

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE AUTOMAÇÃO E SISTEMAS**

Fabício Saggin

**MODELAGEM E CONTROLE PARA OPERAÇÃO DE  
INVERSORES MONOFÁSICOS EM PARALELO:  
UMA ABORDAGEM VIA FASORES DINÂMICOS E LMIS**

Florianópolis

2016



Fabrcio Saggin

**MODELAGEM E CONTROLE PARA OPERAÇÃO DE  
INVERSORES MONOFÁSICOS EM PARALELO:  
UMA ABORDAGEM VIA FASORES DINÂMICOS E LMIS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas para a obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas.

Orientador: Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Dr.

Coorientador: Prof. Marcelo Lobo Heldwein, Dr. sc. ETH

Florianópolis

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Saggin, Fabrício

Modelagem e Controle para Operação de Inversores Monofásicos em Paralelo : Uma Abordagem via Fasores Dinâmicos e LMIs / Fabrício Saggin ; orientador, Daniel Ferreira Coutinho ; coorientador, Marcelo Lobo Heldwein. - Florianópolis, SC, 2016.

120 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Inclui referências

1. Engenharia de Automação e Sistemas. 2. Paralelismo de inversores. 3. Droop control. 4. Fasores dinâmicos. 5. LMI. I. Coutinho, Daniel Ferreira. II. Heldwein, Marcelo Lobo. III. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas. IV. Título.

Fabrcio Saggin

**MODELAGEM E CONTROLE PARA OPERAÇÃO DE  
INVERSORES MONOFÁSICOS EM PARALELO: UMA  
ABORDAGEM VIA FASORES DINÂMICOS E LMIS**

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Automação e Sistemas.

Florianópolis, 16 de maio 2016.

---

Prof. Rômulo Silva de Oliveira, Dr.  
Coordenador

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Daniel Ferreira Coutinho, Dr.  
Orientador

---

Prof. Marcelo Lobo Heldwein, Dr. sc. ETH  
Coorientador

---

Prof. Márcio Silveira Ortmann, Dr.  
UFSC - Câmpus Florianópolis

---

Prof. Samir Ahmad Mussa, Dr.  
UFSC - INEP

---

Prof. Alexandre Trofino Neto, Dr.  
UFSC - DAS

Aos meus pais, Adagir e Marilande.





## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, pelo dom da vida e por estar presente, de alguma forma, oferecendo paz e força.

Aos membros da banca, pelas valiosas contribuições a este trabalho.

Ao meu orientador, Daniel F. Coutinho, pela sua receptividade nas conversas anteriores ao ingresso no mestrado; pela tranquilidade e objetividade das discussões durante o desenvolvimento deste trabalho; e por todos incentivos e conselhos para o prosseguimento na carreira acadêmica.

Ao meu coorientador, Marcelo L. Heldwein, pela disponibilidade e pela serenidade ao transmitir conhecimentos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Através dele, também agradeço aos professores do INEP que fizeram parte da minha formação.

Aos professores do PPGEAS, que muito contribuíram para a minha formação acadêmica. Ao DAS e à UFSC, pela estrutura oferecida.

Aos mestrandos e bolsistas do LTIC que cruzaram meu caminho durante essa caminhada, compartilhando angústias, alegrias, trocando experiências. Em especial, ao Jônatas, pelas dicas, pelas empolgantes discussões sobre política, filosofia, religião e, às vezes, sobre algum tema relacionado à engenharia; e a Miriam, Bryant, Nathaly, Richard, Sergio, Jessica, Dayron, Camilo, Andrea, Mônica e Leandro por tornar essa jornada mais tranquila, por proporcionar um ambiente riquíssimo culturalmente, pelas famosas “reuniões”, por quebrar muitos galhos (até em dias de chuva!), pela parceria.

Aos amigos de longa data. A renovação das energias após cada conversa (por mais esporádicas que tenham se tornado), foram essenciais para a conclusão desse trabalho.

Agradeço, de coração, à toda minha família. Em especial, aos meus pais Marilande e Adagir, e ao meu irmão Fábio, que sempre deram todo o suporte necessário, seja financeiramente ou com palavras de incentivo.

À Priscilla, minha amada, presente em todos os momentos, apesar da distância. Agradeço pelo incentivo, pelas palavras de força, pelas palavras de calma, pela compreensão, pelo carinho. Também não posso deixar de agradecer à sua família pela acolhida e pelo apoio.

Finalmente, ao CNPq pelo apoio financeiro.

A todos vocês, muito obrigado!



*“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no oceano. Mas o oceano seria menor se lhe faltasse uma gota.”*

(Madre Teresa de Calcutá)



## RESUMO

A operação de inversores em paralelo tem se tornado cada vez mais atrativa, já que permite, por exemplo, a formação de micro redes de energia elétrica através de fontes de energia renováveis. No entanto, esse tipo de operação é bastante sensível e exige controladores que garantam o adequado funcionamento do sistema. Diversas técnicas são propostas na literatura, entre elas, as baseadas no *droop control*. A grande maioria desses trabalhos utiliza modelos de pequenos sinais para análise de estabilidade e projeto do controlador. No entanto, esses modelos possuem limitações. Assim, nos últimos anos começaram a surgir modelos mais precisos, permitindo um estudo mais detalhado de sistemas cujos controladores são baseados no *droop control*. Uma das técnicas utilizadas são os fasores dinâmicos, que permite a descrição do sistema da perspectiva de grandes sinais. Dessa forma, um modelo baseado em fasores dinâmicos é proposto nesse trabalho, incluindo as principais dinâmicas do sistema. A partir desse modelo, também se projeta um controlador multivariável através de desigualdades matriciais lineares (LMIs), garantindo estabilidade e desempenho do sistema, considerando as incertezas paramétricas no modelo. Simulações emulam um cenário realista, onde os controladores propostos são digitalizados e implementados em dois inversores, os quais estão conectados em paralelo e alimentam uma carga variável. Os resultados de simulação demonstram a precisão do modelo e a eficiência do controlador proposto.

**Palavras-chave:** Paralelismo de inversores. *Droop control*. Fasores dinâmicos. LMI.



## ABSTRACT

The parallel operation of voltage source inverters has become increasingly attractive, as it allows, for instance, microgrids formation through renewable energy sources. Nonetheless, the parallelism of inverters is a quite sensible operation and requires controllers capable of making the system works correctly. Several techniques are found in the specialized literature, among them, the droop control-based ones. Most of these works consider small-signal models to assess stability analysis and control design. However, these models have limitations. Thus, during the last years, more accurate models have been presented, allowing a more detailed study of droop controlled systems. Dynamic phasors are a powerful tool that permits the description of the system behavior from a large-signal perspective. Hence, a dynamic phasor model is proposed in this work, including the system most relevant dynamics. From this model, a controller design methodology based on linear matrix inequality (LMI) constraints is also proposed, and ensures the system stability and performance, taking parametric uncertainties into account. Simulations emulate a realistic scenario, where the controllers are discretized and implemented into two parallel-connected inverters, feeding a variable load. The simulation results show the model accuracy and the controller effectiveness.

**Keywords:** Inverters parallel operation. Droop control. Dynamic phasors. LMI.





## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Circuito para exemplo de aplicação de fasores dinâmicos. ....	34
Figura 2.2 Amplitude do sinal de entrada $v_{in}(t)$ . ....	36
Figura 2.3 Corrente $i(t)$ do sistema no tempo e envelope definido pelo modelo com fasores dinâmicos, $\sqrt{2}I(t)$ . ....	37
Figura 2.4 Diagrama de blocos simplificado do <i>droop control</i> . ....	39
Figura 2.5 Circuito para análise do fluxo de potências. ....	40
Figura 2.6 Curvas de <i>droop</i> para linha indutiva. ....	43
Figura 2.7 Curvas de <i>droop</i> para linha resistiva. ....	44
Figura 2.8 Curvas de <i>droop</i> para linha capacitiva. ....	45
Figura 2.9 Diagrama de blocos do SOGI-QSG. ....	50
Figura 2.10 Diagramas de Bode de $G_\alpha(s)$ e $G_\beta(s)$ . ....	51
Figura 2.11 Resposta temporal do SOGI-QSG. ....	52
Figura 3.1 Problema a ser modelado. ....	58
Figura 3.2 Circuito utilizado para modelar a parte de potência. ...	58
Figura 3.3 Circuito simplificado para a parte de potência. ....	59
Figura 3.4 Modelo da carga. ....	60
Figura 3.5 Modelo da linha. ....	61
Figura 3.6 Diagrama do sistema. ....	64
Figura 3.7 Circuito para modelo detalhado (com grandezas sinusoidais). ....	65
Figura 3.8 Configuração utilizada para validação do modelo no Simulink. ....	67
Figura 3.9 Potência da carga para validação do modelo. ....	67
Figura 3.10 Respostas do sistema no teste de validação ( $\tilde{P}_i$ e $\tilde{Q}_i$ ). ...	68
Figura 3.11 Respostas do sistema no teste de validação ( $E_i$ e $\omega_i$ )..	70
Figura 3.12 Respostas do sistema no teste de validação ( $V_L$ e $I_{out}$ )	71
Figura 3.13 Respostas do sistema no teste de validação ( <i>zoom</i> sobre $V_L$ e $I_{out}$ ) . ....	72
Figura 4.1 Região $\mathcal{D}(\alpha, \rho)$ . ....	77
Figura 4.2 Diagrama para compensação de frequência. ....	83
Figura 4.3 Diagrama para compensação de frequência multivariável. ....	85

Figura 4.4 Diagrama para compensação de tensão.....	86
Figura 4.5 Diagrama para compensação de frequência e tensão multivariável.....	88
Figura 5.1 Circuito implementado no <i>software</i> PSIM.....	92
Figura 5.2 Circuito do inversor implementado no <i>software</i> PSIM.	93
Figura 5.3 Diagrama funcional para <i>start-up</i> do inversor.....	94
Figura 5.4 Respostas do sistema no PSIM (potências). Caso: com- pensação de frequência.....	97
Figura 5.5 Respostas do sistema no PSIM ( $E, \omega, V_L$ ). Caso: com- pensação de frequência.....	98
Figura 5.6 Respostas do sistema no PSIM (potências). Caso: com- pensação de frequência e tensão.....	100
Figura 5.7 Respostas do sistema no PSIM ( $E, \omega, V_L$ ). Caso: com- pensação de frequência e tensão.....	101

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Parâmetros utilizados para validação do modelo. ....	65
Tabela 3.2	Parâmetros do <i>droop</i> utilizados para validação do modelo.....	66
Tabela 5.1	Parâmetros das linhas utilizados no PSIM. ....	93
Tabela 5.2	Parâmetros nominais das linhas.....	95
Tabela 5.3	Parâmetros dos controladores para <i>droop</i> estático. ....	96



## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UPS	Fonte de alimentação ininterrupta (do inglês, <i>Uninterruptible Power Supply</i> ).....	27
LMI	Inequação matricial linear (do inglês, <i>Linear Matrix Inequality</i> ).....	31
PI	Controlador proporcional integral.....	39
PR	Controlador proporcional ressonante.....	39
PD	Controlador proporcional derivativo.....	48
QSG	Gerador de sinais em quadratura (do inglês, <i>quadrature-signals generator</i> ).....	50
SOGI	Integrador generalizado de segunda ordem (do inglês, <i>second-order generalised integrator</i> ).....	50
PCC	Ponto de conexão comum.....	57
LCL	Indutivo-capacitivo-indutivo.....	58
MD	Modelo detalhado.....	71
FD	Fasores dinâmicos.....	71
DLL	<i>Dynamic-link library</i> .....	91
ZOH	Amostrador de ordem zero (do inglês, <i>zero-order hold</i> ) ..	92
VMQI	Valores médios quase instantâneos.....	93
PLL	<i>Phase-locked loop</i> .....	93



## LISTA DE SÍMBOLOS

$t$	Tempo, em segundos . . . . .	33
$x$	Um sinal sinusoidal qualquer . . . . .	33
$\bar{x}$	Valor eficaz de um sinal sinusoidal $x$ . . . . .	33
$\omega$	Pulsção ou frequência em rad/s do inversor . . . . .	33
$\tau$	Variável de integração . . . . .	33
$\theta$	Fase instantânea de um sinal sinusoidal . . . . .	33
$\theta_0$	Fase, ou ângulo, de referência . . . . .	34
$\omega_0$	Frequência de referência ou a vazio . . . . .	34
$\psi$	Atraso de fase ou defasagem . . . . .	34
$\Re, \Im$	Partes real e imaginária de uma variável complexa . . . . .	34
$j$	Número imaginário ( $j^2 = -1$ ) . . . . .	34
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos . . . . .	34
$\hat{X}$	Fasor dinâmico associado a $x$ . . . . .	34
$v_{in}$	Tensão instantânea de entrada . . . . .	34
$R$	Resistência . . . . .	34
$L$	Indutância . . . . .	34
$i$	Corrente . . . . .	34
$\tau_L$	Constante de tempo do circuito indutivo-resistivo . . . . .	35
$i_b$	Corrente do circuito indutivo-resistivo obtida com tensão 90° atrasada . . . . .	36
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais . . . . .	37
$\mathbb{R}^n$	Conjunto dos vetores reais com $n$ elementos . . . . .	37
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Conjunto dos matrizes reais com dimensão $m \times n$ . . . . .	37
$v_{ref}$	Tensão de referência para malha de tensão . . . . .	39
$d$	Razão cíclica dos interruptores do conversor . . . . .	39
$i_{out}$	Corrente instantânea de saída do inversor . . . . .	39
$v_{out}$	Tensão instantânea de saída do inversor . . . . .	39
$E$	Tensão eficaz do inversor . . . . .	39
$P, Q$	Potências ativa e reativa entregues pelo inversor . . . . .	39
$\tilde{P}, \tilde{Q}$	Potências ativa e reativa estimadas . . . . .	39
$V$	Tensão eficaz qualquer . . . . .	40
$Z_l$	Impedância de linha . . . . .	40

$\vartheta$	Ângulo da impedância de linha . . . . .	40
$S$	Potência aparente entregue pelo inversor . . . . .	40
$\delta$	Diferença de fase entre dois fasores . . . . .	40
$\mathbf{T}(\vartheta)$	Matriz de transformação, rotaciona variáveis em $\vartheta$ . . . . .	41
$\tilde{P}, \tilde{Q}$	Potências ativa e reativa rotacionadas, ou modificadas . . . . .	41
$\delta_0$	Diferença de fase a vazio . . . . .	42
$E_0$	Tensão eficaz a vazio . . . . .	42
$k_{m\delta}$	Constante de <i>droop</i> de fase . . . . .	42
$k_n$	Constante de <i>droop</i> de tensão . . . . .	42
$k_m$	Constante de <i>droop</i> de frequência . . . . .	43
$Z_{virt}$	Impedância virtual . . . . .	47
$v_{droop}$	Tensão instantânea gerada a partir das equações de <i>droop</i> . . . . .	47
$s$	Variável de Laplace . . . . .	47
$G_\omega$	Função de transferência para <i>droop</i> de frequência . . . . .	47
$G_E$	Função de transferência para <i>droop</i> de tensão . . . . .	47
$\tau_\omega$	Constante de tempo para <i>droop</i> dinâmico . . . . .	48
$p, q$	Potências ativa e reativa instantâneas . . . . .	49
$\varphi$	Diferença de fase entre tensão e corrente . . . . .	49
$i_\perp$	Corrente atrasada em 90° em relação a $i$ . . . . .	49
$k_S$	Ganho do SOGI-QSG . . . . .	50
$x_\alpha, x_\beta$	Componentes em quadratura de $x$ . . . . .	50
$G_{\alpha,\beta}$	Funções de transferência do SOGI-QSG . . . . .	50
$\tau_S$	Constante de tempo de um sistema de primeira ordem relacionado ao SOGI-QSG . . . . .	53
$L_{inv}$	Indutor do primeiro estágio do filtro LCL . . . . .	58
$L_{grid}$	Indutor de saída do filtro LCL . . . . .	58
$C_{inv}$	Capacitor do filtro LCL . . . . .	58
$Z_{lin}$	Impedância da linha física . . . . .	58
$i_x$	Corrente de perturbação . . . . .	58
$\mathbf{x}$	Vetor de estados de um sistema . . . . .	58
$\mathbf{u}$	Vetor de entradas de um sistema . . . . .	58
$\mathbf{y}$	Vetor de saídas de um sistema . . . . .	58
$\mathbf{A}$	Matriz de estado de um sistema . . . . .	58
$\mathbf{B}$	Matriz de entrada de um sistema . . . . .	58
$\mathbf{C}$	Matriz de saída de um sistema . . . . .	58



<b>D</b>	Matriz de transmissão direta de um sistema . . . . .	58
$Z_{inv}$	Impedância de saída do inversor . . . . .	59
$R_L$	Resistência constante da carga . . . . .	59
$C_L$	Capacitância parasita da carga . . . . .	59
$i_L$	Corrente drenada pela carga . . . . .	59
$g_L$	Condutância da carga . . . . .	60
$b_L$	Susceptância da carga . . . . .	60
$R_l$	Resistência da linha . . . . .	61
$L_l$	Indutância da linha . . . . .	61
$P_L$	Potência ativa demandada pela carga . . . . .	66
<b>P</b>	Matriz de Lyapunov . . . . .	74
<b>Q</b>	Matriz inversa de <b>P</b> . . . . .	75
<b>K</b>	Matriz de ganhos . . . . .	75
$C_\omega$	Sistema dinâmico responsável pela compensação de frequên- cia . . . . .	83
$C_E$	Sistema dinâmico responsável pela compensação de tensão	86
$\xi$	Estado do integrador para compensação de tensão . . . . .	86
$f_S$	Frequência de amostragem do controlador discreto . . . . .	91



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	27
1.1	OBJETIVOS .....	30
1.2	CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA .....	31
1.3	ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	31
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	33
2.1	FASORES DINÂMICOS .....	33
2.1.1	Exemplo de Aplicação .....	34
2.1.2	Diferenciação no Tempo .....	36
2.1.3	Notação para Fasores .....	37
2.2	<i>DROOP CONTROL</i> .....	38
2.2.1	Fluxo de Potência e Equações de <i>Droop</i> .....	40
2.2.1.1	Impedância de Linha Indutiva .....	41
2.2.1.2	Impedância de Linha Resistiva .....	43
2.2.1.3	Impedância de Linha Capacitiva .....	45
2.2.1.4	Impedância de Linha Mista .....	46
2.2.2	Impedância Virtual .....	46
2.2.3	<i>Droop</i> Dinâmico .....	47
2.3	ESTIMAÇÃO DAS POTÊNCIAS ATIVA E REATIVA ..	48
2.3.1	Geração de Componentes em Quadratura .....	49
2.4	SÍNTESE DO CAPÍTULO .....	54
<b>3</b>	<b>MODELAGEM DO SISTEMA</b> .....	57
3.1	DEFINIÇÃO DO MODELO .....	57
3.1.1	Modelo do Inversor .....	58
3.1.2	Modelo da Carga .....	59
3.1.3	Modelo da Linha .....	60
3.1.4	Estimação das Potências .....	62
3.1.5	Modelo Completo .....	63
3.2	VALIDAÇÃO DO MODELO .....	64
3.3	SÍNTESE DO CAPÍTULO .....	69
<b>4</b>	<b>PROJETO DE CONTROLE</b> .....	73
4.1	REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA .....	73
4.1.1	Problema de Estabilização .....	74
4.1.2	Extensão para $\mathcal{D}$ -estabilidade .....	76
4.1.3	Extensão para $\mathcal{H}_\infty$ .....	78
4.1.4	Extensão para Sistemas Incertos .....	79
4.2	PROJETO DO CONTROLADOR .....	80
4.2.1	Modelo Aproximado .....	81

4.2.2	<i>Droop</i> Estático .....	82
4.2.3	Compensação de Frequência .....	83
4.2.4	Compensação da Tensão .....	86
4.3	SÍNTESE DO CAPÍTULO .....	88
5	<b>SIMULAÇÕES</b> .....	91
5.1	PLATAFORMA DE TESTES .....	91
5.2	SIMULAÇÕES .....	95
5.2.1	Cálculo dos ganhos do <i>droop</i> estático .....	95
5.2.2	Compensação de Frequência .....	95
5.2.3	Compensação de Frequência e Tensão .....	99
5.3	SÍNTESE DO CAPÍTULO .....	99
6	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	103
6.1	SÍNTESE E DISCUSSÕES .....	103
6.2	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS .....	104
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	107
	<b>APÊNDICE A – Artigo submetido ao IECON</b> ...	115

## Capítulo 1

---

# INTRODUÇÃO

---

O interesse pela operação de inversores de tensão em paralelo se desenvolveu, inicialmente, com o objetivo de aumentar a confiabilidade e a potência de sistemas que alimentam cargas críticas, os chamados UPS (*Uninterruptible Power Supply*) (KAWABATA; HIGASHINO, 1988). Desde então, a utilização do paralelismo de inversores vem se espalhando por diversas aplicações, como em sistemas de tração elétrica de trens (CHANDORKAR et al., 1993) ou geração distribuída (MOHAMED; EL-SAADANY, 2008), por exemplo. No entanto, a associação de inversores em paralelo é muito sensível e exige que controladores garantam que a tensão sobre as cargas permaneça dentro de limites operacionais aceitáveis. Além disso, os controladores também devem prevenir a circulação de correntes entre inversores e a sobrecarga dos mesmos, independentemente das cargas (CHANDORKAR et al., 1993). Alguns trabalhos recentes, como Mohd et al. (2010), Rocabert et al. (2012), Zhong e Hornik (2013) e Han et al. (2015) apresentam uma revisão sobre esse tema.

Atualmente, na literatura especializada, são encontradas diversas estratégias de controle que possibilitam a conexão de inversores em paralelo. Tais estratégias podem ser divididas em dois grupos: as técnicas de controle com comunicação entre os inversores e as técnicas de controle sem comunicação entre os inversores.

As técnicas com comunicação são caracterizadas pela existência de um controlador central ou de controladores distribuídos que enviam e recebem informações através de um canal de comunicação. Essa estratégia possibilita um funcionamento rápido e preciso do sistema, já que, de alguma forma, todas as variáveis são conhecidas. No entanto, o canal constitui um elo frágil nessa abordagem, uma vez que a perda de

informação entre as unidades pode acarretar a perda de funcionamento do sistema (TULADHAR et al., 1997; MOHD et al., 2010). Entre outros trabalhos, podem-se citar como exemplos de técnicas com comunicação as apresentadas em Lazzarin, Bauer e Barbi (2013), Zhang e Ma (2014) e nas revisões já mencionadas.

Por outro lado, as estratégias que utilizam somente medidas locais e dispensam a troca de dados são baseadas no *droop control*. Esta técnica é empírica e se baseia em recriar nos inversores o comportamento das máquinas síncronas conectadas à rede, reduzindo a frequência e a tensão proporcionalmente às potências ativa e reativa entregues por ela (CHANDORKAR et al., 1993; GUERRERO et al., 2005; ZHONG; HORNIK, 2013).

Apesar de aumentar a confiabilidade e a flexibilidade do sistema, o *droop control* convencional tem diversos inconvenientes. Seu desempenho é relativamente lento, devido aos filtros necessários para o cálculo das potências (CHANDORKAR et al., 1993; COELHO; CORTIZO; GARCIA, 2002; AZEVEDO et al., 2011). A precisão na divisão das potências entre os inversores é fortemente dependente das impedâncias de linha (GUERRERO et al., 2005; BRABANDERE et al., 2004; ZHONG; HORNIK, 2013). Além disso, os desvios de tensão e frequência, inerentes ao método, podem ser indesejáveis (ZHONG; HORNIK, 2013). Por fim, o método convencional funciona somente para cargas lineares, já que não leva em conta as distorções harmônicas provocadas por elementos não lineares (TULADHAR et al., 2000).

Visando melhorar o desempenho do sistema e buscando soluções aos problemas supracitados, diversas modificações sobre a técnica convencional têm sido propostas. Entre os primeiros trabalhos, pode-se destacar Tuladhar et al. (1997), que apresenta uma modificação que permite a operação em paralelo de inversores mesmo para cargas não lineares. Os autores propõem a utilização de um ganho proporcional à “potência de distorção”, de forma que haja um certo controle sobre a divisão de correntes harmônicas entre os inversores. Ainda preocupado com a operação para cargas não lineares, Borup, Blaabjerg e Enjeti (2001) apresenta algumas limitações do trabalho anterior e propõe que os inversores forneçam tensão com componentes harmônicas. Cada componente é calculada a partir de equações de *droop* independentes, permitindo a divisão proporcional das correntes harmônicas geradas pela carga não linear. Apesar de essa estratégia de controle se mostrar mais eficaz que a anterior, sua implementação é bastante complexa, já que exige a decomposição da corrente em suas componentes harmônicas.

Ainda no que concerne ao funcionamento com cargas não lineares, Guerrero et al. (2005) mostra que se pode implementar uma impedância virtual no inversor através do projeto da malha de tensão. Se essa impedância virtual possuir determinadas características, a divisão de potências é realizada de forma adequada tanto para cargas lineares quanto para cargas não lineares. A impedância virtual, além de permitir a operação com cargas não lineares, também pode ser calculada de forma que seu valor seja predominante sobre a linha. Dessa forma, reduz-se a sensibilidade do balanço de potências em relação à impedância da linha, agora dominada pela impedância virtual (GUERRERO et al., 2005).

Mostra-se que, em casos semelhantes aos encontrados para máquinas síncronas<sup>1</sup>, existe relação direta entre a potência ativa entregue pelo gerador e a sua frequência. Da mesma forma, existe relação entre a potência reativa e a tensão imposta pelo gerador. Assim, no *droop control* convencional, busca-se controlar a potência ativa através de variações na frequência e a potência reativa, através de variações na tensão eficaz do gerador. Essas relações diretas são válidas apenas para os casos onde a impedância de linha é indutiva. De forma geral, para outras características de linha, existe acoplamento entre todas as variáveis envolvidas. Assim, outras melhorias para o *droop control* convencional são encontradas em Quesada et al. (2014) e Brabandere et al. (2004). O primeiro propõe a utilização de um desacoplamento dinâmico das potências ativa e reativa; essa técnica se baseia em um modelo de pequenos sinais e utiliza ferramentas de controle multivariável. O segundo trabalho mencionado mostra que se pode realizar uma transformação de rotação nas potências, de tal forma que não haja acoplamento entre as potências rotacionadas, ou modificadas.

Outra linha de melhorias busca corrigir os desvios de frequência e tensão do *droop control*. Tais técnicas consistem em substituir as constantes de *droop* por variáveis dinâmicas ou em acrescentar malhas de controle externas. Essas abordagens são encontradas em Guerrero et al. (2002), Guerrero et al. (2005), Mohamed e El-Saadany (2008), Vasquez et al. (2013), Zhong (2013), entre outros. Essas estratégias adicionam mais graus de liberdade ao projetista e permitem, por exemplo, que a frequência e a tensão sejam levadas a seus valores nominais quando em regime permanente.

Como mencionado anteriormente, o desempenho em malha fechada do *droop control* é diretamente afetado pelos filtros utilizados

---

<sup>1</sup>Caso onde a impedância de linha tem característica predominantemente indutiva, a serem detalhados no próximo capítulo.

no cálculo das potências. Uma análise comparativa sobre os tipos de filtros comumente utilizados e sua influência sobre o sistema pode ser encontrada em Abusara, Sharkh e Guerrero (2014). Para melhorar o desempenho dos cálculos de potências, uma versão melhorada é proposta por Azevedo et al. (2011). Essa técnica se desenvolve através de referenciais rotativos, apresentando melhoras significativas nos tempos de resposta.

A maior parte dos trabalhos mencionados acima utiliza ferramentas de controle clássico sobre um modelo de pequenos sinais para realizar a análise de estabilidade do sistema e o projeto do controlador. Contudo, a partir do ano de 2012, começaram a surgir publicações com o intuito de preencher essa lacuna. Modelos mais precisos, baseados em fasores dinâmicos, foram propostos em Wang et al. (2012) e Mariani e Vasca (2013). Esses modelos são mais precisos, já que representam o comportamento do sistema da perspectiva de grandes sinais. No entanto, Mariani e Vasca (2013) não considera a dinâmica do filtro para o cálculo de potência. Ainda, Wang et al. (2012) modela um sistema trifásico e utiliza um filtro de primeira ordem para o cálculo de potência. Ferramentas mais rigorosas também passaram a ser utilizadas para o estudo de sistemas com *droop control*, como em Simpson-Porco, Dörfler e Bullo (2012), Sinha et al. (2014) e Schiffer et al. (2014), por exemplo.

Vale ressaltar que, em geral, os conceitos apresentados até então são válidos tanto para sistemas monofásicos quanto trifásicos. A principal diferença entre eles reside no cálculo ou estimação das potências entregues pelos inversores. Num sistema monofásico, as potências instantâneas apresentam uma componente oscilatória com o dobro do valor da frequência fundamental, de forma que normalmente se utiliza um filtro a fim de atenuar essa componente. Em sistemas trifásicos equilibrados, essa componente oscilatória não existe, dispensando, num primeiro momento, a necessidade de filtro. Nesse trabalho, dá-se enfoque à operação de sistemas monofásicos.

## 1.1 OBJETIVOS

Como ainda existe uma lacuna na literatura para modelos mais precisos, nesse trabalho será proposta uma modelagem baseada em Mariani e Vasca (2013), utilizando fasores dinâmicos. Adicionalmente, será acrescentada a dinâmica do filtro ao modelo, já que tem importância fundamental no comportamento do sistema. O filtro considerado nesse trabalho é a versão apresentada em Azevedo et al. (2011), cujo desem-



penho é superior aos filtros comumente utilizados.

Quanto ao controle, busca-se uma abordagem robusta via LMI (*Linear Matrix Inequality*) que permita a síntese do controlador. Esse controlador deve assegurar o compartilhamento da potência de forma proporcional entre os inversores. Da mesma forma, busca-se a regulação de tensão e frequência sobre a carga, frente a possíveis variações paramétricas.

## 1.2 CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA

Esse trabalho apresenta duas contribuições principais ao problema do paralelismo de inversores. Mais particularmente, na utilização de técnicas baseadas no *droop control*.

A primeira contribuição é dada pelo modelo proposto. Esse modelo, baseado em fasores dinâmicos, inclui as principais dinâmicas do sistema e permite a descrição do seu comportamento de uma perspectiva de grandes sinais, sendo um elemento importante para a compreensão do funcionamento do sistema nas mais variadas condições de operação.

A obtenção desse modelo no espaço de estados permite a utilização de ferramentas de Controle Robusto para o projeto do controlador. Dessa forma, pode-se tratar adequadamente as incertezas do sistema através de uma abordagem LMI, garantindo não apenas a estabilidade, mas também o desempenho do sistema em malha fechada. Assim, a metodologia de projeto proposta nesse trabalho também figura como contribuição ao problema do paralelismo de inversores.

Os principais resultados dessa dissertação foram condensados no artigo *Parallel Operation of Single-Phase Voltage Source Inverters: Modeling and Control based on LMI Constraints*, submetido ao *42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society (IECON 2016)*, a ser realizado de 23 a 27 de outubro de 2016, em Florença, na Itália.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Os demais capítulos dessa dissertação estão organizados da seguinte maneira:

- O Capítulo 2 traz ao leitor a fundamentação teórica e os conceitos básicos necessários para o desenvolvimento desse trabalho. As

técnicas fasores dinâmicos e *droop control* são revisitadas. Também é realizada uma explanação sobre o cálculo de potências monofásicas;

- O Capítulo 3 apresenta a modelagem do sistema, levando em conta as principais dinâmicas do problema. Para isso, utiliza-se uma representação no espaço de estados dos fasores dinâmicos. Esse modelo é validado na segunda parte do capítulo;
- O Capítulo 4 inicia apresentando resultados para o problema de realimentação estática de saída via LMIs, acrescentando restrições para tratamento de incertezas e desempenho do sistema. Na sequência, uma estratégia de controle é proposta. Mostra-se que essa estratégia leva a um problema de realimentação estática de saída. Assim, o projeto do controlador é baseado nos resultados apresentados na primeira parte do capítulo;
- O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos através de simulações. Inicialmente, apresenta-se a plataforma de testes, desenvolvida através dos *softwares* Matlab e PSIM. Na sequência, realizam-se testes com os controladores projetados, simulando condições de operação próximas às condições reais;
- O Capítulo 6 apresenta algumas conclusões desse trabalho. Nele são realizadas as considerações finais dessa dissertação e possibilidades de trabalhos futuros são indicadas; e
- Finalmente, em apêndice, apresenta-se o artigo *Parallel Operation of Single-Phase Voltage Source Inverters: Modeling and Control based on LMI Constraints*, que introduz os resultados dessa dissertação de forma condensada.

## Capítulo 2

---

# FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

---

Antes de prosseguir com o desenvolvimento do trabalho, faz-se necessário abordar alguns temas fundamentais. Inicialmente, é realizada uma descrição dos fasores dinâmicos, ferramenta fundamental para a modelagem do sistema. Em seguida, será apresentada e desenvolvida a técnica de controle conhecida como *droop control*, que permite a operação de inversores em paralelo sem comunicação explícita. Por fim, apresenta-se uma técnica para o cálculo de potências monofásicas, bloco fundamental para a implementação do *droop control*.

### 2.1 FASORES DINÂMICOS

O conceito de fasores dinâmicos, ou fasores variantes no tempo, foi desenvolvido a partir da necessidade de modelar dinâmicas rápidas em circuitos de corrente alternada, como apresentado em Venkatasubramanian, Schattler e Zaborsky (1995). Para defini-los, utiliza-se um sinal sinusoidal  $x(t)$  com pulsação  $\omega$  e descrito por

$$x(t) = \sqrt{2\bar{x}(t)} \cos \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right], \quad (2.1)$$

sendo  $\bar{x}$  o seu valor eficaz. Considerando a fase inicial nula, sua fase instantânea  $\theta(t)$  é dada por

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Para utilizar uma notação fasorial, é necessário adotar um ângulo de referência. Sendo  $\theta_0(t) = \omega_0 t$  o ângulo de referência,  $x(t)$  pode ser reescrito como

$$x(t) = \sqrt{2\bar{x}}(t) \cos[\theta_0(t) + \psi(t)], \quad (2.3)$$

onde  $\psi(t) = \int_0^t \Delta\omega(\tau) d\tau$  e  $\Delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0$ . Dessa forma, sua notação fasorial, referenciada a  $\theta_0(t)$ , é dada por

$$x(t) = \Re \left\{ \sqrt{2} \hat{X}(t) e^{j\omega_0 t} \right\}, \quad (2.4)$$

onde  $\hat{X}(t) \in \mathbb{C}$ . Destaca-se que essa relação é estabelecida de tal forma que o valor absoluto de  $\hat{X}(t)$  coincida com o valor eficaz de  $x(t)$ . Se  $x(t)$  for um sinal sinusoidal com amplitude e frequência constantes,  $\hat{X}(t)$  é invariante no tempo e sua definição coincide com a definição clássica de fasores. Quando  $\hat{X}(t)$  varia no tempo, diz-se, então, que é um fasor dinâmico. Tem parte real  $X_R(t)$ , parte imaginária  $X_I(t)$ , módulo  $X(t)$  e atraso de fase (ou defasagem)  $\psi(t)$ . Pode ser representado utilizando notação retangular, como em (2.5), ou utilizando notação polar, como em (2.6).

$$\hat{X}(t) = X_R(t) + jX_I(t) \quad (2.5)$$

$$\hat{X}(t) = X(t)e^{j\psi(t)} \quad (2.6)$$

### 2.1.1 Exemplo de Aplicação

Considera-se o circuito apresentado pela Figura 2.1, composto por uma fonte de tensão  $v_{in}(t)$ , uma indutância  $L$  associada a uma resistência  $R$ . Considera-se também a equação (2.7), que descreve a evolução temporal da corrente  $i(t)$ .

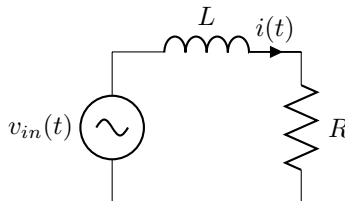


Figura 2.1: Circuito para exemplo de aplicação de fasores dinâmicos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{L}v_{in}(t) \quad (2.7)$$

A representação em espaço de estado, acima apresentada, permite uma análise quase imediata do comportamento transitório do circuito para uma entrada do tipo degrau, onde  $i(t)$  seria uma função exponencial com constante de tempo  $\tau_L = L/R$ . No entanto, é mais difícil extrair informações sobre os sinais de saída quando a entrada é do tipo senoidal, por exemplo. Nesse caso, serão utilizados os fasores dinâmicos para verificar o comportamento do circuito.

Inicialmente, reescreve-se os termos de (2.7) na forma de (2.4), passando todas as parcelas para o mesmo lado da igualdade. Por motivos de simplicidade, a dependência dos fasores dinâmicos pelo tempo é omitida durante a dissertação.

$$\sqrt{2}\Re \left\{ \frac{d\hat{I}e^{j\omega_0 t}}{dt} \right\} + \sqrt{2}\Re \left\{ \frac{R}{L}\hat{I}e^{j\omega_0 t} \right\} - \sqrt{2}\Re \left\{ \frac{1}{L}\hat{V}_{in}e^{j\omega_0 t} \right\} = 0 \quad (2.8)$$

$$\Re \left\{ \frac{d\hat{I}e^{j\omega_0 t}}{dt} + \frac{R}{L}\hat{I}e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{L}\hat{V}_{in}e^{j\omega_0 t} \right\} = 0 \quad (2.9)$$

Derivando o primeiro termo e colocando o fator  $e^{j\omega_0 t}$  em evidência, tem-se

$$\Re \left\{ \left( \frac{d\hat{I}}{dt} + j\omega_0\hat{I} + \frac{R}{L}\hat{I} - \frac{1}{L}\hat{V}_{in} \right) e^{j\omega_0 t} \right\} = 0. \quad (2.10)$$

Como a igualdade é válida para todo  $t$ , é necessário que o termo entre parênteses seja nulo para que a igualdade seja verificada. Assim,

$$\frac{d\hat{I}}{dt} = -\frac{R}{L}\hat{I} - j\omega_0\hat{I} + \frac{1}{L}\hat{V}_{in}, \quad (2.11)$$

que é reescrito como

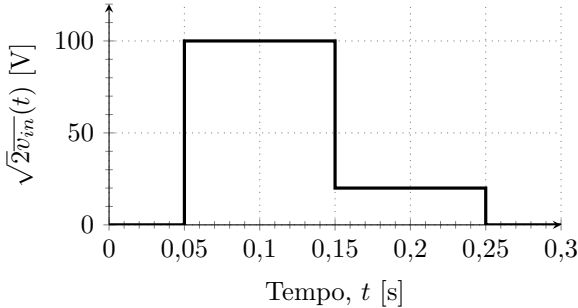
$$\frac{d(I_R + jI_I)}{dt} = -\left(\frac{R}{L} + j\omega_0\right)(I_R + jI_I) + \frac{1}{L}(V_{inR} + jV_{inI}). \quad (2.12)$$

Finalmente, igualando as partes reais e as partes imaginárias, tem-se

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_R \\ I_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \omega_0 \\ -\omega_0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_R \\ I_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{inR} \\ V_{inI} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Para ilustrar o comportamento do sistema, assume-se  $R = 10 \Omega$ ,  $L = 0,1 \text{ H}$  e  $\omega_0 = 500 \text{ rad/s}$ . Utiliza-se  $v_{in}(t) = \sqrt{2}\bar{v}_{in}(t) \cos \omega_0 t$ , sendo a sua amplitude apresentada pela Figura 2.2.

Figura 2.2: Amplitude do sinal de entrada  $v_{in}(t)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

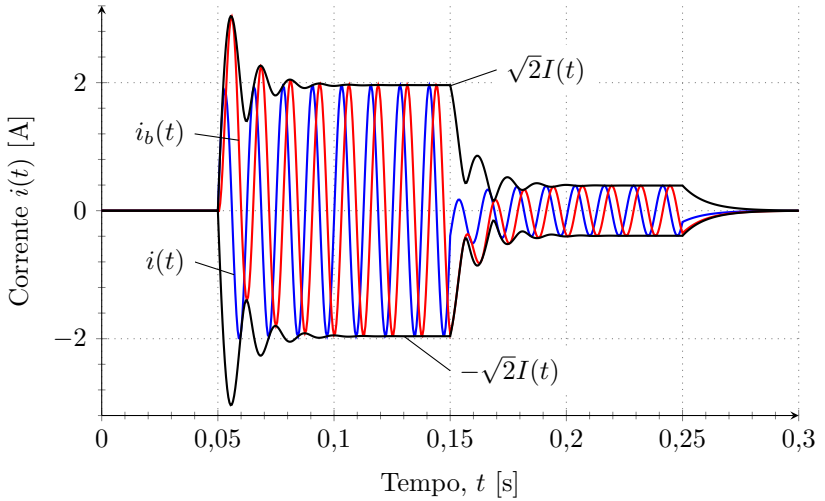
Como a frequência de  $v_{in}(t)$  é constante, assume-se  $\hat{V}_{in}(t) = \bar{v}_{in}(t)$ . Aplica-se  $v_{in}(t)$  em (2.7) e  $\hat{V}_{in}(t)$  em (2.11). As respostas obtidas são apresentadas na Figura 2.3, onde  $I(t)$  é o módulo do fasor dinâmico  $\hat{I}(t)$ , que aparece multiplicado por  $\sqrt{2}$  para representar a amplitude do sinal. Observa-se que  $\sqrt{2}I(t)$  forma um envelope em torno de  $i(t)$ . Dependendo da fase instantânea onde ocorre a mudança no sinal de entrada, vários sinais  $i(t)$  diferentes podem ser obtidos, com diferentes sobressinais, por exemplo. No entanto, todos os possíveis sinais  $i(t)$  estarão contidos dentro do envelope delimitado por  $\sqrt{2}I(t)$ . Para ilustrar esse fato, aplica-se  $v_{in}(t) = \sqrt{2}\bar{v}_{in}(t) \sin \omega_0 t$ , obtendo  $i_b(t)$ , apresentado na mesma figura. Nesse caso, como  $v_{in}(t)$  está  $90^\circ$  atrasado em relação ao ângulo de referência  $\omega_0 t$ , aplica-se  $\hat{V}_{in}(t) = -j\bar{v}_{in}(t)$  ao modelo com fasores dinâmicos. O envelope formado é idêntico ao caso anterior.

### 2.1.2 Diferenciação no Tempo

A partir do exemplo apresentado, nota-se a similaridade entre as equações (2.7) e (2.11). A passagem para a notação fasorial acrescenta um termo  $j\omega_0 \hat{I}$  à equação. Dessa forma, pode-se afirmar que, para um estado qualquer descrito por

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) = ax + \mathbf{b}u, \quad (2.14)$$

Figura 2.3: Corrente  $i(t)$  do sistema no tempo e envelope definido pelo modelo com fasores dinâmicos,  $\sqrt{2}I(t)$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

onde  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ , a derivada do seu fasor dinâmico  $\hat{X}$  é dada por

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = \hat{F}(\hat{X}, \hat{\mathbf{U}}) - j\omega_0 \hat{X}, \quad (2.15)$$

onde  $\hat{F}(\hat{X}, \hat{\mathbf{U}}) = a\hat{X} + \mathbf{b}\hat{\mathbf{U}}$ .

Esse resultado, obtido através de abordagem semelhante à utilizada por Mariani e Vasca (2013), também pode ser encontrado na literatura a partir de outras abordagens, como em Venkatasubramanian, Schattler e Zaborsky (1995) ou Sanders et al. (1991), por exemplo.

### 2.1.3 Notação para Fasores

As representações utilizadas nessa seção se estendem ao restante do trabalho. Considera-se um sinal sinusoidal da forma

$$x(t) = \sqrt{2}\bar{x}(t) \cos \theta(t). \quad (2.16)$$

Seu valor eficaz instantâneo é dado por  $\bar{x}(t)$  e coincide com  $X(t)$ , módulo do fasor dinâmico  $\hat{X}(t)$ . A fase instantânea de  $x(t)$  é dada por  $\theta(t)$ , que por sua vez é expressa por

$$\theta(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad (2.17)$$

ou ainda,

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) = 2\pi f(t), \quad (2.18)$$

sendo  $\omega(t)$  a pulsação instantânea (ou frequência angular, em rad/s) de  $x(t)$  e  $f(t)$ , sua frequência instantânea (em Hz). Por abuso de linguagem, o termo frequência será utilizado indiscriminadamente para  $f$  ou  $\omega$  durante essa dissertação, sendo possível sua identificação através de sua unidade.

Utilizando  $\theta_0(t) = \omega_0 t$  como ângulo de referência e  $\Delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0$ , a equação (2.17) pode ser reescrita como

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \Delta\omega(\tau) d\tau = \theta_0 + \psi(t). \quad (2.19)$$

Assim, a defasagem  $\psi(t)$  pode ser expressa por

$$\psi(t) = \int_0^t \Delta\omega(\tau) d\tau. \quad (2.20)$$

O acento circunflexo indica um fasor dinâmico. Os índices distinguem sua parte real ( $R$ ) da imaginária ( $I$ ). Por fim, a letra maiúscula, sem acento, é o seu módulo, e  $\psi$ , sua defasagem em relação ao ângulo de referência adotado.

## 2.2 DROOP CONTROL

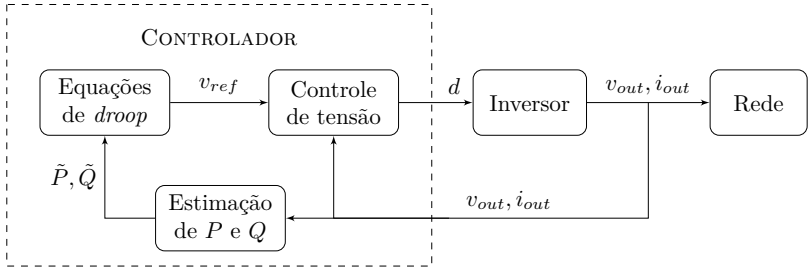
Uma das formas de permitir que inversores operem em paralelo é através do *droop control*<sup>1</sup>. Sua versão convencional, assim como os controladores baseados nessa técnica, são constituídos de três diferentes blocos, apresentados pela Figura 2.4 e descritos abaixo (MOHD et al., 2010):

---

<sup>1</sup>Em português, a comunidade de Sistemas Elétricos de Potência costuma chamar o *droop control* de estatismo.



Figura 2.4: Diagrama de blocos simplificado do *droop control*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Controle de tensão do inversor:** Constitui a primeira camada de controle. Esse bloco recebe um sinal de referência de tensão  $v_{ref}$  e atua sobre os interruptores do conversor através da razão cíclica  $d$ . Normalmente, esse bloco é implementado com uma malha interna para controle de corrente e uma malha externa para o controle da tensão<sup>2</sup>. Em geral, utilizam-se controladores com ação proporcional e integral (PI) ou controladores com ação proporcional e ressonante (PR);

**Equações de *droop*:** Nesse bloco é realizado o *droop control* propriamente dito. Através das equações de *droop* (apresentadas mais adiante) e das potências fornecidas, calcula-se o valor eficaz  $E$  e a frequência  $\omega$ , necessários para a geração de  $v_{ref}$ , que é dado por (2.21); e

$$v_{ref}(t) = \sqrt{2}E(t) \cos \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right] \quad (2.21)$$

**Estimção de  $P$  e  $Q$ :** Através da tensão  $v_{out}$  e da corrente  $i_{out}$ , faz-se a estimção das potências ativa  $P$  e reativa  $Q$  que o inversor entrega ao sistema. Denotam-se as potências estimadas como  $\tilde{P}$  e  $\tilde{Q}$ . Usualmente, essa operação é realizada através da filtragem do produto entre  $v_{out}$  e  $i_{out}$ .

Para compreender o funcionamento do *droop control*, será realizado, a seguir, uma análise do fluxo de potência entre duas fontes

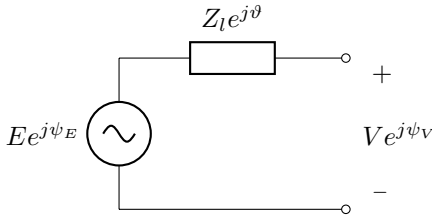
<sup>2</sup>Por simplicidade, a Figura 2.4 apresenta como realimentação para o controle de tensão as variáveis  $i_{out}$  e  $v_{out}$ . No entanto, é comum que outras variáveis do inversor também sejam utilizadas para o controle de tensão.

de tensão. Essa análise conduzirá de forma natural à obtenção das equações de *droop*.

### 2.2.1 Fluxo de Potência e Equações de *Droop*

Para a análise do fluxo de potência, considera-se o circuito apresentado pela Figura 2.5, constituído por uma fonte de tensão,  $E$  com ângulo  $\psi_E$ , e por uma impedância de linha<sup>3</sup>  $Z_l$  com ângulo  $\vartheta$ , que representa, de forma geral, uma linha ou a impedância de saída de  $E$ . A segunda extremidade de  $Z_l$  é submetida a  $V$ , onde pode estar conectada uma carga ou uma segunda fonte de tensão.

Figura 2.5: Circuito para análise do fluxo de potências.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da Teoria de Circuitos, a potência aparente  $S$  entregue pela fonte de tensão  $E$  é calculada por

$$S = Ee^{j\psi_E} \left( \frac{Ee^{j\psi_E} - Ve^{j\psi_V}}{Z_l e^{j\vartheta}} \right)^* = \frac{E^2 - EVe^{j\delta}}{Z_l e^{-j\vartheta}}, \quad (2.22)$$

onde  $(\cdot)^*$  é o complexo conjugado de  $(\cdot)$  e

$$\delta = \psi_E - \psi_V. \quad (2.23)$$

Separando as partes real e imaginária de  $S$ , tem-se as potências ativa  $P$  e reativa  $Q$ , respectivamente, que podem ser calculadas pelas equações abaixo:

$$P = \cos \vartheta \frac{E^2 - EV \cos \delta}{Z_l} + \sin \vartheta \frac{EV \sin \delta}{Z_l} \quad (2.24)$$

<sup>3</sup>O termo impedância de linha será utilizado indiscriminadamente para se referir à  $Z_l$ , independente se sua origem é a linha física ou a impedância de saída de uma fonte de tensão.

$$Q = \sin \vartheta \frac{E^2 - EV \cos \delta}{Z_l} - \cos \vartheta \frac{EV \sin \delta}{Z_l} \quad (2.25)$$

A partir dessas equações, é difícil estabelecer relações diretas que permitam analisar o comportamento das potências em função das tensões. No entanto, nota-se que  $P$  e  $Q$  têm termos comuns, o que permite reescrever as equações acima na forma:

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\vartheta) \begin{bmatrix} \check{P} \\ \check{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta & \cos \vartheta \\ -\cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{P} \\ \check{Q} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

onde  $\check{P}$  e  $\check{Q}$  são chamadas de potências ativa e reativa rotacionadas (ou modificadas), respectivamente, e são definidas por

$$\check{P} = \frac{EV \sin \delta}{Z_l} \quad (2.27)$$

$$\check{Q} = \frac{E(E - V \cos \delta)}{Z_l}. \quad (2.28)$$

Assim, a análise do fluxo de potências se torna mais simples, já que se pode isolar a contribuição de  $\vartheta$ . Então, basta analisar alguns casos particulares, apresentados a seguir.

### 2.2.1.1 Impedância de Linha Indutiva

Primeiramente, será considerada uma impedância de linha com característica predominantemente indutiva. Esse é o caso das linhas de alta tensão (BRABANDERE et al., 2004) ou quando a indutância de saída do inversor é muito elevada (GUERRERO et al., 2005). Nesse caso,  $\vartheta \approx \pi/2$  rad. Logo, a partir de (2.26), (2.27) e (2.28), tem-se

$$P = \check{P} = \frac{EV \sin \delta}{Z_l} \quad (2.29)$$

$$Q = \check{Q} = \frac{E(E - V \cos \delta)}{Z_l}. \quad (2.30)$$

Considerando  $V$  constante e  $\delta$  pequeno, pode-se assumir  $\sin \delta \approx \delta$  e  $\cos \delta \approx 1$ . Assim,

$$P \approx \frac{EV\delta}{Z_l} \quad (2.31)$$

$$Q \approx \frac{E(E - V)}{Z_l}. \quad (2.32)$$

A partir de (2.31), observa-se que  $P$  é diretamente proporcional à  $\delta$ . Em outras palavras, ao incrementar  $\psi_E$ ,  $\delta$  aumenta, assim como  $P$ . Então, se for possível controlar  $\delta$ , pode-se controlar  $P$ . Da mesma forma, em (2.32), pode-se assumir que  $Q$  é proporcional à diferença  $E - V$ . Então, se for possível controlar essa diferença, pode-se controlar  $Q$  (BRABANDERE et al., 2004).

A partir das constatações anteriores, é intuitivo propor que, à medida que a potência ativa aumenta, deve-se tentar reduzir  $\delta$  para contrabalancear o fluxo de potência, mantendo a estabilidade do sistema. Do mesmo modo, à medida que a potência reativa é fornecida pela fonte, sua tensão deve ser reduzida. Dessa forma, são estabelecidas as equações que determinam  $\delta$  e  $E$  a partir das potências estimadas, apresentadas abaixo:

$$\delta = \delta_0 - k_{m\delta}\tilde{P} \quad (2.33)$$

$$E = E_0 - k_n\tilde{Q}, \quad (2.34)$$

onde  $k_{m\delta}$  e  $k_n$  são constantes positivas,  $\delta_0$  e  $E_0$  são a diferença de fase e o valor eficaz da tensão a vazio, respectivamente.

Embora a relação com  $P$  seja direta, é difícil controlar a defasagem  $\delta$ , já que seria necessário conhecer a fase  $\psi_V$  e, *a priori*, não se tem acesso a essa variável<sup>4</sup>. No entanto, como

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{d\psi_E}{dt} - \frac{d\psi_V}{dt}, \quad (2.35)$$

utilizando (2.20), tem-se

$$\frac{d\delta}{dt} = \Delta\omega_E - \Delta\omega_V. \quad (2.36)$$

Assim, uma segunda abordagem pode ser utilizada para controlar a potência ativa. Um incremento em  $\Delta\omega_E$  provoca um aumento em  $\delta$  e consequente aumento de  $P$ . Então, utilizando o mesmo raciocínio que anteriormente, estabelece-se a equação

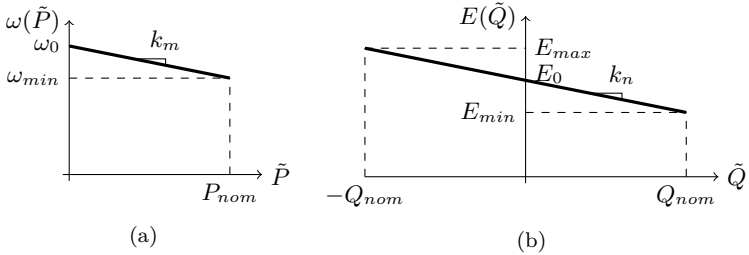
$$\omega = \omega_0 - k_m\tilde{P}, \quad (2.37)$$

sendo  $k_m$  uma constante positiva e  $\omega_0$  a frequência a vazio. Assim,

---

<sup>4</sup>Quando não há corrente circulando pela linha,  $\delta = 0$ . Porém, se há corrente, não se conhece, a princípio,  $\psi_V$

Figura 2.6: Curvas de *droop* para linha indutiva: (a) *droop* de frequência; e (b) *droop* de tensão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

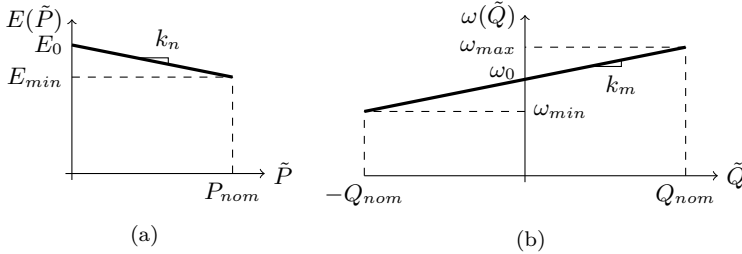
controlando  $\omega_E$ , pode-se controlar  $\delta$  e, conseqüentemente,  $P$ .

As equações que determinam a tensão e a frequência de um inversor – equações (2.34) e (2.37) – são conhecidas como as equações de *droop* e implementam o *droop control* convencional. As constantes  $k_m$  e  $k_n$  são chamadas de constantes de *droop* de frequência e de tensão, respectivamente. A Figura 2.6 ilustra as curvas de *droop* de frequência e tensão para linha indutiva, onde  $(\cdot)_{nom}$ ,  $(\cdot)_{max}$  e  $(\cdot)_{min}$  representam os valores nominal, máximo e mínimo de  $(\cdot)$ , respectivamente. As inclinações das retas são determinadas pelas constantes de *droop*  $k_m$  e  $k_n$ . Assim, através dos valores máximos e mínimos admissíveis de tensão e frequência e das potências nominais dos inversores, as constantes de *droop* podem ser determinadas. Considerando que os inversores operam como fonte de tensão e fornecem potência ativa ao sistema, nesse trabalho serão apresentadas curvas de *droop* somente para potências ativas positivas. No entanto, se a topologia do inversor possibilitar que o fluxo de energia seja bidirecional, a curva de *droop* de frequência (para esse caso) pode ser extrapolada para  $P < 0$ .

### 2.2.1.2 Impedância de Linha Resistiva

Também é possível que a linha tenha característica predominantemente resistiva, como em linhas de baixa tensão (BRABANDERE et al., 2004) ou quando a impedância de saída do inversor é resistiva (GUERRERO et al., 2005). Nesse caso,  $\vartheta \approx 0$  e, a partir de (2.26),

Figura 2.7: Curvas de *droop* para linha resistiva: (a) *droop* de tensão; e (b) *droop* de frequência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

(2.27) e (2.28), tem-se

$$P = \check{Q} = \frac{E(E - V \cos \delta)}{Z_l} \quad (2.38)$$

$$Q = -\check{P} = -\frac{EV \sin \delta}{Z_l}. \quad (2.39)$$

Para  $\delta$  pequeno, assume-se

$$P \approx \frac{E(E - V)}{Z_l} \quad (2.40)$$

$$Q \approx -\frac{EV\delta}{Z_l}. \quad (2.41)$$

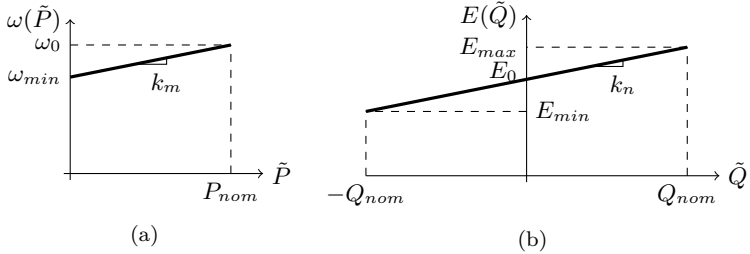
Diferentemente do caso anterior, observa-se que  $P$  é diretamente proporcional à  $(E - V)$  e  $Q$  é proporcional à  $\delta$ . Dessa maneira, para linhas com característica resistiva, utilizam-se as equações de *droop* abaixo.

$$E = E_0 - k_n \tilde{P} \quad (2.42)$$

$$\omega = \omega_0 + k_m \tilde{Q} \quad (2.43)$$

A Figura 2.7 ilustra as curvas de *droop* de frequência e tensão para linha resistiva. Observe que o sinal negativo em (2.39) impõe um sinal positivo em (2.43) e, conseqüentemente, uma inclinação positiva para a frequência.

Figura 2.8: Curvas de *droop* para linha capacitiva: (a) *droop* de frequência; e (b) *droop* de tensão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 2.2.1.3 Impedância de Linha Capacitiva

Mais raros, mas também existentes, são os casos onde a impedância de saída do inversor é capacitiva (ZHONG; HORNIK, 2013). Nesse caso,  $\vartheta \approx -\pi/2$  rad e, a partir de (2.26), (2.27) e (2.28), tem-se

$$P = -\check{P} = -\frac{EV \sin \delta}{Z_l} \quad (2.44)$$

$$Q = -\check{Q} = -\frac{E(E - V \cos \delta)}{Z_l}. \quad (2.45)$$

Para  $\delta$  pequeno, assume-se

$$P \approx -\frac{EV\delta}{Z_l} \quad (2.46)$$

$$Q \approx -\frac{E(E - V)}{Z_l}. \quad (2.47)$$

Observa-se que, com exceção do sinal, as relações são idênticas ao primeiro caso. Dessa maneira, pode-se definir as equações de *droop* como

$$\omega = \omega_0 + k_m \tilde{P} \quad (2.48)$$

$$E = E_0 + k_n \tilde{Q}. \quad (2.49)$$

Assim, as curvas de *droop* de tensão e frequência para uma linha capacitiva são ilustradas pela Figura 2.8.

### 2.2.1.4 Impedância de Linha Mista

Diferente dos casos anteriores, é comum que tanto as componentes resistivas quanto reativas da linha sejam consideradas. Dessa forma, há acoplamento entre as potências, a tensão e a frequência (QUESADA et al., 2013). O trabalho de Brabandere et al. (2004) propõe, então, a utilização das equações para as potências rotacionadas, coincidindo com o caso de linha indutiva. Assim,

$$\omega = \omega_0 - k_m \check{\check{P}} \quad (2.50)$$

$$E = E_0 - k_n \check{\check{Q}}. \quad (2.51)$$

A partir de (2.26),

$$\begin{bmatrix} \check{\check{P}} \\ \check{\check{Q}} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}(\vartheta) \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Substituindo (2.52) em (2.50) e (2.51), chega-se às equações de *droop* abaixo:

$$\omega = \omega_0 - k_m \sin(\vartheta) \tilde{P} + k_m \cos(\vartheta) \tilde{Q} \quad (2.53)$$

$$E = E_0 - k_n \cos(\vartheta) \tilde{P} - k_n \sin(\vartheta) \tilde{Q}. \quad (2.54)$$

Assim, para qualquer tipo de linha, pode-se determinar a equação de *droop* adequada ao sistema, desde que o ângulo da impedância de linha  $\vartheta$  seja conhecido.

## 2.2.2 Impedância Virtual

A impedância de linha tem papel fundamental na operação de inversores em paralelo, visto que o ângulo da impedância de linha é determinante na definição das equações de *droop*. Pode-se mostrar, ainda, que a divisão de potências só ocorre de forma equitativa quando as impedâncias de linha são proporcionalmente iguais em relação à potência nominal dos inversores (ZHONG, 2013).

É difícil assegurar que as linhas tenham as características desejadas ou as características para as quais o sistema foi projetado. Por outro lado, a impedância de saída do inversor pode ser imposta através do projeto do controlador (GUERRERO et al., 2005). Como essa impedância não existe fisicamente, ela é chamada de impedância virtual.



Se a impedância de saída for predominante sobre a impedância da linha, a impedância total é aproximadamente igual à impedância virtual. Dessa forma, a variabilidade ou incerteza sobre a impedância da linha é atenuada.

A impedância virtual também pode ser implementada através de sua função de transferência  $Z_{virt}(s)$ . Se a malha de tensão for bastante rápida, pode-se considerar que a tensão na saída do inversor é igual à tensão de referência  $V_{ref}(s)$  (ZHONG; HORNİK, 2013). Assim, pode-se aplicar

$$V_{ref}(s) = V_{droop}(s) - Z_{virt}(s)I_{out}(s), \quad (2.55)$$

onde  $V_{droop}(s)$  é calculado através de equações de *droop*,  $I_{out}(s)$  é a corrente de saída do inversor e  $s$  é a variável de Laplace.

Apesar de sua importância para o bom funcionamento do *droop control*, a impedância virtual tem o inconveniente de produzir na carga uma queda de tensão adicional à queda imposta pelas equações de *droop*. Assim, deve-se ponderar o seu valor em relação à impedância da linha e a queda de tensão por ela provocada. O projeto da impedância virtual também tem impacto na qualidade de tensão sobre cargas não lineares (GUERRERO et al., 2005).

### 2.2.3 Droop Dinâmico

O *droop control*, conforme apresentado acima, tem poucos graus de liberdade. A princípio, o projetista teria liberdade para projetar somente as constantes  $k_m$  e  $k_n$  e a impedância virtual. No entanto, normalmente  $k_m$  e  $k_n$  são escolhidas em função dos máximos desvios permitidos de tensão e frequência (MOHAMED; EL-SAADANY, 2008), restando ao projetista apenas a definição da impedância virtual. Entretanto, diversos trabalhos têm proposto a substituição das constantes de *droop* por sistemas dinâmicos. Essa modificação disponibiliza mais graus de liberdade ao projetista e permite, por exemplo, restaurar a frequência e a tensão na saída do inversor. Assim, as equações de *droop*, para uma linha indutiva, teriam a forma

$$\omega = \omega_0 - G_\omega(s)\tilde{P} \quad (2.56)$$

$$E = E_0 - G_E(s)\tilde{Q}, \quad (2.57)$$

onde  $G_\omega(s)$  impõe o desvio de frequência em relação à potência ativa e  $G_E(s)$ , o desvio da tensão em relação à potência reativa. Essa abordagem é encontrada em diversos trabalhos, como:

- O trabalho de Guerrero et al. (2002), que introduz o conceito de *droop* transitório, utilizando  $G_\omega(s) = k_m \tau_\omega s / (\tau_\omega s + 1)$ . Dessa forma, em regime permanente, tem-se  $\omega_i = \omega_0$ . A mesma estratégia é adotada em Guerrero et al. (2005) e Vasquez et al. (2013), por exemplo. Para essa estratégia, vale ressaltar que, como o balanço de potências é realizado durante o regime transitório, inversores conectados posteriormente não têm informação das potências demandadas pelas cargas. Assim, pode haver um desequilíbrio entre as potências entregues pelos inversores;
- O trabalho de Mohamed e El-Saadany (2008), onde  $G_\omega(s)$  e  $G_E(s)$  assumem uma estrutura igual aos controladores proporcionais derivativos (PD). O ajuste adaptativo desses parâmetros confere estabilidade e desempenho para diversas condições de carga. Essa estrutura do tipo PD também é encontrada em Guerrero et al. (2004), por exemplo; e
- Em Abusara, Sharkh e Guerrero (2014) ou em Goya et al. (2011),  $G_\omega(s)$  e  $G_E(s)$  são configurados como controladores PI para garantir seguimento das potências de referência. O objetivo e a estrutura do controlador nos trabalhos citados são diferentes dos objetivos do presente trabalho, mas ilustram a utilização do *droop* dinâmico.

### 2.3 ESTIMAÇÃO DAS POTÊNCIAS ATIVA E REATIVA

Tendo em vista o diagrama apresentado no início do capítulo, observa-se que para o funcionamento do *droop control* é necessário estimar as potências ativa e reativa que o inversor entrega ao sistema. Considerando que a tensão e a corrente entregues ao sistema são dadas, respectivamente, por

$$v(t) = \sqrt{2}\bar{v}(t) \cos[\omega_0 t + \psi_v(t)] \quad (2.58)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\bar{i}(t) \cos[\omega_0 t + \psi_i(t)], \quad (2.59)$$

então, a potência ativa instantânea  $p(t)$  desenvolvida por uma fonte é definida por

$$p(t) = v(t)i(t) = \bar{v}(t)\bar{i}(t)\{\cos\varphi(t) + \cos[2\omega_0 t + \psi_v(t) + \psi_i(t)]\} \quad (2.60)$$

e a potência reativa  $q(t)$ , por

$$q(t) = v(t)i_{\perp}(t) = \bar{v}(t)\bar{i}(t)\{-\sin\varphi(t)+\sin[2\omega_0t+\psi_v(t)+\psi_i(t)]\}, \quad (2.61)$$

sendo  $\varphi(t) = \psi_v(t) - \psi_i(t)$  e  $i_{\perp}(t)$  a corrente  $i(t)$  atrasada em  $90^\circ$ . Nota-se que ambas as potências possuem uma parte constante e uma parte que oscila na frequência de  $2\omega_0$ . Em geral, não há interesse pela parte oscilatória das potências instantâneas, somente pelo seu valor médio. Para o cálculo dos valores médios, pode-se utilizar filtros que atenuem as componentes indesejadas em  $2\omega_0$ .

Como já mencionado, no *droop control*, a operação de filtragem descrita acima limita a dinâmica do sistema em malha fechada e constitui uma limitação da abordagem (AZEVEDO et al., 2011). Um segundo problema que surge é o cálculo da potência reativa, já que o sinal  $i_{\perp}(t)$  não existe na prática. Esse tema também é objeto de interesse na literatura, como, por exemplo, os trabalhos de Saitou e Shimizu (2002) e Furtado, Aguirre e Torres (2008).

Para a estimação das potências, há ainda uma segunda abordagem. A técnica se baseia no cálculo das potências ativa e reativa através dos fasores de tensão e corrente, conforme equações (2.62) e (2.63), sendo  $\hat{I}^*(t)$  o complexo conjugado de  $\hat{I}(t)$ . Assim, se for possível obter  $\hat{V}(t)$  e  $\hat{I}(t)$ , pode-se calcular diretamente as potências ativa e reativa. Essa ideia é utilizada nos trabalhos de Golestan et al. (2009) e Azevedo et al. (2011)<sup>5</sup>, por exemplo.

$$P(t) = \Re\{\hat{V}(t)\hat{I}^*(t)\} \quad (2.62)$$

$$Q(t) = \Im\{\hat{V}(t)\hat{I}^*(t)\} \quad (2.63)$$

Interessa-se, então, por uma maneira de se obter os fasores dinâmicos dos sinais de tensão e corrente, possibilitando a obtenção de  $\tilde{P}$  e  $\tilde{Q}$ . Essa operação pode ser realizada através da geração de componentes em quadratura e será apresentada a seguir.

### 2.3.1 Geração de Componentes em Quadratura

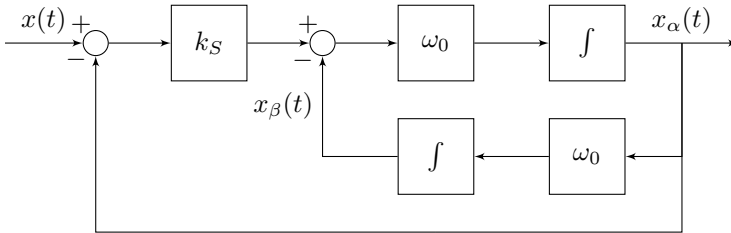
Para criar as componentes em quadratura de um sinal, utiliza-se um gerador de sinais em quadratura (QSG), que gera um sinal periódico

---

<sup>5</sup>Também é comum encontrar na literatura a denominação  $dq$ , onde  $d$  se refere ao eixo direto e  $q$ , ao eixo em quadratura, correspondendo às componentes real e imaginária, respectivamente (VENKATASUBRAMANIAN; SCHATTLER; ZABORSKY, 1995).

dico em fase e um segundo sinal atrasado em  $90^\circ$  em relação ao sinal de entrada. Nesse trabalho, será utilizado um QSG baseado em integradores generalizados de segunda ordem (SOGI). Esse QSG, conhecido como SOGI-QSG, tem sua estrutura apresentada na Figura 2.9, onde  $k_S$  é um ganho,  $x(t)$  é um sinal de entrada periódico,  $x_\alpha(t)$  é a sua componente em fase e  $x_\beta(t)$ , a componente em quadratura, atrasada em  $90^\circ$  em relação a  $x_\alpha(t)$ .

Figura 2.9: Diagrama de blocos do SOGI-QSG.



Fonte: Elaborado pelo autor.

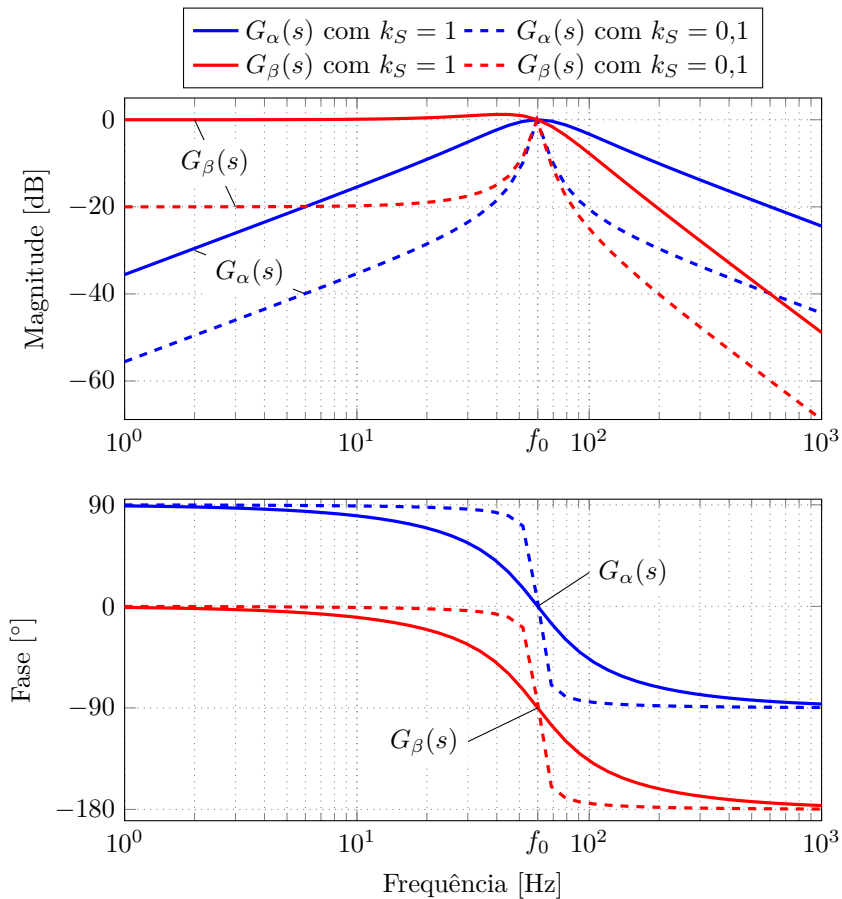
A partir do diagrama de blocos apresentado, podem-se determinar as funções de transferência da entrada para  $x_\alpha(t)$  e para  $x_\beta(t)$ , descritas por (2.64) e (2.65), respectivamente.

$$G_\alpha(s) = \frac{X_\alpha(s)}{X(s)} = \frac{k_S \omega_0 s}{s^2 + k_S \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.64)$$

$$G_\beta(s) = \frac{X_\beta(s)}{X(s)} = \frac{k_S \omega_0^2}{s^2 + k_S \omega_0 s + \omega_0^2} \quad (2.65)$$

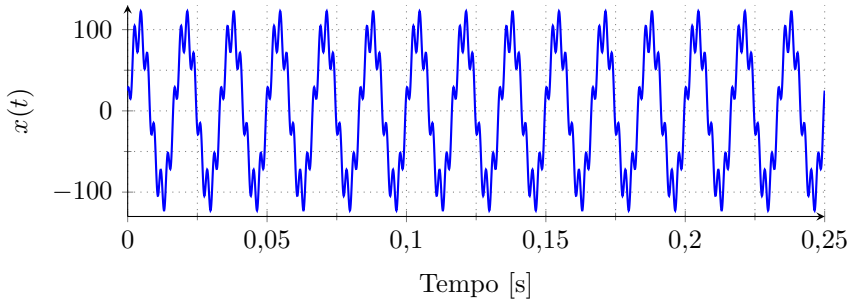
A Figura 2.10 apresenta os diagramas de Bode de  $G_\alpha(s)$  e  $G_\beta(s)$  para diferentes valores de  $k_S$ . Observa-se que se o SOGI-QSG estiver sintonizado na mesma frequência do sinal de entrada, sua saída  $x_\alpha$  estará em fase com  $x$ , enquanto  $x_\beta$  terá a mesma amplitude, mas estará atrasado em  $90^\circ$ . O SOGI-QSG também funciona como um filtro, já que atenua as componentes de  $x$  acima ou abaixo de  $\omega_0$ . A seletividade desse filtro depende do parâmetro  $k_S$ . Quanto menor o seu valor, mais seletivo é o filtro. No entanto, quanto mais seletivo o filtro, mais lenta é a sua resposta, conforme pode ser observado na Figura 2.11. As respostas apresentadas nessa figura são obtidas com a aplicação do sinal  $x(t) = 100 \sin \omega_0 t + 25 \cos 7\omega_0 t$  no SOGI-QSG, assumindo  $\omega_0 = 2\pi 60$  rad/s. Enquanto o sistema com  $k_S = 1$  converge em cerca de 20 ms, quando  $k_S = 0,1$ , esse tempo passa para 200 ms. Por ou-

Figura 2.10: Diagramas de Bode de  $G_\alpha(s)$  e  $G_\beta(s)$  para  $k_S = 1$  e para  $k_S = 0,1$ . SOGI-QSG sintonizado em  $\omega_0 = 2\pi f_0$  e  $f_0 = 60$  Hz.

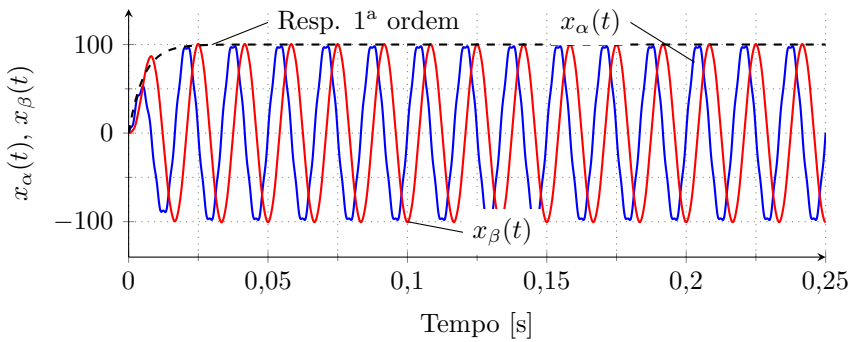


Fonte: Elaborado pelo autor.

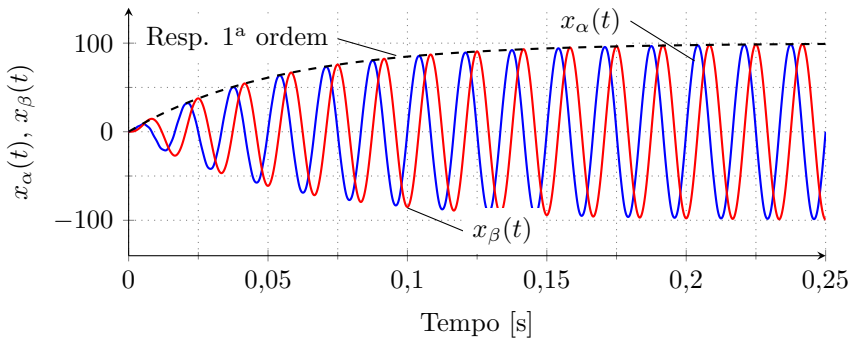
Figura 2.11: Resposta temporal do SOGI-QSG sintonizado em  $\omega_0 = 2\pi 60$  rad/s: (a) sinal de entrada  $x(t) = 100 \sin \omega_0 t + 25 \cos 7\omega_0 t$ ; (b) saídas para  $k_S = 1$ ; e (c) saídas para  $k_S = 0,1$ .



(a)



(b)



(c)

Fonte: Elaborado pelo autor.

tro lado, pode-se notar uma pequena deformação de  $x_\alpha(t)$  no primeiro caso próximo aos picos do sinal. Essa deformação se deve à componente harmônica presente no sinal de entrada e à baixa seletividade do sistema, permitindo sua propagação aos sistemas a ele conectados.

Comparando as respostas do SOGI-QSG com um sistema de primeira ordem (linhas tracejadas) do tipo

$$G(s) = \frac{1}{\tau_S s + 1}, \quad (2.66)$$

onde  $\tau_S$  representa a sua constante de tempo, pode-se demonstrar que a equação

$$\tau_S = \frac{2}{k_S \omega_0} \quad (2.67)$$

relaciona o ganho  $k_S$  com a constante de tempo  $\tau_S$  (BRABANDERE, 2006).

Após obter as componentes em quadratura, procura-se extrair as componentes imaginária e real do fasor dinâmico. Para isso, aplica-se a transformação abaixo (BRABANDERE, 2006):

$$\begin{bmatrix} X_R(t) \\ X_I(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0(t) & \sin \theta_0(t) \\ -\sin \theta_0(t) & \cos \theta_0(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha(t) \\ x_\beta(t) \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

utilizando  $\theta_0(t) = \omega_0 t$  como ângulo de referência. Dessa forma, as potências ativa e reativa estimadas podem ser calculadas por

$$\tilde{P}(t) = \Re\{\hat{V}(t)\hat{I}^*(t)\} = V_R(t)I_R(t) + V_I(t)I_I(t) \quad (2.69)$$

$$\tilde{Q}(t) = \Im\{\hat{V}(t)\hat{I}^*(t)\} = V_I(t)I_R(t) - V_R(t)I_I(t), \quad (2.70)$$

onde as componentes reais e imaginárias são obtidas com (2.64), (2.65) e (2.68).

No trabalho Brabandere et al. (2004), os autores consideram a realização do balanço de correntes ao invés do balanço de potências entre os inversores. Para isso, implementa-se o *droop control* baseado nas correntes “ativa”  $I_R(t)$  e “reativa”  $I_I(t)$  para calcular a tensão de referência. Assim, para uma linha indutiva, as equações de *droop* seriam definidas como

$$\omega(t) = \omega_0 - k_m I_R(t), \quad (2.71)$$

$$E(t) = E_0 - k_n I_I(t). \quad (2.72)$$

De maneira equivalente, pode-se ainda utilizar as equações de *droop* clássicas – (2.37) e (2.34), por exemplo –, bastando, para isso, realizar

as aproximações abaixo:

$$\tilde{P}(t) \approx E_0 I_R(t) \quad (2.73)$$

$$\tilde{Q}(t) \approx -E_0 I_I(t). \quad (2.74)$$

A vantagem dessa técnica, além de evitar a multiplicação entre tensão e corrente, é que ela permite a operação do sistema mesmo quando submetido à condição de curto-circuito, limitando as correntes de saída (BRABANDERE et al., 2004). Assim, devido às vantagens acima enunciadas, essa estratégia será adotada nesse trabalho.

Por razões de implementação prática, pode-se considerar a presença de alguma componente contínua no sinal de entrada  $x(t)$  do SOGI-QSG. Analisando os diagramas de Bode do SOGI-QSG, percebe-se que, em regime permanente, qualquer componente constante é eliminada em  $x_\alpha(t)$ . No entanto, essa componente pode aparecer atenuada em  $x_\beta(t)$ , distorcendo os sinais  $X_R(t)$  e  $X_I(t)$  em (2.68). Como solução para o problema apresentado, uma modificação sobre a estrutura do SOGI-QSG é sugerida em Karimi-Ghartemani et al. (2012). Essa solução não será adotada neste trabalho, mas consta como referência para o assunto.

## 2.4 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Nesse capítulo, foram abordados os conceitos fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho. Inicialmente, conduziu-se à obtenção das equações de *droop* a partir da análise do fluxo de potências numa linha. Mostrou-se que, controlando a tensão e a frequência do inversor, pode-se controlar as quantidades de potência ativa e reativa entregues à rede ou carga. Discutiu-se também a importância e o papel das impedâncias de linha na divisão das potências entre os inversores do sistema.

Como o sistema opera em corrente alternada, as derivadas de corrente e tensão do sistema não se anulam. Dessa forma, foi introduzido o conceito de fasor dinâmico, que permite extrair grandezas constantes a partir de grandezas que variam sinusoidalmente, permitindo analisar tanto o regime transitório quanto o regime permanente de sistemas em corrente alternada.

Sabe-se que o cálculo das potências é um processo que tem grande influência na dinâmica do sistema em malha fechada. Dessa forma, uma alternativa à utilização de filtros passa-baixa é oferecida.



Essa alternativa utiliza componentes em quadratura para calcular as potências, conseguindo obter seus valores de forma mais eficaz. Comparações entre as técnicas clássicas com filtros passa-baixa e a técnica adotada nesse trabalho são encontradas em Azevedo et al. (2011). Além disso, considerar o balanço de correntes ao invés do balanço de potências evita a não linearidade da multiplicação entre tensão e corrente.



## Capítulo 3

---

# MODELAGEM DO SISTEMA

---

Nesse capítulo, define-se um circuito que represente a operação de dois inversores monofásicos em paralelo. Assim, procede-se a modelagem de cada um dos elementos constituintes, possibilitando a obtenção do modelo completo do sistema. Esse modelo é representado através de fasores dinâmicos, permitindo descrever o sistema da perspectiva de grandes sinais. Por fim, valida-se o modelo através de simulações no *software* Matlab/Simulink.

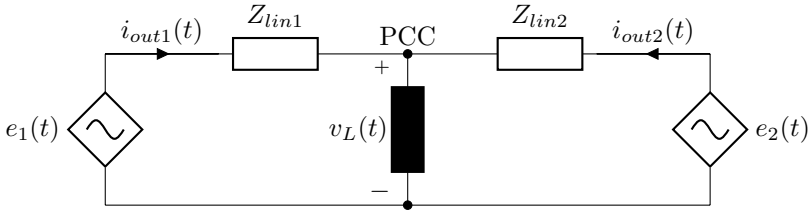
### 3.1 DEFINIÇÃO DO MODELO

O sistema a ser modelado é apresentado pela Figura 3.1, onde se tem dois inversores monofásicos alimentando uma carga através de suas respectivas linhas. De forma genérica, pode haver mais fontes conectadas ao ponto de conexão comum (PCC). Assim, a proposta aqui apresentada é de modelar o comportamento do sistema do ponto de vista de um único inversor, onde se tem acesso somente às variáveis locais de tensão e corrente. As contribuições de outras cargas ou fontes conectadas ao PCC são vistas como perturbações exógenas.

Então, o problema apresentado é dividido em duas partes: a parte de potência, que engloba o inversor, a linha e a carga e demais inversores; e a parte de controle, constituída pelo cálculo das potências e equações de *droop*.

Para a parte de potência, utiliza-se o circuito apresentado pela Figura 3.2, onde se considera um inversor com filtro indutivo-capacitivo-indutivo (LCL), composto pelos indutores  $L_{inv}$  e  $L_{grid}$  e pelo capacitor  $C_{inv}$ , uma linha representada por uma impedância  $Z_{lin}$  e o PCC, onde

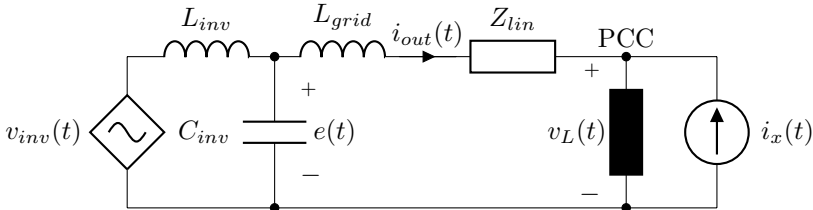
Figura 3.1: Problema a ser modelado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

são conectadas cargas e os demais inversores. O comportamento desses inversores se faz presente no modelo como a perturbação  $i_x(t)$ . As cargas estão conectadas ao PCC e são submetidas à tensão  $v_L$ . Nos próximos parágrafos, os modelos de cada elemento serão detalhados.

Figura 3.2: Circuito utilizado para modelar a parte de potência.



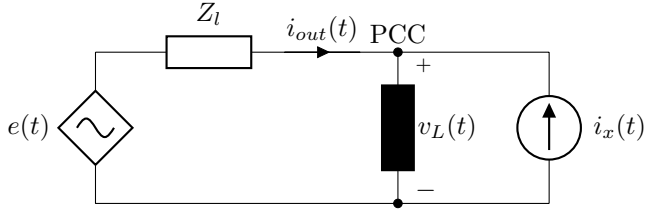
Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.1.1 Modelo do Inversor

O inversor utilizado nesse projeto é do tipo *full bridge* com um filtro de saída do tipo LCL com ramo de amortecimento, versão monofásica do inversor apresentado em Bezerra (2013). O controle da tensão sobre o capacitor é realizado com um controlador ressonante, projetado conforme Pereira et al. (2014), garantindo seguimento de sinais de referência sinusoidais. Assumindo ainda que a malha de tensão tem uma dinâmica muito rápida, o modelo do inversor pode ser definido como uma fonte de tensão ideal  $e(t) = v_{ref}(t)$  em série com sua impedância de saída  $Z_{inv}$  (ZHONG; HORNIK, 2013). A impedância  $Z_{inv}$  é definida como a soma da impedância virtual  $Z_{virt}$ , implementada na malha

de tensão, com a indutância  $L_{grid}$  do filtro de saída do inversor. Da mesma maneira, associa-se  $Z_{inv}$  à impedância da linha  $Z_{lin}$ , obtendo uma impedância total de linha  $Z_l$  (onde estão incluídas  $L_{grid}$ ,  $Z_{virt}$  e  $Z_{lin}$ ). Dessa forma, o circuito pode ser redefinido, conforme Figura 3.3.

Figura 3.3: Circuito simplificado para a parte de potência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.1.2 Modelo da Carga

De forma genérica, considera-se a carga como uma fonte de corrente associada a um resistor e a um capacitor, conforme Figura 3.4. O resistor  $R_L$  representa uma carga fixa, ou uma carga mínima que fica conectada ao PCC. Da mesma maneira, o capacitor  $C_L$  representa qualquer capacitância parasita presente nas linhas ou na carga. A presença desse capacitor também permite que se tenha a tensão sobre a carga,  $v_L(t)$ , como um dos estados do sistema, conforme (3.1). Finalmente, a fonte de corrente  $i_L(t)$  representa quaisquer cargas conectadas à rede.

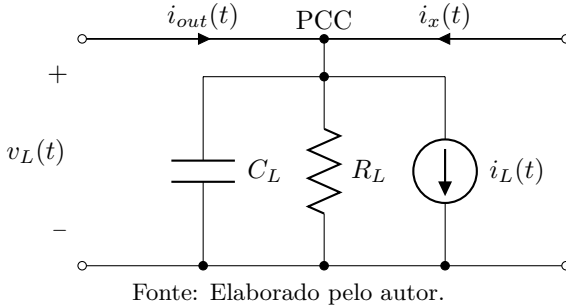
$$C_L \frac{dv_L(t)}{dt} = -\frac{v_L(t)}{R_L} + i_{out}(t) + i_x(t) - i_L(t) \quad (3.1)$$

Como o sistema opera em corrente alternada, buscam-se as equações de estado do fasor dinâmico  $\hat{V}_L$  associado à tensão  $v_L$ . Então, aplica-se (2.15) em (3.1), obtendo

$$\begin{cases} C_L \frac{dV_{LR}}{dt} = \omega_0 C_L V_{LI} - \frac{V_{LR}}{R_L} + I_{outR} + I_{xR} - I_{LR} \\ C_L \frac{dV_{LI}}{dt} = -\omega_0 C_L V_{LR} - \frac{V_{LI}}{R_L} + I_{outI} + I_{xI} - I_{LI} \end{cases}, \quad (3.2)$$

lembrando que os índices  $R$  e  $I$  indicam as partes real e imaginária dos fasores dinâmicos.

Figura 3.4: Modelo da carga.



De forma genérica, as cargas representadas pela fonte de corrente podem ser lineares ou não, variantes ou invariantes no tempo. No caso de cargas lineares, o fasor dinâmico de  $i_L(t)$  pode ser dado por

$$\begin{cases} I_{LR} &= g_L V_{LR} + b_L V_{LI} \\ I_{LI} &= -b_L V_{LR} + g_L V_{LI} \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde  $g_L$  é a condutância da carga e  $b_L$  é a sua susceptância.

Substituindo (3.3) em (3.2), tem-se (3.4). Esse é o modelo completo da carga.

$$\frac{d\mathbf{x}_a}{dt} = \mathbf{A}_a(g_L, b_L)\mathbf{x}_a + \mathbf{B}_{1a}\mathbf{u}_{1a} + \mathbf{B}_{2a}\mathbf{u}_{2a}, \quad (3.4)$$

onde

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} V_{LR} \\ V_{LI} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{1a} = \begin{bmatrix} I_{outR} \\ I_{outI} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{2a} = \begin{bmatrix} I_{xR} \\ I_{xI} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_a(g_L, b_L) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_L} \left( \frac{1}{R_L} + g_L \right) & \omega_0 - \frac{b_L}{C_L} \\ -\omega_0 + \frac{b_L}{C_L} & -\frac{1}{C_L} \left( \frac{1}{R_L} + g_L \right) \end{bmatrix},$$

e

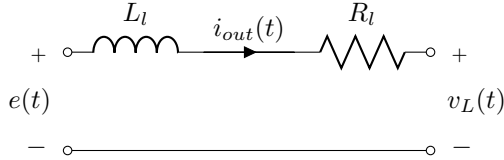
$$\mathbf{B}_{1a} = \mathbf{B}_{2a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_L} \end{bmatrix}.$$

### 3.1.3 Modelo da Linha

A linha que conecta o inversor ao PCC é modelada como uma impedância com parte resistiva,  $R_l$ , e parte indutiva,  $L_l$ , conforme apre-

sentado pela Figura 3.5. Como mencionado acima e referenciado em Guerrero et al. (2005) e Zhong e Hornik (2013), estão incluídos nesses elementos a impedância de saída do inversor  $Z_{inv}$  e a indutância de saída do filtro  $L_{grid}$ .

Figura 3.5: Modelo da linha.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A corrente  $i_{out}(t)$  é obtida a partir da tensão imposta pelo inversor  $e(t)$  e da tensão  $v_L(t)$ . A equação que descreve o seu comportamento temporal é dada por:

$$L_l \frac{di_{out}(t)}{dt} = e(t) - R_l i_{out}(t) - v_L(t) \quad (3.5)$$

De forma análoga à realizada para a obtenção do modelo da carga, será utilizada a representação por fasores dinâmicos. Assim, aplicando (2.15) em (3.5) obtém-se as equações de estado de  $\hat{I}_{out}(t)$ :

$$\begin{cases} L_l \frac{dI_{outR}}{dt} = E_R - V_{LR} - R_l I_{outR} + \omega_0 L_l I_{outI} \\ L_l \frac{dI_{outI}}{dt} = E_I - V_{LI} - \omega_0 L_l I_{outR} - R_l I_{outI} \end{cases} \quad (3.6)$$

Para tornar a notação de (3.6) mais compacta, adota-se

$$\mathbf{x}_b = \begin{bmatrix} I_{outR} \\ I_{outI} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{1b} = \begin{bmatrix} E_R \\ E_I \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{2b} = \begin{bmatrix} V_{LR} \\ V_{LI} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -\frac{R_l}{L_l} & \omega_0 \\ -\omega_0 & -\frac{R_l}{L_l} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{1b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_l} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_{2b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_l} \end{bmatrix}.$$

Assim, (3.6) é reescrito como

$$\frac{d\mathbf{x}_b}{dt} = \mathbf{A}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_{1b} \mathbf{u}_{1b} + \mathbf{B}_{2b} \mathbf{u}_{2b}. \quad (3.7)$$

### 3.1.4 Estimação das Potências

Nessa dissertação, as potências são estimadas conforme descrito no capítulo anterior e a dinâmica do SOGI-QSG é adicionada ao modelo do sistema. Essa dinâmica é definida pelas funções de transferência  $G_\alpha(s)$  e  $G_\beta(s)$ , podendo também ser descrita por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_S\omega_0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_S\omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} i_{out}. \quad (3.8)$$

Utilizando fasores dinâmicos, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} I_{\alpha R} \\ I_{\alpha I} \\ I_{\beta R} \\ I_{\beta I} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_S\omega_0 & \omega_0 & -\omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & -k_S\omega_0 & 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & \omega_0 & -\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha R} \\ I_{\alpha I} \\ I_{\beta R} \\ I_{\beta I} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} k_S\omega_0 & 0 \\ 0 & k_S\omega_0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{outR} \\ I_{outI} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

As variáveis  $I_R$  e  $I_I$  são obtidas a partir de (2.68). Utilizando a notação de (2.4) para  $i_\alpha$  e  $i_\beta$ , tem-se

$$\begin{bmatrix} I_R \\ I_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re \{ (I_{\alpha R} + jI_{\alpha I})e^{j\theta_0} \} \\ \Re \{ (I_{\beta R} + jI_{\beta I})e^{j\theta_0} \} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$$\begin{bmatrix} I_R \\ I_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha R} \cos \theta_0 - I_{\alpha I} \sin \theta_0 \\ I_{\beta R} \cos \theta_0 - I_{\beta I} \sin \theta_0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Por fim, para calcular as potências, são utilizadas as equações (2.73) e (2.74). Dessa forma, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_c}{dt} = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c \\ \mathbf{y}_c = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c \end{cases}, \quad (3.12)$$

onde

$$\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} I_{\alpha R} \\ I_{\alpha I} \\ I_{\beta R} \\ I_{\beta I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_c = \begin{bmatrix} I_{outR} \\ I_{outI} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_c = \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{bmatrix},$$



$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -k_S \omega_0 & \omega_0 & -\omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & -k_S \omega_0 & 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & \omega_0 & -\omega_0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} k_S \omega_0 & 0 \\ 0 & k_S \omega_0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{C}_c = E_0 \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_0 & -\cos \theta_0 \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \sin \theta_0 & -\sin^2 \theta_0 \\ \cos \theta_0 \sin \theta_0 & -\sin^2 \theta_0 & -\cos^2 \theta_0 & \cos \theta_0 \sin \theta_0 \end{bmatrix}.$$

Nota-se que a matriz de saída  $\mathbf{C}_c$  é dependente de  $\theta_0$ , que é variante no tempo. No entanto, ela pode ser reescrita como

$$\mathbf{C}_c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathbf{C}_{c0} + \varepsilon_1 \mathbf{C}_{c1} + \varepsilon_2 \mathbf{C}_{c2}, \quad (3.13)$$

onde  $\varepsilon_1 = \sin^2 \theta_0$ ,  $\varepsilon_2 = \cos \theta_0 \sin \theta_0$ ,

$$\mathbf{C}_{c0} = E_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{c1} = E_0 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{C}_{c2} = E_0 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

### 3.1.5 Modelo Completo

Observando os modelos obtidos, nota-se que  $\mathbf{u}_{1a} = \mathbf{x}_b$ ,  $\mathbf{u}_{2b} = \mathbf{x}_a$ ,  $\mathbf{u}_{1b} = \mathbf{y}_d$  e  $\mathbf{u}_c = \mathbf{x}_b$ . Dessa forma, pode-se agrupar os modelos da carga, da linha e do cálculo de potências, obtendo um sistema linear com parâmetros variantes, conforme equação (3.14), onde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= [\mathbf{0}_2 \ \mathbf{0}_2 \ \mathbf{C}_c(\varepsilon_1, \varepsilon_2)], \\ \mathbf{x}_{lin} &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{lin}(g_L, b_L) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a(g_L, b_L) & \mathbf{B}_{1b} & \mathbf{0}_{2 \times 4} \\ \mathbf{B}_{2b} & \mathbf{A}_b & \mathbf{0}_{2 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_{1lin} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{B}_{1b} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{2lin} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2a} \\ \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_{lin}}{dt} = \mathbf{A}_{lin}(g_L, b_L) \mathbf{x}_{lin} + \mathbf{B}_{1lin} \mathbf{u}_{1b} + \mathbf{B}_{2lin} \mathbf{u}_{2a} \\ \mathbf{y}_c = \mathbf{C}_{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mathbf{x}_{lin} \end{cases} \quad (3.14)$$

Esse sistema tem como variáveis de controle  $\mathbf{u}_{1b} = [E_R \ E_I]'$ , como perturbação  $\mathbf{u}_{2a} = [I_{xR} \ I_{xI}]'$  e como saída,  $\mathbf{y}_c = [\tilde{P} \ \tilde{Q}]'$ . No entanto, as equações de *droop* fornecem ao sistema as variáveis  $E$  e  $\omega$ , não  $E_R$  e  $E_I$ . Assim, é necessário colocar o sistema numa forma compatível com as equações de *droop*. Seja o fasor dinâmico  $\hat{E}(t)$  associado a  $e(t)$  dado por

$$\hat{E}(t) = E_R(t) + jE_I(t) = E(t)e^{j\psi(t)}. \quad (3.15)$$

Portanto,

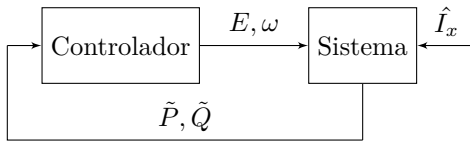
$$\hat{E}(t) = E(t) \cos \psi(t) + jE(t) \sin \psi(t). \quad (3.16)$$

Logo, pode-se reescrever o vetor de entrada  $\mathbf{u}_{1b}$  como

$$\begin{cases} \frac{d\psi(t)}{dt} = \Delta\omega(t) \\ \mathbf{u}_{1b} = \begin{bmatrix} E(t) \cos(\psi(t)) \\ E(t) \sin(\psi(t)) \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (3.17)$$

onde  $\psi(t)$  aparece como um estado adicional, sendo função da frequência  $\omega(t)$  imposta pelo *droop control*. Dessa forma, o modelo completo do sistema é dado pelas equações (3.14) e (3.17). Assim, do ponto de vista do controlador, o sistema pode ser visto como o representado na Figura 3.6.

Figura 3.6: Diagrama do sistema.



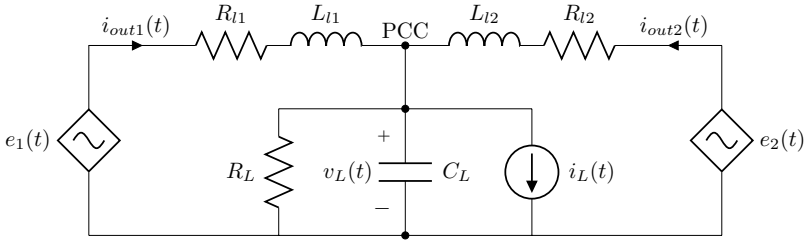
Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, serão apresentados os resultados de simulações que validam o modelo proposto. Essas simulações também demonstram a precisão do modelo na descrição dos comportamentos estático e dinâmico do sistema.

### 3.2 VALIDAÇÃO DO MODELO

Para validar o modelo, seu comportamento é comparado a um modelo detalhado. Esse modelo detalhado representa o comportamento real (sinusoidal) de uma rede com inversores, conforme Figura 3.7 e os parâmetros da Tabela 3.1.

Figura 3.7: Circuito para modelo detalhado (com grandezas sinusoidais).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3.1: Parâmetros utilizados para validação do modelo.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$S_{nom1}$	6 kVA	$S_{nom2}$	3 kVA
$R_L$	10 k $\Omega$	$C_L$	1 $\mu$ F
$R_{l1}$	250 m $\Omega$	$R_{l2}$	400 m $\Omega$
$L_{l1}$	550 $\mu$ H	$L_{l2}$	1150 $\mu$ H

Fonte: Elaborado pelo autor.

No modelo detalhado, as tensões dos inversores são dadas por

$$e_i(t) = \sqrt{2}E_i(t) \cos \left[ \int_0^t \omega_i(\tau) d\tau \right], \quad (3.18)$$

com  $i \in \{1, 2\}$ . As variáveis  $E_i(t)$  e  $\omega_i(t)$  são consideradas como entradas do sistema. As suas saídas são as potências  $\tilde{P}_i$  e  $\tilde{Q}_i$ , obtidas através de (2.73) e (2.74), onde  $I_{Ri}$  e  $I_{Li}$  são calculados por (3.8) e (2.68) a partir de  $i_{out\ i}(t)$ . Dessa forma, as malhas são fechadas com as equações de *droop* abaixo:

$$E_i = E_0 - k_n [\cos(\vartheta_i) \tilde{P}_i + \sin(\vartheta_i) \tilde{Q}_i] \quad (3.19)$$

$$\omega_i = \omega_0 - G_\omega(s) [\sin(\vartheta_i) \tilde{P}_i - \cos(\vartheta_i) \tilde{Q}_i], \quad (3.20)$$

onde

$$G_\omega(s) = k_m \frac{\tau_\omega s}{1 + \tau_\omega s} \quad (3.21)$$

implementa o *droop* transitório,  $\tau_\omega$  determina o tempo de recuperação da frequência e os valores das constantes acima são apresentados na Tabela 3.2. Os ângulos  $\vartheta_1$  e  $\vartheta_2$  são os ângulos das impedâncias das respectivas linhas, compostas por  $R_{l1,2}$  e  $L_{l1,2}$ .

Tabela 3.2: Parâmetros do *droop* utilizados para validação do modelo.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$E_0$	220 V	$\omega_0$	$2\pi 60$ rad/s
$k_{m1}$	1 rad/s/kW	$k_{m2}$	2 rad/s/kW
$k_{n1}$	1,5 V/kvar	$k_{n2}$	3 V/kvar
$\vartheta_1$	$39,7^\circ$	$\vartheta_2$	$47,3^\circ$
$\tau_{\omega 1}$	0,05 s	$\tau_{\omega 2}$	0,05 s

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para avaliar o comportamento do sistema para variações de carga, aplica-se a corrente  $i_L(t)$ , calculada através da equação (3.22) para o modelo detalhado e através da equação (3.23) para o modelo baseado em fasores dinâmicos, sendo  $P_L$  a potência ativa demandada pela carga.

$$i_L(t) = g_L(t)v_L(t) = \frac{P_L(t)}{E_0^2}v_L(t) \quad (3.22)$$

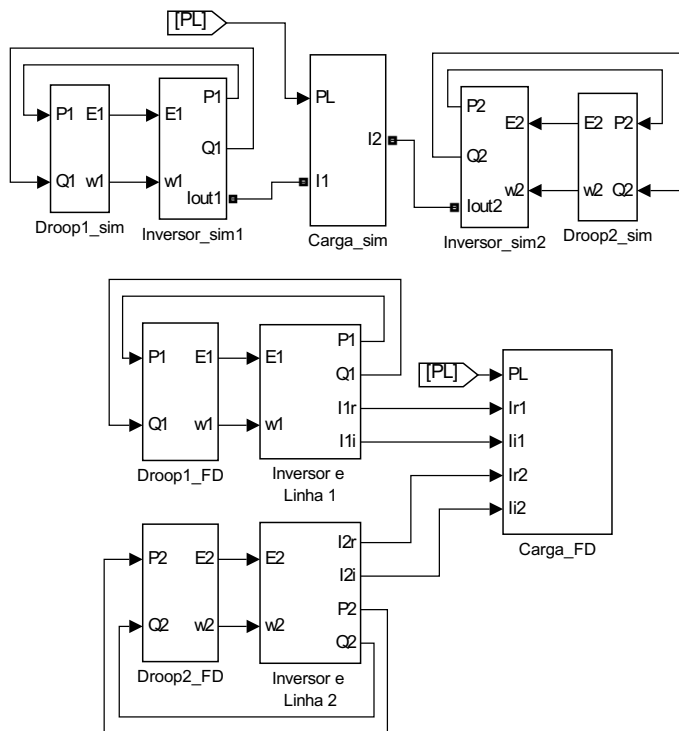
$$\hat{I}_L(t) = g_L(t)\hat{V}_L(t) = \frac{P_L(t)}{E_0^2}\hat{V}_L(t) \quad (3.23)$$

O teste de validação foi realizado no Simulink/Matlab, utilizando o diagrama de blocos apresentado na Figura 3.8. Nesse diagrama, se observa um grupo com dois inversores e carga simulados na parte superior. Esse grupo simula o modelo detalhado. Da mesma maneira, na parte inferior, um grupo com inversores e carga simula o modelo com fasores dinâmicos.

A evolução da potência  $P_L(t)$  demandada pela carga é apresentada pela Figura 3.9. Esse perfil de potência é aplicado à simulação, obtendo as respostas apresentadas na sequência.

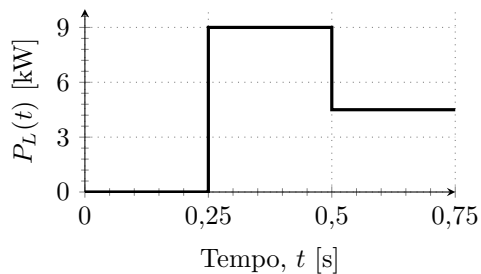
A Figura 3.10 apresenta as potências estimadas por cada um dos inversores. Nessa mesma figura também é possível observar a divisão de potências entre os inversores. Quando a carga demanda uma potência ativa de aproximadamente 9 kW, cada um dos inversores entrega ao sistema aproximadamente sua potência nominal. Quando a demanda é reduzida à metade, a potência entregue por cada um dos inversores também cai à metade de seu valor nominal. Apesar de a carga (através da corrente  $i_L(t)$ ) não consumir potência reativa, os indutores da rede e a capacitância  $C_L$  necessitam de potência reativa para funcionar, justificando a presença de potência reativa no sistema. O comportamento da potência reativa dos inversores é diferente devido ao desbalanço en-

Figura 3.8: Configuração utilizada para validação do modelo no Simulink.



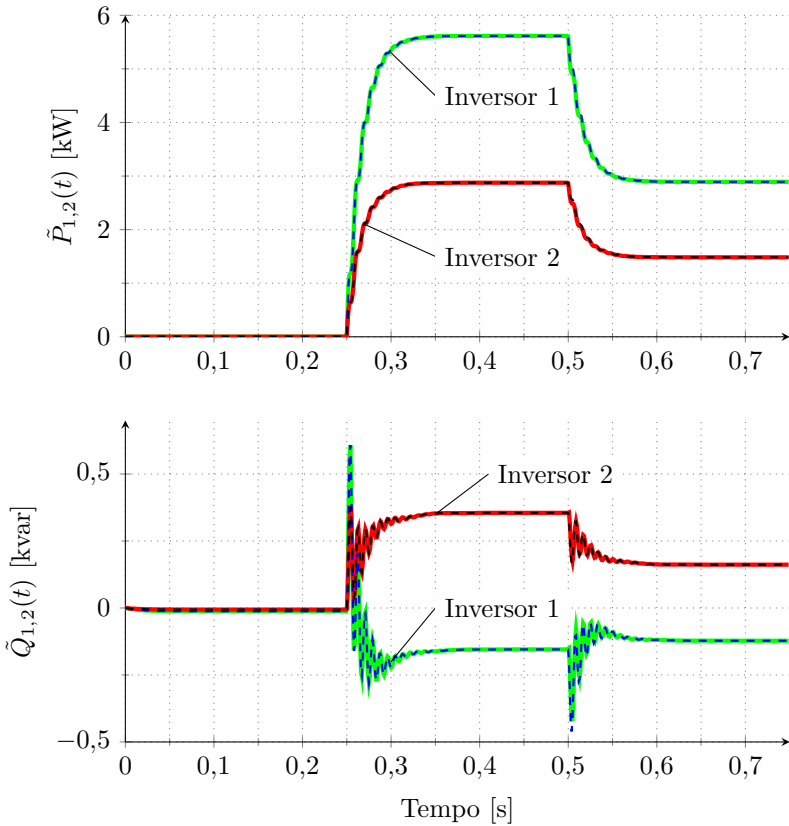
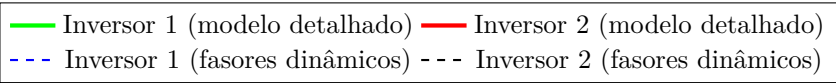
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3.9: Potência da carga para validação do modelo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3.10: Respostas do sistema no teste de validação. Potências ativa ( $\hat{P}_i$ ) e reativa ( $\hat{Q}_i$ ) estimadas pelos inversores.



Fonte: Elaborado pelo autor.

tre as impedâncias de linha.

A partir das potências estimadas, os sinais de comando  $E_i(t)$  e  $\omega_i(t)$  são calculados pelas equações de *droop* – (3.19) e (3.20) – e apresentados pela Figura 3.11, onde se observa a variação das tensões em função das potências. Nota-se, ainda, que as frequências impostas por cada um dos inversores são iguais em regime permanente e ligeiramente diferente durante o regime transitório, onde ocorre o balanço de potências. Após cerca de 250 ms, as frequências retornam ao seu valor nominal, efeito do *droop* transitório.

As curvas apresentadas na Figura 3.12 correspondem à tensão sobre a carga e às correntes entregues por cada inversor. São apresentadas as respostas do modelo detalhado (ondas sinusoidais) e as respostas do modelo com fasores dinâmicos. Observa-se que o modelo com fasores dinâmicos capta com precisão o comportamento estático do modelo detalhado. Para observar o comportamento dinâmico, reduziu-se o horizonte de observação em torno de  $t = 0,25$  s, conforme apresentado pela Figura 3.13.

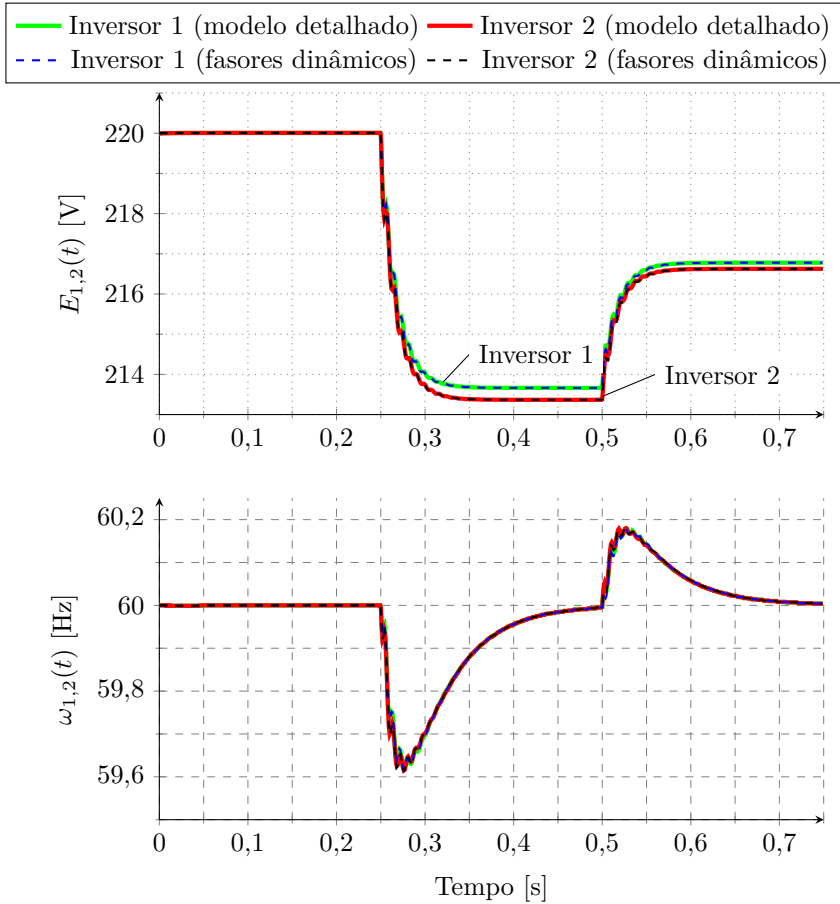
Observa-se que as curvas obtidas com o modelo detalhado e com o modelo com fasores dinâmicos estão sobrepostas para todas as variáveis analisadas, mostrando que o modelo com fasores dinâmicos se comporta da mesma forma que o sistema modelado. Assim, com base nos resultados dos testes apresentados, onde o modelo baseado em fasores dinâmicos representa com bastante precisão os comportamentos estático e dinâmico do sistema simulado, considera-se o modelo proposto validado.

### 3.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Nesse capítulo, propôs-se um modelo para descrever o problema do paralelismo de inversores. Esse modelo foi descrito através dos fasores dinâmicos e inclui as dinâmicas da carga, da linha e do SOGI-QSG, responsável pelo cálculo das potências. Também é proposta uma forma de modelar a rede (PCC) considerando o ponto de vista de um único inversor. Assim, as contribuições das demais unidades aparecem no modelo como uma perturbação exógena.

As simulações realizadas no Matlab/Simulink comprovam a precisão do modelo proposto, tanto na descrição do comportamento dinâmico quanto na descrição do comportamento estático do sistema. Assim, considera-se válido o modelo apresentado.

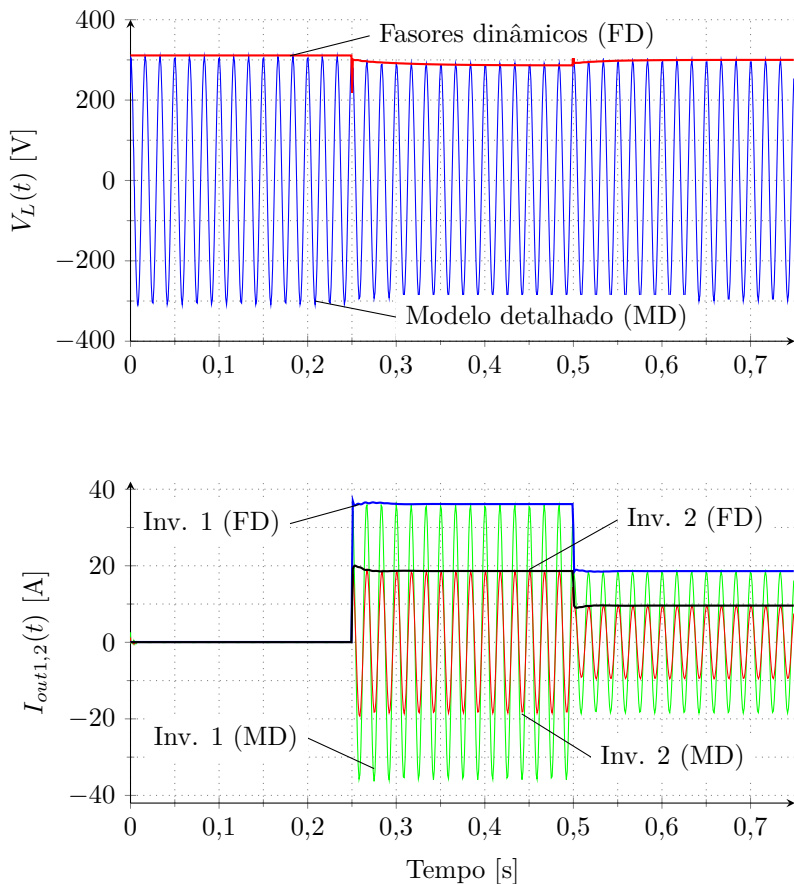
Figura 3.11: Respostas do sistema no teste de validação. Tensão  $E_i$  e frequência  $\omega_i$  impostas pelo inversor  $i$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

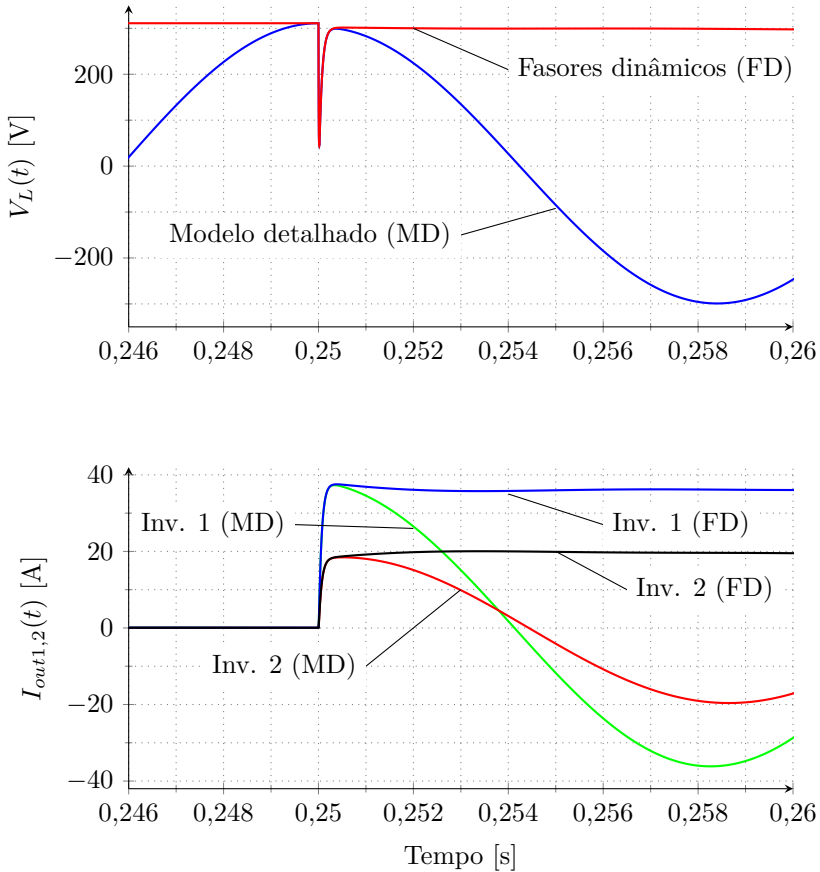


Figura 3.12: Respostas do sistema no teste de validação. Tensão  $V_L$  sobre a carga (ou no PCC) e correntes de saída  $I_{out\ i}$ . Os fasores dinâmicos são multiplicados por  $\sqrt{2}$  para fins de comparação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3.13: Respostas do sistema no teste de validação. *Zoom* sobre a tensão  $V_L$  sobre a carga (ou no PCC) e correntes de saída  $I_{out\ i}$ . Os fasores dinâmicos são multiplicados por  $\sqrt{2}$  para fins de comparação.



Fonte: Elaborado pelo autor.

## Capítulo 4

---

# PROJETO DE CONTROLE

---

Antes de apresentar a metodologia de projeto para os controladores, dedica-se uma seção desse capítulo ao problema do controle por realimentação estática de saída. A abordagem do problema através de LMIs possibilita acrescentar determinadas restrições, de forma que o desempenho seja assegurado e o tratamento de incertezas e variações paramétricas do sistema seja tratado adequadamente.

Na segunda parte do capítulo, propõe-se uma metodologia para o projeto dos controladores. Essa metodologia é dividida basicamente em duas partes: um projeto de *droop estático*; e um projeto para compensação dos desvios de frequência e tensão. Essa segunda etapa utiliza os resultados da realimentação estática de saída.

### 4.1 REALIMENTAÇÃO ESTÁTICA DE SAÍDA

Em muitos dos trabalhos citados no primeiro capítulo, a escolha dos parâmetros de  $G_\omega(s)$  e  $G_E(s)$  são empíricas ou procuram apenas garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. Nessa dissertação, busca-se projetar um *droop* dinâmico de forma que seja possível otimizar algum critério de desempenho. Para isso, são utilizadas técnicas de Controle Robusto. Inicia-se apresentando um problema cujo objetivo é a estabilização de um sistema. Em seguida, são adicionadas restrições que garantam desempenho do sistema e critérios de otimização para uma realimentação estática de saída. Por fim, consideram-se incertezas paramétricas.

### 4.1.1 Problema de Estabilização

Assuma um sistema linear do tipo

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}_f \mathbf{x}(t), \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{A}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Esse sistema é estável se e somente se

$$\exists \mathbf{P} = \mathbf{P}' < \mathbf{0}_n : \mathbf{A}'_f \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_f < \mathbf{0}_n. \quad (4.2)$$

Essa condição é conhecida como desigualdade de Lyapunov (BOYD et al., 1994). A existência de solução para o problema acima implica que todos os autovalores da matriz  $\mathbf{A}_f$  estão localizados no semiplano esquerdo do plano complexo.

Considera-se agora o sistema contínuo representado por<sup>1</sup>

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}, \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  e  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . O sistema (4.3) é estabilizável via realimentação de estados,  $\mathbf{u} = \mathbf{K}_0 \mathbf{x}$ , se e somente se existem matrizes  $\mathbf{P} = \mathbf{P}' > \mathbf{0}_n$  e  $\mathbf{K}_0$ , com dimensões compatíveis, de forma que a inequação

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_0) + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_0)'\mathbf{P} < \mathbf{0}_n \quad (4.4)$$

seja verificada (BOYD et al., 1994). Para a análise de estabilidade do sistema, é fácil verificar a existência de solução através de algoritmos de resolução LMI. Porém, se o objetivo é a obtenção de  $\mathbf{K}_0$ , são variáveis da inequação as matrizes  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{K}_0$ . Assim, como (4.4) deixa de ser afim em suas variáveis, seus termos são pré e pós multiplicados por  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ . Assim,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_0)\mathbf{Q} + \mathbf{Q}(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_0)' < \mathbf{0}_n. \quad (4.5)$$

Define-se  $\mathbf{Y} = \mathbf{K}_0 \mathbf{Q}$ . Dessa maneira, todas as variáveis são afins e obtém-se a LMI

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}' + \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}'\mathbf{B}' < \mathbf{0}_n. \quad (4.6)$$

Essa LMI tem solução, com variáveis  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Y}$ , se e somente se o par

<sup>1</sup>Por fins de simplicidade, a variável temporal  $t$  será omitida.

$(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  for estabilizável (BOYD et al., 1994). Nesse caso, o sinal de comando  $\mathbf{u} = \mathbf{K}_0 \mathbf{x}$  estabiliza o sistema, com  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{Y} \mathbf{Q}^{-1}$ .

O resultado acima pressupõe que o vetor de estados  $\mathbf{x}$  seja conhecido e utilizado para o cálculo do sinal de comando. No entanto, quando se fala de realimentação de saída, deseja-se uma lei de controle que permita a estabilização de um sistema somente a partir de sua saída  $\mathbf{y}$ , onde o sinal de comando passa a ser  $\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{y}$ . Esse problema é semelhante ao anterior, mas com a restrição  $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} \mathbf{C}$ . Assim, pode-se substituir essa restrição em (4.5), tendo

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C}) \mathbf{Q} + \mathbf{Q} (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C})' < \mathbf{0}_n, \quad \mathbf{Q} > \mathbf{0}_n. \quad (4.7)$$

A inequação (4.7) é de difícil resolução, já que não é afim em suas variáveis  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{K}$ . No entanto, Crusius e Trofino (1999) apresentam um problema convexo relacionado a essa inequação que estabelece condições suficientes para que ela seja factível.

**Definição 4.1.1.** *Problema de estabilização via realimentação estática de saída:* Dadas as matrizes  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ , sendo  $\mathbf{C}$  uma matriz com posto completo por linhas, o presente problema consiste em encontrar, se possível, matrizes  $\mathbf{Q}, \mathbf{Y}, \mathbf{N}$  tais que

$$\begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{B} \mathbf{Y} \mathbf{C} + (\mathbf{A} \mathbf{Q} + \mathbf{B} \mathbf{Y} \mathbf{C})' < \mathbf{0}_n \\ \mathbf{Q} > \mathbf{0}_n \\ \mathbf{N} \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{Q} \end{cases}. \quad (4.8)$$

Pode-se demonstrar que se o problema (4.8) é factível, (4.7) também tem solução. A vantagem é que o problema enunciado acima é convexo e pode ser resolvido por algoritmos de resolução de LMIs.

**Teorema 1.** *Sejam as matrizes  $\mathbf{Q}, \mathbf{Y}$  e  $\mathbf{N}$  solução do problema de estabilização via realimentação estática de saída. O sinal de comando dado por*

$$\mathbf{u} = \mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{Y} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{y} \quad (4.9)$$

*estabiliza o sistema (4.3).*

*Demonstração.* Se  $\mathbf{C}$  tem posto linha completo, então  $\mathbf{N}$  tem posto completo e é invertível, já que  $\mathbf{N} \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{Q}$ . Assim, substituindo  $\mathbf{C}$  por  $\mathbf{N}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Y} \mathbf{N}^{-1}$  por  $\mathbf{K}$  em (4.8), obtém-se (4.7), completando a prova.  $\square$

### 4.1.2 Extensão para $\mathcal{D}$ -estabilidade

Considere um sistema definido como em (4.1). Esse sistema é dito  $\mathcal{D}$ -estável se todos os autovalores de  $\mathbf{A}_f$  estiverem alocados em uma determinada região  $\mathcal{D}$ , contida no semiplano esquerdo do plano complexo (CHILALI; GAHINET, 1996). Essas condições podem ser traduzidas nas LMIs abaixo (CHILALI; GAHINET, 1996; TROFINO, 2015):

$$\exists \mathbf{Q} > \mathbf{0}_n : \mathbf{L} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}_f \mathbf{Q}) + \mathbf{M}' \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{A}_f') < \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

onde  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{M}$  definem a região  $\mathcal{D}$ , como segue

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \mathbf{L} + s\mathbf{M} + s^*\mathbf{M}' < \mathbf{0}\}. \quad (4.11)$$

Nesse trabalho, serão consideradas duas famílias de regiões no plano complexo. O semiplano à esquerda de um escalar  $\alpha$ , chamado  $\mathcal{D}(\alpha)$ , e o interior de um disco de raio  $\rho$ , chamado  $\mathcal{D}(\rho)$ . A intersecção dessas regiões, definida como  $\mathcal{D}(\alpha, \rho)$ , é apresentada pela Figura 4.1. A primeira região pode ser descrita por

$$\mathcal{D}(\alpha) = \{s \in \mathbb{C} : \Re\{s\} < -\alpha\}, \quad (4.12)$$

ou ainda,

$$\mathcal{D}(\alpha) = \{s \in \mathbb{C} : 2\alpha + s + s^* < 0\}. \quad (4.13)$$

De onde se tem, por comparação com (4.11),  $\mathbf{L} = 2\alpha$  e  $\mathbf{M} = 1$ .

A equação que define o interior do disco de raio  $\rho$  é dada por

$$\mathcal{D}(\rho) = \{s \in \mathbb{C} : s^2 < \rho^2\}, \quad (4.14)$$

que pode ser descrita, de forma equivalente, por (4.11) com

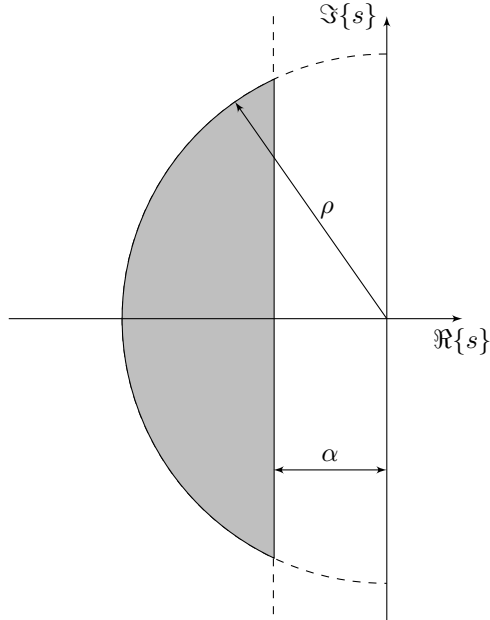
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\rho & 0 \\ 0 & -\rho \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, a região  $\mathcal{D}(\alpha, \rho)$  pode ser expressa por

$$\mathcal{D}(\alpha, \rho) = \{s \in \mathbb{C} : \mathbf{L} + s\mathbf{M} + s^*\mathbf{M}' < \mathbf{0}\}, \quad (4.15)$$

com

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Figura 4.1: Região  $\mathcal{D}(\alpha, \rho)$ .

Fonte: Elaborado pelo autor.

Propõe-se, então, uma extensão dos resultados anteriores para a  $\mathcal{D}$ -estabilidade.

**Definição 4.1.2.** *Problema de  $\mathcal{D}$ -estabilização via realimentação estática de saída:* Dadas as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{M}$ , onde  $\mathbf{C}$  é uma matriz com posto linha completo e  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{M}$  definem uma região convexa  $\mathcal{D}$  no plano complexo, o presente problema consiste em encontrar, se possível, matrizes  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{N}$  tais que

$$\begin{cases} \mathbf{L} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{C}) + \mathbf{M}' \otimes (\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{C})' < \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} > \mathbf{0}_n \\ \mathbf{N}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{Q} \end{cases}, \quad (4.16)$$

sendo  $\mathcal{D}$  definida por (4.11).

Se o problema acima é factível e a região  $\mathcal{D}$  estiver contida no semiplano negativo, (4.8) e (4.7) também têm solução.

**Teorema 2.** *Sejam as matrizes  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{N}$  solução do problema de  $\mathcal{D}$ -estabilização via realimentação estática de saída, como definido em (4.16). O sinal de comando dado por*

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{Y}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{y} \quad (4.17)$$

*estabiliza o sistema (4.3) e aloca seus polos em malha fechada na região  $\mathcal{D}$  definida por (4.11).*

*Demonstração.* Considere a condição (4.10). Aplicando  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$  em (4.3), em malha fechada tem-se (4.1), com  $\mathbf{A}_f = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$ . Aplicando as mesmas substituições da demonstração anterior, pode-se mostrar que, se existe solução para (4.16), (4.10) é satisfeito para  $\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{N}^{-1}$  e os autovalores de  $\mathbf{A}_f$  estão contidos em  $\mathcal{D}$ .  $\square$

### 4.1.3 Extensão para $\mathcal{H}_\infty$

Considera-se agora o sistema contínuo representado por

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_w\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_z\mathbf{x} \end{cases}, \quad (4.18)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m_u}$ ,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m_w}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{p_y}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{p_z}$  e matrizes de dimensões compatíveis. Define-se ainda  $G_{wz}(s)$  como sendo a função de transferência da perturbação  $\mathbf{w}$  para a saída  $\mathbf{z}$ .

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $G_{wz}(s)$ , notada por  $\|G_{wz}\|_\infty$ , representa o ganho máximo de  $G_{wz}(s)$  para um sinal de perturbação  $\mathbf{w}$  qualquer (TROFINO, 2015).

O resultado apresentado a seguir também é extraído de Crusius e Trofino (1999).

**Teorema 3.** *Seja o sistema definido em (4.18). Considerando a notação*

$$\Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{Y}) = \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{C} + (\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\mathbf{Y}\mathbf{C})', \quad (4.19)$$

$\tilde{\gamma} = \gamma^2$  e que a LMI

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \Phi(\mathbf{Q}, \mathbf{Y}) & \mathbf{B}_w & \mathbf{Q}\mathbf{C}'_z \\ \mathbf{B}'_w & -\tilde{\gamma}\mathbf{I}_{m_w} & \mathbf{0}_{m_w \times p_z} \\ \mathbf{C}_z\mathbf{Q} & \mathbf{0}_{p_z \times m_w} & -\mathbf{I}_{p_z} \end{pmatrix} < \mathbf{0}_{n+m_w+p_z} \\ \mathbf{Q} > \mathbf{0}_n \\ \mathbf{N}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{Q} \end{cases} \quad (4.20)$$



seja factível em  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\tilde{\gamma}$ , então, para  $\mathbf{u} = \mathbf{Y}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{y}$ , a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência em malha fechada de  $\mathbf{w}$  para  $\mathbf{z}$ ,  $G_{wz}(s)$ , satisfaz a condição  $\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$ .

*Demonstração.* De Boyd et al. (1994), tem-se que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema  $G_{wz}$  é inferior a  $\gamma$  se e somente se

$$\exists \mathbf{Q} > \mathbf{0}_n : \begin{pmatrix} \mathbf{A}_f \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}'_f & \mathbf{B}_f & \mathbf{Q} \mathbf{C}'_f \\ \mathbf{B}'_f & -\tilde{\gamma} \mathbf{I} & \mathbf{D}'_f \\ \mathbf{C}_f \mathbf{Q} & \mathbf{D}_f & -\mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0}, \quad (4.21)$$

onde  $\mathbf{A}_f$ ,  $\mathbf{B}_f$ ,  $\mathbf{C}_f$  e  $\mathbf{D}_f$  são, respectivamente, as matrizes de estados, de entrada, de saída e de transferência direta de  $G_{wz}$ . Aplicando  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$  em (4.18), tem-se  $\mathbf{A}_f = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{B}_f = \mathbf{B}_w$ ,  $\mathbf{C}_f = \mathbf{C}_z$  e  $\mathbf{D}_f = \mathbf{0}_{p_z \times m_w}$ . Seguindo o mesmo procedimento adotado anteriormente, pode-se mostrar que se existe solução para (4.20), (4.21) é satisfeito para  $\mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{N}^{-1}$  e o sistema em malha fechada  $G_{wz}(s)$  satisfaz a condição  $\|G_{wz}\| < \gamma$ .  $\square$

A partir desse resultado, pode-se utilizar o parâmetro  $\tilde{\gamma}$  como critério de otimização. Dessa forma, procura-se resolver

$$\min_{\mathbf{Q}, \mathbf{N}, \mathbf{Y}} \tilde{\gamma} \text{ sujeito a (4.20)}. \quad (4.22)$$

#### 4.1.4 Extensão para Sistemas Incertos

Considere agora que o sistema (4.18) seja incerto, tendo a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_w\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_z(\mathbf{q})\mathbf{x} \end{cases}, \quad (4.23)$$

onde o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_z)$  é definido pelo politopo

$$\mathcal{A} = \left\{ (\mathbf{A}, \mathbf{C}_z) : (\mathbf{A}, \mathbf{C}_z) = \sum_{i=1}^J q_i (\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_{z,i}), q_i \geq 0, \sum_{i=1}^J q_i = 1, i = 1 \dots J \right\}, \quad (4.24)$$

$(\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_{z,i})$  são os  $J$  vértices desse politopo e  $\mathbf{q} = [q_1 \dots q_J]$  é o vetor de coeficientes da combinação convexa. Considere ainda uma região do plano complexo  $\mathcal{D}$  definida por (4.11).

**Teorema 4.** *Seja o sistema definido em (4.23) e a região  $\mathcal{D}$  definida por  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{M}$ . Considerando*

$$\Phi_i(\mathbf{Q}, \mathbf{Y}) = \mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{B} \mathbf{Y} \mathbf{C} + (\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{B} \mathbf{Y} \mathbf{C})' \quad (4.25)$$

e que a LMI

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{ccc} \Phi_i(\mathbf{Q}, \mathbf{Y}) & \mathbf{B}_w & \mathbf{Q} \mathbf{C}'_{z,i} \\ \mathbf{B}'_w & -\tilde{\gamma} \mathbf{I}_{m_w} & \mathbf{0}_{m_w \times p_z} \\ \mathbf{C}_{z,i} \mathbf{Q} & \mathbf{0}_{p_z \times m_w} & -\mathbf{I}_{p_z} \end{array} \right) < \mathbf{0}_{n+m_w+p_z} \\ \mathbf{L} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{B} \mathbf{Y} \mathbf{C}) + \mathbf{M}' \otimes (\mathbf{A}_i \mathbf{Q} + \mathbf{B} \mathbf{Y} \mathbf{C})' < \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} > \mathbf{0}_n \\ \mathbf{N} \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{Q} \end{array} \right. \quad (4.26)$$

seja factível em  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Y}$  e  $\tilde{\gamma}$  para  $i = 1 \dots J$ , então, para  $\mathbf{u} = \mathbf{Y} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{y}$ , a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência em malha fechada de  $\mathbf{w}$  para  $\mathbf{z}$ ,  $G_{wz}(s)$ , satisfaz a condição  $\|G_{wz}\|_\infty < \gamma$  para todos os possíveis valores das incertezas e os polos do sistema em malha fechada estarão alocados no interior da região  $\mathcal{D}$ .

*Demonstração.* Se as incertezas são politópicas e as matrizes  $\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{C}_{z,i}$  representam os vértices do politopo  $\mathcal{A}$ , por convexidade, a solução de (4.26) nesses vértices também é solução para o interior desse politopo (BOYD et al., 1994). Os teoremas 2 e 3 asseguram as condições de  $\mathcal{D}$ -estabilidade e norma  $\mathcal{H}_\infty$ .  $\square$

Da mesma forma que anteriormente, o parâmetro  $\tilde{\gamma}$  pode ser utilizado como critério de otimização para projeto do controlador.

É importante ressaltar que a abordagem utilizada nesse trabalho é conservadora. Primeiramente, porque a matriz de Lyapunov  $\mathbf{P}$  (ou  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ ) é considerada invariante no tempo. Dessa forma, se as LMIs forem factíveis, todas as restrições do problema são atendidas para quaisquer variações paramétricas das grandezas, desde que permaneçam no interior do politopo definido. A segunda fonte de conservadorismo consiste na solução do problema de realimentação de saída, que impõe uma restrição na forma  $\mathbf{N} \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{Q}$ .

## 4.2 PROJETO DO CONTROLADOR

Como mencionado anteriormente, o projeto do controlador se divide em duas partes. Primeiramente, realiza-se o projeto de um *droop* convencional, aqui chamado de *droop* estático. Em seguida, é realizada

a síntese do *droop* dinâmico, através de uma abordagem por LMIs e dos resultados obtidos acima. Inicialmente, apresenta-se uma formulação LMI para a sintonia do controlador, de forma que a frequência seja compensada. Em seguida, um integrador é adicionado ao sistema, o que permite, além da compensação de frequência, a compensação da tensão na saída do inversor.

#### 4.2.1 Modelo Aproximado

A não linearidade presente na entrada do sistema, apresentada pela equação (3.17), dificulta a análise do sistema e o projeto de controladores, já que, *a priori*, não há restrição para os valores de  $\psi(t)$ . No entanto, se o *droop* de frequência for transitório,  $\Delta\omega(t)$  tende a zero em regime permanente, fazendo com que  $\psi(t)$  passe a ser limitado. Além disso, se  $\psi(t)$  for pequeno (por exemplo,  $|\psi(t)| < 10^\circ$ ), pode-se considerar as aproximações  $\cos \psi(t) \approx 1$  e  $\sin \psi(t) \approx \psi(t)$ . Sabe-se também que  $E(t)$  é dado pela equação de *droop* de tensão e que seu valor varia em torno de  $E_0$ , dependendo das potências entregues pelo inversor. Se a constante de *droop* de tensão for pequena, então se pode assumir que  $E_R(t) \approx E(t)$  e  $E_I(t) \approx E_0\psi(t)$ . Assim sendo, essa aproximação pode ser descrita como

$$\begin{cases} \frac{dx_d}{dt} = \mathbf{B}_d \mathbf{u}_d \\ \mathbf{y}_d = \mathbf{C}_d x_d + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_d \end{cases}, \quad (4.27)$$

onde  $x_d = \psi$ ,  $\mathbf{B}_d = [0 \ 1]$ ,

$$\mathbf{u}_d = \begin{bmatrix} E \\ \Delta\omega \end{bmatrix}, \mathbf{y}_d = \begin{bmatrix} E_R \\ E_I \end{bmatrix}, \mathbf{C}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ E_0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o modelo aproximado do sistema completo, em malha aberta, é dado por

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_{MA}}{dt} = \mathbf{A}_{MA}(g_L, b_L)\mathbf{x}_{MA} + \mathbf{B}_{1MA}\mathbf{u}_d + \mathbf{B}_{2MA}\mathbf{u}_{2a} \\ \mathbf{y}_c = \mathbf{C}_{MA}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\mathbf{x}_{MA} \end{cases}, \quad (4.28)$$

onde  $\mathbf{C}_{MA}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = [\mathbf{0}_{2 \times 4} \ \mathbf{C}_c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \ \mathbf{0}_{2 \times 1}]$ ,

$$\mathbf{x}_{MA} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \\ \mathbf{x}_c \\ x_d \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{1MA} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{B}_{1b} \mathbf{D}_d \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{B}_d \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{2MA} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2a} \\ \mathbf{0}_{7 \times 2} \end{bmatrix}, \text{ e}$$

$$\mathbf{A}_{MA} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a(g_L, b_L) & \mathbf{B}_{1a} & \mathbf{0}_{2 \times 4} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{B}_{2b} & \mathbf{A}_b & \mathbf{0}_{2 \times 4} & \mathbf{B}_{1b} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 4} & 0 \end{bmatrix}.$$

#### 4.2.2 Droop Estático

Os parâmetros do *droop* estático são projetados através das quedas de tensão e frequência permitidas para o sistema. Desse modo, as constantes de *droop* podem ser calculadas por:

$$k_m = \frac{\omega_0 - \omega_{min}}{S_{nom}} \quad (4.29)$$

$$k_n = \frac{E_0 - E_{min}}{S_{nom}}, \quad (4.30)$$

onde  $\omega_{min}$  e  $E_{min}$  são os menores valores de frequência e tensão, respectivamente, admitidos no projeto. A variável  $S_{nom}$  é a potência aparente nominal do inversor para o qual o controlador está sendo projetado.

Nessa etapa, deve-se definir, ainda, o módulo e ângulo da impedância virtual. Nesse trabalho, optou-se por utilizar uma impedância virtual resistiva. Esse escolha se deve às seguintes vantagens (GUERREIRO et al., 2006): linhas resistivas tornam o sistema global mais amortecido, o que implica numa maior margem de estabilidade; e o balanço de correntes harmônicas ocorre naturalmente. Assim, o ângulo  $\vartheta$  é dado por:

$$\vartheta = \arctan \frac{\omega_0 L_{lin}}{R_{virt} + R_{lin}}. \quad (4.31)$$

As equações de *droop* (2.53) e (2.54) podem ser descritas como

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta \omega \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{est}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_n \cos \vartheta & -k_n \sin \vartheta \\ -k_m \sin \vartheta & k_m \cos \vartheta \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{est}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_c}. \quad (4.32)$$

Assim, o sinal de comando  $\mathbf{u}_d$  é definido por

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{K}_{est} \mathbf{y}_c + \mathbf{u}_0, \quad (4.33)$$

onde  $\mathbf{u}_0 = [E_0 \ 0]'$  representa o nível de referência de tensão. Dessa maneira, o sistema (4.28) em malha fechada é descrito conforme a equação abaixo:

$$\frac{d\mathbf{x}_{MA}}{dt} = \mathbf{A}_{MF}(g_L, b_L, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \mathbf{x}_{MA} + \mathbf{B}_{1MA} \mathbf{u}_0 + \mathbf{B}_{2MA} \mathbf{u}_{2a}, \quad (4.34)$$

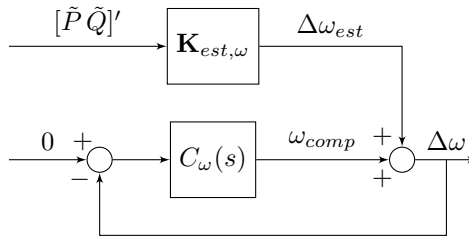
onde  $\mathbf{A}_{MF}(g_L, b_L, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathbf{A}_{MA}(g_L, b_L) + \mathbf{B}_{1MA} \mathbf{K}_{est} \mathbf{C}_{MA}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .

Por fim, deve-se determinar o valor dos ganhos  $k_S$ , dos SOGI-QSG.

### 4.2.3 Compensação de Frequência

Considera-se o sistema em malha fechada (4.34). Para restaurar a sua frequência, propõe-se a utilização da estrutura apresentada pela Figura 4.2, similar à apresentada em Vasquez et al. (2013). O ganho  $\mathbf{K}_{est, \omega}$  corresponde à segunda linha da matriz  $\mathbf{K}_{est}$ ,  $\Delta\omega_{est}$  é o desvio de frequência provocado pelo *droop* estático e  $C_\omega(s)$  é um sistema dinâmico responsável pela restauração da frequência. Nota-se que o sinal  $\Delta\omega$  é composto pela soma de duas parcelas:  $\Delta\omega_{est}$ , calculado através da equação de *droop* de frequência; e  $\omega_{comp}$ , parcela responsável pela compensação da frequência.

Figura 4.2: Diagrama para compensação de frequência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para garantir que o erro seja nulo em regime permanente, ou seja, que  $\Delta\omega$  tenda a zero, é necessário que  $C_\omega(s)$  possua um integrador.

Assim, propõe-se

$$C_\omega(s) = \frac{k_\omega}{s}, \quad (4.35)$$

onde  $k_\omega$  é uma constante real positiva. Dessa forma,  $\omega_{comp}$  é descrito como

$$\omega_{comp}(t) = -k_\omega \int_0^t \Delta\omega(\tau) d\tau = -k_\omega \psi(t), \quad (4.36)$$

e o sinal de comando  $\mathbf{u}_d$  é redefinido como

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_{est} + \mathbf{u}_{comp} + \mathbf{u}_0, \quad (4.37)$$

com

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{comp} &= \mathbf{K}_{comp} y_{comp}, \\ \mathbf{K}_{comp} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -k_\omega \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \psi = y_{comp}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Assim, com o novo sinal de comando, o sistema (4.34) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_{MA}}{dt} = \mathbf{A}_{MF}\mathbf{x}_{MA} + \mathbf{B}_{1MA}(\mathbf{u}_{comp} + \mathbf{u}_0) + \mathbf{B}_{2MA}\mathbf{u}_{2a} \\ y_{comp} = \mathbf{C}_\psi\mathbf{x}_{MA} \\ \mathbf{y}_c = \mathbf{C}_{MA}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\mathbf{x}_{MA} \end{cases}, \quad (4.39)$$

onde  $\mathbf{C}_\psi = [\mathbf{0}_{1 \times 8} \ 1]$ .

Se o sistema for estável com a realimentação estática de saída  $\mathbf{u}_{comp} = \mathbf{K}_{comp} y_{comp}$ , consegue-se, então, a restauração de frequência. Por definição, todas as derivadas são nulas em regime permanente, incluindo a derivada de  $\psi(t)$ . Ora, se a derivada de  $\psi(t)$  é justamente o desvio de frequência  $\Delta\omega(t)$ , a estabilidade do sistema implica que não há desvio de frequência em regime permanente, como desejado.

Como as incertezas  $g_L$ ,  $b_L$ ,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são afins em  $\mathbf{A}_{MF}$  e  $\mathbf{C}_{MA}$ , pode-se definir um politopo como em (4.24), onde  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{MF}$  e  $\mathbf{C}_z = \mathbf{C}_{MA}$ . Os  $J$  vértices do referido politopo ( $\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_{z,i}$ ) são formados pelas combinações entre os valores extremos de suas incertezas. Com  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{1MA}$ ,  $\mathbf{B}_w = \mathbf{B}_{2MA}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_\psi$  e a região  $\mathcal{D}(\alpha, \rho)$  definida em (4.15), busca-se resolver o problema de otimização abaixo:

$$\min_{\mathbf{Q}, \mathbf{N}, \mathbf{Y}} (\tilde{\gamma} + \beta) \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} (4.26), \\ \mathbf{Q} > \mu \mathbf{I}_n \\ \begin{bmatrix} \beta \mathbf{I} & \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Y} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{cases}. \quad (4.40)$$

Assim, se houver solução,  $\mathbf{K}_{comp}$  é dado por

$$\mathbf{K}_{comp} = \mathbf{Y}\mathbf{N}^{-1}. \quad (4.41)$$

Durante os testes, notou-se que  $\mathbf{K}_{comp}$  podia assumir valores muito elevados, tornando inviável sua implementação. Assim, para limitar seus valores, acrescentam-se restrições sobre  $\mathbf{Y}$  e  $\mathbf{N}$ . A primeira restrição consiste em limitar  $\mathbf{Y}$  através de

$$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} < \beta\mathbf{I}, \quad (4.42)$$

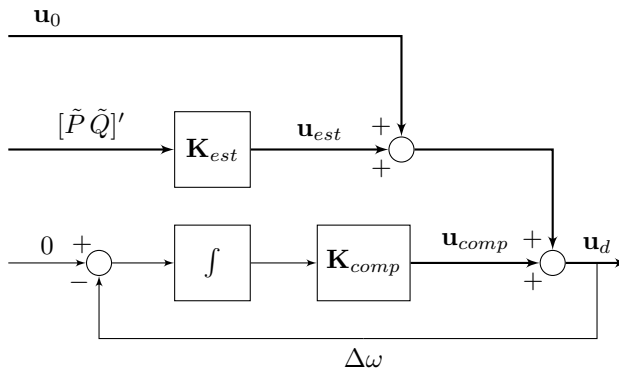
com  $\beta > 0$ . O complemento de Schur de (4.42) é dado por

$$\begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} & \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Y} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}. \quad (4.43)$$

É necessário, ainda, estabelecer um valor mínimo para  $\mathbf{N}$ . Como  $\mathbf{N}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{Q}$  e a matriz  $\mathbf{C}$  tem posto completo por linhas, estabeleceu-se um limite mínimo para  $\mathbf{N}$  a partir da restrição  $\mathbf{Q} > \mu\mathbf{I}_n$ , incluído no problema de otimização enunciado acima.

Vale ressaltar que não há restrição sobre a estrutura de  $\mathbf{K}_{comp}$ . Assim, ao invés de um controlador monovariável, conforme Figura 4.2, a estrutura proposta resulta num controlador multivariável, sendo ilustrado pela Figura 4.3, onde as linhas mais espessas representam vetores.

Figura 4.3: Diagrama para compensação de frequência multivariável.

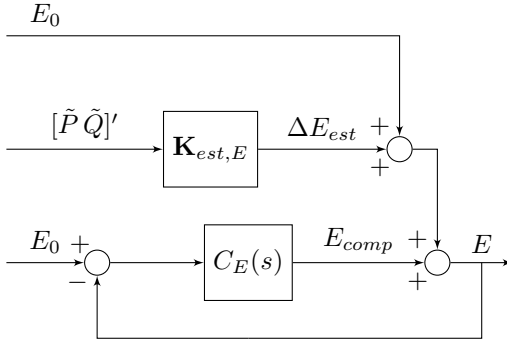


Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.2.4 Compensação da Tensão

De forma semelhante à apresentada para a frequência, é igualmente possível restaurar a tensão do inversor utilizando uma malha de controle, conforme a apresentada pela Figura 4.4, com  $\mathbf{K}_{est,E}$  sendo a primeira linha de  $\mathbf{K}_{est}$ ,  $\Delta E_{est}$  é o desvio de tensão provocado pelo *droop* estático e  $C_E(s)$  é um sistema dinâmico responsável pela restauração da tensão.

Figura 4.4: Diagrama para compensação de tensão.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da mesma forma que para a compensação de frequência, para garantir que o erro seja nulo em regime permanente, é necessário que  $C_E(s)$  possua um integrador. Assim, propõe-se

$$C_E(s) = \frac{k_E}{s}, \quad (4.44)$$

sendo  $k_E$  uma constante real positiva. Dessa forma,  $E_{comp}$  é descrito como

$$E_{comp}(t) = -k_E \int_0^t E_0 - E(\tau) d\tau = -k_E \xi(t), \quad (4.45)$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = E_0 - E(t), \quad (4.46)$$

onde  $\xi$  é o estado do integrador.



A inclusão de  $\xi$  em (4.34) resulta no sistema aumentado abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{x}_{MAa}}{dt} = \mathbf{A}_{MAa}\mathbf{x}_{MAa} + \mathbf{B}_{1MAa}\mathbf{u}_{comp} + \mathbf{B}_{MAa0}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}_{2MAa}\mathbf{u}_{2a} \\ \mathbf{y}_c = \mathbf{C}_{MAa}\mathbf{x}_{MAa} \\ \mathbf{y}_{comp} = \mathbf{C}_{comp}\mathbf{x}_{MAa} \end{array} \right. , \quad (4.47)$$

onde  $\mathbf{C}_{MAa} = [\mathbf{C}_{MA} \mathbf{0}_{2 \times 1}]$ ,  $\mathbf{C}_{comp} = [\mathbf{0}_{2 \times 8} \mathbf{I}_2]$ ,

$$\mathbf{A}_{MAa} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{MF} & \mathbf{0}_{9 \times 1} \\ -\mathbf{K}_{est,E}\mathbf{C}_{MA} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{MAa} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{MA} \\ \xi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{comp} = \begin{bmatrix} \psi \\ \xi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{1MAa} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1MA} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{MAa0} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1MA} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2MAa} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2MA} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}$$

e  $\mathbf{K}_{est,E}$  é a primeira linha de  $\mathbf{K}_{est}$ . Note que, se

$$\mathbf{K}_{comp} = \begin{bmatrix} 0 & k_E \\ -k_\omega & 0 \end{bmatrix},$$

a realimentação estática de saída  $\mathbf{u}_{comp} = \mathbf{K}_{comp}\mathbf{y}_{comp}$  é equivalente às equações (4.36) e (4.45). Além disso, se  $\mathbf{K}_{comp}$  for completa, ou seja, se não houver restrições sobre a sua estrutura, mais graus de liberdade são disponibilizados para o projeto do controlador.

Como as incertezas  $g_L$ ,  $b_L$ ,  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  são afins em  $\mathbf{A}_{MAa}$  e  $\mathbf{C}_{MAa}$ , pode-se definir um politopo como em (4.24), onde  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{MAa}$  e  $\mathbf{C}_z = \mathbf{C}_{MAa}$ . Os  $J$  vértices do referido politopo ( $\mathbf{A}_i, \mathbf{C}_{z,i}$ ) são formados pelas combinações entre os valores extremos de suas incertezas. Com  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{1MAa}$ ,  $\mathbf{B}_w = \mathbf{B}_{2MAa}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{comp}$  e a região  $\mathcal{D}(\alpha, \rho)$  definida em (4.15), busca-se resolver o problema de otimização abaixo:

$$\min_{\mathbf{Q}, \mathbf{N}, \mathbf{Y}} (\tilde{\gamma} + \beta) \quad \text{sujeito a} \quad \left\{ \begin{array}{l} (4.26), \\ \mathbf{Q} > \mu \mathbf{I}_n \\ \begin{bmatrix} \beta \mathbf{I} & \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Y} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \end{array} \right. . \quad (4.48)$$

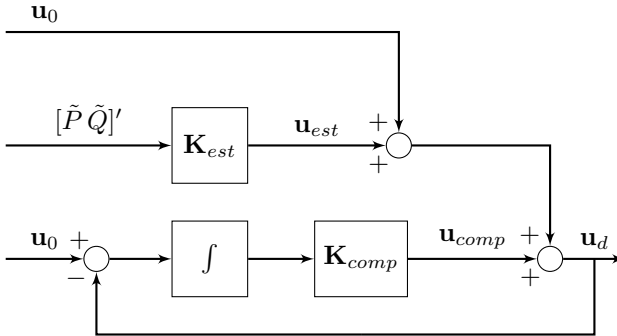
Se houver solução,  $\mathbf{K}_{comp}$  é dado por

$$\mathbf{K}_{comp} = \mathbf{Y}\mathbf{N}^{-1}. \quad (4.49)$$

Essa solução proporciona, então, a restauração da tensão e da frequência do inversor. No entanto, como não há restrição sobre a estrutura de  $\mathbf{K}_{comp}$ , ao invés de dois controladores monovariáveis para compensação de frequência e tensão, conforme a estrutura proposta

por Vasquez et al. (2013), a estrutura resultante consiste num único controlador multivariável. Assim, o diagrama de controle, fruto dessa abordagem via LMIs, é ilustrado pela Figura 4.5.

Figura 4.5: Diagrama para compensação de frequência e tensão multivariável.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Vale ressaltar que há dois fatores que influenciam a queda de tensão na carga: o desvio de tensão causado pelo *droop control*; e a queda de tensão sobre as impedâncias de linha, proporcional às correntes que circulam por elas. A compensação de tensão, proposta nessa seção, ocorre somente para o desvio de tensão provocado pelo *droop control*. No entanto, não há correção para a queda de tensão provocada pela linha.

### 4.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Esse capítulo se inicia com a apresentação do problema da realimentação estática de saída, cuja solução se dá através de uma abordagem por LMIs. Ao longo da seção, foram adicionadas restrições para  $\mathcal{D}$ -estabilidade, que garante desempenho do sistema; para norma  $\mathcal{H}_\infty$ , que possibilita uma otimização em relação à rejeição de perturbações; e a abordagem politópica, que garante o atendimento dos critérios acima para todas as incertezas descritas pelo politopo.

Nota-se que o modelo completo do sistema, apresentado no capítulo anterior, é não linear. No entanto, a compensação de frequência permite que o sistema seja linearizado, mantendo a sua precisão se o desvio e compensação da frequência forem suficientemente rápidos. Assim, segue-se o projeto do controlador, que é realizada em duas eta-

pas. Inicialmente, projeta-se um *droop* convencional e a impedância virtual com base nos requisitos do sistema. Na sequência, utilizam-se as LMIs definidas no início do capítulo para sintonizar os ganhos do controlador, que realiza a compensação de frequência e tensão, sendo a compensação de tensão opcional. Também é importante enfatizar que, diferentemente das abordagens monovariáveis encontradas na literatura, a abordagem utilizada nesse trabalho resulta em um único controlador multivariável, oferecendo mais graus de liberdade ao seu projeto.

No capítulo seguinte, serão apresentadas as simulações e os resultados alcançados com a técnica proposta.



## Capítulo 5

---

# SIMULAÇÕES

---

Esse capítulo é destinado a exibir os resultados das simulações realizadas durante o desenvolvimento desse trabalho. Primeiramente, apresenta-se a plataforma na qual foram executadas as simulações, buscando testar os controladores num cenário bastante próximo a uma aplicação prática. São considerados o controle com compensação de frequência, assim como o controle com compensação de frequência e tensão. Os resultados são analisados e discutidos.

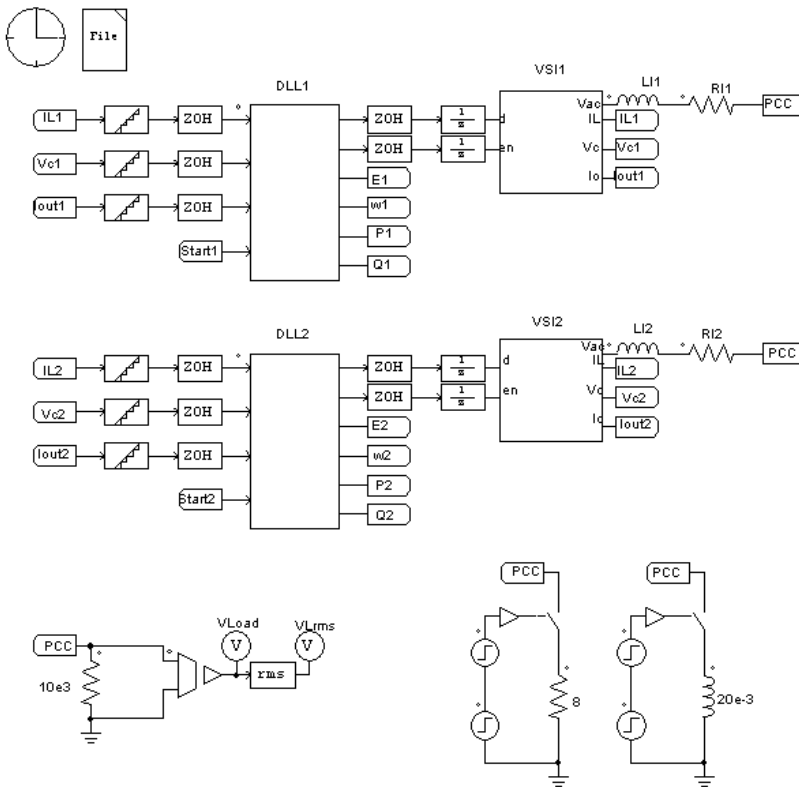
### 5.1 PLATAFORMA DE TESTES

Com o objetivo de realizar simulações com o controlador proposto, uma plataforma de testes foi desenvolvida. Os parâmetros do sistema são passados para um *script* desenvolvido no *software* Matlab, onde os ganhos do controlador são calculados, conforme apresentado no capítulo anterior. Para a resolução das LMIs, utiliza-se o pacote CVX (GRANT; BOYD, 2014) em conjunto com o *solver* SDPT3 (TOH; TODD; TUTUNCU, 1999).

Buscando uma simulação realista, são projetados controladores ressonantes, conforme Pereira et al. (2014), para o controle da malha de tensão dos inversores. Ainda, são projetados controles para garantir a operação em paralelo dos inversores, conforme capítulo anterior. Os controladores são discretizados com frequência de amostragem  $f_S$  e implementados em linguagem C, utilizando aritmética de ponto flutuante. Assim, gera-se um arquivo no formato DLL (*dynamic-link library*) para cada controlador. E então, as simulações são executadas no *software* PSIM.

O circuito implementado no PSIM é apresentado na Figura 5.1, onde os blocos DLL1 e DLL2 rodam os controladores dos respectivos inversores. Observam-se, associados a esses blocos, elementos que introduzem o atraso de processamento ( $1/z$ ), assim como os efeitos de quantização e de amostragem (ZOH, o amostrador de ordem zero). Os sinais “*Start*” colocam os controladores em funcionamento. Os parâmetros das linhas desse circuito são apresentados na Tabela 5.1, onde se assumem linhas com parâmetros proporcionalmente diferentes.

Figura 5.1: Circuito implementado no *software* PSIM.



Fonte: Elaborado pelo autor.

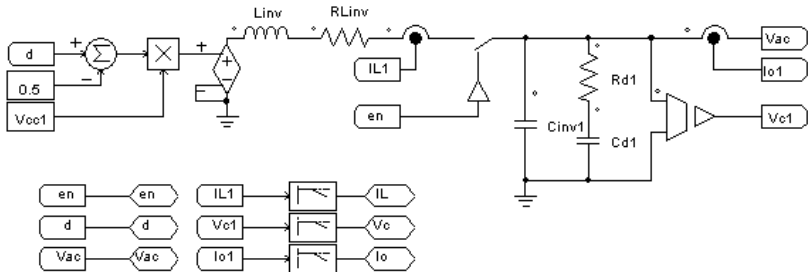
Ainda na Figura 5.1, os inversores são simulados pelos subsistemas VSI1 e VSI2, cujo circuito por valores médios quase instantâneos (VMQI) é apresentado pela Figura 5.2. Na mesma figura, observa-se ainda a presença de filtros passa-baixa, representando a dinâmica dos

Tabela 5.1: Parâmetros das linhas utilizados no PSIM.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$R_{l1}$	17 m $\Omega$	$R_{l2}$	48 m $\Omega$
$L_{l1}$	138 $\mu$ H	$L_{l2}$	172 $\mu$ H

Fonte: Elaborado pelo autor.

sensores. Esses filtros são sintonizados na frequência de Nyquist do sistema.

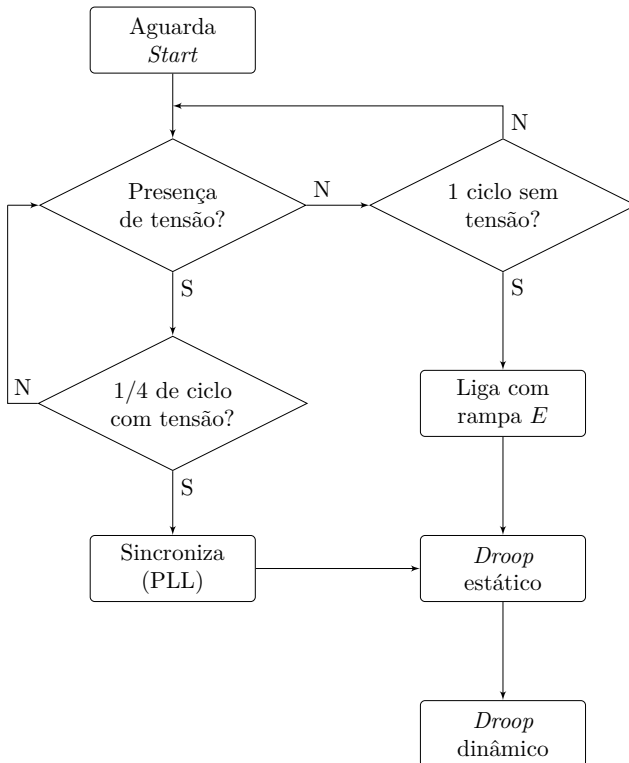
Figura 5.2: Circuito do inversor implementado no *software* PSIM.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como cargas, conecta-se uma resistência de 8  $\Omega$  ao PCC durante o intervalo de tempo  $2\text{ s} < t \leq 3\text{ s}$ , consumindo 6 kW, aproximadamente. No intervalo de tempo  $2,5\text{ s} < t \leq 3,5\text{ s}$ , uma carga indutiva de 20 mH é conectada ao PCC, absorvendo cerca de 6,4 kvar. Quando ambas as cargas estão conectadas, a potência total consumida é de aproximadamente 8,8 kVA, com um fator de potência 0,68 indutivo.

Para colocar os inversores em funcionamento, alguns cuidados foram tomados, evitando correntes muito elevadas no circuito. Quando um inversor é ligado, através do sinal “Start”, testa-se a presença de tensão na rede. Se não houver tensão, o inversor é ligado em rampa, passa a operar somente com o *droop* estático e, em seguida, passa a operar com o *droop* dinâmico. Quando um segundo inversor é conectado ao sistema, ele detecta tensão na rede e procura entrar em sincronia com o auxílio de um PLL (*Phase-locked loop*). Na sequência, passa a operar com o *droop* estático e, então, com o *droop* dinâmico, dispensando o uso do PLL. Esse procedimento é ilustrado pelo diagrama funcional da Figura 5.3.

Figura 5.3: Diagrama funcional para *start-up* do inversor.



Fonte: Elaborado pelo autor.



## 5.2 SIMULAÇÕES

O projeto de controle proposto oferece duas possibilidades quanto à sua estrutura: pode-se compensar somente a frequência, ou pode-se compensar frequência e tensão. Inicialmente, considera-se o caso onde o controlador assegura apenas compensação da frequência. Na sequência, considera-se também o estudo do controlador com compensação das duas grandezas. Para o projeto dos controladores, são utilizados os parâmetros nominais das linhas, apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Parâmetros nominais das linhas.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$R_{l1}$	20 m $\Omega$	$R_{l2}$	40 m $\Omega$
$L_{l1}$	115 $\mu$ H	$L_{l2}$	230 $\mu$ H

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.2.1 Cálculo dos ganhos do *droop* estático

Como descrito no capítulo anterior, o projeto dos controladores é realizado em duas partes: o *droop* estático; e o *droop* dinâmico. O cálculo dos parâmetros do *droop* estático é descrito na seção 4.2.2 e serve como base para o cálculo dos controladores para compensação de frequência ou para compensação de frequência e tensão.

As constantes de *droop* estático são calculadas através de (4.29) e (4.30), considerando  $\omega_{min} = 0,99\omega_0$  e  $E_{min} = 0,95E_0$ .

A resistência virtual  $R_{virt}$  é calculada de forma que a queda de tensão provocada pelas impedâncias da linha e virtual seja inferior a 2,5% do valor nominal, mesmo à plena carga.

Finalmente, para os SOGI-QSG, optou-se por utilizar  $k_S = 1/\pi$ , que oferece uma boa relação entre seletividade e tempo de resposta. Para o ganho selecionado, tem-se um tempo de resposta de 3 períodos, ou 50 ms.

Os valores desses parâmetros são sintetizados na Tabela 5.3.

### 5.2.2 Compensação de Frequência

O controlador é projetado conforme apresentado na seção 4.2.3, utilizando a equação (4.40), os parâmetros nominais e os parâmetros

Tabela 5.3: Parâmetros dos controladores para *droop* estático.

Parâmetro	Unidade	Inversor 1	Inversor 2
$k_S$	adim.	$1/\pi$	$1/\pi$
$R_{virt}$	$m\Omega$	182	363
$\vartheta$	°	12,13	12,13
$k_m$	rad/s/kW	0,63	1,26
$k_n$	V/kvar	1,83	3,67

Fonte: Elaborado pelo autor.

do *droop* estático (Tabela 5.3), em pu. Então, os parâmetros dos controladores são dados por

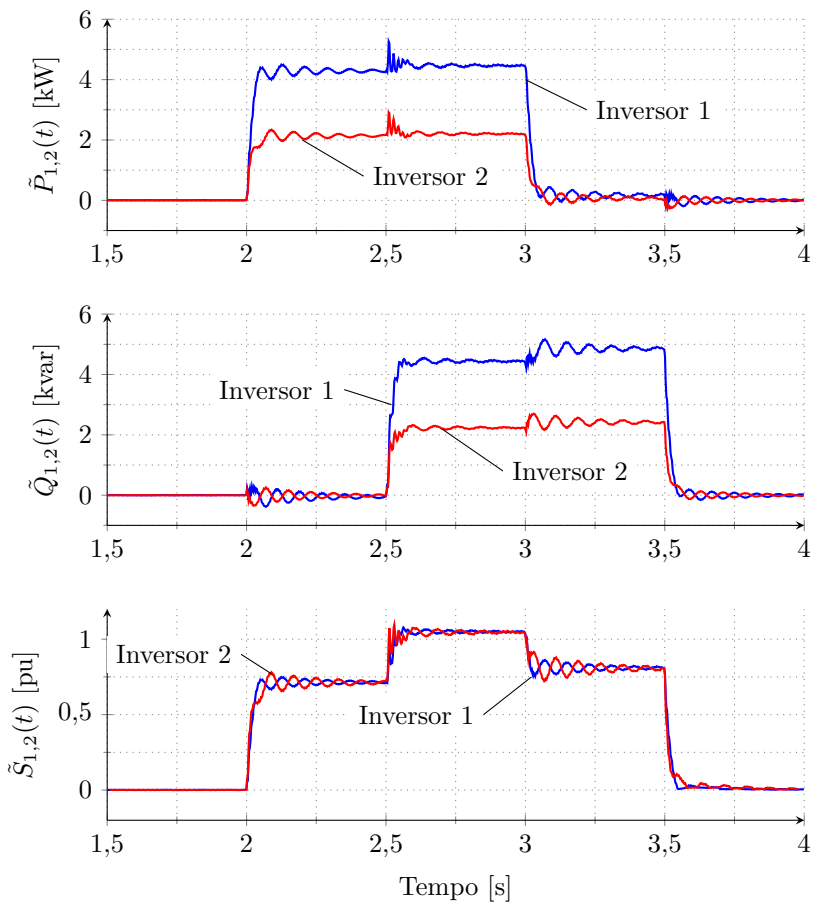
$$\mathbf{K}_{comp1} = \mathbf{K}_{comp2} = \begin{bmatrix} 166,3 \\ -109,2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

e as Figuras 5.4 e 5.5 apresentam os resultados da simulação.

A Figura 5.4 apresenta as potências ativa e reativa entregues por cada um dos inversores. Além disso, para efeitos de comparação, apresenta-se também a evolução da potência aparente de cada uma das unidades, em pu. Logo após as variações de cargas, observa-se uma circulação de potência (oscilações) entre os inversores, que é atenuada em cerca de 500 ms. Essas interações se devem à interação entre os inversores. As perturbações que aparecem em  $\tilde{P}$  (para  $t = 2$  s e para  $t = 3$  s) e em  $\tilde{Q}$  (para  $t = 2,5$  s e  $t = 3,5$  s) são devidas ao acoplamento existente entre as componentes  $I_R$  e  $I_I$ , calculadas pelo SOGI-QSG e refletidas diretamente nas potências ativa e reativa estimadas. Nota-se ainda a correta divisão de potências entre os inversores, fato que se torna evidente com a sobreposição das curvas de potência aparente em pu.

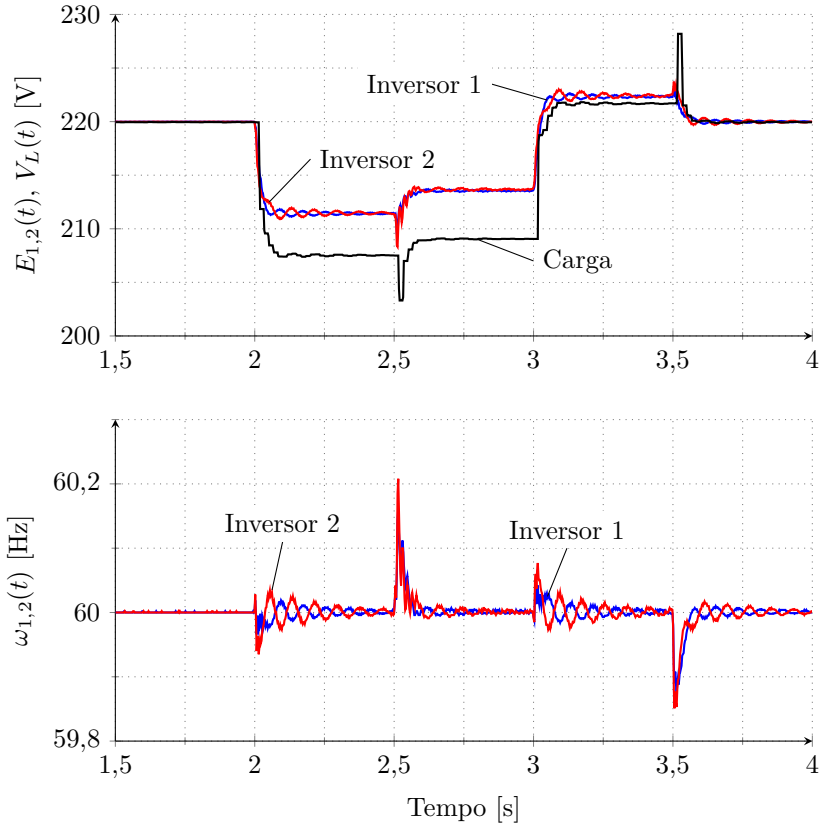
Na Figura 5.5, observam-se a tensão e a frequência dos inversores, calculadas por (4.37) e a tensão eficaz sobre a carga, calculada pelo bloco `rms` do PSIM, o que justifica sua evolução em degraus. Percebe-se que a tensão dos inversores possui desvios significativos, enquanto suas frequências são perturbadas, mas retornam ao seu valor nominal (60 Hz). As oscilações e o tempo de resposta observados nas potências se repetem para as frequências e tensões dos inversores. Observando as tensões  $E_i$  e  $V_L$ , verifica-se um desvio máximo inferior a 4% (ou 8 V) para  $E_i$ , enquanto esse valor chega a 6% (ou 13 V) para  $V_L$ . Essa diferença se deve às impedâncias virtuais e às linhas, que podem provocar quedas de tensão de até 2,5% (ou 5,5 V), conforme enunciado

Figura 5.4: Respostas do sistema no PSIM para compensação de frequência. Potências  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  e  $\tilde{S}$  de cada inversor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5.5: Respostas do sistema no PSIM para compensação de frequência. Tensão  $E$  e frequência  $\omega$  geradas pelos inversores e tensão  $V_L$  sobre a carga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

anteriormente.

### 5.2.3 Compensação de Frequência e Tensão

Para o presente caso, o controlador é projetado conforme apresentado na seção 4.2.4. Utiliza-se a equação (4.48), os parâmetros nominais do sistema em pu, conforme Tabela 5.2, e os parâmetros de *droop* estático da Tabela 5.3. Dessa forma, os ganhos de compensação são dados por

$$\mathbf{K}_{comp1} = \mathbf{K}_{comp2} = \begin{bmatrix} 289 & 457 \\ -351 & 1,95 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

e as Figuras 5.6 e 5.7 apresentam os resultados de simulação.

O comportamento das potências entregues por cada unidade é apresentado na Figura 5.6. Diferentemente do que foi verificado no primeiro caso, não se observa circulação de potências entre os inversores. No entanto, o balanço de potências permanece correto.

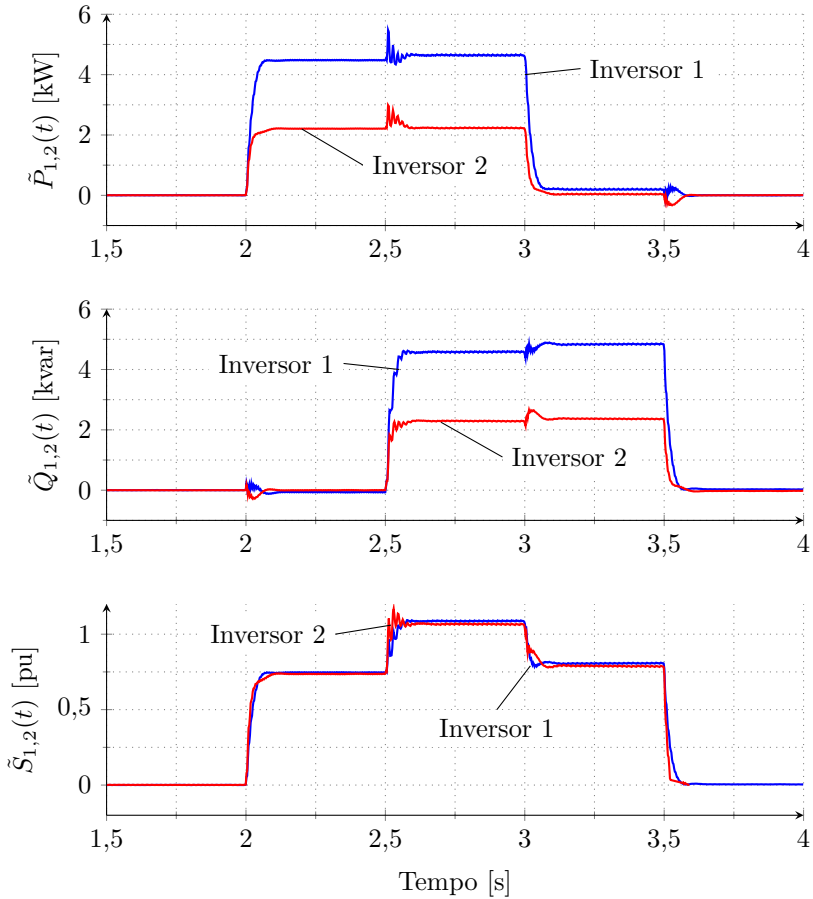
A Figura 5.7, apresenta os valores eficazes das tensões de saída dos inversores e suas respectivas frequências. Nota-se que nas mudanças de carga, essas variáveis sofrem uma perturbação, efeito do *droop* estático, mas retomam seus valores nominais em até 100 ms devido às compensações.

Ainda na Figura 5.7 é apresentada a evolução da tensão eficaz sobre a carga. Nos instantes onde ocorrem as variações de potência, a tensão eficaz varia bruscamente, reflexo das variações que ocorrem com  $E_1$  e  $E_2$ . Em regime permanente, o desvio de tensão é de aproximadamente 5 V, equivalente a 2,3% do valor nominal. Essa queda de tensão se deve única e exclusivamente às impedâncias de linha e às impedâncias virtuais, e é inferior ao valor previsto em projeto, de 2,5%.

## 5.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO

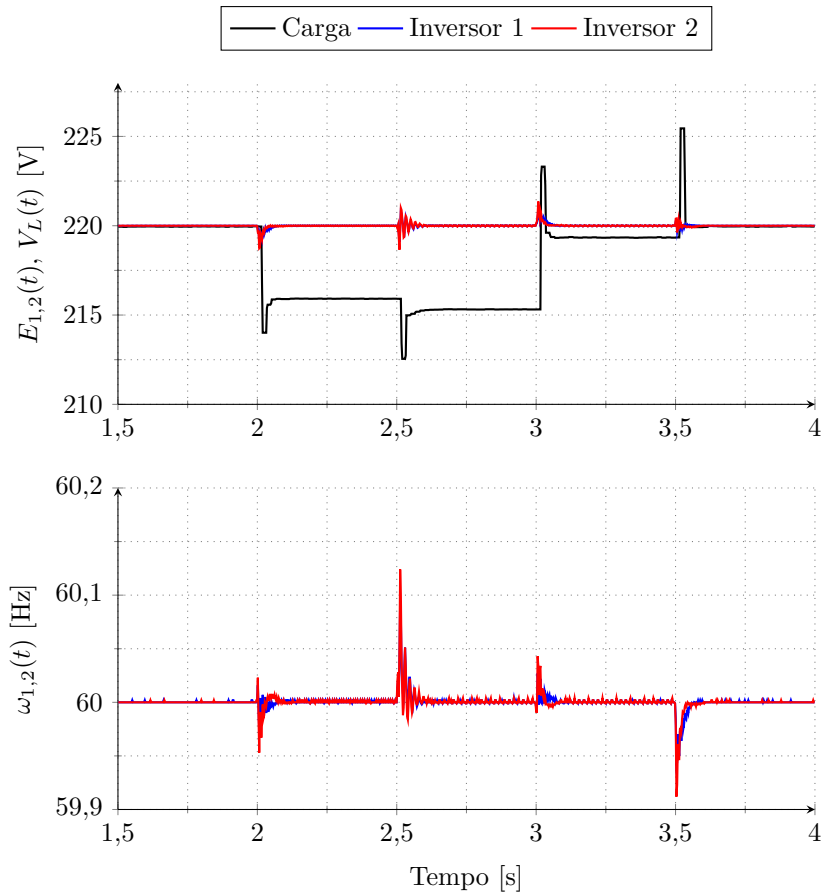
Embora tenha sido projetado sobre o modelo baseado em fasores dinâmicos, o controlador opera normalmente sobre um sistema com comportamento sinusoidal. Esse fato se confirmou através das simulações apresentadas, onde buscou-se utilizar condições semelhantes às condições reais de operação. Diferentemente do que ocorreu durante o projeto dos controladores, durante a simulação foram consideradas as dinâmicas das malhas de tensão dos inversores. Também foram consi-

Figura 5.6: Respostas do sistema no PSIM para compensação de frequência e tensão. Potências  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  e  $\tilde{S}$  de cada inversor.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5.7: Respostas do sistema no PSIM para compensação de frequência e tensão. Tensão  $E$  e frequência  $\omega$  geradas pelos inversores e tensão  $V_L$  sobre a carga.



Fonte: Elaborado pelo autor.

deradas questões práticas de implementação, como a inicialização dos inversores, efeitos de quantização, amostragem e atraso de processamento.

Por fim, verificou-se o efeito das compensações de frequência e da tensão. Como a frequência aplicada pelo inversores é a mesma que se encontra sobre a carga, restaurar a frequência dos inversores implica que a frequência sobre a carga também será restaurada. Por outro lado, como a tensão na carga não depende exclusivamente da tensão dos inversores, a compensação da tensão dos inversores não implica, necessariamente, na compensação da tensão sobre a carga. Como previsto, a estratégia de controle proposta não corrige a queda de tensão provocada pelas impedâncias de linha, mas a compensação da tensão do inversor faz com que o erro de tensão na carga seja menor que o apresentado para o caso sem compensação de tensão.



## Capítulo 6

---

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Esse último capítulo conclui a dissertação, sintetizando as contribuições desse trabalho e discutindo os resultados obtidos. A partir dos resultados alcançados, uma grande gama de trabalhos pode ser considerada. Assim, sugestões e direções para trabalhos futuros são indicadas.

### 6.1 SÍNTESE E DISCUSSÕES

As principais contribuições aportadas por esse trabalho são o modelo baseado em fasores dinâmicos, incluindo a dinâmica dos filtros para estimação das potências, e a metodologia para projeto de um controlador multivariável. Para atingir esses resultados, inicialmente foram introduzidos alguns conceitos básicos: *droop control*, fasores dinâmicos, cálculo de potências e formulação LMI para realimentação de saída. A partir desses conceitos, descreve-se o problema do paralelismo de inversores, propondo uma modelagem baseada em fasores dinâmicos, e que leva em conta as principais dinâmicas do sistema. Através de simulações, comprovou-se a validade do modelo e sua precisão na descrição dos comportamentos estático e dinâmico do sistema.

Levando em conta o requisito de regulação de frequência, pôde-se estabelecer uma representação linear do modelo no espaço de estados. Dessa forma, separou-se o projeto do controlador em duas partes: *droop* estático e compensação de frequência ou compensação de frequência e tensão.

Descrevendo os sinais de controle de forma adequada, o *droop* estático é utilizado para fechar uma primeira malha de controle. En-

tão, demonstra-se que a compensação de frequência, ou compensação de frequência e tensão, podem ser tratadas como um problema de realimentação estática de saída. Dessa forma, uma formulação LMI é proposta para resolver o problema, resultando nos ganhos de compensação dos controladores. Se houver solução para o problema, essa formulação garante não só a estabilidade do sistema, mas também garante o seu desempenho, mesmo considerando as variações paramétricas.

As simulações apresentadas mostram a validade do modelo e o desempenho do sistema com os controladores propostos, através da regulação de frequência e tensão e dos balanços de potências. Esses resultados mostram ainda a aplicabilidade desses controladores num sistema real, já que o cenário considerado é bastante similar a um cenário real. Embora o sistema tenha se apresentado um pouco oscilatório, para o caso da compensação de frequência (sem compensação de tensão), esse comportamento desapareceu quando considerada a compensação de tensão, já que o controlador oferece mais graus de liberdade para controlar as variáveis do sistema.

## 6.2 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Da mesma forma que este trabalho propõe algumas soluções para a modelagem e para o projeto de controladores para o paralelismo de inversores, alguns questionamentos também podem ser levantados. Assim, surgem direcionamentos para trabalhos futuros, entre os quais podem ser citados:

**Implementação prática:** Considerando o estado de desenvolvimento do trabalho, não deve haver complicações técnicas para a implementação prática dos controladores, visto que o cenário de simulação é bastante realista;

**Utilização do modelo não linear:** Devido à sua precisão, e por ser relativamente simples, pode-se considerar o uso do modelo não linear, apresentado na seção 3.1.5. Sua utilização, tanto para análise do sistema quanto para a síntese de controladores, pode abrir um leque de possibilidades ainda inexploradas;

**Ângulo de referência:** Para essa dissertação, utilizou-se  $\theta_0$  como ângulo de referência. No entanto, pode-se considerar o uso da fase instantânea do inversor,  $\theta_E(t)$  como referência. Assim, garante-se  $\hat{E}(t) = E_R(t) = E(t)$  e  $E_I(t) = 0$ . A segunda variável de controle,

$\omega(t)$ , apareceria nos parâmetros do modelo, resultando também num sistema não linear;

**Compensação da tensão na carga:** O presente trabalho garante a compensação da tensão na carga, mas não garante que a tensão sobre a carga seja restaurada. Sabendo que o produto  $\mathbf{x}'_a \mathbf{x}_a$  representa  $V_L^2$ , através de observadores, essa relação poderia ser utilizada para compensar a tensão sobre a carga. A relação descrita acima é não linear, o que exigiria um tratamento diferenciado para a solução do problema proposto; e

**Metodologias para projeto do controlador:** A metodologia proposta parte da especificação dos parâmetros  $k_S$  (ganhos dos SOGI-QSG) e  $\mathbf{K}_{est}$  (ganhos do *droop* estático), além da impedância virtual (ângulo e módulo) para calcular o ganho de compensação  $\mathbf{K}_{comp}$  ótimo. O cálculo simultâneo de todos os parâmetros (ou de mais parâmetros além do ganho de compensação) recai sobre problemas não convexos e exige a utilização de diferentes ferramentas para sua resolução, mas poderia levar à obtenção controladores com melhores desempenhos;

**Extensão para sistemas trifásicos:** Considerando que uma das principais diferenças para a aplicação do *droop control* entre sistemas monofásicos e trifásicos consiste na estimação das potências, e que a abordagem utilizada nesse trabalho recai sobre uma ferramenta (geração de componentes em quadratura) largamente utilizada em sistemas trifásicos, pode-se estender o procedimento utilizado nesse trabalho a sistemas trifásicos. Enfatiza-se que certas particularidades, como a possibilidade de sequência positiva e/ou negativa, devem ser consideradas.



## REFERÊNCIAS

- ABUSARA, M. A. et al. Improved Droop Control Strategy for Grid-Connected Inverters. **Sustainable Energy, Grids and Networks**, p. 25, 2014.
- AZEVEDO, G. M. S. et al. Performance Improvement of the Droop Control for Single-phase Inverters. **International Symposium on Industrial Electronics**, p. 1465–1470, 2011.
- BEZERRA, P. A. M. **Inversor Trifásico PWM Fonte de Tensão com Integração de Interruptores em Delta**. 253 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.
- BORUP, U. et al. Sharing of Nonlinear Load in Parallel-Connected Three-Phase Converters. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 37, n. 6, p. 1817–1823, 2001.
- BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- BRABANDERE, K. D. **Voltage And Frequency Droop Control In Low Voltage Grids By Distributed Generators With Inverter Front-End**. Tese (Doutorado) — Katholieke Universiteit Leuven, 2006.
- BRABANDERE, K. D. et al. A voltage and frequency droop control method for parallel inverters. **IEEE 35th Annual Power Electronics Specialists Conference**, n. 2, p. 2501–2507, 2004.
- CHANDORKAR, M. C. et al. Control of Parallel Connected Inverters in Standalone AC Supply Systems. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 29, n. 1, p. 136–143, 1993.
- CHILALI, M. et al.  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: An lmi approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, n. 3, p. 358–367, 1996.
- COELHO, E. A. A. et al. Small-Signal Stability for Parallel-Connected Inverters in Stand-Alone AC Supply Systems. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 38, n. 2, p. 533–542, 2002.

CRUSIUS, C. et al. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, 1999.

FURTADO, E. C. et al. Estimation of Reactive Power - A Simpler Scheme. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 55, n. 10, p. 1061–1065, 2008.

GOLESTAN, S. et al. Droop Based Control of Parallel-Connected Single-Phase Inverters in D-Q Rotating Frame. **IEEE International Conference on Industrial Technology**, n. 424, 2009.

GOYA, T. et al. Frequency control in isolated island by using parallel operated battery systems applying  $\mathcal{H}_\infty$  control theory based on droop characteristics. **IET Renewable Power Generation**, v. 5, n. 2, p. 160, 2011. ISSN 17521416.

GRANT, M. et al. **CVX: Matlab Software for Disciplined Convex Programming, version 2.1**. 2014.  
<<http://cvxr.com/cvx>>.

GUERRERO, J. et al. Steady-state invariant-frequency control of parallel redundant uninterruptible power supplies. **IEEE 2002 28th Annual Conference of the Industrial Electronics Society. IECON 02**, v. 1, p. 274–277, 2002.

GUERRERO, J. M. et al. Droop control method for the parallel operation of online uninterruptible power systems using resistive output impedance. **Twenty-First Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition. APEC '06.**, p. 1716–1722, 2006.

GUERRERO, J. M. et al. Output Impedance Design of Parallel-Connected UPS Inverters With Wireless Load-Sharing Control. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 52, n. 4, p. 1126–1135, 2005.

GUERRERO, J. M. et al. A wireless controller to enhance dynamic performance of parallel inverters in distributed generation systems. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 19, n. 5, p. 1205–1213, 2004. ISSN 08858993.

HAN, H. et al. Review of Power Sharing Control Strategies for Islanding Operation of AC Microgrids. **IEEE Transactions on Smart Grid**, 2015.

- KARIMI-GHARTEMANI, M. et al. Addressing DC Component in PLL and Notch Filter Algorithms. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 27, n. 1, p. 78–86, 2012. ISSN 08858993.
- KAWABATA, T. et al. Parallel Operation of Voltage Source Inverters. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 24, n. 2, 1988.
- LAZZARIN, T. B. et al. A Control Strategy for Parallel Operation of Single-Phase Voltage Source Inverters: Analysis, Design and Experimental Results. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 60, n. 6, p. 2194–2204, jun. 2013. ISSN 0278-0046.
- MARIANI, V. et al. Stability Analysis of Droop Controlled Inverters via Dynamic Phasors and Contraction Theory. **European Control Conference**, n. 1, p. 1505–1510, 2013.
- MOHAMED, Y. A.-R. I. et al. Adaptive Decentralized Droop Controller to Preserve Power Sharing Stability of Paralleled Inverters in Distributed Generation Microgrids. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 23, n. 6, p. 2806–2816, 2008.
- MOHD, A. et al. Review of control techniques for inverters parallel operation. **Electric Power Systems Research**, Elsevier B.V., v. 80, n. 12, p. 1477–1487, dez. 2010. ISSN 03787796.
- PEREIRA, L. F. A. et al. Multiple resonant controllers for uninterruptible power supplies - A systematic robust control design approach. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 61, n. 3, p. 1528–1538, 2014.
- QUESADA, J. et al. Decoupled droop control of inverters. **IECON Proceedings (Industrial Electronics Conference)**, p. 601–606, 2013.
- QUESADA, J. et al. Decoupled droop control techniques for inverters in low-voltage AC microgrids. **IEEE 11th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices (SSD14)**, feb 2014.
- ROCABERT, J. et al. Control of Power Converters in AC Microgrids. **IEEE Transactions on Power Electronics**, v. 27, n. 11, p. 4734–4749, 2012. ISSN 0885-8993.
- SAITOU, M. et al. Generalized theory of instantaneous active and reactive powers in single-phase circuits based on Hilbert transform.

**IEEE 33rd Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference**, n. 2, p. 1419–1424, 2002.

SANDERS, S. R. et al. Generalized Averaging Method for Power Conversion Circuits. **IEEE Transactions on Power Electronics**, p. 333–340, 1991.

SCHIFFER, J. et al. Conditions for stability of droop-controlled inverter-based microgrids. **Automatica**, set. 2014. ISSN 00051098.

SIMPSON-PORCO, J. W. et al. Droop-Controlled Inverters are Kuramoto Oscillators. **IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems**, p. 264–269, 2012.

SINHA, M. et al. Uncovering Droop Control Laws Embedded Within the Nonlinear Dynamics of Van der Pol Oscillators. **IEEE Transactions on Control of Network Systems**, 2014.

TOH, K. C. et al. SDPT3 – a MATLAB software package for semidefinite programming. **Optimization Methods and Software**, v. 11, p. 545–581, 1999.

TROFINO, A. **Controle Robusto**. Florianópolis: [s.n.], 2015. 153 p.

TULADHAR, A. et al. Parallel operation of single phase inverter modules with no control interconnections. **Proceedings of Applied Power Electronics Conference**, IEEE, v. 1, p. 94–100, 1997.

TULADHAR, A. et al. Control of Parallel Inverters in Distributed AC Power Systems with Consideration of the Line Impedance Effect. **IEEE Transactions on Industry Applications**, v. 36, n. 1, p. 131–138, 2000.

VASQUEZ, J. C. et al. Modeling, Analysis, and Design of Parallel Three-Phase Voltage Source Inverters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 60, n. 4, p. 1271–1280, 2013.

VENKATASUBRAMANIAN, V. et al. On the dynamics of differential-algebraic systems such as the balanced large electric power system. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 40, n. 11, p. 1975–1982, 1995.

WANG, L. et al. Precise modeling based on dynamic phasors for droop-controlled parallel-connected inverters. **IEEE International Symposium on Industrial Electronics**, p. 475–480, 2012.



ZHANG, Y. et al. Analysis of Networked Control Schemes and Data-Processing Method for Parallel Inverters. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 61, n. 4, p. 1834–1844, apr 2014. ISSN 0278-0046.

ZHONG, Q.-C. Robust Droop Controller for Accurate Proportional Load Sharing Among Inverters Operated in Parallel. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v. 60, n. 4, p. 1281–1290, 2013.

ZHONG, Q.-C. et al. **Control of Power Inverters in Renewable Energy and Smart Grid Integration**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. ISBN 9780470667095.



**APÊNDICE A – Artigo submetido ao IECON**



# Parallel Operation of Single-Phase Voltage Source Inverters: Modeling and Control based on LMI Constraints

Fab ricio Saggin\*, Daniel Coutinho\* and Marcelo L. Heldwein\*\*

**Abstract**— In this paper, a new model for droop-controlled single-phase voltage-source inverters (VSI) is presented. This model is based on dynamic phasors and includes load, line and filters dynamics, leading to an accurate model for static and transient behavior. Moreover, a controller design method based on linear matrix inequality (LMI) constraints is proposed ensuring not only stability, but also the system performance. Simulation results are provided to demonstrate the model validity and the effectiveness of the design methodology.

## I. INTRODUCTION

The interest in parallel operation of voltage source inverters (VSI) was first developed to increase reliability and power of UPS (Uninterruptible Power Supply) systems [1]. Since then, the operation of parallel-connected VSI has been spread among a wide variety of applications, such as electric traction, photovoltaic and distributed generation systems [2], [3]. Some reviews on this topic can be found in [3]–[5] and references therein.

Nowadays, several control strategies for parallel-connected inverters are available in specialized literature that can be grouped in two categories: those with communication and those without communication between VSIs. In general, the first group has a central controller or distributed controllers exchanging information through a communication channel. This approach offers a proper power balance between VSIs and a fast response [4], [5]. Nonetheless, the communication channel is a weak link, since a communication failure can shut the system down [4].

Communicationless strategies use only local measurements and they are based on droop control techniques, which impose voltage magnitude and frequency variations proportional to active and reactive power variations [2], [6], [7]. Because there is no need of explicit intercommunication, the system flexibility and reliability are increased. On the other hand, droop-based systems have some inconvenients such as line impedance dependent power balance [6]–[8]; slow performance due to power calculations [2], [9], [10]; and inherent voltage magnitude and frequency deviations [6]. Then, several strategies are proposed to improve the performance of droop-based control techniques, see, *e.g.*, [6]–[8], [10], [11], among others.

This work was supported in part by CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Cient fico e Tecnol gico) Foundation – Brazil.

\* Department of Automation and Systems (DAS), Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil. fabricio.saggin@gmail.com, daniel.coutinho@ufsc.br

\*\* Power Electronics Institute (INEP), Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil. heldwein@inep.ufsc.br

Most part of the latter references use small-signal models for stability analysis [12]. It is only recently that the community starts to propose more precise models and more rigorous tools to the stability analysis and control design, as, for instance, in [12]–[15].

This work proposes a dynamic phasor model of a single-phase inverter connected to a single-phase VSI-formed microgrid. In addition to the dynamic phasor models presented in [12] and in [13], the filter dynamics is included here into the model. This filter is similar to the enhanced average power calculator presented in [10]. It is also demonstrated that by using a control structure similar to the one used in [11] one leads to a static-output feedback problem, which can be solved via an LMI-based approach [16].

The rest of this paper is organised as follows. Section II starts providing a power flow analysis in order to derive the droop controller equations. Then, dynamic phasor modeling is proposed in Section III, and a control design methodology in terms of LMIs is presented in Section IV. Simulations results are shown in Section V while some concluding remarks are drawn in Section VI.

## II. DROOP CONTROL

In general, a droop-based control strategy can be represented by a block diagram as illustrated in Fig. 1. The voltage controller assures the tracking of the sinusoidal reference voltage  $v_{ref}$ . This signal is calculated by

$$v_{ref}(t) = \sqrt{2}E(t) \cos \left[ \int_0^t \omega(\tau) d\tau \right], \quad (1)$$

where  $E$  and  $\omega$  are respectively the instantaneous voltage and frequency values. These variables are calculated by the droop equations and are related to the power delivered by the inverter. In the following, a more detailed explanation is provided.

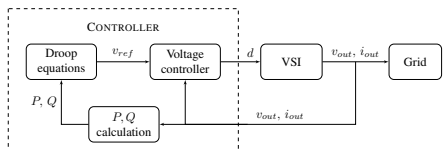


Fig. 1. Simplified block diagram for droop-based control techniques.

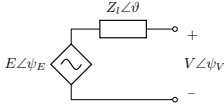


Fig. 2. Circuit for power flow analysis.

### A. Power Flow and Droop Equations

Consider the circuit shown in Fig. 2, where  $Z_l$  is the line impedance between the voltage source  $E$  and the circuit connecting point with voltage  $V\angle\psi_V$ . The active power  $P$  and reactive power  $Q$  delivered by  $E$  are given by [8]

$$\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\vartheta) \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta & \cos \vartheta \\ -\cos \vartheta & \sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Let  $\delta = \psi_E - \psi_V$  be the phase difference between the voltages, thus the modified powers  $\tilde{P}$  and  $\tilde{Q}$  can be defined as

$$\tilde{P} = \frac{EV \sin \delta}{Z_l} \quad \text{and} \quad \tilde{Q} = \frac{E(E - V \cos \delta)}{Z_l}.$$

Then, considering  $\delta \ll 1$ , the following approximations are obtained

$$\tilde{P} \approx \frac{EV \delta}{Z_l}, \quad (3)$$

$$\tilde{Q} \approx \frac{E(E - V)}{Z_l}. \quad (4)$$

Notice from (3) that the active power and voltage phase difference are approximately related. Hence,  $\delta$  ( $\delta = \omega - \omega_0$ , if  $\psi_V$  constant) is employed to control the modified active power delivered to the grid and  $E$  is similarly applied to control the modified reactive power in light of (4). These considerations lead to the following droop equations [8]:

$$\omega = \omega_0 - k_m \tilde{P}, \quad (5a)$$

$$E = E_0 - k_n \tilde{Q}, \quad (5b)$$

where  $k_m$  and  $k_n$  are the droop constants for voltage frequency and voltage magnitude, and  $\omega_0$  and  $E_0$  are the frequency and voltage magnitude with no load. Finally, using  $\mathbf{T}^{-1}(\vartheta)$ , the droop equations can be cast as follows:

$$\omega = \omega_0 - k_m \sin(\vartheta)P + k_m \cos(\vartheta)Q, \quad (6a)$$

$$E = E_0 - k_n \cos(\vartheta)P - k_n \sin(\vartheta)Q. \quad (6b)$$

### B. Power Calculation

It is well-known from Electric Circuit Theory that single-phase average powers are given by [10]

$$P = \Re\{\hat{V}\hat{I}^*\} = V_R I_R + V_I I_I, \quad (7a)$$

$$Q = \Im\{\hat{V}\hat{I}^*\} = V_I I_R - V_R I_I, \quad (7b)$$

where  $\hat{V}$  and  $\hat{I}$  stand for voltage and current phasors and  $\hat{I}^*$  is the complex conjugate of  $\hat{I}$  with the notation  $(\cdot)_R$  and  $(\cdot)_I$  indicating the real and imaginary parts of a phasor  $(\cdot)$ , respectively. Although, the expression in (7) can be applied

to directly determine  $P$  and  $Q$ , phasors are not practical signals. Thus, there are two approaches to obtain the active and reactive powers. In the most common approach, power calculation is performed by multiplying instantaneous voltage and current and, then, filtering the product by means of a first-order low-pass filter. However, since the instantaneous power has a  $2\omega$  fundamental frequency, the filter cutoff-frequency is set to a value below  $2\omega$ , which includes a slow dynamic in the closed-loop system. The second approach consists on the use of quadrature-signal generators based on second-order general integrators (SOGI-QSG)[10]. The latter approach provides better performance than the former one [10] and is the approach considered in this work.

A quadrature-signals generator (QSG) is a system capable of generating a sinusoidal signal in phase and a second one  $90^\circ$  delayed to the input sinusoidal signal [7]. The structure of the SOGI-QSG is presented in Fig. 3, where  $k_S$  is a gain,  $x_\alpha$  is the ‘‘in-phase’’ component,  $x_\beta$  is the ‘‘in-quadrature’’ component and  $x$  is the input signal. The variable  $\omega_0$  stands for the SOGI-QSG resonant frequency and shall coincide with the system voltage frequency (e.g.,  $2\pi 50\text{rad/s}$  or  $2\pi 60\text{rad/s}$ ).

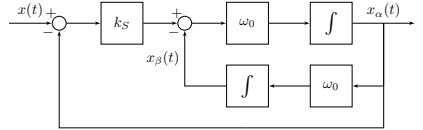


Fig. 3. Block diagram of the SOGI-QSG.

From the block diagram, the following state-space representation of SOGI-QSG is obtained:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_S \omega_0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_S \omega_0 \\ 0 \end{bmatrix} x. \quad (8)$$

In order to obtain the real and imaginary parts of the phasor related to  $x$ , the rotating transformation below is used:

$$\begin{bmatrix} X_R \\ X_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}, \quad (9)$$

where the reference angle  $\theta_0$  is given by  $\theta_0(t) = \omega_0 t$ . By using (8) and (9) it is possible to get the phasor related to a signal  $x$  and then the power values are directly calculated by (7).

Instead of implementing droop equations based on active and reactive powers, it is also possible to use ‘‘active’’ and ‘‘reactive’’ currents to impose voltage and frequency deviations [8]. Thus, the multiplication between current and voltage is avoided. That is, the powers  $P(t)$  and  $Q(t)$  are approximately obtained by means of:

$$P(t) \approx E_0 I_R(t), \quad (10a)$$

$$Q(t) \approx -E_0 I_I(t). \quad (10b)$$

This technique allows the current sharing rather than power sharing between several VSIs. When the system is operating

close to nominal voltage, current sharing or power sharing techniques are quite similar. However, current sharing strategy allows the system to operate even under short-circuit condition [8]. From this reasoning, the current sharing technique is the one considered in this paper.

### III. DYNAMIC PHASOR MODELING

Fig. 4 shows a circuit representing the problem to be modeled, where two VSIs feed a load through their lines. In general terms, there could exist more VSIs connected to the point of common coupling (PCC). So a model from a VSI point of view is proposed, where only local variables are available and contributions of other sources are modeled as an exogenous disturbance (consisting of  $e_x$ ,  $i_x$  and  $Z_{Lx}$ ).

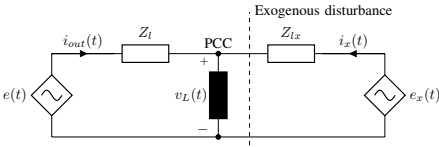


Fig. 4. Equivalent circuit for VSI.

Independently of the output filter, the VSI is considered as an ideal voltage source  $e(t) = v_{ref}(t)$  in series with its output impedance [7]. The line impedance  $Z_I$  includes physical lines and VSI output impedance as well as the virtual impedance parameters [12].

#### A. Dynamic Phasor Fundamentals

The concept of dynamic phasors, or time-varying phasors, was developed to model fast dynamics of alternate current circuits, as shown in [17] and references therein. To introduce this concept, let us consider the sinusoidal signal

$$x(t) = \sqrt{2}\bar{x}(t) \cos \left[ \theta_0(t) + \int_0^t \Delta\omega(\tau) d\tau \right], \quad (11)$$

where  $\bar{x}$  is the instantaneous RMS value of  $x$ ,  $\theta_0 = \omega_0 t$  is the reference angle and  $\Delta\omega(t) = \omega(t) - \omega_0$ . Hence, the phasorial notation of  $x$  is given by

$$x(t) = \Re \left\{ \sqrt{2}\hat{X}(t)e^{j\omega_0 t} \right\}, \quad (12)$$

with  $\hat{X} \in \mathbb{C}$ . If  $x$  is a sinusoidal signal with constant magnitude and constant frequency,  $\hat{X}$  is time-independent and coincides with the classical definition of phasors. However, it is a dynamic phasor when  $\hat{X}$  is time-varying.

#### B. Load Model

The load model considered in this paper is shown in Fig. 5 and is described by (13). The resistor  $R_L$  represents a constant or minimum load connected to the PCC. Likewise, the capacitor  $C_L$  represents any parasitic capacitance at the lines, at the load or an equivalent output capacitance of the inverter. The current source  $i_L$  represents any other load connected to PCC. Also,  $i_x$  is the current from other power

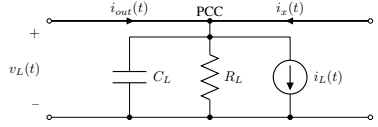


Fig. 5. Circuit of the load.

sources, and, as explained previously, it will be modeled as a disturbance.

$$C_L \frac{dv_L(t)}{dt} = -\frac{v_L(t)}{R_L} + i_{out}(t) + i_x(t) - i_L(t) \quad (13)$$

Applying the phasorial notation into (13) yields

$$\frac{dV_{LR}}{dt} = \omega_0 V_{LI} - \frac{V_{LR}}{R_L C_L} + \frac{I_{outR}}{C_L} + \frac{I_{xR}}{C_L} - \frac{I_{LR}}{C_L}, \quad (14a)$$

$$\frac{dV_{LI}}{dt} = -\omega_0 V_{LR} - \frac{V_{LI}}{R_L C_L} + \frac{I_{outI}}{C_L} + \frac{I_{xI}}{C_L} - \frac{I_{LI}}{C_L}. \quad (14b)$$

In the case of linear loads, the dynamic phasor of  $i_L$  is as follows:

$$I_{LR} = g_L V_{LR} + b_L V_{LI} \quad (15a)$$

$$I_{LI} = -b_L V_{LR} + g_L V_{LI}, \quad (15b)$$

where  $g_L$  is the load conductance and  $b_L$  is the load susceptance. The full model of the load is found by replacing (15) in (14). Thus,

$$\frac{d\mathbf{x}_a}{dt} = \mathbf{A}_a(g_L, b_L)\mathbf{x}_a + \mathbf{B}_{1a}\mathbf{u}_{1a} + \mathbf{B}_{2a}\mathbf{u}_{2a}, \quad (16)$$

where  $\mathbf{x}_a = [V_{LR} \ V_{LI}]'$ ,  $\mathbf{u}_{1a} = [I_{outR} \ I_{outI}]'$ ,  $\mathbf{u}_{2a} = [I_{xR} \ I_{xI}]'$ ,

$$\mathbf{A}_a(g_L, b_L) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_L} \left( \frac{1}{R_L} + g_L \right) & \omega_0 - \frac{b_L}{C_L} \\ -\omega_0 + \frac{b_L}{C_L} & -\frac{1}{C_L} \left( \frac{1}{R_L} + g_L \right) \end{bmatrix}$$

$$\text{and } \mathbf{B}_{1a} = \mathbf{B}_{2a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_L} \end{bmatrix}.$$

#### C. Line Model

The line model includes the inverter output impedance and the physical impedance of the line. The line impedance is formed by a resistance  $R_l$  and an inductance  $L_l$ . Thus, the current  $i_{out}$  can be given by

$$L_l \frac{di_{out}(t)}{dt} = e(t) - R_l i_{out}(t) - v_L(t). \quad (17)$$

By using dynamic phasor notation, the line model can be written as

$$\frac{d\mathbf{x}_b}{dt} = \mathbf{A}_b\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_{1b}\mathbf{u}_{1b} + \mathbf{B}_{2b}\mathbf{u}_{2b}, \quad (18)$$

being  $\mathbf{x}_b = [I_{outR} \ I_{outI}]'$ ,  $\mathbf{u}_{1b} = [E_R \ E_I]'$ ,  $\mathbf{u}_{2b} = [V_{LR} \ V_{LI}]'$ ,

$$\mathbf{A}_b = \begin{bmatrix} -\frac{R_l}{L_l} & -\frac{\omega_0}{L_l} \\ -\omega_0 & -\frac{R_l}{L_l} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{B}_{1b} = -\mathbf{B}_{2b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_l} \end{bmatrix}.$$

#### D. Power Calculation Model

By applying the phasorial notation to (8) the SOGI-QSG model can be redefined as

$$\frac{d\mathbf{x}_c}{dt} = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c, \quad (19)$$

where  $\mathbf{x}_c = [I_{\alpha R} \ I_{\alpha I} \ I_{\beta R} \ I_{\beta I}]'$ ,  $\mathbf{u}_c = [I_{outR} \ I_{outI}]'$ ,

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -k_S \omega_0 & \omega_0 & -\omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & -k_S \omega_0 & 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & \omega_0 & -\omega_0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{and } \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} k_S \omega_0 & 0 \\ 0 & k_S \omega_0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Then, considering (9), (10) and (19), the powers can be described as

$$\mathbf{y}_c = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c, \quad (20)$$

with

$$\mathbf{C}_c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \mathbf{C}_{c0} + \varepsilon_1 \mathbf{C}_{c1} + \varepsilon_2 \mathbf{C}_{c2},$$

$$\varepsilon_1 = \sin^2 \theta_0, \quad \varepsilon_2 = \cos \theta_0 \sin \theta_0,$$

$$\mathbf{C}_{c0} = E_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{c1} = E_0 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{and } \mathbf{C}_{c2} = E_0 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

#### E. Overall Model

Considering the load, line and SOGI-QSG models, the parameter-varying system presented in (21) is obtained, where  $\mathbf{x}_{lin} = [\mathbf{x}'_a \ \mathbf{x}'_b \ \mathbf{x}'_c]'$ ,  $\mathbf{C}_{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = [\mathbf{0}_2 \ \mathbf{0}_2 \ \mathbf{C}_c(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]$ ,

$$\mathbf{A}_{lin}(g_L, b_L) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a(g_L, b_L) & \mathbf{B}_{1b} & \mathbf{0}_{2 \times 4} \\ \mathbf{B}_{2b} & \mathbf{A}_b & \mathbf{0}_{2 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{1lin} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{B}_{1b} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{B}_{2lin} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2a} \\ \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} \end{bmatrix}.$$

$$\frac{d\mathbf{x}_{lin}}{dt} = \mathbf{A}_{lin}(g_L, b_L) \mathbf{x}_{lin} + \mathbf{B}_{1lin} \mathbf{u}_b + \mathbf{B}_{2lin} \mathbf{u}_a \quad (21a)$$

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{C}_{lin}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mathbf{x}_{lin} \quad (21b)$$

In the above representation, the control variable is  $\mathbf{u}_b$ . However, the droop equations should deliver  $E$  and  $\omega$  to the system. Recalling that

$$E_R(t) = E(t) \cos(\psi(t)), \quad (22a)$$

$$E_I(t) = E(t) \sin(\psi(t)), \quad (22b)$$

and

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \Delta\omega(t), \quad (23)$$

the control signal is redefined as

$$\mathbf{u}_b = \begin{bmatrix} E(t) \cos \psi(t) \\ E(t) \sin \psi(t) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

where  $\psi$  is the voltage phase delay and appears as an additional state. Hence, the full model of the system can be given by (21), (23) and (24).

#### IV. CONTROL DESIGN

It can be noticed from (24) that if the frequency is restored, then  $\Delta\omega = 0$  and  $\psi$  is finite in steady-state. Moreover, if  $\psi$  is sufficiently small, *i.e.*, the frequency is quickly restored, the approximations  $\cos \psi(t) \approx 1$  and  $\sin \psi(t) \approx \psi(t)$  can be considered. In addition, since  $E$  is given by the magnitude droop equation,  $E \approx E_0$ . Then (24) can be approximated as

$$\frac{d\mathbf{x}_d}{dt} = \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{droop}, \quad (25a)$$

$$\mathbf{u}_b = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_d + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_{droop}, \quad (25b)$$

being  $\mathbf{x}_d = \psi$ ,  $\mathbf{u}_{droop} = [E \ \Delta\omega]'$ ,  $\mathbf{B}_d = [0 \ 1]$ ,  $\mathbf{C}_d = [0 \ E_0]'$  and

$$\mathbf{D}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

By grouping (21) and (25) one yields to the open loop system below:

$$\frac{d\mathbf{x}_{OL}}{dt} = \mathbf{A}_{OL} \mathbf{x}_{OL} + \mathbf{B}_{1OL} \mathbf{u}_{droop} + \mathbf{B}_{2OL} \mathbf{u}_a, \quad (26a)$$

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{C}_{OL}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mathbf{x}_{OL}, \quad (26b)$$

where  $\mathbf{x}_{OL} = [\mathbf{x}'_a \ \mathbf{x}'_b \ \mathbf{x}'_c \ x_d]'$ ,  $\mathbf{B}_{1OL} = [\mathbf{0}_2 \ (\mathbf{B}_{1b} \mathbf{D}_d)'] \mathbf{0}_{2 \times 4} \ \mathbf{B}'_d]'$ ,  $\mathbf{B}_{2OL} = [\mathbf{B}'_{2a} \ \mathbf{0}_{2 \times 7}]'$ ,  $\mathbf{C}_{OL}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = [\mathbf{0}_{2 \times 4} \ \mathbf{C}_c(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \ \mathbf{0}_{2 \times 1}]$  and

$$\mathbf{A}_{OL} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a(g_L, b_L) & \mathbf{B}_{1a} & \mathbf{0}_{2 \times 4} & \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ \mathbf{B}_{2b} & \mathbf{A}_b & \mathbf{0}_{2 \times 4} & \mathbf{B}_{1b} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{B}_c & \mathbf{A}_c & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 4} & 0 \end{bmatrix}.$$

This linear system is then used to design the controllers. The control structure is split into two parts: the static droop; and the dynamic droop, where frequency and magnitude are restored.

##### A. Static Droop

The first control layer is the static droop, whose constants are calculated by

$$k_m = \frac{\omega_0 - \omega_{min}}{S_{nom}}, \quad (27a)$$

$$k_n = \frac{E_0 - E_{min}}{S_{nom}}, \quad (27b)$$

where  $S_{nom}$  is the inverter nominal apparent power,  $\omega_{min}$  and  $E_{min}$  are the minimum admissible voltage frequency and magnitude for the system.

In order to have a compact notation, (6) is rewritten as

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta \omega \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_s} = \underbrace{\begin{bmatrix} -k_n \cos \vartheta & -k_n \sin \vartheta \\ -k_m \sin \vartheta & k_m \cos \vartheta \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_s} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}, \quad (28)$$



where  $\mathbf{u}_s$  stands for the static droop control signal and  $\mathbf{K}_s$  is the static droop gain.

With this notation,  $\mathbf{u}_{droop}$  can be defined as

$$\mathbf{u}_{droop} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_0, \quad (29)$$

where  $\mathbf{u}_0 = [E_0 \ 0]'$  is the reference level. Thus, in closed-loop the system (26) is rewritten as

$$\frac{d\mathbf{x}_{OL}}{dt} = \mathbf{A}_{CL}\mathbf{x}_{OL} + \mathbf{B}_{1OL}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}_{2OL}\mathbf{u}_{2a}, \quad (30)$$

with  $\mathbf{A}_{CL} = \mathbf{A}_{OL} + \mathbf{B}_{1OL}\mathbf{K}_s\mathbf{C}_{OL}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .

### B. Frequency and Magnitude Restoration

The control strategy presented here leads to a structure similar to the one presented in [11], where frequency and voltage magnitude are restored using SISO Proportional-Integral (PI) controllers. In this work, a multivariable Integral controller will be considered as shown in the sequel.

In order to keep  $\psi$  small, a frequency compensation is required. To make it possible, a restoration term  $\mathbf{u}_r$  is added to  $\mathbf{u}_{droop}$ , yielding to

$$\mathbf{u}_{droop} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_0, \quad (31)$$

where  $\mathbf{u}_r = [E_r \ \omega_r]'$ . A simple way to assure voltage frequency and magnitude restoration is by implementing compensators as follows:

$$\omega_r = k_\omega \int (\omega_0 - \omega) dt = -k_\omega \psi, \quad (32a)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = E_0 - E, \quad (32b)$$

$$E_r = k_E \xi. \quad (32c)$$

Note that an integrator is added to the system in order to restore the voltage magnitude. This additional state is then included in the model, leading to the augmented system below:

$$\frac{d\mathbf{x}_{OLa}}{dt} = \mathbf{A}_{OLa}\mathbf{x}_{OLa} + \mathbf{B}_{1OLa}\mathbf{u}_r + \mathbf{B}_{OLa0}\mathbf{u}_0 + \mathbf{B}_{2OLa}\mathbf{u}_{2a}, \quad (33a)$$

$$\mathbf{y}_c = \mathbf{C}_{OLa}\mathbf{x}_{OLa}, \quad (33b)$$

$$\mathbf{y}_r = \mathbf{C}_r\mathbf{x}_{OLa}, \quad (33c)$$

where  $\mathbf{x}_{OLa} = [\mathbf{x}'_{OL} \ \xi]'$ ,  $\mathbf{y}_r = [\psi \ \xi]'$ ,  $\mathbf{B}_{2OLa} = [\mathbf{B}'_{2OL} \ 0_{2 \times 1}]'$ ,  $\mathbf{C}_{OLa} = [\mathbf{C}_{OL} \ 0_{2 \times 1}]$ ,  $\mathbf{C}_r = [0_{2 \times 8} \ \mathbf{I}_2]$ ,

$$\mathbf{B}_{OLa0} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1OL} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{1OLa} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1OL} \\ -1 \quad 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{OLa} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{CL} & \mathbf{0}_{9 \times 1} \\ -\mathbf{K}_{s(1)}\mathbf{C}_{OL} & 0 \end{bmatrix}$$

and  $\mathbf{K}_{s(1)}$  is the first line of  $\mathbf{K}_s$ . Note that if

$$\mathbf{K}_r = \begin{bmatrix} 0 & k_E \\ -k_\omega & 0 \end{bmatrix},$$

the static output feedback  $\mathbf{u}_r = \mathbf{K}_r\mathbf{y}_r$  is equivalent to the restoration signals given by (32). Moreover, if the  $\mathbf{K}_r$  is full, more degrees of freedom are available for the control design. This static output feedback problem can then be solved via the LMI solution presented in [16].

Notice that the matrices  $\mathbf{A}_{OLa}$  and  $\mathbf{C}_{OLa}$  depend affinely in the variables  $g_L$ ,  $b_L$ ,  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  which are supposed to be bounded time-varying parameters. Then, a polytope  $\mathcal{A}$  is defined by (34) (at the bottom of the page) and a polytopic approach can be applied. The pairs  $(\mathbf{A}_{OLa,i}, \mathbf{C}_{OLa,i})$  are the combination of the maximum and minimum values of the aforementioned variable parameters and define the  $J$  vertices of  $\mathcal{A}$ . Thus, the following result, derived from [16], is presented in order to obtain  $\mathbf{K}_r$ .

*Theorem 1:* Consider the system defined in (33) and the  $\mathcal{D}$ -region defined by

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : \mathbf{L} + s\mathbf{M} + s^*\mathbf{M}' < \mathbf{0}\}. \quad (35)$$

Let  $\mathcal{A}$  be the polytopic region defined as in (34). Suppose there exist real matrices  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}'$ ,  $\mathbf{N}$  and  $\mathbf{Y}$  with appropriate dimensions, and positive scalars  $\beta$ ,  $\gamma$  and  $\mu$  satisfying the LMIs below for  $i = 1 \dots J$ :

$$\min_{\mathbf{Q}, \mathbf{N}, \mathbf{Y}} (\gamma^2 + \beta) \text{ subject to : } \begin{cases} \begin{bmatrix} \Phi_i(\mathbf{Q}, \mathbf{Y}) & \mathbf{B}_{2OLa} & \mathbf{Q}\mathbf{C}'_{OLa,i} \\ \mathbf{B}'_{2OLa} & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{0}' \\ \mathbf{C}_{OLa,i}\mathbf{Q} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0} \\ \mathbf{L} \otimes \mathbf{Q} + \text{He}[\mathbf{M} \otimes (\mathbf{A}_{OLa,i}\mathbf{Q} + \mathbf{B}_{1OLa}\mathbf{Y}\mathbf{C}_r)] < \mathbf{0} \quad (36) \\ \mathbf{N}\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_r\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} > \mu\mathbf{I} \\ \begin{bmatrix} \beta\mathbf{I} & \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Y} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > \mathbf{0}, \end{cases}$$

where  $\Phi_i(\mathbf{Q}, \mathbf{Y}) = \text{He}(\mathbf{A}_{OLa,i}\mathbf{Q} + \mathbf{B}_{1OLa}\mathbf{Y}\mathbf{C}_r)$ ,  $\text{He}(\mathbf{M}) = \mathbf{M} + \mathbf{M}'$  and  $\otimes$  stands for the Kronecker product. Then, the output feedback  $\mathbf{u}_r = \mathbf{K}_r\mathbf{y}_r$ , with  $\mathbf{K}_r = \mathbf{Y}\mathbf{N}^{-1}$ , ensures that the closed-loop poles lie in the region  $\mathcal{D}$  defined in (35) and  $\mathcal{H}_\infty$  norm from  $\mathbf{u}_{2a}$  to  $\mathbf{y}_c$  is smaller than  $\gamma$ .

## V. SIMULATION RESULTS

To evaluate the model accuracy and the controller performance, simulation results are shown for two parallel connected inverters with unbalanced line impedances, whose parameters are presented in Table I. These simulations were made using the software PSIM and it was considered the parameters shown in Table II. These parameters were chosen

$$\mathcal{A} = \left\{ (\mathbf{A}_{OLa}, \mathbf{C}_{OLa}) : (\mathbf{A}_{OLa}, \mathbf{C}_{OLa}) = \sum_{i=1}^J \alpha_i (\mathbf{A}_{OLa,i}, \mathbf{C}_{OLa,i}), \alpha_i \leq 0, \sum_{i=1}^J \alpha_i = 1, i = 1 \dots J \right\} \quad (34)$$

according to Theorem 1 by using the nominal values  $R_{l1,2} = 2.25 \cdot 10^{-3}$  pu, a virtual resistance  $R_{virt}$  ten times bigger than  $R_l$  and  $L_{l1,2} = 14.25 \cdot 10^{-6}$  pu, and with  $0 \leq g_L \leq 1$  pu,  $b_L = 0$ ,  $0 \leq \varepsilon_1 \leq 1$  and  $-1/2 \leq \varepsilon_2 \leq 1/2$ . A  $D$ -region with real part smaller than  $-1$  with an absolute value smaller than  $\rho = 333\omega_0$  (equivalent to half of the sample rate  $f_S$ ) leading to the matrices below is considered:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & -\rho \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

TABLE I  
SIMULATION PARAMETERS

Parameter	Value	Parameter	Value
$E_0$	220V	$\omega_0$	$2\pi 60$ rad/s
$R_L$	10k $\Omega$	$C_L$	1nF
$S_{nom1}$	6kVA	$S_{nom2}$	3kVA
$R_{l1}$	17m $\Omega$	$R_{l2}$	48m $\Omega$
$L_{l1}$	138 $\mu$ H	$L_{l2}$	173 $\mu$ H

TABLE II  
CONTROL PARAMETERS

Parameter	VSI1	VSI2
$k_S$	$1/\pi$	$1/\pi$
$R_{virt}$	182m $\Omega$	363m $\Omega$
$\mathbf{K}_s$	$\begin{bmatrix} -17.9 & -3.9 \\ -1.3 & 6.1 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$	$\begin{bmatrix} -35.8 & -7.8 \\ -2.6 & 12.3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$
$\mathbf{K}_r$	$\begin{bmatrix} 289.4 & 456.6 \\ -350.6 & 1.95 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 289.4 & 456.6 \\ -350.6 & 1.95 \end{bmatrix}$
$f_S$	39.96kHz	39.96kHz

Fig. 6 shows the simulation results. Both inverters start with no load ( $i_L = 0$ ). For  $2s \leq t \leq 3s$ , a resistive load (8 $\Omega$ ) is connected to PCC. Similarly, for  $2.5s \leq t \leq 3.5s$ , an inductive load (20mH) is connected to the system. It can be noticed the proper active and reactive power balance between the two inverters, even with proportionally different line impedances. The settling time of the analysed variables is less than 100ms, corresponding to six periods of the voltage.

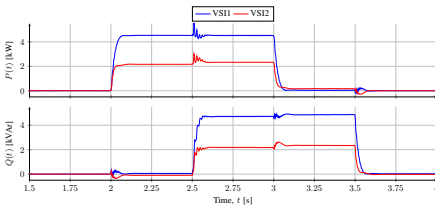


Fig. 6. Simulation results.

## VI. CONCLUSIONS

In this paper, a dynamic phasor model for single-phase droop-controlled VSI was developed. Including the most important dynamics, such as load, line and filter dynamics has ensured the model accuracy for a properly power balance

among parallel connected VSI. In addition, the current-sharing strategy with the SOGI-QSG strategy avoids the multiplication between currents and voltages. Then, a new control design method is proposed based on a static output feedback problem, which is solved via LMIs. By taking the variation of some parameters into account and by placing the closed-loop poles in a certain region of the complex plane, the system robustness and performance are guaranteed. Simulation results validate the proposed model and the control effectiveness, showing good power balance and fast power balance performance.

## REFERENCES

- [1] T. Kawabata and S. Higashino, "Parallel Operation of Voltage Source Inverters," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 24, no. 2, 1988.
- [2] M. C. Chandorkar, M. Deepakraj, D. M. Divan, and R. Adapa, "Control of Parallel Connected Inverters in Standalone AC Supply Systems," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 29, no. 1, pp. 136–143, 1993.
- [3] J. Rocabert, A. Luna, F. Blaabjerg, and I. Paper, "Control of Power Converters in AC Microgrids," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 27, no. 11, pp. 4734–4749, 2012.
- [4] A. Mohd, E. Ortjohann, D. Morton, and O. Omari, "Review of control techniques for inverters parallel operation," *Electric Power Systems Research*, vol. 80, no. 12, pp. 1477–1487, dec 2010.
- [5] H. Han, X. Hou, J. Wu, M. Su, J. Yang, and J. M. Guerrero, "Review of Power Sharing Control Strategies for Islanding Operation of AC Microgrids," *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2015.
- [6] J. M. Guerrero, L. G. D. Vicuña, J. Matas, and M. Castilla, "Output Impedance Design of Parallel-Connected UPS Inverters With Wireless Load-Sharing Control," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 52, no. 4, pp. 1126–1135, 2005.
- [7] Q.-C. Zhong and T. Hornik, *Control of Power Inverters in Renewable Energy and Smart Grid Integration*. John Wiley & Sons, 2013.
- [8] K. De Brabandere, B. Bolsens, J. Van den Keybus, A. Woyte, J. Driesen, R. Belmans, and K. Leuven, "A voltage and frequency droop control method for parallel inverters," *35th Annual Power Electronics Specialists Conference*, no. 2, pp. 2501–2507, 2004.
- [9] E. A. A. Coelho, P. C. Cortizo, and P. F. D. Garcia, "Small-Signal Stability for Parallel-Connected Inverters in Stand-Alone AC Supply Systems," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 38, no. 2, pp. 533–542, 2002.
- [10] G. M. S. Azevedo, M. C. Cavalcanti, F. A. S. Neves, P. Rodriguez, and J. Rocabert, "Performance Improvement of the Droop Control for Single-Phase Inverters," *International Symposium on Industrial Electronics*, 2011.
- [11] J. C. Vasquez, J. M. Guerrero, M. Savaghebi, J. Eloy-Garcia, and R. Teodorescu, "Modeling, Analysis, and Design of Parallel Three-Phase Voltage Source Inverters," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, no. 4, pp. 1271–1280, 2013.
- [12] V. Mariani and F. Vasca, "Stability Analysis of Droop Controlled Inverters via Dynamic Phasors and Contraction Theory," *European Control Conference*, no. 1, pp. 1505–1510, 2013.
- [13] L. Wang, X. Q. Guo, H. R. Gu, W. Y. Wu, and J. M. Guerrero, "Precise modeling based on dynamic phasors for droop-controlled parallel-connected inverters," *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, pp. 475–480, 2012.
- [14] J. Schiffer, R. Ortega, A. Astolfi, J. Raisch, and T. Sezi, "Conditions for stability of droop-controlled inverter-based microgrids," *Automatica*, sep 2014.
- [15] M. Sinha, F. Dörfler, B. B. Johnson, and S. V. Dhople, "Uncovering Droop Control Laws Embedded Within the Nonlinear Dynamics of Van der Pol Oscillators," *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, pp. 1–10, 2014.
- [16] C. Crusius and A. Trofino, "Sufficient LMI conditions for output feedback control problems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 5, pp. 1053–1057, 1999.
- [17] V. Venkatasubramanian, H. Schattler, and J. Zaborsky, "Fast Time-Varying Phasor Analysis in the Balanced Three-Phase Large Electric Power System," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 11, pp. 1975–1982, 1995.