráficamente en la figura 9, donde "K_B", es el tamaño de capacidad mínima para la entrante, y donde no necesariamente, éste debe ser igual al tamaño mínimo de la empresa establecida.

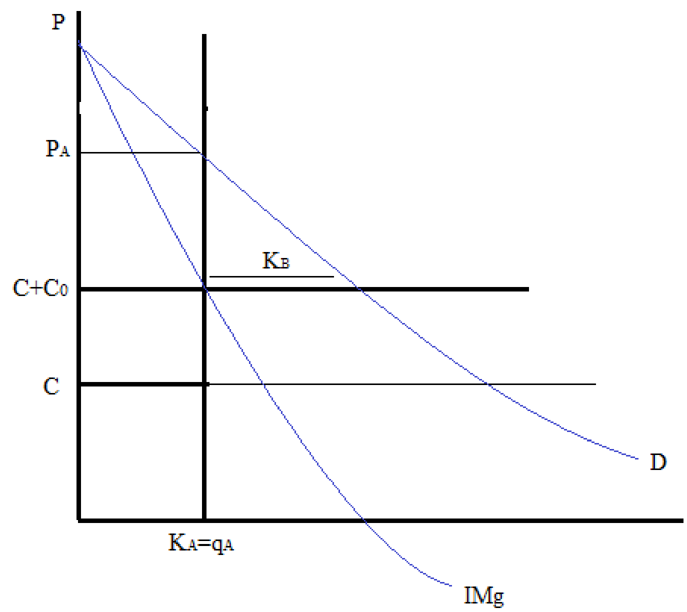


Figura 10. Bloqueo natural a la entrada
Adaptado de: Tarziján M. & Paredes M. (2006)

En esta figura, se puede distinguir que la entrada está naturalmente bloqueada, además, según Tarziján M. & Paredes M. (2006):

> Esto significa que si el monopolista decide su capacidad y producción abstrayéndose de la existencia del competidor potencial, igualmente no habrá entrada. En efecto, si el monopolista se abstrae de la existencia del entrante producirá donde se iguale el ingreso marginal con el costo marginal de largo plazo (…).Para no suponer ventajas de información de parte del monopolista, asumimos que, en caso de

entrada, ambos prevén que se desatará una fuerte competencia en la que usarán toda su capacidad. (p. 90-91)

Otro caso para el modelo Spence-Dixit, se suscita cuando la entrada no está bloqueada, por lo tanto, la entrada se producirá, debido a que, existirá un espacio suficiente para la empresa entrante, pues, la empresa establecida producirá donde su ingreso marginal sea igual a su costo marginal de largo plazo y el precio sea superior al costo marginal.

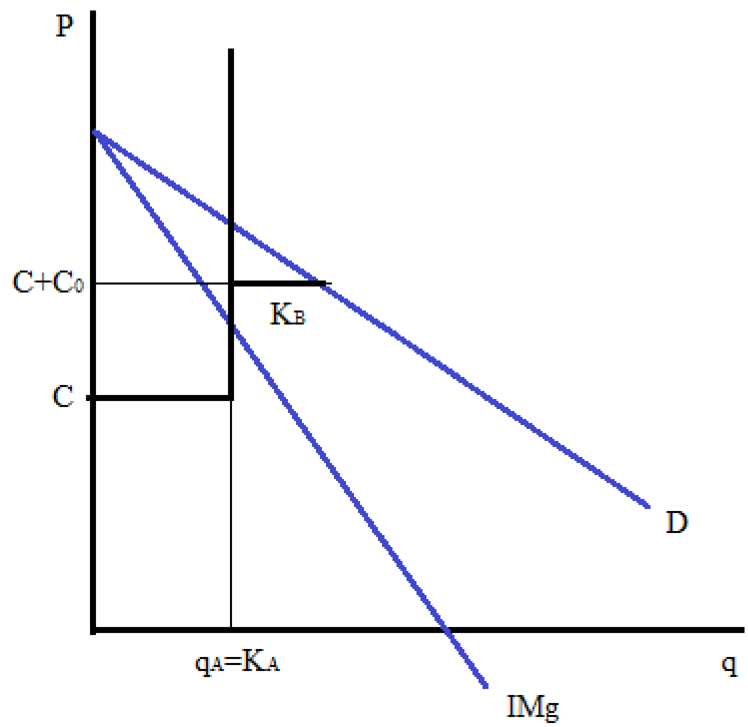


Figura 11. Bloqueo estratégico a la entrada, segunda situación.
Adaptado de: Tarziján M. & Paredes M. (2006)

En la figura 11, se puede notar que, si la empresa establecida quiere desalentar la entrada de la competencia, debe elegir una capacidad estratégica, tal que, el precio del producto caiga por debajo de, $C + C_O$, lo que desalentaría la construcción de capacidad de la empresa entrante.

Otra situación se genera en el gráfico 11, en la cual, existirá capacidad ociosa, de manera que, sólo será empleada cuando el ingreso marginal por atender a un cliente adicional sea superior al costo marginal.

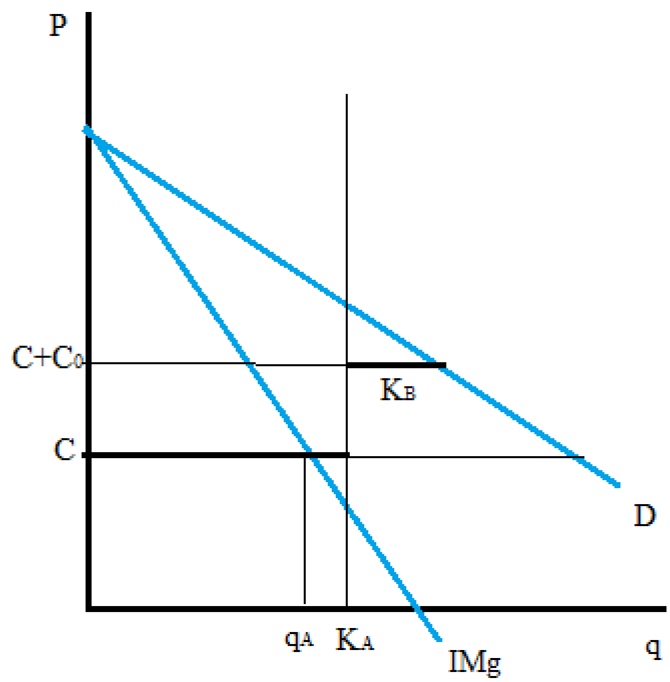


Figura 12. Bloqueo estratégico a la entrada, tercera situación.
Adaptado de: Tarziján M. & Paredes M. (2006)

En la figura 12, el tamaño eficiente de capacidad de la empresa entrante es lo suficientemente pequeña como para que se dé el desaliento a la entrada con una capacidad mayor, además, se puede determinar que la capacidad ociosa a partir de la diferencia entre la capacidad empleada y la cantidad de producción, es decir, $K_A - q_A$.

b) Supuestos.

Para éste modelo, se manifiestan las siguientes situaciones:

- Existen dos tipos de empresas, establecidas y entrantes.
- Para las empresas establecidas, la inversión se vuelve una variable endógena, la cual, determina la estrategia, es decir, la empresa establecida, tiene una ventaja competitiva a través de una barrera a la entrada (en términos de inversión y capacidad).
- El modelo Spence-Dixit, le proporciona consistencia al modelo líder- seguidor de Stackelberg en términos de inversión y capacidad, y de esta forma, este modelo obtiene prácticamente las características del modelo de Stackelberg.

CAPÍTULO III

INTERACCIÓN ESTRATÉGICA

Interacción estratégica

A diario, cada individuo está confrontando numerosas situaciones, mediante las cuales, es necesaria la elección estratégica y racional de una determinada acción que le confiera a éste un resultado beneficioso para sí.

Dentro de los mercados oligopólicos, la toma de decisiones puede trasladarse a múltiples escenarios, razón por la cual, el desarrollo de estrategias es imprescindible para la obtención de resultados óptimos. En este sentido, la consideración de posibles tácticas por parte de los individuos y empresas, conlleva a la formalización indirecta de un juego. Sin embargo, desde una perspectiva meramente recreativa, un juego, puede ser considerado como una actividad de ocio, en contraste a esta definición, el significado de esta actividad puede ampliarse a situaciones que se deriven en un resultado de gran magnitud.

Por lo tanto, la formalización de las interacciones estratégicas ha permitido el desarrollo de un naciente campo matemático denominado “Teoría de Juegos”, en el cual, se sustentan y estudian las conductas e intereses que manifiestan los individuos en la elección de posibles estrategias para la obtención de un determinado beneficio.

En definitiva, se despliega en este capítulo el estudio y análisis de la representación de las estrategias y el comportamiento de los agentes económicos por parte de la Teoría de la Juegos, generalizando para ello, la formalización de múltiples instancias que expliquen las interacciones estratégicas generadas entre individuos y empresas.

3.1.Teoría de juegos

La teoría de juegos es una de las aplicaciones de mayor utilidad en la teoría microeconómica, y un instrumento muy importante para diversos campos de estudio en la ciencia.

Así, según Álvarez (2013):

> (…) El nombre de teoría de juegos proviene precisamente del hecho de que muchas de las situaciones que denominamos juegos en el lenguaje común, son situaciones más o menos sencillas de interdependencia estratégica: cada jugador tiene que decidir qué hacer sabiendo que dicha elección será «buena» o «mala» en función de lo que hagan los demás (…) (p. 3).

Para Turocy & Von Stengel (2001):

> La teoría de juegos es el estudio formal del conflicto y cooperación. Los conceptos teóricos de un juego se aplican cuando las acciones de varios agentes son interpdependientes. Estos agentes pueden individuos, grupos, empresas, o cualquier combinación de estos. Los conceptos de teoría de juegos proporcionan un idioma para formular, analizar y entender los escenarios estratégicos[9] (p. 04).

Asimismo, esta teoría, es una disciplina matemática. Se trata de un instrumento matemático, cuyo objetivo es explicar el comportamiento óptimo de los concurrentes a juegos de estrategia y determinar los equilibrios resultantes” (Ordóñez, 2009, p. 561).

Esta teoría, ayuda a tener una visión más clara acerca del funcionamiento de los mercados oligopólicos, debido a que, estos están formados por pocas empresas que interactúan de manera intensa.

[9] Turocy T. y Von Stengel B. (2001). “Game theory is the formal study of conflict and cooperation. Game theoretic concepts apply whenever the actions of several agents are interdependent. These agents may be individuals, groups, firms, or any combination of these. The concepts of game theory provide a language to formulate, structure, analyze, and understand strategic scenarios”. Traducción propia

3.1.1. Principios básicos.

Inicialmente (comienzos del siglo XVIII), según Fernández - Baca (2010), la Teoría de Juegos, estuvo relacionada a los juegos de salón, James Waldegrave, barón de Chewton, fue el primero en formalizar esta teoría, desarrollando una estrategia óptima para un juego de cartas, con el nombre de "Le Her". De la misma forma, Fernández señala que no existe un trabajo específico de Waldegrave sobre este tema, pero sí un comentario en una carta de Pierre Pémond de Monfort a Nicholas Bernoulli, que data del 13 de noviembre de 1713, conteniendo una propuesta denominada hoy en día como "Minimax", el cual se basa en "buscar la menor de las mayores pérdidas posibles" (p. 74).

Para el siglo IX, el trabajo más relevante dentro de este incipiente campo, fue el de Joseph Bertrand (1899, citado en Fernández - Baca, 2010), el cual, consistió en el análisis de varios tipos de juego y en especial el juego denominado "bacará", asimismo, estudió las estrategias que posiblemente seguiría un jugador en el momento que sus cartas tendrían valor de cinco puntos.

Conjuntamente, a inicios del siglo XX, el matemático alemán Ernst Zermelo (1913, citado en Fernández - Baca, 2010) demostró una solución para los juegos de ajedrez, denotando que las piezas blancas tendrían la posibilidad de forzar una victoria, como también las piezas negras tendrían la misma oportunidad, aunque también podría ser que ambas partes fuercen a un empate.

La teoría de juegos, como hoy se la conoce, fue tratada, en gran parte por el matemático francés Émile Borel (1921,1924,1927, citado en Fernández - Baca, 2010), quién se basó en el trabajo de Bertrand, para desarrollar un modelo simple de un juego de suma cero con dos participantes y un número infinito de estrategias, diferenciando, así entre estrategias puras y mixtas (aleatorias), además desarrolló – matemáticamente- la solución de equilibrio de Minimax para un juego con dos participantes y tres estrategias, del mismo modo, halló la solución para un juego simétrico con dos participantes y cinco estrategias, sin embargo, el modelo se tornaba difícil de resolver para tres o más participantes.

John Von Neuman (1928, citado en Fernández - Baca 2010) matemático de origen húngaro, nacionalizado posteriormente como estadounidense; logró demostrar un equilibrio de Minimax en el caso de juego de suma cero con dos participantes y un número infinito de estrategias, apoyándose en el teorema del punto fijo de Brower; posteriormente Jean Ville, discípulo y asistente de Borel, desarrolló la primera demostración simple del teorema de Minimax y extendió la solución a un conjunto de estrategias.

A la postre, en 1944, Von Neuman y el economista austriaco Oskar Morgenstren, publican un libro donde desarrollan situaciones aplicadas de los juegos no cooperativos de suma cero con dos participantes a diferentes problemas económicos, demostrando – además- un forma resumida del teorema de Minimax, para lo cual, tomaron como referencia a Ville, asimismo desarrollaron un modelo para juegos cooperativos con “n” participantes.

Hacia la década de 1950, Jhon Nash (1950a, 19520b, 1951, 1953, citado en Fernández - Baca 2010) matemático estadounidense; desarrolló una solución general de equilibrio para los juegos no cooperativos, tomando como referencia el teorema del punto fijo de Brower, mediante el cual, Nash logró demostrar que todos los juegos no cooperativos, tienen por lo menos una solución de equilibrio con estrategias mixtas, independientemente del número de participantes y estrategias.

Para las décadas siguientes, otros matemáticos como Auman, Shapley, Selten, Harsanyi, entre otros, han contribuido a extender la solución planteada por Nash, a través de modelos de juegos repetidos , añadiéndoles la introducción de información asimétrica.

A pesar de todos estos grandes aportes y desarrollos, los economistas no mostraron gran interés por desarrollar aún más la teoría de juegos hasta 1980, siendo una de las excepciones, el canadiense William Vickrey (1961, citado en Fernández - Baca 2010), quién utilizó la solución de Nash para las subastas, con el fin de demostrar que los varios tipos de subastas conocidos hasta ese tiempo- aunque diferentes- eran equivalentes pero con ciertos tipos de condiciones, sentando bases para la teoría de subastas óptimas.

Por ello, la teoría de juegos comenzó a ser incorporada en los textos de microeconomía en la década de 1990, siendo los libros de Kreps, Varian y Mas – Colell, Whinston y Green (1990, 1992, 1995, citados en Fernández - Baca 2010) los primeros en incorporar esta incipiente teoría.

3.1.2. Descripción de un juego.

Para la teoría de juegos es necesario, según, Fernández - Baca (2010); tener en cuenta los siguientes elementos:

a) Los jugadores: ¿Cuáles son las partes involucradas?
b) Las reglas: ¿Qué pueden hacer los jugadores? ¿Qué es lo que ellos conocen en el momento de hacer sus movimientos? ¿Cuál es el orden de las jugadas?
c) Los resultados: para cada combinación posible de acciones por parte de los jugadores, ¿Cuál es el resultado del juego?
d) Los pagos: ¿Cuál es la función de utilidad de cada jugador con respecto a los resultados del juego? (p. 76)

Para Vásquez Cordano (2015), se asume que todos los agentes partícipes de un juego son racionales; buscando siempre maximizar sus beneficios resultantes.

Pero para Gracián Rodriguez (2013):

El requisito de que los jugadores deben ser perfectamente racionales va bastante más allá de que se comportan como tales. Supone una situación ideal, ya que nadie es capaz de tener en cuenta todas las jugadas posibles y tomar la decisión adecuada para ganar a toda costa (p. 72).

Asimismo, Joan E. Ricart (1988), añade además, que el número de jugadores es finito (por lo general). Por otra parte, sostiene que :

Los juegos se han clasificado tradicionalemte en juegos cooperativos y no cooperativos. La diferencia radica en las posibilidades de comunicación, negociación y coordinación que se permite a los jugadores. Los juegos no cooperativos son aquellos en los que cada agente actúa siguiendo exclusivamente su propio interés y los jugadores no pueden firmar contratos vinculantes. A medida que ampliamos las posibilidades de cooperación, de comunicación y firma de contratos, los juegos pasan a ser cooperativos. Un elemento central en los juegos cooperativos (…) es la existencia de un poder superior capaz de hacer cumplir los acuerdos entre las partes en conflicto.

(…) Los juegos no cooperativos pueden también clasificarse en función de cómo se presentan. Así podemos hablar de juegos en forma estratégica (también llamados juegos en forma normal), cuando un juego se define de forma que cada jugador escoge una estrategia (de un conjunto factible) y el conjunto de estrategias escogidas entre todos los jugadores, simultáneamente e independientemente, determina los resultados y su efecto en cada jugador. Otra presentación es la llamada forma extensiva del juego, que describe con gran detalle la secuencia de movimientos de los jugadores y su efecto en ellos (pp. 2 – 3).

Por consiguiente, una de las formas de representar la información de una teoría de juegos, al menos para juegos no cooperativos, está detrminado por dos maneras: la forma extensiva y la forma estratégica o normal.

a) Forma extensiva.

Según Turocy & Von Stengel (2001), la definen de la siguiente forma:

> La forma extensa, también llamado un árbol de juego, es más detallada que la forma estratégica de un juego. Es una descripción completa de cómo se juega el juego con el tiempo. Esto incluye el orden en que los jugadores toman las acciones, la información que los jugadores tienen en el momento que deben tomar esas decisiones, y los momentos en que cualquier incertidumbre en la situación es resuelta. Un juego en forma extensiva podría ser analizado directamente, o puede ser convertido en una forma estratégica equivalente[10] (p. 7).

Este método de formalización de un juego está conformado por nodos y por ramas, los primeros (nodos) tanto iniciales y finales, representan los momentos en que los participantes hacen sus jugadas; mientras que las segundas (ramas) refieren a las decisiones que podrían tomar los participantes en los nodos del juego, asimismo, los nodos iniciales y finales refieren a los pagos o resultados que recibirían los participantes cuando el juego concluya (Fernández - Baca, 2010, p.77).

[10] Turocy & Von Stengel (2001): "The extensive form, also called a game tree, is more detailed then the strategic form of a game. It is a complete description of how the game is played over time. This includes th eorder in which players take actions, the information that players have at the time they must take those actions, and the times at wich any uncertainly in this situation is resolved. A game in extensive form may be analyze directly, or can be converted into an aquivalent strategic form". Traducción propia.

Muestra, además, según Vásquez Cordano (2015), "la secuencia de jugadas posibles (movimientos) posibles de los jugadores (incluso si son simultáneos) (…), cuán imperfecta es la información con la que cuenta cada jugador al llegar a un nodo" (p. 4).

En la figura 13, se puede observar un ejemplo de juego secuencial con dos participantes. El nodo 1, indica que solo el participante 1 puede tomar una decisión, elegir si moverse a "A" (arriba) o "B" (abajo), estas decisiones, están representadas por las ramas "A" y "B". Los nodos señalados con 2, indican que el participante 2 puede elegir justo después de haberlo hecho el participante 1, por lo cual, el participante dos puede elegir entre moverse hacia "D" (derecha) o "I" (izquierda). Finalmente los pares ordenandos al final de los nodos representan los pagos que recibirían los participantes como resultado de sus elecciones. Por ejemplo:

- El par (2, -1), hace referencia a que, si el participante decide moverse hacia A y el participante 2 hacia D, entonces, el primero obtendrá una ganancia de 2 mientras

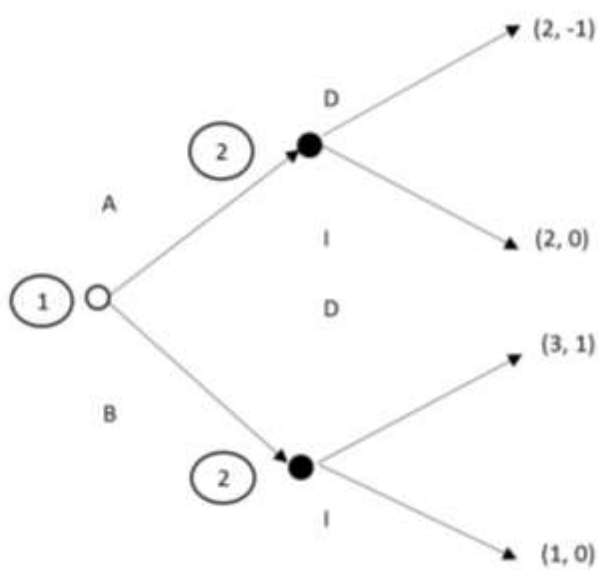
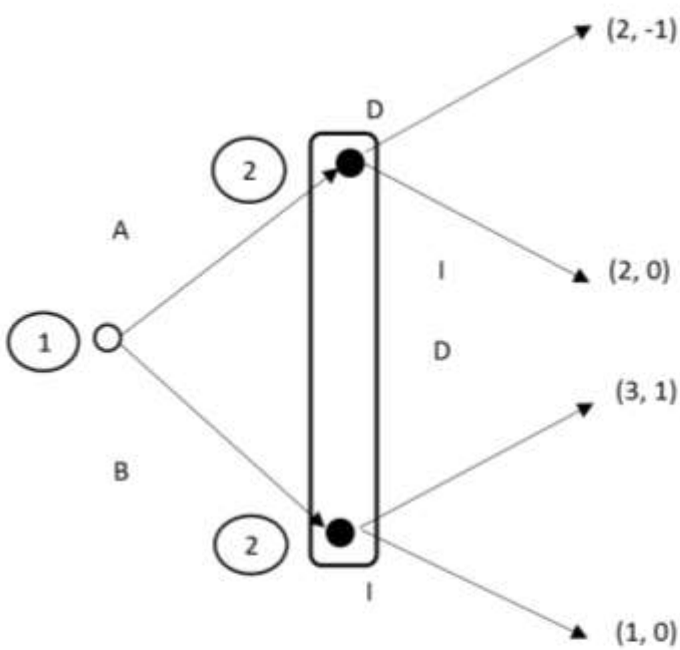


Figura 13. Forma extensiva de un juego secuencial
Fuente: Fernández- Baca (2010)

que el segundo obtendrá una pérdida de -1. (Fernández - Baca, 2010, p. 77)

Este juego es de tipo secuencial, debido a que la dinámica consta de un participante a la vez. En el ejemplo anterior, el participante 2 puede observar la decisión del participante 1 antes de elegir una opción. Este tipo de juego, puede observarse en juegos tales como, el ajedrez, damas y damas chinas, pero no en juegos como el casino, porque, si bien es un juego de un participante a la vez, nadie puede ver u observar las cartas de su contrincante.



En la figura 14, se muestra un ejemplo de un juego simultáneo, en el cual, se pretende decir que ambos participantes toman decisiones a la misma vez. El recuadro que bordea las elecciones del participante 2, hace referencia al conjunto de información que posee este participante, añadiéndose su incertidumbre por no saber en qué dirección se movió el participante 1 (Fernández - Baca, 2010, p. 78).

En un juego simultáneo o también denominado juego estático; el participante se mueve hacia la dirección que mejor le convenga, sin saber previamente cuáles son las estrategias del otro participante, y mucho menos reacciones que pueden generarse ante estas, lo cual no sucede en un juego secuencial o dinámico, puesto que, los participantes tienen la oportunidad de observar las decisiones de sus demás contrincantes y por consiguiente, reaccionar ante éstas.

En cuanto a las estrategias, es necesario distinguir entre mixtas y puras. Para Vásquez Cordano (2015), las estrategias puras, se suscitan cuando los participantes "juegan escogiendo una de las acciones de su espacio de estrategias con probabilidad igual a 1", mientras que las estrategias mixtas suceden cuando los participantes juegan "eligiendo acciones de su espacio de estrategias según una distribución de probabilidades" (p. 3).

b) Formal normal o estratégica.

Para, Turocy y Von Stengel (2001):

> La forma estratégica (también llamada forma normal) es el tipo de juego básico estudiado en la teoría de juegos no coperativo. Un juego en forma estratégica enumera las estrategias de cada jugador, y los resultados obtenidos de cada combinación posible de opciones. Un resultado es representado por un pago

separado para cada jugador, que es un número (también llamado utilidad) que mide cuánto le agrada al jugador el resultado[11] (p.7).

Por lo cual, una estrategia, es definida como "un plan contingente, completo o regla de decisión, para un jugador, que especifica cómo actuará el jugador en cada circunstancia posible en que le corresponda mover" (Cerdá, Jimeno & Pérez, 2004, p.36).

Por lo general, la representación de esta forma estratégica, se formaliza en una matriz de pagos, en la cual, se incluyen pares ordenados, que serían las ganancias que obtienen los participantes. Así, para Paredes y Tarziján (2006), la forma normal es una representación resumida de la forma extensiva, asimismo, es ésta, más factible para juegos simultáneos (p. 202).

En el cuadro1 del juego secuencial, el participante 1, poseía dos opciones para moverse: hacia arriba o hacia abajo, por el contrario, el participante 2, tenía las posibilidades de elegir entre 4 opciones:

- Hacia la derecha, independientemente de los movimientos del participante 1.
- Hacia la izquierda, independientemente de los movimientos del participante 1.
- Hacia la derecha, si el participante 1 ha elegido moverse hacia arriba; o hacia la izquierda si 1 se movió hacia abajo.
- Hacia la izquierda, si el participante 1 ha elegido moverse hacia arriba; o hacia la derecha si 1 se movió hacia abajo (Fernández - Baca, 2010, p.80)

[11] Turocy & Von Stengel (2001): "The strategic form (also called normal form) is the basic type of game studied in non- cooperative game theory. A game in strategic form lists each player´s strategies, and the outcomes that result from each possible combination of choices. An outcome is represented by a separate payoff for each player, which is a number (also called utility) that measures how much the players like the outcome". Traducción propia.

Cuadro 1. Matriz de pagos del juego secuencial de la figura 1

		Jugador 2			
		Derecha Derecha	**Izquierda Izquierda**	**Derecha Izquierda**	**Izquierda Derecha**
Jugador 1	**Arriba**	(2, -1)	(2, 0)	(2, -1)	(2, 0)
	Abajo	(3, 1)	(1, 0)	(1, 0)	(3, 1)

Fuente: Fernández – Baca (2010)

Las estrategias del participante 1, estarán en filas y por consiguiente, las estrategias del participante 2 en columnas, lo cual, hará que tengamos una matriz de 2x4. Así, cada matriz tiene un par ordenado que sería los pagos que obtienen los participantes respectivamente.

Cuadro 2: Matriz de pagos de un juego simultáneo

		Jugador 2	
		Derecha	**Izquierda**
Jugador 1	**Arriba**	(2, -1)	(2, 0)
	Abajo	(3, 1)	(1, 0)

Fuente: Fernández – Baca (2010)

Para el juego simultáneo, cada participante cuenta con dos estrategias, arriba o abajo para el participante 1, y derecha o izquierda para el participante 2.

3.1.3. Equilibrio de Nash.

A finales de la década de 1950, el abordaje juicioso por parte del economista alemán, Oskar Morgenstern y el matemático húngaro, Von Neumann dentro de la Teoría de Juegos, conllevó la publicación de "*Teoría de Juegos y el Comportamiento Económico*"[12], proporcionando, así, un tratamiento investigativo, riguroso y matemático a escenarios implícitos en juegos estratégicos. De este modo, se determinó el acucioso emparejamiento de múltiples hallazgos y aplicaciones formales para la solución de determinados problemas dentro de este nuevo campo matemático.

La relevancia de este novísimo campo, atrajo la inquietud y expectativa de científicos e investigadores, debido a la versatilidad con que puede – hasta el día de hoy- ser utilizada la Teoría de Juegos. Precisamente, en el año 1950, la publicación de la tesis doctoral, "*Non- cooperative games",* en la Universidad de Princeton, le consignó al joven matemático John Forbes Nash Jr. un papel crucial, revolucionario y transformador dentro la incipiente teoría matemática de la Teoría de Juegos.

Como aluden, Villalón & Caraballo (2015), "En dicha memoria se introducía el concepto de punto de equilibrio (o equilibrio de Nash como es conocido actualmente) y probaba su existencia". (pág. 86). Por ello, el aporte conceptual del denominado "Equilibrio de Nash", ha sido quizá una de las aportaciones más trascendentales de Nash dentro de la Teoría de Juegos, puesto que, ha concebido las bases para una teoría económica moderna,

[12] Von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press. Título innovador que fue publicado bajo el sello editorial del fondo académico de la Universidad de Princeton. Este texto, permitió la creación de una campo investigativo sobre el incipiente campo interdisciplinario de la Teoría de Juegos.

que en el año 1994, junto a los economistas John Charles Harsanyi y Reinhard Justus Reginald Selten, le valió la concesión del Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel. (Gracián Rodríguez, 2013)

a) Definición.

El equilibrio de Nash, es frecuentemente, el concepto de solución teórica de juego único más empleado dentro del campo económico. Sus aplicaciones en este campo, engloban al oligopolio, equilibrio de mercado, negociación, calidad del producto, bienes públicos, problemas de principal-agente, subastas, seguros, discriminación, entrada y salida, educación superior, entre otros. (Aumann, 1989)

De este modo, debido a la característica vastedad aplicativa de este equilibrio, éste, puede ser definido de numerosas formas. Para Fudenberg & Tirole (1991), "Un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias tales que la estrategia de cada jugador es una respuesta óptima a las estrategias del otro jugador" (p.11)[13]. En este sentido, las expectativas que condicionan la elección de cada jugador, respecto de la elección que elija su contrincante, conlleva a que ninguno de éstos, pretenda modificar su conducta.

Asimismo, según lo expuesto, Gracián Rodríguez (2013), asevera que:

> La noción de "equilibrio de Nash" corresponde a una situación en la que las dos partes rivales están de acuerdo con determinada situación del juego o negociación, cuya alteración ofrece desventajas a ambas partes. Es una fase del juego en la que ninguno de los jugadores, si considera que las acciones de su oponente están determinadas, deseará cambiar su propia opción. (p. 83)

Por ello, la formalización y posterior publicación de *"Non- cooperative games",* ha permitido la consolidación de una solución íntegra para los juegos no cooperativos. La

[13] Fudenberg & Tirole (1991): "A Nash equilibrium is a profile of strategies such that each player's strategy is an optimal response to the other player's strategies". Traducción propia.

cimentación de este trabajo, en el teorema del punto fijo - desarrollado por el matemático holandés Luitzen Jan Brouwer- le ha proporcionado a Nash, fundamentar la existencia de al menos una solución de equilibrio con estrategias mixtas para juegos no cooperativos, respectivamente.

b) Existencia del equilibrio de Nash.

Como lo determina, Vásquez Cordano(2015), un equilibrio de Nash, se encuentra constituido principalmente por:

> Nash (1950, citado en Fernández - Baca, 2010) mostró que en cualquier juego, en el cual el conjunto de acciones disponibles a cada jugador es finito, existe al menos un equilibrio que resume las estrategias óptimas de cada jugador (en estrategias mixtas).
>
> (…) Una estrategia de un jugador forma parte de un equilibrio de Nash si esa estrategia es la mejor respuesta del jugador ante cualquier estrategia de los otros jugadores. (pp.8-9)

De hecho, para representar formalmente este equilibrio, es necesario precisar la existencia de tres elementos claves en la noción planteada por Nash. Estos elementos, pueden especificarse de la siguiente forma, según corresponda el orden de cada uno de ellos:

- Denotamos la existencia de un número finito de jugadores, representados por $i = 1, \dots, N$
- Cada uno de los jugadores *"i",* cuenta con un conjunto de acciones o estrategias puras, denominadas " s_i ".

- Cada uno de los jugadores *"i",* posee un *"pay off"* o función de utilidad, $u_i(s): S \equiv X_{i=1}^{N} S_i$, determinada esencialmente por el perfil de estrategias que presentan cada uno de los jugadores. Esta utilidad proporcionada a cada jugador, es denominada como la utilidad Von Neumann-Morgenstern. (Fudenberg & Tirole, 1991).

Frecuentemente, en el equilibrio de Nash, se pretende mantener fija cada una de las estrategias de los oponentes, con la finalidad de variar la estrategia de un solo jugador, que en este caso, denotamos como el jugador *"i",* respectivamente. En relación a lo planteado con anterioridad, podemos representar esta situación mediante el uso de la siguiente denotación matemática.

$$s_{-i} \in S_{-i} \equiv X_{j \neq i} S_j \; \ldots [1]$$

$$s = (s_i, s_{-i}) \in S \ldots [2]$$

$$u_i(s) = u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i | s_{-i}) \ldots [3]$$

Donde:

[1]: Combinación de estrategias de los oponentes del jugador *"i".*

[2]: Conjunto de estrategias que toma el jugador *"i"* respecto de las estrategias de sus oponentes.

[3]: Beneficio que obtiene el jugador *"i",* al aplicar un determinado conjunto de estrategias.

Como se observa en la denotación anterior, la utilidad "u_i", está determinada, esencialmente, por cada una de las acciones que adoptan los jugadores. Sobre este punto, nosotros podemos ampliar y expresar el escenario que se suscita cuando la elección de las estrategias por parte de los jugadores, engloba estrategias y perfiles mixtos, los cuales pueden enunciarse como $\sigma_i \in \sum_i \equiv P(S_i)$, tales que:

$$\sigma_{-i} \in \sum_{-i} \equiv X_{j \neq i} \sum_j \ \ldots \ [1]$$

$$\sigma = (\sigma_i, \sigma_{-i}) \in \sum \ \ldots \ [2]$$

$$u_i(\sigma) = u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(\sigma_i | \sigma_{-i}) \ \ldots \ [3]$$

Donde:

[1]: Estrategias mixtas de los oponentes del jugador *"i".*

[2]: Conjunto de estrategias mixtas que opta el jugador *"i"*, respecto de las estrategias elegidas por sus oponentes.

[3]: Beneficio que obtiene el jugador *"i",* al aplicar un determinado conjunto de estrategias mixtas.

De esta manera, podemos indicar que la utilidad esperada, está expresada como:

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left[u_i(s) \prod_{j=1}^{N} \sigma_j(S_j) \right]$$

En el cual, como afirma, Ordoñez (2006): "(…) Si S es finito, éste es un polinomio en "σ", (por lo tanto continuo) afín en "σ_i""[14].

Asimismo, dentro de las estrategias que adoptan los jugadores, se hallan aquellas estrategias, que son comúnmente denominadas "estrategias dominantes". Podemos afirmar que una estrategia es dominada, si para el jugador *"i",* existe $\sigma_i' \in \sum_i$, de modo que:

$$u_i(\sigma_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \ \forall \ s_{-i} \in S_{-i}$$

[14] Ordoñez (2006): " If S is finite, this is a polynomial in σ, (hence continuous), affine in σ_i". Traducción propia.

Igualmente, podemos afirmar que una estrategia es débilmente dominada, si para el jugador *"i"*, existe $\sigma_i' \in \sum_i$, de modo que:

$$u_i(\sigma_i' , s_{-\,i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \; \forall \; s_{-i} \in S_{-i}$$

Con una desigualdad que es estricta para un algún determinado perfil:

$$s_{-i} \in S_{-i}$$

Como menciona, Ordoñez (2006):

> En palabras, una estrategia estrictamente dominada es sólo una estrategia que no se usaría sin importar cómo jueguen los oponentes. Al aplicar una eliminación iterada de estrategias dominadas es necesario comprobar la dominación de todas las estrategias después de cada ronda de eliminación. Típicamente es el caso en que una estrategia no dominada en el juego original es dominada después de la eliminación de algunas de las estrategias de los opositores. (p.2)[15]

Concretamente, se puede determinar que un conjunto de estrategias forman un equilibrio de Nash, si ninguno de los participantes (jugadores), posee los incentivos necesarios para cambiar, de forma específica, su estrategia. Por consiguiente, denotamos que en el equilibrio que posee un perfil de estrategia mixta, "σ", para cada *"i"* y todo $\sigma_i' \neq \sigma_i$, se debe cumplir que:

$$u_i(\sigma_i , \sigma_{-\,i}) \geq u_i(\sigma_i' , \sigma_{-\,i})$$

---

[15] Ordoñez (2006): "In words, a strictly dominated strategy is just an strategy that would not be used NO MATTER how opponents play. When applying a iterated elimination of dominated strategies it's necessary to check domination of all strategies after each round of elimination. Typically it is the case that a strategy not dominated in the original game is dominated after the elimination of some of the opponents' strategies". Traducción propia.

De igual forma, en aquellos equilibrios que poseen un perfil de estrategia pura, para cada *"i"* y todo, $s_i' \neq s_i$, se debe cumplir que:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$$

Es decir, el conjunto de estrategias que seleccionan los jugadores, $(\sigma_{-i} * s_i *)$, determina que éstos, no puedan recurrir a otras estrategias $s_i \neq s_i^* \; y \; \sigma_i \neq \sigma_i *$. Esta definición, puede ser expresada matemáticamente como:

$$u_i(\sigma_i *, \sigma_{-i} *) \geq u_i(\sigma_i , \sigma_{-i} *) \forall \; \sigma_i \neq \sigma_i *$$

$$u_i(s_i *, s_{-i} *) \geq u_i(s_i *, s_{-i}) \forall \; s_i \neq s_i^*$$

Con este, podemos determinar que el jugador *"i"* obtiene la mayor ganancia cuando su oponente opta por la estrategia "$\sigma_{-i} *$" y éste elige la estrategia "$s_i *$", de igual forma, el jugador *"i"* obtiene la mayor ganancia cuando su oponente opta por la estrategia "$s_i *$" y éste elige la estrategia "$\sigma_{-i} *$".

c) Propiedades de un equilibrio de Nash

El planteamiento del equilibrio de Nash, formula la aplicación del teorema del punto fijo de Kakutani a la mejor respuesta de los jugadores. Estas respuestas, son denominadas como, "correspondencias de acción". De este modo, podemos denotar matemáticamente este concepto a modo de $B: \sum \overrightarrow{\rightarrow} \sum$, mediante lo cual, se despliega que, "$B(\sigma)$", satisface las condiciones determinadas por el teorema de Kakutani.

Como indica Fudenberg & Tirole (1991), existen condiciones necesarias para la satisfacción del teorema de Kakutani, entre las cuales se hallan:

- $\sum$ es un subconjunto compacto, convexo, no vacío de un espacio euclidiano (finito- dimensional)[16].(Fudenberg & Tirole, 1991, p.29)
- $B(\sigma)$ es no vacío para todo σ
- $B(\sigma)$ es convexo para todo σ
- $B(\sigma)$ tiene un gráfico cerrado.

- **$\sum$ es un subconjunto compacto, convexo, no vacío de un espacio euclidiano (finito- dimensional):**

Asimismo, de acuerdo al planteamiento anterior, respecto de la aplicación y satisfacción del teorema de Kakutani, se desprende que:

$$\Sigma = \prod_{i \in I} \Sigma_i$$

En donde, se puede determinar que cada, $\sum i = \{x \middle| \sum j \;\; x_j = 1\}$, representa un simplex de dimensión, al cual denotaremos como, $|s_i| - 1$, por lo cual, cada "$\sum i$" es compacto, debido a que éste se encuentra limitado y cerrado. Con ello, podemos establecer, que "$\sum$" es compacto , convexo y no vacío (Fudenberg & Tirole, 1991).

- **$B(\sigma)$ es no vacío para todo σ**:

Por otro lado, se determina que "$B(\sigma)$" es no vacío, sustentado mediante:

$$B_i(\sigma_{-\,i}) = \arg \max_{x \in \sum_i} u_i \, (x, \sigma_{-\,i})$$

[16] Fudenberg & Tirole (1991): "$\sum$ is a compact, convex, nonempty subset of a (finite – dimensional) Euclidean space." Traducción propia.

Esta notación, establece que "$\sum i$", es compacto y no vacío, además determina que "u_i", es lineal en x. Consecuentemente, "u_i", será continuo y el teorema de Weirstrass será no vacío**Fuente especificada no válida.**.

- **$B(\sigma)$ es convexo para todo σ :**

Igualmente, como menciona, Ozdaglar (2010), "$B(\sigma)$", representa una correspondencia convexa de valor. De esta forma, se determina que, $B(\sigma) \subset \sum$, será convexo, si se cumple que, para toda connotación *"i"*, $B_i(\sigma_{-\,i})$ es convexa. De este modo, deducimos que, σ_i' , σ_i'' $\in$ $B_i(\sigma_{-\,i})$.

De la conjetura anterior, podemos desprender que, para todo, $\lambda \in [0,1] \in$ $B_i(\sigma_{-\,i})$, obtenemos:

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-\,i}) \geq u_i(\tau_i, \sigma_{-\,i}) \;\; \forall\, \tau_i \in \; \textstyle\sum_i$$

$$u_i(\sigma_i'', \sigma_{-\,i}) \geq u_i(\tau_i, \sigma_{-\,i}) \;\; \forall \;\; \tau_i \in \; \textstyle\sum_i$$

Estas relaciones, planteadas anteriormente, nos permiten dilucidar la siguiente implicancia, $\lambda \in [0,1]$, según la cual, disponemos que:

$$\lambda\, u_i(\sigma_i', \sigma_{-\,i}) + \; (1-\lambda) u_i(\sigma_i'', \sigma_{-\,i}) \geq u_i(\tau_i, \sigma_{-\,i})\, \forall\, \tau_i \in \; \textstyle\sum_i$$

Asimismo, a través de la linealidad de "$B(\sigma)$", se dispone que:

$$u_i(\,\lambda\sigma_i' + \; (1-\lambda)\sigma_i'', \sigma_{-\,i}) \geq u_i(\tau_i, \sigma_{-\,i})\, \forall\, \tau_i \in \; \textstyle\sum_i$$

Por consiguiente, podemos determinar que, $\lambda\sigma_i' + \; (1-\lambda)\sigma_i'' \in \; B_i(\sigma_{-\,i})$, nos permite demostrar que en definitiva, "$B(\sigma)$" es convexo de valor.

- **$B(\sigma)$ tiene un gráfico cerrado:**

La afirmación anterior, permite cuestionarnos, qué sucedería si el planteamiento preliminar fuese contrapuesto. Para ello, establecemos que " $B(\sigma)$", distinto de lo expuesto, no posee un gráfico cerrado. Por lo tanto, impera una secuencia, expresada como:

$$(\sigma^n, \hat{\sigma}^n) \rightarrow (\sigma, \hat{\sigma})$$

De esta secuencia, se puede determinar que, $\hat{\sigma}^n \in B(\sigma^n)$, sin embargo, $\hat{\sigma} \notin B(\sigma)$, razón por la cual, "existe alguna i tal que $\hat{\sigma} \notin B_i(\sigma_{-i})$ " (Ozdaglar, 2010, p.18)[17].

Así, según lo expuesto anteriormente, podemos plantear que prevalece la existencia de algún, "$\sigma_i' \in \sum_i$", de modo que, con $\epsilon > 0$, obtenemos:

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 3\epsilon$$

Mediante, la denominada "continuidad" de "u_i", y gracias al hecho de que, $\sigma^n{}_{-i} \rightarrow \sigma_{-i}$, podemos por consiguiente, tener un "n" suficientemente grande. De este modo, puede denotarse como:

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) - \epsilon$$

Por lo tanto, la combinación de las relaciones planteadas anteriormente, conlleva a:

$$u_i(\sigma_i', \sigma^n{}_{-i}) > u_i(\hat{\sigma}_i, \sigma_{-i}) + 2\epsilon \geq u_i(\hat{\sigma}_i^n, \sigma^n{}_{-i}) + \epsilon$$

Consecuentemente, observamos que la segunda relación se genera de la continuidad de "u_i", lo que conlleva a que se contradiga la suposición $\hat{\sigma}_i^n \in B_i(\sigma^n{}_{-i})$ y éste complete la prueba.

En particular, también podemos prescribir que la existencia del teorema del punto fijo, resulta esencialmente del teorema de Kakutani. Además, como indica Ozdaglar

[17] Ozdaglar (2010): "(…) exists some i such that $\hat{\sigma} \notin B_i(\sigma_{-i})$". Traducción propia.

(2010): "si $\sigma^* \in B\ (\sigma^*)$, se puede determinar que por definición σ^* es un equilibrio en estrategias mixtas" (p.19)[18].

3.1.4. Juegos repetidos.

Como ya se ha determinado anteriormente, un juego se define como la representación formal de una situación en el que las decisiones son interdependientes, los juegos repetidos permiten estudiar la posibilidad de influencia de un comportamiento futuro sobre un comportamiento presente, este estudio fue realizado por el economista estadounidense, Edward Chamberlin (1929)[19].

Éste, afirmaba que dentro de un mercado con pocos competidores, en el cual, se ofrecen productos sustitutos perfectos entre sí; las empresas terminan aceptando su interdependencia, con lo cual, podrían fijar un precio monopólico, a través de una colusión tácita como consecuencia de una guerra de precios. Esta afirmación, fue respaldada – posteriormente - por Stigler[20] en 1964, coincidiendo en que la colusión tácita, era un resultado esperado en los mercados oligopólicos.

a) Juegos Oligopólicos con repeticiones finitas.

En este caso supondremos la existencia de "n" empresas, las cuales presentan planteamientos por un periodo finito "$t = 1,2, \dots x$", además, ofertan productos homogéneos sin presentan limitaciones en su capacidad de producción, obteniendo una función de beneficio bajo la forma $\pi_i = (P_{it}, P_{(n-1)t})$, donde:

$\boldsymbol{P_{it}}$**:** Precio fijado por la empresa "i" en el periodo "t".

---

[18] Ozdaglar (2010): "If $\sigma^* \in B\ (\sigma^*)$, then by definition σ^* is a mixed strategy equilibrium". Traducción propia.

[19] Chamberlin, E. (1929). *Duopoly: Values where sellers are few.* Quarterly Journal of Economics, Vol. 43, pp. 63-100.

[20] George Joseph Stigler fue un economista y profesor de la Universidad de Chicago. Ganador, en el año 1982, del Premio del Banco de Suecia en Ciencias Económicas en memoria de Alfred Nobel. Se le retribuyó el premio gracias a sus investigaciones acerca de la estructura de la industria, el funcionamiento de los mercados y las causas y efectos de las regulaciones públicas.

$\boldsymbol{P_{(n-1)t}}$**:** Precio fijado por las "$n-1$" empresas competidoras en el periodo "t".

Estos precios, son fijados simultáneamente por las empresas en cada periodo, para lo cual, dejan de lado la información de precios en periodos anteriores, lo que significa que, todas y cada una de ellas operan al mismo nivel de costos y producción, lo que conlleva a que se maximicen ganancias mediante la solución de Bertrand.

$$P_{it-1} = P_{(n-1)t-1}$$

Además, las empresas consideran al periodo "$t-1$", como el periodo final, debido a que saben que lo que suceda en el periodo siguiente, no dependerá del anterior, esto, sucederá constantemente al regresar en los periodos, concluyendo así, que el resultado de este juego es la solución de Bertrand repetida "t" veces.

b) Juegos Oligopólicos con repeticiones infinitas.

También denominado "superjuego", en este caso suponemos de la misma manera que el caso anterior, la existencia de "n" empresas con la diferencia de que, las repeticiones se darán en "$t = 1,2, \ldots \infty$" periodos y cuyos beneficios serán iguales al caso anterior $\pi_i = (P_{it}, P_{(n-1)t})$.

En esta situación, las empresas estarán seguras que el juego proseguirá continuamente, lo que las llevará a fijar un precio monopólico "P_m", mediante una colusión tácita, por consiguiente, esto permitirá que las empresas maximicen ganancias a un nivel de "π_m", esta cooperación representa una ganancia individual de "$\frac{\pi_m}{n}$".

Además, si una de las empresas decide disminuir su precio para captar todo el mercado, solo obtendrá $\pi_{i=}0$, debido a la guerra de precios que se originaría de la respuesta de sus competidoras. Así, la duración del periodo, estará relacionada en el tiempo que tardarán las empresas en detectar la rebaja en los precios de sus competidoras, para así, actuar cooperativamente como represalia.

c) Juegos con información casi perfecta.

Se denomina "juegos con información casi perfecta", a todos aquellos juegos que estudian las decisiones de manera formal y abstracta, estableciendo así, las mejores decisiones que deben tomar los rivales partícipes del conflicto.

De este modo, estos juegos pueden inducir a la formalización de modelos matemáticos que describan el conflicto y las cooperaciones entre los individuos que toman la decisión. Por ello, se considera a estas decisiones como estratégicas, puesto que, las personas o entidades que participan en el juego toman en cuenta las acciones que elegirían sus oponentes.

El caso más sencillo que ejemplifica este tipo de juegos es el denominado "juego repetido", tal como lo señala Fernández - Baca (2010): "es un juego simple que se juega simultáneamente T veces, de tal manera que en cada período t los jugadores conocen los movimientos anteriores de esta fecha." (p. 90).

Un claro ejemplo en el que puede formalizase un "juego repetido" , es el caso del dilema del prisionero. Por ello**,** supongamos que éste se repita $T < \infty$ veces, entonces ¿será posible que los jugadores puedan cooperar indefinidamente (no confiesen) y en un futuro puedan mantener la posición de no traicionarse el uno con el otro?

Cuadro del dilema del prisionero

Cuadro 3: Dilema del Prisionero

		Jugador 2	
		Denunciar	**Cooperar**
Jugador 1	**Denunciar**	(-1, -1)	(4, -4)
	Cooperar	(-4, 4)	(-1, 1)

Fuente: Fernández – Baca (2010)

En primera instancia, supondremos que este juego se jugará una sola vez, entonces los jugadores elegirán sus decisiones de manera simultánea. Por ello, si ambos cooperan (no se denuncian), cada uno obtendrá una ganancia de 2, del lado contrario, si ambos no cooperan (se denuncian), entonces, obtienen un resultado perjudicial de -1. Sin embargo, si uno denuncia al otro obtendría una ganancia de 4, mientras que el denunciado solo obtendría un resultado de -4.

De esta forma, podemos deducir que la decisión, en la cual, ambos no cooperen (se denuncian), es una estrategia dominante para cada uno de los jugadores, de modo que el equilibro de Nash estaría conformado por la combinación de estrategias (denunciar, denunciar) y cada jugador terminaría perdiendo -1.

Ahora, supongamos que los jugadores juegan este juego de manera repetida, lo que conlleva a la acumulación de información sobre los movimientos anteriores a medida que el juego se va desarrollando, entonces, el pago de cada jugador sería el valor actual de sus ganancias en todos los periodos transcurridos, utilizando el factor $\delta(0 \leq \varepsilon \leq 1)$. Este factor, en realidad se denotaría como : $\delta = \frac{1}{1+p}$, donde “p” , mediría la tasa de preferencia por el tiempo, es decir , esto indica que la persona se abstendría de denunciar hoy o postergaría su decisión durante el período.

Asimismo, si los juegos repetidos se juegan un numero finito de veces, el equilibrio se determinará encontrando el equilibrio en el periodo final de “T”, posteriormente, se distinguirá qué debe ocurrir en los periodos anteriores, “T-1”, “T-2”, “T”-3, hasta llegar al periodo inicial t=1.

En el periodo “T”, las estrategias debe demostrar un equilibro de Nash, cualquiera que sea en su vida pasada, puesto que, las decisiones en el periodo “T” son independientes del pasado, por ello, las combinaciones estratégicas tienen que ser las mismas que el equilibro de Nash - producido en el juego estático de un periodo - donde la decisión sería (denunciar, denunciar), por lo cual, ambos jugadores se traicionarían mutuamente.

Por otro lado, si se realizan juegos repetitivos un número infinito de veces, lo anterior dejaría de ser válido, es decir, $T = +\infty$, puesto que, la solución del juego depende de las reglas que ambos jugadores resuelvan al momento de jugar. Por ejemplo, si los jugadores deciden cooperar, el otro jugador cooperará en todos los períodos anteriores o si uno de ellos se traiciona en un período, el otro jugador traicionaría interminablemente.

Sin embargo, si ambos cooperan, definitivamente, la ganancia de cada uno a partir de cualquier periodo “t” será:

$$1(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots) = \frac{1}{1 - \delta}$$

Por otra parte, si un jugador traicionara al otro en el periodo “t”, se resuelve que:

$$4 - 2(1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots) = \frac{2}{1 - \delta} = \frac{4 - 5\delta}{1 - \delta}$$

De esta manera, podemos inducir que la diferencia entre lo que ganaría si traiciona al otro en el periodo “t”, si el otro cooperará, y lo que dejaría de ganar si los periodos siguiente ya que ambos se traicionarían mutuamente a partir del periodo “t+1” en adelante (Fernández – Baca, 2010) .

Entonces para que un jugador coopere se debe cumplir que: $4(1+\delta) > \frac{4-5\delta}{1-\delta}$

Esto denota que la ganancia de no confesar (cooperar) en un largo plazo, debe ser mayor a la ganancia de traicionar al jugador. Esto ocurriría, si $\delta > 1/5$ o denotado de un modo distinto, p <4. Entonces, podemos suponer que la estrategia de traicionar al otro jugador sería un equilibro de Nash si y solo si, el jugador en cuestión tiene una preferencia por el tiempo demasiada alta, mayor a 400% (p > 4), lo que finalmente, se deduce incierto.

Asimismo Fernández - Baca, (2010), señala que:

> Habría muchas soluciones de equilibrio, esto dependerá de las reglas que se fijen para el juego. Por ejemplo si un jugador se vengara cuando el otro lo ha traicionado, solo durara algunos periodos, o tardara en hacerse efectiva (reacción tardía), los valores de δ necesario para garantizar la cooperación podría variar significativamente y la traición podría ser menos improbable (p.93)

La diferencia entre los juegos repetidos en un número finito e infinito de veces es la existencia de un periodo final, donde los jugadores que juegan un número finito de veces, siempre serán tentados a no cooperar - denunciar -en el último período . En cambio, no existirá un último período en aquellos jugadores que juegen un número infinito de veces, razón por la cual, la cooperacion se vuelve posible .

d) Juegos con información imperfecta.

Los juegos con información imperfecta o incompleta también se les denomina juegos bayesianos (Gallego, 2013):

- En un juego con información completa las funciones de ganancias de los jugadores son de dominio público.
- En los juegos con información incompleta al menos un jugador no está seguro de la función de ganancias de otro jugador.
- En este tipo de juegos también se distingue entre juegos estáticos y juegos dinámicos, aunque la mayoría de los juegos bayesianos con interés económico son dinámicos (p. 99).

Para Fernández - Baca (2010), el equilibrio Nash bayesiano, “ es un conjunto de estrategias tales que cada jugador maximiza su ganancia esperada tomando en cuenta la distribución condicional de las estrategias de su competidores, para cada tipo de ganancias que él (ella) podría terminar teniendo” (p. 94).

Asimismo, Vásquez Cordano (2015), señala que en juegos con información imperfecta, “el jugador no conoce la historia anterior del juego, existe la incertidumbre. Cuando el juego es de dos o más jugadores, la naturaleza puede intervenir al inicio del juego de forma aleatoria” (p. 10); además éste se refiere a los juegos con información incompleta, argumentando que: “los jugadores no conocen con exactitud las estrategias y pagos de los demás participantes” (p. 10).

En esta situación de incertidumbre, afirma Fernández - Baca (2010), los competidores son capaces de determinar probabilidades; de forma subjetiva, a cada acción, además que sus decisiones estan basadas en la beneficio que esperan obtener de sus probables estategias (p. 93).

Harsanyi (1967 – 1968, citado en Fernández - Baca, 2010) la noción acerca del equilibrio de Nash, puede desarrollarse aún más en este tipo de juegos, donde los resultados de las acciones de los competidores son inciertos para limitar un equilibrio de Nash bayesiano (p. 93). Igualmente, en un juego bayesiano, los beneficios de cada competidor dependen de la realización de una variable aleatoria que solo el jugador conoce, dependiendo, además, de las acciones tomadas por éste y sus competidores.

Sin embargo, la distribución de probabilidad de dichas variables es conocida por el conjunto de competidores. Si son “n” los jugadores, entonces, puede existir hasta “n” variables de este tipo. La naturaleza es la que hace el primer movimiento, seleccionando las realizaciones de aquellas variables aleatorias, que definen el tipo de utilidad de cada competidor, pero cada uno de ellos puede observar la realización de su propia variable aleatoria (Fernández - Baca, 2010, p.64).

Para ilustrar esto, tomemos el ejemplo expuesto por , Fernández - Baca (2010):

> Consideremos el caso de un mercado con dos empresas: una que ya está produciendo desde hace cierto tiempo (empresa 1) y un potencial ingresante (empresa 2). La empresa 1 decide si va a construir o no una nueva planta y, simultáneamente, la empresa 2 decide si va a ingresar o no al mercado. Supongamos que la empresa 2 tiene incertidumbre respecto de si el costo para la empresa 1 de construir la planta es 3 ó 0, mientras que la empresa 1 conoce prefectamente su propio costo. En el cuadro 11.5 se muestran las matrices de pagos correspondientes a los dos tipos de costos. Como se puede apreciar allí, las ganacias de la empresa 2 dependen de si la empresa 2 decide o no construir, pero no se encuentran

directamente influenciadas por los costos de la empresa 1. En efecto, la empresa 2 va a encontrar rentable ingresar al mercado si y solo si la empresa 1 no invierte. Por otro lado, la empresa 1 tiene una estrategia dominante, que es “construir” si su costo es bajo y “no construir” si su costo es alto.

Sea “p” la probabilidad a priori que la empresa 2 le asigna al estado de la naturaleza en el que el costo de construcción para la empresa 1 es alto. Dado que la empresa 1 invierte si y solo si su costo es bajo, la empresa 2 ingresará al mercado cada vez que $p > ½$, y se mantendrá fuera del mercado si $p < ½$.

El juego se vuelve más complejo si el “costo bajo” ya no es 0 sino 1.5, tal como se muestra en la figura 15.En este juego, “no construir” sigue siendo la estrategia dominante para la empresa 1 si el costo es alto (p. 94).

		Empresa 2	
		Ingresar	No ingresar
Empresa 1	Construir	(0 , -1)	(2 , 0)
	No construir	(2 , 1)	(3 , 0)

Matriz de pago si el costo de contrucción para la empresa 1 es alto

		Empresa 2	
		Ingresar	No ingresar
Empresa 1	Construir	(3 , -1)	(5, 0)
	No construir	(2 , 1)	(3 , 0)

Matriz de pagos si el costo de construcción para la empresa 1 es bajo

Figura 15. Matrices de pagos de un juego con información imperfecta (costo alto = 3, costo bajo = 0)
Fuente: Fernandez Baca (2010)

Sin embargo, cuando el costo es bajo, la estrategia óptima de la empresa1 va a depender de si la empresa 2 decide o no ingresar. Si la empresa 1 le asigna una probabilidad “y” al ingreso de su potencial competidora, la decisión de “construir” será mejor que la de “no construir” si:

$$1.5y + 3.5 (1 – y) > 2y + 3 (1- y)$$

O sea, y < ½. El jugador 1 debe tratar, por lo tanto, de predecir el comportamiento de la empresa 2 para elegir su propia estrategia, al mismo tiempo que la empresa 2 no puede inferir la estrategia de la empresa 1 tomando únicamente como base las ganancias posibles de su competidora (p. 95).

		Empresa 2	
		Ingresar	**No ingresar**
Empresa 1	**Construir**	(0 , -1)	(2 , 0)
	No construir	(2 , 1)	(3 , 0)

Matriz de pago si el costo de contrucción para la empresa 1 es alto

		Empresa 2	
		Ingresar	**No ingresar**
Empresa 1	**Construir**	(1.5 , -1)	(3.5, 0)
	No construir	(2 , 1)	(3 , 0)

Matriz de pagos si el costo de construcción para la empresa 1 es bajo

Figura 16. Matriz de pagos de un juego con información imperfecta (costo alto = 3, costo bajo = 1.5)
Fuente: Fernández - Baca (2010)

CAPÍTULO IV

CASOS APLICADOS A LA REALIDAD

Aplicación de modelos oligopólicos

4.1.Microsoft vs Apple

Las grandes empresas estadounidenses nacidas en la década de 1970, Apple y Microsoft han protagonizado una de las grandes batallas empresariales en el mercado de sistemas operativos, debido a que, ambas empresas han desarrollado estrategias altamente competitivas para alcanzar el liderazgo.

Pero hubo un momento en la historia, en que dichas compañías se convirtieron en aliados, aunque esta alianza no duró mucho. Esto sucedió, precisamente, cuando se desarrolló la primera Macintosh, el fundador de Apple, Steve Jobs, le pidió a la compañía Microsoft, que creara una versión Basic para la Macintosh, pero después de que Apple anunciara la Macintosh como un sistema operativo que cambiaría totalmente la vida de las personas, Microsoft anunció el lanzamiento de Windows, aparentemente, ésta fue una copia de la tan anunciada Macintosh. Desde ese momento se desató la rivalidad, incluso se presentaron demandas por copia y engaño, pero en ninguno de estos casos, alguna de estas compañías salió como vencedor.

Actualmente, ambas empresas vienen innovando el mercado tecnológico con múltiples sistemas, pero la competencia en el mundo tecnológico resulta algo impredecible, pues, como ocurrió en el caso de la Macintosh, cuando una empresa anuncia un producto, puede que asuma riesgos inesperados, debido a que, la competencia puede que imite los adelantos tecnológicos del producto, incluso a unos costos más bajos, sin embargo, para ello la competencia además de tener gran conocimiento en el mercado, debe poseer grandes recursos y esto muy bien lo saben Apple y Microsoft. Puesto que, ambas usan sus grandes recursos para atacar a su competencia.

Otra manera en la que compiten estas empresas, se suscita a través de la creación de productos que ofrezcan algo nuevo, de tal manera que, hagan que el producto de la competencia se vuelva innecesario, un claro ejemplo la introducción al mercado un reproductor de música digital (iPod) por parte de Apple, algo que, Microsoft no logró igualar.

Con respecto al atractivo que tienen estas empresas, un informe de Estrategias de inversión comentó:

> Quedó estancada, casi fuera de juego y perdió el atractivo para los inversores. Microsoft pasó de ser el gigante tecnológico a pasarse de moda. Vio como por el arcén le adelantó casi sin darse cuenta Apple, que con el regreso de Steve Jobs resurgió de las cenizas para situarse en la cúspide de las empresas del sector. Y lo hizo hasta el punto de ser la compañía de mayor capitalización en el mercado norteamericano. (Estrategias de inversión, 2014)

Sin embargo, Microsoft no se quedó atrás, buscando así reestructurarse, utilizando para ello, distintas estrategias. Hoy, Microsoft se encuentra compitiendo, confiriéndole batalla a la compañía Apple.

4.2.Kodak vs Polaroid

El enfrentamiento generado entre las compañías fotográficas, Kodak y Polaroid, es sin lugar a duda, un clarísimo ejemplo de competencia estratégica aplicado a la realidad. El conflicto generado entre ambas compañías, surgió en el año 1976, cuando Kodak anunció públicamente, que éste desafiaría a la compañía fotográfica Polaroid, debido a que, esta última, manifestaba una conducta monopólica, puesto que, aspiraba a la posesión ilegítima de un segmento dentro del mercado de las fotografías instantáneas (mercado caracterizado esencialmente, por la restricción relacionada a ventas generada por las empresas).

Sin embargo, en el año 1975, se estimó que el 37.8% de las ventas de productos fotográficos en el mercado norteamericano, pertenecía a la compañía Kodak, mientras que, la compañía Polaroid solo poseía el 7,5% de dichas ventas, lo cual, lógicamente, se transmite en el volumen de beneficios obtenidos por cada empresa. Así, Kodak ostentó ganancias diez veces más altas que Polaroid, evidenciando una vez más, el gran poder de mercado alcanzado por esta. Cabe mencionar, que dicha competencia no fue una guerra, sino, una lucha por entrar en el segmento del mercado perteneciente a su competidor.

Por un lado, la decisión estratégica de la entrada de Kodak en el mercado de Polaroid, estaba en función a la valoración de la respuesta de esta última, es decir, siempre y cuando esta respuesta le generara un beneficio adecuado, para lo cual era necesario que el costo de tal acción no sea muy elevado.

Asimismo, la respuesta de Polaroid es de suma importancia, puesto que, el grado de su actuación en esta lucha, sería crucial para desestimar la operación de Kodak en el segmento de mercado que le pertenece, e incluso con la posibilidad de expulsarlo completamente de todo el mercado.

Por ello, la respuesta no solo se basaba en reducir los beneficios de Kodak, sino también en conseguir la renuncia de extensión al segmento de mercado perteneciente a Polaroid, como consecuencia de un costo elevado causado por dicha respuesta, lo que favorecería a Polaroid en el objetivo de recuperar el monopolio del segmento revelado.

De este modo, para el análisis (desde el punto de vista de la Teoría de juegos) del enfrentamiento entre las compañías fotográficas Kodak y Polaroid, se planteó que tras la respuesta de Polaroid ante la entrada de Kodak, se considerase la posibilidad de presionar a Kodak al abandono de su lucha. Así, al aplicar la introducción retrospectiva, se observó lo siguiente:

- **Cuando la posibilidad de expulsar a Kodak del segmento es alta**

En este caso, se define que Kodak pierde, debido a que el costo de extenderse en esta parte del mercado es muy elevado, mientras que, Polaroid tendría un aumento de su rentabilidad a mediano y largo plazo, como resultado de recuperar su segmento del mercado tras el abandono de Kodak.

Siendo la "lucha", el interés de la empresa Polaroid, razón por la cual, se descarta la posibilidad de compartir el mercado por parte de ésta. Mientras que, para la compañía Kodak, la mejor respuesta sería no entrar, con la finalidad de evitar pérdidas. (NO ENTRA, LUCHA).

- **Cuando la posibilidad de expulsar a Kodak del segmento es baja**

En esta situación, se observa que la respuesta de Polaroid ante la entrada de Kodak, no tuvo efectos adicionales, es decir, los costos de tal acción no son muy elevados, lo que significaría que su mejor respuesta será compartir el segmento con Kodak. Ocasionando, indefectiblemente, que la "entrada" sea el interés de Kodak, generándole un nivel de rentabilidad adecuado. (ENTRA, COMPARTE).

Conclusiones

- En el presente trabajo investigativo, se ha concluido que la utilización de modelos oligopólicos clásicos, llámense modelos de Cournot y Bertrand, respectivamente, tiene vigencia dentro del actual panorama investigativo ligado al Oligopolio y sus implicancias. Generándose así, la utilización preponderante de éstos, asimismo, se vislumbra que esta situación ha conllevado a la extensión o estudios con formalizaciones complejas que buscan trasladar los planteamientos propuestos en ambos modelos hacia múltiples contextos.
- Del mismo modo, cada modelo oligopólico, en relación a la naturaleza de sus planteamientos, detalla soluciones para resolver el comportamiento manifiesto de los mercados.
- Por ello, podemos afirmar que los modelos oligopólicos pueden estudiar las variaciones conductuales que manifiestan las empresas en un contexto real, ya sea mediante la elección de precio, cantidad e incluso mediante el comportamiento estratégico- manifestado a través del enfrentamiento o cooperación - por lo cual, estos modelos permiten entender y analizar los escenarios en los cuales pueden desenvolverse las empresas.
- En primer lugar, el modelo de Cournot, considera que la principal variable de decisión se encuentra determinada por el nivel de producción, conllevando a la simultaneidad de decisiones por parte de las empresas. En contraparte, Bertrand señala que las empresas compiten mediante la fijación de precios, discrepando, así, con el planteamiento expuesto por Cournot.

- Sin embargo, dentro de los modelos de competencia en dos etapas, los modelos de Stackelberg, Kreps y Scheinkman, Spence y Dixit, advierten que el estudio de la industria, está determinado por algo más que el precio y la producción, añadiendo la existencia de etapas dentro del comportamiento y toma de decisiones por parte de las empresas.
- Finalmente, dentro de la interacción estratégica, la Teoría de Juegos, se ha consolidado como el modelo con mayor aplicación a situaciones reales, existentes en los mercados oligopólicos, por ello, desde esta perspectiva, se plantea la elección estratégica y racional de una determinada acción que le confiera a la empresa un resultado provechoso para sí, generándose con ello, situaciones de interdependencia estratégica.
- Se concluye además que, las variaciones del mercado, coadyuvan a la modelización de enfoques que expliquen las variaciones de esta, sin embargo, el análisis plantea la utilización de más de una variable, puesto que, el cambio constante en los mercados, no permite el uso fijo de una sola variable.
- De esta manera, la búsqueda de un enfoque que trate de forma holística al comportamiento de los mercados, conllevará, lógicamente a que se utilicen novedosos métodos, desarrollando así, una aproximación más precisa y menos sesgada de éstos. De este modo, se podrá expresar la elección de los mercados en cada uno de los escenarios enunciados.

Bibliografía

Abramson, G. (2006). *Introducción a la teoria de juegos. Aplicaciones en el modelado matemático de sistemas biológicos*. Centro Atómico Bariloche, Instituto Balseiro y CONICET. Recuperado de: https://fisica.cab.cnea.gov.ar/estadistica/abramson/notes/Introduccion-a-los-juegos.pdf

Álvarez Causelo, P. (2013). *Teoría de Juegos*. Tema 1. Introducción. Universidad de Cantabria. Recuperado de: https://openlibra.com/es/book/download/teoria-de-juegos

Bazzano García , J. (2012). *Dinámica y Equilibrios de Nash de un Modelo Evolutivo de un Modelo Evolutivo de Competición entre Firmas y Trabajadores Bajo Regulación Externa* (Tesis de Magíster) Universidad de la República, Montevideo, Uruguay. Recuperado de: http://premat.fing.edu.uy/ingenieriamatematica/archivos/tesis_bruno_bazzano.pdf

Faíña Medín , J. (2005). *Teoría de los juegos: el nobel de economia y mucho más.* Universida de de A. Coruña. Recuperado de: http://www.gcd.udc.es/subido/catedra/teoria_juegos/teoria_de_los_juegos_el_nobel_de_economia_y_mucho_mas_2004.pdf

Fundación Nobel (1995). *John F. Nash Jr. – Biographical.* Nobelprize.org. Nobel Media AB 2014. Recuperado de: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1994/nash-bio.html

Irgoin, C. H. A. (2010*). Los Oligopolios en la Economía*: c*ontribuciones a la Economía*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Recuperado de: http://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/31739981/chai.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1485413889&Signature=ZWidR

Mze9HMrBKmjCD39IU330wg%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DLos_Oligopolio_en_la_EconomiaSL_S_S_SLSS.pdf

Kuhn, H. W., Harsanyi, J. C., Elten, R. S., Weibull, J. W., Damme, E. V., Nash, J., y otros. (s.f.). *The Work of John Nash Iin game theory*. Recuperado de: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1994/nash-lecture.pdf

Osborne, Martin J. (2003) *An Introduction to GameTheory*. Oxford: Oxford University. Press.

Pepall, L., Richards, D. & Norman G. (2006). *Organización Industrial. Teoría y Prácticas Contemporáneas*. (3a ed.,). México: Editorial Thomson.

Vela Meléndez, L. (2011). *Teoría de juegos y modelos de oligopolio*. Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. Recuperado de: https://web.ua.es/es/giecryal/documentos/teoria-juegos.pdf?noCache=1354884545431

Vela Meléndez, L. (2012). *Modelos de oligopolio*. Universidad Nacional Pedro Ruiz Gallo. Recuperado de: https://web.ua.es/es/giecryal/documentos/modelos-oligopolio.pdf?noCache=1354885404800

Rodriguez Cartabia, M. (2013).*Teoria de juegos evolutivos(*Tesis de linceciatura) Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina. Recuperado de: http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/licenciatura/tesis/2013/Mauro_Rodriguez_Cartabia.pdf

Romero, M. (2013). *Notas de Clase: Teoría de Juegos.* Recuperado de: http://econweb.ucsd.edu/~mtromero/pdfs/TeoJuegos201319/Notas.pdf

Torres, R. (2015). *Equilibrio de Nash.* Economía Financiera (Eco-44105), Maestría en Finanzas. Instituto Tecnológico Autónomo de México. Recuperado de: http://ciep.itam.mx/~rtorres/ecofin/nash.pdf

Referencias bibliográficas

Aumann, R. J. (1989). *Game theory*. In the new Palgrave Dictionary of Economics, 460-482.

Cerdá, E., Jimeno, J. L. & Pérez, J. (2004). *Teoría de Juegos.* Madrid , España: Pearson Prentice Hall.

Church, J., & Ware, R. (2000). *Industrial organization: A strategic Approach*. San Francisco: Mc Graw Irwin McGraw-Hill.

Fernández - Baca, J. (2010). *Microeconomía: Teoría y Aplicaciones* (2a ed., Tomo II). Lima: Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico.

Fudenberg, D., & Tirole, J. (1991). *Game Theory*. Cambridge: MA: MIT Press.

Gallego, S. H. (2013). Teoría de juegos. *Tema 5. Juegos dinámicos con información incompleta*. Univerdidad de Cantabria.

García Carpio , R. & Pérez - Reyes, R. (2012). *Modelos de oligopolio de productos homogéneos y viabilidad de acuerdos horizontales*. Lima, Perú. Recuperado de: http://files.pucp.edu.pe/departamento/economia/DDD336.pdf

Gracián Rodríguez, E. (2013). *Von Neuman: la teoría de juegos: piedra, papel, teorema.* Barcelona, España: Editorial RBA.

Gibbons, R. (1992). *Un primer curso de Teoría de juegos*. España: Antonio Boch, editor S.A. Recuperado de: https://books.google.com.pe/books?id=fqSEAwAAQBAJ&pg=PA47&lpg=PA47&dq=Modelo+de+Kreps-Scheinkman+hip%C3%B3tesis&source=bl&ots=HhTNVTYI35&sig=N_WGDN6BUhrPS2uHm4L76rVDO7o&hl=es-

Hibert, A. (2012). Instituto Tecnológico y de estudios superiores de Monterrry. Recuperado de: http://www.abelhibert.org/clases/oligopolio3.pdf

Estrategias de inversión. (2014). Apple y Microssoft: ¿Quién da más? *Estrategias de Inversión*.

Kafka, F. (1978). *Teoría Económica* (1ra ed.). Lima: Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico.

Mas - Colell, A., Whinston, D. & Green, R. (1995).*Microeconomic Theory*. Oxford: University Press; Oxford.

Nicholson, W. (2005). *Teoría Microeconómica: Principios básicos y ampliaciones* (11va. ed.). México, D. F.: Cengage Learning.

Ordoñez, G. (2006). *Notes on Nash Equilibrium .ECON 201B - Game Theory*. UCLA. Recuperado de: https://www.sas.upenn.edu/~ordonez/pdfs/ECON%20201/NoteNE.pdf

Ordóñez de Haro, J. M. (2009). *Aspectos Económicos del funcionamiento competitivo de los mercados. (Vol.II)*. Sevilla, España: Agencia de Defensa de la Competencia de Andalucía.

Ozdaglar, A. (2010). *Game Theory with Engineering Applications. Lecture 5: Existence of a Nash Equilibrium*. MIT. Recuperado de: https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-254-game-theory-with-engineering-applications-spring-2010/lecture-notes/MIT6_254S10_lec05.pdf

Paredes, R. & Tarziján J. (2006). *Organización Industrial para la estrategia empresarial.* Mexico: Prince Hall. Recuperado de : https://pablovilanez1974.wikispaces.com/file/view/organizacion-industrial-para-la-estrategia-empresarial-jorge-tarzijan-pearson-2da-edicion-140109191519-

phpapp02.pdf/540127668/organizacion-industrial-para-la-estrategia-empresarial-jorge-tarzijan-pearson-2

Pereyra, A. & Triunfo, P. (s.f.). *Oligopolio.* Universidad de la República. Recuperado de: http://decon.edu.uy/~mito/oligopolio.pdf

Pérez, R., & Espejo, E. (2006). *Prácticas Competitivas*. OSINERG, Perú. Recuperado de: http://www.ariae.org/download/cursos/IV_CursoRegulacionEnergeticaAriae/PDF_N14_N15_PracticasCompetitivas.pdf

Pindyck, R. & Rubinfeld, D. (2009). *Microeconomía* (7ma ed.). Madrid: Pearson.

Ricart, J. E. (1988). *Una introducción a la teoría de los juegos*. Barcelona, España: IESE Business School - Universidad de Navarra.

Rojas Merced, J. (2015). *La estructura de Mercado Oligopólica.* Universidad Autónoma del Estado de México. Toluca, Mexico. Recuperado de: http://ri.uaemex.mx/oca/view/20.500.11799/33872/1/secme-19481.pdf

Stephen, M. (2001). *Kreps y Scheinkman with product differentiation: an expository note.* Recuperado de: http://www.krannert.purdue.edu/faculty/smartin/aie2/kspd1201.pdf

Turocy, T. L. & Von Stengel, B. (2001). *Game Theory*. CDAM Research Report LSE-CDAM-2001-09. Recuperado de: http://www.cdam.lse.ac.uk/Reports/Files/cdam-2001-09.pdf

Tirole, J. (1990). *Teoría de la organización industrial.* Barcelona: Ariel S.A.

UDESA (s.f). Recuperado de : http://d.yimg.com/kq/groups/24986687/621830873/name/teor%C3%ADa+de+juegos+UDESA.pdf

Varian, Hal R. (1999). *Microeconomía Intermedia*: *Un enfoque actual* (5ta. ed.). Barcelona: Antonio Bosch Editors.

Vásquez Cordano, A. (2015). *Curso de Organización Industrial S*esión 2A: Teoría de Juegos. Curso de Extensión Universitaria 2015, OSIPTEL, Perú.

Vásquez Cordano, A. (2015). *Curso de Organización Industrial I*. Sesión 3: Teoría del Oligopolio I. Curso de Extensión Universitaria 2015, OSIPTEL, Perú.

Villalón, T. A., & Caraballo, M. A. (Febrero de 2015). *Un paseo por la historia de la Teoría de Juegos.* Boletín de Matemáticas 22(1).