



Micael Patric  
Santos

Otimização do Dimensionamento de Lotes na  
Extrusão





**Micael Patric  
Santos**

## **Otimização do Dimensionamento de Lotes na Extrusão**

Relatório de estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizado sob a orientação científica do Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra, Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro



**o júri / the jury**

presidente / president

**Professora Doutora Isabel Maria Simões Pereira**

Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro (por delegação da Reitoria da Universidade de Aveiro)

vogais / examiners committee

**Professor Doutor Luís Miguel Domingues Fernandes Ferreira**

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (arguente principal)

**Professor Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra**

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (orientador)



**agradecimentos /  
acknowledgements**

Em primeiro lugar, queria agradecer ao Professor Agostinho Agra pelo acompanhamento do trabalho, pelas oportunidades proporcionadas e pela disponibilidade sempre demonstrada.

Agradeço a simpatia de todas as pessoas com quem me cruzei na Extrusal, empresa onde realizei o estágio curricular, em particular às pessoas do departamento de sistemas de informação, em especial ao Eduardo Duarte, pela sua orientação e prestabilidade. Um obrigado à minha colega de estágio pela companhia e pela partilha de bons momentos nesta etapa.

Agradeço a todas as pessoas que de alguma forma me ajudaram na escrita deste relatório de estágio através de críticas, opiniões e sugestões.

À minha família, em particular aos meus pais e ao meu irmão, obrigado pelo apoio incondicional, pela paciência e por acreditarem sempre em mim.

Aos amigos que estão perto, aos amigos que estão longe, aos amigos de longa data, aos novos amigos, um muito obrigado por fazerem parte da minha vida. A todos os meus colegas de curso, em especial à minha turma, obrigado pela amizade, pelo afeto, pela partilha e pelo apoio.

Por fim, um muito e sincero obrigado à Cristiana e ao João por tudo.





## palavras-chave

Planeamento de Produção, Dimensionamento de Lotes, Heurísticas, programação inteira mista, Otimização Robusta

## resumo

Este trabalho surgiu no âmbito do estágio final do Mestrado em Matemática e Aplicações cujo problema foi proposto pela Extrusal, uma empresa de extrusão e tratamento de perfis de alumínio. A existência de perfis cuja quantidade encomendada é inferior à quantidade mínima de produção definida estrategicamente pela empresa deu mote ao presente trabalho. Pretende-se auxiliar o processo de planeamento de produção da empresa em relação a estes perfis, tendo em conta os custos de *set-up*, de produção e de *stock*. As decisões tomadas têm em conta não só a procura efetiva de cada perfil como também a procura prevista dos mesmos ao longo dos tempos.

Apresenta-se um modelo de programação inteira mista para este problema com o qual é possível obter a solução ótima do mesmo. Comprova-se na prática que aumentando o número de perfis em estudo, torna-se difícil a obtenção da solução ótima através de métodos exatos e em tempo útil. Para isso, propõem-se duas heurísticas que permitem obter soluções de boa qualidade em tempos computacionais razoáveis. Serão usados exemplos gerados aleatoriamente, que permitem avaliar a eficácia e a eficiência das heurísticas desenvolvidas. Ao longo do trabalho, foi usado o *software* de otimização *Xpress* para a obtenção dos resultados.

Para lidar com a incerteza nas procuras, é proposto um modelo de otimização robusta que incorpora aversão ao risco.

Na parte final, como contributo para a empresa, foi desenvolvido o modelo matemático numa linguagem *open source*, *GMPL*, incorporada no *Solver-Studio* do *Excel*, que facilmente pode ser usado no dia-a-dia pela empresa para assim auxiliar a tomada de decisão.



**keywords**

Production Planning, Lot-Sizing, Heuristics, Mixed Integer Programming, Robust Optimization

**abstract**

This work came under the internship of the Masters in Mathematics and Applications whose problem was proposed by Extrusal, an extrusion and treatment profiles aluminium company. The existence of profiles whose ordered quantity is less than the minimum amount of production strategically set by the company motivated this work. It is intended to provide a decision support tool for the production planning process of the company in respect to these profiles, taking into account the costs of set-up, production and stock. The decisions take into account not only the effective demand for each profile as well as their predicted demand over time.

A mixed integer programming model is presented and discussed for this problem which allows the possibility to obtain its optimal solution. In practice, it was shown that by increasing the number of studied profiles, it became more difficult to obtain the optimal solution through exact methods in a short time. For this purpose, two heuristics that allow obtaining high quality solutions in reasonable computational time were proposed. Randomly generated instances are used, allowing the evaluation of the effectiveness and efficiency of the developed heuristics. Throughout the work, the Xpress optimization software was used to obtain the results.

In order to take into account the uncertainty of demand, a robust optimization model is proposed, allowing to incorporate some risk aversion into the planning decision.

In the final part, as a contribution to the company, a mathematical model was developed in an open source language, GMPL, incorporated in Excel's SolverStudio, which can easily be used in a day-to-day basis by the company so as to assist in decision making.



# Conteúdo

<b>Conteúdo</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>v</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Extrusal</b>	<b>3</b>
2.1 Apresentação . . . . .	3
2.2 Visão, Missão e Valores do Grupo . . . . .	3
2.3 Alumínio . . . . .	3
2.4 Processo Produtivo . . . . .	4
<b>3 Descrição do Problema</b>	<b>9</b>
3.1 Previsão da Procura . . . . .	10
3.2 Gestão de <i>Stock</i> . . . . .	10
3.3 Exemplo . . . . .	10
<b>4 Planeamento de Produção e Dimensionamento de Lotes</b>	<b>13</b>
4.1 Sistemas de Planeamento de Produção . . . . .	13
4.1.1 Planeamento Estratégico, Tático e Operacional . . . . .	14
4.1.2 Tipologia de Produção: Classificação quanto ao Ambiente de Produção . . . . .	14
4.2 Problema de Dimensionamento de Lotes . . . . .	15
<b>5 Modelo Proposto</b>	<b>19</b>
5.1 Formulação Inicial . . . . .	19
5.2 Linearização . . . . .	23
5.2.1 Custo de Produção . . . . .	23
5.2.2 Custo de <i>Stock</i> . . . . .	25
5.3 Formulação Final . . . . .	28
5.4 Exemplo . . . . .	29
<b>6 Heurísticas</b>	<b>31</b>
6.1 <i>Heurística 1</i> . . . . .	31
6.2 <i>Heurística 2</i> . . . . .	32
6.3 Exemplo . . . . .	33

6.3.1	<i>Heurística 1</i> . . . . .	33
6.3.2	<i>Heurística 2</i> . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Resultados Obtidos e Discussão de Resultados</b>	<b>39</b>
<b>8</b>	<b>Otimização Robusta</b>	<b>45</b>
<b>9</b>	<b>Contributos para a Empresa</b>	<b>51</b>
<b>10</b>	<b>Conclusão</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Regra do Retângulo Composta</b>	<b>55</b>
<b>B</b>	<b>Ficheiros <i>Excel</i></b>	<b>57</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>61</b>

# Lista de Figuras

2.1	Biletos. . . . .	4
2.2	Matriz. . . . .	5
2.3	Prensa de extrusão. . . . .	5
2.4	Ilustração do processo de formação do perfil de alumínio na prensa, adaptado de [15]. . . . .	6
2.5	Expedição. . . . .	6
2.6	Tratamento de superfície: lacagem (à esquerda) e anodização (à direita). . . . .	7
2.7	Esquema do processo produtivo da Extrusal desde a preparação da matéria-prima e das ferramentas de apoio à entrega ao cliente, adaptado de [16]. . . . .	7
5.1	Representação gráfica do custo de produção, em função da quantidade produzida. . . . .	23
5.2	Representações gráficas do custo de produção em função da quantidade produzida (a azul) e da reta de regressão linear obtida (a verde). . . . .	24
5.3	Representação gráfica do custo de <i>stock</i> em função da quantidade produzida. . . . .	26
5.4	Representações gráficas do custo de <i>stock</i> em função da quantidade produzida (a azul) e da reta de regressão linear obtida (a verde). . . . .	27
8.1	Representação gráfica do custo total da solução ótima em função do parâmetro $\Gamma$ . . . . .	48
B.1	<i>Screenshot</i> do ficheiro <i>Excel</i> com os dados de entrada do Exemplo 1 com procura prevista mensal constante. . . . .	57
B.2	<i>Screenshot</i> do ficheiro <i>Excel</i> com os dados de entrada do Exemplo 1 com procura prevista mensal constante e a respetiva solução ótima. . . . .	58
B.3	<i>Screenshot</i> do ficheiro <i>Excel</i> com os dados de entrada do Exemplo 1 com procura prevista mensal constante, com restrição de um cliente e a respetiva solução ótima. . . . .	59
B.4	<i>Screenshot</i> do ficheiro <i>Excel</i> com os dados de entrada do Exemplo 1 com procura prevista mensal variável para os três primeiros meses e constante para os restantes. . . . .	60





# Lista de Tabelas

3.1	Exemplo 1: lista de perfis e respectivas procura efetiva e procura prevista mensal.	11
5.1	Solução Ótima do Exemplo 1 . . . . .	29
6.1	Esquema de utilização da <i>Heurística 2</i> . . . . .	32
6.2	Exemplo 2: lista de perfis e respectivas procura efetiva e procura prevista mensal.	33
6.3	Primeiros quatro perfis com maior Procura Efetiva (A). . . . .	33
6.4	Primeiros quatro perfis com maior Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês (B). . . . .	34
6.5	Primeiros quatro perfis com maior Procura Efetiva mais Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês (C). . . . .	34
6.6	Primeiros quatro perfis com maior Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês mais Procura Prevista para o 3º Mês (D). . . . .	34
6.7	Primeiros quatro perfis com maior Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês mais Procura Prevista para o 3º Mês mais Procura Prevista para o 4º Mês (E). . . . .	35
6.8	Resultados obtidos pela aplicação da <i>Heurística 1</i> quando aplicada ao Exemplo 2. . . . .	35
6.9	Resultados obtidos pela aplicação da <i>Heurística 2</i> quando aplicada ao Exemplo 2. . . . .	37
6.10	Solução ótima do Exemplo 2 e soluções obtidas através da aplicação da <i>Heurística 1</i> e da <i>Heurística 2</i> ao mesmo exemplo, apresentando os respectivos custos e respectivos <i>GAP's</i> . . . . .	38
7.1	Resultados obtidos para os exemplos, usando três capacidades para o <i>stock</i> , usando uma procura prevista mensal constante. . . . .	41
7.2	Resultados obtidos para os exemplos, usando uma procura prevista mensal variável para os três primeiros meses e constante para os restantes. . . . .	42
7.3	Resultados obtidos para os exemplos, usando a <i>Heurística 1</i> e a <i>Heurística 2</i> . . . . .	43
8.1	Soluções ótimas do mesmo exemplo para vários valores do parâmetro $\Gamma$ , apresentando o número de perfis produzidos, a quantidade a produzir e os vários custos . . . . .	49



# Capítulo 1

## Introdução

As empresas, para serem eficazes, sempre tiveram de gerir a sua produção. A gestão da produção coloca-se no centro da estratégia da empresa devido à evolução das condições de competitividade económica.

Existe uma concorrência implacável entre as empresas face a clientes cada vez mais exigentes. Esta competitividade obriga-as a uma otimização dos custos, uma qualidade irrepreensível, prazos de entrega curtos e respeitados, entre outros [5].

É necessário, por exemplo, melhorar os processos de produção internos, nomeadamente, fazer um bom planeamento de produção.

O planeamento de produção é visto como o planeamento da aquisição dos recursos e matérias-primas, bem como o planeamento das atividades de produção necessárias para transformar matérias-primas em produtos acabados, de modo a satisfazer a procura dos clientes da maneira mais eficiente e económica possível.

Em ambientes industriais, os problemas a serem abordados neste campo relacionam-se com as decisões a tomar sobre o tamanho dos lotes de produção dos diferentes produtos a serem fabricados ou transformados, sobre o momento em que esses lotes têm de ser produzidos, sobre a máquina ou instalação de produção em que a produção deve ter lugar ou sobre o sequenciamento dos lotes de produção.

O objetivo do planeamento da produção é, portanto, de tomar decisões de planeamento que otimizam os objetivos económicos, tais como minimização de custos ou maximização da contribuição para o lucro, tendo em conta o objetivo de satisfação do cliente. Para isso, os sistemas de planeamento de produção estão a tornar-se cada vez mais sofisticados a fim de aumentar a produtividade e a flexibilidade das operações de produção. Também a necessidade de se ser capaz de responder rapidamente às mudanças da procura do mercado ou do cliente criou uma necessidade de modelos de planeamento de produção refinados mais capazes de representar e explorar a flexibilidade do processo de produção, sem perder em vista a produtividade global.

Neste contexto, os modelos de planeamento de produção são muitas vezes modelos de programação inteira mista devido às características do problema. Tais modelos de planeamento podem-se tornar difíceis de resolver para problemas de grandes dimensões que geralmente são os encontrados em sistemas de planeamento de produção. No entanto, técnicas sofisticadas podem ser usadas para melhorar as formulações dos modelos matemáticos ou para criar algoritmos de otimização eficientes, de modo a reduzir drasticamente o tempo de execução necessário a resolver o problema [11].

Este relatório de estágio surge no âmbito do estágio final do curso de Mestrado em Matemática e Aplicações, cujo problema foi proposto pela empresa Extrusal, uma empresa nacional de extrusão e tratamento de estruturas de alumínio. Tem-se como objetivo auxiliar a tomada de decisão por parte do departamento de planeamento da Extrusal no que diz respeito ao planeamento de produção de vários produtos cujas quantidades encomendadas são baixas e maioritariamente inferiores à quantidade mínima de produção estrategicamente estabelecido pela empresa.

Apresenta-se um modelo de programação inteira mista para este problema com o qual é possível obter a solução ótima do mesmo. Como se torna difícil a obtenção da solução ótima através de métodos exatos e em tempo útil com o aumento do número de perfis em estudo, propõem-se duas heurísticas que permitem obter soluções de boa qualidade em tempos computacionais razoáveis. Posteriormente são gerados aleatoriamente exemplos que permitirão avaliar a eficácia e a eficiência das heurísticas desenvolvidas. De modo a incorporar a incerteza da procura futura é ainda abordado um modelo de otimização robusta e discutida a sua relevância para o problema. Na parte final, como contributo para a empresa, foi desenvolvido o modelo matemático numa linguagem *open source*, *GMPL*, incorporada no *SolverStudio* do *Excel*, que facilmente pode ser usado no dia-a-dia pela empresa.

No segundo capítulo, é feita a descrição da empresa onde foi realizado o estágio curricular, a Extrusal.

No terceiro capítulo é descrito o problema proposto.

No quarto capítulo é feita uma contextualização teórica do trabalho realizado, expondo conceitos relacionados com o planeamento de produção, em particular com a questão do dimensionamento de lotes de produção.

No quinto capítulo, é apresentada a modelação matemática para a resolução do problema. É apresentada, inicialmente, a modelação matemática mais geral do mesmo, particularizando, a seguir, para o problema proposto pela Extrusal. Por fim, é apresentado um problema simples para a validação do modelo proposto.

No sexto capítulo, são apresentadas duas heurísticas para o problema proposto, que darão soluções para o mesmo, num tempo de execução útil.

No sétimo capítulo, são discutidos, analisados e comparados os resultados obtidos, quer por resolução exata, quer pelas heurísticas descritas no sexto capítulo.

No oitavo capítulo, é desenvolvida uma formulação matemática baseada em otimização robusta para o problema.

No nono capítulo, é apresentada a forma como o trabalho feito ao longo do estágio contribuirá para dar resposta ao problema proposto: auxiliar o departamento de planeamento a tomar decisões quando, ocasionalmente, é necessário fazer o planeamento de produção dos tais produtos com baixa quantidade encomendada.

Por fim, no décimo e último capítulo, são apresentadas as conclusões acerca do problema estudado, seus resultados e sugestões de possíveis estudos futuros.

## Capítulo 2

# Extrusal

Neste capítulo é feita a descrição da empresa onde o presente trabalho foi desenvolvido. É feita uma breve apresentação da mesma, são apresentados a visão, a missão e os valores do grupo e, por fim, descreve-se o processo produtivo.

### 2.1 Apresentação

A Extrusal é uma empresa nacional de extrusão e tratamento de perfis de alumínio para aplicação na arquitetura e na indústria em geral que surgiu no mercado português em 1972. Manteve-se sempre na vanguarda tecnológica, tendo como lema principal a qualidade dos seus produtos para máxima satisfação dos seus clientes [14].

### 2.2 Visão, Missão e Valores do Grupo

O grupo Extrusal é composto por várias empresas, unidas pelo desígnio de prestar o melhor serviço. Do primeiro esboço até ao transporte, cada uma delas tem um papel importante ao longo do processo comercial.

É na sua sede, localizada em Aveiro, onde são produzidos e tratados os perfis de alumínio.

Com o objetivo de aumentar o valor das suas empresas, o grupo pretende que a marca “Extrusal” se assuma como uma referência no mercado internacional reforçando a sua posição competitiva no mercado nacional, oferecendo soluções de alumínio inovadoras, tecnologicamente avançadas, robustas e de qualidade tanto para o setor da arquitetura como da indústria em geral, correspondendo às necessidades dos seus clientes.

O grupo guia-se por valores tais como a orientação para o cliente/mercado, transparência, rigor e confiança, espírito de equipa, inovação e qualidade.

### 2.3 Alumínio

O alumínio continua a ser o mineral de eleição do grupo Extrusal.

O alumínio é um elemento químico que à temperatura ambiente se encontra na forma sólida, sendo o elemento metálico mais abundante da crosta terrestre (8.07%).

As características principais do alumínio são a baixa densidade, a boa resistência à corrosão atmosférica, o ponto de fusão moderado que facilita a obtenção de ligas, a elevada condutibilidade elétrica e térmica, o bom poder refletor, o ser não tóxico e o ser reciclável.

Esta excepcional combinação de propriedades faz do alumínio um dos mais versáteis materiais utilizados na engenharia, arquitetura e indústria em geral.

O alumínio tem uma baixa resistência mecânica e não pode ser usado diretamente em aplicações onde a resistência à deformação e à fratura são fundamentais. Por este motivo, são adicionados ao alumínio outros elementos, em pequenas percentagens, que melhoram a sua resistência mecânica, sem detrimento de outras propriedades, dando origem às ligas de alumínio. As diferentes combinações possíveis entre o alumínio e os elementos de liga têm permitido o desenvolvimento de novas ligas, direcionadas para aplicações finais específicas.

O desenvolvimento destas, associado aos avanços tecnológicos do processo de extrusão, possibilita a produção de uma grande diversidade de perfis, que abrangem praticamente todas as áreas de aplicação no campo da indústria e da arquitetura.

A Extrusal produz perfis nas ligas, cujos principais elementos são o silício e o magnésio. Estas são tratáveis termicamente, o que significa que podem ver as suas propriedades mecânicas melhoradas através de ciclos de tratamento térmico apropriados.

A excelente adequabilidade dos tratamentos de superfície, anodização e lacagem, às ligas utilizadas na Extrusal, aumenta o leque de possibilidades das aplicações finais dadas aos perfis extrudidos [14].

## 2.4 Processo Produtivo

A matéria-prima utilizada na indústria de extrusão de alumínio é fornecida sob a forma de cilindros de liga de alumínio, denominados biletos ( Figura 2.1).



Figura 2.1: Biletos.

As matrizes (Figura 2.2) são ferramentas indispensáveis no processo de extrusão. Estas são blocos de aço, com um ou mais orifícios, sólidos e resistentes, cuja configuração inscrita dá ao perfil a forma desejada.

O processo base da Extrusal é o processo de extrusão de alumínio que é um processo de conformação mecânica por deformação plástica de um biletos de alumínio em perfis.

O biletos, após ser controlado em termos de dimensões, peso e composição química, é previamente aquecido e em seguida cortado em função da quantidade de perfil a extrudir. A prensa de extrusão (Figura 2.3) recebe de um lado o biletos e do lado oposto a matriz, também ela previamente aquecida de modo a evitar choques térmicos.



Figura 2.2: Matriz.

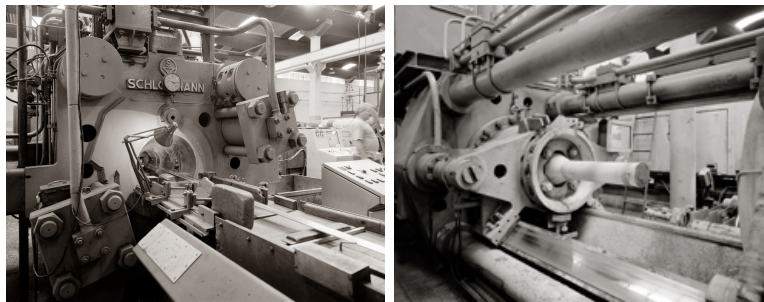


Figura 2.3: Prensa de extrusão.

---

Por ação da força hidráulica da prensa, o bilette é pressionado contra a matriz através de um pistão, provocando a formação do perfil e a mudança da estrutura do alumínio cuja forma está inscrita na matriz. Este processo está esquematizado na Figura 2.4.

À saída da prensa, o perfil é rapidamente arrefecido ao longo de uma pista, sendo a ponta do perfil presa por um alicate, denominado *puller*, que o puxa até ao final da pista.

Posteriormente, o perfil passa para o banco de estiramento onde é fixo nas extremidades por duas garras e estirado para alinhamento de eventuais torções e desempenho, seguindo depois para o corte à medida solicitada pelo cliente.

Por último, segue-se a maturação onde, num forno de envelhecimento artificial, o perfil sofre um tratamento térmico para lhe conferir as propriedades mecânicas especificadas.

Finalmente o perfil poderá ser embalado e expedido (Figura 2.5) ou receberá os tratamentos de anodização ou lacagem (Figura 2.6), tratamentos de superfície realizados integralmente na unidade produtiva da Extrusal.

A anodização, que é um processo electrolítico que forma sobre a liga de alumínio um óxido de espessura determinada, permite a obtenção de cores desde a tonalidade natural ao preto, passando pelos tons de champanhe ou bronze. Cada uma das cores, pode ter um pré-tratamento, conferindo-lhe um aspeto final polido ou acetinado.

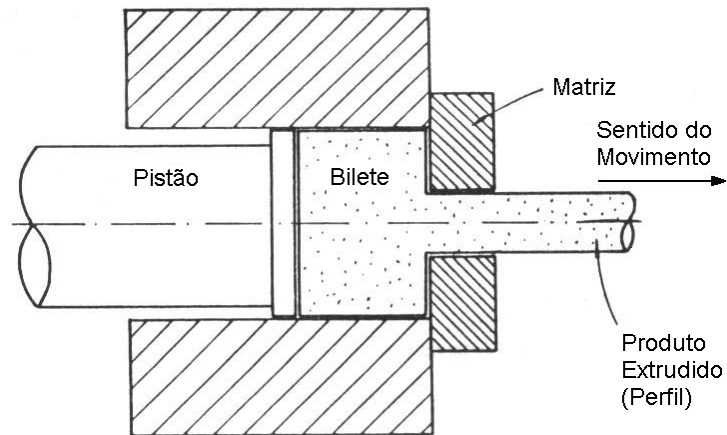


Figura 2.4: Ilustração do processo de formação do perfil de alumínio na prensa, adaptado de [15].



Figura 2.5: Expedição.

A lacagem é um processo de pintura termo aderente executado com tintas em pó de poliéster e pode ter um acabamento mate, brilhante ou texturado, e ainda, a decoração efeito-madeira.

Na Figura 2.7, apresenta-se esquematizado o processo de produção da Extrusal.





Figura 2.6: Tratamento de superfície: lacagem (à esquerda) e anodização (à direita).

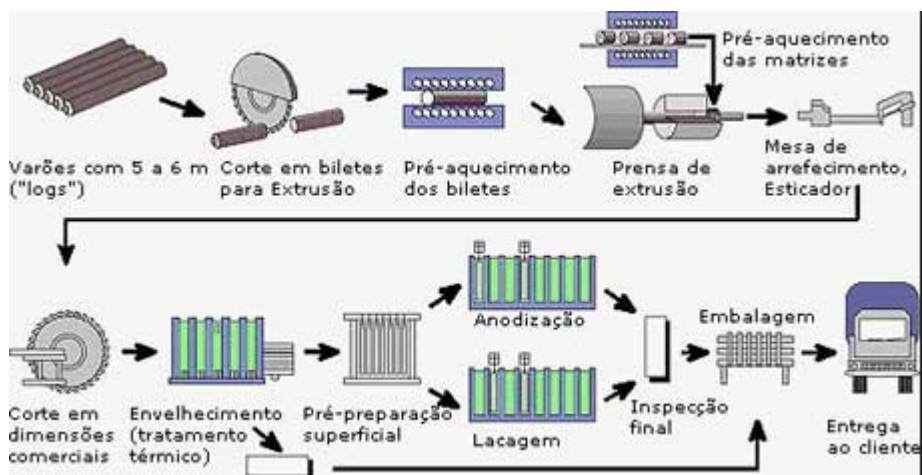


Figura 2.7: Esquema do processo produtivo da Extrusal desde a preparação da matéria-prima e das ferramentas de apoio à entrega ao cliente, adaptado de [16].



## Capítulo 3

# Descrição do Problema

Neste capítulo apresenta-se o problema abordado. Para isso abordam-se conceitos relacionados com a previsão da procura e a gestão de *stock*. Por fim, apresenta-se o objetivo do trabalho.

O departamento de planeamento da Extrusal, após a receção e o tratamento das necessidades de encomenda, faz a planificação da produção todas as semanas lançando ordens de fabrico diárias e, conseqüentemente, fazendo o planeamento das matrizes e ferramentas de apoio.

Durante o processo de extrusão de alumínio, existe um valor mínimo de quantidade de perfil a extrudir, definido estrategicamente pela Extrusal. Existem perfis cujas quantidades encomendadas ultrapassam em muito este valor mínimo, no entanto, existem perfis cujas quantidades encomendadas são inferiores e, portanto, as encomendas encontram-se pendentes.

Para os primeiros, a Extrusal tem já políticas definidas para a sua produção, porém, para os segundos, as encomendas vão ficando para trás.

Quando é feita a planificação da produção semanal, por vezes, sobra espaço na linha de produção e havendo tempo, matéria-prima e capacidade de *stock* disponíveis, a planificação da produção recai na produção destes perfis.

Duas soluções possíveis são: ou esperar que apareçam novas encomendas do mesmo perfil até perfazer, pelo menos, o valor mínimo; ou produzir o valor mínimo desse perfil para satisfazer a encomenda pendente ficando o que sobrar para *stock*.

Ambas as alternativas tem os seus prós e contras. A primeira alternativa tem como vantagem o não desperdício, pois só é produzido o que é pedido. Em contrapartida o não cumprimento dos prazos de entrega gera atraso ou não atendimento de pedidos de produtos podendo incluir perdas futuras e intangíveis, como o impacto na imagem da empresa junto ao mercado e pode acarretar a perda de um consumidor final. A segunda alternativa tem como vantagem a pronta satisfação das necessidades dos clientes, contudo, como se produzirá para *stock* irá trazer custos de armazenamento até voltar um pedido do mesmo perfil, podendo demorar muito tempo até o *stock* ser totalmente escoado.

Foi proposta uma terceira alternativa que conjuga as já mencionadas: decidir quais os produtos que compensam produzir e em que quantidades, para satisfazer não só os pedidos dos clientes atuais mas também pedidos de clientes futuros, tendo em conta que a quantidade excedentária ficará em *stock* até um novo pedido do mesmo produto.

O ideal seria produzir exatamente os produtos que os clientes vão comprar e em quantidades

certas que fossem satisfeitas a curto prazo mas isso não é possível, exceto em raras exceções. É necessário, assim, antecipar minimamente as futuras encomendas. Então, para tomar decisões que contribuem para o seu bom funcionamento e longevidade, qualquer empresa, deve apoiar-se num sistema de previsões fiáveis.

Para fazer o planeamento de produção vai-se ter em conta não só as quantidades encomendadas pendentes dos produtos, denominadas futuramente por procuras efetivas, como também as procuras previstas dos mesmos para os próximos tempos com a consequência que a produção dos mesmos, na maioria das vezes, resultará, inevitavelmente, em quantidades excedentárias que ficarão em *stock*.

### 3.1 Previsão da Procura

As previsões de procura são utilizadas nas decisões referentes ao planeamento dos recursos de produção, às metas de produção, ao *stock* e às prioridades de produção e expedição de produtos, assumindo um papel central no processo de planeamento da empresa. Com base nelas, são tomadas as principais decisões financeiras, comerciais e operacionais. Desta forma, a capacidade de prever bem as procuras futuras terá impacto direto no resultado económico da empresa.

As previsões constituem o ponto de partida do planeamento. Qualquer atividade de produção baseia-se em encomendas firmes e, a maior parte das vezes, em previsões das encomendas. Estas previsões, para a empresa, têm o objetivo definir o que será necessário produzir e quando.

Há a necessidade de previsões detalhadas por produto, no curto prazo, para dar suporte às decisões de programação da produção.

A implantação ou melhoria dos métodos de previsão existentes tem em vista a melhoria dos processos de decisão subsequentes na gestão da produção e *stocks*.

### 3.2 Gestão de *Stock*

Love (1979) apresenta a seguinte definição para *stock*: “*Stock* é qualquer quantidade de produtos ou materiais, sob controlo da empresa, num estado relativamente ocioso, esperando por seu uso ou venda” [7].

Os *stocks* são utilizados em diversas funções nomeadamente a função de antecipação, ou seja, há *stocks* cuja função é atender uma procura futura prevista, utilizando a capacidade de abastecimento atual. Ajudam a nivelar a produção em face de flutuações previstas de procura.

O uso de *stocks* está sempre associado ao uso mais eficiente dos recursos ou ao melhor atendimento do cliente, benefícios que têm impacto positivo no desempenho financeiro das organizações. Esses benefícios, contudo, não são gratuitos. *Stocks* implicam em custos que, mal administrados, podem superar os ganhos obtidos com sua existência.

Portanto, os *stocks* de produtos acabados devem ser balanceados, proporcionando um nível de atendimento ao cliente e custos de produção e *stocks* equilibrados.

### 3.3 Exemplo

Para ilustrar o problema, segue-se um exemplo que tem em conta apenas 20 perfis. A procura efetiva e a procura prevista ao longo dos meses estão discriminadas na seguinte

tabela. Note-se que neste exemplo foi usada uma procura prevista mensal constante ao longo dos meses.

Tabela 3.1: Exemplo 1: lista de perfis e respectivas procura efetiva e procura prevista mensal.

Perfil	Procura Efetiva (Kg)	Procura Prevista Mensal (Kg)
1	75	10
2	200	20
3	90	25
4	12	25
5	180	10
6	76	20
7	34	30
8	35	15
9	56	30
10	56	40
11	234	10
12	232	5
13	290	2
14	280	40
15	180	15
16	60	20
17	70	30
18	56	20
19	75	25
20	45	30

Suponha-se que se quer produzir 500 Kg do conjunto de perfis da Tabela 3.1.

Uma solução seria produzir unicamente o perfil 2. Produzir-se-iam 500 Kg deste perfil e, devido à procura efetiva de 200 Kg, ficar-se-iam com 300 Kg em *stock*. Como este tem uma procura prevista mensal de 20 Kg, previa-se que ficaria em *stock* durante 15 meses.

Uma outra solução seria produzir 300 Kg do perfil 13 e 200 Kg do perfil 5. Devido à procura efetiva e à procura prevista mensal dos mesmos, ficar-se-iam com 10 Kg em *stock* para o perfil 13 e com 20 Kg em *stock* para o perfil 5 e previa-se que ficariam com *stock* para 5 e 2 meses, respetivamente.

Note-se que na primeira solução, os custos de *stock* são mais elevados e os custos de *set-up*, custo fixo de produção que é incorrido para permitir a produção de um perfil mas é independente da quantidade produzida do mesmo, são mais baixos, comparativamente à segunda solução.

O objetivo do trabalho é, num conjunto de perfis, decidir quais os perfis a serem produzidos e em que quantidades de modo a minimizar os custos de produção, *stock* e *set-up*, considerando restrições inerentes às operações da empresa. Pretende-se assim, auxiliar a tomada de decisão por parte do departamento de planeamento da Extrusal no que diz respeito ao planeamento de produção dos perfis com baixa quantidade encomendada, maioritariamente com quantidades menores ao valor mínimo de produção. As decisões têm em conta a procura efetiva dos perfis e são auxiliadas pelas procuras previstas dos mesmos ao longo do tempo.



## Capítulo 4

# Planeamento de Produção e Dimensionamento de Lotes

Neste capítulo fundamenta-se teoricamente o presente trabalho expondo os conceitos relacionados com o planeamento de produção, em particular com a questão de dimensionamento de lotes. Para detalhes ver [1], [11] e [12].

As empresas industriais estão focadas em melhorar a sua competitividade no mercado global através de um aumento da *performance* operacional. O planeamento de produção é crucial para este fim e representa um dos principais desafios com que os gestores se confrontam atualmente. De entre um número elevado de alternativas, o processo de planeamento de produção auxilia a tomada de decisão ao estabelecer compromissos entre objetivos conflituosos na presença de restrições tecnológicas, comerciais e financeiras [1].

O dimensionamento de lotes representa uma classe importante deste tipo de problemas e envolve a quantidade produzida numa linha de produção sem a existência de paragens para trocar a produção de uma família de produtos para outra. O problema de dimensionamento de lotes consiste em determinar o que produzir e em que quantidades. Dimensionar os lotes incorretamente pode causar pedidos não atendidos e excesso de produto acabado em *stock*, por exemplo.

### 4.1 Sistemas de Planeamento de Produção

O planeamento de produção é a atividade pela qual os recursos são transformados de uma forma controlada a fim de acrescentar valor. As responsabilidades do departamento de produção incluem a execução de um plano de produção aceitável que utilize os materiais e as capacidades disponíveis nas instalações de produção. Quando ocorre uma determinada procura no sistema, o trabalho é programado e controlado para produzir os bens e serviços exigidos, sempre acompanhado por um controlo sobre o *stock*, a qualidade e os custos.

Segundo Plossl (1993), a execução de um planeamento de produção tem vários objetivos tais como: a determinação dos recursos (instalações, equipamento, materiais, pessoal, capital e os serviços de fornecedores externos) para garantir os planos empresariais; a elaboração de programações para as ações dos departamentos de *marketing*, de engenharia de projeto e de pesquisa e desenvolvimento; o fornecimento de dados resumidos à administração; e garantir que os recursos sejam aplicados de maneira adequada para alcançar os níveis desejados de

serviço ao cliente, de *stock*, de lucros e outros objetivos da empresa [8].

Segundo o mesmo autor, alguns dos passos específicos necessários para a execução de um plano de produção são:

- determinar o horizonte e os períodos de tempo a serem incluídos no plano;
- estabelecer um nível mínimo de *stock* desejado para os produtos a serem armazenados;
- determinar os totais de previsão de venda, relativos a cada família de produtos no decorrer do planeamento;
- determinar o *stock* total disponível e os registos de atraso de encomenda de clientes no início do período de planeamento;
- estabelecer o nível de *stock* desejado e os registos de atraso de encomenda de clientes no final do período de planeamento para famílias de produtos;
- calcular a produção total necessária para o período;
- planejar a produção total em relação ao horizonte completo.

#### 4.1.1 Planeamento Estratégico, Tático e Operacional

O planeamento de produção deve ser uma atividade estruturada e disciplinada em vários níveis hierárquicos.

Os problemas de produção, em geral, são classificados em três níveis hierarquicamente relacionados: estratégico, tático e operacional.

O estratégico contempla as decisões que serão tomadas em longo prazo geralmente envolvendo altos investimentos e planeando os recursos de forma agregada, por exemplo, determinar o número de máquinas e equipamentos de uma fábrica tendo em vista a procura daqui a alguns anos.

O tático trata de dois tipos de planeamento: o agregado e o de quantidades de produção. O primeiro determina níveis de mão-de-obra, subcontratação e horas extras num horizonte de planeamento de meses a um ano. O segundo determina quanto e quando produzir de cada produto num horizonte de semanas a seis meses.

Por fim, o nível operacional controla as atividades diárias de operação da fábrica, alimentadas pelas decisões vindas do nível tático.

#### 4.1.2 Tipologia de Produção: Classificação quanto ao Ambiente de Produção

Esta classificação é usada para caracterizar o posicionamento dos *stocks* no processo produtivo, além de informar sobre a complexidade do fluxo de materiais. De acordo com essa orientação, os sistemas de produção são classificados em:

- MTS - *Make to Stock*, em português, produzir para *stock*. O produto tem o seu fabrico iniciado mediante uma previsão de procura. É adequado para a gestão de produtos com procura bastante previsível. São produtos padronizados, com rápido atendimento ao cliente. Baseiam-se fortemente em previsões de procura e apresentam alto custo de *stock*.



- ATO - *Assemble to Order*, em português, montagem sob encomenda. São produtos cuja característica é a possibilidade de pré-fabricar subconjuntos ou módulos que serão posteriormente montados de acordo com o pedido do cliente.
- MTO - *Make to Order*, em português, produzir sob encomenda. A etapa de produção só se inicia após o recebimento formal do pedido do cliente. O prazo de atendimento é alto. Possui a vantagem de se trabalhar com baixos *stocks* de produtos acabados.
- ETO - *Engineer to Order*, em português, engenharia por encomenda. É aplicado a projetos dos quais o cliente participa desde o início, antes mesmo da colocação do pedido. São especificados, projetados e fabricados mediante pedido.

## 4.2 Problema de Dimensionamento de Lotes

O problema de dimensionamento de lotes consiste em determinar o que e quanto produzir, ajustando a capacidade produtiva às variações da procura. Pode ser modelado conforme as características do sistema de produção. Estas características que influenciam a complexidade de resolução do problema são as seguintes:

1. Produtos: são os itens finais que se deseja saber quanto, onde e quando devem ser produzidos. Normalmente são referenciados como famílias de produtos.
  - Quantidade: as atividades da fábrica podem-se organizar para produzir apenas um item final ou diversos itens. Os modelos com vários itens são mais complexos que os modelos com apenas um item.
  - Perecibilidade: os produtos envolvidos no problema podem possuir prazo de validade relativamente curto ou se deteriorarem com o passar do tempo. A formulação deve envolver restrições que estipulem um período máximo de armazenagem. Respeitar os prazos de validade são de extrema importância, tanto para a produção quanto para vendas.
2. Máquinas: com relação aos tipos de máquinas as seguintes características podem ser extraídas.
  - (a) Quantidade: problemas envolvendo apenas uma máquina ou várias máquinas.
  - (b) Característica: as máquinas podem ser idênticas ou distintas o que implica taxas de produção diferentes.
3. Procura: os dados sobre o quanto se pretende vender de determinado produto são dados de entrada do problema e podem ser categorizados segundo as seguintes características.
  - (a) Estática ou Dinâmica: quando os valores da procura não variam ao longo do horizonte de planeamento, esta é estática e quando os valores da procura mudam ao longo do horizonte de planeamento, esta é dinâmica.
  - (b) Determinística ou Probabilística: se a procura futura (estática ou dinâmica) é conhecida, seja por previsão de procura, o problema é determinístico, mas se os valores da procura futura são baseados em alguma probabilidade, então a procura é dita probabilística.

- (c) Dependente ou Independente: na procura independente, as necessidades de um item não dependem das decisões de dimensionamento de lote de outro item. Este tipo de procura é comum nos sistemas de produção de nível único. No dimensionamento de lotes multi-nível, a procura num nível depende da procura dos itens anteriores, por isso é chamada de procura dependente. Os problemas envolvendo procuras dinâmicas ou dependentes são mais complexos que procuras estacionárias ou independentes. O mesmo acontece com a complexidade de problemas com procura probabilística em relação aos de procura determinística.
4. Política de atendimento da procura: diz respeito à indisponibilidade de produtos para atender certa quantidade de procura. Quando é permitido que tal parcela da procura seja atendida posteriormente à data estipulada, diz-se que há um *backorder*, caso a procura não seja atendida há uma venda perdida. Para ambos os casos tais ocorrências são representadas por penalizações na função objetivo. A permissão dessa indisponibilidade de produtos afeta a complexidade da resolução do modelo.
  5. Horizonte de planeamento: corresponde ao período de planeamento no qual se pretende programar a produção, garantindo a melhor utilização dos recursos disponíveis para atender a procura considerada.
    - (a) Finito ou infinito: horizontes finitos estão associados a procura dinâmica, já horizontes infinitos estão associados a procura estacionária.
    - (b) Dividido em subperíodos: quando o horizonte é dividido em subperíodos, ele enquadra-se na categoria de *small bucket* e, neste caso, somente um produto pode ser processado, ou seja, no máximo um *set-up* é permitido. Se for permitido mais de um *set-up* por subperíodo, ou seja, a produção de mais de um tipo de produto, o horizonte pode ser classificado como *big bucket*.
  6. Capacidade: diz respeito a todo recurso, desde horas de mão-de-obra, equipamentos, máquinas e orçamento. Quando limitada, ou escassa, o problema é chamado de capacitado, quando tais recursos não apresentam nenhum tipo de limitação, o problema é classificado como não capacitado. Os problemas que envolvem capacidades limitadas são mais complexos que os problemas que não lidam com tal restrição.
  7. Níveis de produção: são chamados de nível único os sistemas de produção que envolvem a transformação direta da matéria-prima em produtos acabados, possuindo uma única etapa de processamento, sem haver etapas intermediárias de montagem de componentes ou produtos semi-acabados. Quando o sistema de produção é de múltiplos níveis, existem várias etapas de processamento, sendo produzidos itens intermediários e existindo relações de precedência entre estes itens. A resolução de problemas com múltiplos níveis de produção é mais complexa do que aquela com apenas um nível.
  8. Estrutura dos tempos e custos de *set-up*: se os tempos e custos de *set-up* dependem da sequência dos lotes ou de decisões anteriores tomadas, a estrutura é chamada complexa. Se os tempos e custos de *set-up* não dependem da sequência ou de decisões anteriormente tomadas, a estrutura é considerada simples.

As formulações dos modelos matemáticos para o problema de dimensionamento de lotes diferenciam-se pelas características mencionadas [12].

O problema em estudo é classificado como um problema de produção operacional/tático. Quanto à tipologia de produção, o sistema de produção segue uma política *Make to Stock*. Quanto às características do problema, são considerados vários produtos, é considerada uma linha de produção, as procuras futuras são baseadas em previsões (procura determinística), é permitido o não atendimento da procura ao não se produzir determinado produto sem que haja penalizações, envolve capacidades limitadas e é de nível único. A produção dos vários produtos é feita apenas no início do horizonte de planeamento sendo que os restantes períodos do horizonte usado auxiliarão o cálculo dos *stocks* dos vários produtos produzidos até se escoarem na totalidade.

O problema de dimensionamento de lotes envolve decisões por vezes contrárias. Pochet e Wolsey (2006) ressaltam que decidir produzir poucos lotes e em grandes quantidades traz custos de *set-up* menores mas afeta os custos relacionados à armazenagem destes produtos ao longo do tempo. Por outro lado, decidir produzir muitos lotes e em pequenas quantidades incorre em menores custos de *stock* mas faz o custo de *set-up* ser maior [11].



## Capítulo 5

# Modelo Proposto

Neste capítulo apresenta-se a modelação matemática em programação inteira mista do problema de otimização. A função objetivo procura minimizar os custos de produção, de *set-up* e de *stock*, tendo em conta as restrições inerentes à empresa. Inicialmente apresenta-se a modelação matemática mais geral do mesmo, particularizando, a seguir, para o problema proposto pela empresa. Por fim, apresenta-se um problema simples para a validação do modelo proposto.

### 5.1 Formulação Inicial

Define-se o índice  $i$ , com  $1 \leq i \leq m$ , para representar um elemento no conjunto de itens (perfis)  $\{I_1, \dots, I_m\}$  onde  $m$  é definido como o número de itens em estudo.

Define-se também o índice  $t$ , com  $0 \leq t \leq n$ , para representar um elemento no conjunto de períodos de tempo (meses)  $\{T_0, \dots, T_n\}$  onde  $n$  é definido como o número de períodos de tempo do horizonte de planeamento considerado.

Seja  $d_i^e \geq 0$  para  $i = 1, \dots, m$  a procura efetiva do perfil  $I_i$ , em Kg, e seja  $d_{it}^p \geq 0$  para  $i = 1, \dots, m$  e para  $t = 1, \dots, n$  a procura prevista do perfil  $I_i$  no mês  $T_t$ , também em Kg.

Seja  $T_{p_i}(Q_i)$  para  $i = 1, \dots, m$  o tempo de produção do perfil  $I_i$ , em minutos, em função da quantidade produzida do mesmo,  $Q_i$ , em Kg, e seja  $T_{q_i}$  para  $i = 1, \dots, m$  o tempo de *set-up*, em minutos, para produzir o perfil  $I_i$  mas é independente da quantidade produzida.

Seja  $Cap\_Mat$  a quantidade de matéria-prima, em Kg, disponível para a produção destes perfis.

Seja  $Cap\_Stock$  a disponibilidade do armazém, em Kg, disponível para o *stock* resultante da produção destes perfis.

Seja  $Cap\_Tempo$  o tempo disponível na linha de produção, em minutos, disponível para a produção destes perfis.

Seja  $Min\_Prod_i$  e  $Max\_Prod_i$  a quantidade mínima e máxima a produzir do perfil  $I_i$ , respetivamente, em Kg, caso haja produção desse perfil.

Considera-se um custo de produção do perfil  $I_i$ ,  $P_i(Q_i)$  em €, em função da quantidade produzida do mesmo,  $Q_i$ , e um custo de retenção de *stock*,  $H_i(Q_i)$  em € para o *stock* resultante da produção do perfil  $I_i$ .

Para formular o problema definem-se as seguintes variáveis de decisão:  $x_i$  para a quantidade a produzir do perfil  $I_i$ , em Kg, e  $y_i$  para a variável de *set-up* que toma o valor 1 se  $x_i > 0$  e o

valor 0 se  $x_i = 0$ .

A formulação em programação inteira mista, denominada *Formulação Base*, está descrita a seguir.

$$\min \quad \sum_{i=1}^m P_i(x_i) + \sum_{i=1}^m H_i(x_i), \quad (5.1)$$

$$s.a \quad \sum_{i=1}^m x_i \leq Cap\_Mat, \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^m (x_i - d_i^e y_i) \leq Cap\_Stock, \quad (5.3)$$

$$\sum_{i=1}^m T_{p_i}(x_i) + T_{q_i} \leq Cap\_Tempo, \quad (5.4)$$

$$x_i \geq \max \{Min\_Prod_i, d_i^e\} y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad (5.5)$$

$$x_i \leq Max\_Prod_i y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad (5.6)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad (5.7)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall 1 \leq i \leq m. \quad (5.8)$$

A função objetivo (5.1) pretende minimizar a soma do custo de produção e do custo de retenção de *stock*, ao longo do horizonte de planeamento, de todos os perfis.

O custo de produção é dado por  $\sum_{i=1}^m P_i(x_i)$ .

O custo de retenção de *stock* é dado por  $\sum_{i=1}^m H_i(x_i)$ .

A restrição (5.2) indica a quantidade máxima de matéria-prima que pode ser utilizada ao todo por estes perfis.

A restrição (5.3) indica a quantidade máxima de *stock* que pode ser produzida ao todo por estes perfis.

A restrição (5.4) indica a quantidade máxima de tempo que pode ser usada para a produção destes perfis.

As restrições (5.5) obrigam a que, caso haja produção de um determinado perfil, a quantidade a produzir não seja inferior nem à sua procura efetiva nem à sua quantidade mínima de produção.

As restrições (5.6) obrigam a que, caso haja produção de um determinado perfil, a quantidade a produzir não seja superior à sua quantidade máxima de produção.

As restrições (5.5) e (5.6) garantem que, caso haja produção de um determinado perfil, a respetiva variável de *set-up* toma o valor 1, caso contrário, toma o valor 0.

As restrições (5.7) garantem a não negatividade das variáveis que indicam a quantidade a produzir.

As restrições (5.8) indicam que as variáveis de *set-up* tomam o valor 0 ou 1.

Como facilmente se observa, a solução  $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$  e, conseqüentemente,  $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$  definem a solução ótima. Ao não se produzir nada, respeita-se as restrições todas da formulação anterior e o custo total é nulo.

No entanto não é esta a solução que se pretende, pois o objetivo é produzir para assim satisfazer as encomendas pendentes, tendo em conta não só os recursos disponíveis, nomeadamente, a capacidade de matéria-prima, a capacidade disponível em armazém e a capacidade temporal disponível, como também, os objetivos da empresa.

Um dos objetivos da empresa pode ser produzir o maior número de perfis diferentes para assim satisfazer, à partida, um maior número de clientes com encomendas pendentes.

A empresa pode pretender produzir o máximo de número de quilos possíveis de maneira a satisfazer o maior número de pedidos futuros.

Pode-se também querer produzir para *stock*, maximizando a utilização do espaço disponível em armazém disponível para os perfis em questão. Isto tem como principal vantagem a rapidez na entrega dos produtos nas encomendas futuras, mas os custos de *stocks* tendem a ser grandes e os clientes não têm como expressar diretamente as suas necessidades a respeito dos produtos.

Um outro objetivo poderá ser produzir num máximo de tempo possível de modo a manter a linha de produção sempre ocupada.

É necessário então alterar a *Formulação Base* de modo a produzir e assim satisfazer as necessidades pendentes, indo também de encontro aos objetivos da empresa.

Caso a empresa pretenda produzir o maior número de perfis diferentes, adota-se a seguinte formulação, *Formulação 1*, que é composta por duas fases.

A *1ª fase* consiste na resolução do seguinte programa inteiro misto auxiliar onde se pretende maximizar o número de perfis diferentes a serem produzidos, tendo em conta os recursos disponíveis.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m y_i, \\ \text{s.a} \quad & (5.2) - (5.8). \end{aligned} \tag{5.9}$$

A *2ª fase* consiste em resolver o programa seguinte que é igual ao programa base onde se adiciona a restrição  $\sum_{i=1}^m y_i = Max_1$ , onde  $Max_1$  é o valor ótimo obtido na *1ª fase*. Pretende-se, assim, produzir o maior número de perfis diferentes possíveis, tendo em conta os recursos disponíveis, com o objetivo de minimizar os custos associados.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m P_i(x_i) + \sum_{i=1}^m H_i(x_i), \\ \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^m y_i = Max_1, \\ & (5.2) - (5.8). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Caso a empresa pretenda produzir o maior número de quilos possível, adota-se a seguinte formulação, *Formulação 2*.

A *1ª fase* consiste na resolução do seguinte programa inteiro misto auxiliar onde se pretende maximizar o número de quilos a serem produzidos para estes perfis.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^m x_i, \\ \text{s.a} \quad & (5.2) - (5.8). \end{aligned} \tag{5.11}$$

A *2ª fase* consiste em resolver o programa seguinte que é igual ao programa base onde se adiciona a restrição  $\sum_{i=1}^m x_i = Max_2$ , onde  $Max_2$  é o valor ótimo obtido na *1ª fase*.

Pretende-se produzir a quantidade máxima possível, tendo em conta os recursos disponíveis, com o objetivo de minimizar os custos associados.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^m P_i(x_i) + \sum_{i=1}^m H_i(x_i), \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^m x_i = \text{Max}_2, \\
 & (5.2) - (5.8).
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Caso a empresa pretenda produzir aproveitando ao máximo a capacidade disponível em armazém para estes perfis, adota-se a seguinte formulação, *Formulação 3*.

A *1ª fase* consiste na resolução do seguinte programa inteiro misto auxiliar onde se pretende maximizar a quantidade de *stock* formada com a produção dos perfis.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{i=1}^m (x_i - d_i^e y_i), \\
 \text{s.a} \quad & (5.2) - (5.8).
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

A *2ª fase* consiste em resolver o programa seguinte que é igual ao programa base onde se adiciona a restrição  $\sum_{i=1}^m (x_i - d_i^e y_i) = \text{Max}_3$ , onde  $\text{Max}_3$  é o valor ótimo obtido na *1ª fase*. Pretende-se produzir esta quantidade de *stock*, tendo em conta os recursos disponíveis, com o objetivo de minimizar os custos associados.

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^m P_i(x_i) + \sum_{i=1}^m H_i(x_i), \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^m (x_i - d_i^e y_i) = \text{Max}_3, \\
 & (5.2) - (5.8).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Caso a empresa pretenda produzir aproveitando ao máximo a capacidade temporal disponível para a produção destes perfis, adota-se a seguinte formulação, *Formulação 4*.

A *1ª fase* consiste na resolução do seguinte programa inteiro misto auxiliar onde se pretende maximizar a quantidade de tempo de produção dos perfis.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{i=1}^m T_{p_i}(x_i) + \sum_{i=1}^m T_{q_i} y_i, \\
 \text{s.a} \quad & (5.2) - (5.8).
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

A *2ª fase* consiste em resolver o programa seguinte que é igual ao programa base onde se adiciona a restrição  $\sum_{i=1}^m T_{p_i}(x_i) + \sum_{i=1}^m T_{q_i} y_i = \text{Max}_4$ , onde  $\text{Max}_4$  é o valor ótimo obtido na *1ª fase*. Pretende-se produzir durante este determinado tempo, tendo em conta os recursos disponíveis, com o objetivo de minimizar os custos associados.



$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^m P_i(x_i) + \sum_{i=1}^m H_i(x_i), \\
\text{s.a} \quad & \sum_{i=1}^m T_{p_i}(x_i) + \sum_{i=1}^m T_{q_i}y_i = Max_4, \\
& (5.2) - (5.8).
\end{aligned} \tag{5.16}$$

## 5.2 Linearização

Querendo trabalhar-se com um problema de programação linear inteira mista, a função objetivo e as restrições têm que ser lineares.

### 5.2.1 Custo de Produção

Na seguinte figura, apresenta-se o gráfico do custo de produção do perfil  $I_i$ ,  $P_i(x_i)$ , que como foi dito depende da quantidade produzida  $x_i$ . Note-se que este dado foi fornecido pela empresa.

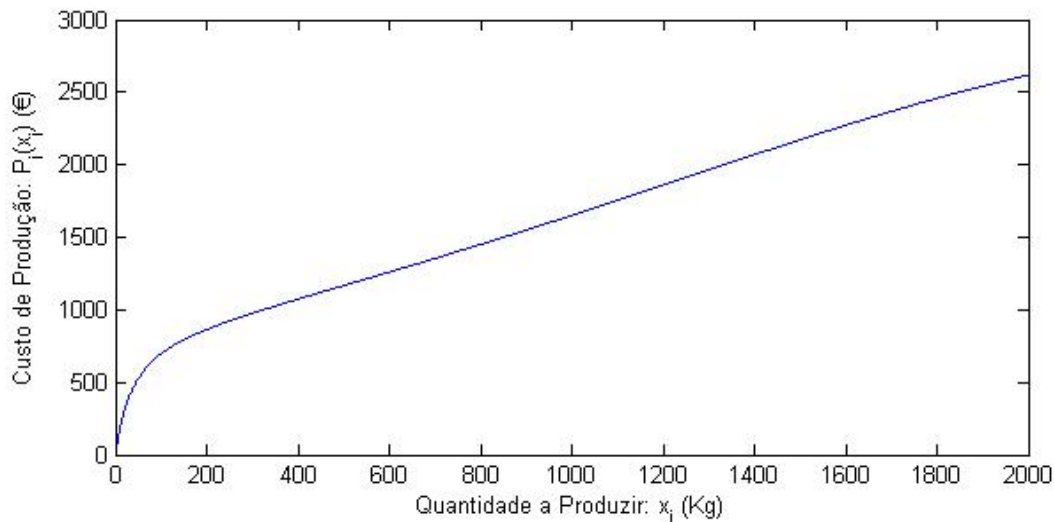


Figura 5.1: Representação gráfica do custo de produção, em função da quantidade produzida.

Visualizando o gráfico, observa-se que o custo de produção não é uma função linear. É necessário linearizar esta função.

Visto que o valor mínimo de produção e o valor máximo de produção do perfil  $I_i$  são 250 Kg e 2000 Kg, respetivamente, ignorou-se a parte do gráfico anterior a  $x_i = 250$  e a parte posterior a  $x_i = 2000$  e seleccionaram-se 37 pontos da forma  $(x_i, P_i(x_i))$  com  $x_i$  entre 250 e 2000 e igualmente espaçados. Estes pontos estão representados na figura seguinte com circunferências verdes. Apresentam-se também, a tracejado, o valor mínimo de produção e o valor máximo de produção, respetivamente,  $x_i = 250$  e  $x_i = 2000$ . Com recurso ao *Excel*,

aplicou-se o método de Regressão Linear Simples e determinou-se os coeficientes de regressão, bem como, o coeficiente de determinação.

$$y = 0.991003196460421x + 669.110096621476,$$

$$R^2 = 0,999493842841776.$$

Apresenta-se também na seguinte figura a reta de regressão linear.

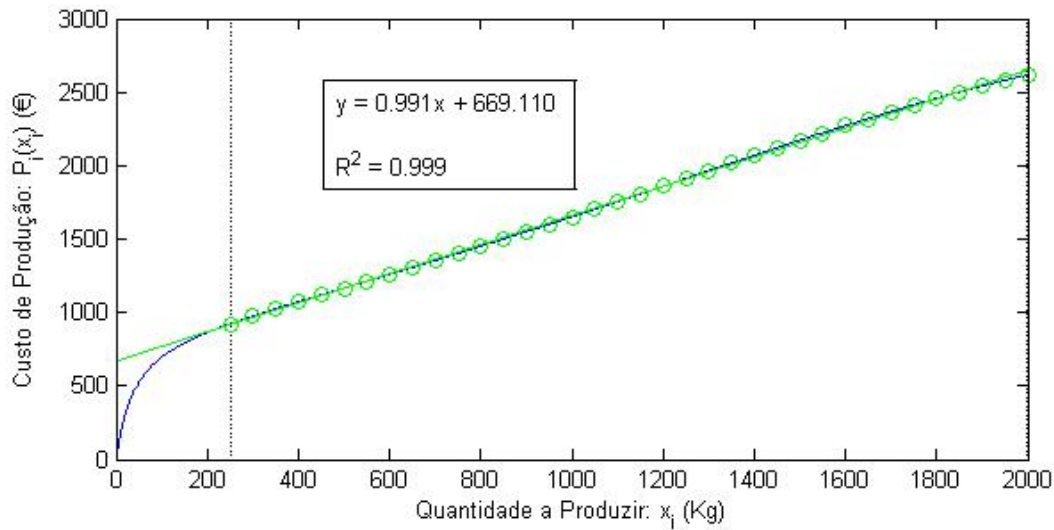


Figura 5.2: Representações gráficas do custo de produção em função da quantidade produzida (a azul) e da reta de regressão linear obtida (a verde).

O coeficiente de determinação,  $R^2$ , é utilizado como uma medida de qualidade de ajustamento. Como  $R^2 = 0.999 \dots \approx 1$ , conclui-se que o modelo linear é bastante adequado.

$$P_i(x_i) \approx a_i x_i + b_i, 250 \leq x_i \leq 2000,$$

$$P_i(x_i) \approx 0.991x_i + 669.110, 250 \leq x_i \leq 2000.$$

Seja  $p_i$  em €/Kg o custo por quilo de produção do perfil  $I_i$  e seja  $q_i$  em € o custo fixo de produção que é incorrido para permitir a produção do perfil  $I_i$  mas que é independente da quantidade produzida.

Então

$$P_i(x_i) \approx p_i x_i + q_i.$$

Logo

$$p_i = a_i = 0.991e/Kg,$$

$$q_i = b_i = 669.110e.$$

### 5.2.2 Custo de *Stock*

Seja  $h_{it}$  para  $i = 1, \dots, m$  e para  $t = 0, \dots, n$  o custo de *stock* do item  $I_i$  no mês  $T_t$  em €/Kg. Para calcular o custo de *stock* total associado à produção do perfil  $I_i$ ,  $H_i(x_i)$ , basta fazer o somatório da multiplicação da quantidade de *stock* ao longo do planejamento de produção pelo respetivo custo de *stock*,  $h_{it}$ .

*Stock* resultante ao fim do mês de produção:  $x_i - d_i^e$ ;

*Stock* previsto resultante ao fim do primeiro mês:  $x_i - d_i^e - d_{i1}^p$ ;

*Stock* previsto resultante ao fim do segundo mês:  $x_i - d_i^e - d_{i1}^p - d_{i2}^p$ ;

...

*Stock* previsto resultante ao fim do  $n_i$ -ésimo mês:  $x_i - d_i^e - d_{i1}^p - d_{i2}^p - \dots - d_{i,n_i}^p$ , onde  $n_i$  é o número de períodos previstos que o perfil  $I_i$  vai estar em *stock*.

Assim, o custo de *stock* total associado à produção do perfil  $I_i$  é dado por:

$$H_i(x_i) = (x_i - d_i^e) h_{i0} + \sum_{t=1}^{n_i} \left( x_i - d_i^e - \sum_{\tau=1}^t d_{i\tau}^p \right) h_{it}.$$

No caso particular em que se considera uma procura prevista mensal constante ao longo dos meses, ou seja,  $d_{it}^p = d_i^p$ ,  $t \in \{1, \dots, n_i\}$ , é previsto que o perfil permaneça em *stock* durante  $n_i = \lceil \frac{x_i - d_i^e}{d_i^p} \rceil$  meses e tem-se que:

$$\begin{aligned} H_i(x_i) &= (x_i - d_i^e) h_{i0} + \sum_{t=1}^{n_i} \left( x_i - d_i^e - \sum_{\tau=1}^t d_{i\tau}^p \right) h_{it} = \\ &= (x_i - d_i^e) h_{i0} + \sum_{t=1}^{\lceil \frac{x_i - d_i^e}{d_i^p} \rceil} (x_i - d_i^e - td_i^p) h_{it} = \\ &= \sum_{t=0}^{\lceil \frac{x_i - d_i^e}{d_i^p} \rceil} (x_i - d_i^e - td_i^p) h_{it}. \end{aligned}$$

Considerando, adicionalmente e tal como ditado pela empresa, um custo de *stock* para o perfil  $I_i$  dado por  $h_{it} = h_i (1 + J)^t$ ,  $t \in \left\{ 1, \dots, \lceil \frac{x_i - d_i^e}{d_i^p} \rceil \right\}$  tem-se:

$$H_i(x_i) = \sum_{t=0}^{\lceil \frac{x_i - d_i^e}{d_i^p} \rceil} (x_i - d_i^e - td_i^p) h_i (1 + J)^t.$$

Utilizando a Regra do Retângulo Composta, que pode ser vista no Apêndice A, pode-se aproximar a soma das  $\lceil \frac{x_i - d_i^e}{d_i^p} \rceil + 1$  funções anteriores pelo seguinte integral:

$$H_i(x_i) \approx \int_{t=0}^{\lceil \frac{x_i - d_i^e}{d_i^p} \rceil} (x_i - d_i^e - td_i^p) h_i (1 + J)^t dt.$$

Resolvendo o integral, tem-se que:

$$H_i(x_i) \approx \int_{t=0}^{\lceil \frac{x_i - d_i^e}{d_i^p} \rceil} (x_i - d_i^e - td_i^p) h_i (1 + J)^t dt =$$

$$= \frac{h_i \left( (1 + J)^{\lceil \frac{x_i - d_i^e}{d_i^p} \rceil} \left( \ln(1 + J) \left( d_i^p \lceil \frac{x_i - d_i^e}{d_i^p} \rceil - d_i^e + x_i \right) + d_i^p \right) + d_i^e \ln(1 + J) - x_i \ln(1 + J) - d_i^p \right)}{\ln^2(1 + J)}$$

Considere-se o perfil  $I_{14}$  do *Exemplo 1* com uma procura efetiva de 280 Kg e uma procura prevista mensal de 40 Kg. Na Figura 5.3, encontra-se o custo de *stock* associado a este perfil em função da quantidade produzida.

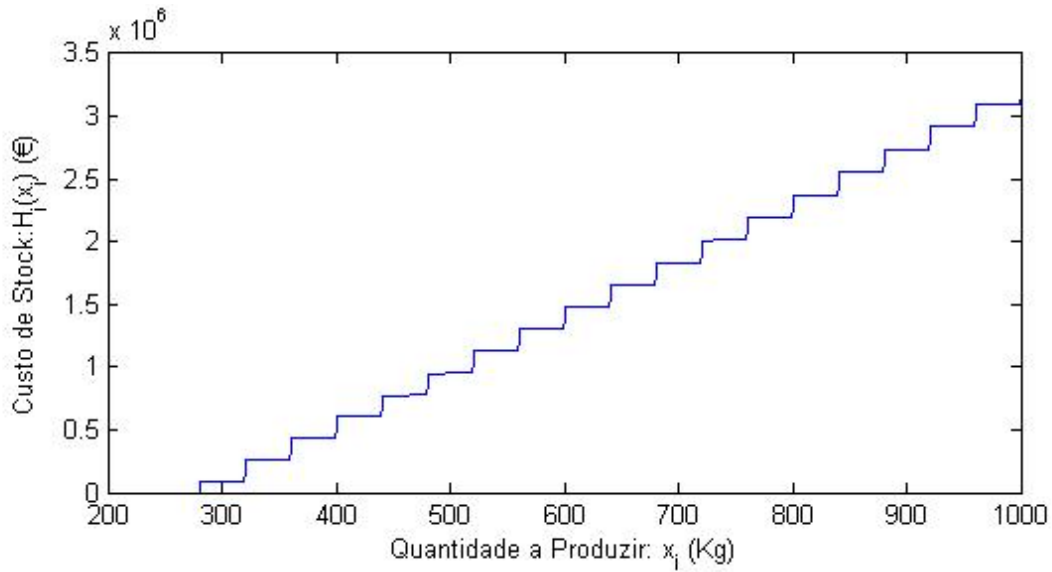


Figura 5.3: Representação gráfica do custo de *stock* em função da quantidade produzida.

A Figura 5.3 mostra que a representação gráfica do custo de *stock* não apresenta um padrão linear.

Uma solução seria linearizar as várias curvas de *stock* dos vários perfis.

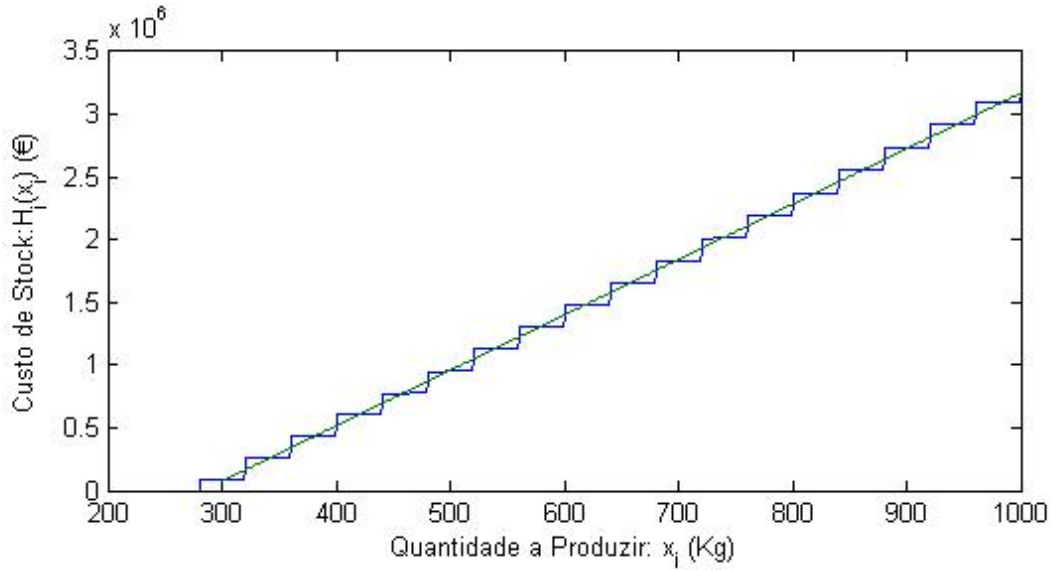


Figura 5.4: Representações gráficas do custo de *stock* em função da quantidade produzida (a azul) e da reta de regressão linear obtida (a verde).

Analisando a Figura 5.4, seria necessário aproximar a função com mais do que um troço linear para assim se aproximar melhor a curva de *stock*. E quanto mais troços lineares se usar para aproximar a curva, mais variáveis auxiliares se utilizariam. E note-se que foi usado um caso em que se usa uma procura prevista mensal constante. No caso em que se usa uma procura prevista mensal variável, torna-se difícil de calcular a expressão da função do custo de *stock*.

Assim, a alternativa usada foi introduzir as variáveis auxiliares  $s_{it}$  para  $i = 1, \dots, m$  e  $t = 0, \dots, n_i$  que indicam o valor de *stock* previsto em Kg do Perfil  $I_i$  no fim do período  $T_t$ . Em particular,  $s_{i0}$  indica o *stock* inicial resultante da produção do perfil  $I_i$ .

O custo de retenção de *stock* do perfil  $I_i$  resulta do produto do *stock* previsto ao longo do horizonte temporal  $s_{it}$  pelo custo de *stock*  $h_{it}$ .

O custo de *stock* total associado à produção do perfil  $I_i$  é dado agora por:

$$H_i(x_i) = \sum_{t=0}^{n_i} s_{it} h_{it}.$$

Então, na função objetivo, a parcela associada ao custo de *stock*,  $\sum_{i=1}^m H_i(x_i)$ , é substituída por  $\sum_{i=1}^m \sum_{t=0}^{n_i} s_{it} h_{it}$  e são adicionadas as seguintes restrições:

$$s_{i0} = x_i - d_i^e y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad (5.17)$$

$$s_{it} = s_{i,t-1} - d_{it}^p y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n_i, \quad (5.18)$$

$$s_{it} \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n_i. \quad (5.19)$$

As restrições (5.17) calculam as quantidades de *stock* dos vários perfis no momento de produção, que corresponde à diferença do que é produzido com a procura efetiva, caso haja produção e 0, caso não haja produção.

As restrições (5.18) calculam as quantidades de *stock* previstas dos vários perfis ao longo do horizonte temporal. Caso haja produção, o *stock* previsto no mês  $T_t$  é igual ao *stock* previsto no mês anterior,  $T_{t-1}$ , menos a procura prevista no mês  $T_t$ . Caso não haja produção, o *stock* é zero ao longo do horizonte de planeamento.

As restrições (5.19) garantem a não negatividade das variáveis de *stock*.

### 5.3 Formulação Final

Assim, após a linearização do custo de produção e do custo de *stock*, a *Formulação Base* fica da seguinte maneira.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{t=0}^{n_i} h_{it} s_{it} + \sum_{i=1}^m q_i y_i, \\ & (5.2) - (5.8), (5.17) - (5.19). \end{aligned} \quad (5.20)$$

O objetivo proposto pela empresa é produzir para *stock*, o que vai ao encontro da 3ª *Formulação* e como a capacidade de armazém é o recurso limitante, as duas fases resumem-se à seguinte formulação, pois o resultado da 1ª *Fase* da 3ª *Formulação* será sempre  $\sum_{i=1}^m (x_i - d_i^e y_i) = Max_3 = Cap\_Stock$ .

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{t=0}^{n_i} h_{it} s_{it} + \sum_{i=1}^m q_i y_i, \\ & (5.5) - (5.8), (5.14), (5.17) - (5.19). \end{aligned}$$

Em particular, o custo de produção, o custo de *stock*, o custo de *set-up*, o valor mínimo de produção e o valor máximo de produção não variam de perfil para perfil.

Assim, tem-se a seguinte formulação que foi utilizada ao longo do trabalho.

$$\min \quad \sum_{i=1}^m p_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{t=0}^{n_i} h_{it} s_{it} + \sum_{i=1}^m q_i y_i, \quad (5.21)$$

$$s.a \quad s_{i0} = x_i - d_i^e y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad (5.22)$$

$$s_{it} = s_{i,t-1} - d_{it}^p y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n_i, \quad (5.23)$$

$$\sum_{i=1}^m (x_i - d_i^e y_i) = Cap\_Stock, \quad (5.24)$$

$$x_i \geq \max \{Min\_Prod, d_i^e\} y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad (5.25)$$

$$x_i \leq Max\_Prody_i, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad (5.26)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad (5.27)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad (5.28)$$

$$s_{it} \geq 0, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n_i. \quad (5.29)$$

## 5.4 Exemplo

Para exemplificar o resultado da aplicação da formulação a um caso real, retoma-se o exemplo do final do capítulo anterior. Usou-se uma disponibilidade de armazém de 2000 Kg para o *stock* resultante da produção destes perfis. Com recurso ao *Software Xpress*, foi obtida a solução ótima.

Foi colocada na Tabela 5.1, para além da procura efetiva e da procura prevista mensal, a quantidade a produzir apresentada na solução ótima e foi calculado o *stock* inicial para cada perfil.

Tabela 5.1: Solução Ótima do Exemplo 1

Perfil	Procura Efetiva (Kg)	Procura Prevista Mensal (Kg)	Quantidade a produzir (Kg)	Stock inicial (Kg)
1	75	10	0	0
2	200	20	320	120
3	90	25	250	160
4	12	25	0	0
5	180	10	0	0
6	75	20	250	174
7	34	30	250	216
8	35	15	0	0
9	56	30	256	200
10	56	40	296	240
11	234	10	0	0
12	232	5	0	0
13	290	2	0	0
14	280	40	520	240
15	180	15	270	90
16	60	20	0	0
17	70	30	250	180
18	56	20	0	0
19	75	25	250	175
20	45	30	250	205
<b>Total</b>			3162	2000

De seguida, apresentam-se algumas observações deste exemplo. Dos 20 perfis foi aconselhada a produção de 11, num total de 3162 Kg, sendo que 2000 Kg, como foi ordenado, são armazenados em *stock*.

A maioria dos perfis apresenta procuras efetivas inferiores ao valor mínimo de produção, 250 Kg. Os únicos perfis cuja procura efetiva é superior ao valor mínimo de produção são os perfis 13 e 14. Apesar disto, apenas foi aconselhada a produção do segundo.

Existem seis perfis cujo valor da quantidade a produzir é o valor mínimo de produção. São eles os perfis 3, 6, 7, 17, 19 e 20.

Os perfis 9 e 18 têm a mesma procura efetiva, tendo o perfil 9 uma procura prevista mensal maior do que o perfil 18. Destes dois perfis, foi apenas aconselhada a produção do perfil 9. O perfil 10, tendo uma procura efetiva igual ao perfil 9 e uma procura prevista mensal superior,

é de esperar que também seja produzido numa quantidade igual ou superior.

Os perfis 18, 16, 6 e 2 têm a mesma procura prevista mensal e procuras efetivas crescentes. Não foi aconselhada a produção dos perfis 18 e 16. Foi aconselhada a produção dos outros dois, em maior quantidade o perfil 2.

Numa primeira vista, foram produzidos os perfis cujas procuras efetivas e/ou procuras previstas ao longo dos meses eram maiores, o que seria de esperar. No entanto, o perfil com maior procura efetiva, perfil 13, não foi produzido e o perfil 4 não foi produzido e o perfil 15 foi produzido, apesar de o perfil 15 ter uma procura prevista inferior ao perfil 4.



## Capítulo 6

# Heurísticas

Neste capítulo apresentam-se duas heurísticas para o problema proposto, que darão soluções para o mesmo, num tempo de execução útil.

Hoje em dia, as empresas, face a problemas propostos, procuram obter soluções de forma rápida e eficaz.

Por vezes, os algoritmos usados para a obtenção de soluções ótimas podem-se tornar lentos e exigir uma grande capacidade de memória. Em certos casos em que a solução ótima é encontrada, esta pode ser obtida em tempo bastante elevado, indo ao desencontro dos objetivos das empresas.

É aqui que entram as heurísticas, que são algoritmos criados com o objetivo de fornecer boas soluções para problemas num tempo de execução aceitável.

No contexto do problema, por vezes, não foi possível resolver a formulação proposta através de métodos exatos dentro de um intervalo de tempo estipulado pois quando se aumenta a dimensão do problema, nomeadamente aumentar o número de perfis em estudo, aumenta-se a natureza combinatória do mesmo.

Para isso desenvolveram-se duas heurísticas, que têm como objetivo obter boas soluções do problema original num tempo de execução aceitável. Nas duas secções seguintes são descritas as duas heurísticas desenvolvidas e, após isso, na terceira secção, é usado um exemplo para exemplificar a aplicação das mesmas.

### 6.1 *Heurística 1*

A primeira heurística consiste em selecionar um subconjunto específico do conjunto de perfis em estudo e resolver a formulação proposta considerando este subconjunto de perfis através de métodos exatos.

A escolha do subconjunto de perfis não é feita ao acaso. Como foi dito, no final do capítulo anterior, à primeira vista são produzidos os perfis que têm maior procura efetiva e/ou maior procura prevista.

Seja  $m$  o número de perfis do conjunto inicial, seja  $\bar{m}$ , com  $\bar{m} \leq m$ , o número de perfis pretendido do subconjunto considerado. Destes farão parte os  $\bar{m}_1$  perfis com maior procura ( $d_i^e$ ), os  $\bar{m}_2$  perfis com maior procura mais previsão para o primeiro mês ( $d_i^e + d_{i1}^p$ ), os  $\bar{m}_3$  perfis com maior procura mais previsão para o primeiro mês mais previsão para o segundo mês ( $d_i^e + \sum_{t=1}^2 d_{it}^p$ ), os  $\bar{m}_4$  perfis com maior procura mais previsão para o primeiro mês

mais previsão para o segundo mês mais previsão para o terceiro mês ( $d_i^e + \sum_{t=1}^3 d_{it}^p$ ) e os  $\bar{m}_5$  perfis com maior procura mais previsão para o primeiro mês mais previsão para o segundo mês mais previsão para o terceiro mês mais previsão para o quarto mês ( $d_i^e + \sum_{t=1}^4 d_{it}^p$ ), com  $\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 + \bar{m}_4 + \bar{m}_5 = \bar{m}$ .

Após a seleção destes  $\bar{m}$  perfis é obtida a solução resolvendo a formulação do problema através de métodos exatos apenas neste subconjunto de  $\bar{m}$  perfis.

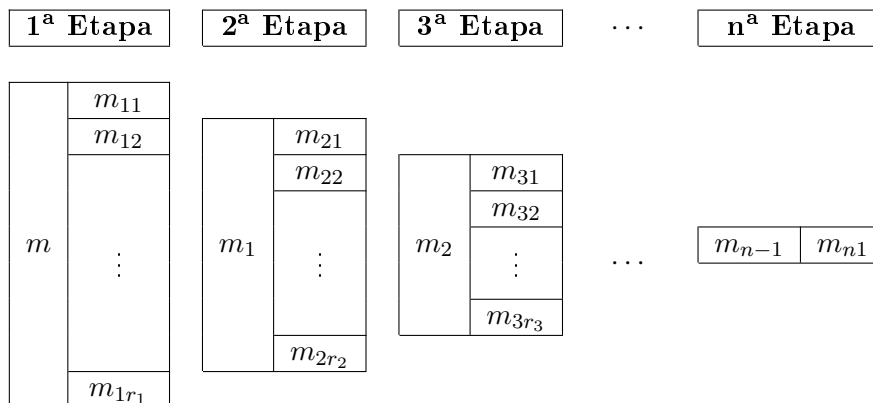
## 6.2 Heurística 2

A segunda heurística consiste em decompor o problema original em subproblemas menores e de mais fácil resolução que são resolvidos rapidamente e trazem soluções admissíveis ao problema original. A partir destas soluções, etapa a etapa, são obtidas melhores soluções. As saídas dos subproblemas anteriores são entradas para os subproblemas seguintes e assim sucessivamente até se obter um subproblema final.

Considere-se o problema original com  $m$  perfis. A primeira etapa consiste em dividir o conjunto de  $m$  perfis em subconjuntos de  $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1r_1}$  perfis com  $m_{11} + m_{12} + \dots + m_{1r_1} = m$  e resolver cada um dos subproblemas através de métodos exatos. Os perfis que são produzidos em cada um dos subproblemas passam para a etapa seguinte. Suponha-se que na primeira etapa foram produzidos ao todo  $m_1$  perfis. A segunda etapa consiste em dividir este conjunto de  $m_1$  perfis em subconjuntos de  $m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2r_2}$  perfis com  $m_{21} + m_{22} + \dots + m_{2r_2} = m_1$  e resolver cada um dos subproblemas. Suponha-se que na segunda etapa foram produzidos ao todo  $m_2$  perfis. Estes passam para a etapa seguinte. Aplica-se o mesmo procedimento, etapa a etapa, até se chegar à etapa final,  $n$ -ésima etapa, onde se obtém um subconjunto final de  $m_{n1}$  perfis cuja solução será o limite superior obtido com esta heurística.

Na Tabela 6.1 esquematiza-se a *Heurística 2*.

Tabela 6.1: Esquema de utilização da *Heurística 2*



Note-se que todos os subproblemas formados ao longo das etapas, resolvidos de forma exata, fornecem soluções admissíveis ao problema original. Mais, ao longo das etapas são obtidas melhores soluções, culminando na solução da última etapa.

### 6.3 Exemplo

Apresenta-se de seguida um exemplo pequeno para exemplificar a utilização da *Heurística 1* e da *Heurística 2*. O exemplo que se segue tem em conta 40 perfis. Os dados de cada perfil, a procura efetiva e a procura prevista mensal, encontram-se na seguinte tabela. Note-se que foi usada uma procura prevista mensal constante ao longo dos meses.

Tabela 6.2: Exemplo 2: lista de perfis e respetivas procura efetiva e procura prevista mensal.

Perfil	Proc. Efetiva	Proc. Prev. Mensal	Perfil	Proc. Efetiva	Proc. Prev. Mensal
1	172	62	21	35	43
2	189	7	22	251	14
3	52	14	23	209	60
4	247	38	24	55	37
5	61	31	25	81	19
6	22	57	26	163	18
7	211	54	27	27	32
8	209	22	28	75	64
9	193	58	29	248	18
10	72	11	30	175	7
11	21	52	31	91	55
12	58	16	32	214	22
13	149	31	33	260	65
14	198	25	34	241	26
15	124	13	35	58	9
16	169	39	36	35	19
17	179	39	37	19	34
18	121	33	38	238	49
19	220	36	39	141	61
20	252	54	40	124	30

#### 6.3.1 *Heurística 1*

Seja 40 o número de perfis do conjunto inicial e seja 20 o número de perfis do subconjunto pretendido.

Ordenaram-se os 40 perfis por ordem decrescente da Procura Efetiva (*A*).

Tabela 6.3: Primeiros quatro perfis com maior Procura Efetiva (*A*).

Perfil	Procura Efetiva	Procura Prevista Mensal	A	B	C	D	E
33	260	65	260	325	390	455	520
20	252	54	252	306	360	414	468
22	251	14	251	265	279	293	307
29	248	18	248	266	284	302	320

Selecionaram-se os 4 com maior Procura Efetiva: 33, 20, 22 e 29. De seguida, ordenaram-se

os restantes 36 perfis por ordem decrescente de Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês (*B*).

Tabela 6.4: Primeiros quatro perfis com maior Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês (*B*).

Perfil	Procura Efetiva	Procura Prevista Mensal	A	B	C	D	E
38	238	49	238	287	336	385	434
4	247	38	247	285	323	361	399
23	209	60	209	269	329	389	449
34	241	26	241	267	293	319	345

Dos 36, selecionaram-se os 4 com maior Procura Efetiva mais Previsão para o 1º Mês: 38, 4, 23 e 34. Ordenaram-se os restantes 32 perfis por ordem decrescente de Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês (*C*).

Tabela 6.5: Primeiros quatro perfis com maior Procura Efetiva mais Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês (*C*).

Perfil	Procura Efetiva	Procura Prevista Mensal	A	B	C	D	E
7	211	54	211	265	319	373	427
9	193	58	193	251	309	367	425
1	172	62	172	234	296	358	420
19	220	36	220	256	292	382	364

Dos 32 restantes perfis, escolheram-se os 4 com maior Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês: 7, 9, 1 e 19. Ordenaram-se os restantes 28 perfis por ordem decrescente de Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês mais Procura Prevista para o 3º Mês (*D*).

Tabela 6.6: Primeiros quatro perfis com maior Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês mais Procura Prevista para o 3º Mês (*D*).

Perfil	Procura Efetiva	Procura Prevista Mensal	A	B	C	D	E
39	141	61	141	202	263	324	385
17	179	39	179	218	257	296	335
16	169	39	169	208	247	286	325
32	214	22	214	236	258	280	302

Dos 28 restantes perfis, escolheram-se os 4 com maior Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês mais Procura Prevista para o 3º Mês: 39, 17, 16 e 32. Ordenaram-se os restantes 24 perfis por ordem decrescente de Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês mais Procura Prevista para o 3º Mês mais Procura Prevista para o 4º Mês (*E*).

Tabela 6.7: Primeiros quatro perfis com maior Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês mais Procura Prevista para o 3º Mês mais Procura Prevista para o 4º Mês (E).

Perfil	Procura Efetiva	Procura Prevista Mensal	A	B	C	D	E
28	75	64	75	139	203	267	331
31	91	55	91	146	201	256	311
14	198	25	198	223	248	273	291
8	209	22	209	231	253	275	297

Por fim, a escolha dos últimos 4 perfis dos 24 recaíram sobre aqueles que têm maior Procura Efetiva mais Procura Prevista para o 1º Mês mais Procura Prevista para o 2º Mês mais Procura Prevista para o 3º Mês mais Procura Prevista para o 4º Mês: 28, 31, 14 e 8.

Resolvendo a formulação com base neste subconjunto de 20 perfis através do *Software Xpress*, obteve-se a solução descrita na Tabela 6.8.

Tabela 6.8: Resultados obtidos pela aplicação da *Heurística 1* quando aplicada ao Exemplo 2.

Perfil	Quantidade a Produzir (Kg)
33	455
20	414
22	0
29	0
38	385
4	0
23	401
34	0
7	373
9	367
1	420
19	0
39	385
17	0
16	0
32	0
28	331
31	311
14	0
8	0
Custo (€)	26389.09

### 6.3.2 *Heurística 2*

Seja 40 o número de perfis do conjunto inicial.

Na 1ª Etapa, decompôs-se o conjunto de perfis em dois subconjuntos de 20 perfis cada. O primeiro subconjunto inclui os perfis do 1 ao 20 e o segundo subconjunto os perfis do 21 ao 40. Resolveu-se, exata e separadamente, cada um dos dois subconjuntos. Do primeiro subconjunto, foram produzidos 10 perfis e, do segundo subconjunto, foram produzidos 9 perfis. Estes 19 perfis passam à etapa seguinte. Na 2ª etapa é resolvida a formulação tendo em conta estes 19 perfis.

Apresenta-se na Tabela 6.9 os resultados obtidos no Exemplo 2 aplicando a *Heurística 2*, mostrando as várias etapas e os subproblemas formados.

Relembre-se que, ao longo das etapas, ao resolver os vários subproblemas, obtêm-se soluções para o problema original. Note-se que para além da solução obtida na última etapa, obtiveram-se duas soluções admissíveis na 1ª etapa da consequência da resolução dos dois subproblemas formados.

Por fim, na Tabela 6.10 são especificados os perfis produzidos e as respetivas quantidades a produzir na solução ótima obtida por métodos exatos e nas soluções obtidas pelas duas heurísticas. Além disso, são apresentados na penúltima linha da tabela o valor da solução ótima e os valores das soluções obtidas pelas heurísticas e na última linha a diferença relativa entre esses valores e o valor ótimo. Para o cálculo da diferença relativa foi usada a fórmula:

$$Gap := \frac{S_{\text{heurística}} - S_{\text{ótima}}}{S_{\text{ótima}}} \times 100, \quad (6.1)$$

onde  $S_{\text{heurística}}$  é o valor da solução obtida pela heurística e  $S_{\text{ótima}}$  é o valor da solução ótima.

Na solução ótima, foram produzidos 11 perfis com um custo total de 25865.38€.

Na solução obtida com a *Heurística 1*, foram produzidos 10 perfis sendo 9 deles também produzidos na solução ótima e o outro, perfil 38, não consta na lista de perfis produzidos na solução ótima. A solução obtida com esta heurística apresenta um custo total associado superior ao obtido na solução ótima com uma diferença relativa de cerca de 2%.

Através da *Heurística 2*, foi obtida uma solução onde foram produzidos os mesmos perfis que na solução ótima mas em quantidades diferentes. Apresentando o mesmo custo total associado que o custo total da solução ótima, obteve-se assim com a *Heurística 2* uma solução ótima alternativa ao problema.

Tabela 6.9: Resultados obtidos pela aplicação da *Heurística 2* quando aplicada ao Exemplo 2.

1ª Etapa	
Perfil	Quantidade a Produzir (Kg)
1	420
2	0
3	0
4	399
5	0
6	250
7	427
8	0
9	425
10	0
11	273
12	0
13	0
14	0
15	0
16	325
17	335
18	0
19	364
20	468
Custo (€)	28362.14

21	250
22	0
23	449
24	250
25	0
26	0
27	0
28	331
29	0
30	0
31	359
32	0
33	520
34	0
35	0
36	0
37	0
38	434
39	385
40	250
Custo (€)	28159.01

2ª Etapa	
Perfil	Quantidade a Produzir (Kg)

1	358
4	0
6	250
7	373
9	367
11	250
16	0
17	0
19	0
20	414
21	0
23	389
24	0
28	267
31	256
33	399
38	0
39	324
40	0
Custo (€)	25865.38

Tabela 6.10: Solução ótima do Exemplo 2 e soluções obtidas através da aplicação da *Heurística 1* e da *Heurística 2* ao mesmo exemplo, apresentando os respectivos custos e respectivos *GAP*'s

<b>Perfil</b>	<b>Solução Ótima</b>	<b>Solução <i>Heurística 1</i></b>	<b>Solução <i>Heurística 2</i></b>
1	302	420	358
6	250	-	250
7	373	373	373
9	367	367	367
11	250	-	250
20	414	414	414
23	389	401	389
28	267	331	267
31	256	311	256
33	455	455	399
38	-	385	-
39	324	385	324
<b>Custo Total (€)</b>	25865.38	26389.09	25865.38
<b>Gap (%)</b>	-	2.02	0



## Capítulo 7

# Resultados Obtidos e Discussão de Resultados

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos do problema aos quais foram aplicadas a resolução exata e as heurísticas desenvolvidas no capítulo anterior. Para além das soluções obtidas são apresentados as diferenças relativas e os tempos de execução computacionais necessários para a obtenção das mesmas. Para a obtenção das soluções utilizou-se o *software Xpress 7.6*. Para a obtenção de todos os resultados aqui apresentados foi usado um computador pessoal equipado com Processador Intel(R) Core(TM) i7 CPU M620 @ 2.67Ghz e 4 GB de memória RAM.

Para obtenção de resultados e posterior discussão foram construídos oito exemplos. Estes apresentam um número crescente de número de perfis em estudo: 20, 40, 60, 80, 100, 150, 200 e 300. Foi usada não só uma procura prevista mensal constante mas também uma procura prevista mensal variável para os três primeiros meses e constante para os restantes.

Os valores da procura efetiva e da procura prevista mensal necessários para o exemplo com 20 perfis foram escolhidos de maneira a tirar conclusões apresentadas no final do Capítulo 5. Os valores para os restantes sete exemplos foram gerados aleatoriamente com base nos dados obtidos na empresa. Para a procura efetiva foram gerados números inteiros aleatórios pertencentes ao intervalo  $[20, 270]$ . Foram gerados maioritariamente valores menores que a quantidade mínima de produção que é de 250 Kg. Para a procura prevista mensal foram gerados números inteiros aleatórios pertencentes ao intervalo  $[5, 65]$ . Foram gerados valores relativamente baixos, indo ao encontro do objetivo do problema. Os restantes dados, a capacidade mínima e máxima de produção e os vários custos, foram fornecidos pela empresa.

Para cada exemplo, foi usada uma procura prevista mensal constante e uma procura prevista mensal variável nos três primeiros meses e constante a partir do quarto mês.

Mais, para o primeiro caso foram usadas três capacidades disponíveis para o *stock* distintas, 1000, 2000 e 3000 Kg, e para o segundo caso foi usada uma capacidade disponível de 2000 Kg.

Primeiramente são apresentados os resultados para os oito exemplos, considerando uma procura efetiva e uma procura prevista mensal constante e as três capacidades disponíveis.

Com recurso ao *software Xpress* e usando a formulação final definida na Secção 4.3 tentou-se obter a solução exata para as três variantes dos oito exemplos. Como no dia-a-dia as

empresas pretendem obter uma solução para determinado problema em tempo útil, foi limitado o tempo de execução em 1 hora (3600 segundos).

Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 7.1. São apresentados, na primeira coluna, o número de perfis usado no exemplo e, na segunda coluna, as três capacidades disponíveis, em Kg, usadas para cada exemplo. Na terceira e na quarta coluna, são apresentados, respectivamente, o número de perfis produzidos e o número de quilos a produzir, em Kg, na solução ótima, caso esta seja encontrada no tempo útil, ou na melhor solução admissível encontrada, caso contrário. Na quinta e sexta coluna, são apresentados, respectivamente, os valores dos limites inferiores e superiores, em €, do valor ótimo. Nos casos em que em tempo útil foi encontrada a solução ótima, os limites inferiores e os limites superiores são iguais entre si e iguais ao valor ótimo. Na sétima coluna, é apresentada a diferença relativa entre os limites inferiores e os limites superiores, em %, denominada *Gap*. Para o cálculo da diferença relativa foi usada a fórmula:

$$Gap := \frac{L.S. - L.I.}{L.S.} \times 100, \quad (7.1)$$

onde *L.I.* e *L.S.* são os limites inferiores e superiores do valor ótimo. Conseqüentemente, quando em tempo útil, a solução ótima é encontrada, o valor do *Gap* é nulo pois o limite superior e o limite inferior encontrados da solução ótima coincidem. Por fim, na última coluna, são apresentados os tempos computacionais, em segundos. Quando a procura da solução ótima termina devido ao limite temporal estabelecido, aparece 3600\*.

Apresentam-se a negrito os exemplos, e respectivas variantes, onde foram encontradas as soluções ótimas em tempo útil, apresentando um limite inferior igual ao limite superior, um *Gap* nulo e um tempo computacional inferior a 3600 segundos.

Para cada exemplo, quanto maior a capacidade disponível para o *stock*, há um maior número de perfis produzidos e em maior quantidade.

Para uma capacidade de 1000 Kg foram encontradas soluções onde foram produzidos 5-6 perfis, para uma capacidade de 2000 Kg, foram encontradas soluções onde foram produzidos 10-11 perfis e para uma capacidade de 3000 Kg, foram encontradas soluções onde foram produzidos 13-17 perfis.

Os exemplos com 20 e 40 perfis foram os únicos onde foram encontradas as soluções ótimas, quaisquer que seja a capacidade disponível escolhida, no limite temporal de execução considerado. Foram encontradas as soluções ótimas em tempos praticamente instantâneos à exceção do exemplo com 40 perfis e uma capacidade disponível de 1000 Kg onde foi encontrada a solução ótima em 166 segundos.

Nos exemplos com 60 e 80 perfis, foi encontrada a solução ótima para as capacidades disponíveis de 2000 e 3000 Kg. No exemplo com 60 perfis, foi encontrada a solução ótima em 1-2 segundos e no exemplo com 80 perfis, foi encontrada a solução em tempo de execução relativamente maior, mas não ultrapassando os 31 segundos. No entanto para capacidade disponível de 1000 Kg, não foi encontrada a solução ótima em tempo útil. As soluções obtidas ao fim de 1 hora apresentam um *Gap* relativamente baixo.

Para os restantes exemplos, independentemente da capacidade disponível, não foi possível encontrar a solução ótima em tempo útil.

Para a mesma capacidade disponível, nos exemplos onde a solução ótima não foi encontrada, quanto maior o número de perfis considerado, a solução obtida em tempo útil apresenta uma maior diferença relativa entre os limites inferiores e superiores do valor ótimo. O exemplo com menor *Gap* é o exemplo com 60 perfis, considerando uma capacidade disponível de

Tabela 7.1: Resultados obtidos para os exemplos, usando três capacidades para o *stock*, usando uma procura prevista mensal constante.

N.º Perfis	C. D. (Kg)	N.º Perfis Prod.	Quant. a Prod. (Kg)	Resolução Exata		Gap (%)	T. C. (s)
				L. I. (€)	L. S. (€)		
20	1000	<b>5</b>	<b>1507</b>	<b>17154.53</b>	<b>17154.53</b>	<b>0</b>	<b>0.87</b>
	2000	<b>11</b>	<b>3162</b>	<b>37503.48</b>	<b>37503.48</b>	<b>0</b>	<b>1.42</b>
	3000	<b>16</b>	<b>4704</b>	<b>62126.20</b>	<b>62126.20</b>	<b>0</b>	<b>0.15</b>
40	1000	<b>5</b>	<b>1670</b>	<b>12564.18</b>	<b>12564.18</b>	<b>0</b>	<b>166.38</b>
	2000	<b>11</b>	<b>3647</b>	<b>25865.38</b>	<b>25865.38</b>	<b>0</b>	<b>0.71</b>
	3000	<b>13</b>	<b>4920</b>	<b>40583.78</b>	<b>40583.78</b>	<b>0</b>	<b>0.89</b>
60	1000	6	1648	11222.10	12264.96	8.50	3600*
	2000	<b>11</b>	<b>3436</b>	<b>24980.94</b>	<b>24980.94</b>	<b>0</b>	<b>1.80</b>
	3000	<b>17</b>	<b>5455</b>	<b>38348.08</b>	<b>38348.08</b>	<b>0</b>	<b>1.63</b>
80	1000	6	1768	10646.74	12472.18	14.63	3600*
	2000	<b>11</b>	<b>3795</b>	<b>25121.32</b>	<b>25121.32</b>	<b>0</b>	<b>30.54</b>
	3000	<b>17</b>	<b>5882</b>	<b>38410.81</b>	<b>38410.81</b>	<b>0</b>	<b>7.43</b>
100	1000	5	1415	10379.78	12438.68	16.55	3600*
	2000	11	3136	21225.08	25358.71	16.30	3600*
	3000	17	5066	32036.34	38609.28	17.02	3600*
150	1000	5	1248	9380.63	12054.56	22.18	3600*
	2000	10	3029	18702.25	24502.13	23.67	3600*
	3000	16	4820	28245.57	37247.57	24.17	3600*
200	1000	5	1307	6786.81	12034.83	43.61	3600*
	2000	11	2819	18024.14	24398.21	26.13	3600*
	3000	16	4479	26333.86	36821.34	28.48	3600*
300	1000	5	1312	3270.69	12018.61	72.79	3600*
	2000	11	2912	14367.70	24239.36	40.72	3600*
	3000	16	4300	25400.06	36524.00	30.46	3600*

1000 Kg e o exemplo com maior *Gap* é o exemplo com 300 perfis, considerando também uma capacidade disponível de 1000 Kg.

Seguidamente são apresentados os resultados para os oito exemplos, considerando uma procura prevista mensal variável para os três primeiros meses e constante para os restantes e uma capacidade disponível de 2000 Kg. Foi igualmente aplicado um limite temporal de execução de 1 hora.

Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 7.2, cuja estrutura é similar à Tabela 7.1. A diferença é que, para cada exemplo, foi usada apenas uma capacidade disponível: 2000 Kg.

Os exemplos com 20 e 40 perfis foram os únicos onde foram encontrados as soluções ótimas num limite de tempo de execução disponível e em tempos praticamente instantâneos, inferiores a 1 segundo.

Para os restantes exemplos, não foram obtidas as soluções ótimas em tempo útil. Nestes, e à excepção do exemplo com 80 perfis, ao fim de 1 hora de execução, quanto maior o número de

Tabela 7.2: Resultados obtidos para os exemplos, usando uma procura prevista mensal variável para os três primeiros meses e constante para os restantes.

N.º Perfis	C. D. (Kg)	N.º Perfis Prod.	Quant. a Prod. (Kg)	Resolução Exata		Gap (%)	T. C. (%)
				L. I. (€)	L. S. (€)		
20	2000	<b>11</b>	<b>2929</b>	<b>30712.61</b>	<b>30712.61</b>	<b>0</b>	<b>0.52</b>
40		<b>12</b>	<b>3782</b>	<b>27997.42</b>	<b>27997.42</b>	<b>0</b>	<b>0.81</b>
60		13	3835	24365.46	26824.72	9.17	3600*
80		13	3943	25633.00	26924.17	4.80	3600*
100		13	3794	22190.92	26428.05	16.03	3600*
150		13	3877	18880.83	26128.54	27.74	3600*
200		12	3372	18159.69	25955.59	30.04	3600*
300		12	3283	15429.01	26234.63	41.19	3600*

perfis usados, maior o *Gap* das soluções obtidas. Os exemplos com 80 e 300 perfis apresentam, respetivamente, o menor e o maior *Gap*.

Compara-se de seguida os resultados obtidos nos oito exemplos, considerando a capacidade disponível de 2000 Kg, tendo em conta uma procura prevista mensal constante ao longo dos meses (ver Tabela 7.1) e uma procura prevista mensal variável nos três primeiros meses e constante a partir do quarto (ver Tabela 7.2).

Para os exemplos com 20 e 40 perfis e considerando quer uma procura prevista mensal constante quer uma procura prevista mensal variável para os três primeiros meses e constante para os restantes, foram obtidas as soluções ótimas e em tempos igualmente instantâneos.

Para os exemplos com 60 e 80 perfis, e tendo em conta o limite de tempo de execução considerado, foram obtidas as soluções ótimas, unicamente, considerando uma procura prevista mensal constante. Para o caso em que se considera uma procura prevista mensal variável para os três primeiros meses e constante para os restantes, tal não acontece, em tempo útil. No entanto, os limites obtidos para as soluções apresentam um *Gap* pequeno.

Para os exemplos com 100 perfis ou mais, não foram encontradas as soluções ótimas, independentemente de se considerar ou não uma procura prevista mensal constante. Mas, para o mesmo exemplo, e no caso em que se considera uma procura prevista mensal constante, é encontrada uma solução cujos limites inferiores e superiores apresentam um *Gap* inferior.

Pela análise da Tabela 7.1 e da Tabela 7.2, de um modo geral, o aumento do número de perfis do problema e o considerar de uma procura prevista mensal variável são dois fatores que contribuem para o aumento da complexidade do problema.

Por fim, e de modo a testar a robustez das heurísticas, foram testadas para os exemplos anteriores, exceto para o primeiro exemplo onde se consideram apenas 20 perfis, as duas heurísticas desenvolvidas no Secção 5.2. Foi considerado uma procura prevista mensal constante e uma capacidade disponível para o *stock* de 2000 Kg.

Na *Heurística 1*, para os vários exemplos, foi considerado um subconjunto inicial de 20 perfis e na *Heurística 2*, para os vários exemplos, ao longo das etapas, foram consideradas divisões dos problemas em subconjuntos de 20 perfis.

A escolha deste valor recaí do facto de que, como se pode ver pela Tabela 7.1, quando se considera uma capacidade disponível de 2000 Kg são produzidos à volta de 10-11 perfis, então, é aceitável a escolha de subconjuntos de 20 perfis.

Na Tabela 7.3 são apresentados os resultados obtidos. Na primeira coluna, estão os números de perfis dos sete exemplos considerados e, na segunda coluna, está apresentada a capacidade disponível utilizada, 2000 Kg.

Na terceira coluna, subdividida em duas colunas são apresentados os resultados obtidos na Tabela 7.1 referentes a estes exemplos e considerando uma capacidade disponível de 2000 Kg: os limites inferiores e os limites superiores, em €.

Na quarta coluna e na quinta coluna, subdivididas em três colunas cada, são apresentados os custos das soluções obtidas com a *Heurística 1* e a *Heurística 2*, em €, os respetivos *Gap*, em % e os respetivos tempos computacionais, em segundos. Note-se que as heurísticas irão fornecer limites superiores ao valor ótimo dos vários exemplos.

Tabela 7.3: Resultados obtidos para os exemplos, usando a *Heurística 1* e a *Heurística 2*.

N.º Perfis	C. D. (Kg)	Resolução Exata		Heurística 1			Heurística 2		
		L. I. (€)	L. S. (€)	Custo (€)	Gap (%)	T.C. (s)	Custo (€)	Gap (%)	T.C. (s)
40	2000	<b>25865.38</b>	<b>25865.38</b>	<b>26389.09</b>	<b>1.98</b>	<b>0.49</b>	<b>25865.38</b>	<b>0</b>	<b>2.48</b>
60		<b>24980.94</b>	<b>24980.94</b>	<b>26200.12</b>	<b>4.65</b>	<b>0.72</b>	<b>24980.94</b>	<b>0</b>	<b>3.64</b>
80		<b>25121.32</b>	<b>25121.32</b>	<b>25863.29</b>	<b>2.87</b>	<b>0.72</b>	<b>25121.32</b>	<b>0</b>	<b>5.69</b>
100		21225.08	25358.71	26657.72	20.38	1.42	25199.53	15.77	6.39
150		18702.25	24502.13	25900.62	27.78	2.98	24498.38	23.66	13.33
200		18024.14	24398.21	25885.29	30.37	5.35	24398.21	26.13	24.79
300		14367.70	24239.36	26285.10	45.34	4.49	24217.61	40.67	44.42

Analisa-se agora os resultados obtidos pelas duas heurísticas desenvolvidas, quando aplicadas aos sete exemplos.

Primeiramente, analisa-se os exemplos com 40, 60 e 80 perfis, cujas soluções ótimas foram possíveis de obter em tempo útil, através de resolução exata.

Usando a *Heurística 1*, para estes exemplos, foram obtidas soluções cujos custos são ligeiramente superiores relativamente às respetivas soluções ótimas, apresentando diferenças relativas que rondam entre os 2% e os 5%.

Com a *Heurística 2*, foram possíveis obter as soluções ótimas, apresentando um custo igual e, consequentemente, um *Gap* nulo.

Para os restantes exemplos, não foi possível encontrar, em tempo útil, as soluções ótimas.

Nestes, usando a *Heurística 1*, obtêm-se limites superiores cujos valores são superiores aos obtidos pela resolução exata ao fim de 1 hora. Os *Gap* obtidos são superiores relativamente aos *Gap* obtidos pela resolução exata ao fim de 1 hora.

Em contrapartida, usando a *Heurística 2*, aconteceram dois cenários. Para os exemplos com 100, com 150 e com 300 perfis, foram obtidas soluções melhores, apresentando custos menores, e consequentemente, valores de *Gap* inferiores. Para o exemplo com 200 perfis, foi obtida uma solução cujo custo foi igual ao obtido através da resolução exata, ao fim de 1h.

Em todos os exemplos, as soluções obtidas pela *Heurística 2* foram melhores às obtidas pela *Heurística 1*, apresentando assim, um custo inferior.

Uma heurística é tanto melhor, quanto mais próxima a solução dada por ela está da solução ótima do mesmo problema.

Assim, relativamente aos exemplos com 40, 60 e 80 perfis, onde se conhece o valor da solução ótima, é possível dizer que a *Heurística 2* é eficaz. A *Heurística 1*, apesar de se ter revelado menos eficaz, traz boas soluções, pois os seus valores apresentam diferenças relativas baixas, comparativamente com os valores ótimos.

Quando não é possível obter a solução ótima do problema, torna-se difícil de avaliar o quão boas são as soluções dadas pelas heurísticas. É o que acontece nos restantes exemplos.

Aparentemente, as soluções obtidas pelas duas heurísticas são relativamente boas e a *Heurística 2* é mais eficaz do que a *Heurística 1*.

Estes resultados eram os esperados pois a *Heurística 1* tem um processo subjacente mais simples, onde se obtém uma solução admissível a partir de um subconjunto do conjunto total de perfis, enquanto que a *Heurística 2* tem um processo subjacente mais elaborado, onde todos os perfis fazem parte do processo de obtenção da solução.

No entanto, e pelas mesmas razões, a obtenção da solução pela primeira heurística é mais rápida do que pela segunda, como se pode verificar pelos tempos computacionais apresentados nesta última tabela.

## Capítulo 8

# Otimização Robusta

Neste capítulo é feita uma introdução à otimização sob incerteza com foco na otimização robusta. É apresentado um modelo de otimização robusta para o problema em estudo e é apresentado um exemplo.

A incerteza é uma característica intrínseca dos problemas reais surgindo de múltiplas origens e possuindo natureza distinta. A incerteza resulta da cada vez maior complexidade das interações no interior dos sistemas sociais, económicos e técnicos, caracterizados por uma rápida evolução tecnológica, alterações nas estruturas de mercado e de novas relações sociais.

Para o tratamento da incerteza, é necessário construir primeiro os modelos que incorporem a incerteza e, depois, os métodos para determinar as soluções destes modelos.

Face a problemas cujos dados podem sofrer imprecisões, imperfeições ou estarem sujeito a alterações, é necessário obter soluções robustas, isto é, soluções com um certo grau de “imunidade” em relação à incerteza dos dados, a uma capacidade de adaptabilidade ou flexibilidade relativamente a um futuro incerto, garantindo um desempenho aceitável mesmo sob alterações das condições [2].

A otimização afetada por parâmetros incertos tem sido um foco da comunidade de programação matemática. De facto, tem sido desde há muito reconhecido que as soluções para problemas de otimização podem apresentar uma notável sensibilidade a perturbações nos parâmetros do problema, tornando assim, muitas vezes, uma solução obtida para um modelo determinístico inviável ou demasiado dispendiosa para concretizações distintas dos parâmetros do problema [4].

De entre as várias metodologias existentes para lidar com problemas de otimização sob incertezas, destacam-se ([2], [6]):

- Otimização estocástica: assume-se que a distribuição de probabilidade dos parâmetros incertos (estocásticos) é conhecida ou pode ser estimada;
- Otimização robusta: é uma abordagem mais recente para a otimização sob incerteza, em que não é necessário o conhecimento da distribuição de probabilidade dos parâmetros incertos mas sim, por exemplo, de um intervalo limitado onde os parâmetros se encontram.

Os primeiros passos em otimização robusta foram dados no trabalho pioneiro de Soyster (1973). A metodologia proposta por este autor é equivalente ao problema de otimização no

qual todos os parâmetros incertos são fixados nos respectivos valores de pior caso, então os valores ótimos robustos são, em geral, piores do que os valores do problema de otimização original [6].

Desde então, muitos trabalhos focaram formulações robustas alternativas e menos conservadoras, tal como Ben-Tal e Nemirovski (2000) e Bertsimas e Sim (2004), como se pode ver em [3] e [4].

Os autores argumentam que é improvável que todos os parâmetros incertos coincidam com os respectivos valores de pior caso. Assim propõem um número máximo de parâmetros incertos que pode assumir o respetivo valor de pior caso, que é representado pelo parâmetro  $\Gamma$ .

O parâmetro  $\Gamma$  é usado para controlar o grau de conservadorismo ou o nível de proteção da solução e ajustar a atitude do decisor em relação ao risco. Por exemplo,  $\Gamma = 0$  representa o caso em que a solução está desprotegida das incertezas que afetam o problema (caindo no caso determinístico), nesse caso, diz-se que o decisor é neutro em relação ao risco. Por outro lado,  $\Gamma$  relativamente elevado representa o pior caso que fornece proteção máxima à solução, mas é muito conservadora e reflete a atitude de um decisor adverso ao risco. Entre esses extremos, o decisor pode escolher o valor de  $\Gamma$  mais adequado às suas preferências [6].

No problema em estudo, é pertinente o uso de otimização sob incerteza, nomeadamente otimização robusta, pois existem parâmetros incertos: as procuras previstas mensais, que são obtidas por métodos de previsão. Foi usada, até então, uma abordagem determinística. No entanto, se as previsões previstas mensais consideradas não se concretizarem a solução obtida pode acarretar custos de *stock* muito elevados. Considere-se agora uma abordagem robusta para o mesmo.

Considerem-se os seguintes intervalos para as procuras previstas dos vários perfis ao longo dos meses do horizonte de planeamento considerado:  $d_{it}^p \in [\bar{d}_{it}^p - \hat{d}_{it}^p, \bar{d}_{it}^p]$ , onde  $\bar{d}_{it}^p$  são as procuras previstas consideradas até então e  $\hat{d}_{it}^p$  os desvios que as mesmas podem ter.

Como no pior dos casos as procuras para os próximos meses são inferiores às procuras previstas, consideraram-se apenas os desvios negativos (mais desfavoráveis) nos intervalos de incerteza.

Seja  $U^\Gamma = \left\{ d_{i\tau}^p : d_{i\tau}^p = \bar{d}_{i\tau}^p - \delta_{i\tau} \hat{d}_{i\tau}^p, \delta_{i\tau} \in [0, 1], \sum_{\tau=1}^t \delta_{i\tau} \leq \Gamma \right\}$  o conjunto de incerteza para as procuras previstas do problema considerado, onde  $\Gamma$  representa o número máximo de dimensões que os parâmetros podem assumir, isto é, limita para cada perfil o número de períodos em que a procura pode estar abaixo do previsto. O modelo robusto pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^m px_i + \sum_{i=1}^m \sum_{t=0}^n h_t s_{it} + \sum_{i=1}^m qy_i, \\
s.t. \quad & (5.22), (5.24) - (5.29), \\
& s_{it} \geq s_{i,t-1} - d_{it}^p y_i, d_{it}^p \in U^\Gamma, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n. \quad (8.1)
\end{aligned}$$

O *stock* previsto do perfil  $i$  no mês  $t$  pode ser visto de duas maneiras. De forma recursiva: o *stock* previsto do mesmo no mês  $t$  é igual ao *stock* previsto no mês anterior,  $t - 1$ , menos a procura prevista no mês  $t$ . De forma iterativa: o *stock* previsto do mesmo no período  $t$  é igual ao *stock* inicial, menos o somatório das procuras previstas do mês 1 até ao mês  $t$ .

Pode-se então reescrever a restrição (8.1) como:



$$s_{it} \geq x_i - d_i^e y_i - \sum_{\tau=1}^t d_{i\tau}^p y_i, d_{i\tau}^p \in U^\Gamma, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n.$$

É apenas nestas restrições da formulação que se encontram os parâmetros incertos:  $d_{it}^p$ . No pior caso, tem-se que:

$$s_{it} \geq x_i - d_i^e y_i - \min_{d_{i\tau}^p \in U^\Gamma} \left\{ \sum_{\tau=1}^t d_{i\tau}^p y_i \right\}, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n.$$

O problema de otimização que ocorre no segundo membro pode ser reescrito de forma explícita, dando origem à seguinte desigualdade.

$$s_{it} \geq x_i - d_i^e y_i - \min \left\{ \sum_{\tau=1}^t d_{i\tau}^p y_i \right\}, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n,$$

$$\text{s.t. } d_{i\tau}^p = \bar{d}_{i\tau}^p - \delta_{i\tau} \hat{d}_{i\tau}^p,$$

$$\sum_{\tau=1}^t \delta_{i\tau} \leq \Gamma, \tag{8.2}$$

$$0 \leq \delta_{i\tau} \leq 1, \quad \forall 1 \leq \tau \leq t. \tag{8.3}$$

Esta desigualdade pode ser ainda reescrita da seguinte maneira:

$$s_{it} \geq x_i - d_i^e y_i - \sum_{\tau=1}^t \bar{d}_{i\tau}^p y_i + \max \left\{ \sum_{\tau=1}^t \delta_{i\tau} \hat{d}_{i\tau}^p y_i \right\}, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n,$$

$$\text{s.t. } (8.2) - (8.3).$$

Considere-se a formulação dual deste problema, com a introdução das variáveis  $z_{it}$  e  $u_{it}^\tau$  para o conjunto de restrições (8.2) e (8.3), respetivamente.

$$s_{it} \geq x_i - d_i^e y_i - \sum_{\tau=1}^t \bar{d}_{i\tau}^p y_i + \min \left\{ \Gamma z_{it} + \sum_{\tau=1}^t u_{it}^\tau \right\}, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n,$$

$$\text{s.t. } z_{it} + u_{it}^\tau \geq \hat{d}_{i\tau}^p y_i,$$

$$z_{it} \geq 0,$$

$$u_{it}^\tau \geq 0, \quad \forall 1 \leq \tau \leq t.$$

Assim a otimização robusta do problema inicial pode ficar simplesmente do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^m px_i + \sum_{i=1}^m \sum_{t=0}^n h_t s_{it} + \sum_{i=1}^m qy_i, \\
s.t. \quad & (5.22), (5.24) - (5.29), \\
& s_{it} \geq x_i - d_i^e y_i - \sum_{\tau=1}^t \bar{d}_{i\tau}^p y_i + \Gamma z_{it} + \sum_{\tau=1}^t u_{it}^\tau, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 0 \leq t \leq n, \\
& z_{it} + u_{it}^\tau \geq \hat{d}_{i\tau}^p y_i, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq t \leq n, \forall 1 \leq \tau \leq t, \\
& z_{it} \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq t \leq n, \\
& u_{it}^\tau \geq 0, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq t \leq n, \forall 1 \leq \tau \leq t.
\end{aligned}$$

Considere-se o exemplo com 20 perfis e com capacidade de *stock* de 2000 Kg e o conjunto de incertezas para a procura prevista definido anteriormente.

Apresenta-se na Figura 8.1 o gráfico do custo total da solução ótima em função do valor do parâmetro ajustável  $\Gamma$ .

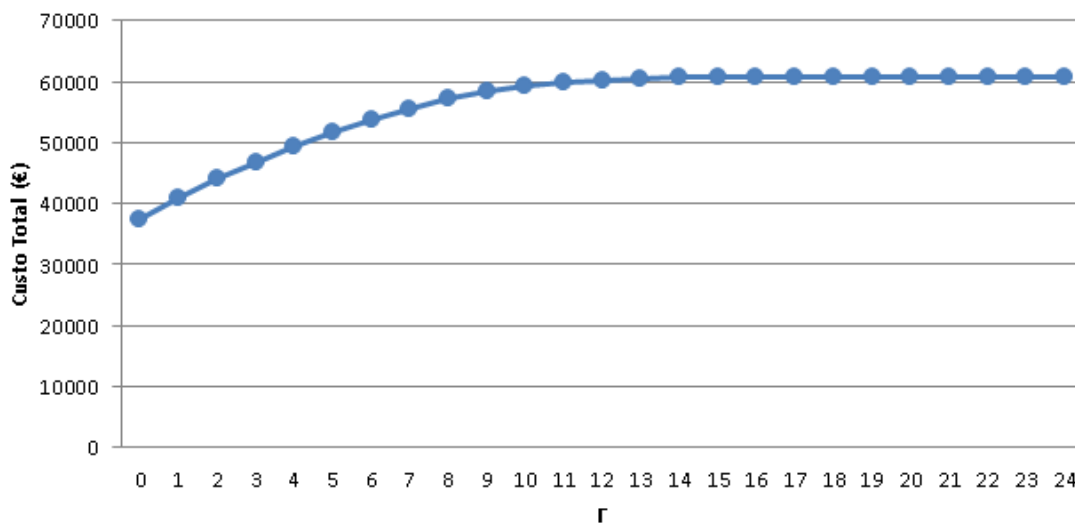


Figura 8.1: Representação gráfica do custo total da solução ótima em função do parâmetro  $\Gamma$ .

À medida que se aumenta o valor de  $\Gamma$ , maior são as “dimensões” que o pior caso assume e, portanto, maior é o valor da solução ótima.

O melhor caso corresponde a  $\Gamma = 0$ , portanto quando  $d_{it}^p = \bar{d}_{it}^p$ , ou seja,  $\delta_{it} = 0, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq t \leq n$ : Custo = 37503.48 €.

O pior caso é quando  $d_{it}^p = \bar{d}_{it}^p - \hat{d}_{it}^p$ , ou seja,  $\delta_{it} = 1, \forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq t \leq n$ : Custo = 59847.86 €. O pior caso é sempre coberto para  $\Gamma \geq 17$ .

Apresenta-se na Tabela 8.1 o número de perfis produzidos, a quantidade a produzir e os custo de produção, de *stock* e de *set-up* para as soluções ótimas obtidas, para o mesmo exemplo, para alguns valores de  $\Gamma$ .

Tabela 8.1: Soluções ótimas do mesmo exemplo para vários valores do parâmetro  $\Gamma$ , apresentando o número de perfis produzidos, a quantidade a produzir e os vários custos

$\Gamma$	N.º Perfis Produzidos	Quantidade a Produzir (Kg)	Custo Produção (€)	Custo <i>Stock</i> (€)	Custo <i>Set-Up</i> (€)	Custo Total (€)
0	11	3162	3133.55	27009.72	7360.21	37503.48
1	11	3098	3070.13	30436.19	7360.21	40866.53
3	11	3098	3070.13	36432.54	7360.21	46862.88
5	11	3098	3070.33	41341.27	7360.21	51771.61
9	12	3222	3193.01	47072.81	8029.32	58295.14
11	12	3332	3302.02	48508.16	8029.32	59839.50
13	13	3576	3543.83	48297.20	8698.43	60539.46
17	13	3576	3543.83	48492.08	8698.43	60734.34

Como já foi visto pela análise do gráfico, quanto maior o valor do parâmetro  $\Gamma$  maior o custo total da solução ótima. À medida que se aumentou o valor do parâmetro  $\Gamma$ , maior o número de perfis produzidos na respetiva solução ótima e, conseqüentemente, maior o custo de *set-up*. Isto acontece pois, quando se aumenta o valor do parâmetro  $\Gamma$ , as procuras previstas assumem valores mais pequenos, o que implica um aumento do custo de *stock*. Por isso, para contrabalançar o aumento abrupto do custo de *stock*, a solução passará por aumentar o número de perfis produzidos para que, embora se aumente o custo de *set-up*, o custo de *stock* seja menor.



## Capítulo 9

# Contributos para a Empresa

Neste capítulo apresenta-se o contributo desenvolvido para a empresa. Utiliza-se o *SolverStudio*, um ambiente para otimização integrado no *Excel*. Apresentam-se também alguns exemplos.

Como contributo para a empresa foi desenvolvido o modelo em estudo no *SolverStudio* que é um suplemento para as versões do *Excel* 2007 e posteriores que permite construir e resolver modelos de otimização em *Excel*.

O *SolverStudio* combina o poder de linguagens de modelação - incluindo *AMPL*, *GAMS*, *PuLP* e *GMPL* - com a familiaridade e facilidade de uso do *Excel*.

O *SolverStudio* permite criar e editar o modelo de otimização sem sair do *Excel* e guardar o modelo no ficheiro. Também pode-se facilmente ligar informação nas folhas de cálculo a conjuntos, parâmetros, constantes e variáveis usados no modelo. O *SolverStudio* consegue correr o modelo para resolver o problema e depois colocar de volta a resposta na folha de cálculo.

A linguagem utilizada foi a *GMPL* (*GNU MathProg Language*), que é uma linguagem *open source* e está incluída no *SolverStudio*.

Apresenta-se no Apêndice B na Figura B.1 um *screenshot* de um dos ficheiros *Excel* desenvolvidos para a empresa.

As células, cujas bordas estão a verde, são as células associadas ao *input* do modelo, onde estão os parâmetros e os dados de entrada a serem introduzidos ou modificados pelo utilizador.

Os parâmetros associados ao modelo usado são o custo de produção (Célula B5) e o custo de *set-up* (Célula B6), o custo de *stock* (Célula B8) e o respetivo juro associado (Célula B9), a capacidade disponível de *stock* (Célula B10) e o valor mínimo e máximo de produção (Células B11 e B12), respetivamente.

Como dados de entrada tem-se os 20 perfis (Células A16:A35) e as respetivas procuras efetivas (Células B16:B35) e procuras previstas mensais (Células C16:C35).

A pedido da empresa, foi adicionada uma funcionalidade ao modelo proposto: obrigar a que um ou mais perfis sejam produzidos. Nas células D16:D35 apresentam-se uma coluna que permite ao utilizador colocar um 0 e 1. A este segmento de coluna está associada a restrição:  $y_i \geq Pr_i, \forall 1 \leq i \leq 20$ , sendo  $y_i$  a variável binária definida no modelo proposto e  $Pr_i$  um parâmetro que pode tomar o valor de 0 ou 1.

Se o utilizador colocar o valor 0 em  $Pr_i$ , como  $y_i \geq 0$ , então  $y_i$  pode tomar o valor de 0

ou 1, e respetivamente, o perfil não pode ou pode entrar na solução.

No entanto, se o utilizador colocar o valor 1 em  $Pr_i$ , como  $y_i \geq 1$ , então  $y_i = 1$ . Desta maneira obriga-se a que o perfil  $I_i$  entre na solução e seja produzido.

As células, cujas bordas estão a vermelho, são as células associadas ao output do modelo, nomeadamente, o valor das variáveis  $y_i$  (células F16:F35) e  $x_i$  (células G16:G35) da solução ótima.

Para exemplificar a utilização deste modelo através do *SolverStudio* do *Excel*, utilizou-se os dados de entrada correspondentes ao Exemplo 1 (ver Tabela 5.1), que se pode ver no final do Capítulo 5.

Apresenta-se no Apêndice B na Figura B.2 um *screenshot* do ficheiro *Excel* após o *software* encontrar a solução ótima.

Note-se que foi obtida uma solução ótima alternativa à solução ótima obtida através do *software Xpress* e indicada na Tabela 5.1.

O tempo de execução e a capacidade de memória usada necessários para a obtenção da solução ótima foi de 1442.7 segundos (cerca de 24 minutos) e 1248.7 Mb, respetivamente.

Note-se que aumentando o número de perfis, o *software* demora mais tempo e usa mais capacidade de memória para encontrar a solução ótima, podendo não encontrar a solução em tempo útil para a empresa ou não ter capacidade de memória suficiente para tal. Por isso, desenvolveu-se o programa com um conjunto de 20 perfis. Se o conjunto de perfis em estudo for superior a 20, pode-se fazer uso das heurísticas desenvolvidas no Capítulo 6 para assim se obter uma solução boa em tempo útil e não ultrapassando a capacidade de memória do computador.

Suponha-se agora que existe um cliente que tem encomendado os perfis  $I_{11}$  e  $I_{12}$  e por alguma razão, a empresa tem de satisfazer obrigatoriamente as necessidades do mesmo. Basta assim que o utilizador coloque um 1 nas células D11 e D12 para assim, como foi explicado, obrigar a que estes dois perfis sejam produzidos.

Apresenta-se no Apêndice B na Figura B.3 um *screenshot* do ficheiro *Excel* após o *software* encontrar a solução ótima, tendo em conta este requisito.

Note-se, como é óbvio, que o custo desta solução, é superior ao obtido anteriormente, sem considerar este requisito. Obteve-se a solução ótima em 86.3 segundos, pouco mais do que 1 minuto, e utilizou-se uma capacidade de 349.5 Mb.

Apresenta-se no Apêndice B na Figura B.4 um *screenshot* de um outro ficheiro *Excel* desenvolvido para a empresa.

Tem uma estrutura semelhante ao anterior diferindo no facto de ser possível, para cada perfil, ter uma procura prevista para o 1º, 2º e 3º mês variável e constante a partir do 4º.

Note-se que aqui e ao longo do trabalho foram usados dois tipos de procuras previstas: uma procura prevista mensal constante e uma procura prevista mensal variável no 1º, 2º e 3º mês e constante para os outros. No primeiro caso, as previsões advêm de modelos de previsão mais simples e, no 2º caso, as previsões advêm de modelos de previsão mais complexos que vão começando a ser implementados e usados na empresa.

## Capítulo 10

# Conclusão

Neste relatório de estágio estudou-se o problema proposto pela Extrusal, que consiste em decidir, de uma lista de perfis cujas quantidades encomendadas são maioritariamente inferiores à quantidade mínima de produção, quais produzir e em que quantidades, respeitando, obviamente, as restrições inerentes à empresa.

Após a descrição do problema, tratou-se da modelação matemática onde se formulou o problema proposto em programação inteira mista, segundo os objetivos e as restrições dadas pela empresa. Quando a dimensão do problema aumenta, torna-se difícil de resolver por métodos exatos e em tempo útil e, por isso, desenvolveram-se duas heurísticas que permitiram encontrar boas soluções para os problemas, ainda que por vezes sub-otimais.

Posteriormente, geraram-se dados relativos a casos práticos e resolveram-se, usando um *software* de otimização. Foi considerado um limite de tempo de execução de 1 hora. Para exemplos com um número relativamente pequeno de perfis, foram encontradas as soluções ótimas em tempo útil. Tal não aconteceu para exemplos com um número relativamente grande de perfis. De seguida aplicaram-se as duas heurísticas aos exemplos gerados, cujas soluções obtidas são relativamente boas, com uma vantagem para os resultados obtidos com a *Heurística 2*.

Ao modelo matemático desenvolvido estão associados parâmetros incertos, as procuras previstas. Podem-se incorporar e lidar estas incertezas através da programação robusta, por exemplo, que procura gerar soluções robustas imunes a erros de estimação dos dados de entrada ou eventuais variabilidades.

Por fim, foram propostos métodos de otimização que possam ser utilizados pela empresa. Como contributo, o modelo matemático estudado foi implementado numa linguagem *open source*, *GMPL*, disponível no *SolverStudio*, um ambiente integrado no *Excel* para otimização. O formato utilizado permite, facilmente, ligar os ficheiros ao sistema informático da empresa, contribuindo positivamente em relação à forma como se planeia e programa a produção dos perfis em estudo. Possibilita-se assim o tratamento do problema, fundamentado-o em valores e objetivos quantificáveis, conduzindo-o a índices de desempenho superiores aos da decisão empírica do responsável.

Planear significa antecipar decisões sobre as ações a serem tomadas para se obter um resultado futuro desejado. Isso envolve estabelecer de onde se parte, projetar as condições futuras fora do controlo e imaginar um conjunto coerente de ações que possam conduzir a esse futuro desejado.

As previsões constituem o ponto de partida do planeamento. Qualquer atividade de produ-

ção baseia-se em encomendas firmes e, a maior parte das vezes, sobretudo quando o horizonte de tempo é mais longo, em previsões de encomenda. Para a empresa, estas previsões têm por objetivo definir o que será necessário produzir e quando. Convém esclarecer que, num ambiente instável, como sucede hoje em dia, é difícil fazer previsões, mas é preferível prever mesmo com incerteza do que não o fazer.

Esta tomada de decisão está relacionada com acontecimentos futuros, pois são consideradas as procuras previstas dos perfis para os próximos meses. As decisões são tomadas antes dos acontecimentos futuros acontecerem. Posteriormente, é que se saberá se as procuras previstas dos perfis se concretizam e se realmente foi uma boa decisão.

Assim, para lidar com as incertezas inerentes aos dados do problema pode-se estimá-los melhor e usar o modelo determinístico desenvolvido no Capítulo 5 ou ter em conta a incerteza e usar a otimização robusta cujo modelo foi desenvolvido no Capítulo 8.

Como possíveis estudos futuros, e seguindo a linha de otimização do planeamento de produção, sugere-se a análise do dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção para todos os perfis, ou seja, decidir o tamanho dos lotes de produção dos diferentes perfis, o momento em que esses lotes têm de ser produzidos e em que ordem, de modo a auxiliar as tomadas de decisão referentes ao planeamento de produção, feitas no dia-a-dia.

Ao longo do estágio e da vida académica, revelou-se a necessidade de recorrer a técnicas matemáticas, quer para modelação do problema, quer para simulação da realidade, quer ainda para a otimização das decisões a implementar. Essas técnicas são bem conhecidas da comunidade científica, mas encontram-se frequentemente subestimadas, ou por explorar, pelos agentes que equacionam cada situação.



## Apêndice A

# Regra do Retângulo Composta

Seja  $f$  uma função integrável em  $[a, b]$ . Define-se a partição de  $[a, b]$  em  $N$  subintervalos de igual amplitude nos pontos  $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ , onde  $x_i = a + ih$  com  $h = \frac{b-a}{N}$ . Então

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

Aplicando a regra do retângulo a cada um dos  $N$  integrais,  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx hf(x_{i-1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Somando, obtém-se a regra do retângulo composta

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^N f(x_{i-1}).$$



## Apêndice B

### Ficheiros *Excel*

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

Perfil	Procura	Previsão	Produzir (0/1)	Produzir	Quantidade a produzir
I1	75	10	0	0	0
I2	200	20	0	0	0
I3	90	25	0	0	0
I4	12	25	0	0	0
I5	180	10	0	0	0
I6	75	20	0	0	0
I7	34	30	0	0	0
I8	35	15	0	0	0
I9	56	30	0	0	0
I10	56	40	0	0	0
I11	234	10	0	0	0
I12	232	5	0	0	0
I13	290	2	0	0	0
I14	280	40	0	0	0
I15	180	15	0	0	0
I16	60	20	0	0	0
I17	70	30	0	0	0
I18	56	20	0	0	0
I19	75	25	0	0	0
I20	45	20	0	0	0

The SolverStudio window shows the following GMP model code:

```
set PRODUTOS;  
  
param T >= 1;  
param Custo_Producao >= 0;  
param Custo_Set_Up >= 0;  
param Custo_Stock >= 0;  
param Juro >= 0;  
param Cap_Dispatch >= 0;
```

Figura B.1: *Screenshot* do ficheiro *Excel* com os dados de entrada do Exemplo 1 com procura prevista mensal constante.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

Perfil	Procura	Previsão	Produzir (0/1)	Produzir	Quantidade a produzir
I1	75	10	0	0	0
I2	200	20	0	1	300
I3	90	25	0	1	250
I4	12	25	0	1	250
I5	180	10	0	0	0
I6	75	20	0	1	250
I7	34	30	0	1	250
I8	35	15	0	0	0
I9	56	30	0	1	250
I10	56	40	0	1	288
I11	234	10	0	0	0
I12	232	5	0	0	0
I13	290	2	0	0	0
I14	280	40	0	1	520
I15	180	15	0	1	270
I16	60	20	0	0	0
I17	70	30	0	1	250
I18	56	20	0	0	0
I19	75	25	0	1	250
I20	45	20	0	0	0

The SolverStudio window displays the following GMPL code:

```

set PRODUTOS;

param T >= 1;
param Custo_Producao >= 0;
param Custo_Set_Up >= 0;
param Custo_Stock >= 0;
param Juro >= 0;
param Cap_Disb >= 0;

```

The Model Output window shows the following text:

```

tree is empty 0.0% (0; 257523)
INTEGER OPTIMAL SOLUTION FOUND
Time used: 1442.7 secs
Memory used: 1248.7 Mb (1309356813 bytes)
Model has been successfully processed

## GMPL run completed.
## Results loaded for data items: x*
## (*=data item values changed on sheet)
## Done

```

Figura B.2: Screenshot do ficheiro Excel com os dados de entrada do Exemplo 1 com procura prevista mensal constante e a respetiva solução ótima.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

Perfil	Procura	Previsão	Produzir (0/1)	Produzir	Quantidade a produzir
I1	75	10	0	0	0
I2	200	20	0	1	300
I3	90	25	0	1	250
I4	12	25	0	1	250
I5	180	10	0	0	0
I6	75	20	0	1	250
I7	34	30	0	1	250
I8	35	15	0	0	0
I9	56	30	0	1	250
I10	56	40	0	1	288
I11	234	10	1	1	294
I12	232	5	1	1	262
I13	290	2	0	0	0
I14	280	40	0	1	520
I15	180	15	0	0	0
I16	60	20	0	0	0
I17	70	30	0	1	250
I18	56	20	0	0	0
I19	75	25	0	1	250
I20	45	20	0	0	0

The SolverStudio window displays the following GMPL code:

```

set PRODUTOS;

param T >= 1;
param Custo_Producao >= 0;
param Custo_Set_Up >= 0;
param Custo_Stock >= 0;
param Juro >= 0;
param Cap_Disb >= 0;

```

The Model Output window shows the following results:

```

+694402: mip = 3.930755671e+004 >=
tree is empty 0.0% (0: 71491)
INTEGER OPTIMAL SOLUTION FOUND
Time used: 86.3 secs
Memory used: 349.5 Mb (366478221 bytes)
Model has been successfully processed

## GMPL run completed.
## Results loaded for data items: x*
## (*=data item values changed on sheet)
## Done

```

Figura B.3: Screenshot do ficheiro Excel com os dados de entrada do Exemplo 1 com procura prevista mensal constante, com restrição de um cliente e a respetiva solução ótima

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

Perfil	Procura	1º Mês	2º Mês	3º Mês	Outros	Produzir (0/1)	Produzir	Quantidade a produzir
I1	75	19	42	33	36	0	0	
I2	200	6	29	14	51	0	0	
I3	90	58	36	54	5	0	0	
I4	12	25	36	35	25	0	0	
I5	180	29	53	15	12	0	0	
I6	76	52	37	31	21	0	0	
I7	34	7	30	26	37	0	0	
I8	35	41	48	54	19	0	0	
I9	56	42	35	34	33	0	0	
I10	56	52	61	25	9	0	0	
I11	234	41	12	11	12	0	0	
I12	232	28	27	38	51	0	0	
I13	290	10	25	62	24	0	0	
I14	280	8	20	47	28	0	0	
I15	180	59	36	38	7	0	0	
I16	60	35	35	46	14	0	0	
I17	70	35	27	64	30	0	0	
I18	56	46	57	51	30	0	0	
I19	75	6	36	37	34	0	0	
I20	45	13	61	39	52	0	0	

The SolverStudio interface on the right shows the following GMPL code:

```

Custoset PRODUTOS;

param T >= 1;

param Custo_Producao >= 0;

param Custo_Set_Up >= 0;

param Custo_Stock >= 0;

param Juro >= 0;

param Cap_Dispatch >= 0;

```

Figura B.4: Screenshot do ficheiro Excel com os dados de entrada do Exemplo 1 com procura prevista mensal variável para os três primeiros meses e constante para os restantes.

# Bibliografia

- [1] de Almada-Lobo, B. (2007). *Lotsizing and Scheduling in the Glass Container Industry*. Tese de Doutoramento em Engenharia Industrial e Gestão. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. Porto.
- [2] Barrico, C. (2007). *Optimização Evolucionária Multi-Objectivo em Ambientes Incertos - Pesquisa de Soluções Robustas*. Tese de Doutoramento em Engenharia Electrotécnica e de Computadores. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra. Coimbra.
- [3] Ben-Tal, A., Ghaoui, L. e Nemirovski, A. (2009). *Robust Optimization*. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press.
- [4] Bertsimas, D., Brown, D. e Caramanis, C. (2011). *Theory and applications of Robust Optimization*. SIAM Review, Vol. 53, No. 3, pp. 464-501.
- [5] Courtois, A., Pillet, M. e Martin-Bonnefous, C. (2007). *Gestão da Produção*. 5ª Edição, Lidel.
- [6] Junior, D. (2011). *Programação estocástica e otimização robusta no planeamento da produção de empresas moveleiras*. Tese de Doutoramento em Ciências de Computação e Matemática Computacional. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. São Carlos.
- [7] Lustosa, L., Mesquita, M., Quelhas, O. e Oliveira, R. (2008). *Planejamento e Controle da Produção*. Elsevier.
- [8] Marques, M. (2013). *O problema do sequenciamento e dimensionamento de lotes no planeamento de produção*. Tese de Mestrado em Engenharia e Gestão Industrial. Universidade da Beira Interior. Covilhã.
- [9] Mason, A. (2013). *SolverStudio: A New Tool for Better Optimisation and Simulation Modelling in Excel*. INFORMS Transactions on Education, Vol. 14, No. 3, pp. 45-52.
- [10] de Miranda, J. (2007). *Optimização em sistemas de processos químicos: generalização de modelos com planeamento e sequenciamento*. Tese de Doutoramento em Engenharia Química. Instituto Superior Técnico. Lisboa.
- [11] Pochet, Y. Wolsey, L. (2006). *Production Planning by Mixed Integer Programming*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer New York.
- [12] Saboia, P. (2010). *Problema integrado de dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção em uma fábrica de produtos de higiene pessoal*. Trabalho de Formatura em Engenharia de Produção. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo.

- [13] *Anicolor: Extrusão de Alumínio*. Acedido em 22 de Agosto de 2015, em: <http://www.anicolor.pt/extrusao/?a=extrusao>.
- [14] *Extrusal*. Acedido em 8 de Julho de 2015, em: <http://www.extrusal.pt/>.
- [15] *Extrusão*. Acedido em 22 de Agosto de 2015, em: <http://www.ebah.com.br/content/-ABAAAAihQAE/>.
- [16] *Extrusão*. Acedido em 15 de Agosto de 2015, em: <http://www.infoescola.com/-engenharia/extrusao/>.
- [17] *Grupo Sosoares: Caixilharias e Vidros*. Acedido em 22 de Agosto de 2015, em: <http://www.grupososoares.pt/pt/extrusao/servico/1>.
- [18] *Sapa Group*. Acedido em 22 de Agosto de 2015, em: <http://www.sapagroup.com/pt/sapa-ii-perfis-sa/sapa/processos-productivos/extrusao/>.
- [19] *SolverStudio*. Acedido em 18 de Junho de 2015, em: <http://solverstudio.org/>.