HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author
Miriam Hägele

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Moniulotteinen säännöllinen vaihtelu ja suuret poikkeamat

Oppiaine — Läroämne — Subject
Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Marraskuu 2016	52 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Säännöllinen vaihtelu on paksuhäntäisten jakaumien tarkastelussa tärkeä osa-alue. Tässä työssä tarkastellaan sekä säännöllisesti vaihtelevia satunnaismuuttujia että säännöllisesti vaihtelevia satunnaisvektoreita ja niiden ominaisuuksia. Satunnaismuuttuja on säännöllisesti vaihteleva, jos sen häntäfunktio on säännöllisesti vaihteleva jollain negatiivisella indeksillä. Silloin pätee: mitä isompi on säännöllisen vaihtelun indeksi, sitä enemmän momentteja on olemassa.

Satunnaisvektorin säännöllinen vaihtelu määritellään joukon Radon-mitan avulla. Satunnaisvektori on säännöllisesti vaihteleva, jos n kertaa todennäköisyys, että satunnaisvektori kuuluu joukkoon $a_n A$, missä a_n on kasvava jono, suppenee kohti joukon A Radon-mittaa, kun n kasvaa rajatta. Jos satunnaisvektori on säännöllisesti vaihteleva, niin myös jokainen satunnaisvektorin lineaarikombinaatio on säännöllisesti vaihteleva samalla indeksillä, ja sen lisäksi pätee samanlainen indeksin skaalausominaisuus kuin yksiulotteisessa tapauksessa.

Alussa määritellään satunnaisvektorin säännöllinen vaihtelu ja todistetaan siihen liittyvä Karamatan lause sekä Fuk-Nagaev-epäyhtälöt, jotka antavat ylärajoja suurien poikkeamien todennäköisyyksille. Karamatan lause antaa muun muassa yhteyden säännöllisesti vaihtelevan tiheysfunktion ja paksuhäntäisyyden välillä.

Sitten laajennetaan säännöllinen vaihtelu satunnaisvektoreihin ja tutkitaan erilaisia säännöllisesti vaihtelevien satunnaisvektoreiden ominaisuuksia. Esitetään myös satunnaisvektorin ja sen komponenttien säännöllisen vaihtelun yhteys. Lopuksi todistetaan suurten poikkeamien päälause ja sovelletaan lausetta esimerkkien valossa. Lauseen mukaan voidaan laskea suhde satunnaisvektorien summan rajatodennäköisyyden ja yksittäisten satunnaisvektoreiden rajatodennäköisyyksien välillä.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords
Säännöllinen vaihtelu, Paksuhäntäiset satunnaisvektorit, Suuret poikkeamat

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited
Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Moniulotteinen säännöllinen vaihtelu ja suuret poikkeamat

Miriam Hägele

9. marraskuuta 2016

Sisältö

1 Johdanto **3**

2 Yksiulotteinen säännöllinen vaihtelu **4**
2.1 Määritelmät 4
2.2 Karamatan lause 8
2.3 Fuk-Nagaev -epäyhtälöt 20

3 Säännöllinen vaihtelu **32**
3.1 Epämääräinen suppeneminen 32
3.2 Määritelmä 33
3.3 Esimerkkejä 38

4 Suuret poikkeamat **41**
4.1 Suurten poikkeamien päälause 41
4.2 Esimerkkejä 49

Viitteet **52**

1 Johdanto

Vakuutusyhtiöille on tärkeää tutkia erilaisten todennäköisyysjakaumien käyttäytymistä arvioimaan yhtiön vakavaraisuutta. Monet vakuutuslajit, kuten esimerkiksi rakennusten vahinkovakuutukset, ovat sellaisia, joiden todennäköisyys sille, että yritys joutuu maksaamaan suuren korvaussumman ei olekaan niin pieni, että sen voisi jättää huomioimatta. Tämäntyypisiä jakaumia kutsutaan todennäköisyyslaskennassa paksuhäntäisiksi, sillä niiden häntätodennäköisyys on suhteellisen suuri.

Yksi tapa luonnehtia paksuhäntäisiä todennäköisyysjakaumia on säännöllinen vaihtelu. Jotkut paksuhäntäisten satunnaismuuttujien häntäfunktiot ovat säännöllisesti vaihtelevia, eli häntäfunktiot käyttäytyvät rajalla samalla tavalla. Niiden tarkastelun voidaan soveltaa sännöllisesti vaihtelevien funktioiden teoriaa, jonka Jovan Karamata kehitti yksiulotteisessa tapauksessa. Myöhemmin säännöllisesti vaihtelevien häntäfunktiodem käsite laajennettiin moniulotteiseen tapaukseen tutkimalla satunnaisvektorien rajatodennäköisyyksiä.

Tässä tutkielmassa esitetään yleisiä säännöllisesti vaihteleviin satunnaisvektoreihin liittyviä perustuloksia sekä tarkastellaan satunnaisvektoreiden rajakäyttäytymistä ja annetaan suuriin poikkeamiin liittyvä lause. Lauseen mukaan voidaan laskea suhde satunnaisvektorien summan rajatodennäköisyyden ja yksittäisten satunnaisvektoreiden rajatodennäköisyyksien välillä.

Alussa määritellään satunnaisvektorin säännöllinen vaihtelu ja todistetaan siihen liityvä Karamatan lause sekä Fuk-Nagaev -epäyhtälöt, jotka antavat ylärajoja suurien poikkeamien todennäköisyyksille. Sitten laajennetaan säännöllinen vaihtelu satunnaisvektoreihin ja tutkitaan erilaisia säännöllisesti vaihtelevien satunnaisvektoreiden ominaisuuksia. Esitetään myös satunnaisvektorin ja sen komponenttien säännöllisen vaihtelun yhteys. Lopuksi todistetaan suurten poikkeamien päälause ja sovelletaan lausetta esimerkkien valossa. Perusesimerkkinä säännöllisesti vaihtelevasta satunnaismuuttujasta käytetään Pareto-jakautunutta satunnaismuuttujaa.

2 Yksiulotteinen säännöllinen vaihtelu

Moniulotteisen säännöllisen vaihtelun teoriassa pyritään sieventämään satunnaisvektoreita yksiulotteisiin satunnaismuuttujiin ja käyttämään yksiulotteisen teorian tuloksia. Siksi tuodaan ensin yksiulotteinen säännöllinen vaihtelu mieleen ja todistetaan tärkeät perustulokset kuten Karamatan lause ja Fuk-Nagaevin epäyhtälöitä, johon moniulotteinen teoria perustuu. Myöhemmässä luvussa esitetään myös tulos siitä, miten moniulotteinen säännöllinen vaihtelu liittyy yksiulotteiseen säännölliseen vaihteluun.

2.1 Määritelmät

Yksi mitallisten funktioiden ominaisuus on säännöllinen vaihtelu. Sen voi määritellä eri pisteissä, mutta tässä tarkastellaan kuitenkin vain säännöllisesti vaihtelevia funktioita pisteessä '∞'.

Määritelmä 2.1.1 Mitallinen funktio $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α, jos

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^{\alpha} \quad \text{kaikilla } x > 0.$$

Funktiota f sanotaan hitaasti vaihtelevaksi, jos $\alpha = 0$. Hitaasti vaihtelevia funktioita merkitään yleensä symboolilla $L(x)$.

Esimerkki 2.1.2 L' Hospitalin lauseen avulla nähdään helposti, että esimerkiksi funktiot $\log(x^2)$, $\sqrt{x}$ ja $\log\sqrt{x}$ ovat säännöllisesti vaihtelevia, kuten myös polynomit.
Vakiofunktiot ja $\log x$ ovat esimerkkejä hitaasti vaihtelevista funktioista. L'Hospitalin lausetta käyttäen voidaan todeta, että myös funktiot $e^{(\log x)^2}$ ja $\log(\log(x + 1))$ ovat hitaasti vaihtelevia.

Huomautus 2.1.3 Säännöllisesti vaihtelevat funktiot voidaan aina esittää muodossa $f(x) = x^{\alpha}L(x)$, missä α on funktion säännöllisen vaihtelun indeksi ja $L(x)$ on hitaasti vaihteleva funktio, eli funktio, jolle $\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1$ pätee.

Sovelluksissa käytetään säännöllistä vaihtelua erityisesti paksuhäntäisten satunnaismuuttujien tarkastelussa. Huomataan kuitenkin, etteivät kaikki sovelluksissa käytetyt paksuhäntäiset jakaumat ole säännöllisesti vaihtelevia. Paksuhäntäisyys määritellään kevythäntäisyyden avulla.

Määritelmä 2.1.4 Olkoon X satunnaismuuttuja, jolla on kertymäfunktio F. Satunnaismuuttuja X on kevythäntäinen, jos

$$\mathbb{E}(e^{sX}) < \infty \quad \text{jollain } s > 0.$$

Muita satunnaismuuttujia kutsutaan paksuhäntäisiksi.

Määritelmästä seuraa suoraan, että paksuhäntäisen jakauman momenttigeneroiva funktio on kaikilla $s > 0$ ääretön. Suurten poikkeamien teoriassa sovelletaan säännöllistä vaihtelua satunnaismuuttujiin.

Huomautus 2.1.5 Jos satunnaismuuttujan X häntäfunktio $\overline{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$ ($\alpha > 0$), sanotaan, että satunnaismuuttuja X on säännöllisesti vaihtelevaindeksillä α, toisin sanoen $X \in \mathrm{RV}_\alpha$.

Yksi tärkeistä paksuhäntäisistä jakaumista on Pareto-jakauma. Näytetään ensin, että Pareto-jakauma on paksuhäntäinen ja sovelletaan myöhemmin Pareto-jakautunutta satunnaismuuttujaa erilaisiin tuloksiin.

Esimerkki 2.1.6 Pareto-jakauma:
Olkoot $\alpha > 0$ ja $K > 0$ vakioita. Pareto-jakauman häntäfunktio määritellään kaikilla $x \geq 0$ seuraavaksi:

$$\overline{F}(x) = \Big(\frac{K}{K+x}\Big)^{\alpha}.$$

Pareto-jakauma on eräs jakauma, jonka häntä on säännöllisesti vaihteleva, sillä

$$\frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(t)} = \frac{\left(\frac{K}{K+tx}\right)^{\alpha}}{\left(\frac{K}{K+t}\right)^{\alpha}} = \Big(\frac{K+t}{K+tx}\Big)^{\alpha} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} x^{-\alpha}$$

ja satunnaismuuttujan säännöllisen vaihtelun indeksi on α.

Palataan Pareto-jakauman esimerkkiin vielä muissa yhteyksissä ja myös moniulotteisessa tapauksessa. Oletetaan silloin aina, että $X \sim \text{Pareto}(\alpha, K)$, missä $\alpha, K > 0$, jos ei toisin mainita. Pareto-jakautuneen satunnaismuuttujan lisäksi on olemassa vielä monia muita säännöllisesti vaihtelevia satunnaismuuttujia. Esitetään niistä tässä Burr-jakauma ja Frechet-jakauma.

Esimerkki 2.1.7 Burr-jakauma:
Burr-jakauma määritellään häntäfunktion avulla kaikilla $x \geq 0$

$$\overline{F}(x) = \Big(\frac{K}{K+x^{\tau}}\Big)^{\alpha},$$

missä $K, \alpha, \tau > 0$. Samalla tavalla kuten edellisessä esimerkissä huomataan, että Burr-jakautunut satunnaismuuttuja on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha\tau$.

Esimerkki 2.1.8 Frechet-jakauma:
Positiivinen satunnaismuuttuja X, joka noudattaa Frechet-jakaumaa, määritellään jakauman kertymäfunktion avulla. Parametri α on aidosti postitiivinen ja

$$F(x) = \exp(-x^{-\alpha}).$$

L'Hospitalin lauseen nojalla pätee

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1 - e^{-(tx)^{-\alpha}}}{1 - e^{-t^{-\alpha}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{-x^{-\alpha}\alpha t^{-\alpha-1} e^{-(tx)^{-\alpha}}}{-\alpha t^{-\alpha-1} e^{-t^{-\alpha}}} \\
&= x^{-\alpha} \lim_{t\to\infty} e^{-t^{-\alpha}(x^{-\alpha}-1)} = x^{-\alpha},
\end{aligned}$$

joten Frechet-jakautunut satunnaismuuttuja on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α.

Satunnaismuuttujan häntäfunkion säännöllisen vaihtelun ja sen paksuhäntäisyyden välillä on seuraava yhteys.

Lemma 2.1.9 *Jos $\overline{F}$ on säännöllisesti vaihteleva jollain indeksillä $-\alpha, \alpha > 0$, niin pätee*

$$\mathbb{E}(X^\beta) < \infty \quad \textit{kaikilla } \beta < \alpha$$

ja

$$\mathbb{E}(X^\beta) = \infty \quad \textit{kaikilla } \beta > \alpha.$$

Lemman todistus löytyy esimerkiksi syksyn 2014 kurssin "Äärimmäisten ilmiöiden teoria"monisteesta.

Huomautus 2.1.10 Edellisestä lemmasta nähdään suoraan, että häntäfunktion säännöllisen vaihtelun indeksistä voidaan päätellä, mitkä satunnaismuuttujan momentit ovat olemassa.

Jos satunnaismuuttuja X on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α, ($\alpha > 0$) niin kaikki α:n pienemmät momentit ovat olemassa ja kaikki suuremmat momentit ovat äärettömiä. Esimerkiksi odotusarvo on olemassa vain, kun $\alpha > 1$ ja varianssi on olemassa vain, kun $\alpha > 2$. Paretojakauman odotusarvo ja varianssi on helppo laskea.

Esimerkki 2.1.11 Pareto-jakautuneen satunnaismuuttujan odotusarvolle pätee

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty \overline{F}(x)\mathrm{d}x = \int_0^\infty \Big(\frac{K}{K+x}\Big)^\alpha \mathrm{d}x = K^\alpha \Big/_0^\infty \frac{1}{-\alpha+1}(K+x)^{-\alpha+1} \\
&= K^\alpha \frac{1}{-\alpha+1}(-K^{-\alpha+1}) = \begin{cases} \infty & \text{jos } \alpha \le 1 \\ \frac{K}{\alpha-1} & \text{jos } \alpha > 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

eli odotusarvo on olemassa vain kun $\alpha > 1$. Satunnaismuuttujan toinen momentti on olemassa vain kun $\alpha > 2$, joten tarkastellaan tilannetta, jossa $\alpha > 2$. Derivoimalla saadaan

$$f(x) = \alpha K^\alpha (K+x)^{-\alpha-1},$$

joten osittaisintegroinnista seuraa

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^\infty x^2 K^\alpha \alpha (K+x)^{-\alpha-1}\mathrm{d}x \\
&= K^\alpha\Big(- \Big/_0^\infty x^2(K+x)^{-\alpha} + \int_0^\infty 2x(K+x)^{-\alpha}\mathrm{d}x\Big) \\
&= 2K^\alpha\Big(\Big/_0^\infty \frac{x(K+x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \int_0^\infty \frac{(K+x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\mathrm{d}x\Big) \\
&= -\frac{2K^\alpha}{(-\alpha+1)(-\alpha+2)} \Big/_0^\infty (K+x)^{-\alpha+2} = \frac{2K^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}.
\end{aligned}
$$

Helposti nähdään, että variansille pätee

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{2K^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \frac{K^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha K^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)},$$

kun $\alpha > 2$.

Sovelluksissa tarkastellaan kuitenkin yleensä vain jakaumia, joiden varianssi on olemassa, joten on luonnollista olettaa esimerkeissä, että $\alpha > 2$.

Kevythäntäisillä jakaumilla kaikki momentit ovat olemassa, joten lemmasta seuraa suoraan, että jos $\overline{F} \in \mathrm{RV}_{-\alpha}$, niin satunnaismuuttuja on paksuhäntäinen. Tämä on vain implikaatio, sama seuraus ei päde toisin päin, toisin sanoen kaikki paksuhäntäiset jakaumat eivät ole säännöllisesti vaihtelevia. Esimerkiksi Weibull-jakauma on jollain parametreilla paksuhäntäinen, muttei säännöllisesti vaihteleva.

Esimerkki 2.1.12 Weibull-jakauma:
Weibull-jakauman häntäfunktio määritellään

$$\overline{F}(x) = e^{-cx^{\tau}},$$

missä $c > 0$ ja $\tau > 0$ ovat vakioita.
Jos valitaan $0 < \tau < 1$, niin jakauma on paksuhäntäinen, sillä kaikilla $s > 0$ pätee

$$\mathbb{E}(e^{sX}) = s\int_0^{\infty} e^{sx}\mathbb{P}(X > x)\mathrm{d}x = s\int_0^{\infty} e^{sx-cx^{\tau}}\mathrm{d}x = \infty.$$

Jos $\tau \geq 1$, niin voidaan todeta, että jakauma on kevythäntäinen. Näytetään vielä, että Weibull-jakauma ei ole säännöllisesti vaihteleva. Jos $x > 1$, niin pätee myös $x^{\tau} - 1 > 0$, joten

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-c(tx)^{\tau}}}{e^{-ct^{\tau}}} = \lim_{t\to\infty} e^{-c((tx)^{\tau}-t^{\tau})} = 0,$$

eli Weibull-jakauma ei ole säännöllisesti vaihteleva.

2.2 Karamatan lause

Serbialainen matemaatikko Jovan Karamata on tutkinut säännöllisesti vaihtelevia funktioita jo 1930-luvulla. Yksi keskeinen tulos säännöllisesti vaihtelevasta funktioista on hänen mukansa nimetty Karamatan lause. Tämän luvun päälähde on [11].

Lause 2.2.1 *Karamatan lause*
Olkoon $x > 0$.

i) Jos $f \in \mathrm{RV}_{\alpha}$, *jolla* $\alpha \geq -1$, *niin* $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \in \mathrm{RV}_{\alpha+1}$ *ja*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} = \alpha + 1. \tag{2.1}$$

Jos $x > 0$ *ja* f *on säännöllisesti vaihteleva indeksillä* α, *jolla* $\alpha < -1$ *(tai* $\alpha = -1$ *ja* $\int_x^{\infty} f(s)\mathrm{d}s < \infty$*), niin* $\int_x^{\infty} f(s)\mathrm{d}s$ *on äärellinen ja säännöllisesti vaihteleva indeksillä* $\alpha + 1$. *Sen lisäksi pätee*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\int_x^{\infty} f(s)\mathrm{d}s} = -\alpha - 1. \tag{2.2}$$

ii) Jos toisaalta funktiolle f pätee

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} = \alpha \in (0,\infty), \tag{2.3}$$

niin funktio on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha - 1$ ja jos $\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t < \infty$ ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t} = \alpha \in (0,\infty), \tag{2.4}$$

niin $f \in \mathrm{RV}_{-\alpha-1}$.

Todistus:

i) Todistetaan vain tapaus, jossa f on jatkuva funktio. Tarkastellaan ensin tapausta, missä $\alpha \geq -1$. Muuttujanvaihdon avulla saadaan yhtäsuuruus

$$\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{xf(x)} = \int_0^1 \frac{f(sx)}{f(x)}\mathrm{d}s,$$

jos valitaan $t = sx$.

Ensimmäisenä osoitetaan, että $\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t = \infty$, jos $\alpha > -1$. Funktion f säännöllisestä vaihtelusta seuraa

$$\lim_{s\to\infty} f(2s)/f(s) = 2^\alpha$$

ja koska $\alpha > -1$ pätee $2^\alpha > \frac{1}{2}$. Siis jostain indeksistä s_0 alkaen pätee $2f(2s) > f(s) > 0$ kaikilla $s > s_0$, joten jos valitaan n siten, että $2^n > s_0$, niin

$$\int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{2^n}^{2^{n+1}} f(2t)\mathrm{d}t > \int_{2^n}^{2^{n+1}} f(t)\mathrm{d}t > 0,$$

missä yhtäsuuruus seuraa muuttujanvaihdosta, ja epäyhtälö yllä olevasta epäyhtälöistä. Merkitään symbolilla n_0 pienin indeksi n, jolle $2^n > s_0$. Silloin

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t &\geq \sum_{n\geq n_0} \int_{2^n}^{2^{n+1}} f(t)\mathrm{d}t \geq \sum_{n\geq n_0} \int_{2^{n+1}}^{2^{n+2}} f(t)\mathrm{d}t \\ &> \sum_{n\geq n_0} \int_{2^{n_0}}^{2^{n_0+1}} f(t)\mathrm{d}t = \infty.\end{aligned}$$

Asettamalla $x > 0$ funktio $f(xs)$ on edelleen säännöllisesti vaihteleva, ja oletuksesta $\alpha > -1$ seuraa

$$\int_0^t f(sx)\mathrm{d}s \sim \int_N^t f(sx)\mathrm{d}s, \qquad \text{kun } t \to \infty,$$

jollain $N < \infty$.

Kiinnitetään $x > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa tarpeeksi suuri luku N siten, että kaikilla $s > N$

$$(1-\varepsilon)x^\alpha f(s) \leq f(sx) \leq (1+\varepsilon)x^\alpha f(s),$$

koska funktio f on säännöllisesti vaihteleva. Nyt yläraja-arvolle pätee

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to\infty} \frac{\int_0^{tx} f(s)\mathrm{d}s}{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s} &= \limsup_{t\to\infty} \frac{\int_0^t x f(sx)\mathrm{d}s}{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s} = \limsup_{t\to\infty} \frac{x\int_N^t f(sx)\mathrm{d}s}{\int_N^t f(s)\mathrm{d}s} \\
&\leq \limsup_{t\to\infty} \frac{x\int_N^t (1+\varepsilon)x^\alpha f(s)\mathrm{d}s}{\int_N^t f(s)\mathrm{d}s} = (1+\varepsilon)x^{\alpha+1},
\end{aligned}$$

muuttujanvaihdon ja aikaisempien tulosten nojalla. Alaraja-arvolle saadaan vastaavilla argumenteilla

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\int_0^{tx} f(s)\mathrm{d}s}{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s} \geq (1-\varepsilon)x^{\alpha+1},$$

joten ollaan todistettu, että $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha + 1$, jos $\alpha > -1$.

Jos $\alpha = -1$, niin joko $\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}s < \infty$, joten $\int_0^x f(s)\mathrm{d}s \in \mathrm{RV}_{\alpha+1} = \mathrm{RV}_0$ tai $\int_0^\infty f(s)\mathrm{d}s = \infty$. Sitten saadaan samalla argumenteilla kuin yllä olevissa tarkasteluissa $\int_0^x f(s)\mathrm{d}s \in \mathrm{RV}_0$, eli integraali $\int_0^x f(s)\mathrm{d}s$ on hitaasti vaihteleva.

Todistetaan seuraavaksi yhtälö (2.1), jos $f \in \mathrm{RV}_\alpha$, missä $\alpha \geq -1$. Integroimalla saadaan

$$\int_1^x \frac{f(t)}{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t = \log\Big(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big) - \log\Big(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\Big),$$

joten

$$\exp\Big(\int_1^x \frac{f(t)}{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\Big) = \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t} \tag{2.5}$$

ja

$$\frac{f(x)}{\int_0^x f(s)\mathrm{d}s}\exp\Big(\int_1^x \frac{f(t)}{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\Big) = \frac{f(x)}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}. \tag{2.6}$$

Määritellään funktio $g(x) = \frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ ja tutkitaan funktion $(g(x))^{-1} = \frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{xf(x)}$ yläraja-arvoa. Fatoun lemman ja f:n säännöllisen vaihtelun nojalla pätee

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{xf(x)} &\geq \liminf_{x\to\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{xf(x)} = \liminf_{x\to\infty}\int_0^1 \frac{f(sx)}{f(x)}\mathrm{d}s\\ \geq \int_0^1 \liminf_{x\to\infty}\frac{f(sx)}{f(x)}\mathrm{d}s &= \int_0^1 s^\alpha \mathrm{d}s = \frac{1}{\alpha+1},\end{aligned}$$

joten yläraja-arvon määritelmästä seuraa

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} \leq \alpha+1.$$

Funktio $g(x) = \frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ on siis rajoitettu, kun x on tarpeeksi suuri. Sen lisäksi pätee $xf(x) \in \mathrm{RV}_{\alpha+1}$ ja $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \in \mathrm{RV}_{\alpha+1}$ joten $g(x)$ on hitaasti vaihteleva, sillä

$$\lim_{t\to\infty}\frac{g(xt)}{g(t)} = \lim_{t\to\infty}\frac{xtf(xt)}{tf(t)}\Big(\frac{\int_0^{xt} f(s)\mathrm{d}s}{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\Big)^{-1} = x^{\alpha+1}x^{-(\alpha+1)} = x^0.$$

Funktion $g(x)$ hitaan vaihtelun nojalla pätee

$$\lim_{t\to\infty}\Big(\frac{g(xt)}{g(t)} - \frac{g(t)}{g(t)}\Big) = 0,$$

joten myös $\frac{g(xt)-g(x)}{t} \to 0$, kun $x \to \infty$ ja dominoidun konvergenssin lauseen seurauksena saadaan

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^s \frac{g(xt)-g(x)}{t}\mathrm{d}t = \int_1^s \lim_{x\to\infty}\frac{g(xt)-g(x)}{t}\mathrm{d}t = 0.$$

Esitetään tämä toisessa muodossa eli

$$0 = \lim_{x\to\infty}\Big(\int_1^s \frac{g(xt)}{t}\mathrm{d}t - \int_1^s \frac{g(x)}{t}\mathrm{d}t\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\int_1^s \frac{g(xt)}{t}\mathrm{d}t - g(x)\log s\Big),$$

joten

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^s \frac{g(xt)}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} g(x)\log s. \tag{2.7}$$

Yhtälöstä (2.6) nähdään, että

$$\int_0^1 f(s)\mathrm{d}s \exp\Big(\int_1^x \frac{f(t)}{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\Big) = \int_0^x f(s)\mathrm{d}s \in \mathrm{RV}_{\alpha+1}$$

ja säännöllisen vaihtelun nojalla pätee

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^{xs} f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} = s^{\alpha+1},$$

joten

$$\begin{aligned}
(\alpha+1) \quad & \log s = \lim_{x\to\infty} \log \frac{\int_0^{xs} f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} = \lim_{x\to\infty} \Big(\log \int_0^{xs} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\Big) \\
= \quad & \lim_{x\to\infty} \Big(\log \int_0^1 f(s)\mathrm{d}s + \log\Big(\exp \int_1^{xs} \frac{f(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t\Big) \\
& - \log \int_0^1 f(s)\mathrm{d}s - \log\Big(\exp \int_1^x \frac{f(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t\Big)\Big) \\
= \quad & \lim_{x\to\infty} \int_x^{xs} \frac{f(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t = \lim_{x\to\infty} \int_1^s \frac{xf(xu)}{\int_0^{xu} f(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}u \\
= \quad & \lim_{x\to\infty} \int_1^s \frac{g(xu)}{u}\mathrm{d}u = \lim_{x\to\infty} g(x) \log s,
\end{aligned}$$

jossa viimeinen rivi seuraa muuttujanvaihdosta $t = xu$ ja yhtälöstä (2.7). Saadaan siis

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} = \alpha + 1,$$

joten (2.1) pätee. Tapaus $\alpha \geq -1$ on siis todistettu.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta $\alpha < -1$.
On osoitettava, että $\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t$ on äärellinen ja säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha + 1$, sekä $\lim_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t} = -(\alpha+1)$. Näytetään ensin, että $\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t$ on äärellinen ja säännöllisesti vaihteleva. Jos t on tarpeeksi suuri ja $\varepsilon > 0$ kiinnitetty, pätee

$$f(s) \leq (1+\varepsilon)s^\alpha \quad \text{kaikilla } s \geq t,$$

joten positiiviselle x:n arvolle

$$\int_x^\infty f(s)\mathrm{d}s = \int_x^t f(s)\mathrm{d}s + \int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s \leq c + (1+\varepsilon)\int_t^\infty s^\alpha \mathrm{d}s < \infty,$$

missä $c = \int_x^t f(s)\mathrm{d}s$, eli integraali on äärellinen. Säännollisen vaihtelun todistamiselle huomataan, että samoin kuten tapauksessa $\alpha \geq -1$ on olemassa $\varepsilon > 0$ ja tarpeeksi suuri $t_0 < \infty$, joille

$$(1-\varepsilon)f(t)x^\alpha \leq f(tx) \leq (1+\varepsilon)f(t)x^\alpha \quad \text{kaikilla } t \geq t_0.$$

Edelleen saadaan muuttujanvaihtosta ja funktion f säännöllisestä vaihtelusta

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{xt}^\infty f(s)\mathrm{d}s}{\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^\infty xf(ux)\mathrm{d}u}{\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s} \leq \lim_{t\to\infty}(1+\varepsilon)xx^\alpha \frac{\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s}{\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s} \\ &= (1+\varepsilon)x^{\alpha+1},\end{aligned}$$

jos $t \geq t_0$. Samalla tavalla saadaan alarajaksi $(1-\varepsilon)x^{\alpha+1}$, joten $\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha+1$. On vielä osoitettava, että (2.2) pätee. Huomataan, että

$$\Big(\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s\Big)' = -f(t),$$

koska $f(x)$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha < -1$. Integroimalla funktio $\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s}$ saadaan

$$-\int_1^x \frac{-f(t)}{\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t = -\log\Big(\int_x^\infty f(s)\mathrm{d}s\Big) + \log\Big(\int_1^\infty f(s)\mathrm{d}s\Big),$$

joten

$$\exp\Big(\int_1^x \frac{f(t)}{\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\Big) = \frac{\int_1^\infty f(s)\mathrm{d}s}{\int_x^\infty f(s)\mathrm{d}s}. \tag{2.8}$$

Olkoon jatkossa $h(x) = \frac{xf(x)}{\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t}$ ja tutkitaan funktion $h(x)^{-1}$ yläraja-arvoa samoilla keinoilla kuin funktion $g(x)^{-1}$ yläraja-arvon tarkastelussa tapauksessa $\alpha \geq -1$. Fatoun lemman nojalla pätee

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to\infty} h(x)^{-1} &\geq \liminf_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t}{xf(x)} = \liminf_{x\to\infty}\frac{\int_1^\infty f(sx)\mathrm{d}s}{f(x)} \\ &\geq \int_1^\infty \liminf_{x\to\infty}\frac{f(sx)}{f(x)}\mathrm{d}s = \int_1^\infty s^\alpha = -\frac{1}{\alpha+1},\end{aligned}$$

joten yläraja-arvon määritelmästä seuraa

$$\limsup_{x\to\infty} h(x) \le -(\alpha+1).$$

Funktio $h(x)$ on siis rajoitettu ja hitaasti vaihteleva, koska $xf(x)$, $\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t \in \mathrm{RV}_{\alpha+1}$. Siksi pätee $h(xt)-h(t) \to 0$, kun t kasvaa rajatta, joten

$$0 = \lim_{x\to\infty}\Big(\int_1^s \frac{h(xt)-h(x)}{t}\mathrm{d}t\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\int_1^s \frac{h(xt)}{t}\mathrm{d}t - h(x)\log s\Big). \tag{2.9}$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
(\alpha+1)\log s &= \lim_{x\to\infty}\log\Big(\frac{\int_{xs}^\infty f(t)\mathrm{d}t}{\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t}\Big)\\
&= \lim_{x\to\infty}\log\Big(\int_{xs}^\infty f(t)\mathrm{d}t\Big) - \Big(\log\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t\Big)\\
&= \lim_{x\to\infty}\Big(\log c - \log\exp\Big(\int_1^{xs}\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\Big)\\
&\quad -\log c + \log\exp\Big(\int_1^{x}\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\Big)\Big)\\
&= -\lim_{x\to\infty}\Big(\int_x^{xs}\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\Big) = -\lim_{x\to\infty}\Big(\int_1^{s}\frac{f(xu)x}{\int_{xu}^\infty f(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}u\Big)\\
&= -\lim_{x\to\infty}\Big(\int_1^s\frac{h(xu)}{u}\mathrm{d}u\Big) = -\lim_{x\to\infty} h(x)\log s,
\end{aligned}$$

missä $c = \int_1^\infty f(s)\mathrm{d}s$, eli

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = -(\alpha+1),$$

joten väitteet ovat todistettuja myös tapauksessa $\alpha < -1$.

ii) Oletetaan, että (2.3) pätee, toisin sanoen $\frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t} \to \alpha$ ($\alpha \in (0,\infty)$), kun $x\to\infty$. Huomataan, että $\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \log x - \log 1 = \log x$, joten siitä ja esityksestä (2.6) seuraa

$$\begin{aligned}
f(x) &= c\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\exp\Big(\int_1^x \frac{f(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t\Big)\\
&= cx\frac{f(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\exp\Big(\int_1^x \frac{f(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t - \int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t\Big)\\
&= c\frac{xf(x)}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}\exp\Big(\int_1^x \frac{1}{t}\Big(\frac{tf(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u} - 1\Big)\mathrm{d}t\Big),
\end{aligned}$$

missä $c = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Karamatan esityslauseen nojalla (lause 2.2.4) funktio $f(x)$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha - 1$, koska $\frac{tf(t)}{\int_0^t f(u)\mathrm{d}u} - 1$ lähestyy kohti $\alpha - 1$, kun x kasvaa rajatta.

Jos toisaalta kaava (2.4) pätee, eli $\frac{xf(x)}{\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t} \to \alpha$, kun $x \to \infty$ ja $\alpha \in (0, \infty)$, niin esityksestä (2.8) seuraa

$$\begin{aligned} f(x) &= c\frac{f(x)}{\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t} \exp\Big(\int_1^x \frac{f(t)}{\int_t^\infty f(u)\mathrm{d}u}\mathrm{d}t\Big)^{-1} \\ &= c\frac{xf(x)}{\int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t} \exp\Big(-\int_1^x \Big(\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(u)\mathrm{d}u} + \frac{1}{t}\Big)\mathrm{d}t\Big) \\ &= ch(x)\exp\Big(\int_1^x \frac{1}{t}\big(-h(t) - 1\big)\mathrm{d}t\Big), \end{aligned}$$

missä $c = \int_1^\infty f(t)\mathrm{d}t$ ja $h(x) = \frac{xf(x)}{\int_x^\infty f(u)\mathrm{d}u}$. Sen lisäksi pätee $ch(x) \to c\alpha \in (0, \infty)$ ja $-h(x) - 1 \to -\alpha - 1$, kun x kasvaa rajatta. Karamatan esityslauseen nojalla (lause 2.2.4) funktio $f(x)$ on siis säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-(\alpha + 1)$. □

Äsken esitettyä Karamatan lausetta voidaan käyttää toteamaan, että satunnaismuuttuja on paksuhäntäinen. Eräs esimerkki on Cauchy-jakauma.

Esimerkki 2.2.2 Cauchy-jakauma
Olkoon $X \sim$ Cauchy standardi Cauchy-jakautunut, eli X:n tiheysfunktio on

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}.$$

Tutkimalla osamäärän $\frac{f(tx)}{f(t)}$ raja-arvoa nähdään, että $f(x)$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä -2, sillä

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\pi(1 + t^2)}{\pi(1 + t^2x^2)} = x^{-2},$$

Häntäfunktiolle pätee

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(t)\mathrm{d}t,$$

joten Karamatan lauseen nojalla Cauchy-jakauman häntäfunktio on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-2 + 1 = -1$. Näin ollen Cauchy-jakautunut satunnaismuuttuja on paksuhäntäinen.

Toinen esimerkki paksuhäntäisestä satunnaismuuttujasta on Loggamma-jakautunut satunnaismuuttuja.

Esimerkki 2.2.3 Olkoon $X \sim \text{Loggamma}(\alpha, \beta)$ missä $\alpha, \beta > 0$. Jakauman tiheysfunktio määritellään kaikilla $x > 0$

$$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\log x)^{\beta-1}x^{-\alpha-1},$$

missä symboli $\Gamma(\cdot)$ merkitsee gammafunktiota. Tutkitaan osamäärää $\frac{f(tx)}{f(t)}$ suurilla t:n arvoilla

$$\frac{f(tx)}{f(t)} = \frac{\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\log(tx))^{\beta-1}(tx)^{-\alpha-1}}{\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\log t)^{\beta-1}t^{-\alpha-1}} = \frac{(\beta-1)\log(tx)}{(\beta-1)\log t}x^{-\alpha-1} = \frac{\log(tx)}{\log t}x^{-\alpha-1}.$$

Logaritmi on hitaasti vaihteleva funktio, joten $\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^{-\alpha-1}$, eli Loggamma-jakauman tiheysfunktio on säännöllisesti vaihteleva. Koska jakauman häntäfunktiolle pätee

$$\overline{F}(x) = \int_x^\infty f(y)\mathrm{d}y,$$

seuraa Karamatan lauseen nojalla, että Loggamma-jakauman häntäfunktio on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha$, eli satunnaismuuttuja on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α.

Edellisessä todistuksessa käyttetiin toista keskeistä säänöllisen vaihtelun tulosta, Karamatan esityslausetta. Jos funktiolla on lauseen mukainen esitys, niin voidaan päätellä, että kyseinen on säännöllisesti vaihteleva funktio.

Lause 2.2.4 *Karamatan esityslause*

i) Funktio L on hitaasti vaihteleva, jos ja vain jos funktiolla on seuraava esitys

$$L(x) = c(x)\exp\Big(\int_1^x \frac{1}{s}\varepsilon(s)\mathrm{d}s\Big), \quad x > 0, \tag{2.10}$$

missä $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ja $\lim_{x\to\infty} c(x) = c \in (0, \infty)$, sekä $\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$.

ii) Funktio $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α, jos ja vain jos on olemassa funktioita $c(x)$ ja $\alpha(x)$ siten, että

$$f(x) = c(x)\exp\Big(\int_1^x \frac{1}{t}\alpha(t)\mathrm{d}t\Big), \tag{2.11}$$

ja $\lim_{x\to\infty} c(x) = c \in (0, \infty)$ sekä $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \alpha$.

Todistus:

i) "$\Leftarrow$ ": Jos on olemassa positiiviset funktiot c ja ε, joille $c(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} c$ ja $\varepsilon(t) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ siten, että kaava (2.10) pätee, niin

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{c(tx)}{c(t)} \exp\Big(\int_t^{tx} \frac{1}{s}\varepsilon(s)\mathrm{d}s\Big).$$

Koska funktio $\varepsilon(t)$ lähestyy nollaa, kun t kasvaa rajatta, on olemassa t_0 siten, että mielivaltaiselle $\varepsilon > 0$ pätee $-\varepsilon < \varepsilon(t_0) < \varepsilon$, jos $t > t_0$, joten

$$\int_t^{tx} \frac{1}{s}\varepsilon(s)\mathrm{d}s < \varepsilon \int_t^{tx} \frac{1}{s}\mathrm{d}s = \varepsilon(\log(tx) - \log(t)) = \varepsilon \log(x).$$

Alarajaksi saadaan vastavasti

$$\int_t^{tx} \frac{1}{s}\varepsilon(s)\mathrm{d}s > -\varepsilon \log(x).$$

Ylä- ja alaraja eivät riipu enää t:stä, joten

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{tx} \frac{1}{s}\varepsilon(s)\mathrm{d}s = 0, \quad \text{eli} \quad \lim_{t\to\infty} \exp\Big(\int_t^{tx} \frac{1}{s}\varepsilon(s)\mathrm{d}s\Big) = 1.$$

Tällöin pätee myös $\frac{L(tx)}{L(t)} \to 1$, jos $t \to \infty$, toisin sanoen funktio L on hitaasti vaihteleva.

"$\Rightarrow$ ": Karamatan lauseen (lause 2.2.1) nojalla pätee $\frac{xL(x)}{\int_0^x L(t)\mathrm{d}t} \to 1$, kun $x \to \infty$ (2.1), koska L on säännöllisesti vaihteleva indeksillä 0. Asettamalla

$$\varepsilon(x) = \frac{xL(x)}{\int_0^x L(t)\mathrm{d}t} - 1$$

pätee $\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$ ja

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{1}{t}\varepsilon(t)\mathrm{d}t &= \int_1^x \frac{L(t)}{\int_0^t L(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t \\
&= \log\Big(\int_0^x L(s)\mathrm{d}s\Big) - \log\Big(\int_0^1 L(s)\mathrm{d}s\Big) - \log x.
\end{aligned}$$

Soveltamalla eksponenttifunktiota puolittain saadaan

$$\exp\Big(\int_1^x \frac{1}{t}\varepsilon(t)\mathrm{d}t\Big) = \frac{\int_0^x L(s)\mathrm{d}s}{x\int_0^1 L(s)\mathrm{d}s},$$

josta seuraa esitys

$$L(x) = \int_0^1 L(s)\mathrm{d}s \frac{xL(x)}{\int_0^x L(s)\mathrm{d}s} \exp\Big(\int_1^x \frac{1}{t}\varepsilon(t)\mathrm{d}t\Big),$$

missä

$$\lim_{x\to\infty} c(x) = \lim_{x\to\infty} \int_0^1 L(s)\mathrm{d}s \frac{xL(x)}{\int_0^x L(s)\mathrm{d}s} = \int_0^1 L(s)\mathrm{d}s \in (0,\infty).$$

ii) "$\Leftarrow$ ": Oletetaan, että funktio $f(x)$ voidaan kirjoittaa samassa muodossa kuten kaavassa (2.11). Tällöin pätee

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{c(tx)}{c(t)} \int_t^{tx} \frac{1}{s}\alpha(s)\mathrm{d}s,$$

jossa $\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \alpha$, eli on olemassa $\varepsilon > 0$ ja s_0 siten, että kaikilla $s \geq s_0$ on

$$\alpha - \varepsilon < \alpha(s) < \alpha + \varepsilon,$$

joten

$$(\alpha - \varepsilon)\log x \leq \int_t^{tx} s^{-1}\alpha(s)\mathrm{d}s \leq (\alpha + \varepsilon)\log x.$$

Tutkimalla funktion $\frac{f(tx)}{f(t)}$ raja-arvoa huomataan, että $f(x)$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α.

"$\Rightarrow$ ": Oletetaan, että funktio $f(x)$ on säännöllisesti vaihteleva. Tällöin voidaan kirjoittaa $f(x) = x^\alpha L(x)$ missä $L(x)$ on hitaasti vaihteleva funktio. Kohdan i) nojalla

$$\begin{aligned} f(x) &= x^\alpha L(x) = x^\alpha c(x)\exp\Big(\int_1^x t^{-1}\varepsilon(t)\mathrm{d}t\Big) \\ &= c(x)\exp\Big(\int_1^x t^{-1}\varepsilon(t)\mathrm{d}t + \alpha\log x\Big) = c(x)\exp\Big(\int_1^x t^{-1}\big(\varepsilon(t)+\alpha\big)\mathrm{d}t\Big), \end{aligned}$$

missä $\varepsilon(t) + \alpha \to \alpha$, kun $t \to \infty$, joten funktiolla $f(x)$ on samankaltainen esitys kuten kaavassa (2.11). $\square$

Jokaiselle säännöllisesti vaihtelevalle häntäfunktiolle voidaan esityslauseen nojalla löytää sellainen esitys.

Esimerkki 2.2.5 Olkoon satunnaismuuttuja X edelleen Pareto-jakautunut samoilla parametreillä kuten aiemmin. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}\overline{F}(x) &= \Big(\frac{K}{K+x}\Big)^{\alpha} = \Big(\frac{K}{K+x}\Big)^{\alpha} x^{\alpha} \exp\big(-\alpha \log x\big) \\ &= \Big(\frac{xK}{K+x}\Big)^{\alpha} \exp\Big(-\alpha \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t\Big),\end{aligned}$$

missä $\left(\frac{K}{K+x}\right)^{\alpha} \to K^{\alpha} < \infty$, kun $x \to \infty$, joten häntäfunktiolle on olemassa samanlainen esitys kuten esityslauseessa.

Erityisesti säännöllisesti vaihtelevien häntäfunktioiden tapauksessa seuraava lemma on mielenkiintoinen, sillä se määrää supistetun satunnaismuuttujan odotusarvon käyttäytymistä rajankäynnissä. Lauseen 4.1.1 todistuksessa sovelletaan Karamatan lause käyttämällä sama tulosta.

Lemma 2.2.6 *Olkoon $Z \geq 0$ satunnaisuuttuja kertymäfunktiolla $F(z)$ ja olkoon satunnaismuuttujan häntäfunktio säännöllisesti vaihteleva indeksillä $-\alpha, \alpha > 0$. Jos $p > \alpha$, niin*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x z^p \mathrm{d}F(z)}{x^p \overline{F}(x)} = \frac{\alpha}{p-\alpha},$$

eli

$$\int_0^x z^p \mathrm{d}F(z) \sim \frac{\alpha}{p-\alpha} x^p \overline{F}(x),$$

kun x on tarpeeksi suuri.

Todistus: Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_0^x z^p \mathrm{d}F(z) &= \int_0^x \int_0^z p y^{p-1} \mathrm{d}y \mathrm{d}F(z) = p \int_0^x y^{p-1} \int_y^x \mathrm{d}F(z)\mathrm{d}y \\ &= p \int_0^x y^{p-1}(\overline{F}(y) - \overline{F}(x))\mathrm{d}y \\ &= p \int_0^x y^{p-1}\overline{F}(y)\mathrm{d}y - p\overline{F}(x) \int_0^x y^{p-1}\mathrm{d}y \\ &= p \int_0^x y^{p-1}\overline{F}(y)\mathrm{d}y - \overline{F}(x)x^p.\end{aligned}$$

Funktio $y^{p-1}\overline{F}(y)$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $p-1-\alpha$, joten Karamatan lauseen nojalla $\int_0^x y^{p-1}\overline{F}(y)\mathrm{d}y$ on säännöllisesti vaihteleva indeksllä

$p - \alpha$. Karamatan lauseen nojalla pätee edelleen

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p\overline{F}(x)}{p\int_0^x y^{p-1}\overline{F}(y)\mathrm{d}y} = \frac{1}{p}\lim_{x\to\infty} \frac{xx^{p-1}\overline{F}(x)}{\int_0^x y^{p-1}\overline{F}(y)\mathrm{d}y} = \frac{1}{p}(p-\alpha). \tag{2.12}$$

Lopulta saadaan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x y^p\mathrm{d}F(y)}{x^p\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{p\int_0^x y^{p-1}\overline{F}(y)\mathrm{d}y}{x^p\overline{F}(x)} - \frac{x^p\overline{F}(x)}{x^p\overline{F}(x)}\Big) = \frac{p}{p-\alpha} - 1 = \frac{\alpha}{p-\alpha},$$

joten väite on todistettu. Kaava (2.12) pätee myös, kun $p = \alpha$. □

Sovelletaan jälleen Pareto-jakaumaa lemmaan.

Esimerkki 2.2.7 Olkoon edelleen $X \sim \text{Pareto}(\alpha, K)$. Lemman nojalla pätee indeksillä $-\alpha$ säännöllisesti vaihtelevalle häntäfunktiolle

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\overline{F}(x)}{\int_0^x \overline{F}(y)\mathrm{d}y} = -\alpha + 1,$$

mikä saadaan myös laskemalla osamäärää

$$\begin{aligned}
\frac{x\overline{F}(x)}{\int_0^x \overline{F}(y)\mathrm{d}y} &= \frac{x(\frac{K}{K+x})^\alpha}{K^\alpha(\frac{(K+x)^{-\alpha+1}-K^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}} \\
&= \frac{(K+x)^{-\alpha+1}(-\alpha+1)}{(K+x)^{-\alpha+1} - K^{-\alpha+1}} - \frac{K(K+x)^{-\alpha}(-\alpha+1)}{(K+x)^{-\alpha+1} - K^{-\alpha+1}} \to -\alpha + 1.
\end{aligned}$$

2.3 Fuk-Nagaev -epäyhtälöt

Päälauseen (lause 4.1.1) todistuksessa sovelletaan vielä toista tärkeää yksiulotteista tulosta, Fuk-Nagaev -epäyhtälöjä. Nämä epäyhtälöt todistivat D. Kh. Fuk ja S. V. Nagaev vuonna 1971. Fuk-Nagaev -epäyhtälöt antavat erilaisia häntätodennäköisyyksien ylärajoja satunnaiskululle, jossa yksittäisten satunnaismuuttujien odotusarvo on nolla. Nämä epäyhtälöitä voidaan soveltaa kaikille yksiulotteisille satunnaiskuluille, jos siirretään satunnaismuuttujia odotusarvon verran, jotta uuden satunnaismuuttujan odotusarvo tulee olemaan nolla. Tämä luku perustuu pääosin artikkeleihin [4] ja [7].

Oletetaan koko luvussa, että $X_i, i = 1, \ldots, n$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujia kertymäfunktioilla $F_i(x)$. Olkoot $x > 0, y_i > 0$, kun $i = 1, \ldots, n$ ja $y \geq \max_i y_i$.

Lause 2.3.1 *Fuk-Nagaev -epäyhtälöt*
Olkoot $X_i, i = 1, \ldots, n$ riippumattomia satunnaismuuttujia kertymäfunktioilla $F_i(x)$, joille $\mathbb{E}(X_i) = 0$. Olkoot edelleen $t \geq 2$, $0 < \alpha < 1$ ja $\beta = 1 - \alpha$.

i) Jos

$$\max\Big(t, \log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)} + 1\Big)\Big) \leq \frac{\alpha x y}{e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)}, \tag{2.13}$$

niin

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq y_i) + P_1, \tag{2.14}$$

missä

$$P_1 = \exp\Big(\beta\frac{x}{y} - \Big(\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big)\frac{x}{y} - \frac{\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)}{y}\Big)\log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)} + 1\Big)\Big)$$

ja

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq y_i) + P_2, \tag{2.15}$$

missä

$$P_2 = \exp\Big(\Big(\beta - \frac{t\alpha}{2}\Big)\frac{x}{y} - \Big(\beta\frac{x}{y} - \frac{\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)}{y}\Big)\log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)} + 1\Big)\Big).$$

ii) Toisaalta, jos

$$\max\Big(t, \log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)} + 1\Big)\Big) > \frac{\alpha x y}{e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)}, \tag{2.16}$$

niin

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq y_i) + \exp\Big(-\frac{\alpha x\big(\frac{\alpha x}{2} - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)\big)}{e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)}\Big). \tag{2.17}$$

Todistus: Todistuksessa tarkastellaan tapauksia $0 < h < \frac{t}{y}$ ja $hy > t$ erikseen, missä h on positiivinen vakio. Määritellään kuitenkin ensin rajoitetut satunnaismuuttujat

$$\tilde{X}_i = \begin{cases} X_i & \text{jos } X_i \leq y_i \\ 0 & \text{jos } X_i > y_i \end{cases}$$

missä $i = 1, \dots, n$ ja
$$\tilde{S_n} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i.$$
Koska rajoitettu satunnaismuuttuja $\tilde{X}_i$ on aina pienempi tai yhtä suuri kuin satunnaismuuttuja X_i, pätee
$$\left\{\tilde{S_n} \geq y\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \tilde{X}_i \geq y\right\} \subset \left\{\sum_{i=1}^{n} X_i \geq y\right\} = \left\{S_n \geq y\right\}.$$
Jos $X_j > y_j$ jollain $j \in \{1, \dots, n\}$, niin $\tilde{S_n} < S_n$, joten tapahtumasta $\{S_n \geq y\}$ seuraa aina joko tapahtuma $\{\tilde{S_n} < S_n\}$ tai tapahtuma $\{\tilde{S_n} \geq y\}$ tai molemmat. Siksi pätee
$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \mathbb{P}(\tilde{S_n} < S_n) + \mathbb{P}(\tilde{S_n} \geq x).$$
Huomataan, että tapahtuma $\{\tilde{S_n} < S_n\}$ on sama kuin yhdiste $\cup_{i=1}^{n}\{\tilde{X}_i < X_i\}$, joten
$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geq y_i) + \mathbb{P}(\tilde{S_n} \geq x).$$
Olkoon nyt $h > 0$. Tällöin pätee todennäköisyydelle $\mathbb{P}(\tilde{S_n} \geq x)$
$$\mathbb{E}(e^{h\tilde{S_n}}) \geq \mathbb{E}(e^{h\tilde{S_n}}\mathbb{1}(\tilde{S_n} \geq x)) \geq e^{hx}\mathbb{P}(\tilde{S_n} \geq x),$$
joten
$$\mathbb{P}(\tilde{S_n} \geq x) \leq e^{-hx}\mathbb{E}(e^{h\tilde{S_n}}).$$

Yleisesti pätee
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{h\tilde{X}_i}) &= \mathbb{E}(e^{h\tilde{X}_i}\mathbb{1}(\tilde{X}_i \leq y_i)) + \mathbb{E}(e^{h\tilde{X}_i}\mathbb{1}(\tilde{X}_i > y_i)) \\
&= \mathbb{E}(e^{hX_i}\mathbb{1}(X_i \leq y_i)) + \mathbb{E}(\mathbb{1}(X_i > y_i)) \\
&\leq \int_{x \leq y_i} e^{hx} \mathrm{d}F_i(x) + \int_{x > y_i} \mathrm{d}F_i(x) = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$
Jos $x > 0$, niin exponenttifunktion sarjaesityksen nojalla pätee
$$1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2}e^x,$$

joten Bolzanon lauseen nojalla on olemassa $0 \leq \theta \leq 1$ siten, että

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{\theta x}$$

ja siksi pätee

$$I_1 \leq \int_{x \leq y_i} \mathrm{d}F_i(x) + h \int_{x \leq y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2} \int_{x \leq y_i} x^2 e^{hx\theta} \mathrm{d}F_i(x).$$

Oletetaan ensin, että $hy \leq t$, eli $hy_i \leq t$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{h\tilde{X}_i}) &\leq 1 + h \int_{x \leq y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2} e^{hy_i\theta} \int_{x \leq y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) \\
&\leq 1 + h \int_{x \leq y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2} e^t \int_{x \leq y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x).
\end{aligned}$$

Satunnaismuuttujien X_i riippumattomuudesta seuraa myös rajoitettujen satunnaismuuttujien $\tilde{X}_i$ riippumattomuus. Riippumattomuuden nojalla pätee

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{h\tilde{S_n}}) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{h\tilde{X}_i}) \\
&\leq \prod_{i=1}^n \Big(1 + h \int_{x \leq y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2} e^t \int_{x \leq y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)\Big) \\
&\leq \prod_{i=1}^n \exp\Big(h \int_{x \leq y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2} e^t \int_{x \leq y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)\Big) \\
&= \exp\Big(h \sum_{i=1}^n \int_{x \leq y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2} e^t \sum_{i=1}^n \int_{x \leq y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)\Big),
\end{aligned}$$

sillä $1 + x \leq e^x$. Siis

$$\mathbb{P}(\tilde{S_n} \geq x) \leq \exp\Big(h \sum_{i=1}^n \int_{x \leq y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2} e^t \sum_{i=1}^n \int_{x \leq y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) - hx\Big), \tag{2.18}$$

jos $0 < h \leq \frac{t}{y}$.

Tarkastellaan seuraavaksi tapausta, jossa $hy > t$. Olkoot edelleen $h > 0$

ja $t \geq 2$. Funktio $f(y) = y^{-t}(e^{hy} - 1 - hy)$ on aidosti kasvava, jos $y \geq \frac{t}{h}$, eli $h \geq \frac{t}{y}$, sillä

$$f'(y) = -ty^{-t-1}(e^{hy} - 1 - hy) + y^{-t}(he^{hy} - h) = y^{-t}(he^{hy} - \frac{t}{y}e^{hy} + \frac{t}{y} + th - h) > 0.$$

Olkoon i sellainen, että $hy_i > t$. Tällöin pätee aikaisempien tarkastelujen ja oletuksen $h > \frac{t}{y_i}$ nojalla

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{h\tilde{X}_i}) &\leq 1 + h\int_{x \leq y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2}\int_{x \leq y_i} x^2 e^{hx\theta}\mathrm{d}F_i(x) \\
&= 1 + h\int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2}\int_{-\infty}^{\frac{t}{h}} x^2 e^{hx\theta}\mathrm{d}F_i(x) + \int_{\frac{t}{h}}^{y_i} \frac{e^{hx} - 1 - hx}{x^t} x^t \mathrm{d}F_i(x) \\
&\leq 1 + h\int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2}e^t\int_{-\infty}^{\frac{t}{h}} x^2 \mathrm{d}F_i(x) + \frac{e^{hy} - 1 - hy}{y^t}\int_{\frac{t}{h}}^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x) \\
&\leq 1 + h\int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2}e^t\int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) + \frac{e^{hy} - 1 - hy}{y^t}\int_{0}^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x),
\end{aligned}$$

sillä funktio $f(x)$ on aidosti kasvava alueella $(\frac{t}{h}, \infty)$. Satunnaismuuttujien $\tilde{X}_i$ riippumattomuuden nojalla pätee

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{h\tilde{S}_n}) &\leq \prod_{i=1}^{n}\Big(1 + h\int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2}e^t\int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) \\
&\quad + \frac{e^{hy} - 1 - hy}{y^t}\int_{0}^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)\Big) \\
&\leq \exp\Big(h\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2}e^t\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) \\
&\quad + \frac{e^{hy} - 1 - hy}{y^t}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)\Big), \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\tilde{S}_n \geq x) &\leq \exp\Big(h\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) + \frac{h^2}{2}e^t\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) \\
&\quad + \frac{e^{hy} - 1 - hy}{y^t}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x) - hx\Big),
\end{aligned}$$

jos $h > \frac{t}{y}$.

Määritellään seuraavaksi funktioita $a(h)$ ja $b(h)$, jotta voidaan kirjoittaa todennäköisyyden $\mathbb{P}(S_n > x)$ yläraja niiden funktioiden avulla. Olkoot

$$\begin{aligned} a(h) &= \frac{1}{2} e^t h^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) - \alpha h x \\ b(h) &= \frac{e^{hy} - 1 - hy}{y^t} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x) - \beta h x, \end{aligned}$$

missä $0 < \alpha < 1$ ja $\beta = 1 - \alpha$ kuten aiemmin ja asetetaan

$$h_1 = \frac{\alpha x}{e^t \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)}$$

ja

$$h_2 = \frac{1}{y} \log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)} + 1 \Big). \tag{2.20}$$

On helppo nähdä, että jos $h > \frac{t}{y}$ pätee, niin

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geq y_i) + \exp\Big(a(h) + b(h) + h \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \Big). \tag{2.21}$$

Ennen kuin tarkastellaan kohdan i) ylärajoja, osoitetaan kohdan ii) yläraja. Todistetaan yläraja (2.17), eli tutkitaan tilannetta, jossa ehto (2.16) pätee. Tällöin pätee joko $h_1 \leq \frac{t}{y}$ tai $h_2 \geq h_1 > \frac{t}{y}$. Jos $h_1 \leq \frac{t}{y}$ pätee, seuraa epäyhtälöstä (2.18) asettamalla $h = h_1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tilde{S}_n \geq x) &\leq \exp\Big(\frac{\alpha x}{e^t \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \\ &\quad + \frac{(\alpha x)^2 e^t \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)}{2 e^{2t} \big(\sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) \big)^2} - hx \Big) \\ &\leq \exp\Big(- \frac{\alpha x \big(\frac{\alpha x}{2} - \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \big)}{e^t \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)} \Big), \end{aligned}$$

josta saadaan suoraan (2.17).

Jos toisaalta pätee $h_2 \geq h_1 > \frac{t}{y}$, niin saadaan yläraja (2.17) tutkimalla funktioita $a(h)$ ja $b(h)$ tarkemmin. Funktion $a(h)$ minimikohta on $h = h_1$, sillä

$$a'(h) = e^t h \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) - \alpha x = 0 \Leftrightarrow h = \frac{\alpha x}{e^t \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)} = h_1$$

ja

$$a''(h) = e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) > 0,$$

joten $a(h)$ on konveksi funktio. Funktion $b(h)$ minimikohta on $h = h_2$, koska

$$\begin{aligned} & b'(h) = y^{-t}(ye^{hy} - y) \sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x) - \beta x \\ \Leftrightarrow \quad & e^{hy} = \frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)} + 1 \Leftrightarrow h = h_2. \end{aligned}$$

Edelleen pätee

$$b''(h) = \frac{e^{hy} \sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)}{y^{t-2}} > 0,$$

joten myös funktio $b(h)$ on konveksi. Sen lisäksi on helppo nähdä, että $a(0) = b(0) = 0$. Funktion $b(h)$ konveksisuuden nojalla pätee $b(h_1) < 0$ kun $h_2 \geq h_1$, sillä

$$0 = b(0) \geq b(h_2) \geq b(h_1).$$

Funktiolle $a(h)$ pätee

$$\begin{aligned} a(h_1) &= \frac{\alpha^2 x^2}{e^{2t}(\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x))^2} \frac{1}{2} e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) - \frac{\alpha^2 x^2}{e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)} \\ &= -\frac{\alpha^2 x^2}{2e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)}. \end{aligned}$$

Asettamalla kaavassa (2.21) $h = h_1$ saadaan

$$\begin{aligned} & a(h_1) + b(h_1) + h_1 \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \\ \leq \quad & -\frac{\alpha^2 x^2}{2e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)} + \frac{\alpha x \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)}{e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)} \\ = \quad & -\frac{\alpha x \big(\alpha x/2 - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)\big)}{e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)}, \end{aligned}$$

josta seuraa suoraan yläraja (2.17). Kohta ii) on todistettu.

Osoitetaan vielä kohdan i) ylärajat. Jos ehto (2.13) pätee, niin

$$\max\Big[t, \log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)} + 1\Big)\Big] \leq \frac{\alpha x y}{e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)},$$

joten saadaan $h_2 \leq h_1$. Nyt on joko $h_1 > h_2 > \frac{t}{y}$ tai $h_1 > \frac{t}{y} \geq h_2$. Huomataan ensin, että ensimmäisessä tapauksessa

$$\frac{e^{h_2 y} - 1}{y^t} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x) = \frac{\beta x}{y},$$

joten asettamalla $h = h_2$ saadaan kaavasta (2.21)

$$\begin{aligned}
& a(h) + b(h) + h \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \\
= \quad & h_2\Big(\frac{e^t}{2} h_2 \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) - x\Big) + \frac{e^{h_2 y} - 1 - h_2 y}{y^t} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x) \\
& + h_2 \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \\
\leq \quad & h_2\Big(\frac{e^t}{2} h_1 \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) - x\Big) + \frac{\beta x}{y} - \frac{h_2}{y^{t-1}} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x) \\
& + h_2 \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \\
= \quad & \frac{\beta x}{y} + \Big(\frac{\alpha x}{2} - x - \frac{\sum_{i=1}^{n} \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)}{y^{t-1}} + \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)\Big) h_2 \\
\leq \quad & \frac{\beta x}{y} + \Big(-\Big(1 - \frac{\alpha}{2}\Big) x + \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)\Big) h_2 \qquad (2.22) \\
= \quad & \frac{\beta x}{y} - \beta x h_2 - \frac{\alpha}{2} x h_2 + h_2 \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \\
\leq \quad & \frac{\beta x}{y} - \frac{\alpha t x}{2y} - \Big(\beta x + \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)\Big) h_2, \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

sillä $h_2 \leq h_1$, $1 - \frac{\alpha}{2} = \beta + \frac{\alpha}{2}$ ja $h_2 \geq \frac{t}{y}$. Sijoittamalla (2.20) epäyhtälöihin

(2.22) ja (2.23) saadaan

$$\begin{aligned}
& a(h)+g(h)+h\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x\mathrm{d}F_i(x)\\
\leq\ & \frac{\beta x}{y}+\Big(-\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)x+\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x\mathrm{d}F_i(x)\Big)\frac{1}{y}\log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x^t\mathrm{d}F_i(x)}+1\Big)\\
\leq\ & \frac{\beta x}{y}-\frac{\alpha t x}{2y}-\Big(\beta x+\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x\mathrm{d}F_i(x)\Big)\frac{1}{y}\log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x^t\mathrm{d}F_i(x)}+1\Big),
\end{aligned}$$

joista seuraavat ylärajat (2.14) ja (2.15) käyttäen epäyhtälöä (2.21).

On vielä osoitettava että samat ylärajat pätevät myös tapauksessa $h_1 > \frac{t}{y} \geq h_2$. Tällöin pätee

$$\frac{1}{2}e^t h_2^2\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x^2\mathrm{d}F_i(x)-h_2 x < h_2\Big(e^t\frac{h_1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x^2\mathrm{d}F_i(x)-x\Big)=\Big(\frac{\alpha}{2}-1\Big)xh_2,$$

joten

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}e^t h_2^2\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x^2\mathrm{d}F_i(x)-h_2 x+h_2\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x\mathrm{d}F_i(x)\\
<\ & h_2\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x\mathrm{d}F_i(x)-\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)x\Big).
\end{aligned}$$

Asettamalla kaavassa (2.18) $h = h_2$ saadaan äskeisten tarkastelujen nojalla

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\tilde{S}_n \geq x) \leq \exp\Big(h_2\Big(\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x\mathrm{d}F_i(x)-\big(1-\frac{\alpha}{2}\big)x\Big)\Big)\\
\leq\ & \exp\Big(\beta\frac{x}{y}-\Big(\Big(1-\frac{\alpha}{2}\Big)\frac{x}{y}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{y_i} x\mathrm{d}F_i(x)}{y}\Big)\log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{y_i} x^t\mathrm{d}F_i(x)}+1\Big)\Big),
\end{aligned}$$

josta seuraa suoraan (2.14). Ylärajan (2.15) todistamisessa oletetaan ensin, että $\beta x \geq \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
& \frac{t^2}{2y^2} e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) - \frac{tx}{y} + \frac{t}{y} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \\
< \quad & \Big(e^t \frac{h_1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x) - x \Big) \frac{t}{y} + \frac{t}{y} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \\
= \quad & \Big(\Big(\frac{\alpha}{2} - 1 \Big) x + \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) \Big) \frac{t}{y} = \Big(\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) - \beta x \Big) \frac{t}{y} - \frac{\alpha x t}{2y} \\
\leq \quad & \Big(\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x) - \beta x \Big) h_2 - \frac{\alpha x t}{2y},
\end{aligned}
$$

joten asetamalla epäyhtälössä (2.18) $h = \frac{t}{y}$ saadaan yläraja (2.15). Toisaalta, jos $\beta x < \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)$ ja $\beta \geq \frac{t\alpha}{2}$ niin $P_2 > 1$, joten yläraja (2.15) pätee triviaalisti. Väitteet on siis todistettu. $\square$

Kuten jo aiemmin mainittiin, sovelletaan Fuk-Nagaev -epäyhtälöitä suurten poikkeamien päälausessa. Siksi tarkastellaan vielä miten lauseen todistuksessa käytetty tulos seuraa ylläolevista epäyhtälöistä.

Seuraus 2.3.2 *Olkoon $t \geq 2, \beta = \frac{t}{t+2}$ ja $\alpha = 1 - \beta$. Tällöin*

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq x) \quad & \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq y_i) + \exp\Big(\max\Big(- \Big(\beta \frac{x}{y} - \frac{\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)}{y} \Big) \\
& \quad \times \log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)} + 1 \Big), \frac{\alpha x(\alpha x/2 - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x))}{e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)} \Big) \Big) \qquad (2.24) \\
\leq \quad & \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \geq y_i) + \exp\Big(\frac{\alpha x(\alpha x/2 - \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x))}{e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)} \Big) \\
& + \exp\Big(- \Big(\beta \frac{x}{y} - \frac{\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x \mathrm{d}F_i(x)}{y} \Big) \log\Big(\frac{\beta x y^{t-1}}{\sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)} + 1 \Big) \Big) \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

Todistus: Huomataan, että P_2:n eksponentissa oleva ensimmäinen termi on nolla, jos valitaan $\beta = \frac{t}{t+2}$, sillä $\beta - \frac{t\alpha}{2} = \frac{t}{t+2} - \frac{2t}{t(t+2)} = 0$. Yhdistämällä ylärajoja (2.15) ja (2.17) saadaan ylärajaksi (2.24) ja siitä seuraa suoraan (2.25). $\square$

Seuraus 2.3.3 *Jos* $\mathbb{E}(X) = 0$ *ja* $\sum_{i=1}^n \int_0^\infty x^t \mathrm{d}F_i(x) < \infty$*, jollain* $t \geq 2$*, niin*

$$\mathbb{P}(S_n \geq x) \leq \Big(\frac{t}{t+2}\Big)^{-t} x^{-t} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty x^t \mathrm{d}F_i(x) + \exp\Big(-\frac{2x^2}{(2+t)^2 e^t \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)}\Big).$$

Todistus: Markovin epäyhtälön avulla saadaan

$$\int_{y_i}^\infty x^t \mathrm{d}F_i(x) = \mathbb{E}(X^t \mathbb{1}(X > y_i)) > \mathbb{E}(y_i^t \mathbb{1}(X > y_i)) = y_i^t \mathbb{P}(X > y_i),$$

joten

$$\mathbb{P}(X > y_i) \leq \frac{\int_{y_i}^\infty x^t \mathrm{d}F_i(x)}{y_i^t}.$$

Asettamalla $y_1 = \cdots = y_n = y = \beta x$ seuraa edellisestä seurauksesta

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq x) \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > y_i) + \exp\Big(- \frac{\alpha^2 x^2}{2e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{y_i} x^2 \mathrm{d}F_i(x)}\Big) \\
&\quad\quad + \Big(\frac{\sum_{i=1}^n \int_0^{y_i} x^t \mathrm{d}F_i(x)}{\beta x y^{t-1}}\Big)^{\frac{\beta x}{y}} \\
&\leq \quad \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > \beta x) + \exp\Big(- \frac{\big(\frac{2}{2+t}\big)^2 x^2}{2e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\beta x} x^2 \mathrm{d}F_i(x)}\Big) \\
&\quad\quad + \frac{\sum_{i=1}^n \int_0^{\beta x} x^t \mathrm{d}F_i(x)}{(\beta x)^t} \\
&\leq \quad (\beta x)^{-t}\Big(\sum_{i=1}^n \int_{\beta x}^\infty x^t \mathrm{d}F_i(x) + \sum_{i=1}^n \int_0^{\beta x} x^t \mathrm{d}F_i(x)\Big) \\
&\quad\quad + \exp\Big(- \frac{2x^2}{(2+t)^2 e^t \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^\infty x^2 \mathrm{d}F_i(x)}\Big) \\
&= \quad \Big(\frac{t}{t+2}\Big)^{-t} x^{-t} \sum_{i=1}^n \int_0^\infty x^t \mathrm{d}F_i(x) + \exp\Big(- \frac{2x^2}{(2+t)^2 e^t \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(X_i)}\Big),
\end{aligned}$$

missä käytetään viimeisessä epäyhtälössä

$$\int_{-\infty}^y x^2 \mathrm{d}F_i(x) \leq \int_{-\infty}^\infty x^2 \mathrm{d}F_i(x) = \mathrm{Var}(X_i),$$

sillä $\mathbb{E}(X_i) = 0$. □

Fuk-Nagaev -epäyhtälöiden tai niiden seurauksien soveltamisessa tarvitaan satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on nolla. Monet paksuhäntäiset satunnaismuuttujat ovat kuitenkin positiivisia, joten konstruoidaan jakauma, jonka odotusarvo on nolla asettamalla uusi satunnaismuuttuja paksuhäntäisen jakauman ja sen odotusarvon erotuksena.

Esimerkki 2.3.4 Sovelletaan edellistä seurausta Pareto-jakaumalle. Olkoon $Z \sim \text{Pareto}(\alpha, K)$, missä $\alpha > 2$ ja $K > 0$. Esimerkissä 2.1.11 nähtiin, että $\mathbb{E}(Z) = \frac{K}{\alpha-1}$. Valitaan siksi satunnaismuuttuja $X = Z - \frac{K}{\alpha-1}$, joten saadaan $\mathbb{E}(X) = 0$. Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on siten

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\Big(Z = x + \frac{K}{\alpha - 1}\Big) = \alpha K^{\alpha}\Big(\frac{K}{K + \frac{K}{\alpha+1} + x}\Big)^{-\alpha-1}.$$

Valitaan $t = 2$, joten pitää varmistaa, että X:n toinen momentti on olemassa, jotta voidaan soveltaa seurauksta. Esimerkissä 2.1.11 laskettiin myös Pareto-jakautuneen satunnaismuuttujan toinen momentti. Tämän laskun perusteella saadaan siirretylle satunnaismuuttujalle

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} x^2 \alpha K^{\alpha}\Big(\frac{K}{K + \frac{K}{\alpha+1} + x}\Big)^{-\alpha-1} \mathrm{d}x = \frac{2K^{\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)}\Big(K + \frac{K}{\alpha-1}\Big)^{-\alpha-1} \\
= \quad & \frac{2K^{\alpha}}{(\alpha-1)(\alpha-2)}(\alpha-1)^{\alpha+1}(K\alpha)^{-\alpha-1} = \frac{2}{\alpha-2}(\alpha-1)^{\alpha}\alpha^{-\alpha-1}\frac{1}{K}
\end{aligned}$$

ja satunnaismuuttujan X varianssille pätee

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(Z) = \frac{\alpha K^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}.$$

Valitessa seurauksessa esiintyviä parametreja $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ huomataan todennäköisyydelle, että satunnaiskulku ylittää tietyn kiinnitetyn rajan $x > 0$, eli $\mathbb{P}(S_n > x)$:n yläraja

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n > x) \quad &\leq \quad \Big(\frac{2}{4}\Big)^{-2} x^{-2}\frac{2n}{K(\alpha-2)}(\alpha-1)^{\alpha}\alpha^{-\alpha-1} + \exp\Big(-\frac{2x^2}{4^2e^2n\frac{\alpha K^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}}\Big) \\
&= \quad \frac{8n}{Kx^2(\alpha-2)}(\alpha-1)^{\alpha}\alpha^{-\alpha-1} + \exp\Big(-\frac{x^2(\alpha-1)^2(\alpha-2)}{8e^2n\alpha K^2}\Big).
\end{aligned}$$

Jos valitaan esimerkiksi $\alpha = 3$, $K = 1$, niin

$$\mathbb{P}(S_n > x) \leq \frac{64n}{81x^2} + \exp\Big(-\frac{x^2}{6e^2n}\Big).$$

3 Säännöllinen vaihtelu

Laajennetaan seuraavaksi säännöllisen vaihtelun käsite satunnaisvektoreihin ja annetaan yleisiä tuloksia. Tässä luvussa määritellään säännöllisesti vaihtelevat satunnaisvektorit ja tarkastellaan, miten moniulotteinen säännöllinen vaihtelu liittyy satunnaisvektorin komponenttien säännölliseen vaihteluun. Päälähteenä käytetään erityisesti toisessa alaluvussa [6].

3.1 Epämääräinen suppeneminen

Jotta pystytään määritelemään vastaava säänöllinen vaihtelu d-ulotteisessa avaruudessa, johdataan ensin mittateorian yleisiä määritelmiä, kuten Hausdorff-avaruus ja Radon-mitta. Olkoon tässä luvussa $\mathbb{H}$ kompakti lokaalinen topologinen avaruus, jolla on numeroituva kanta. Kompakti lokaalinen topologinen avaruus on sellainen avaruus, että jokaisella $x \in \mathbb{H}$ on olemassa kompakti ympäristö. Olkoon sen lisäksi $\mathcal{B}(\mathbb{H})$ avaruuden $\mathbb{H}$ Borel-joukkojen virittämä σ-algebra. Esimerkiksi avaruudet $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^d$ ovat tällaisia kompakti lokaalisia topologisia avaruuksia.

Määritelmä 3.1.1 Topologista avaruutta $\mathbb{H}$ kutsutaan Hausdorff-avaruudeksi, jos jokaisella $a, b \in \mathbb{H}, a \neq b$ on olemassa a:n ympäristö U ja b:n ympäristö V siten, että $U \cap V = \emptyset$.

Jokainen metrinen avaruus on Hausdorff-avaruus. Hausdorff-avaruudessa määritellään sitten Radon-mitta.

Määritelmä 3.1.2 Mittaa μ kutsutaan Radon-mitaksi, jos

$$\mu(K) < \infty \text{ kaikilla kompakteilla joukoilla } K.$$

Merkitään joukko ei-negatiivisia Radon-mittoja symbolilla $M_+(\cdot)$, eli

$$M_+(\mathbb{H}) = \{\mu : \mu \text{ on ei-negatiivinen Radon mitta } \mathcal{B}(\mathbb{H})\text{:lla}\}.$$

Keskeinen käsite moniulotteisen säännöllisen vaihtelun määritelmässä on epämääräinen suppeneminen. Epämääräinen suppeneminen määritellään jatkuvien ja kompaktikantaisten funktioiden avulla. Jatkuva funktio on kompaktikantainen, jos on olemassa kompakti joukko K siten, että $f(x) = 0$ kaikilla $x \in K^c$.

Määritelmä 3.1.3 Ei-negatiivinen Radon-mitta μ_n suppenee epämääräisesti (*vague*) kohti μ:tä, jos

$$\int_{\mathbb{H}} f(x)\mathrm{d}\mu_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{H}} f(x)\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{kaikilla } f \in C_K^+(\mathbb{H}),$$

missä

$$C_K^+(\mathbb{H}) = \{f : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_+ : f \text{ on jatkuva ja kompaktikantainen}\}.$$

Merkitään $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$, jos μ_n suppenee epämääräisesti kohti μ:tä.

3.2 Määritelmä

Ennen kuin määritellään moniulotteinen säännöllinen vaihtelu, annetaan vielä yksi stokastiseen suppenemiseen liityvä lemma. Lemman todistus jätetään pois. Sen löytyy kuitenkin lähteen [9] lauseen 4.13 todistuksesta.

Lemma 3.2.1 *Olkoon X_i, $i = 1, 2, \dots$ jono riippumattomia satunnaismuuttujia vastaavilla kertymäfunktioilla $F_i(x)$ ja olkoon (a_n) jono positiivisia lukuja siten, että $a_n \to \infty$, kun n kasvaa rajatta. Jos*

$$a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$

missä $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ tarkoittaa stokastista suppenemista, niin

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(|X_i| \geq a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ja

$$a_n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big(X_i \mathbb{1}_{[0,a_n]}(|X_i|)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Satunnaisvektoreille voidaan määritellä samankaltainen säännöllinen vaihtelu kuin satunnaismuuttujille.

Määritelmä 3.2.2 Satunnaisvektori $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ on säännöllisesti vaihteleva, jos on olemassa positiivinen jono (a_n) (eli $a_n > 0$ kaikilla n), jolla $a_n \to \infty$, kun $n \to \infty$ ja ei-negatiivinen Radon-mitta μ σ-algebrassa $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d} \backslash \mathbf{0})$, jolla $\mu(\overline{\mathbb{R}^d} \backslash \mathbb{R}^d) = 0$ ja

$$n\mathbb{P}(a_n^{-1}\mathbf{X} \in \cdot) \xrightarrow{v} \mu(\cdot) \qquad \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d} \backslash \mathbf{0})\text{:ssa},$$

jos $n \to \infty$. Silloin kirjoitetaan $\mathbf{X} \in \mathrm{RV}((a_n), \mu, \overline{\mathbb{R}^d} \backslash \mathbf{0})$.

Jono (a_n) voidaan aina valita seuraavalla tavalla. Merkitään symbolilla G satunnaismuuttujan $|\mathbf{X}| = \sqrt{|X^{(1)}|^2 + \cdots + |X^{(d)}|^2}$ kertymäfunktio. Valitaan kaikilla $n > 1$

$$a_n = G^{-1}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = \inf\Big\{s \in \mathbb{R}_+ : G(s) \geq 1 - \frac{1}{n}\Big\},$$

joten saadaan $n\mathbb{P}(|\mathbf{X}| > a_n) \to 1$, kun $n \to \infty$.

Huomautus 3.2.3 Jos $\mathbf{X}$ on säännöllisesti vaihteleva, toisin sanoen $\mathbf{X} \in \mathrm{RV}((a_n), \mu, \overline{\mathbb{R}^d}\backslash\mathbf{0})$, niin pätee yleisesti

$$\frac{\mathbb{P}(\mathbf{X} \in u\cdot)}{\mathbb{P}(|\mathbf{X}| > u)} \xrightarrow{v} c\mu(\cdot) \qquad \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d}\backslash\mathbf{0})\text{:ssa},$$

jos $n \to \infty$.

Jos valitaan huomautuksessa $u = a_n$, saadaan, että $c = 1$, koska $n\mathbb{P}(|\mathbf{X}| > a_n) \to 1$, kun $n \to \infty$.

Kuten yksiulotteisessa tapauksessa, voidaan myös moniulotteisessa tapauksessa määritellä samankaltainen säännöllisen vaihtelun indeksi.

Lemma 3.2.4 *Jos satunnaisvektori $\boldsymbol{X}$ on säännöllisesti vaihteleva, eli $\boldsymbol{X} \in \mathrm{RV}((a_n), \mu, \overline{\mathbb{R}^d}\backslash\{\boldsymbol{0}\})$, niin on olemassa $\alpha > 0$ siten, että*

$$\mu(uB) = u^{-\alpha}\mu(B) \quad \textit{kaikilla } u > 0 \quad \textit{ja } B \in \overline{\mathbb{R}^d}\backslash\{\boldsymbol{0}\}.$$

Silloin kirjoitetaan $\boldsymbol{X} \in \mathrm{RV}(\alpha, \mu)$.

Moniulotteisen säännöllisen vaihtelun vaihtoehtoisessa määritelmässä, joka annetaan lemman todistuksen jälkeen, tutkitaan Borel-joukkoja avaruudessa $\mathbb{S}^{d-1}$, missä

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\},$$

eli $\mathbb{S}^{d-1}$ on avaruuden $\mathbb{R}^d$ yksikköpallo käyttäen euklidista metriikkaa. Merkinnöllä $V_{r,S}$ tarkoitetaan joukkoa

$$V_{r,S} = \Big\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{x}| > r, \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \in S\Big\},$$

missä $r > 0$ ja $S \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$.

Lemman 3.2.4 todistus: Olkoon a_n positiivinen jono kuten määritelmässä ja olkoon $S \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$ sellainen, että jollain $r > 0$ pätee $\mu(\partial V_{r,S}) = 0$.

Tällaiset S ja r ovat olemassa, koska μ on Radon-mitta. Olkoon edelleen $U = \{u \in [1, \infty) : \mu(\partial u V_{r,S}) = 0\}$. Oletetaan aluksi, että $\mu(V_{r,S}) > 0$. Määritellään funktiot $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\quad f(x) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in xV_{r,S})$ ja $g(x) = \mu(xV_{r,S})$. Tällöin pätee kaikilla $u \in U$

$$nf(ua_n) = n\mathbb{P}(\mathbf{X} \in a_n uV_{r,S}) \xrightarrow{v} \mu(uV_{r,S}) = g(u),$$

kun $n \to \infty$. Jos $x \geq a_1$ valitaan $t = t(x)$ siten, että $a_t \leq x < a_{t+1}$. Funktio f on ei-kasvava, eli ehdosta $x \leq y$ seuraa $f(x) \geq f(y)$, joten

$$\frac{f(ua_{t+1})}{f(a_t)} \leq \frac{f(ux)}{f(x)} \leq \frac{f(ua_t)}{f(a_{t+1})}$$

ja

$$\left(\frac{t}{t+1}\right)\frac{(t+1)f(ua_{t+1})}{tf(a_t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{g(u)}{g(1)} \qquad \text{kaikilla } u \in U$$

ja samanlaisella tavalla saadaan vastaava yläraja. Kaikilla $u \in U$ pätee siis

$$\frac{f(ux)}{f(x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{g(u)}{g(1)}.$$

Olkoon nyt $\hat{g}(u) = \limsup_{x\to\infty} \frac{f(ux)}{f(x)}$, $u > 0$, toisin sanoen $\hat{g}(u) = \frac{g(u)}{g(1)}$, jos $u \in U$. Huomataan myös, että $\hat{g}$ on aina ykköstä pienempi tai yhtäsuuri kaikilla $u \geq 1$, koska $\frac{f(ux)}{f(x)} \leq 1$ jos x on positiivinen. Sen lisäksi pätee $\limsup_{u\to 1+} \hat{g}(u) \leq 1$, jos u lähestyy ykköstä ylhäältä. Lähteen [2] lauseen 1.4.3. nojalla (s. 18) tällöin on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että kaikilla $u > 0$ pätee

$$\frac{f(ux)}{f(x)} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} u^{\alpha},$$

toisin sanoen $\mu(uV_{r,S}) = u^{-\alpha}\mu(V_{r,S})$ kaikilla $u > 0$.

Oletetaan seuraavaksi $\mu(V_{r,S}) = 0$ ja osoitetaan, että siitä seuraa myös $\mu(V_{u,S}) = 0$ kaikilla $u > 0$. Oletetaan edelleen, että on olemassa $r_0 \in (0, r)$ jolla $\mu(V_{r_0,S}) > 0$. Tällöin on olemassa $r_1 \in (0, r)$ siten, että $\mu(V_{r_1,S}) > 0$ ja $\mu(\partial V_{r_1,S}) = 0$. Yllä olevien päättelyjen nojalla seuraa sitten

$$\mu(uV_{r_1,S}) = u^{-\alpha}\mu(V_{r_1,S}) \quad \text{kaikilla } u > 0.$$

Valitsemalla $u = \frac{r}{r_1}$ saadaan

$$0 = \mu(V_{r,S}) = \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-\alpha}\mu(V_{r_1,S}) > 0$$

mikä on ristiriita. Siis kaikilla μ-jatkuvilla joukoilla $V_{r,S}$ on olemassa $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että kaikilla $u > 0$ pätee

$$\mu(uV_{r,S}) = u^{-\alpha}\mu(V_{r,S}).$$

On vielä osoitettava, että α ei riipu joukosta $V_{r,S}$. Määritellään siksi funktio $\lambda(V_{r,S}) = \frac{\mu(uV_{r,S})}{\mu(uV_{1,\mathbb{S}^{d-1}})}$. Oletetaan, että $r' > 0$ ja $S' \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$. Tällöin

$$\begin{aligned}
\alpha(V_{r,S}) &= \big(\log(\mu(V_{r,S})) - \log(\mu(uV_{r,S}))\big)/\log u \\
&= \frac{1}{\log u}\Big(\log\frac{\mu(V_{r,S})}{\mu(V_{r',S'})} - \log\frac{\mu(uV_{r,S})}{\mu(uV_{r',S'})} + \log(\mu(V_{r',S'})) - \log(\mu(uV_{r',S'}))\Big) \\
&= \frac{1}{\log u}\Big(\log\frac{\lambda(V_{r,S})}{\lambda(V_{r',S'})} - \log\frac{\lambda(V_{r,S})}{\lambda(V_{r',S'})} + \alpha(V_{r',S'})\log u\Big) = \alpha(V_{r',S'}),
\end{aligned}$$

eli α ei riipu joukosta $V_{r,S}$.

Joukot $V_{r,S}$ ($r > 0$, $S \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$) muodostavat π-systeemin, joka virittää joukon $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d}\backslash\mathbf{0}) \cap \mathbb{R}^d$, joten kaikilla $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d}\backslash\mathbf{0}) \cap \mathbb{R}^d$ pätee $\mu(uB) = u^{-\alpha}\mu(B)$. Sen lisäksi, koska $\mu(\overline{\mathbb{R}^d}\backslash\mathbb{R}^d) = 0$, edellinen kaava pätee myös joukoille $B \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d}\backslash\mathbf{0})$. Radon-mitan ominaisuudesta seuraa, että α on oltava ei-negatiivinen, ja edelleen koska $\mu(\overline{\mathbb{R}^d}\backslash\mathbb{R}^d) = 0$, pätee $\alpha > 0$. Näin ollen väite on todistettu. $\square$

Kirjallisuudessa käytetään usein myös toista määritelmää, missä on kyse heikosta suppenemisesta, eli suppenemisesta jakauman mielessä. Molemmat määritelmät ovat kuitenkin ekvivalentteja.

Lemma 3.2.5 *Olkoon $X \in \mathbb{R}^d$ satunnaisvektori. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä.*

i) X on yllä olevan määritelmän mukaan säännöllisesti vaihteleva.

ii) On olemassa $\alpha > 0$ ja todennäköisyysmitta σ joukolla $\mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})$ siten, että kaikilla $x > 0$

$$\frac{\mathbb{P}(|\mathbf{X}| > ux, \mathbf{X}/|\mathbf{X}| \in \cdot)}{\mathbb{P}(|\mathbf{X}| > u)} \xrightarrow{w} x^{-\alpha}\sigma(\cdot) \qquad \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1})\text{:ssa},$$

kun $u \to \infty$.

Tätä lemmaa ei todisteta tässä. Lemman todistus löytyy esimerkiksi lähteessä [6] sivulla 21.

Osassa kirjallisuudesta esitetään tämä määritelmä todennäköisyysmitan sijaan satunnaismuuttuja Φ avulla.

Huomautus 3.2.6 Edellisen lemman tapauksessa on olemassa yksikäsitteinen satunnaisvektori $\Phi \in \mathbb{S}^{d-1}$, jolla

$$\sigma(B) = \mathbb{P}(\Phi \in B) \quad \text{kaikilla } B \in \mathcal{B}(\mathbb{S}^{d-1}).$$

Annetaan esimerkki moniulotteisesta säännöllisestä vaihtelevasta satunnaisvektorista. Tässä ei määritellä satunnaisvektoria komponenttien avulla, vaan positiivisen satunnaismuuttujan ja yksikköympyrään kuuluvan satunnaisvektorin tulona.

Esimerkki 3.2.7 Olkoon $\mathbf{X} = R\mathbf{U}$ missä $R \in \mathbb{R}_+$ on positiivinen satunnaismuuttuja, joka on säännöllisesti vaihteleva indeksillä $\alpha, \alpha > 0$, ja $\mathbf{U}$ on satunnaisvektori avaruudessa $\mathbb{S}$. Oletetaan, että $R \perp\!\!\!\perp \mathbf{U}$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}(|\mathbf{X}| > ux, \frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|} \in \cdot)}{\mathbb{P}(|\mathbf{X}| > u)} &= \frac{\mathbb{P}(|R\mathbf{U}| > ux, \frac{R\mathbf{U}}{|R\mathbf{U}|} \in \cdot)}{\mathbb{P}(|R\mathbf{U}| > u)} = \frac{\mathbb{P}(|R| > ux, \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} \in \cdot)}{\mathbb{P}(|R| > u)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(|R| > ux)}{\mathbb{P}(|R| > u)} \mathbb{P}(\mathbf{U} \in \cdot) \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} x^{-\alpha} \mathbb{P}(\mathbf{U} \in \cdot),
\end{aligned}$$

kun $u \to \infty$ sillä $|\mathbf{U}| = 1$, $|R| = R$ ja R ja $\mathbf{U}$ ovat riippumattomia. Satunnaisvektori $\mathbf{X}$ on siis lemman 3.2.5 nojalla säännöllisesti vaihteleva indeksillä α.

Oletetaan jatkossa, että $R \sim \text{Pareto}(K, \alpha)$, missä $K > 0$ ja $\alpha > 2$. Ensimmäisen määritelmän nojalla saadaan mitta $\mu(V_{r,S})$ valitsemalla jono $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
n\mathbb{P}(a_n^{-1}\mathbf{X} \in V_{r,S}) &= n\mathbb{P}(R > a_n r)\mathbb{P}(\mathbf{U} \in S) \\
&= n\Big(\frac{K}{K + rn^{\frac{1}{\alpha}}}\Big)^{-\alpha} \mathbb{P}(\mathbf{U} \in S) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} r^{-\alpha}\mathbb{P}(\mathbf{U} \in S) = \mu(V_{r,S}),
\end{aligned}$$

kun n kasvaa rajatta. Tästä nähdään suoraan, että

$$\mu(V_{r,S}) = \mu(rV_{1,S}) = r^{-\alpha}V_{1,S}$$

kuten lemmassa 3.2.4 todettiin.

Kuten jo aikaisemmin mainittiin on olemassa yhteys moniulotteisen ja yksiulotteisen säännöllisen vaihtelun välillä. Moniulotteisesta säännöllisestä vaihtelusta seuraa, että jokainen komponentti on säännöllisesti vaihteleva.

Lause 3.2.8 *Olkoon* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ *satunnaisvektori. Jos* $\mathbf{X}$ *on säännöllisesti vaihteleva indeksillä* $\alpha > 0$ *kuten kohdassa ii) lemmassa 3.2.5, niin jokainen satunnaisvektorin lineaarikombinaatio on säännöllisesti vaihteleva samalla indeksillä* α, *toisin sanoen kaikilla vektoreilla* $\mathbf{x}$ *raja-arvo*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\langle \mathbf{x}, \mathbf{X}\rangle > t)}{t^{-\alpha}L(t)} = w(\mathbf{x})$$

on olemassa siten, että on olemassa vektori $\mathbf{x}_0 \neq 0$, *jolla* $w(\mathbf{x}_0) > 0$. *Funktio* $L(t)$ *on kuten aiemmin hitaasti vaihteleva funktio ja symbolilla* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *tarkoitetaan tavallista sisätuloa.*

Lauseen todistusta ei esitetä tässä, mutta lause on osoitettu artikkelissa [1] (lause 1.1).

Huomataan, että funktio $w(\mathbf{x})$ riippuu vektorista $\mathbf{x}$. Voi olla, että $w(\mathbf{x}) = 0$ jollain $\mathbf{x}$, mutta on olemassa aikakin yksi vektori $\mathbf{x}_0$ siten, että $w(\mathbf{x}_0) > 0$. Esimerkiksi jos joku komponentti $X^{(j)}$ on positiivinen, niin $w(-e_j) = 0$.

Lauseesta seuraa, että jos satunnaisvektori $\mathbf{X}$ on säännöllisesti vaihteleva, niin jokainen satunnaisvektorin komponentti on myös säännöllisesti vaihteleva.

Huomautus 3.2.9 Valitsemalla $\mathbf{x} = e_i$, missä e_i on i:n yksikkövektori, seuraa edellisestä lauseesta, että jokainen satunnaisvektorin $\mathbf{X}$ komponentin häntäfunktio on säännöllisesti vaihteleva. On helppo nähdä, että

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_i > tx)}{\mathbb{P}(X_i > t)} &= \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\langle e_i, X\rangle > tx)}{\mathbb{P}(\langle e_i, X\rangle > t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\langle e_i, X\rangle > tx)}{(tx)^{-\alpha}L(tx)} \frac{t^{-\alpha}x^{-\alpha}L(t)}{\mathbb{P}(\langle e_i, X\rangle > t)} \\
&= x^{-\alpha} w(e_i) \frac{1}{w(e_i)} = x^{-\alpha},
\end{aligned}$$

joten satunnaismuuttuja $\mathbf{X}_i$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α.

3.3 Esimerkkejä

Tarkastellaan vielä muutamia moniulotteisia säännöllisesti vaihtelevia satunnaisvektoreita. Kuten jo yksiulotteisessa tapauksessa tutkitaan ensin Pareto-jakaumaa.

Esimerkki 3.3.1 Tutkitaan tilanetta, jossa satunnaisvektorin komponentit ovat täysin korreloituina. Olkoon $\mathbf{X} = (X^{(1)}, X^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ missä $X^{(1)} = X^{(2)}$ noudattaa Pareto-jakauma parametreillä $\alpha > 2$ ja $K > 0$. Yksinkertaisuuden nojalla tarkastellaan todennäköisyyden $n\mathbb{P}(\lambda_n \mathbf{X} \in A)$ rajakäyttäytymistä, kun joukko A on suorakulmio, eli $A = (a,b] \times (c,d]$, missä $a,b,c,d > 0$.

Huomataan ensin, että tapahtuma $\{\mathbf{X} \in (a,b] \times (c,d]\}$ on sama kuin tapahtuma $\{\mathbf{X} \in (\max(a,c), \min(b,d)] \times (\max(a,c), \min(b,d)]\}$, koska $X^{(1)} = X^{(2)}$.

Valitsemalla $\lambda_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ saadaan

$$\begin{aligned}
& n\mathbb{P}\big(\lambda_n \mathbf{X} \in (a,b] \times (c,d]\big) = n\mathbb{P}\big(\lambda_n X \in (\max(a,c), \min(b,d)]\big) \\
= \;& n\big(\overline{F}(\lambda_n \max(a,c)) - \overline{F}(\lambda_n \min(b,d))\big) \\
= \;& n\Big(\Big(\frac{K}{K + \lambda_n \max(a,c)}\Big)^{\alpha} - \Big(\frac{K}{K + \lambda_n \min(b,d)}\Big)^{\alpha}\Big) \\
\sim \;& n\big(\big(n^{\frac{1}{\alpha}} \max(a,c)\big)^{-\alpha} - \big(n^{\frac{1}{\alpha}} \min(b,d)\big)^{-\alpha}\big) \\
= \;& (\max(a,c))^{-\alpha} - (\min(b,d))^{-\alpha},
\end{aligned}$$

joten voidaan määritellä Radon-mitta $\mu((a,b] \times (c,d]) = (\max(a,c))^{-\alpha} - (\min(b,d))^{-\alpha}$ ja satunnaisvektori $\mathbf{X}$ on säännöllisesti vaihteleva, eli $\mathbf{X} \in \mathrm{RV}(n^{\frac{1}{\alpha}}, \mu, \overline{\mathbb{R}^d}_+)$.

Lemman 3.2.4 nojalla on olemassa moniulotteisen säännöllisen vaihtelun indeksi, jolla pätee $\mu(uA) = u^{-\alpha}\mu(A)$. Tutkitaan joukon uA mittaa, missä A on yksinkertaisuuden nojalla neliö $A = (a,b] \times (a,b]$. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
\mu(uA) &= \mu(u((a,b] \times (a,b])) = \mu((ua,ub] \times (ua,ub]) \\
&= (ua)^{-\alpha} - (ub)^{-\alpha} = u^{-\alpha}\mu(A),
\end{aligned}$$

joten satunnaisvektorin säännöllisen vaihtelun indeksi on kuten yksiulotteisessä tapauksessa α. Tämä seuraa myös lauseesta 3.2.8.

Toinen esimerkki tarkastelee tilannetta, jossa molemmat vektorin komponentit ovat toisistaan riippumattomia.

Esimerkki 3.3.2 Olkoon kuten ennen $\mathbf{X} = (X^{(1)}, X^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ missä $X^{(1)}, X^{(2)}, X$ ovat riippumattomia ja samoin Pareto-jakautuneita satunnaismuuttujia parametreillä $\alpha > 2$ ja $K > 0$, ja olkoon joukko A suorakulmio. Tällöin saadaan valitsemalla $\lambda_n = n^{\frac{1}{2\alpha}}$ suurilla n:n arvoilla

$$\begin{aligned}
& n\mathbb{P}\big(\lambda_n^{-1} \mathbf{X} \in (a,b] \times (c,d]\big) = n\mathbb{P}\big(\lambda_n^{-1} X \in (a,b]\big)\mathbb{P}\big(\lambda_n^{-1} X \in (c,d]\big) \\
= \;& n\big(\overline{F}(a\lambda_n) - \overline{F}(b\lambda_n)\big)\big(\overline{F}(c\lambda_n) - \overline{F}(d\lambda_n)\big) \\
= \;& n\Big(\Big(\frac{K}{K + \lambda_n a}\Big)^{\alpha} - \Big(\frac{K}{K + \lambda_n b}\Big)^{\alpha}\Big)\Big(\Big(\frac{K}{K + \lambda_n c}\Big)^{\alpha} - \Big(\frac{K}{K + \lambda_n d}\Big)^{\alpha}\Big) \\
\sim \;& \big((a\lambda_n)^{-\alpha} - (c\lambda_n)^{-\alpha}\big)\big((c\lambda_n)^{-\alpha} - (d\lambda_n)^{-\alpha}\big) = (a^{-\alpha} - b^{-\alpha})(c^{-\alpha} - d^{-\alpha}).
\end{aligned}$$

Voidaan siis valita $\mu((a,b]\times(c,d]) = (a^{-\alpha}-b^{-\alpha})(c^{-\alpha}-d^{-\alpha})$ ja näin ollen satunnaisvektori on säännöllisesti vaihteleva, eli $\mathbf{X} \in \mathrm{RV}(n^{\frac{1}{2\alpha}}, \mu, \overline{\mathbb{R}^d}_+)$. Kuten edellisessä esimerkissä nähdään helposti, että satunnaisvektorin säännöllisen vaihtelun indeksi on edelleen α.

Annetaan vielä esimerkki, jossa ei määritellä satunnaisvektoria komponenttien kautta. Palataan esimerkkiin 3.2.7.

Esimerkki 3.3.3 Olkoon kuten aiemmin $\mathbf{X} = R\mathbf{U} \in \mathbb{R}^2$ missä satunnaismuuttuja R ja satunnaisvektori $\mathbf{U}$ ovat toisistaan riippumattomia. Olkoon R Pareto-jakautunut parametreilla $K > 0$ ja $\alpha > 2$. Satunnaisvektori $\mathbf{U}$ määritellään funktion $f(T) = (\cos(T), \sin(T))$ avulla, missä $T \sim \mathrm{Tas}([0, 2\pi))$. Olkoon $a, b \in [0, 2\pi)$, $a < b$ ja $S = \{(\cos(t), \sin(t)) : t \in [a, b)\}$. Tällöin joukko S on väli ykkösympyrällä ja

$$\mathbb{P}(\mathbf{U} \in S) = \mathbb{P}(f(T) \in S) = \mathbb{P}(T \in [a,b)) = \frac{b-a}{2\pi}.$$

Määritelmän mukaan saadaan valitsemalla $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$ joukon $V_{r,S}$ mitta, sillä

$$\begin{aligned} n\mathbb{P}(a_n^{-1}\mathbf{X} \in V_{r,S}) &= n\mathbb{P}(R\mathbf{U} \in a_n V_{r,S}) = n\mathbb{P}(R > a_n r)\mathbb{P}(\mathbf{U} \in S) \\ &= n\Big(\frac{K}{K + a_n r}\Big)^{\alpha}\frac{b-a}{2\pi} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r^{-\alpha}\frac{b-a}{2\pi} = \mu(V_{r,S}), \end{aligned}$$

jos S on kuten aikaisempi määritelty ja $r > 0$. Satunnaisvektori $\mathbf{X}$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α tai $\mathbf{X} \in \mathrm{RV}(n^{\frac{1}{\alpha}}, \mu, \overline{\mathbb{R}^d})$.
Satunnaisvektorin $\mathbf{U}$ tasajakaumasta seuraa, että satunnaisvektori $\mathbf{X}$ on jokaiseen suuntaan paksuhäntäinen, sillä $\mathbf{X}$:n paksuhäntäisyys riippuu ainoastaan Pareto-jakaumasta, eikä $\mathbf{U}$:n jakaumasta.

4 Suuret poikkeamat

Tässä viimeisessä luvussa annetaan moniulotteiseen säännölliseen vaihteluun liittyvä päälause, joka käsittelee suuria poikkeamia. Sen jälkeen sovelletaan lausetta erilaisiin esimerkkeihin.

4.1 Suurten poikkeamien päälause

Tämä luku perustuu artikkeliin [5]. Tässä tarkastellaan paksuhäntäisiä moniulotteisia satunnaiskulkuja ja niiden suuria poikkeamia. Moniulotteinen satunnaiskulku on prosessi $\mathbf{S}_n$, jolla

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{S}_n = \mathbf{Z}_1 + \cdots + \mathbf{Z}_n, \quad n \leq 1,$$

jossa $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_i$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaisvektoreita $\mathbb{R}^d$:ssa. Oletetaan sen lisäksi, että $\mathbf{Z}$ on säännöllisesti vaihteleva.

Lause 4.1.1 *Olkoon $\boldsymbol{Z} \in \mathrm{RV}(\alpha, \mu)$ ja jono (λ_n) siten, että $\lambda_n \to \infty$ ja*

$$\begin{array}{lll} \lambda_n^{-1}\boldsymbol{S}_n \to \boldsymbol{0}, & & \alpha < 2 \\ \lambda_n^{-1}\boldsymbol{S}_n \to \boldsymbol{0}, & \lambda_n/\sqrt{n^{1+\gamma}} \to \infty \textit{ jollain } \gamma > 0, & \alpha = 2 \\ \lambda_n^{-1}\boldsymbol{S}_n \to \boldsymbol{0}, & \lambda_n/\sqrt{n \log n} \to \infty, & \alpha > 2. \end{array}$$

Sitten pätee kaikilla $t \geq 0$

$$\gamma_n \mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\boldsymbol{S}_{[nt]} \in \cdot) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t\mu(\cdot) \qquad \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}^d} \backslash \boldsymbol{0})\text{:ssä},$$

missä $\gamma_n = (n\mathbb{P}(|\boldsymbol{Z}| > \lambda_n))^{-1}$.

Lauseessa esiintyy kolme eri tapausta. Ensimmäinen tapaus, missä $\alpha < 2$ tarkoittaa sitä, että satunnaisvektorin komponenttien varianssit eivät ole olemassa. Toisessa tapauksessa, missä $\alpha = 2$, ainakin komponenttien odotusarvot ovat olemassa. Vain silloin, kun $\alpha > 2$, ovat sekä ensimmäiset että toiset momentit äärellisiä. Sovelluksissa vain viimeinen tapaus on kiinnostava, koska muuten on kyse jakaumasta, jonka varianssi ei ole olemassa.

Usein voidaan valita $\lambda_n = n$. Tällöin pätee sekä $\lambda_n/\sqrt{n^{1+\gamma}} \to \infty$, jollain $\gamma > 0$ (kaikilla $0 < \gamma < 1$ että $\lambda_n/\sqrt{n \log n} \to \infty$, joten niitä ehtoja ei tarvitse tarkistaa erikseen.

Ennen kuin todistetaan edellinen lause, todistetaan vielä apulemma, jota sovelletaan todistuksessa.

Lemma 4.1.2 *Olkoon $\tilde{Z}$ sellainen satunnaismuuttuja, jolla $\mathbb{E}(\tilde{Z}) < \infty$. Tällöin pätee kaikilla $p \geq 2$*

$$\mathbb{E}\big(|\tilde{Z} - \mathbb{E}(\tilde{Z})|^p\big) \leq 2^{p+1}\mathbb{E}(|\tilde{Z}|^p).$$

Todistus: Kolmioepäyhtälön nojalla pätee

$$|\tilde{Z} - \mathbb{E}(\tilde{Z})| \leq |\tilde{Z}| + |\mathbb{E}(\tilde{Z})|.$$

Jos satunnaismuuttujan itseisarvo ylittää odotusarvon itseisarvon, eli $|\tilde{Z}| > |\mathbb{E}(\tilde{Z})|$, niin $|\tilde{Z}| + |\mathbb{E}(\tilde{Z})| \leq 2|\tilde{Z}|$, joten

$$|\tilde{Z} - \mathbb{E}(\tilde{Z})|^p \leq 2^p|\tilde{Z}|^p.$$

Toisaalta jos satunnaismuuttujan ja sen odotusarvon itseisarvojen suuruusjärjestys on toisinpäin, eli $|\tilde{Z}| \leq |\mathbb{E}(\tilde{Z})|$, saadaan vastaavasti

$$|\tilde{Z} - \mathbb{E}(\tilde{Z})|^p \leq 2^p|\mathbb{E}(\tilde{Z})|^p.$$

Lausekkeen $|\tilde{Z} - \mathbb{E}(\tilde{Z})|$ odotusarvolle pätee

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\big(|\tilde{Z} - \mathbb{E}(\tilde{Z})|^p\big) \\
\leq\ & \mathbb{E}\big(|\tilde{Z} - \mathbb{E}(\tilde{Z})|^p \mathbb{1}(|\tilde{Z}| \geq |\mathbb{E}(\tilde{Z})|)\big) + \mathbb{E}\big(|\tilde{Z} - \mathbb{E}(\tilde{Z})|^p \mathbb{1}(|\tilde{Z}| < |\mathbb{E}(\tilde{Z})|)\big) \\
\leq\ & 2^p\mathbb{E}\big(|\tilde{Z}|^p \mathbb{1}(|\tilde{Z}| \geq |\mathbb{E}(\tilde{Z})|)\big) + 2^p\mathbb{E}\big(|\mathbb{E}(\tilde{Z})|^p \mathbb{1}(|\tilde{Z}| < |\mathbb{E}(\tilde{Z})|)\big) \\
\leq\ & 2^p\mathbb{E}\big(|\tilde{Z}|^p\big) + 2^p\mathbb{E}\big(|\mathbb{E}(\tilde{Z})|^p\big) \leq 2^p\mathbb{E}\big(|\tilde{Z}|^p\big) + 2^p\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(|\tilde{Z}|^p)\big) = 2^{p+1}\mathbb{E}\big(|\tilde{Z}|^p\big),
\end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa Jensenin epäyhtälöstä, sillä funktio $|\cdot|^p$ on konveksi. $\square$

Lauseen todistuksessa käytetään merkintää

$$B^\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^d} \backslash \{\mathbf{0}\} : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq \varepsilon, \mathbf{y} \in B\}$$

jollekin Borel-joukolle $B \in \overline{\mathbb{R}^d} \backslash \{\mathbf{0}\}$ ja $\varepsilon > 0$.

Lauseen 4.1.1 todistus: Todistetaan vain tapaus, jossa $t = 1$.

Rajoitetaan ensin $\gamma_n \mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S} \in A)$ ylhäältä, jossa $0 \notin \overline{A}$ ja A:n reuna on nollamittainen, eli $\mu(\delta A) = \emptyset$. Silloin

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \in A) \\
\leq\ & \mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{Z}_i \in A^\varepsilon \text{ jollain } i = 1, \cdots, n) \\
& + \mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \in A, \lambda_n^{-1}\mathbf{Z}_n \notin A^\varepsilon \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n) \\
\leq\ & n\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{Z} \in A^\varepsilon) + \mathbb{P}(\lambda_n^{-1}|\mathbf{S}_n - \mathbf{Z}_i| > \varepsilon \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n) \\
=\ & I_1 + I_2
\end{aligned}$$

Raja-arvolle $\lim_{n\to\infty}\gamma_n I_1$ saadaan

$$\gamma_n I_1 = \frac{n\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{Z} \in A^\varepsilon)}{n\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Z} \in \lambda_n A^\varepsilon)}{\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} \xrightarrow{v} \mu(A^\varepsilon), \text{ kun } n \to \infty$$

huomautuksen 3.2.3 nojalla, joten

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{n\to\infty}\gamma_n I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu(A^\varepsilon) = \mu(\overline{A}) = \mu(A), \tag{4.1}$$

sillä $\mu(\delta A) = \emptyset$.

Seuraavaksi tutkitaan toisen lausekkeen raja-arvoa $\lim_{n\to\infty}\gamma_n I_2$, missä $I_2 = \mathbb{P}(|\mathbf{S}_n - \mathbf{Z}_i| > \varepsilon\lambda_n$ kaikilla $i = 1,\ldots,n)$. Siksi kiinnitetään $\delta > 0$ ja jaetaan koko avaruus kolmeen pareittain erilliseen osajoukkoon B_1, B_2 ja B_3 sen mukaan, kuinka monille satunnaismuuttujille pätee $|\mathbf{Z}_i| > \delta\lambda_n$. Avaruuden jako on seuraava

$$\begin{aligned}
B_1 &= \bigcup_{1\le i<j\le n}\{|\mathbf{Z}_i| > \delta\lambda_n, |\mathbf{Z}_j| > \delta\lambda_n\},\\
B_2 &= \bigcup_{i=1}^{n}\{|\mathbf{Z}_i| > \delta\lambda_n, |\mathbf{Z}_j| \le \delta\lambda_n, j \ne i, j = 1,\ldots,n\},\\
B_3 &= \{\max_{i=1,\ldots,n}|\mathbf{Z}_i| \le \delta\lambda_n\},
\end{aligned}$$

eli ensimmäisessä joukossa on kaikki tapahtumat, joille ainakin kahdelle satunnaisvektoreille pätee $|\mathbf{Z}_i| > \delta\lambda_n$, toisessa joukossa ovat ne tapahtumat joille sama ehto pätee tasan yhdelle satunnaisvektorille ja viimeisessä joukossa ovat ne tapahtumat, joilla $|\mathbf{Z}_i| \le \delta\lambda_n$ kaikilla $i = 1,\ldots,n$.

Helposti nähdään, että

$$\gamma_n\mathbb{P}(B_1) = \frac{\mathbb{P}(\cup_{i<j}\{|\mathbf{Z}_i| > \delta\lambda_n, |\mathbf{Z}_j| > \delta\lambda_n\})}{n\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} = o(1).$$

Merkitään tapahtuma $C = \{|\mathbf{S}_n - \mathbf{Z}_i| > \varepsilon\lambda_n$ kaikilla $i = 1,\ldots,n\}$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(C \cap B_2)\\
&= \mathbb{P}\Big(C \cap \bigcup_{i=1}^{n}\big\{|\mathbf{Z}_i| > \delta\lambda_n, |\mathbf{Z}_j| \le \delta\lambda_n, j \ne i, j = 1,\ldots,n\big\}\Big)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\Big(\big\{|\mathbf{S}_n - \mathbf{Z}_i| > \varepsilon\lambda_n \text{ kaikilla } i = 1,\ldots,n\big\}\\
&\qquad \cap \big\{|\mathbf{Z}_k| > \delta\lambda_n, |\mathbf{Z}_j| \le \delta\lambda_n, j \ne k, j = 1,\ldots,n\big\}\Big)\\
&\le \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(\{|\mathbf{S}_n - \mathbf{Z}_k| > \varepsilon\lambda_n, |\mathbf{Z}_k| > \delta\lambda_n) = I_3.
\end{aligned}$$

Satunnaisvektorit $\mathbf{Z}_i$ ovat riippumattomia, joten pätee myös $\mathbf{S}_n - \mathbf{Z}_k \perp\!\!\!\perp \mathbf{Z}_k$. Siksi viimeinen termi on yhtäsuuri kuin

$$I_3 = n\mathbb{P}(|\mathbf{S}_{n-1}| > \varepsilon\lambda_n)\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \delta\lambda_n) = \gamma_n^{-1}\mathbb{P}(|\mathbf{S}_{n-1}| > \varepsilon\lambda_n) = o(\gamma_n).$$

Viimeiselle osajoukoille pätee

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(C \cap B_3) \\
= \; & \mathbb{P}\big(\{|\mathbf{S}_n - \mathbf{Z}_i| > \varepsilon\lambda_n \text{ kaikilla } i = 1, \dots, n\} \cap \{\max_{i=1,\dots,n} |\mathbf{Z}_i| \le \delta\lambda_n\}\big) \\
\le \; & \mathbb{P}\big(|\mathbf{S}_{n-1}| > \varepsilon\lambda_n, |\mathbf{Z}_1| \le \delta\lambda_n, \dots, |\mathbf{Z}_n| \le \delta\lambda_n\big) \\
\le \; & \mathbb{P}\big(|\mathbf{S}_{n-1}| > \varepsilon\lambda_n, |\mathbf{Z}_1| \le \delta\lambda_n, \dots, |\mathbf{Z}_{n-1}| \le \delta\lambda_n\big) \\
= \; & \mathbb{P}\Big(\sqrt{|S_{n-1}^{(1)}|^2 + \cdots + |S_{n-1}^{(d)}|^2} > \varepsilon\lambda_n, |\mathbf{Z}_1| \le \delta\lambda_n, \dots, |\mathbf{Z}_{n-1}| \le \delta\lambda_n\Big) \\
\le \; & \mathbb{P}\big(|S_{n-1}^{(1)}| + \cdots + |S_{n-1}^{(d)}| > \varepsilon\lambda_n, |\mathbf{Z}_1| \le \delta\lambda_n, \dots, |\mathbf{Z}_{n-1}| \le \delta\lambda_n\big) \\
\le \; & \sum_{j=1}^{d} \mathbb{P}\Big(|S_{n-1}^{(j)}| > \frac{\varepsilon\lambda_n}{d}, |\mathbf{Z}_1| \le \delta\lambda_n, \dots, |\mathbf{Z}_{n-1}| \le \delta\lambda_n\Big) \\
\le \; & \sum_{j=1}^{d} \mathbb{P}\Big(|S_{n-1}^{(j)}| > \frac{\varepsilon\lambda_n}{d}, |Z_1^{(j)}| \le \delta\lambda_n, \dots, |Z_{n-1}^{(j)}| \le \delta\lambda_n\Big),
\end{aligned}$$

kolmioepäyhtälön nojalla. Nyt on siis osoitettava, että

$$\mathbb{P}\Big(|S_{n-1}^{(j)}| > \frac{\varepsilon\lambda_n}{d}, |Z_1^{(j)}| \le \delta\lambda_n, \dots, |Z_{n-1}^{(j)}| \le \delta\lambda_n\Big) = o\big(n\mathbb{P}(|Z^{(j)}| > \lambda_n)\big), \tag{4.2}$$

kaikilla $j = 1, \dots, d$.
Oletuksesta $\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{0}$ seuraa ensinnäkin $\lambda_n^{-1}S_n^{(j)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ kaikilla $j = 1, \dots, d$ ja lemman 3.2.1 nojalla seuraa suoraan valitsemalla $a_n = \delta\lambda_n$, että $n\lambda_n^{-1}\mathbb{E}\big(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|)\big) \to 0$ kaikilla kiinnitetyillä $\delta > 0$.
Väitteen (4.2) todistamiseen voidaan olettaa, että $d = 1$. Muuten saadaan

sama tulos valitsemalla sopiva $\varepsilon > 0$. Nyt pätee

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\Big(|S_n| > \varepsilon\lambda_n, \max_{i=1,\dots,n} |Z_i| \le \delta\lambda_n\Big) \\
= \;& \mathbb{P}\Big(\sqrt{|Z_1|^2 + \dots + |Z_n|^2} > \varepsilon\lambda_n, |Z_i| \le \delta\lambda_n, \text{ kaikilla } i = 1,\dots,n\Big) \\
\le \;& \mathbb{P}\big(Z_1^2 \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z_1|) + \dots + Z_n^2 \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z_n|) > (\varepsilon\lambda_n)^2\big) \\
\le \;& \mathbb{P}\Big(\big|Z_1 \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z_1|) + \dots + Z_n \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z_n|)\big| > \varepsilon\lambda_n\Big) \\
\le \;& \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^n \big(Z_i \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z_i|) - \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|))\big)\Big| + \Big|n\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|))\Big| > \varepsilon\lambda_n\Big) \\
\le \;& \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^n \big(Z_i \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z_i|) - \mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|))\big)\Big| > \frac{\varepsilon\lambda_n}{2}\Big),
\end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa siitä, että $|n\lambda_n^{-1}\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|))| < \varepsilon$, jos n on tarpeeksi suuri.
Merkitään jatkossa katkaistua satunnaismuuttujaa symbolilla $\tilde{Z}_i = Z_i \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z_i|)$. Fuk-Nagaevin epäyhtälöihin liittyvän seurauksen nojalla (seuraus 2.3.3) voidaan arvioida

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\Big(\Big|\sum_{i=1}^n \big(\tilde{Z}_i - \mathbb{E}(\tilde{Z})\big)\Big| > \frac{\varepsilon\lambda_n}{2}\Big) \\
= \;& \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^n \big(\tilde{Z}_i - \mathbb{E}(\tilde{Z})\big) > \frac{\varepsilon\lambda_n}{2}\Big) + \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^n \big(\mathbb{E}(\tilde{Z}) - \tilde{Z}_i\big) > \frac{\varepsilon\lambda_n}{2}\Big) \\
\le \;& \Big(\frac{p}{p+2}\Big)^{-p}\Big(\frac{\varepsilon\lambda_n}{2}\Big)^{-p} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big((\tilde{Z}_i - \mathbb{E}(\tilde{Z}_i))^p \mathbb{1}(\tilde{Z}_i - \mathbb{E}(\tilde{Z}_i) \ge 0)\big) \\
& + \exp\Big(-\frac{2(\frac{\varepsilon\lambda_n}{2})^2}{(2+p)^2 e^p \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(\tilde{Z}_i - \mathbb{E}(\tilde{Z}_i))}\Big) \\
& + \Big(\frac{p}{p+2}\Big)^{-p}\Big(\frac{\varepsilon\lambda_n}{2}\Big)^{-p} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big((\mathbb{E}(\tilde{Z}_i) - \tilde{Z}_i)^p \mathbb{1}(\mathbb{E}(\tilde{Z}_i) - \tilde{Z}_i \ge 0)\big) \\
& + \exp\Big(-\frac{2(\frac{\varepsilon\lambda_n}{2})^2}{(2+p)^2 e^p \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(\mathbb{E}(\tilde{Z}_i) - \tilde{Z}_i)}\Big) \\
= \;& \Big(\frac{p}{p+2}\Big)^{-p}\Big(\frac{\varepsilon\lambda_n}{2}\Big)^{-p} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big(|\tilde{Z}_i - \mathbb{E}(\tilde{Z}_i)|^p\big) + 2\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2\lambda_n^2}{2(2+p)^2 e^p \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(\tilde{Z}_i)}\Big) \\
= \;& \Big(\frac{p\varepsilon}{2(p+2)}\Big)^{-p}\lambda_n^{-p} n\mathbb{E}\big(|\tilde{Z}_i - \mathbb{E}(\tilde{Z}_i)|^p\big) + 2\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2\lambda_n^2}{2(2+p)^2 e^p n \mathrm{Var}(\tilde{Z}_i)}\Big) = I_4 + I_5
\end{aligned}$$

Edellisen lemman nojalla saadaan

$$\mathbb{E}\big(|\tilde{Z}_i - \mathbb{E}(\tilde{Z}_i)|^p\big) \leq 2^{p+1}\mathbb{E}\big(|\tilde{Z}_i|^p\big),$$

joten

$$I_4 \leq \Big(\frac{p\varepsilon}{2(p+2)}\Big)^{-p} 2^{p+1}\lambda_n^{-p} n\mathbb{E}\big(|\tilde{Z}_i|^p\big) = c\lambda_n^{-p} n\mathbb{E}\big(|\tilde{Z}_i|^p\big),$$

missä c on positiivinen vakio.

Karamatan lauseen seurauksesta (seuraus 2.2.6) saadaan termille $\mathbb{E}\big(|\tilde{Z}_i|^p\big)$ jos $p > \alpha$,

$$\mathbb{E}\big(|Z|^p \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|)\big) \sim \frac{\alpha}{p-\alpha}(\delta\lambda_n)^p \mathbb{P}(|Z| > \delta\lambda_n),$$

jos n on tarpeeksi suuri. Tutkitaan ensin yläräjan lausekkeen $\gamma_n c\lambda_n^{-p} n\mathbb{E}(|\tilde{Z}|^p) + \gamma_n I_5$ ensimmäista osaa, eli suhdetta

$$\frac{c\lambda_n^{-p} n\mathbb{E}\big(|Z|^p \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|)\big)}{n\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)}.$$

Jos $p > \max(2,\alpha)$ pätee

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \frac{c\lambda_n^{-p} n\mathbb{E}\big(|Z|^p \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|)\big)}{n\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)} = \lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \frac{c\mathbb{E}\big(|Z|^p \mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|)\big)}{\lambda_n^p \mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)} \\
= \quad &\Big(\frac{c\alpha}{p-\alpha}\Big)\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \frac{(\delta\lambda_n)^p \mathbb{P}(|Z| > \delta\lambda_n)}{\lambda_n^p \mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)} = \Big(\frac{c\alpha}{p-\alpha}\Big)\lim_{\delta\to 0}\delta^{p-\alpha} = 0,
\end{aligned}$$

sillä $|Z|$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α.

Ylärajan toista osaa tarkastellaan kaikille kolmelle tapaukselle erikseen, sen mukaan kuinka 'paksuhäntäinen' jakauma on, eli mitkä momentit ovat olemassa. Merkitään jatkossa $c = \frac{\varepsilon^2}{2(2+p)^2 e^p}$.

i) Tarkastellaan ensin sovellusten kannalta kiinnostavinta kohtaa, eli tapausta, jossa $\alpha \geq 2$ ja $\mathrm{Var}(Z) < \infty$. Jos $\alpha > 2$ seuraa, että $\mathrm{Var}(Z) < \infty$, mutta tämä ei päde välttämättä jos $\alpha = 2$, joten silloin tarvitaan lisäoletus $\mathrm{Var}(Z) < \infty$. Satunnaismuuttujan Z varianssin olemassaolosta seuraa, että myös katkaistun satunnaismuuttujan varianssi $\mathrm{Var}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]|Z|})$ on olemassa, ja siksi pätee suurilla n:n arvoilla ja sopivalla positiivisella vakiolla c'

$$\frac{2\exp\Big(\frac{-c\lambda_n^2}{n\mathrm{Var}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]|Z|})}\Big)}{n\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)} \sim \frac{2\exp\Big(\frac{-cc'\lambda_n^2}{n}\Big)}{\frac{n}{\lambda_n^\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

koska $\frac{\lambda_n}{n \log n} \to \infty$, eli

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{2\exp\left(\frac{-c\lambda_n^2}{n\mathrm{Var}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]|Z|})}\right)}{n\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)} = 0. \tag{4.3}$$

ii) Tapauksessa, jossa $\alpha \in (0, 2)$ käytetään Karamatan lausetta. Huomataan ensin, että

$$n\lambda_n^{-2}\mathrm{Var}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|)) = \frac{n}{\lambda_n^2}\mathbb{E}(Z^2\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|)) - \frac{n}{\lambda_n^2}\left(\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|))\right)^2,$$

missä viimeiselle termille pätee $\frac{n}{\lambda_n^2}\left(\mathbb{E}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|))\right)^2 \to 0$ lemman 3.2.1 nojalla, kun n kasvaa rajatta. Siksi voidaan soveltaa Karamatan lausetta, joten saadaan

$$n\lambda_n^{-2}\mathrm{Var}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]}(|Z|)) \sim c' n\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n),$$

valitsemalla $p = 2$ seurauksessa 2.2.6, missä c' on positiivinen vakio. Suurilla n:n arvoilla pätee siis

$$\frac{\exp\left(\frac{-c\lambda_n^2}{n\mathrm{Var}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]|Z|})}\right)}{n\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)} \sim \frac{\exp\left(\frac{-c'}{n\mathbb{P}(|Z|>\delta\lambda_n)}\right)}{n\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

kun $n \to \infty$, joten (4.3) pätee.

iii) Jos $\alpha = 2$ ja $\mathrm{Var}(Z) = \infty$, niin $\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä -2 ja $\mathrm{Var}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]|Z|})$ on hitaasti vaihteleva. Oletuksen $\lambda_n n^{-(1+\gamma)/2} \to \infty$ jollain $\gamma > 0$ nojalla pätee

$$\frac{\exp\left(\frac{-c\lambda_n^2}{n\mathrm{Var}(Z\mathbb{1}_{[0,\delta\lambda_n]|Z|})}\right)}{n\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)} \sim \frac{\exp\left(\frac{-c'\lambda_n^2}{n}\right)}{\frac{n}{\lambda_n^2}},$$

jos n on tarpeeksi suuri, joten saadaan edelleen (4.3).

Näistä tarkasteluista ja kaavasta (4.1) seuraa

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \in A)}{n\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n)} \leq \mu(A^\varepsilon) \to \mu(A) \text{ kun } \varepsilon \to 0, \tag{4.4}$$

kaikilla μ-jatkuvilla joukoilla A, joilla $0 \notin A$, joten yläraja on todistettu.

Arvioidaan seuraavaksi vielä sama todennäköisyys alaspäin. Alarajan todistamissa tarkastellaan suorakulmiota $A = [\mathbf{a}, \mathbf{b}) \subset \mathbb{R}^d$, jolle $\mathbf{0} \notin A$ ja $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$. Olkoon $\mathbf{a}^\varepsilon = (a_1 + \varepsilon, \ldots, a_d + \varepsilon)$ ja $\mathbf{b}^\varepsilon = (b_1 - \varepsilon, \ldots, b_d - \varepsilon)$, jollain $\varepsilon > 0$. Määritellään suorakulmio $A^{-\varepsilon} = (\mathbf{a}^\varepsilon, \mathbf{b}^\varepsilon]$, joka on ei-tyhjä μ-jatkuva joukko jos ε on riittävä pieni. Tällöin pätee

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \in A) &\geq \mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \in A, \lambda_n^{-1}\mathbf{Z}_i \in A^{-\varepsilon} \text{ jollain } i = 1, \ldots, n) \\
&\geq \mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{Z}_i \in A^{-\varepsilon}, \lambda_n^{-1}|\mathbf{S}_n - \mathbf{Z}_i| < \varepsilon \text{ jollain } i = 1, \ldots, n) \\
&\geq n\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{Z} \in A^{-\varepsilon})\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}|\mathbf{S}_{n-1}| < \varepsilon) \\
&\quad - \frac{n(n-1)}{2}\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{Z} \in A^{-\varepsilon})^2,
\end{aligned}$$

missä viimeisessä epäyhtälössä ensimmäinen termi on todennäköisyys, että ainakin yhdelle indeksille i pätee $\lambda_n^{-1}\mathbf{Z}_i \in A^{-\varepsilon}$ ja toinen termi on todennäköisyys sille, että ainakin kahdelle indeksille $i < j$ pätee $\lambda_n^{-1}\mathbf{Z}_i \in A^{-\varepsilon}$ ja $\lambda_n^{-1}\mathbf{Z}_j \in A^{-\varepsilon}$. Kerroin $\frac{n(n-1)}{2}$ merkitsee vaihtoehtojen määrä.

Oletuksesta $\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{0}$ seuraa myös $\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_{n-1} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{0}$, joten $\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}|\mathbf{S}_{n-1}| < \varepsilon) \to 1$, kun $n \to \infty$. Huomataan, että

$$\frac{(n-1)\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{Z} \in A^{-\varepsilon})^2}{2\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} = o(1),$$

joten saadaan

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \in A)}{n\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} \\
\geq\ &\liminf_{n\to\infty} \frac{n\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{Z} \in A^{-\varepsilon})\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}|\mathbf{S}_{n-1}| < \varepsilon)}{n\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} - \frac{n(n-1)\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{Z} \in A^{-\varepsilon})^2}{2n\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} \\
\geq\ &\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{Z} \in A^{-\varepsilon})}{\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} = \mu(A^{-\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Lisäksi pätee

$$\mu(A^{-\varepsilon}) \to \mu(A),$$

kun $\varepsilon \to 0$, koska suorakulmio A on μ-jatkuva joukko. Siitä seuraa, että kaikilla suorakulmioilla $A = (\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ pätee

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \in A)}{n\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} = \mu(A). \tag{4.5}$$

Ylärajasta (4.4) saattiin

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \in A)}{n\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} = \mu(A),$$

joten äskeisen alarajan tarkastelujen (4.5) perusteella

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \in A)}{n\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > \lambda_n)} = \mu(A),$$

missä kyseessä on epämääräisestä suppenemisesta. Väite on siis todistettu.

□

4.2 Esimerkkejä

Sovelletaan lopuksi vielä edellista lausetta esimerkkeihin. Palataan samanlaisiin esimerkkeihin, jotka esitettiin edellisessä luvussa. Lauseessa oletetaan, että säännöllisesti vaihtelevan skaalatun satunnaisvektorin satunnaiskulku suppenee stokastisesti kohti nollaa, joten tarkastellaan paksuhäntäisiä komponentteja, joiden odotusarvo on nolla. Tutkitaan tässä muun muassa Pareto-jakautuneita komponentteja, joita siirretään Pareto-jakauman odotusarvon verran, jotta uusien komponenttien odotusarvo tulee olemaan nolla.

Huomautus 4.2.1 Olkoon X Pareto-jakautunut satunnaismuuttuja parametreillä $\alpha > 2$ ja $K > 0$. Tällöin pätee satunnaismuuttujan $Z = X - \frac{K}{\alpha-1}$ häntäfunktiolle

$$\overline{F}(z) = \Big(\frac{K}{K + \frac{K}{\alpha-1} + z}\Big)^{\alpha},$$

joten saadaan valitsemalla $a_n = n^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\begin{aligned} n\mathbb{P}(a_n^{-1} Z \in (a,b]) &= n\Big(\Big(\frac{K}{K + \frac{K}{\alpha-1} + a_n a}\Big)^{\alpha} - \Big(\frac{K}{K + \frac{K}{\alpha-1} + a_n b}\Big)^{\alpha}\Big) \\ &\sim n((an^{\frac{1}{\alpha}})^{-\alpha} - (bn^{\frac{1}{\alpha}})^{-\alpha}) = a^{-\alpha} - b^{-\alpha} \end{aligned}$$

Valittaessa lauseessa 4.1.1 $\lambda_n = a_n$ saadaan $n\mathbb{P}(|Z| > \lambda_n) \to 1$, joten $\mathbb{P}(\lambda_n^{-1}\mathbf{S}_n \in \cdot) \to \mu(\cdot)$. Esimerkeissä tälläinen valinta ei ole mahdollinen, koska muuten lauseen lisäoletukset eivät ole voimassa, kun $\alpha > 2$. Valitaan siksi esimerkeissä $\lambda_n = n$, joten lauseen lisäoletukset ovat voimassa.

Esimerkki 4.2.2 Tutkitaan satunnaisvektoria $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^2$, jonka komponentit ovat samoja. Olkoot satunnaismuuttujat X_i riippumattomia Pareto-jakautuneita satunnaismuuttujia parametreillä $\alpha > 2$ ja $K > 0$ kuten aiemmin. Asetetaan satunnaismuuttujat $Z_i^{(1)} = Z_i^{(2)} = X_i - \frac{K}{\alpha-1}$, joten satunnaisvektorin

$\mathbf{Z}_i = (Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)})$ komponentit ovat täysin korreloituneita ja komponenttien odotusarvo on nolla. Heikon suurten lukujen lain nojalla pätee

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n^{(j)}}{n}\Big| > \varepsilon\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad j = 1, 2$$

joten $\frac{\mathbf{S}_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{0}$. Lauseen 4.1.1 oletukset ovat voimassa, joten

$$\frac{\mathbb{P}(\frac{\mathbf{S}_n}{n} \in A)}{n\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > n)} \xrightarrow{v} \mu(A),$$

missä $\mu(A) = \max(a, c)^{-\alpha} - \min(b, d)^{-\alpha}$ kuten esimerkissä 3.3.1 edellisen huomautuksen nojalla, kun $A = (a, b] \times (c, d]$.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa satunnaisvektorin komponentit ovat riippumattomia.

Esimerkki 4.2.3 Olkoot $X_i^{(1)}, X_i^{(2)}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia kaikilla $i = 1, 2, \ldots$, jotka noudattavat Pareto-jakaumaa parametreillä $K > 0$ ja $\alpha > 2$. Olkoon sen lisäksi $\mathbf{Z}_i = (Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$, jossa $Z_i^{(j)} = X_i^{(j)} - \frac{K}{\alpha-1}$. Satunnaisvektorin $\mathbf{Z}_i$ komponentit ovat siis riippumattomia.
Edelleen pätee heikon suurten lukujen lain nojalla

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n^{(j)}}{n}\Big| > \varepsilon\Big) \to 0,$$

kun n kasvaa rajatta ja $j = 1, 2$, joten $\frac{\mathbf{S}_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbf{0}$. Lauseen oletukset ovat voimassa, joten

$$\frac{\mathbb{P}(\frac{\mathbf{S}_n}{n} \in (a, b] \times (c, d])}{n\mathbb{P}(|\mathbf{Z}| > n)} \xrightarrow{v} \mu((a, b] \times (c, d]) = (a^{-\alpha} - b^{-\alpha})(c^{-\alpha} - d^{-\alpha}),$$

kuten esimerkissä 3.3.3.

Jos esimerkiksi jokainen komponentti edellisissä esimerkissä kuvaa vakuutusyhtiön vahinkovakuutuslaji, niin voidaan ajatella, että satunnaismuuttuja X kuvaa vahinkojen suuruutta, eli korvaussummaa ja vakuutuksen hinta on $P = \mathbb{E}(X) = \frac{K}{\alpha-1}$. Tällöin komponentti $Z^{(j)}$ voidaan tulkita vakuutuslajin j tappioksi. Esimerkit voidaan myös laajentaa avaruuteen $\mathbb{R}^d$.

Palataan lopuksi vielä esimerkkiin 3.2.7.

Esimerkki 4.2.4 Esimerkissä 3.2.7 todetiin, että satunnaisvektori $\mathbf{X}$ on säännöllisesti vaihteleva indeksillä α ja sen lisäksi pätee

$$\mu(V_{r,S}) = r^{-\alpha}\mathbb{P}(\mathbf{U} \in S).$$

Lauseen 4.1.1 oletukset ovat siis voimassa ja siksi saadaan

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n} \in V_{r,S}\right)}{n\mathbb{P}(|\mathbf{X}| > n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r^{-\alpha}\mathbb{P}(\mathbf{U} \in S).$$

Viitteet

[1] Basrak, B., Davis, R.A., Mikosch, T. (2002) A Characterization of Multivariate Regular Variation. *Ann. Appl. Probab.* **12**, 908-920.

[2] Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L. (1987). *Regular Variation.* Cambridge Univ. Press.

[3] Embrechts, P., Klueppelberg, C., Mikosch, T. (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance*, 4th ed. Springer, New York.

[4] Fuk, D.KH., Nagaev, S.V. (1971). Probability inequalities for sums of independent random variables. *Theory of probability and its applications* **4**, 643-660.

[5] Hult, H., Lindskog, F., Mikosch, T., Samorodnitsky, G. (2005). Functional large deviations for multivariate regularly varying random walks. *Ann. Appl. Probab.* **15**, 2651-2680.

[6] Lindskog, F. (2004) *Multivariate Extremes and Regular Variation for Stochastic Processes.* Ph.D. thesis, Swiss Federal Institute of Technology.

[7] Nagaev, S.V. (1979). Large deviations of sums of independent random variables. *Ann. Probab.* **7**, 745-789.

[8] Nyrhinen, H. (2014). *Äärimmäisten ilmiöiden teoria.* Luentomoniste.

[9] Petrov, V.V. (1995). *Limit Theorems of Probability Theory.* Oxford Univ. Press.

[10] Resnick, S. (1987). *Extrem Values, Regular Variation, and Point Processes.* Springer, New York.

[11] Resnick, S. (2007). *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modeling.* Springer, New York.