# Pro gradu -tutkielma
# Ympyrälliset nelikulmiot sekä niiden duaalisuus

Juha Tolonen

25.10.2016

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

| Tiedekunta/Osasto Fakultet/Sektion – Faculty | Laitos/Institution– Department |
|---|---|
| Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta | Matematiikan ja tilastotieteen laitos |


Tekijä/Författare – Author

Juha Tolonen


Työn nimi / Arbetets titel – Title

Ympyrälliset nelikulmiot sekä niiden duaalisuus

Oppiaine /Läroämne – Subject

Matematiikan opettajan koulutus

| Työn laji/Arbetets art – Level | Aika/Datum – Month and year | Sivumäärä/ Sidoantal – Number of pages |
|---|---|---|
| Pro gradu -tutkielma | Lokakuu 2016 | 57 s. |


Tiivistelmä/Referat – Abstract

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä ympyrällisiä nelikulmioita, tutustua niiden ominaisuuksiin sekä tutkia niiden duaalisuutta tavallisessa euklidisessa tasogeometriassa. Ympyrälliset nelikulmiot ovat sellaisia nelikulmioita, joilla on sisä- tai ympärysympyrä. Sisäympyrällisen nelikulmion sisään voidaan piirtää ympyrä siten, että se sivuaa jokaista nelikulmion sivua. Ympärysympyrällinen nelikulmio on taas sellainen, jonka jokainen kärkipiste sijaitsee sen ympäri piirretyn ympyrän kehällä. Tutkielmassa näistä tullaan käyttämään käsitteitä tangentiaalinen ja syklinen nelikulmio. On olemassa kuitenkin myös sellaisia nelikulmioita, joilla on sekä sisä- että ympärysympyrä. Näitä kutsutaan nimellä bisentrinen nelikulmio. Ympyrällisten nelikulmioiden ominaisuuksien lisäksi tarkastellaan lyhyesti, mitkä tavallisimmista nelikulmioista ovat ympyrällisiä nelikulmioita. Tutkielmassa rajoitutaan konvekseihin nelikulmioihin, joita tangentiaalinen ja bisentrinen nelikulmio luonnostaan jo ovat.

Vaikka ympyrällisiä nelikulmioita ja niiden ominaisuuksia on tutkittu jo antiikin Kreikan ajoilta, nykyajan interaktiiviset geometriset ohjelmistot, kuten GeoGebra, antavat mahdollisuuden tutkia niitä huomattavasti helpommin ja tehokkaammin. 2000-luvulla löydettyjä uusia tuloksia ja todistuksia julkaistaan vuosittain esimerkiksi Forum Geometricorum -nimisessä vertaisarvioidussa verkkojulkaisussa. Osa näistä tuloksista on todistettu käyttäen apuna analyyttista geometriaa tai trigonometriaa, mutta tässä tutkielmassa on pyritty pitäytymään puhtaasti geometrisissa todistuksissa. Seuratakseen tutkielmaa lukija tarvitsee koulumatematiikan antamat perustiedot tavallisimpien euklidisten tasokuvioiden ominaisuuksista, yhtenevyyskriteereistä ja yhdenmuotoisuuslauseista. Muut ympyrällisten nelikulmioiden ominaisuuksien todistamisessa käytettävät lauseet tullaan todistamaan erikseen luvussa kaksi. Tutkielma soveltuu siis hyvin muun muassa geometriasta syvemmin kiinnostuneille lukiolaisille, matematiikkaolympialaisiin osallistuville sekä matematiikan aineenopettajille ja aineenopettajaksi opiskeleville.

Aiheeseen liittyvistä nimetyistä lauseista todistetaan muun muassa Pitot'n, Ptolemaioksen ja Fuss'n lauseet. Pitot'n lause kertoo käytännössä sen, että jos konveksilla nelikulmiolla on sisäympyrä, niin sen vastakkaisten sivujen summat ovat samat. Sama pätee myös toiseen suuntaan, joten sen avulla voidaan tutkia nelikulmion tangentiaalisuutta sivujen pituuksien perusteella. Ptolemaioksen lause sanoo, että jos konveksilla nelikulmiolla on ympärysympyrä, niin sen vastakkaisten sivujen tulojen summa on sama kuin lävistäjien tulo. Tämäkin pätee toiseen suuntaan ja sen suurin hyöty koskettaa syklisen nelikulmion lävistäjien pituuksia. Fuss'n lauseella saadaan määriteltyä bisentrisen nelikulmion keskipisteiden välinen etäisyys sen sisä- ja ympärysympyrän säteiden avulla. Toisaalta huomataan myös, että kyseinen etäisyys voidaan ilmaista pelkästään sivujen pituuksien avulla.

Tutkielman lopussa johdetaan ympyrällisten nelikulmioiden duaalisuuteen perustuen lauseita, joita ei kirjallisuudesta löytynyt. Samalla käydään läpi sitä prosessia, miten niihin päädyttiin. Tullaan huomaamaan, että projektiivisessa geometriassa esiintyvän duaalisuusperiaatteen kaltainen "rajoitetumpi duaalisuus" esiintyy varsin usein euklidisessa tasogeometriassa, jota voidaan hyödyntää uusien konjektuurien ja lauseiden muodostamisessa. Lopuksi tarkastellaan vielä rinnakkain tangentiaalisen ja syklisen nelikulmion välillä vallitsevia duaaleja lauseita sekä miten tavallisten ympyrällisten nelikulmioiden duaalit nelikulmiot ja hierarkkisuus voidaan havainnollistaa symmetrisesti niiden parissa työskenteleville.



Avainsanat – Nyckelord – Keywords

geometria, tangentiaalinen, syklinen, bisentrinen, nelikulmio, ympyrä, Pitot, Ptolemaios, Fuss, duaalisuus

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Kumpulan kampuskirjasto, Gustaf Hällströmin katu 2 (PL 64), 00014 Helsingin yliopisto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Tutkielman ohjasi yliopistonlehtori Mika Koskenoja.

# Sisältö

# Luku 1

# Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä ympyrällisiä nelikulmioita, tutustua niiden ominaisuuksiin sekä tutkia niiden duaalisuutta tavallisessa euklidisessa tasogeometriassa. Tämän yhteydessä todistetaan myös aiheeseen liittyviä nimettyjä geometrisia lauseita, kuten Pitot'n, Ptolemaioksen ja Fuss'n lauseet. Ensin kuitenkin tutustutaan aiheeseen liittyviin geometrisiin lauseisiin ja määritelmiin, joiden avulla voidaan todistaa muita vastaantulevia lauseita ja ominaisuuksia.

Aiheena ympyrälliset nelikulmiot pitävät sisällään siis nelikulmiot, joilla on sisä- tai ympärysympyrä. Tässä työssä tarkastellaan vain konvekseja nelikulmioita eli sellaisia nelikulmioita, joiden jokainen sisäkulma on pienempi kuin $180°$ tai toisin sanoen, pienempi kuin kaksi suoraa kulmaa. Vaikka ympyrällisille monikulmioille on omistettu oma kirjansa jo antiikin Kreikan geometrisesta teoksesta Eukleideen Alkeet, niin niitä on nykyisin helpompi tutkia interaktiivisten geometristen ohjelmistojen kuten GeoGebran avulla. Euklidiseen tasogeometriaan keskittyvä Forum Geometricorum -niminen vertaisarvioitu verkkojulkaisu sisältää paljon 2000-luvulla julkaistuja löydöksiä koskien ympyrällisiä nelikulmioita.

Tässä työssä esiintyvien lauseiden todistukset on pyritty pitämään puhtaasti geometrisina. Seuratakseen työtä lukija tarvitsee koulumatematiikan antamat perustiedot tavallisimpien euklidisten tasokuvioiden ominaisuuksista, yhtenevyyskriteereistä ja yhdenmuotoisuuslauseista. Työ soveltuu hyvin muun muassa geometriasta syvemmin kiinnostuneille lukiolaisille, matematiikkaolympialaisiin osallistuville sekä matematiikan aineenopettajille ja aineenopettajaksi opiskeleville.

Lopussa johdetaan vielä ympyrällisten nelikulmioiden duaalisuuteen perustuen lauseita, joita ei kirjallisuudesta löytynyt. Samalla käydään läpi sitä prosessia, miten niihin päädyttiin. Työn kahdelle viimeiselle sivulle on yhteenvetona koottu ympyrällisten nelikulmioiden duaaleja lauseita ja esitetty tavallisimpien ympyrällisten nelikulmioiden duaalit nelikulmiot sekä niiden hierarkkista luokittelua.

# Luku 2

# Geometrisia lauseita ja määritelmiä

Tässä luvussa esitellään tutkielmassa käytettäviä geometrisia lauseita ja määritelmiä, jotka eivät pakosti ole kaikille selviä. Kirjoittaja olettaa, että lukijalle ovat tuttuja koulumatematiikassa läpikäydyt geometriset tasokuviot ja niiden ominaisuudet sekä kolmioiden yhtenevyyskriteerit ja yhdenmuotoisuuslauseet. Koska tässä työssä käsitellään vain *konvekseja* monikulmioita, käydään sen määritelmä ensin läpi. Sen jälkeen tutustutaan työn aiheen kannalta tärkeisiin käsitteisiin *sisäympyrä*, *ympärysympyrä*, *tangentin pituus* ja *leija*. Lopuksi käydään alaluvuittain läpi aiheeseen liittyviä nimettyjä lauseita.

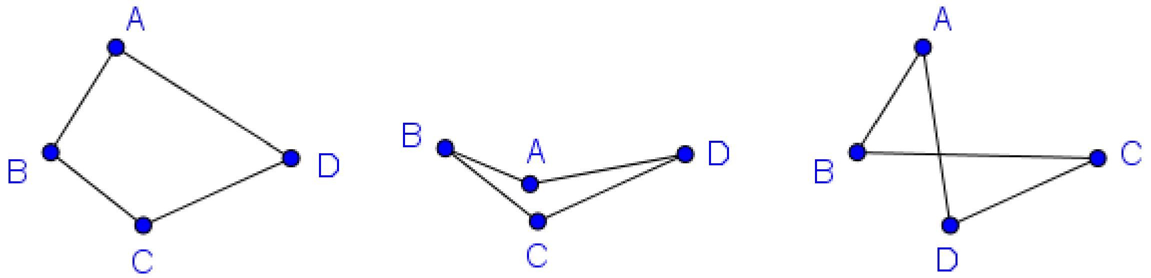
**Määritelmä 2.1.** Joukko $X$ on kupera eli *konveksi*, jos siitä, että $A \in X$ ja $B \in X$ aina seuraa $\overline{AB} \subset X$.

**Määritelmä 2.2.** Monikulmio $\mathcal{P}$ on kupera eli *konveksi*, jos sen jokaiselle sivulle $l$ pätee, että monikulmio sisältyy kokonaisuudessaan toiselle sivusta $l$ jatketun suoran määrittämälle suljetulle puolitasolle.

Edeltävä määritelmä tarkoittaa siis sitä, että jokainen konveksin monikulmion piste on joko sivulla $l$ tai $\mathcal{P}$-puolella sivua $l$. Terminologiasta huolimatta konveksi monikulmio, joka on siis sivujensa yhdiste, ei ole konveksi joukko. Kovera eli *konkaavi* monikulmio on taas sellainen monikulmio, joka ei ole konveksi monikulmio. Konveksi ja konkaavi monikulmio ovat *yksinkertaisia* monikulmioita eli monikulmioita, jotka eivät leikkaa itseään. Seuraavalla sivulla oleva kuva 1 havainnollistaa näitä nelikulmioiden tapauksessa.

**Lause 2.3.** *Jos jokaiselle monikulmion $\mathcal{P}$ sivulle $l$ pätee, että ne $\mathcal{P}$:n kärkipisteet, jotka eivät kuulu sivuun $l$, ovat samalla $l$:n sisältävän suoran määrittämällä puolitasolla, niin $\mathcal{P}$ on konveksi monikulmio.*

*Todistus.* Oletetaan, että $\mathcal{P}$ on sellainen monikulmio, jonka jokaiselle sivulle $l$ pätee, että ne $\mathcal{P}$:n kärkipisteet, jotka eivät kuulu sivuun $l$, ovat samalla $l$:n sisältävän suoran määrittämällä puolitasolla. Nyt kaikki $\mathcal{P}$:n kärkipisteet sijaitsevat samalla suljetulla puolitasolla.




Kuva 1: Konveksi nelikulmio, konkaavi nelikulmio ja itseään leikkaava nelikulmio.

Koska suljettu puolitaso on konveksi joukko, niin konveksin joukon määritelmän mukaisesti jokainen $\mathcal{P}$:n sivu $l$ sisältyy samaan suljettuun puolitasoon. Siis monikulmio $\mathcal{P}$ on konveksi. □

**Määritelmä 2.4.** *Sisäympyrä* on sellainen ympyrä, joka voidaan piirtää monikulmion sisään siten, että se sivuaa jokaista monikulmion sivua. Monikulmion sivut ovat tällöin sisäympyrän tangentteja.

Vastedes sisäympyrän keskipisteestä käytetään merkintää $I$ (engl. *in*).

**Lause 2.5.** *Jos $ABC$ on kolmio, niin sillä on sisäympyrä.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABC$ on kolmio. Kulmien $\angle CAB$ ja $\angle ABC$ puolittajat leikkaavat toisensa pisteessä $I$. Osoitetaan, että $\angle ACI \cong \angle ICB$. Olkoot pisteet $D$, $E$ ja $F$ pisteen $I$ kohtisuorat projektiot kolmion sivuilla $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ja $\overline{CA}$. Huomataan, että yhtenevyyskriteerin $KKS$:n nojalla kolmiot $ADI$ ja $AFI$ ovat yhtenevät. Samoin kolmiot $BDI$ ja $BEI$ ovat yhtenevät. Siis $\overline{IF} \cong \overline{ID} \cong \overline{IE}$. Nyt yhtenevyyskriteeri suorakulmaisen $SSK$:n nojalla kolmiot $CFI$ ja $CEI$ ovat yhtenevät. Siis $\angle FCI \cong \angle ECI$, jolloin kolmion $ABC$ kulmien kulmanpuolittajat leikkaavat pisteessä $I$.

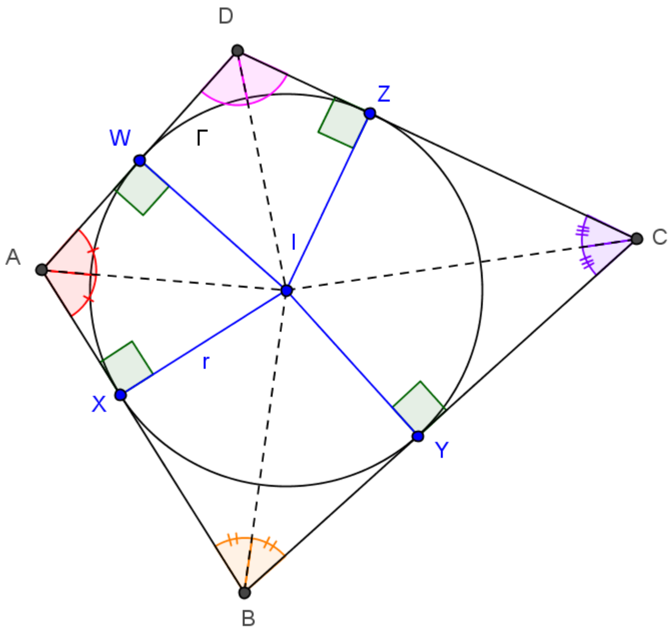
Piste $I$ keskipisteenä pisteen $D$ kautta piirretty ympyrä $\Gamma$ sisältää pisteet $E$ ja $F$, koska $\overline{ID} \cong \overline{IE} \cong \overline{IF}$, jolloin ne kaikki ovat siis $\Gamma$:n säteitä. Koska sädettä vastaan kohtisuora, säteen päätepisteen kautta kulkeva suora on ympyrän tangentti, niin kaikki kolmion sivut ovat $\Gamma$:n tangentteja. Siis $\Gamma$ on $ABC$:n sisäympyrä. □

**Lause 2.6.** *Nelikulmiolla $ABCD$ on sisäympyrä, jos ja vain jos sen sisäkulmien kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä.*

*Todistus.* $\Longrightarrow$ : Oletetaan, että nelikulmiolla $ABCD$ on $I$-keskinen ja $r$-säteinen sisäympyrä $\Gamma$. Nyt sisäympyrän määritelmän nojalla $\Gamma$ sivuaa nelikulmion sivuja $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ pisteissä $X$, $Y$, $Z$ ja $W$. Ympyrän määritelmän nojalla $\overline{IX} \cong \overline{IY} \cong \overline{IZ} \cong \overline{IW} \cong r$, ja koska $\Gamma$ sivuaa jokaista nelikulmion sivua, niin $\overline{IX} \perp \overline{AB}$, $\overline{IY} \perp \overline{BC}$, $\overline{IZ} \perp \overline{CD}$ ja

$\overline{IW} \perp \overline{DA}$. Nyt yhtenevyyskriteeri suorakulmaisen $SSK$:n nojalla kolmiot $AIX$ ja $AIW$ ovat yhteneviä, joten $\angle IAW \cong \angle IAX$. Siis $\overline{AI}$ on kulman $\angle DAB$ kulmanpuolittaja. Samalla tavalla kolmiot $BIX$ ja $BIY$, kolmiot $CIY$ ja $CIZ$ sekä kolmiot $DIZ$ ja $DIW$ ovat yhteneviä, joten $\angle IBX \cong \angle IBY$, $\angle ICY \cong \angle ICZ$ ja $\angle IDZ \cong \angle IDW$. Siis $\overline{BI}$ on kulman $\angle ABC$ kulmanpuolittaja, $\overline{CI}$ on kulman $\angle BCD$ kulmanpuolittaja ja $\overline{DI}$ on kulman $\angle CDA$ kulmanpuolittaja. Koska piste $I$ on jokaiselle kulmanpuolittajalle yhteinen piste, niin nelikulmion $ABCD$:n sisäkulmien kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä $I$.

$\Longleftarrow$ : Oletetaan, että nelikulmion $ABCD$ sisäkulmien kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä. Merkitään tätä pistettä $I$:lla. Merkitään pisteillä $X$, $Y$, $Z$ ja $W$ pisteen $I$ kohtisuoria projektioita nelikulmion sivuilla. Nyt siis $\overline{IX} \perp \overline{AB}$, $\overline{IY} \perp \overline{BC}$, $\overline{IZ} \perp \overline{CD}$ ja $\overline{IW} \perp \overline{DA}$. Yhtenevyyskriteeri $KKS$:n nojalla kolmiot $AIX$ ja $AIW$ ovat yhteneviä, joten $\overline{IX} \cong \overline{IW}$. Samalla tavalla kolmiot $BIX$ ja $BIY$ sekä kolmiot $CIY$ ja $CIZ$ ovat yhteneviä, joten myös $\overline{IX} \cong \overline{IY}$ ja $\overline{IY} \cong \overline{IZ}$. Nyt janojen transitiivisuuden nojalla pätee $\overline{IW} \cong \overline{IX} \cong \overline{IY} \cong \overline{IZ}$. Voidaan siis piirtää $I$-keskinen ja $\overline{IW}$-säteinen ympyrä $\Gamma$, joka sivuaa nelikulmion $ABCD$ jokaista sivua. Siis $\Gamma$ on nelikulmion $ABCD$ sisäympyrä. $\square$




Kuva 2: Lauseiden 2.6 ja 2.8 todistusten havainnollistus.

**Määritelmä 2.7.** *Tangentin pituus* on sellainen jana, jonka toinen päätepiste on ympyrän ulkopuolella ja toinen ympyrän kehälle siten, että janasta jatkettu suora sivuaa ympyrää kyseisessä pisteessä.

Edellisessä pitäydytään lähteen [14] käyttämässä nimityksessä *tangentin pituus*, koska *tangenttijana* voi tarkoittaa myös sisäympyrää sivuavaa monikulmion sivua.

**Lause 2.8.** *Jos piste $A$ on ympyrän ulkopuolella sekä suorat $AX$ ja $AW$ sivuavat ympyrää sen pisteissä $X$ ja $W$, niin tangentin pituudet $\overline{AX}$ ja $\overline{AW}$ ovat yhtä suuret.*

*Todistus.* Oletetaan, että $\Gamma$ on $I$-keskinen ja $r$-säteinen ympyrä sekä piste $A$ on ympyrän ulkopuolella. Olkoot $\Gamma$:n pisteet $X \neq W$ sellaisia, että suorat $AX$ ja $AW$ sivuavat ympyrää $\Gamma$. Huomataan, että $\overline{IX} \cong \overline{IW} \cong r$. Koska suorat sivuavat ympyrää $\Gamma$, niin $\overline{IX} \perp AX$ ja $\overline{IW} \perp AW$. Nyt yhtenevyyskriteeri suorakulmaisen $SSK$:n nojalla kolmiot $AXI$ ja $AIW$ ovat yhteneviä, jolloin $\overline{AX} \cong \overline{AW}$. Siis tangentin pituudet $\overline{AX}$ ja $\overline{AW}$ ovat yhtä suuret. □

**Määritelmä 2.9.** *Ympärysympyrä* on sellainen ympyrä, joka voidaan piirtää monikulmion ympäri siten, että se kulkee monikulmion jokaisen kärkipisteen kautta. Tällöin monikulmion kärkipisteet ovat ympärysympyränsä pisteitä.

Vastedes ympärysympyrän keskipisteestä käytetään merkintää $O$ (engl. *out*).

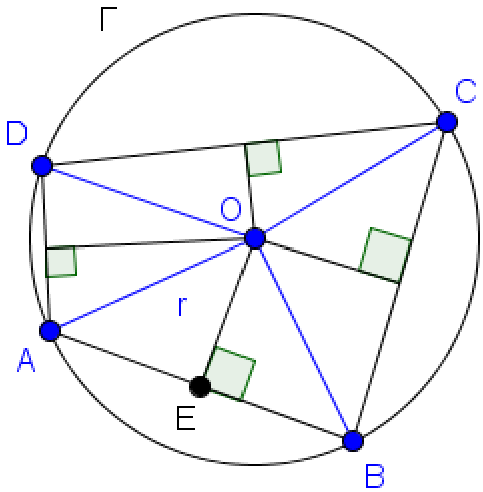
**Lause 2.10.** *Jos $ABC$ on kolmio, niin sillä on yksikäsitteinen ympärysympyrä.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABC$ on kolmio. Muodostetaan janoille $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ keskinormaalit. Nyt koska $ABC$ on kolmio, niin $\overline{AB} \nparallel \overline{AC}$, jolloin edellä mainitut keskinormaalit leikkaavat pisteessä $O$. Koska jokaiselle janan $\overline{AB}$ keskinormaalin pisteelle $P$ pätee $\overline{AP} \cong \overline{PB}$ ja jokaiselle janan $\overline{AC}$ keskinormaalin pisteelle $P$ pätee $\overline{AP} \cong \overline{PC}$, niin keskinormaalien leikkauspisteelle $O$ pätee $\overline{AO} \cong \overline{OB}$ sekä $\overline{AO} \cong \overline{OC}$. Siis $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong r$. Nyt siis voidaan piirtää $r$-säteinen ja $O$-keskinen ympyrä $\Gamma$, joka kulkee pisteiden $A$, $B$ ja $C$ kautta eli kolmiolla $ABC$ on ympärysympyrä.

Oletetaan seuraavaksi, että $O'$ on sen ympyrän keskipiste, joka kulkee pisteiden $A$, $B$ ja $C$ kautta. Tästä siis seuraa, että $\overline{O'A} \cong \overline{O'B} \cong \overline{O'C} \cong r'$. Koska $\overline{AO'} \cong \overline{O'B}$ ja $\overline{AO'} \cong \overline{O'C}$, niin piste $O'$ on janojen $\overline{AB}$ ja $\overline{AC}$ keskinormaaleilla. Koska edellä mainitut keskinormaalit leikkaavat toisensa pisteessä $O$, niin $O' = O$. Kolmiolla $ABC$ on siis yksikäsitteinen ympärysympyrä. □

**Lause 2.11.** *Nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä, jos ja vain jos sen sivujen keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä.*

*Todistus.* $\Longrightarrow$ : Oletetaan, että nelikulmiolla $ABCD$ on $O$-keskinen ja $r$-säteinen ympärysympyrä $\Gamma$. Nyt pisteet $A$, $B$, $C$ ja $D$ ovat $\Gamma$:n pisteitä, jolloin $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD} \cong r$. Koska jokaiselle janan $\overline{AB}$ keskinormaalin pisteille $E$ pätee $\overline{EA} \cong \overline{EB}$, niin $O$ on janan $\overline{AB}$ keskinormaalin piste. Vastaavalla päättelyllä $O$ on myös janojen $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ja $\overline{DA}$




Kuva 3: Lauseen 2.11 todistuksen havainnollistus.

keskinormaalin piste. Siis nelikulmion $ABCD$ sivujen keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä $O$.

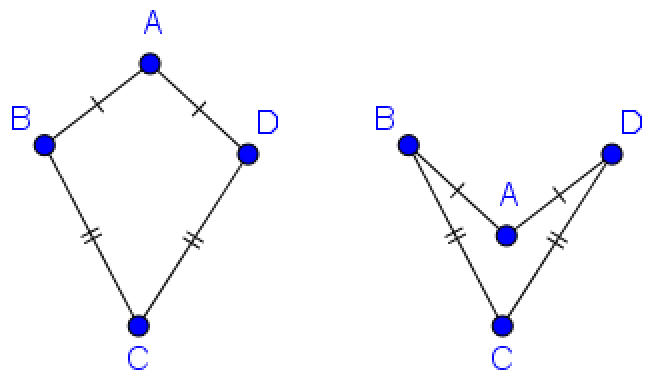
$\Longleftarrow$ : Oletetaan, että nelikulmion $ABCD$ sivujen keskinormaalit leikkaavat samassa pisteessä. Merkitään tätä pistettä $O$:lla. Oletetaan, että janan $\overline{AB}$ keskipiste on $E$, jolloin $\overline{EA} \cong \overline{EB}$. Koska $EO$ on janan $\overline{AB}$ keskinormaali, niin kulmat $\angle AEO$ ja $\angle BEO$ ovat suoria kulmia. Nyt yhtenevyyskriteeri $SKS$:n nojalla kolmiot $AEO$ ja $BEO$ ovat yhteneviä, jolloin $\overline{OA} \cong \overline{OB}$. Vastaavalla tavalla muiden kolmioiden suhteen, ja soveltamalla janojen transitiivisuutta, saadaan $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD} \cong r$. Nyt siis voidaan piirtää $O$-keskinen ja $r$-säteinen ympärysympyrä $\Gamma$ siten, että pisteet $A$, $B$, $C$ ja $D$ ovat $\Gamma$:n pisteitä. Siis nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä. □

**Määritelmä 2.12.** *Leija* on sellainen nelikulmio, jonka kaksi viereistä sivua ovat yhtä pitkät ja kaksi muuta sivua keskenään yhtä pitkät.

Kuten seuraavan sivun kuvasta 4 huomataan, kaikki leijat eivät ole konvekseja. Leijasta puhuttaessa usein kuitenkin rajoitutaan konvekseihin leijoihin. Tässä työssä käsitellään vain sellaisia leijoja, jotka ovat konvekseja.

**Lause 2.13.** *Jos nelikulmio $ABCD$ on konveksi leija, niin toinen lävistäjistä jakaa sen kahdeksi yhteneväksi kolmioksi puolittaen samalla vastakkaiset sisäkulmat.*

*Todistus.* Oletetaan, että nelikulmio $ABCD$ on konveksi leija. Leijan määritelmän nojalla voidaan valita sivut siten, että $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ja $\overline{CB} \cong \overline{CD}$. Huomataan, että kolmio $ABD$ on tasakylkinen kolmio, jolloin $\angle ABD \cong \angle ADB$. Samoin kolmio $CBD$ on tasakylkinen kolmio, jolloin $\angle CBD \cong \angle CDB$. Nyt kulmien yhteenlaskun määritelmän nojalla




Kuva 4: Konveksi ja konkaavi leija.

saadaan $\angle ABC = \angle ABD + \angle CBD \cong \angle ADB + \angle CDB = \angle ADC$. Nyt yhtenevyyskriteeri *SKS*:n perusteella kolmiot $ABC$ ja $ADC$ ovat yhteneviä, jolloin lävistäjä $\overline{AC}$ jakaa $ABCD$:n kahdeksi yhteneväksi kolmioksi. Koska $ABC \cong ADC$, niin $\angle BAC \cong \angle DAC$ sekä $\angle BCA \cong \angle DCA$. Siis lävistäjä $\overline{AC}$ puolittaa vastakkaiset sisäkulmat $\angle BAD$ ja $\angle BCD$. □

**Lause 2.14.** *Jos nelikulmio $ABCD$ on konveksi leija, niin sillä on sisäympyrä.*

*Todistus.* Oletetaan, että nelikulmio $ABCD$ on konveksi leija. Lauseen 2.6 nojalla riittää siis osoittaa, että sen sisäkulmien kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä. Leijan määritelmän ja lauseen 2.13 nojalla voidaan valita sivut siten, että $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ sekä $\overline{CB} \cong \overline{CD}$, ja että $\overline{AC}$ on se $ABCD$:n lävistäjä, joka puolittaa vastakkaiset sisäkulmat $\angle BAD$ ja $\angle BCD$. Kulman $\angle ABC$ kulmanpuolittaja leikkaa lävistäjän $\overline{AC}$ pisteessä $I$. Nyt kulmanpuolittajan määritelmän mukaan $\angle ABI \cong \angle CBI$. Muodostetaan jana $\overline{ID}$ ja osoitetaan, että se on kulman $\angle ADC$ kulmanpuolittaja eli $\angle ADI \cong \angle CDI$. Yhtenevyyskriteeri *SKS*:n nojalla kolmiot $ADI$ ja $ABI$ ovat yhteneviä, joten $\angle ADI \cong \angle ABI$. Samalla tavalla kolmiot $CBI$ ja $CDI$ ovat yhteneviä, joten $\angle CBI \cong \angle CDI$. Nyt kulmien transitiivisuuden nojalla pätee $\angle ADI \cong \angle ABI \cong \angle CBI \cong \angle CDI$. Siis $\overline{ID}$ on kulman $\angle ADC$ kulmanpuolittaja, jolloin $ABCD$:n sisäkulmien kulmanpuolittajat leikkaavat samassa pisteessä $I$. Siis leijalla $ABCD$ on sisäympyrä. □

## 2.1 Apolloniuksen lause

Apolloniuksen lause todistettiin noin 200 vuotta ennen ajanlaskun alkua ja se on nimetty antiikin kreikkalaisen geometrikon ja tähtitieteilijän Apollonios Pergalaisen mukaan. Aikanaan Apolloniosta kutsuttiin nimellä Suuri Geometrikko ja hänen metodologiansa ja terminologiansa on vaikuttanut moniin tunnettuihin tieteilijöihin, kuten esimerkiksi Newtoniin.

**Lause 2.15.** (Apolloniuksen lause). *Kolmiolla $ABC$ pätee*

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2), \tag{2.16}$$

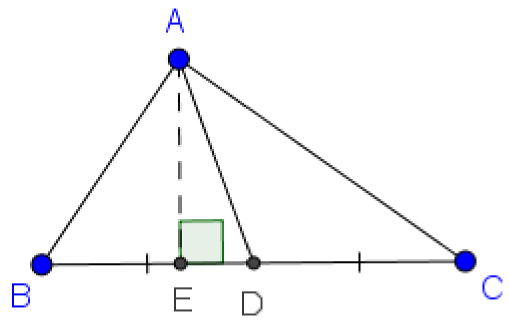
*missä $D$ on sivun $\overline{BC}$ keskipiste.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABC$ on kolmio ja $D$ on sivun $\overline{BC}$ keskipiste. Nyt $\overline{BD} \cong \overline{CD}$. Merkitään pisteen $A$ kohtisuoraa projektiota suoralla $BC$ pisteellä $E$. Nyt Pythagoraan kaavalla saadaan seuraavat kolme yhtälöä

$$\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 \cong \overline{AE}^2 + (\overline{BD} - \overline{ED})^2,$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2 \cong \overline{AE}^2 + (\overline{CD} + \overline{ED})^2 \cong \overline{AE}^2 + (\overline{BD} + \overline{ED})^2,$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{ED}^2.$$




Kuva 5: Apolloniuksen lauseen todistuksen havainnollistus.

Lasketaan näistä kaksi ensimmäistä puolittain yhteen ja sijoitetaan lopuksi viimeinen, jolloin saadaan

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + (\overline{BD} - \overline{ED})^2 + \overline{AE}^2 + (\overline{BD} + \overline{ED})^2$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\overline{AE}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{BD}^2 \cdot \overline{ED}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{BD}^2 + 2\overline{BD}^2 \cdot \overline{ED}^2 + \overline{ED}^2$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AE}^2 + \overline{ED}^2 + \overline{BD}^2)$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2).$$

□

Apolloniuksen lausetta voidaan ajatella kolmion janoihin piirrettyjen neliöiden summakaavana, mutta siitä saadaan myös ratkaistua kolmion mediaanin pituus kolmion sivujen avulla. Kyseistä lausetta käytetäänkin tässä työssä juuri mediaanin pituuden takia, mutta vasta luvussa 5 Fuss'n lauseen todistamisessa.

## 2.2 Pitot'n lause

Ranskalainen insinööri Henri Pitot todisti seuraavan lauseen vuonna 1725, minkä johdosta sitä alettiin kutsua hänen nimellään.

**Lause 2.17.** (Pitot'n lause). *Jos konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on sisäympyrä, niin*

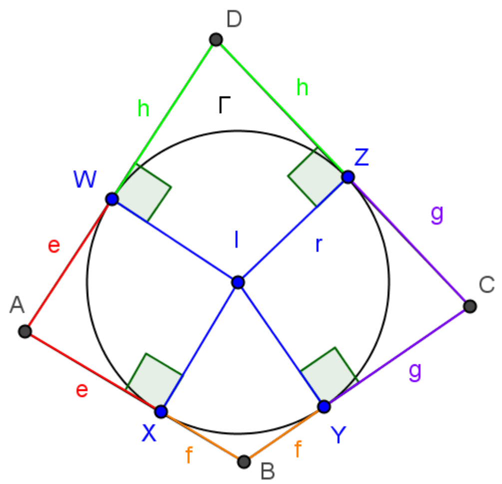
$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}. \tag{2.18}$$

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on konveksi nelikulmio, jolla on $I$-keskinen ja $r$-säteinen sisäympyrä $\Gamma$, joka sivuaa nelikulmion sivuja $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ pisteissä $X$, $Y$, $Z$ ja $W$. Ympyrän määritelmän nojalla $\overline{IX} \cong \overline{IY} \cong \overline{IZ} \cong \overline{IW} \cong r$, ja koska ympyrä sivuaa jokaista nelikulmion sivua, niin $\overline{IX} \perp \overline{AB}$, $\overline{IY} \perp \overline{BC}$, $\overline{IZ} \perp \overline{CD}$ ja $\overline{IW} \perp \overline{DA}$. Koska suorat $BX$ ja $DW$ leikkaavat toisensa pisteessä $A$ ja sivuavat ympyrää $\Gamma$ pisteissä $X$ ja $W$, niin lauseen 2.8 nojalla $\overline{AW} \cong \overline{AX} \cong e$. Täysin vastaavalla tavalla $\overline{BX} \cong \overline{BY} \cong f$, $\overline{CY} \cong \overline{CZ} \cong g$ ja $\overline{DZ} \cong \overline{DW} \cong h$. Nyt huomaamme, että janojen yhteenlaskun määritelmän nojalla $\overline{AB} = e + f$, $\overline{BC} = f + g$, $\overline{CD} = g + h$ ja $\overline{DA} = h + e$. Siis

$$\overline{AB} + \overline{CD} = (e + f) + (g + h) = (f + g) + (h + e) = \overline{BC} + \overline{DA}.$$

□

Yhtälö (2.18) tarkoittaa siis tässä tapauksessa sitä, että nelikulmion vastakkaisten sivujen summat ovat samat.

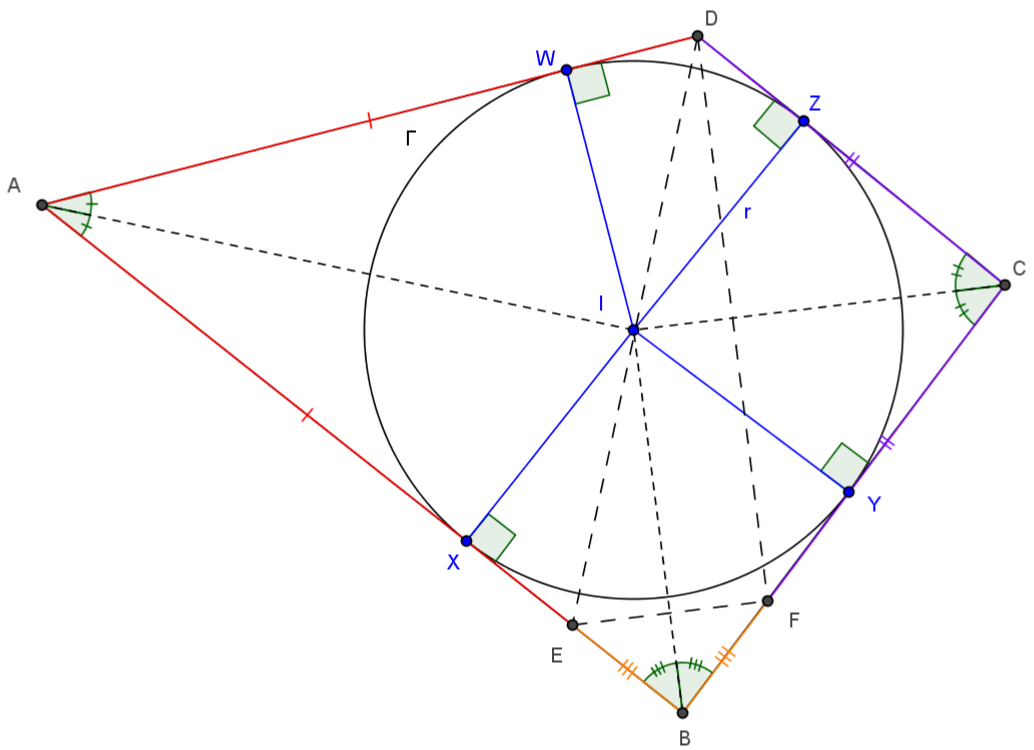



Kuva 6: Lauseen 2.17 todistuksen havainnollistus.

Onkin mielenkiintoista huomata, että Pitot'n lause pätee myös päinvastaiseen suuntaan. Tämän todisti sveitsiläinen matemaatikko Jakob Steiner vuonna 1846 – yli 100 vuotta alkuperäisen todistuksen jälkeen.

**Lause 2.19.** (Pitot'n lause käänteisesti). *Jos konveksissa nelikulmiossa $ABCD$ pätee $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$, niin sillä on sisäympyrä.*

*Todistus.* Oletetaan, että konveksissa nelikulmiossa $ABCD$ pätee $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$. Käydään ensin läpi erikoistapaus, missä $ABCD$ on leija. Koska $ABCD$ on leija, niin leijan määritelmän nojalla sen vastakkaisten sivujen summat ovat samat. Nyt lauseen 2.14 nojalla jokaisella konveksilla leijalla on sisäympyrä, joten lause pätee leijoille.




Kuva 7: Lauseen 2.19 todistuksen havainnollistus.

Oletetaan nyt, että $ABCD$ ei ole leija. Koska $ABCD$ ei ole leija, niin mitkään nelikulmion vierekkäisistä sivuista eivät voi olla yhteneviä, koska muuten alkuoletuksen nojalla nelikulmio olisi leija. Voidaan siis valita vierekkäiset sivut $\overline{AB}$ ja $\overline{DA}$, joille pätee joko $\overline{AB} > \overline{DA}$ tai $\overline{AB} < \overline{DA}$. Oletetaan, että $\overline{AB} > \overline{DA}$ (tapaus $\overline{AB} < \overline{DA}$ voidaan käydä täysin vastaavalla tavalla läpi). Huomataan, että alkuoletus $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$ voidaan kirjoittaa myös seuraavasti $\overline{AB} - \overline{DA} = \overline{BC} - \overline{CD}$. Koska $\overline{AB} > \overline{DA}$, niin $\overline{AB} - \overline{DA} > 0$, josta edellisen perusteella seuraa, että $\overline{BC} - \overline{CD} > 0$, jolloin $\overline{BC} > \overline{CD}$.

Seuraavaksi valitaan piste $E$ sivulta $\overline{AB}$ siten, että $\overline{AE} \cong \overline{DA}$ ja piste $F$ sivulta $\overline{BC}$ siten, että $\overline{CF} \cong \overline{CD}$. Tämän perusteella kolmiot $DCF$ ja $DAE$ ovat tasakylkisiä.

Nyt yhtälö $\overline{AB} - \overline{DA} = \overline{BC} - \overline{CD}$ voidaan kirjoittaa seuraavasti $\overline{AB} - \overline{AE} = \overline{BC} - \overline{CF}$, ja koska $\overline{AB} - \overline{AE} = \overline{BE}$ sekä $\overline{BC} - \overline{CF} = \overline{BF}$, niin $\overline{BE} = \overline{BF}$. Siis kolmio $EBF$ on myös tasakylkinen. Koska kolmiot $DCF$, $DAE$ ja $EBF$ ovat tasakylkisiä, niin kulmien $\angle DCF$, $\angle DAE$ ja $\angle EBF$ puolittajat ovat kolmion $DEF$ keskinormaaleja, jotka leikkaavat samassa pisteessä $I$.

Jäljellä on enää osoittaa, että piste $I$ on yhtä kaukana nelikulmion sivuista. Merkitään pisteillä $X$, $Y$, $Z$ ja $W$ pisteen $I$ kohtisuoria projektioita nelikulmion sivuilla. Nyt siis $\overline{IX} \perp \overline{AB}$, $\overline{IY} \perp \overline{BC}$, $\overline{IZ} \perp \overline{CD}$ ja $\overline{IW} \perp \overline{DA}$. Yhtenevyyskriteeri $KKS$:n perusteella kolmiot $AIX$ ja $AIW$ ovat yhteneviä, joten $\overline{IX} \cong \overline{IW}$. Samalla tavalla kolmiot $BIX$ ja $BIY$ sekä kolmiot $CIY$ ja $CIZ$ ovat yhteneviä, joten myös $\overline{IX} \cong \overline{IY}$ ja $\overline{IY} \cong \overline{IZ}$. Nyt janojen transitiivisuuden nojalla pätee $\overline{IW} \cong \overline{IX} \cong \overline{IY} \cong \overline{IZ}$. Voidaan siis piirtää $I$-keskinen ja $\overline{IW}$-säteinen ympyrä $\Gamma$, joka sivuaa konveksin nelikulmion $ABCD$ jokaista sivua. Siis $\Gamma$ on konveksin nelikulmion $ABCD$ sisäympyrä. □

Nyt lauseen 2.19 avulla voidaan täydentää Pitot'n lausetta.

**Lause 2.20.** (Täydennetty Pitot'n lause). *Konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on sisäympyrä, jos ja vain jos $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$.*

Täydennetyllä Pitot'n lauseella on paljon työkaluarvoa tutkittaessa tangentiaalisia nelikulmioita. Sen avulla voidaan mm. selvittää, ovatko tietyt nelikulmiot tangentiaalisia nelikulmioita.

## 2.3 Kehäkulmalause

Euklidisessa tasogeometriassa kehäkulmalauseella on suuri työkaluarvo. Kehäkulmalause kertoo siis sen, että ympyrässä kehäkulma on puolet samaa kaarta vastaavasta keskuskulmasta. Thaleen lause on sen erikoistapaus, jossa ympyrän halkaisijan päätepisteet muodostavat minkä tahansa muun ympyrän pisteen kanssa suoran kulman. Tässä työssä kehäkulmalausetta, tai oikeastaan sen korollaaria, käytetään apuna todistamaan muutamia nelikulmioon ja sen ympärysympyrään liittyviä lauseita.

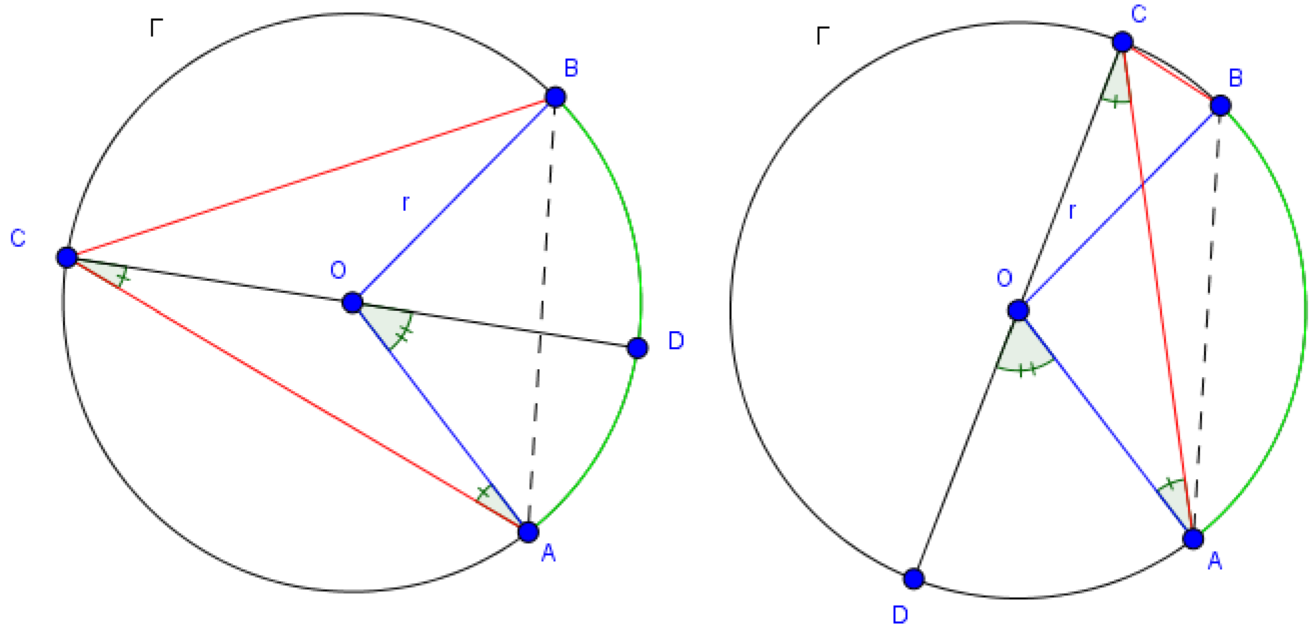
**Lause 2.21.** (Kehäkulmalause). *Jos $O$-keskisen ympyrän pisteet $A$, $B$ ja $C$ ovat siten, että kulmat $\angle AOB$ ja $\angle ACB$ jakavat saman pisteiden $A$ ja $B$ määrittämän kaaren, niin $\angle AOB \cong 2\angle ACB$.*

*Todistus.* Oletetaan, että $\Gamma$ on $O$-keskinen ja $r$-säteinen ympyrä.

Tapaus 1) Olkoot $\Gamma$:n pisteet $A$, $B$ ja $C$ sellaisia, että $C$ ja $O$ ovat samalla puolen suoraa $AB$. Piste $C$ ei ole siis kulman $\angle AOB$ aukeamassa. Nyt kulmat $\angle AOB$ ja $\angle ACB$ jakavat pisteiden $A$ ja $B$ määrittämän kaaren. Olkoon $D \neq C$ sellainen piste, joka on puolisuoran $\overrightarrow{CO}$ muodostaman halkaisijan toinen päätepiste.

Oletetaan ensin, että $D$ on kulman $\angle AOB$ aukeamassa. Nyt koska $\overline{OA} \cong \overline{OC} \cong r$, niin $AOC$ on tasakylkinen kolmio, jolloin $\angle OAC \cong \angle ACO$. Kulmien yhteenlaskun määritelmän nojalla $\angle OAC + \angle ACO \cong 2\angle ACO$. Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, niin kulman $\angle COA$ vieruskulma $\angle AOD \cong \angle OAC + \angle ACO$. Siis $\angle AOD \cong 2\angle ACO$. Samanlaisin perustein $\angle BOD \cong 2\angle BCO$. Nyt huomataan, että $\angle AOB \cong \angle AOD + \angle BOD \cong 2\angle ACO + 2\angle BCO \cong 2\angle ACB$. Siis $\angle AOB \cong 2\angle ACB$.

Oletetaan nyt, että $D$ ei ole kulman $\angle AOB$ aukeamassa, esimerkiksi siten että $O$ ja $B$ ovat eri puolella suoraa $AC$. Täysin vastaavalla tavalla osoitetaan, että $\angle BOD \cong 2\angle BCO$ ja $\angle AOD \cong 2\angle ACO$, jolloin $\angle AOB \cong \angle BOD - \angle AOD \cong 2\angle BCO - 2\angle ACO \cong 2\angle ACB$. Siis $\angle AOB \cong 2\angle ACB$.

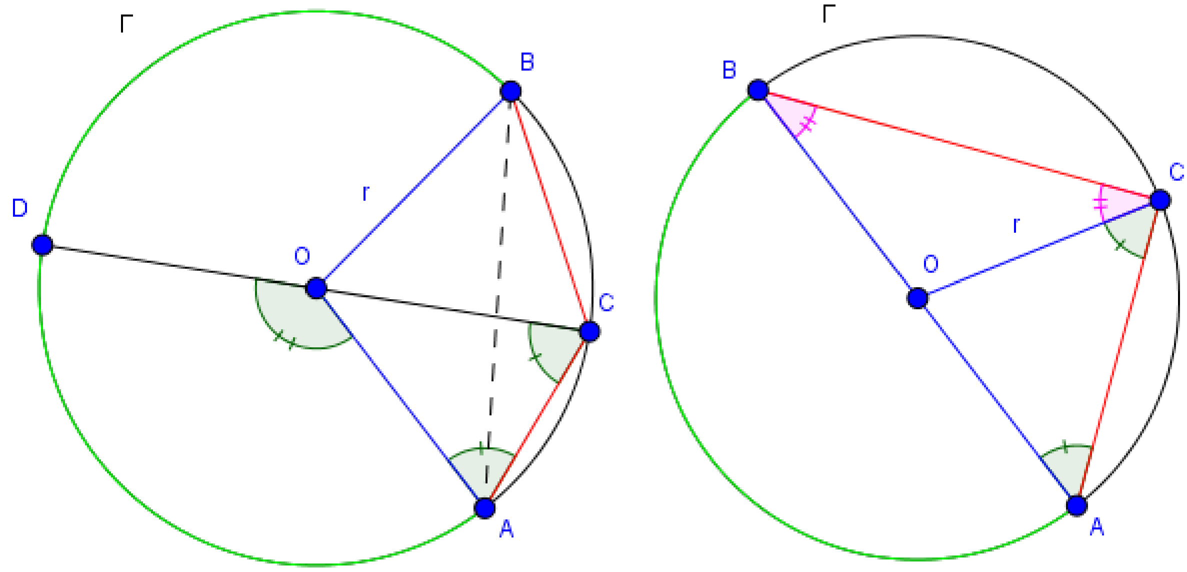



Kuva 8: Lauseen 2.21 todistuksen havainnollistus tapaus 1):n kohdalla.

Tapaus 2) Olkoot Γ:n pisteet $A$, $B$ ja $C$ sellaisia, että $C$ ja $O$ ovat eri puolella suoraa $AB$. Piste $C$ on siis kulman $\angle AOB$ aukeamassa. Nyt kulmat $\angle AOB$ ja $\angle ACB$ jakavat pisteiden $A$ ja $B$ määrittämän (suuremman) kaaren. Olkoon $D \neq C$ sellainen piste, joka on puolisuoran $\overrightarrow{CO}$ muodostaman halkaisijan toinen päätepiste. Nyt taas täysin vastaavalla tavalla kuin tapauksessa 1) osoitetaan, että $\angle AOD \cong 2\angle ACO$ ja $\angle BOD \cong 2\angle BCO$, jolloin $\angle AOB \cong \angle AOD + \angle BOD \cong 2\angle ACO + 2\angle BCO \cong 2\angle ACB$. Siis $\angle AOB \cong 2\angle ACB$.

Tapaus 3) (Thaleen lause). Olkoot Γ:n pisteet $A$ ja $B$ sellaisia, että $O$ on suoralla $AB$, eli $\overline{AB}$ on Γ:n halkaisija, ja olkoon $C$ jokin muu Γ:n piste. Nyt kulmat $\angle AOB$ ja

$\angle ACB$ jakavat pisteiden $A$ ja $B$ määrittämän kaaren. Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, niin kulman $\angle ACB$ vieruskulma on kulmien $\angle CAB$ ja $\angle CBA$ summa. Nyt koska $\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong r$, niin kolmiot $OCA$ ja $OBC$ ovat tasakylkisiä. Nyt siis $\angle ACB \cong \angle ACO + \angle OCB \cong \angle CAO + \angle CBO \cong \angle CAB + \angle CBA$, joten kulma $\angle ACB$ on vieruskulmansa suuruinen eli suora kulma. Tästä huomataankin heti, että $\angle AOB \cong 2\angle ACB$.




Kuva 9: Lauseen 2.21 todistuksen havainnollistus tapausten 2) ja 3) kohdalla.

Tapausten 1) - 3) nojalla $O$-keskisen ympyrän kulmat $\angle AOB$ ja $\angle ACB$ jakavat saman pisteiden $A$ ja $B$ määrittämän kaaren siten, että $\angle AOB \cong 2\angle ACB$. □

**Korollaari 2.22.** (Kehäkulmalauseen korollaari). *Samaa ympyrän kaarta vastaavat kehäkulmat ovat samansuuruiset.*

*Todistus.* Oletetaan, että $\Gamma$ on $O$-keskinen ympyrä. Olkoot $A$, $B$, $C$ ja $D$ sellaisia $\Gamma$:n pisteitä, että $C$ ja $D$ ovat samalla puolen suoraa $AB$. Nyt kulmat $\angle ACB$ ja $\angle ADB$ ovat samaa kaarta vastaavia kehäkulmia. Kehäkulmalauseen nojalla $2\angle ACB \cong \angle AOB \cong 2\angle ADB$ eli $\angle ACB \cong \angle ADB$. Samaa ympyrän kaarta vastaavat kehäkulmat ovat siis samansuuruiset. □

Johdetaan vielä seuraavaksi kehäkulmalauseen korollaarista kaksi tulosta, joita käytetään myöhemmässä vaiheessa tarkastamaan sitä, onko konveksilla nelikulmiolla ympärysympyrä. Niistä ensimmäistä voidaankin pitää kehäkulmalauseen korollaarin käänteisenä puolena.

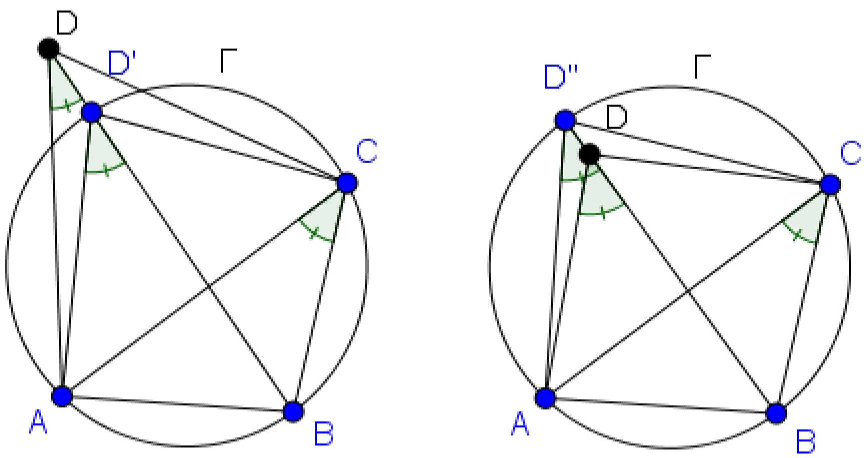
**Lause 2.23.** *Jos konveksissa nelikulmiossa $ABCD$ pätee $\angle ACB \cong \angle ADB$, niin sillä on ympärysympyrä.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on konveksi nelikulmio, jossa pätee $\angle ACB \cong \angle ADB$. Lauseen 2.10 nojalla pisteiden $A$, $B$ ja $C$ kautta kulkee yksi ja vain yksi ympyrä $\Gamma$. Tehdään vastaoletus: $D$ ei ole $\Gamma$:n piste. Koska $D$ ei ole $\Gamma$:n piste, niin $D$ sijaitsee joko $\Gamma$:n ulko- tai sisäpuolella.

Oletetaan ensin, että $D$ sijaitsee $\Gamma$:n ulkopuolella eli janalla $\overline{BD}$ ja $\Gamma$:lla on yhteinen piste $D' \neq B$. Nyt kehäkulmalauseen korollaarin nojalla $\angle ACB \cong \angle AD'B$. Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, niin kulman $\angle DD'A$ vieruskulma $\angle AD'B \cong \angle ADD' + \angle DAD' \cong \angle ADB + \angle DAD'$. Mutta nyt päädytään ristiriitaan alkuoletuksen kanssa, koska $\angle ACB \cong \angle AD'B \cong \angle ADB + \angle DAD' > \angle ADB \cong \angle ACB$.

Oletetaan sitten, että $D$ sijaitsee $\Gamma$:n sisäpuolella eli suoralla $BD$ ja $\Gamma$:lla on yhteinen piste $D'' \neq B$. Nyt kehäkulmalauseen korollaarin nojalla $\angle ACB \cong \angle AD''B$. Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, niin kulman $\angle D''DA$ vieruskulma $\angle ADB \cong \angle AD''D + \angle D''AD \cong \angle AD''B + \angle D''AD$. Mutta jälleen päädytään ristiriitaan alkuoletuksen kanssa, koska $\angle ACB \cong \angle ADB \cong \angle AD''B + \angle D''AD > \angle AD''B \cong \angle ACB$.

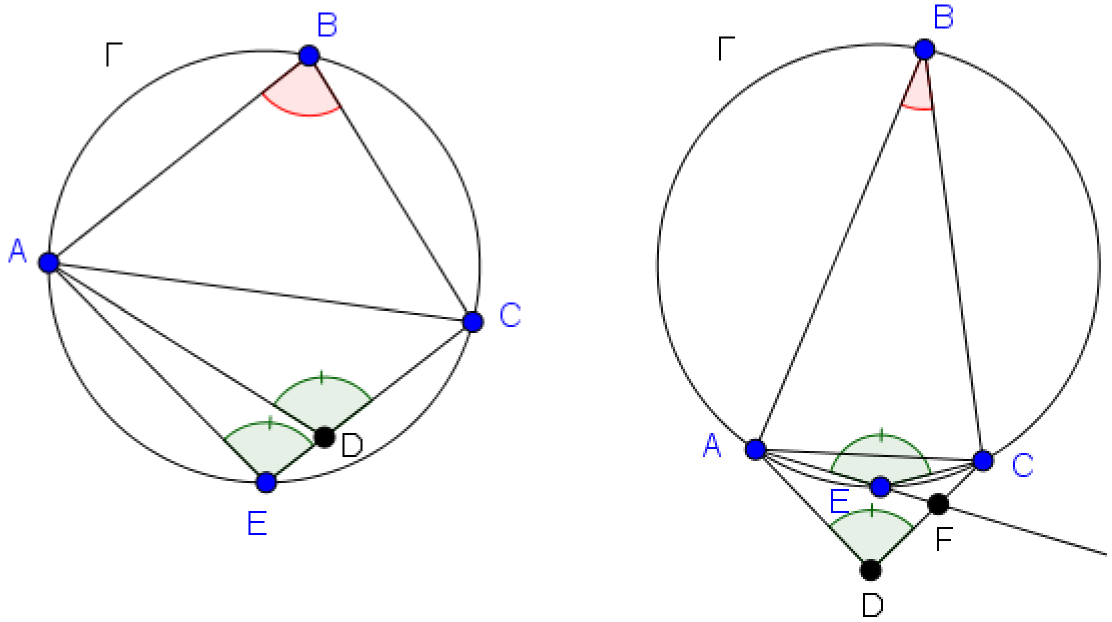
Huomataan, että vastaoletuksesta päädyttiin ristiriitaan, joten alkuperäinen väite pätee eli $D$ on $\Gamma$:n piste. Siis pisteet $A$, $B$, $C$ ja $D$ ovat samalla ympyrällä eli konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä. $\square$




Kuva 10: Lauseen 2.23 todistuksen havainnollistus.

**Lause 2.24.** *Konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä, jos ja vain jos sen vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia.*

*Todistus.* $\Longrightarrow$ : Oletetaan, että konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä $\Gamma$. Nyt $A$, $B$, $C$ ja $D$ ovat $\Gamma$:n pisteitä. Kehäkulmalauseen korollaarin nojalla $\angle CAB \cong \angle BDC$ ja $\angle ACB \cong \angle ADB$. Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, niin kulman $\angle ABC$ vieruskulma on yhtenevä summan $\angle CAB + \angle ACB$ kanssa. Nyt $\angle ADC \cong \angle BDC + \angle ADB \cong \angle CAB + \angle ACB$, joten $\angle ABC$ ja $\angle ADC$ ovat vieruskulmia. Täysin vastaavalla päättelyllä $\angle BAD$ ja $\angle BCD$ ovat vieruskulmia. Siis konveksin nelikulmion $ABCD$ vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia.




Kuva 11: Lauseen 2.24 todistuksen suunnan $\Longleftarrow$ havainnollistus.

$\Longleftarrow$ : Oletetaan, että konveksin nelikulmion $ABCD$ vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia. Lauseen 2.10 nojalla pisteiden $A$, $B$ ja $C$ kautta kulkee yksi ja vain yksi ympyrä $\Gamma$. Tehdään vastaoletus: $D$ ei ole $\Gamma$:n piste. Koska $D$ ei ole $\Gamma$:n piste, niin $D$ sijaitsee joko $\Gamma$:n ulko- tai sisäpuolella.

Oletetaan, että $D$ sijaitsee $\Gamma$:n sisäpuolella. Nyt suora $CD$ leikkaa $\Gamma$:n pisteessä $E$. Koska $E$ sijaitsee puolisuoralla $\overrightarrow{CD}$, niin lauseen 2.3 nojalla nelikulmio $ABCE$ on konveksi. Lauseen edeltävän suunnan nojalla konveksin nelikulmion $ABCE$ kulmat $\angle ABC$ ja $\angle AEC$ ovat nyt vieruskulmia. Alkuoletuksen nojalla tästä seuraa, että $\angle AEC \cong \angle AED \cong \angle ADC$. Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, niin kolmion $AED$ kulman $\angle EDA$ vieruskulma $\angle ADC \cong \angle AED + \angle DAE$. Mutta nyt päädytään ristiriitaan alkuoletuksen kanssa, koska $\angle AED \cong \angle ADC \cong \angle AED + \angle DAE$.

Oletetaan sitten, että $D$ sijaitsee $\Gamma$:n ulkopuolella. Nyt jos janat $\overline{AD}$ tai $\overline{CD}$ leikkaavat $\Gamma$:n pisteessä $E$, voidaan edellinen päättely muuntaa samanlaiseen ristiriitaan päättyväksi. Jos kumpikaan janoista $\overline{AD}$ tai $\overline{CD}$ ei leikkaa $\Gamma$:aa, valitaan kaaren $\widehat{AC}$ piste $E$ siten, että puolisuora $\overrightarrow{AE}$ leikkaa janan $\overline{CD}$ pisteessä $F$. Nyt koska $E$ sijaitsee kaarella $\widehat{AC}$, niin se on konveksin nelikulmion $ABCD$ kulman $\angle ADC$ aukeamassa, joten nelikulmio $ABCE$ on konveksi. Lauseen edeltävän suunnan nojalla konveksin nelikulmion $ABCE$ kulmat $\angle ABC$ ja $\angle AEC$ ovat nyt vieruskulmia. Alkuoletuksen nojalla tästä seuraa, että $\angle ADC \cong \angle AEC$. Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion muita kulmia suurempi, niin kolmion $CEF$ kulman $\angle CEF$ vieruskulma $\angle AEC > \angle EFC$ ja kolmion $ADF$ kulman $\angle AFD$ vieruskulma $\angle AFC \cong \angle EFC > \angle ADF \cong \angle ADC$. Mutta nyt päädytään ristiriitaan alkuoletuksen kanssa, koska $\angle ADC \cong \angle AEC > \angle EFC > \angle ADC$.

Huomataan, että vastaoletuksesta päädyttiin ristiriitaan, joten alkuperäinen väite pätee eli $D$ on $\Gamma$:n piste. Siis pisteet $A$, $B$, $C$ ja $D$ ovat samalla ympyrällä eli konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä. $\square$

## 2.4 Ptolemaioksen lause

Antiikin merkittävimpiin tähtitieteilijöihin kuulunut kreikkalainen Klaudios Ptolemaios todisti seuraavan lauseen 100-luvun teoksessaan Almagest, joka on yksi tähtitieteen merkittävimpiä kirjoja. Almagest säilyi alan perusteoksena melkein 1500 vuotta.

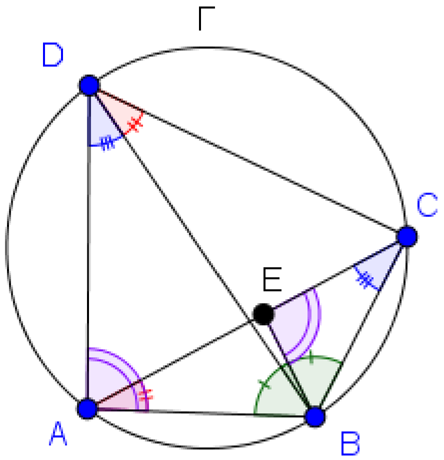
**Lause 2.25.** (Ptolemaioksen lause). *Jos konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä, niin*

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}. \tag{2.26}$$

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on konveksi nelikulmio, jolla on ympärysympyrä $\Gamma$. Nyt pisteet $A$, $B$, $C$ ja $D$ ovat $\Gamma$:n pisteitä. Valitaan janalta $\overline{AC}$ piste $E$ siten, että $\angle ABE \cong \angle DBC$. Nyt kehäkulmalauseen korollaarin nojalla $\angle EAB \cong \angle CDB$, jolloin kolmiot $ABE$ ja $DBC$ ovat yhdenmuotoisuuslause KK:n nojalla yhdenmuotoiset. Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa, että $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$ eli $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AE} \cdot \overline{BD}$. Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, niin kulman $\angle AEB$ vieruskulma $\angle BEC \cong \angle BAE + \angle ABE \cong \angle BAC + \angle DBC$. Nyt kehäkulmalauseen korollaarin nojalla $\angle DBC \cong \angle CAD$, jolloin $\angle BEC \cong \angle BAC + \angle CAD \cong \angle BAD$. Kehäkulmalauseen korollaarin nojalla myös $\angle ADB \cong \angle ACB$, jolloin kolmiot $EBC$ ja $ABD$ ovat yhdenmuotoisuuslause KK:n nojalla yhdenmuotoiset. Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa, että $\frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$ eli $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{EC} \cdot \overline{BD}$. Siis

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AE} \cdot \overline{BD} + \overline{EC} \cdot \overline{BD} = (\overline{AE} + \overline{EC}) \cdot \overline{BD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

$\square$




Kuva 12: Lauseen 2.25 todistuksen havainnollistus.

Yhtälö 2.26 tarkoittaa siis tässä tapauksessa sitä, että nelikulmion vastakkaisten sivujen tulojen summa on sama kuin lävistäjien tulo. Jos pisteet $A$, $B$, $C$ ja $D$ eivät ole samalla ympyrällä, niin yhtälöstä saadaan muodostettua käyttökelpoinen Ptolemaioksen epäyhtälö. Historiallisesti "sinitaulukkojen" määritys on perustunut Ptolemaioksen lauseeseen [8].

**Lause 2.27.** (Ptolemaioksen lause käänteisesti). *Jos konveksissa nelikulmiossa $ABCD$ pätee $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$, niin sillä on ympärysympyrä.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on sellainen konveksi nelikulmio, jossa pätee $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$. Tehdään vastaoletus: Oletetaan, että $ABCD$:llä ei ole ympärysympyrää.

Merkitään piste $P$ siten, että $\angle BAC \cong \angle DAP$ ja $P$ on eri puolella suoraa $AD$ kuin $C$. Nyt koska $ABCD$:llä ei ole ympärysympyrää, niin lauseen 2.24 nojalla sen vastakkaiset kulmat eivät ole vieruskulmia. Siis $\angle ABC$ ei ole $\angle ADC$:n vieruskulma. Jos $P$ sijaitsee suoralla $CD$, niin $\angle ADP$ on $\angle ADC$:n vieruskulma eli tällöin edellisen nojalla pätee $\angle ADP \ncong \angle ABC$. Jos $C$, $D$ ja $P$ eivät ole samalla suoralla, niin on mahdollista, että $\angle ADP \cong \angle ABC$.

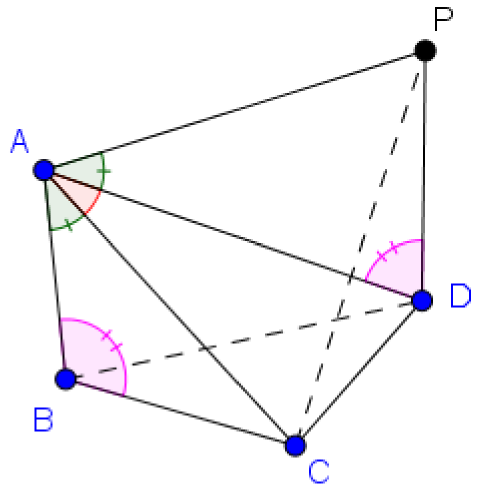
Oletetaan siis, että $C$, $D$ ja $P$ eivät ole samalla suoralla ja $\angle ADP \cong \angle ABC$. Nyt kolmion $CDP$ janoille pätee kolmioepäyhtälön nojalla $\overline{CD} + \overline{DP} > \overline{CP}$. Koska $\angle BAC \cong \angle DAP$ ja $\angle ADP \cong \angle ABC$, niin yhdenmuotoisuuslause KK:n nojalla kolmiot $BAC$ ja $DAP$ ovat yhdenmuotoiset. Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa, että $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DP}}$ eli $\overline{DP} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}}$.

Koska $\angle BAC \cong \angle DAP$, niin $\angle BAD \cong \angle BAC + \angle CAD \cong \angle DAP + \angle CAD \cong$

$\angle CAP$. Koska kolmiot $BAC$ ja $DAP$ ovat yhdenmuotoiset, niin $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}}$. Nyt yhdenmuotoisuuslause SKS:n nojalla kolmiot $ABD$ ja $ACP$ ovat yhdenmuotoiset. Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa, että $\frac{\overline{BD}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ eli $\overline{CP} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AB}}$. Nyt edellä mainittu kolmioepäyhtälö voidaan esittää muodossa

$$\overline{CD} + \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} = \overline{CD} + \overline{DP} > \overline{CP} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AB}}.$$

Kun epäyhtälö kerrotaan puolittain $\overline{AB}$:lla, saadaan $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} > \overline{AC} \cdot \overline{BD}$. Mutta tämä on ristiriidassa sen alkuoletuksen kanssa, että $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$. Vastaoletuksesta päädyttiin ristiriitaan, joten alkuperäinen väite pätee eli $ABCD$:llä on ympärysympyrä. $\square$




Kuva 13: Lauseen 2.27 todistuksen havainnollistus.

Nyt lauseen 2.27 avulla voidaan täydentää Ptolemaioksen lausetta.

**Lause 2.28.** (Täydennetty Ptolemaioksen lause). *Konveksilla nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä, jos ja vain jos $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$.*

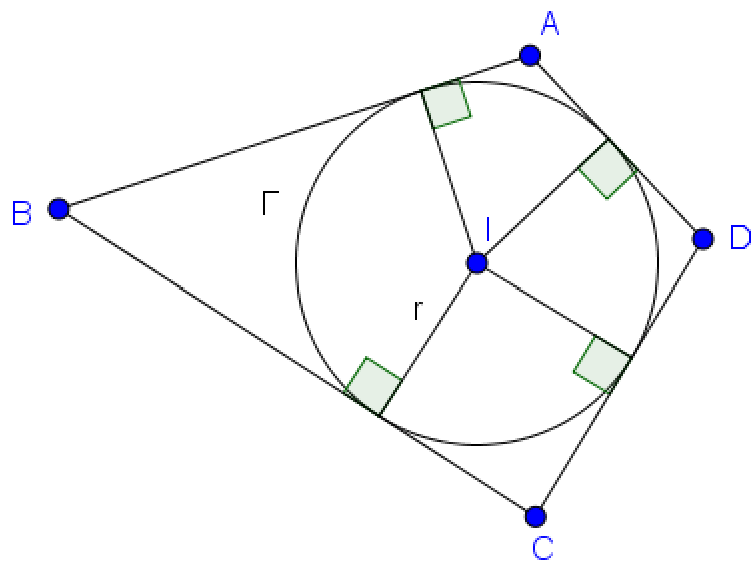
Täydennetyn Ptolemaioksen lauseen avulla voidaan mm. selvittää, ovatko tietyt nelikulmiot syklisiä nelikulmioita. Sen suurin hyöty ympyrällisten nelikulmioiden kohdalla liittyy kuitenkin syklisten nelikulmioiden lävistäjien pituuksiin.

# Luku 3

# Tangentiaalinen nelikulmio

Tangentiaalinen nelikulmio on tasokuvio euklidisessa geometriassa, joka määritellään seuraavasti:

**Määritelmä 3.1.** *Tangentiaalinen nelikulmio* on sellainen konveksi nelikulmio, jolla on olemassa sisäympyrä eli sen sisään voidaan piirtää ympyrä siten, että ympyrä sivuaa jokaista nelikulmion sivua.




Kuva 14: Tangentiaalinen nelikulmio.

Tangentiaalisen nelikulmion sivuja voidaan kutsua myös tangenttijanoiksi tai sen sisäympyrän tangenteiksi, josta tasokuvion nimitys on myös peräisin. Toinen harvemmin käytetty nimitys tasokuviolle on ympyrän ympäri piirretty nelikulmio. Tangentiaalisen nelikulmion sivun sivuamispisteen ja sivun kärkipisteen muodostamaa janaa kutsutaan *tangentin pituudeksi*. Tangentiaalinen nelikulmio on erikoistapaus tangentiaalisista monikulmioista. Nelikulmion tangentiaalisuus on yhtenä ehtona sille, että nelikulmio voisi olla *bisentrinen*. Bisentrisestä nelikulmiosta on enemmän luvussa 5.

Tangentiaalisella nelikulmiolla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia, joista muutamia käydään seuraavaksi läpi.

**Lause 3.2.** *Tangentiaalisen nelikulmion puolipiirille $s$ pätee $s = \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA}$.*

*Todistus.* Tämä on seuraus puolipiirin määritelmästä ja täydennetystä Pitot'n lauseesta:

$$\begin{aligned}
s &= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) \\
&= \frac{1}{2}(2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{CD}) \\
&= \frac{2}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \\
&= \overline{AB} + \overline{CD} \\
&= \overline{BC} + \overline{DA}.
\end{aligned}$$

□

Siis tangentiaalisen nelikulmion vastakkaisten sivujen summa on puolet sen piiristä. Seuraavan lauseen taas tekee mielenkiintoiseksi se, että se pätee myös kolmioille.

**Lause 3.3.** *Tangentiaalisen nelikulmion pinta-alalle $A$ pätee $A = sr$, missä $s$ on sen puolipiiri ja $r$ on sen sisäympyrän säde.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on tangentiaalinen nelikulmio. Koska $ABCD$ on tangentiaalinen nelikulmio, niin sillä on sisäympyrä. Merkitään pisteillä $X$, $Y$, $Z$, $W$ sisäympyrän keskipisteen $O$ projektioita sivuilla $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ja $\overline{DA}$. Nyt soveltamalla tuttua kolmion pinta-alan kaavaa $\frac{1}{2}b \cdot h$, missä $b$ on kanta ja $h$ korkeus, saadaan

$$\begin{aligned}
A &= A_{AOB} + A_{BOC} + A_{COD} + A_{AOD} \\
&= \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot r + \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot r + \frac{1}{2}\overline{CD} \cdot r + \frac{1}{2}\overline{DA} \cdot r \\
&= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) \cdot r \\
&= sr.
\end{aligned}$$

□

**Lause 3.4.** *Tangentiaalisen nelikulmion kulmanpuolittajat leikkaavat sen sisäympyrän keskipisteessä.*

*Todistus.* Tämä seuraa lauseesta 2.6 ja sen todistuksesta. □

**Lause 3.5.** *Tangentiaalisen nelikulmion $ABCD$ sisäympyrän säteelle $r$ pätee*

$$r = \sqrt{\frac{efg + fgh + egh + efh}{e + f + g + h}}, \tag{3.6}$$

*missä $e$, $f$, $g$ ja $h$ ovat $ABCD$:n tangenttien pituuksia.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on tangentiaalinen nelikulmio. Nyt sillä on $I$-keskinen sisäympyrä, joka sivuaa $ABCD$:n sivuja $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ja $\overline{DA}$ pisteissä $X$, $Y$, $Z$, $W$. Nyt lauseen 2.8 nojalla voidaan merkitä tangenttien pituuksia seuraavasti: $\overline{AX} \cong \overline{AW} \cong e$, $\overline{BX} \cong \overline{BY} \cong f$, $\overline{CY} \cong \overline{CZ} \cong g$ ja $\overline{DZ} \cong \overline{DW} \cong h$. Merkitään myös $\angle AIX = \alpha$, $\angle BIY = \beta$, $\angle CIZ = \gamma$ ja $\angle DIW = \delta$. Nyt

$$\tan(\alpha) = \frac{e}{r}, \tan(\beta) = \frac{f}{r}, \tan(\gamma) = \frac{g}{r}, \tan(\delta) = \frac{h}{r}. \tag{3.7}$$

Lauseen 3.4 ja nelikulmion kulmien yhteenlaskun nojalla $\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$, jolloin palautuskaavaa $\tan(x) = -\tan(\pi - x)$ käyttämällä saadaan

$$\tan(\alpha + \beta) = -\tan(\pi - (\alpha + \beta)) = -\tan(\pi - (\pi - \gamma - \delta)) = -\tan(\gamma + \delta)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\tan(\alpha + \beta) + \tan(\gamma + \delta) = 0. \tag{3.8}$$

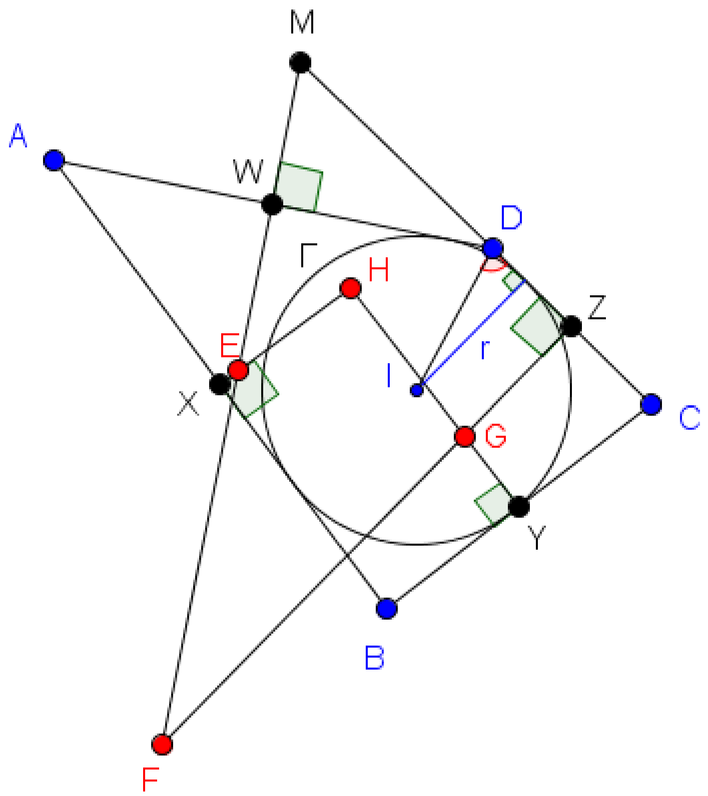
Käytämme ensin tangenttien summakaavaa yhtälössä (3.8), jonka jälkeen loppu on yhtälöiden (3.7) mukaista termien sijoittelua ja yhtälön pyörittelyä:

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} + \frac{\tan(\gamma) + \tan(\delta)}{1 - \tan(\gamma)\tan(\delta)} &= 0 \\
\frac{r(e + f)}{r^2 - ef} + \frac{r(g + h)}{r^2 - gh} &= 0 \\
r^2(e + f + g + h) - egh - fgh - efg - efh &= 0 \\
r &= \sqrt{\frac{efg + fgh + egh + efh}{e + f + g + h}}.
\end{aligned}$$

□

**Lause 3.9.** *Tangentiaalisen ympärysympyrättömän nelikulmion viereisten keskinormaalien leikkauspisteet muodostavat tangentiaalisen nelikulmion.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on sellainen tangentiaalinen nelikulmio, jolla ei ole ympärysympyrää. Merkitään $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ ja $\overline{DA} = d$. Koska $ABCD$ on tangentiaalinen nelikulmio, niin sillä on $I$-keskinen ja $r$-säteinen sisäympyrä $\Gamma$. Merkitään lauseen 2.8 nojalla tangenttien pituuksia nelikulmion $ABCD$ kärkipisteiden mukaisesti $t_A$, $t_B$, $t_C$ ja $t_D$. Merkitään sivujen $a$, $b$, $c$ ja $d$ keskipisteitä pisteillä $X$, $Y$, $Z$ ja $W$. Merkitään pisteiden $X$ ja $Y$ kautta kulkevien keskinormaalien leikkauspistettä $H$:lla, pisteiden $Y$ ja $Z$ kautta kulkevien keskinormaalien leikkauspistettä $G$:llä, pisteiden $Z$ ja $W$ kautta kulkevien keskinormaalien leikkauspistettä $F$:llä ja pisteiden $W$ ja $X$ kautta kulkevien keskinormaalien leikkauspistettä $E$:llä. Näin on saatu muodostettua nelikulmio $EFGH$, jota lähdetään osoittamaan tangentiaaliseksi nelikulmioksi. Merkitään vielä suoran $CD$ ja pisteen $W$ kautta kulkevan keskinormaalin leikkauspistettä $M$:llä.




Kuva 15: Lauseen 3.9 todistuksen havainnollistus.

Nyt koska $\cos(\angle WDM) = \cos(\pi - \angle ADC) = -\cos(\angle ADC) = \frac{\overline{DW}}{\overline{MD}}$ ja $\overline{DW} = \frac{d}{2}$, niin

$$\overline{MD} \cong -\frac{d}{2\cos(\angle ADC)}, \overline{MZ} \cong \overline{MD} + \overline{DZ} \cong -\frac{d}{2\cos(\angle ADC)} + \frac{c}{2}.$$

Koska kolmiot $DMW$ ja $FZM$ ovat yhdenmuotoisuuslauseen KK nojalla yhdenmuotoiset, niin $\angle WDM \cong \angle ZFM$. Nyt saadaan, että $\cot(\angle ZFM) = \cot(\angle WDM) = \cot(\pi - \angle ADC) = -\cot(\angle ADC) = \frac{\overline{FZ}}{\overline{MZ}}$, jolloin

$$\overline{FZ} = -\overline{MZ}\cot(\angle ADC) = \frac{d\cot(\angle ADC)}{2\cos(\angle ADC)} - \frac{c}{2}\cot(\angle ADC) = \frac{d}{2\sin(\angle ADC)} - \frac{c}{2}\cot(\angle ADC).$$

Vastaavalla tavalla saadaan, että

$$\overline{FW} = \frac{c}{2\sin(\angle ADC)} - \frac{d}{2}\cot(\angle ADC).$$

Tangentin kulman puolikkaan kaavaa kulmalle $\angle ADC$ käyttämällä saadaan

$$\cot(\frac{\angle ADC}{2}) = \frac{1}{\tan(\frac{\angle ADC}{2})} = \frac{\sqrt{1+\cos(\angle ADC)}}{\sqrt{1-\cos(\angle ADC)}}.$$

Laventamalla tämän jälkeen osoittajalla ja soveltamalla saatuun nimittäjään Pythagoraan lausetta trigonometrisille funktioille saadaan, että

$$\cot(\frac{\angle ADC}{2}) = \frac{\sqrt{1+\cos(\angle ADC)}}{\sqrt{1-\cos(\angle ADC)}} = \frac{1+cos(\angle ADC)}{\sqrt{1-\cos(\angle ADC)^2}} = \frac{1+\cos(\angle ADC)}{\sin(\angle ADC)}.$$

Lauseen 2.8 todistuksesta seuraa suoraan, että jana $\overline{ID}$ puolittaa kulman $\angle ADC$, joten $\cot(\frac{\angle ADC}{2}) = \frac{t_D}{r}$. Nyt siis

$$\begin{aligned}
2(\overline{FW} - \overline{FZ}) &= \frac{c-d}{\sin(\angle ADC)} + (c-d)\cot(\angle ADC) \\
&= (c-d)(\frac{1}{\sin(\angle ADC)} + \frac{\cos(\angle ADC)}{\sin(\angle ADC)}) \\
&= (c-d)\frac{1+\cos(\angle ADC)}{\sin(\angle ADC)} \\
&= (c-d)\cot(\frac{\angle ADC}{2}) \\
&= (c-d)\frac{t_D}{r}.
\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla saadaan, että

$$2(\overline{HY}-\overline{HX})=(d-a)\frac{t_A}{r}, 2(\overline{EX}-\overline{EW})=(a-b)\frac{t_B}{r}, 2(\overline{GZ}-\overline{GY})=(b-c)\frac{t_C}{r}.$$

Täydennetyn Pitot'n lauseen mukaisesti jäljellä on enää osoittaa, että nelikulmion $EFGH$ vastakkaisten sivujen summat ovat yhtä suuret eli $\overline{EF}-\overline{EH}+\overline{HG}-\overline{GF}=0$. Huomataan kuitenkin, että

$$\begin{aligned}\overline{EF}-\overline{EH}+\overline{HG}-\overline{GF} &\cong (\overline{FW}-\overline{EW})-(\overline{HX}-\overline{EX})+(\overline{HY}-\overline{GY})-(\overline{FZ}-\overline{GZ})\\ &\cong (\overline{FW}-\overline{FZ})+(\overline{HY}-\overline{HX})+(\overline{EX}-\overline{EW})+(\overline{GZ}-\overline{GY}),\end{aligned}$$

jolloin riittää osoittaa, että $2(\overline{FW}-\overline{FZ})+2(\overline{HY}-\overline{HX})+2(\overline{EX}-\overline{EW})+2(\overline{GZ}-\overline{GY})=0$. Tämä taas saadaan aiempien tulosten nojalla muotoon

$$(c-d)\frac{t_D}{r}+(d-a)\frac{t_A}{r}+(a-b)\frac{t_B}{r}+(b-c)\frac{t_C}{r}=0$$

$$\iff$$

$$(c-d)t_D+(d-a)t_A+(a-b)t_B+(b-c)t_C=0.$$

Huomataan, että $c-d=(t_C+t_D)-(t_D+t_A)=t_C-t_A$ ja $d-a=(t_D+t_A)-(t_A+t_B)=t_D-t_B$. Koska $ABCD$ on tangentiaalinen nelikulmio, niin täydennetyn Pitot'n lauseen nojalla sen vastakkaisten sivujen summat ovat yhtä suuret, jolloin $a-b=-(b-a)=-(c-d)$ ja $b-c=-(c-b)=-(d-a)$. Nyt siis

$$\begin{aligned}(c-d)t_D+(d-a)t_A+(a-b)t_B+(b-c)t_C &= (c-d)t_D+(d-a)t_A-(c-d)t_B-(d-a)t_C\\ &= (c-d)(t_D-t_B)+(d-a)(t_A-t_C)\\ &= (t_C-t_A)(t_D-t_B)+(t_D-t_B)(t_A-t_C)\\ &= (t_D-t_B)(t_C-t_A+t_A-t_C)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Koska nelikulmion $EFGH$ vastakkaisten sivujen summat ovat edellisen nojalla yhtä suuret, niin $EFGH$ on tangentiaalinen nelikulmio. Siis tangentiaalisen ympärysympyrättömän nelikulmion viereisten keskinormaalien leikkauspisteet muodostavat tangentiaalisen nelikulmion. □

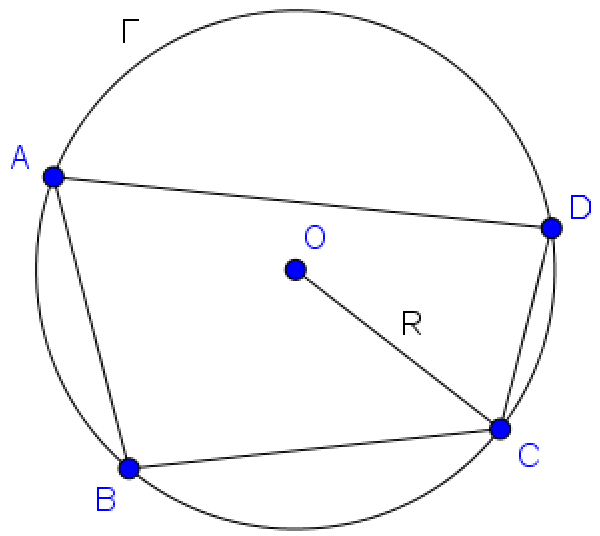
Edellinen lause ei siis päde ympärysympyrän omaaville nelikulmioille, koska lauseen 2.11 mukaan keskinormaalit leikkaavat tällöin samassa pisteessä. Tätä ei oltu kuitenkaan otettu erikseen huomioon lähteessä [13].

# Luku 4

# Syklinen nelikulmio

Tässä luvussa tutustutaan sykliseen nelikulmioon, joka lähemmin tunnetaan myös nimellä *jännenelikulmio*. Syklinen nelikulmio on tasokuvio euklidisessa geometriassa, joka määritellään seuraavasti:

**Määritelmä 4.1.** *Syklinen nelikulmio* on sellainen nelikulmio, jolla on olemassa ympärysympyrä eli sen ympäri voidaan piirtää ympyrä siten, että jokainen nelikulmion kärkipiste on kyseisellä ympyrällä.




Kuva 16: Syklinen nelikulmio.

Sanotaan, että syklisen nelikulmion kärjet ovat *konsykliset*. Tämä tarkoittaa sitä, että niiden kautta voidaan piirtää yhteinen ympyrä. Jokainen neliön sivu on myös saman ympyrän jänne. Syklinen nelikulmio on erikoistapaus syklisistä monikulmioista. Nelikulmion syklisyys on toisena ehtona sille, että nelikulmio voisi olla *bisentrinen*. Bisentrisestä nelikulmiosta on enemmän luvussa 5. Tässä työssä rajoitutaan tarkastelemaan vain konvekseja syklisiä nelikulmioita, mutta on myös olemassa itseään leikkaavia syklisiä nelikulmioita.

Syklisellä nelikulmiolla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia, joista muutamia käydään seuraavaksi läpi. Seuraavassa esitellään 600-luvulla eläneen intialaisen matemaatikon ja tähtitieteilijän Brahmaguptan kaava, jonka avulla saadaan tietää konveksin syklisen nelikulmion pinta-ala tietämällä vain sen sivujen pituudet. Tämä geometrinen todistus on peräisin lähteestä [10].

**Lause 4.2.** (Brahmaguptan kaava). *Konveksin syklisen nelikulmion pinta-alalle $A$ pätee*

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \tag{4.3}$$

*missä $s$ on sen puolipiiri ja $a$, $b$, $c$ ja $d$ sen sivujen pituudet.*

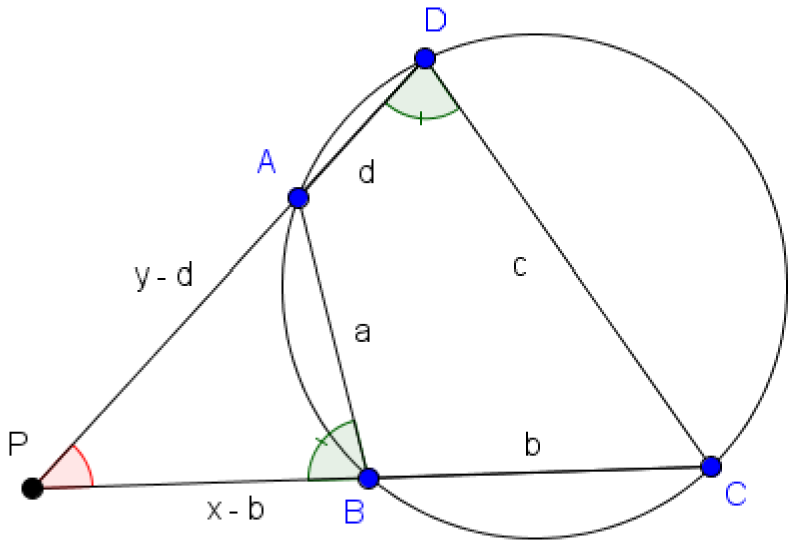
*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on konveksi syklinen nelikulmio ja $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ ja $\overline{DA} = d$.

Tarkastellaan ensin tapausta, jossa $ABCD$ on suorakulmio eli $a \cong c > 0$, $b \cong d > 0$ ja $s = \frac{a+b+a+b}{2} = a + b$ . Tiedetään, että suorakulmion pinta-alalle pätee $A = ba$, joten yhtälö 4.3 saadaan edellisten nojalla varsin mukavasti johdettua:

$$\begin{aligned} A &= ba \\ &= \sqrt{b^2a^2} \\ &= \sqrt{(a-a+b)^2(b-b+a)^2} \\ &= \sqrt{(s-a)^2(s-b)^2} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \end{aligned}$$

Tarkastellaan sitten tapausta, jossa $ABCD$ ei ole suorakulmio. Nyt koska $ABCD$ ei ole suorakulmio, niin voidaan olettaa, että $d = \overline{DA} \nparallel \overline{BC} = b$ ja $c > a$. Oletetaan, että suorat $DA$ ja $BC$ leikkaavat toisensa pisteessä $P$. Merkitään $\overline{PC} = x$ ja $\overline{PD} = y$. Nyt Heronin kaavan avulla saadaan kolmion $DCP$ pinta-alaksi

$$\begin{aligned} A_{DCP} &= \sqrt{s(s-x)(s-y)(s-c)} \\ &= \sqrt{(\frac{x+y+c}{2})(\frac{x+y+c}{2}-x)(\frac{x+y+c}{2}-y)(\frac{x+y+c}{2}-c)} \\ &= \sqrt{(\frac{x+y+c}{2})(\frac{-x+y+c}{2})(\frac{x-y+c}{2})(\frac{x+y-c}{2})} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+c)(y-x+c)(x+y-c)(x-y+c)}. \end{aligned}$$




Kuva 17: Lauseen 4.2 todistuksen havainnollistus.

Koska $ABCD$ on konveksi syklinen nelikulmio, niin sillä on ympärysympyrä. Nyt lauseen 2.24 nojalla sen vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia, jolloin kulmat $\angle CDA$ ja $\angle CBA$ ovat vieruskulmia. Koska $\angle ABP$ on myös kulman $\angle CBA$ vieruskulma, niin $\angle CDA \cong \angle ABP$. Nyt kolmiot $BAP$ ja $DCP$ ovat yhdenmuotoisuuslause KK:n nojalla yhdenmuotoiset. Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa, että

$$\frac{A_{BAP}}{A_{DCP}} = \frac{a^2}{c^2}$$
$$\frac{A_{DCP}}{A_{DCP}} - \frac{A_{BAP}}{A_{DCP}} = \frac{c^2}{c^2} - \frac{a^2}{c^2}$$
$$\frac{A_{DCP} - A_{BAP}}{A_{DCP}} = \frac{A_{ABCD}}{A_{DCP}} = \frac{c^2 - a^2}{c^2}.$$

Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta seuraa myös, että

$$\frac{x}{c} = \frac{y-d}{a},$$

$$\frac{y}{c} = \frac{x-b}{a}.$$

Kun lisäämme nämä puolittain yhteen, saadaan johdettua yhtälö

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{c} &= \frac{x+y-b-d}{a} \\
\frac{x+y}{c} - \frac{x+y}{a} &= -\frac{b+d}{a} \\
(x+y)\frac{a-c}{ca} &= -\frac{b+d}{a} \\
x+y &= \frac{c}{c-a}(b+d) \\
x+y+c &= \frac{c}{c-a}(b+d) + c\frac{c-a}{c-a} \\
x+y+c &= \frac{c}{c-a}(b+c+d-a).
\end{aligned}$$

Samalla saadaan myös

$$x+y-c = \frac{c}{c-a}(a+b+d-c),$$

kun viimeisissä vaiheissa lisäämisen sijaan vähennetään yhtälön molemmilta puolin $c$. Seuraavat yhtälöt saadaan vastaavalla tavalla, kun sopivasti vähennetään yhdenmuotoisuudesta seuranneet janojen suhteet puolittain:

$$\begin{aligned}
y-x+c &= \frac{c}{c+a}(a+c+d-b) \\
x-y+c &= \frac{c}{c+a}(a+b+c-d).
\end{aligned}$$

Sijoitetaan seuraavaksi edellä saadut neljä yhtälöä kolmion $DCP$ pinta-alan yhtälöön

$$\begin{aligned}
A_{DCP} &= \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+c)(y-x+c)(x+y-c)(x-y+c)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{c^4}{(c^2-a^2)^2}(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)} \\
&= \frac{c^2}{c^2-a^2}\sqrt{\frac{(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d)}{16}} \\
&= \frac{c^2}{c^2-a^2}\sqrt{\frac{(a+b+c+d-2a)}{2}\frac{(a+b+c+d-2b)}{2}\frac{(a+b+c+d-2c)}{2}\frac{(a+b+c+d-2d)}{2}}.
\end{aligned}$$

Nyt koska puolipiiri $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, saadaan

$$A_{DCP} = \frac{c^2}{c^2-a^2}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Koska kolmioiden $BAP$ ja $DCP$ yhdenmuotoisuudesta seurasi

$$\frac{A_{ABCD}}{A_{DCP}} = \frac{c^2 - a^2}{c^2},$$

saadaan edellisestä nyt $A_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, joka siis on haluttu Brahmaguptan kaava.

□

**Lause 4.4.** *Konveksin syklisen nelikulmion sivujen keskinormaalit leikkaavat sen ympärysympyrän keskipisteessä.*

*Todistus.* Tämä seuraa lauseesta 2.11 ja sen todistuksesta. □

Seuraava lause on nimetty intialaisen matemaatikon ja tähtitieteilijän Vatasseri Parameshvara Nambudirin mukaan, joka todisti sen ensimmäisenä 1430-luvulla. Kyseinen lause kuitenkin saatetaan laskea sveitsiläisen matemaatikon Simon Antoine Jean L'Huilierin ansioksi, joka julkaisi sen 350 vuotta myöhemmin vuonna 1782.

**Lause 4.5.** (Parameshvara'n kaava). *Konveksin syklisen nelikulmion ympärysympyrän säteelle $R$ pätee*

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}, \tag{4.6}$$

*missä $s$ on sen puolipiiri ja $a$, $b$, $c$ ja $d$ sen sivujen pituudet.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on konveksi syklinen nelikulmio ja $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ ja $\overline{DA} = d$. Tiedetään, että kolmion ympärysympyrän säteelle $R$ pätee

$$R = \frac{xyz}{4A}, \tag{4.7}$$

missä $x$, $y$ ja $z$ ovat kolmion sivujen pituudet ja $A$ kolmion pinta-ala. Lauseen 2.10 todistuksesta seuraa suoraan, että kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat ympärysympyränsä keskipisteessä. Nyt edellisen tiedon ja lauseen 4.4 nojalla syklisen nelikulmion ympärysympyrän keskipiste on sama kuin sen kärkipisteistä muodostettujen kolmioiden ympärysympyrän keskipiste. Siis kolmioilla $ABD$ ja $CBD$ on sama ympärysympyrä ja siten myös säde, kuin nelikulmiolla $ABCD$. Nyt yhtälön 4.7 nojalla saadaan, että

$$A_{ABD} = \frac{adf}{4R}, A_{CBD} = \frac{bcf}{4R},$$

missä $\overline{BD} = f$. Nelikulmion $ABCD$ pinta-alaksi saadaan tällöin

$$A_{ABCD} = A_{ABD} + A_{CBD} = \frac{adf}{4R} + \frac{bcf}{4R} = \frac{f(ad+bc)}{4R}.$$

Vastaavalla tavalla kolmioiden $BAC$ ja $DAC$ avulla saadaan, että

$$A_{ABCD} = A_{BAC} + A_{DAC} = \frac{abe}{4R} + \frac{cde}{4R} = \frac{e(ab+cd)}{4R},$$

missä $\overline{AC} = e$. Nyt kertomalla nelikulmion $ABCD$ pinta-alat toisillaan saadaan, että

$$A^2_{ABCD} = \frac{ef(ad+bc)(ab+cd)}{16R^2}.$$

Koska $ABCD$ on konveksi syklinen nelikulmio, niin sillä on ympärysympyrä, jolloin täydennetyn Ptolemaioksen lauseen nojalla $ef = ac+bd$. Nyt soveltamalla edelliseen yhtälöön tätä ja Brahmaguptan kaavaa $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ saadaan, että

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) = \frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{16R^2}$$

$$\iff$$

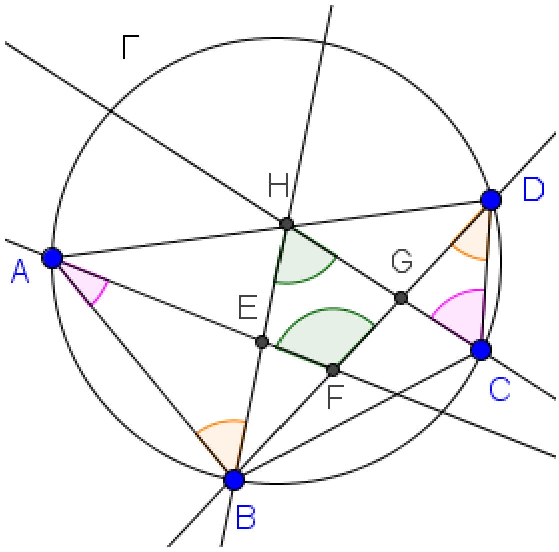
$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}},$$

missä $s$ on nelikulmion $ABCD$ puolipiiri. Tämä vastaakin haluttua yhtälöä 4.6. □

**Lause 4.8.** *Konveksin sisäympyrättömän syklisen nelikulmion viereisten kulmanpuolittajien leikkauspisteet muodostavat syklisen nelikulmion.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on sellainen konveksi syklinen nelikulmio, jolla ei ole sisäympyrää. Merkitään kulmien $\angle DAB$ ja $\angle ABC$ kulmanpuolittajien leikkauspistettä $E$:llä, kulmien $\angle ABC$ ja $\angle BCD$ kulmanpuolittajien leikkauspistettä $H$:lla, kulmien $\angle BCD$ ja $\angle CDA$ kulmanpuolittajien leikkauspistettä $G$:llä ja kulmien $\angle CDA$ ja $\angle DAB$ kulmanpuolittajien leikkauspistettä $F$:llä. Nyt koska $ABCD$ on syklinen nelikulmio, niin lauseen 2.24 nojalla sen vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia ja koska vieruskulmien summa on kaksi suoraa kulmaa, niin summat $\angle DAB + \angle BCD \cong \angle DAF + \angle FAB + \angle BCH + \angle HCD$ ja $\angle ABC + \angle CDA \cong \angle ABH + \angle HBC + \angle CDF + \angle FDA$ ovat kaksi suoraa kulmaa. Tällöin siis summa $\angle DAF + \angle FAB + \angle BCH + \angle HCD + \angle ABH + \angle HBC + \angle CDF + \angle FDA$ on neljä suoraa kulmaa.

Koska kolmion kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa, niin kolmion $HBC$ kulmien summa $\angle HBC + \angle BCH + \angle BHC$ on kaksi suoraa kulmaa. Samoin kolmion $AFD$ kulmien




Kuva 18: Lauseen 4.8 todistuksen havainnollistus.

summa $\angle DAF + \angle FDA + \angle AFD$ on kaksi suoraa kulmaa. Nyt siis summa $\angle HBC + \angle BCH + \angle BHC + \angle DAF + \angle FDA + \angle AFD$ on neljä suoraa kulmaa. Nyt

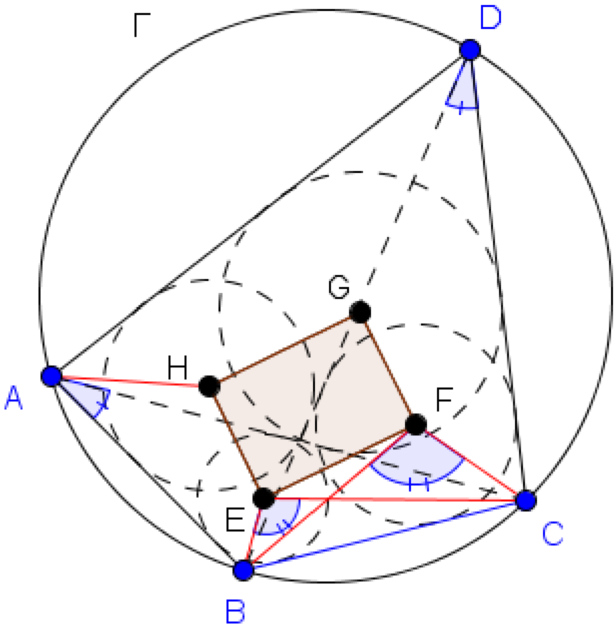
$$\angle HBC + \angle BCH + \angle BHC + \angle DAF + \angle FDA + \angle AFD \cong$$
$$\angle DAF + \angle FAB + \angle BCH + \angle HCD + \angle ABH + \angle HBC + \angle CDF + \angle FDA,$$

joka supistuu muotoon $\angle BHC + \angle AFD \cong \angle FAB + \angle HCD + \angle ABH + \angle CDF$. Huomataan, että kulmat $\angle FAB$ ja $\angle HCD$ sekä kulmat $\angle ABH$ ja $\angle CDF$ ovat vastakkaisten kulmien puolitettuja kulmia, joten edelliseen lausetta 2.24 käyttävään huomioon perustuen niiden summat ovat suora kulma eli summa $\angle FAB + \angle HCD + \angle ABH + \angle CDF$ on kaksi suoraa kulmaa. Nyt siis summa $\angle BHC + \angle AFD$ on kaksi suoraa kulmaa eli kulmat $\angle BHC$ ja $\angle AFD$ ovat vieruskulmia, jolloin lauseen 2.24 nojalla nelikulmiolla $EFGH$ on ympärysympyrä eli se on syklinen. Siis konveksin sisäympyrättömän syklisen nelikulmion viereisten kulmanpuolittajien leikkauspisteet muodostavat syklisen nelikulmion. $\square$

Edellinen lause ei siis päde sisäympyrän omaaville nelikulmioille, koska lauseen 2.6 mukaan kulmanpuolittajat leikkaavat tällöin samassa pisteessä. Tätä ei oltu kuitenkaan otettu erikseen huomioon lähteessä [10].

**Lause 4.9.** *Konveksin syklisen nelikulmion kärkipisteiden muodostamien kolmioiden sisäympyröiden keskipisteet muodostavat syklisen nelikulmion.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on konveksi syklinen nelikulmio. Lauseen 2.5 nojalla kolmioilla $ABC$, $BCD$, $ACD$ ja $ABD$ on sisäympyrät. Merkitään sisäympyröiden keskipisteitä $I_{ABC} = E$, $I_{BCD} = F$, $I_{ACD} = G$ ja $I_{ABD} = H$. Lauseen 2.5 todistuksesta seuraa suoraan, että suorat $BE$ ja $CE$ ovat kolmion $ABC$ kulmien $\angle ABC$ ja $\angle BCA$ kulmanpuolittajia, koska ne leikkaavat kolmion $ABC$ sisäympyrän keskipisteessä $E$. Nyt siis $\angle EBC \cong \frac{\angle ABC}{2}$ ja $\angle BCE \cong \frac{\angle BCA}{2}$.




Kuva 19: Lauseen 4.9 todistuksen havainnollistus.

Koska kolmion kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa, niin kolmion $ABC$ kulmien summa $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$ on kaksi suoraa kulmaa, jolloin summa

$$\frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BCA}{2} + \frac{\angle CAB}{2}$$

on yksi suora kulma. Vastaavasti kolmion $BCE$ kulmien summa

$$\angle EBC + \angle BCE + \angle CEB \cong \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BCA}{2} + \angle CEB$$

on kaksi suoraa kulmaa. Kun tästä vähennetään edellinen summa, niin saadaan että erotus $\angle CEB - \frac{\angle CAB}{2}$ on yksi suora kulma.

Täysin vastaavalla tavalla tarkastelemalla kolmioita $BCD$ ja $BCF$ saadaan, että erotus $\angle CFB - \frac{\angle CDB}{2}$ on yksi suora kulma. Koska nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä, niin kehäkulmalauseen korollaarin nojalla $\angle CAB \cong \angle CDB$. Tästä ja edellisistä erotuksista seuraa, että

$$\angle CEB - \frac{\angle CAB}{2} \cong \angle CEB - \frac{\angle CDB}{2} \cong \angle CFB - \frac{\angle CDB}{2}$$

eli $\angle CEB \cong \angle CFB$. Nyt koska $\angle CEB \cong \angle CFB$, niin lauseen 2.23 nojalla nelikulmiolla $BCFE$ on ympärysympyrä. Nyt lauseen 2.24 nojalla nelikulmion $BCFE$ vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia. Tästä seuraa, että summa $\angle BCF + \angle BEF$ on kaksi suoraa kulmaa.

Täysin vastaavalla tavalla nelikulmiolla $ABEH$ on ympärysympyrä, jolloin summa $\angle BAH + \angle BEH$ on kaksi suoraa kulmaa. Nyt siis summa $\angle BCF + \angle BEF + \angle BAH + \angle BEH$ on neljä suoraa kulmaa. Lauseen 2.5 todistuksesta seuraa taas suoraan, että suorat $AH$ ja $CF$ ovat kulmien $\angle BAD$ ja $\angle BCD$ kulmanpuolittajia, jolloin $\angle BAH \cong \frac{\angle BAD}{2}$ ja $\angle BCF \cong \frac{\angle BCD}{2}$. Saadaan, että summa

$$\angle BCF + \angle BEF + \angle BAH + \angle BEH \cong \frac{\angle BCD}{2} + \angle BEF + \frac{\angle BAD}{2} + \angle BEH$$

on neljä suoraa kulmaa. Koska nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä, niin lauseen 2.24 nojalla sen vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia, jolloin summa $\angle BAD + \angle BCD$ on kaksi suoraa kulmaa. Tästä seuraa siis, että summa $\frac{\angle BAD}{2} + \frac{\angle BCD}{2}$ on yksi suora kulma. Edellisen kohdan ja aiemman summan nojalla saadaan, että summa $\angle BEF + \angle BEH$ on kolme suoraa kulmaa, jolloin kulma $\angle HEF$ on suora kulma.

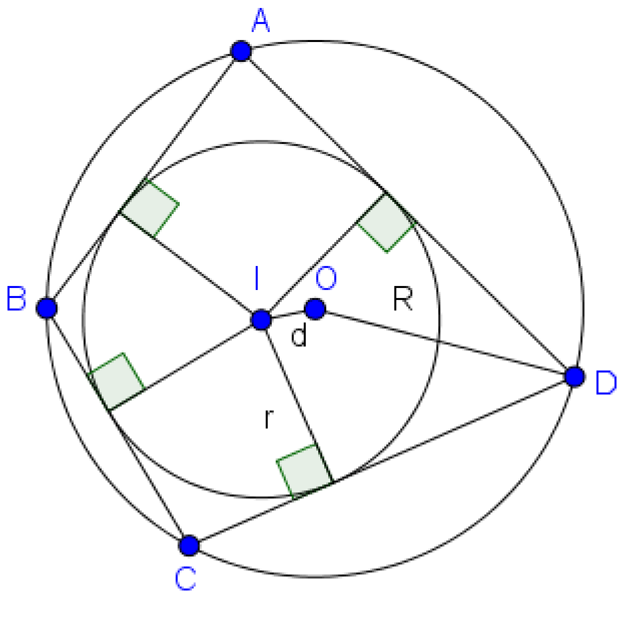
Täysin vastaavalla tavalla saadaan, että myös kulmat $\angle EFG$, $\angle FGH$ ja $\angle GHE$ ovat suoria kulmia. Koska nelikulmion $EFGH$ jokainen kulma on suora, niin se on suorakulmio. Koska sen vastakkaiset kulmat on vieruskulmia, niin lauseen 2.24 nojalla sillä on ympärysympyrä eli nelikulmio $EFGH$ on syklinen. Siis konveksin syklisen nelikulmion kärkipisteiden muodostamien kolmioiden sisäympyrät muodostavat syklisen nelikulmion. $\square$

# Luku 5

# Bisentrinen nelikulmio

Tässä luvussa tutustutaan bisentriseen nelikulmioon. Bisentrinen nelikulmio on tasokuvio euklidisessa geometriassa, joka määritellään seuraavasti:

**Määritelmä 5.1.** *Bisentrinen nelikulmio* on sellainen konveksi nelikulmio, jolla on olemassa sekä sisä- että ympärysympyrä. Sen ympäri voidaan siis piirtää ympyrä siten, että jokainen nelikulmion kärkipiste on kyseisellä ympyrällä ja sen sisään voidaan piirtää ympyrä siten, että kyseinen ympyrä sivuaa jokaista nelikulmion sivua.




Kuva 20: Bisentrinen nelikulmio.

Bisentrinen nelikulmio on siis sekä tangentiaalinen että syklinen nelikulmio eli siinä pätevät molempien edellämainittujen nelikulmioiden sellaiset ominaisuudet, joissa ei erikseen poissuljeta toista, kuten esimerkiksi lauseissa 3.9 ja 4.8. Nimitys on peräisin siitä, että nelikulmiolla on ympyröiden johdosta kaksi keskipistettä, vaikka neliön tapauksessa sisä- ja ympärysympyrän keskipisteet ovat kuitenkin sama piste.

Bisentrisellä nelikulmiolla on monia mielenkiintoisia ominaisuuksia, joista muutamia käydään seuraavaksi läpi. Seuraavassa johdetaan bisentriselle nelikulmiolle oma pinta-alan kaava soveltaen Brahmaguptan kaavaa.

**Lause 5.2.** *Bisentrisen nelikulmion pinta-alalle $A$ pätee*

$$A = \sqrt{abcd}, \tag{5.3}$$

*missä $a$, $b$, $c$ ja $d$ ovat sen sivujen pituudet.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on bisentrinen nelikulmio ja $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ ja $\overline{DA} = d$. Bisentrisen nelikulmion määritelmän nojalla sen pinta-alalle $A$ pätee nyt Brahmaguptan kaavan mukaisesti $A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, missä $s$ on sen puolipiiri ja $a$, $b$, $c$ ja $d$ sen sivujen pituudet. Samoin bisentrisen nelikulmion puolipiirille $s$ pätee nyt sen määritelmän ja lauseen 3.2 mukaisesti $s = a + c = b + d$. Tästä saadaan, että $s - a = c$, $s - b = d$, $s - c = a$ ja $s - d = b$. Sijoittamalla nämä Brahmaguptan kaavaan, saadaan $A = \sqrt{abcd}$, joka on se mitä haluttiinkin. □

**Lause 5.4.** *Bisentrisen nelikulmion sisäympyrän säteelle $r$ pätee*

$$r = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c} = \frac{\sqrt{abcd}}{b+d}, \tag{5.5}$$

*missä $a$, $b$, $c$ ja $d$ ovat sen sivujen pituudet.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on bisentrinen nelikulmio ja $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ ja $\overline{DA} = d$. Bisentrisen nelikulmion määritelmän nojalla sen pinta-alalle $A$ pätee nyt lauseen 3.3 mukaisesti $A = rs$, missä $s$ on sen puolipiiri. Samoin bisentrisen nelikulmion puolipiirille $s$ pätee nyt sen määritelmän ja lauseen 3.2 mukaisesti $s = a + c = b + d$. Nyt lauseen 5.2 nojalla saadaan

$$\begin{aligned} rs &= A \\ r &= \frac{A}{s} = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c} = \frac{\sqrt{abcd}}{b+d}. \end{aligned}$$

□

**Lause 5.6.** *Bisentrisen nelikulmion ympärysympyrän säteelle $R$ pätee*

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}}, \tag{5.7}$$

*missä $a$, $b$, $c$ ja $d$ ovat sen sivujen pituudet.*

*Todistus.* Bisentrisen nelikulmion määritelmän nojalla tämä seuraa suoraan soveltamalla Brahmaguptan kaavan sijaan lausetta 5.2 Parameshvara'n kaavan todistuksessa. □

Sveitsiläinen matemaatikko ja Leonhard Eulerin assistentti Nicolas Fuss todisti seuraavan lauseen vuonna 1792, joka on yleistys Eulerin lauseelle kolmion sisä- ja ympärysympyrän keskipisteiden välisestä etäisyydestä. Fuss on myös löytänyt vastaavanlaiset kaavat muutamalle muullekin bisentriselle monikulmiolle. Saksalainen matemaatikko Heinrich Dörrie on listannut Fuss'n lauseen yhdeksi alkeismatematiikan sadasta suuresta (ratkaistusta) ongelmasta kirjassaan [2]. Tämä geometrinen todistus on lähteestä [12].

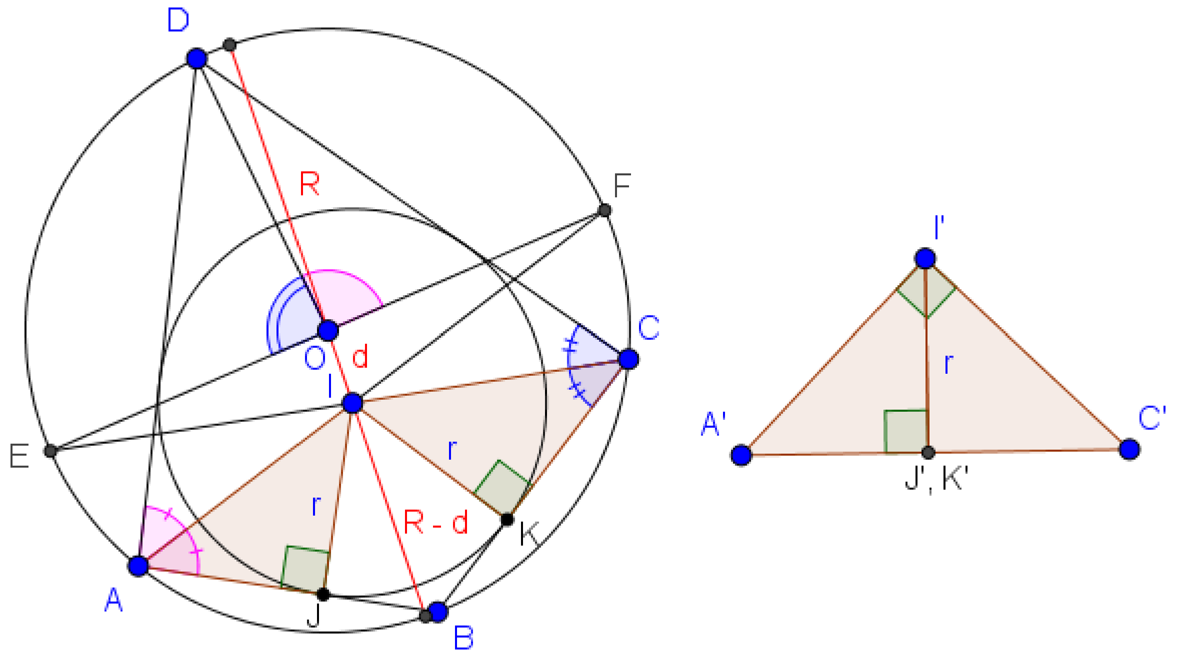
**Lause 5.8.** (Fuss'n lause). *Bisentrisellä nelikulmiolla pätee*

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}, \tag{5.9}$$

*missä $r$ on sisäympyrän säde, $R$ on ympärysympyrän säde ja $d$ on sisä- ja ympärysympyrän keskipisteiden välinen etäisyys.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on bisentrinen nelikulmio. Nyt sillä on siis $I$- ja $O$-keskiset sisä- ja ympärysympyrät, joiden säteet ovat $r$ ja $R$. Oletetaan, että sisäympyrä sivuaa nelikulmion sivuja $\overline{AB}$ ja $\overline{BC}$ pisteissä $J$ ja $K$. Koska nelikulmiolla $ABCD$ on ympärysympyrä, niin lauseen 2.24 nojalla sen vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia eli summa $\angle BAD + \angle BCD$ on kaksi suoraa kulmaa. Koska nelikulmiolla $ABCD$ on sisäympyrä, niin lauseen 2.6 nojalla sen sisäkulmien kulmanpuolittajat leikkaavat sisäympyrän keskipisteessä $I$. Nyt siis summa $\angle BAI + \angle BCI \cong \frac{\angle BAD}{2} + \frac{\angle BCD}{2}$ on yksi suora kulma. Huomataan, että kolmioilla $AJI$ ja $IKC$ on $I$ yhteisenä pisteenä, $\overline{JI} \cong \overline{KI} \cong r$ sekä kulmat $\angle AJI$ ja $\angle IKC$ ovat suoria kulmia.

Muodostetaan kuvan 21 mukaisesti kolmioiden $AJI$ ja $IKC$ kanssa yhtenevät kolmiot $A'J'I'$ ja $I'K'C'$ siten, että sivut $\overline{J'I'}$ ja $\overline{K'I'}$ ovat toisiaan vasten. Nyt koska $\overline{J'I'} \cong \overline{K'I'} \cong r$, niin pisteet $J'$ ja $K'$ ovat sama piste. Koska suorat kulmat $\angle A'J'I'$ ja $\angle I'K'C'$ ovat nyt vieruskulmia, niin sivut $\overline{A'J'}$ ja $\overline{K'C'}$ ovat samalla suoralla $A'C'$, jolloin kolmioista $A'J'I'$ ja $I'K'C'$ muodostuu kolmio $A'C'I'$. Koska summa $\angle BAI + \angle BCI \cong \angle JAI + \angle KCI \cong \angle J'A'I' + \angle K'C'I'$ on yksi suora kulma ja kolmion kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa,




Kuva 21: Lauseen 5.8 todistuksen havainnollistus.

niin kolmion $A'C'I'$ kulma $\angle A'I'C'$ on suora kulma, joten $A'C'I'$ on suorakulmainen kolmio. Kolmion $A'C'I'$ pinta-ala saadaan nyt laskettua kahdella eri tavalla

$$\frac{r \cdot (\overline{A'J'} + \overline{K'C'})}{2} = A_{A'C'I'} = \frac{\overline{I'A'} \cdot \overline{I'C'}}{2},$$

joista saatu yhtälö korotettuna puolittain toiseen potenssiin on

$$r^2 \cdot (\overline{A'J'} + \overline{K'C'})^2 = \overline{I'A'}^2 \cdot \overline{I'C'}^2. \tag{5.10}$$

Soveltamalla Pythagoraan lausetta kolmiolle $A'C'I'$ huomataan, että

$$(\overline{A'J'} + \overline{K'C'})^2 = \overline{I'A'}^2 + \overline{I'C'}^2,$$

jolloin sijoittamalla se yhtälöön 5.10 saadaan muodostettua yhtälö

$$
\begin{aligned}
r^2 \cdot (\overline{I'A'}^2 + \overline{I'C'}^2) &= \overline{I'A'}^2 \cdot \overline{I'C'}^2 \\
r^2 &= \frac{\overline{I'A'}^2 \cdot \overline{I'C'}^2}{\overline{I'A'}^2 + \overline{I'C'}^2} \\
\frac{1}{r^2} &= \frac{\overline{I'A'}^2 + \overline{I'C'}^2}{\overline{I'A'}^2 \cdot \overline{I'C'}^2} \\
\frac{1}{r^2} &= \frac{1}{\overline{I'C'}^2} + \frac{1}{\overline{I'A'}^2}.
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Puolisuorat $\overrightarrow{AI}$ ja $\overrightarrow{CI}$ leikkaavat ympärysympyrän pisteissä $F$ ja $E$. Kehäkulmalauseen nojalla pätee siis

$$\angle FOD + \angle EOD \cong 2\angle FAD + 2\angle ECD.$$

Koska lauseen 2.6 nojalla puolisuorat $\overrightarrow{AI}$ ja $\overrightarrow{CI}$ puolittavat myös sisäkulmat $\angle BAD$ ja $\angle BCD$, niin

$$\angle FOD + \angle EOD \cong 2\angle FAD + 2\angle ECD \cong \angle BAD + \angle BCD.$$

Nyt lauseen 2.24 nojalla summa $\angle FOD + \angle EOD$ on kaksi suoraa kulmaa, jolloin pisteet $E$, $O$ ja $F$ ovat samalla suoralla. Siis $\overline{EF}$ on ympärysympyrän halkaisija. Sovelletaan seuraavaksi kolmion $EIF$ mediaanille $\overline{IO}$ Apolloniuksen lausetta, jolloin saadaan yhtälö

$$\overline{IE}^2 + \overline{IF}^2 = 2(\overline{IO}^2 + \overline{EO}^2) = 2(d^2 + R^2), \tag{5.12}$$

missä $d$ on sisä- ja ympärysympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys ja $R$ on ympärysympyrän säde. Pisteen $I$ potenssi ympärysympyrän suhteen on

$$\overline{IA} \cdot \overline{IF} = \overline{IC} \cdot \overline{IE} = (R - d) \cdot (R + d) = R^2 - d^2,$$

missä $(R - d) \cdot (R + d)$ kuvastaa potenssia janan $IO$ kautta kulkevan ympärysympyrän halkaisijan kohdalla. Nyt edellisen nojalla saadaan muodostettua yhtälö

$$\frac{1}{\overline{IC}^2} + \frac{1}{\overline{IA}^2} = \frac{\overline{IE}^2}{(R^2 - d^2)^2} + \frac{\overline{IF}^2}{(R^2 - d^2)^2} = \frac{\overline{IE}^2 + \overline{IF}^2}{(R^2 - d^2)^2}. \tag{5.13}$$

Jäljellä on enää tehdä yhtälöiden 5.13 ja 5.12 mukaiset sijoitukset yhtälöön 5.11, missä siis $\overline{I'C'} \cong \overline{IC}$ ja $\overline{I'A'} \cong \overline{IA}$, jolloin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2} &= \frac{1}{\overline{I'C'}^2} + \frac{1}{\overline{I'A'}^2} \\
&= \frac{\overline{IE}^2 + \overline{IF}^2}{(R^2 - d^2)^2} \\
&= \frac{2(d^2 + R^2)}{(R^2 - d^2)^2} \\
&= \frac{R^2 + d^2 + R^2 + d^2}{(R^2 - d^2)^2} \\
&= \frac{R^2 + d^2 + R^2 + d^2 - 2Rd + 2Rd}{(R^2 - d^2)^2} \\
&= \frac{(R-d)^2 + (R+d)^2}{(R^2 - d^2)^2} \\
&= \frac{(R-d)^2 + (R+d)^2}{(R-d)^2(R+d)^2} \\
&= \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}.
\end{aligned}$$

Saatiin siis haluttu yhtälö 5.9. □

**Korollaari 5.14.** *Bisentrisen nelikulmion sisä- ja ympärysympyrän keskipisteiden väliselle etäisyydelle $d$ pätee*

$$d = \sqrt{R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}}, \tag{5.15}$$

*missä $r$ on sisäympyrän säde ja $R$ on ympärysympyrän säde.*

*Todistus.* Lähdetään Fuss'n lauseen todistuksen lopusta liikkeelle, viimeisten sijoitusten jälkeen kohdasta

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2(d^2 + R^2)}{(R^2 - d^2)^2},$$

missä $d$ on sisä- ja ympärysympyrän keskipisteiden välinen etäisyys, $r$ on sisäympyrän säde ja $R$ on ympärysympyrän säde. Tästä saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2} &= \frac{2(d^2+R^2)}{(R^2-d^2)^2} \\
r^2 &= \frac{(R^2-d^2)^2}{2(d^2+R^2)} \\
2(d^2+R^2)r^2 &= (R^2-d^2)^2 \\
2d^2r^2+2R^2r^2 &= R^4-2R^2d^2+d^4 \\
-d^4+(2R^2+2r^2)d^2-R^4+2R^2r^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Tehdään sijoitus $x = d^2$, jolloin toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa käyttämällä saadaan

$$x = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2+r^2},$$

$$x = R^2 + r^2 + r\sqrt{4R^2+r^2}.$$

Näistä alempi voidaan hylätä, koska silloin pätisi $d^2 = R^2+r^2+r\sqrt{4R^2+r^2} > R^2$, mutta sisä- ja ympärysympyröiden keskipisteiden välinen etäisyys ei sisäkkäisten ympyröiden takia voi olla suurempi kuin $R$. Siispä $d = \sqrt{R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}}$. □

Yhtälöstä 5.15 huomataan, että sisä- ja ympärysympyrän keskipisteet ovat samat silloin, kun $R = r\sqrt{2}$. Huomataan myös, että lauseiden 5.4 ja 5.6 avulla voidaan ratkaista bisentrisen nelikulmion sisä- ja ympärysympyrän keskipisteiden välinen etäisyys käyttämällä ainoastaan sen sivujen pituuksia.

# Luku 6

# Tavallisimmat ympyrälliset nelikulmiot

Lauseiden 2.5 ja 2.10 nojalla tiedetään, että jokaisella kolmiolla on sisäympyrä ja ympärysympyrä, mutta päteekö sama myös nelikulmioihin? Käykin ilmi, että kaikilla nelikulmioilla ei ole sisäympyrää ja/tai ympärysympyrää. Tutkitaan seuraavaksi mitkä tavallisimmista nelikulmioista ovat tangentiaalisia ja syklisiä.

**Lause 6.1.** *Neliö on tangentiaalinen nelikulmio.*

*Todistus.* Huomataan helposti, että neliö on tangentiaalinen nelikulmio. Koska neliö on konveksi ja sen jokainen sivu on yhtä pitkä, niin sen vastakkaisten sivujen summat ovat samat, jolloin se toteuttaa täydennetyn Pitot'n lauseen. Tämän nojalla sillä on sisäympyrä, joten se on tangentiaalinen nelikulmio. □

**Lause 6.2.** *Neliö on syklinen nelikulmio.*

*Todistus.* Koska neliön jokainen kulma on suora kulma, niin sen vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia, jolloin lauseen 2.24 nojalla sillä on ympärysympyrä. Siis neliö on syklinen nelikulmio. □

**Lause 6.3.** *Neliö on bisentrinen nelikulmio.*

*Todistus.* Tämä seuraa suoraan lauseista 6.1 ja 6.2. □

**Lause 6.4.** *Suorakulmio, joka ei ole neliö, ei ole tangentiaalinen nelikulmio.*

*Todistus.* Oletetaan, että nelikulmio $ABCD$ on sellainen suorakulmio, joka ei ole neliö. Koska suorakulmio $ABCD$ on konveksi ja se ei ole neliö, niin sen viereisille sivuille pätee $\overline{AB} > \overline{BC}$. Nyt koska $ABCD$ on suorakulmio, niin sen vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät. Tällöin vastakkaisten sivujen summille pätee $2 \cdot \overline{AB} > 2 \cdot \overline{BC}$. Selvästikään se ei toteuta täydennettyä Pitot'n lausetta, joten sillä ei ole sisäympyrää eli se ei voi olla tangentiaalinen nelikulmio. □

**Lause 6.5.** *Suorakulmio on syklinen nelikulmio.*

*Todistus.* Samat perustelut kuin neliöllä lauseessa 6.2. □

**Lause 6.6.** *Neljäkäs on tangentiaalinen nelikulmio.*

*Todistus.* Samat perustelut kuin neliöllä lauseessa 6.1. □

**Lause 6.7.** *Neljäkäs, joka ei ole neliö, ei ole syklinen nelikulmio.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on sellainen neljäkäs, joka ei ole neliö. Koska neljäkäs on suunnikas, niin lauseen 6.9 nojalla $ABCD$ ei ole syklinen nelikulmio. □

**Lause 6.8.** *Suunnikas, joka ei ole neljäkäs, ei ole tangentiaalinen nelikulmio.*

*Todistus.* Samat perustelut kuin suorakulmiolla lauseessa 6.4. □

**Lause 6.9.** *Suunnikas, joka ei ole suorakulmio, ei ole syklinen nelikulmio.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on sellainen suunnikas, joka ei ole suorakulmio. Koska $ABCD$ on suunnikas, niin sen vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Koska $ABCD$ ei ole suorakulmio, niin sen vastakkaiset kulmat eivät ole suoria kulmia, jolloin edellisen nojalla sen vastakkaiset kulmat eivät ole myöskään vieruskulmia. Nyt lauseen 2.24 nojalla sillä ei ole ympärysympyrää. Siis suunnikas, joka ei ole suorakulmio, ei ole syklinen nelikulmio. □

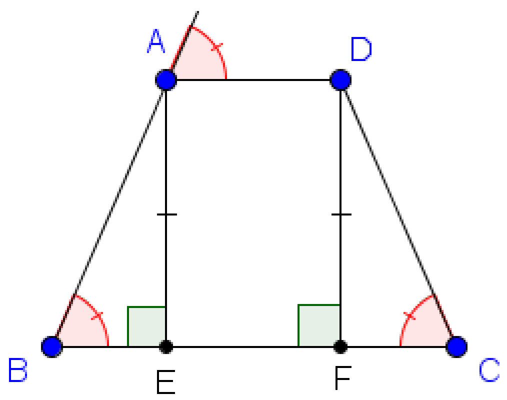
Lauseiden 6.8 ja 6.9 nojalla huomataan, että suunnikas ei ole yleisesti ympyrällinen nelikulmio. Seuraavalla sivulla oleva kuva 22 auttaa lauseen 6.10 todistuksen havainnollistamisessa.

**Lause 6.10.** *Tasakylkinen puolisuunnikas on syklinen nelikulmio.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on tasakylkinen puolisuunnikas. Tasakylkisen puolisuunnikkaan määritelmän nojalla voidaan olettaa, että $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ja $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Merkitään pisteillä $E$ ja $F$ pisteiden $A$ ja $D$ kohtisuoria projektioita janalla $\overline{BC}$. Koska $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, niin $\overline{AE} \cong \overline{DF}$. Nyt yhtenevyyskriteeri suorakulmaisen $SSK$:n nojalla kolmiot $ABE$ ja $CDF$ ovat yhtenevät, jolloin $\angle ABE \cong \angle FCD$. Koska suora $AB$ leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa $AD$ ja $BC$, niin samakohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, jolloin kulmat $\angle ABE$ ja $\angle BAD$ ovat vieruskulmia. Nyt koska $\angle ABE \cong \angle FCD$, niin vastakkaiset kulmat $\angle BAD$ ja $\angle FCD$ ovat vieruskulmia, jolloin lauseen 2.24 nojalla $ABCD$:llä on ympärysympyrä. Siis tasakylkinen puolisuunnikas on syklinen nelikulmio. □

**Lause 6.11.** *Konveksi leija on tangentiaalinen nelikulmio.*

*Todistus.* Lauseen 2.14 nojalla konveksilla leijalla on sisäympyrä, joten leija on tangentiaalinen nelikulmio. □



Kuva 22: Lauseen 6.10 todistuksen havainnollistus.

# Luku 7

# Ympyrällisten nelikulmioiden duaalisuus

Tässä luvussa tutkitaan ympyrällisten nelikulmioiden eri konstruktioiden ja lauseiden välistä duaalisuutta sekä sitä, miten niitä voi hyödyntää uusien konjektuurien ja lauseiden muodostamisessa. Duaalisuus matematiikassa on hyvin hyödyllinen ja tehokas apuväline ja sitä esiintyy esimerkiksi geometrian, algebran sekä analyysin haaroilla. Pohjimmiltaan duaalisuus antaa kaksi eri näkökulmaa saman kohteen tarkasteluun.

Esimerkiksi reaalisessa projektiivisessa tasossa $PG(2, \mathbb{R})$ pisteen ja suoran välillä vallitsee *duaalisuusperiaate*, jonka mukaan lause säilyy totena, jos siinä vaihdetaan sanojen "piste" ja "suora" paikat. Reaalinen projektiivinen taso $PG(2, \mathbb{R})$ on "äärettömän kaukaisilla" *ideaalipisteillä* laajennettu euklidinen taso, missä jokaisella yhdensuuntaisten suorien joukolla on yksi ideaalipiste, jossa ne leikkaavat toisensa. Näin jokaisella kahdella eri suoralla on tasan yksi yhteinen piste, joko "tavallinen" piste tai ideaalipiste. Tason ideaalipisteet muodostavat "äärettömän kaukana" olevan *ideaalisuoran.* [8]

Geometria noudattaa duaalisuusperiaatetta, jos sen jokaista aksioomaa vastaa duaalinen aksiooma. Ilman ideaalipisteitä aksiooman *"jokaista kahta eri pistettä $A$ ja $B$ kohden on olemassa yksi ja vain yksi yhteinen suora $a$ niin, että $A \in a$ ja $B \in a$"* duaali *"jokaista kahta eri suoraa $a$ ja $b$ kohden on olemassa yksi ja vain yksi yhteinen piste $A$ niin, että $A \in a$ ja $A \in b$"* ei pätisi. Tämän takia duaalisuusperiaate ei päde tavallisessa euklidisessa tasogeometriassa, koska paralleeliaksiooman nojalla annetun suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee yksi ja vain yksi annetun suoran kanssa yhdensuuntainen suora, jolla ei ole annetun suoran kanssa yhtään yhteistä pistettä.

Projektiivisessa geometriassa esiintyvän yleisen, pisteen ja suoran välisen, duaalisuuden tyyliin käyttäytyvä "rajoitetumpi duaalisuus" kuitenkin esiintyy varsin usein euklidisessa tasogeometriassa. Kyseessä on vähemmän tunnettu *sivu-kulma -duaalisuus*, jonka mukaan lause säilyy totena, jos siinä vaihdetaan sanojen "sivu" ja "kulma" paikat. Kyseinen duaalisuus ei kuitenkaan päde lauseissa, jotka perustuvat paralleeliaksioomaan tai sen kanssa loogisesti yhtäpitäviin muotoiluihin eli se ei päde yleisesti euklidisessa tasogeometriassa. [13]

Esimerkiksi yhtenevyyskriteeri $SSS$:n *("jos kahdella kolmiolla on yhtenevät sivut, niin kolmiot ovat yhteneviä")* duaali yhtenevyyskriteeri $KKK$ *("jos kahdella kolmiolla on yhtenevät kulmat, niin kolmiot ovat yhteneviä")* ei päde euklidisessa tasogeometriassa, mutta se pätee hyperbolisessa ja elliptisessä tasogeometriassa, jossa paralleeliaksiooma on korvattu toisella oletuksella (todistus löytyy lähteestä [8]).

Tarkastellaan seuraavaksi rinnakkain tähän asti käytyjä tangentiaalisen ja konveksin syklisen nelikulmioin ominaisuuksia.

| Tangentiaalinen nelikulmio | Konveksi syklinen nelikulmio |
|---|---|
| **Sisäympyrä** (määritelmä 3.1) | **Ympärysympyrä** (määritelmä 4.1) |
| Vastakkaisten **sivujen** summat ovat yhtä suuret (täydennetty Pitot'n lause) | Vastakkaisten **kulmien** summat ovat yhtä suuret (lause 2.24) |
| **Kulmanpuolittajat** leikkaavat **sisäympyrän** keskipisteessä (lause 3.4) | **Keskinormaalit** leikkaavat **ympärysympyrän** keskipisteessä (lause 4.4) |
| Viereisten **keskinormaalien** leikkauspisteet muodostavat **tangentiaalisen** nelikulmion (lause 3.9) | Viereisten **kulmanpuolittajien** leikkauspisteet muodostavat **syklisen** nelikulmion (lause 4.8) |

Taulukko 1: Tangentiaalisen ja konveksin syklisen nelikulmion ominaisuuksia.

Lause 3.9 olettaa siis tangentiaalisen nelikulmion olevan vain tangentiaalinen, samoin kuten lause 4.8 olettaa konveksin syklisen nelikulmion olevan vain syklinen. Nämä lisämaininnat jätettiin taulukosta selkeyden vuoksi pois. Kuten taulukosta 1 huomataan, sivu-kulma -duaalisuuden lisäksi myös kulmanpuolittajan ja keskinormaalin sekä sisä- ja ympärysympyrän välillä on nähtävillä duaalisuus. Tangentiaalista nelikulmiota voidaan siis pitää konveksin syklisen nelikulmion duaalina. Tutkitaan seuraavaksi, mitkä aiemmin tarkastelluista tavallisimmista tangentiaalisista ja syklisistä nelikulmioista ovat toistensa duaaleja.

Seuraavan sivun taulukosta 2 voidaan huomata, että konveksia leijaa ja tasakylkistä puolisuunnikasta sekä neljäkästä ja suorakulmiota voidaan pitää toistensa duaaleina. Niiden välillä esiintyy sisä- ja ympärysympyrän johdosta taulukon 1 väliset duaalisuudet sekä nelikulmioiden omiin määritelmiin perustuvat sivu-kulma -duaalisuudet. Mielenkiintoisena huomiona on se, että lävistäjien kohdalla esiintyy kohtisuoruus-yhtenevyys -duaalisuus. Bisentrisenä nelikulmiona neliötä voidaan pitää itsensä duaalina. Sillä on sekä sisä- et-

| Konveksi leija | Tasakylkinen puolisuunnikas |
|---|---|
| **Sisäympyrä** | **Ympärysympyrä** |
| Kaksi paria yhtä suuria viereisiä **sivuja** (määritelmä) | Kaksi paria yhtä suuria viereisiä **kulmia** |
| Yksi pari yhtä suuria vastakkaisia **kulmia** | Yksi pari yhtä suuria vastakkaisia **sivuja** (määritelmästä) |
| Symmetria-akseli kulkee yhden parin vastakkaisia **kulmia** läpi | Symmetria-akseli kulkee yhden parin vastakkaisia **sivuja** läpi |
| **Kohtisuorasti leikkaavat** lävistäjät | **Yhtä suuret** lävistäjät |

| Neljäkäs | Suorakulmio |
|---|---|
| **Sisäympyrä** | **Ympärysympyrä** |
| Kaikki **sivut** ovat yhtä suuria (määritelmä) | Kaikki **kulmat** ovat yhtä suuria (määritelmä) |
| Vastakkaiset **kulmat** yhtä suuret | Vastakkaiset **sivut** yhtä suuret |
| Symmetria-akseli kulkee molempien vastakkaisten **kulmien** läpi | Symmetria-akseli kulkee molempien vastakkaisten **sivujen** läpi |
| **Kohtisuorasti leikkaavat** lävistäjät | **Yhtä suuret** lävistäjät |

| Neliö | |
|---|---|
| **Sisäympyrä** | **Ympärysympyrä** |
| Kaikki **sivut** ovat yhtä suuria (määritelmä) | Kaikki **kulmat** ovat yhtä suuria (määritelmä) |
| Symmetria-akseli kulkee molempien vastakkaisten **kulmien** läpi | Symmetria-akseli kulkee molempien vastakkaisten **sivujen** läpi |
| **Kohtisuorasti leikkaavat** lävistäjät | **Yhtä suuret** lävistäjät |

Taulukko 2: Tavallisimpien tangentiaalisten ja syklisten nelikulmioiden ominaisuuksia.

tä ympärysympyrä ja siinä esiintyy omaan määritelmäänsä nojautuen sekä sivu-kulma -duaalisuutta että lävistäjien kohtisuoruus-yhtenevyys -duaalisuutta.

Vaikka kyseessä onkin "rajoitetumpi duaalisuus" verrattuna reaalisen projektiivisen tason $PG(2, \mathbb{R})$ pisteen ja suoran väliseen duaalisuusperiaatteeseen, niin silti sitä voidaan käyttää apuna konjektuurien muodostamisessa olemassaolevien lauseiden mahdollisista duaaleista ja tätä kautta löytää, joko suorasti tai epäsuorasti, uusia lauseita. Tämän "rajoitetumman duaalisuuden" tapauksessa onkin tärkeää huolellisesti tarkastaa muodostetut väitteet konstruktioiden ja todistusten avulla. [13]

GeoGebra ja edeltävän lähteen suosima Cabri Geometry ovatkin hyviä apuvälineitä muodostettujen väitteiden tarkastamiseen konstruktioiden avulla. Cabri Geometryssä on vielä kehittyneempänä ohjelmistona ominaisuus, joka tarkastaa tasokuvioiden geometrisia ominaisuuksia perustuen Eukleideen viiteen postulaattiin eri hypoteesien testaamisessa.

Taulukosta 2 huomataan myös ympyrällisten nelikulmioiden hierarkkisuus. Samalla puolella taulukkoa olevat perivät ylempänä olevien ominaisuudet ja ovat siten ylempänä olevien erikoistapauksia. Nelikulmioiden hierarkkisuutta kannattaakin duaalisuuden lisäksi hyödyntää ongelmanratkaisussa ja konjektuurien muodostamisessa sekä tulosten yleistämisessä [13].

Tarkastellaan edellisten pohjalta duaalisuuden hyödyntämistä tangentiaalisen tasakylkisen puolisuunnikkaan sekä konveksin syklisen leijan avulla. Koska tasakylkistä puolisuunnikasta ja leijaa voidaan pitää toistensa duaaleina, niin saman voidaan ajatella pätevän niiden erikoistapauksissa tangentiaalisessa tasakylkisessä puolisuunnikkaassa ja konveksissa syklisessä leijassa. Käydään seuraavaksi läpi eräs konveksia syklistä leijaa määrittävä lause.

**Lause 7.1.** *Konveksi leija on syklinen nelikulmio, jos ja vain jos sen kaksi vastakkaista kulmaa ovat suoria kulmia.*

*Todistus.* $\Longrightarrow$ : Oletetaan, että $ABCD$ on sellainen konveksi leija, joka on syklinen nelikulmio. Leijan määritelmän nojalla voidaan olettaa, että $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ ja $\overline{CB} \cong \overline{CD}$. Nyt lauseen 2.13 nojalla $\overline{AC}$ jakaa sen kahdeksi yhteneväksi kolmioksi $ABC$ ja $ADC$, jolloin $\angle ABC \cong \angle ADC$. Koska $ABCD$ on syklinen nelikulmio, niin sillä on ympärysympyrä. Nyt lauseen 2.24 nojalla sen vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia. Koska $\angle ABC \cong \angle ADC$, niin edellisen nojalla kulmien $\angle ABC$ ja $\angle ADC$ on oltava suoria kulmia. Siis jos konveksi leija on syklinen nelikulmio, niin sen kaksi vastakkaista kulmaa ovat suoria kulmia.

$\Longleftarrow$ : Oletetaan, että $ABCD$ on sellainen konveksi leija, jonka kaksi vastakkaista kulmaa ovat suoria kulmia. Nyt vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia, jolloin lauseen 2.24 nojalla sillä on ympärysympyrä. Siis jos konveksilla leijalla kaksi vastakkaista kulmaa ovat suoria kulmia, niin se on syklinen nelikulmio. $\square$

Leijoja, joiden kaksi vastakkaista kulmaa ovat suoria kulmia, tunnetaan myös nimellä *suorakulmainen leija*. Nimityksenä tämä saattaa olla harhaanjohtava, koska leijaa jossa on tasan yksi suora kulma, ei pidetä suorakulmaisena leijana. Kirjallisuudessa ei ollut mitään spesifiä lausetta tasakylkisen puolisuunnikkaan tangentiaalisuudesta. Tämä saadaan kuitenkin muodostettua soveltamalla lausetta 7.1 ja sivu-kulma -duaalisuutta, vaikka ongelmaksi saattaa aluksi muodostua suoran kulman käsite. Duaalien määrittämisessä lauseiden oikeanlainen muotoilu onkin tärkeässä asemassa [13]. Muotoillaan lause 7.1 seuraavanlaisesti: "Konveksi leija on syklinen nelikulmio, jos ja vain jos sen kaksi vastakkaista kulmaa ovat yhtä suuria kuin kahden muun vastakkaisen kulman summan puolikas".

Sivu-kulma -duaalisuuden nojalla tämän duaali olisi "Tasakylkinen puolisuunnikas on tangentiaalinen nelikulmio, jos ja vain jos sen kaksi vastakkaista sivua ovat yhtä suuria kuin kahden muun vastakkaisen sivun summan puolikas". Tämä vaikuttaakin täydennetyn Pitot'n lauseen erikoistapaukselta tangentiaalisen tasakylkisen puolisuunnikkaan tapauksessa, kun taas lauseen 7.1 muotoilu vaikuttaa lauseen 2.24 erikoistapaukselta konveksin syklisen leijan tapauksessa. Nyt duaalisuuden johdosta saadaan muodostettua haluttu lause, mutta tarkoituksella hieman eri tavalla muotoiltuna.

**Lause 7.2.** *Tasakylkinen puolisuunnikas on tangentiaalinen nelikulmio, jos ja vain jos sillä pätee* $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{EC} \cong \overline{BF}$*, missä* $E$ *ja* $F$ *ovat pisteiden* $A$ *ja* $D$ *kohtisuoria projektioita janalla* $\overline{BC}$*.*

*Todistus.* $\Longrightarrow$ : Oletetaan, että $ABCD$ on sellainen tasakylkinen puolisuunnikas, joka on tangentiaalinen nelikulmio. Tasakylkisen puolisuunnikkaan määritelmän nojalla voidaan olettaa, että $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ja $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Merkitään pisteellä $E$ pisteen $A$ kohtisuoraa projektiota janalla $\overline{BC}$ ja pisteellä $F$ pisteen $D$ kohtisuoraa projektiota janalla $\overline{BC}$. Merkitään vielä pisteellä $M$ kannan $\overline{BC}$ ja sen keskinormaalin leikkauspistettä. Koska tasakylkisen puolisuunnikkaan kannan keskinormaali puolittaa sen vastakkaisen sivun, niin merkitään sivun $\overline{AD}$ ja kannan keskinormaalin leikkauspistettä pisteellä $N$. Koska $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, niin $\overline{AN} \cong \overline{EM}$.

Nyt siis

$$\frac{\overline{AD}}{2} \cong \overline{AN} \cong \overline{EM},$$

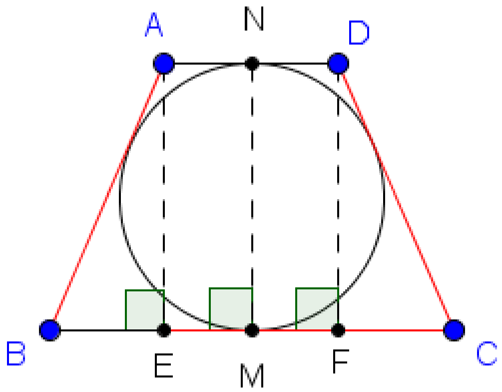
jolloin

$$\overline{EC} \cong \overline{EM} + \overline{MC} \cong \frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} \cong \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}.$$

Koska $ABCD$ on tangentiaalinen nelikulmio, niin sillä on sisäympyrä, jolloin täydennetyn Pitot'n lauseen nojalla sen vastakkaisten sivujen summat on yhtä suuret. Nyt pätee

$$\overline{EC} \cong \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \cong \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cong \frac{\overline{AB} + \overline{AB}}{2} \cong \frac{2\overline{AB}}{2} \cong \overline{AB}.$$

Täysin vastaavalla tavalla saadaan, että $\overline{BF} \cong \overline{AB}$. Siis jos tasakylkinen puolisuunnikas on tangentiaalinen nelikulmio, niin sillä pätee $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{EC} \cong \overline{BF}$, missä $E$ ja $F$ ovat pisteiden $A$ ja $D$ kohtisuoria projektioita janalla $\overline{BC}$.




Kuva 23: Lauseen 7.2 todistuksen havainnollistus.

$\Longleftarrow$ : Oletetaan, että $ABCD$ on tasakylkinen puolisuunnikas, jolla pätee $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{EC} \cong \overline{BF}$, missä $E$ ja $F$ ovat pisteiden $A$ ja $D$ kohtisuoria projektioita janalla $\overline{BC}$. Koska $ABCD$ on tasakylkinen puolisuunnikas, niin $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, jolloin $\overline{AE} \cong \overline{DF}$ ja $\overline{AD} \cong \overline{EF}$. Nyt yhtenevyyskriteeri suorakulmaisen $SSK$:n nojalla kolmiot $ABE$ ja $CDF$ ovat yhtenevät, jolloin $\overline{BE} \cong \overline{FC}$. Nyt pätee

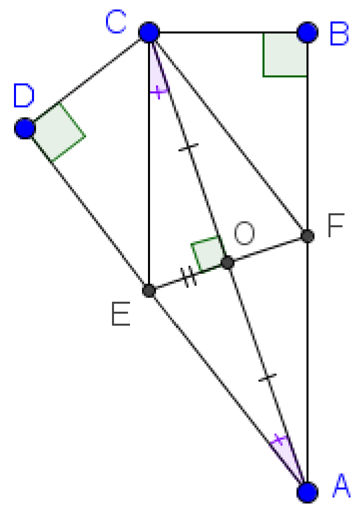
$$\overline{BC} + \overline{AD} \cong \overline{BE} + \overline{EC} + \overline{EF} \cong \overline{FC} + \overline{EC} + \overline{EF} \cong \overline{EC} + \overline{EC} \cong \overline{AB} + \overline{CD},$$

jolloin täydennetyn Pitot'n lauseen nojalla sillä on sisäympyrä. Siis tasakylkinen puolisuunnikas, jolla pätee $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{EC} \cong \overline{BF}$, missä $E$ ja $F$ ovat pisteiden $A$ ja $D$ kohtisuoria projektioita janalla $\overline{BC}$, on tangentiaalinen nelikulmio. $\square$

Päätetäänkin hyödyntää sivu-kulma -duaalisuutta uudestaan lauseen 7.2 kohdalla, jolloin se ensin voitaisiin (hyvin kömpelösti) muotoilla seuraavasti: "Tasakylkinen puolisuunnikas on tangentiaalinen nelikulmio, jos ja vain jos sen pienin sivu on yhtä suuri kuin suurimman sivun kärkipisteistä molemmilta puolin suurimman sivun mukaisesti asetettujen vastakkaisten yhtä suurien sivujen päällekkäinen osa".

Sivu-kulma -duaalisuuden mukaisesti sen duaali olisi konveksin syklisen leijan tapauksessa: "Konveksi leija on syklinen nelikulmio, jos ja vain jos sen pienin kulma on yhtä suuri kuin suurimman kulman kärkipisteestä molemmilta puolin suurimman kulman mukaisesti asetettujen vastakkaisten yhtä suurien kulmien päällekkäinen osa". Muutamien eri GeoGebra-konstruktioiden jälkeen duaali näyttäisi pätevän, joten voidaan siirtyä todistamaan sitä. Lopullinen lause saadaan pienen tarkastelun jälkeen muotoiltua hyvin lausetta 7.2 vastaavaan muotoon.

**Lause 7.3.** *Konveksi leija on syklinen nelikulmio, jos ja vain jos sillä pätee $\angle ABC \cong \angle CDA \cong \angle ECB \cong \angle FCD$, missä pisteet $E$ ja $F$ ovat lävistäjän $\overline{AC}$ keskinormaalin leikkauspisteitä janoilla $\overline{AD}$ ja $\overline{AB}$.*



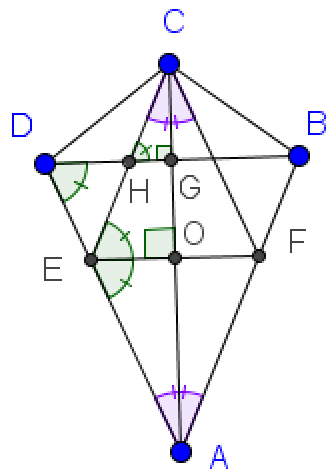

Kuva 24: Lauseen 7.3 todistuksen suunnan $\implies$ havainnollistus.

*Todistus.* $\implies$: Oletetaan, että $ABCD$ on sellainen konveksi leija, joka on syklinen nelikulmio. Nyt lauseen 7.1 nojalla sen kaksi vastakkaista kulmaa ovat suoria kulmia. Oletetaan, että nämä kulmat ovat $\angle ABC$ ja $\angle CDA$. Merkitään lävistäjän $\overline{AC}$ keskinormaalin leikkauspistettä janalla $\overline{AD}$ pisteellä $E$ ja janalla $\overline{AB}$ pisteellä $F$. Merkitään vielä lävistäjän $\overline{AC}$ keskipistettä pisteellä $O$. Huomataan, että yhtenevyyskriteeri $SKS$:n nojalla kolmiot $AOE$ ja $OCE$ ovat yhteneviä. Nyt siis $\angle CAD \cong \angle OAE \cong \angle OCE \cong \angle ACE$. Koska $ABCD$ on syklinen nelikulmio, niin sillä on ympärysympyrä, jolloin lauseen 2.24 nojalla sen vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia. Nyt siis vastakkaisten kulmien summa $\angle BCD + \angle BAD$ on kaksi suoraa kulmaa. Lauseen 2.13 nojalla lävistäjä $\overline{AC}$ puolittaa vastakkaiset kulmat $\angle BCD$ ja $\angle BAD$. Nyt vastakkaisten kulmien puolikkaiden summa on suora kulma eli

$$\frac{\angle BCD}{2} + \frac{\angle BAD}{2} \cong \angle BCA + \angle CAD \cong \angle BCA + \angle ACE \cong \angle ECB$$

on suora kulma. Täysin vastaavalla tavalla saadaan, että $\angle FCD$ on suora kulma. Siis jos konveksi leija on syklinen nelikulmio, niin $\angle ABC \cong \angle CDA \cong \angle ECB \cong \angle FCD$, missä pisteet $E$ ja $F$ ovat lävistäjän $\overline{AC}$ keskinormaalin leikkauspisteitä janoilla $\overline{AD}$ ja $\overline{AB}$.

$\impliedby$: Oletetaan, että $ABCD$ on konveksi leija, jolla pätee $\angle ABC \cong \angle CDA \cong \angle ECB \cong \angle FCD$, missä pisteet $E$ ja $F$ ovat lävistäjän $\overline{AC}$ keskinormaalin leikkauspisteitä janoilla $\overline{AD}$ ja $\overline{AB}$. Merkitään lävistäjän $\overline{AC}$ keskipistettä pisteellä $O$, lävistäjien $\overline{AC}$ ja $\overline{BD}$ leikkauspistettä pisteellä $G$ sekä lävistäjän $\overline{BD}$ ja janan $\overline{CE}$ leikkauspistettä pisteellä $H$. Koska $O$ on lävistäjän $\overline{AC}$ keskipiste, niin $\overline{AO} \cong \overline{OC}$. Lauseen 2.13 nojalla toinen lävistäjistä jakaa $ABCD$:n kahdeksi yhteneväksi kolmioksi.




Kuva 25: Lauseen 7.3 todistuksen suunnan $\Longleftarrow$ tapaus 2):n havainnollistus.

Tapaus 1) Jos lävistäjä $\overline{BD}$ jakaa $ABCD$:n kahdeksi yhteneväksi kolmioksi, niin $\angle BCD \cong \angle BAD$. Nyt siis molemmat vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, jolloin $ABCD$ on määritelmän mukaan neljäkäs. Koska neljäkkään lävistäjät puolittavat toisensa kohtisuorasti, niin ne ovat myös toistensa keskinormaaleita. Tällöin $E = D$ ja $F = B$, jolloin $\angle ABC \cong \angle CDA \cong \angle ECB \cong \angle FCD \cong \angle BCD \cong \angle BAD$. Nyt siis kaikki kulmat ovat yhtä suuria, jolloin $ABCD$ on neliö. Koska $ABCD$ on neliö, niin lauseen 6.2 nojalla se on syklinen nelikulmio.

Tapaus 2) Jos lävistäjä $\overline{AC}$ jakaa $ABCD$:n kahdeksi yhteneväksi kolmioksi, niin se myös lauseen 2.13 nojalla puolittaa sen vastakkaiset kulmat, jolloin $\angle FAO \cong \angle OAE$ ja $\angle BCG \cong \angle DCG$. Nyt leijan määritelmän mukaisesti $\overline{BC} \cong \overline{CD}$. Yhtenevyyskriteeri $SKS$:n nojalla kolmiot $BCG$ ja $GCD$ ovat yhteneviä. Nyt $\angle BGC \cong \angle DGC$ ja koska ne ovat vieruskulmia, niin ne ovat pakosti suoria kulmia. Yhtenevyyskriteeri $KSK$:n nojalla kolmiot $AOE$ ja $AFO$ ovat yhteneviä. Yhtenevyyskriteeri $SKS$:n nojalla kolmiot $AOE$, $OCE$ ja $FCO$ ovat yhteneviä, jolloin $\angle OAE \cong \angle OCE \cong \angle FCO$ ja $\angle AEO \cong \angle OEC$. Huomataan, että yhdenmuotoisuuskriteeri $KK$:n nojalla kolmiot $OCE$ ja $GCH$ sekä kolmiot $AOE$ ja $AGD$ ovat yhdenmuotoisia, jolloin $\angle GHC \cong \angle OEC$ ja $\angle AEO \cong \angle ADG$. Nyt siis

$$\angle EDH \cong \angle ADG \cong \angle AEO \cong \angle OEC \cong \angle GHC.$$

Koska alkuoletuksen mukaan $\angle CDA \cong \angle FCD$, niin

$$\angle EDH + \angle HDC \cong \angle CDA \cong \angle FCD \cong \angle FCO + \angle OCE + \angle HCD.$$

Nyt sijoittamalla yhteneviä kulmia edelliseen saadaan

$$\angle GHC + \angle HDC \cong 2\angle OAE + \angle HCD.$$

Koska kolmion kulman vieruskulma on kolmion muiden kulmien summa, niin kulman $\angle CHD$ vieruskulma $\angle GHC$ on $\angle HDC + \angle HCD$. Sijoittamalla tämän edelliseen saadaan

$$2\angle HDC + \angle HCD \cong 2\angle OAE + \angle HCD$$

eli $\angle HDC \cong \angle OAE$. Koska kolmion kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa, niin summa $\angle GAD + \angle ADG + \angle AGD$ on kaksi suoraa kulmaa. Koska $\angle AGD$ on suora kulma, niin summa

$$\angle GAD + \angle ADG \cong \angle OAE + \angle EDH \cong \angle HDC + \angle EDH \cong \angle CDA$$

on suora kulma. Nyt koska $\angle CDA \cong \angle ABC$, niin vastakkaiset kulmat ovat vieruskulmia, jolloin lauseen 2.24 nojalla $ABCD$:llä on ympärysympyrä. Siis $ABCD$ on syklinen nelikulmio.

Tapausten 1) ja 2) nojalla jos $ABCD$ on konveksi leija, jolla pätee $\angle ABC \cong \angle CDA \cong \angle ECB \cong \angle FCD$, missä pisteet $E$ ja $F$ ovat lävistäjän $\overline{AC}$ keskinormaalin leikkauspisteitä janoilla $\overline{AD}$ ja $\overline{AB}$, niin $ABCD$ on syklinen nelikulmio. □

Tässä siis lauseiden sopivalla muotoilulla ja sivu-kulma -duaalisuudella alkuperäisestä lauseesta 7.1 saatiin muodostettua lause 7.3, joka sisältää hyvin mielenkiintoisen yhteyden konveksin syklisen leijan ja sen symmetrialävistäjän keskinormaalin välillä. Tätä kyseistä yhteyttä ei löytynyt ennestään kirjallisuudesta.

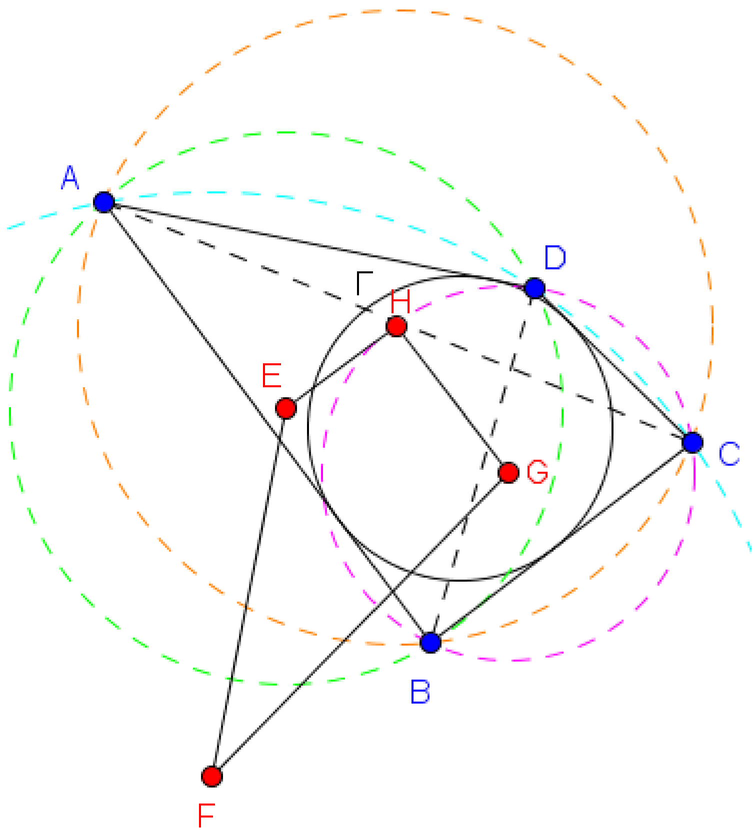
**Korollaari 7.4.** *Konveksi leija on syklinen nelikulmio, jos ja vain jos sen symmetrialävistäjän keskinormaalin leikkauspiste nelikulmion sivulla muodostaa sen vastakkaisen sivun kanssa suoran kulman kärkipisteenä symmetrialävistäjän päätepiste vastakkaisella sivulla.*

*Todistus.* Seuraa suoraan lauseen 7.3 todistuksesta. □

Huomataan myös, että lauseella 4.9 on olemassa sisä- ja ympärysympyrän duaalisuuteen nojaava duaali lause, jota kirjallisuudessa ei oltu mainittu.

**Lause 7.5.** *Tangentiaalisen ympärysympyrättömän nelikulmion kärkipisteiden muodostamien kolmioiden ympärysympyröiden keskipisteet muodostavat tangentiaalisen nelikulmion.*

*Todistus.* Oletetaan, että $ABCD$ on sellainen tangentiaalinen nelikulmio, jolla ei ole ympärysympyrää. Lauseen 2.10 nojalla kolmioilla $ABC$, $BCD$, $ACD$ ja $ABD$ on ympärysympyrät. Merkitään ympärysympyröiden keskipisteitä $O_{ABD} = E$, $O_{ACD} = F$, $O_{BCD} = G$ ja $O_{ABC} = H$. Lauseen 2.10 todistuksesta seuraa suoraan, että kulmien $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle ADC$ ja $\angle BAD$ viereisten keskinormaalien leikkauspisteet ovat kyseisten kolmioiden ympärysympyröiden keskipisteet $E$, $F$, $G$ ja $H$. Koska lauseen 3.9 mukaan




Kuva 26: Lauseen 7.5 todistuksen havainnollistus.

tangentiaalisen ympärysympyrättömän nelikulmion viereisten keskinormaalien leikkauspisteet muodostavat tangentiaalisen nelikulmion, niin siitä seuraa suoraan, että $EFGH$ on tangentiaalinen nelikulmio. Siis tangentiaalisen ympärysympyrättömän nelikulmion kärkipisteiden muodostamien kolmioiden ympärysympyröiden keskipisteet muodostavat tangentiaalisen nelikulmion. □

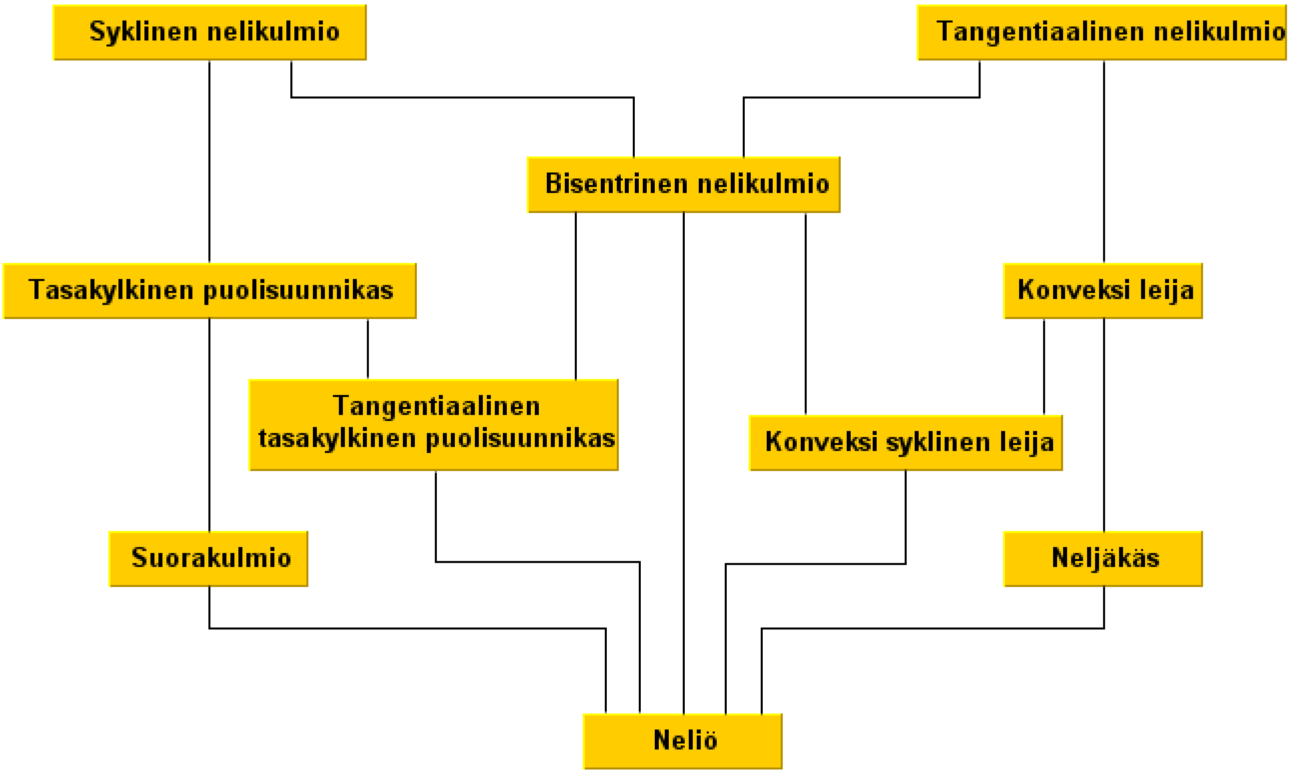
Edellisen todistuksen nojalla huomionarvoista on, että lauseet 3.9 ja 7.5 muodostavat saman tangentiaalisen nelikulmion. Kolmas mielenkiintoinen löytö, josta ei löytynyt aiempaa mainintaa kirjallisuudesta, on tangentin pituuden ja kehäkulman välinen duaalisuus. Voidaan huomata, että muotoilemalla lause 2.8 toisin, saadaan kehäkulmalauseen korollaarin duaali lause: “Samaa ympyrän kaarta vastaavat tangenttien pituudet ovat yhtä suuret”. Tässä samaa kaarta vastaavien tangenttien pituuksien päätepisteet ovat kaaren päätepisteet sekä niiden kautta kulkevien tangenttien leikkauspiste. Kuvassa 2 tangenttien pituudet $\overline{AX}$ ja $\overline{AW}$ vastaavat siis samaa $\Gamma$:n kaarta $\widehat{XW}$.

Edellisten nojalla voidaan siis täydentää taulukkoa 1 seuraavasti, missä lauseet 3.9 ja 7.5 olettavat siis tangentiaalisen nelikulmion olevan vain tangentiaalinen, samoin kuten lause 4.8 olettaa siis konveksin syklisen nelikulmion olevan vain syklinen. Nämä lisämaininnat jätettiin taulukosta selkeyden vuoksi pois.

| Tangentiaalinen nelikulmio | Konveksi syklinen nelikulmio |
|---|---|
| **Sisäympyrä** (määritelmä 3.1) | **Ympärysympyrä** (määritelmä 4.1) |
| Vastakkaisten **sivujen** summat ovat yhtä suuret (täydennetty Pitot'n lause) | Vastakkaisten **kulmien** summat ovat yhtä suuret (lause 2.24) |
| **Kulmanpuolittajat** leikkaavat **sisäympyrän** keskipisteessä (lause 3.4) | **Keskinormaalit** leikkaavat **ympärysympyrän** keskipisteessä (lause 4.4) |
| Viereisten **keskinormaalien** leikkauspisteet muodostavat **tangentiaalisen** nelikulmion (lause 3.9) | Viereisten **kulmanpuolittajien** leikkauspisteet muodostavat **syklisen** nelikulmion (lause 4.8) |
| Kärkipisteiden muodostamien kolmioiden **ympärysympyröiden keskipisteet** muodostavat **tangentiaalisen** nelikulmion (lause 7.5) | Kärkipisteiden muodostamien kolmioiden **sisäympyröiden keskipisteet** muodostavat **syklisen** nelikulmion (lause 4.9) |
| Samaa ympyrän kaarta vastaavat **tangenttien pituudet** ovat yhtä suuret (lause 2.8) | Samaa ympyrän kaarta vastaavat **kehäkulmat** ovat yhtä suuret (kehäkulmalauseen korollaari) |

Taulukko 3: Tangentiaalisen ja konveksin syklisen nelikulmion ominaisuuksia.

Seuraavan sivun kuvasta 27 voidaan vielä havaita läpikäytyjen tavallisimpien ympyrällisten nelikulmioiden hierarkkisuus ja duaalisuus symmetrisesti. Tässä hierarkkisuus ilmenee siten, että alhaalla olevat ovat ylempänä olevien erikoistapauksia ja ne perivätkin niihin ylemmällä tasolla yhteydessä olevan ominaisuudet. Neljäkäs perii siis konveksin leijan ominaisuudet, mutta ei konveksin syklisen leijan ominaisuuksia. Keskiakselilla olevat bisentrinen nelikulmio sekä neliö ovat duaaleja itsensä kanssa, kun taas keskiakselin molemmilla puolin samassa tasossa ovat toistensa duaalit ympyrälliset nelikulmiot, kuten esimerkiksi suorakulmio ja neljäkäs. Keskiakseli toimii tässä siis symmetria-akselina.




Kuva 27: Tavallisimpien ympyrällisten nelikulmioiden hierarkkisuus ja duaalisuus.

# Kirjallisuutta


[1] Christopher J. Bradley: Challenges in Geometry for Mathematical Olympians Past and Present, Oxford University Press, 2005.

[2] Heinrich Dörrie: 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover Publications, 1965.

[3] Darij Grinberg: Circumscribed quadrilaterals revisited, 5 October 2012. http://www.cip.ifi.lmu.de/ grinberg/CircumRev.pdf

[4] Larry Hoehn: Circumradius of a cyclic quadrilateral, The Mathematical Gazette Volume 84: Number 499, s. 69-70, 2000.

[5] Martin Josefsson: Angle and Circle Characterizations of Tangential Quadrilaterals, Forum Geometricorum Volume 14, 2014.

[6] Martin Josefsson: More Characterizations of Tangential Quadrilaterals, Forum Geometricorum Volume 11, 2011.

[7] John M. Lee: Axiomatic Geometry, American Mathematical Society, 2013.

[8] Matti Lehtinen: Geometrian perusteita, kurssimateriaali, Oulu, 2016. http://www.elisanet.fi/matti.t.Lehtinen/Geom2016kaikki.pdf

[9] Shlomo Libeskind: Euclidean and Transformational Geometry: A Deductive Inquiry, University of Oregon, 2008.

[10] Alfred S. Posamentier: Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students, Key College Publishing, 2002.

[11] Alfred S. Posamentier, Charles T. Salkind: Challenging Problems in Geometry, Dover Publications, 1996.

[12] Juan C. Salazar: Fuss' Theorem, The Mathematical Gazette Volume 90: Number 518, s. 306-307, 2006.

[13] Michael de Villiers: Some Adventures in Euclidean Geometry, Lulu.com, 2009.

[14] Kalle Väisälä: Geometria, viides painos, Porvoo: WSOY, 1959.

[15] Jim Wilson: Foundations of Geometry I, kurssimateriaali, University of Georgia, 2010. http://jwilson.coe.uga.edu/MATH7200/Sect2.2.html

[16] Paul Yiu: Notes on Euclidean Geometry, kurssimateriaali, Florida Atlantic University, 1998. http://math.fau.edu/Yiu/EuclideanGeometryNotes.pdf