Un apunt de matemàtica financera: com es valoren les opcions?

Joaquim Bruna
Departament de Matemàtiques

Sant Albert UAB
Barcelona, Novembre 2016

Un apunt de matemàtica financera: com es valoren les opcions?

...-en una primera aproximació.

1. Taxa d'interès. Contractes a termini.
2. El concepte d'arbitratge.
3. Opcions de compra i venda. Productes financers derivats.
4. Models per a l'evolució del preu d'un actiu. Moviment brownià i brownià fraccionari
5. Una aproximació incorrecta al problema.
6. El model discret. Teorema d'arbitratge.
7. La fórmula de Black-Scholes.
8. L'equació de Black-Scholes i l'equació de la calor.
9. I a la pràctica?

Taxa d'interès

Taxa d'interès r per any: una quantitat P_0 rendeix al cap d'un any $P_0 + P_0 r = (1 + r)P_0$.

Calculat cada sis mesos: $P_0 + P_0 \frac{r}{2} = (1 + \frac{r}{2})P_0 = P_1$ al cap de sis mesos i $(1 + \frac{r}{2})P_1 = (1 + \frac{r}{2})^2 P_0$ al cap de l'any.

Calculat cada $\frac{1}{n}$ any: $(1 + \frac{r}{n})^n P_0$

Calculat continuament: $\lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{r}{n})^n P_0 = e^r P_0$

Calculat contínuament en T anys: $P_T = e^{rT} P_0$.

$$\frac{dP_t}{P_t} = r\,dt.$$

Descomptar: V valor esperat a temps $T \to Ve^{-rT}$ valor a temps zero.

Contractes a termini. El concepte d'arbitratge

Un *contracte a termini* és un contracte fet a temps 0 pel qual ens obliguem a comprar a temps T un determinat actiu. Quin ha de ser el preu?

Si S és el preu de mercat a temps 0 de l'actiu, el just és $F = Se^{rT}$, suposant que el rendiment del diner sense risc és r. Si no és així, és pot fer negoci sense risc:

• Si $F < Se^{rT}$, una persona que té l'actiu pot fer negoci sense risc: el ven a preu S, posa S al banc i signa el contracte de futur (com a comprador). A temps T, té Se^{rT} diners al banc dels quals en gastarà F per tornar a tenir l'actiu. Ha passat de tenir l'actiu a tenir l'actiu més un benefici de $Se^{rT} - F$.

• Si $F > Se^{rT}$, algú que no té res pot fer negoci sense risc: demana S al banc, amb això compra l'actiu i ven un contracte de futur. A temps T, cobrarà F pel seu actiu i deurà Se^{rT} al banc, amb la qual cosa haurà fet un benefici de $F - Se^{rT}$.

Canvis de divises. Concepte d'arbitratge

Un industrial, dins de 90 dies ha de pagar un milió de lliures a un proveïdor. Per disminuir incertesa, farà, avui, un contracte a termini amb un banc per comprar un milió de lliures dins de $T = 90$ dies, a una determinada taxa de canvi F. Quina taxa de canvi F sembla justa?

Preu d'una lliura esterlina:
• Avui : $S = 1,32236$ euros. • A 90 dies: $F = 1,33345$ euros

D'on surt aquest F?. Té a veure amb la *diferència* entre els rendiments r_1, r_2 del diner a EU i UK.

Ha de ser $F = Se^{(r_1 - r_2)T}$. Si no és així, es pot fer *arbitratge*, negoci sense arriscar:

Canvis de divises. Concepte d'arbitratge

• Si $Fe^{r_2 T} < Se^{r_1 T}$, aniré a un banc anglès, demanaré X lliures en préstec, les converteixo en XS euros i els poso en un banc espanyol. Al mateix temps faig un contracte de futur a Espanya per comprar $Xe^{r_2 T}$ lliures. A temps T tindré $XSe^{r_1 T}$ euros, dels quals $XFe^{r_2 T}$ els utilitzaré per a comprar $Xe^{r_2 T}$ lliures que tornaré al banc anglès per pagar el meu deute. He guanyat $X(Se^{r_1 T} - Fe^{r_2 T})$ euros sense arriscar res.

• Si $Fe^{r_2 T} > Se^{r_1 T}$, aniré a un banc espanyol i demanaré $XSe^{-r_2 T}$ euros en préstec, que utilitzaré per comprar $Xe^{-r_2 T}$ lliures, que posaré en un banc anglès. Al mateix temps venc un contracte per a la compra de X lliures. A temps T, tindré X lliures al banc anglès, que donaré al comprador del contracte a termini per XF euros. En aquest moment hauré de pagar $XSe^{r_1 T - r_2 T}$ al banc espanyol, i em queda un benefici net.

Opcions de compra i venda

Una *opció de compra (call option)* d'un determinat actiu financer és un contracte fet a temps 0 que dóna al comprador el dret (**no l'obligació**) a comprar a temps de venciment T (expiration date, maturity) un l'actiu a preu K (exercise price, stike price).

Així, si a temps T el preu de l'actiu és $S_T > K$ el comprador exerceix l'opció, el venedor li ha de vendre l'actiu a preu K. Venent-la immediatament a preu de mercat, el comprador farà un benefici de $S_T - K$. Si el preu de l'actiu és $S_T < K$ l'opció no és exercida i no té cap valor. Una *opció de venda(put option)* dóna el dret a vendre. Les opcions *europees* només es poden exercir al venciment, les opcions *americanes* es poden exercir en qualsevol moment abans del venciment.

Valoració d'una opció: A temps zero, l'actiu té un valor S_0. Quina és la prima C que ha de pagar el comprador d'una opció de compra per tenir aquest dret?

Sigui S_t el valor a temps t de l'actiu. Necessitem un model per a S_t, necessàriament amb una component estocàstica.

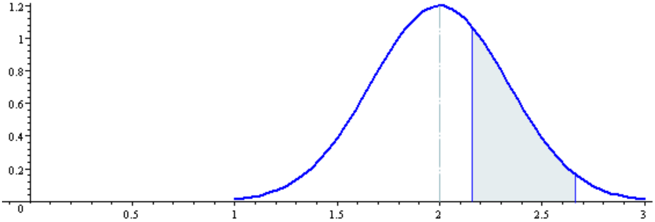
El moviment brownià

Una variable aleatòria pren valors nombres amb una determinada llei. La llei normal $N(0,1)$ és la que té densitat

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Si X té llei normal $N(0,1)$, $\mu+\sigma X$ té esperança μ, desviació típica σ amb llei $N(\mu,\sigma)$ de densitat

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

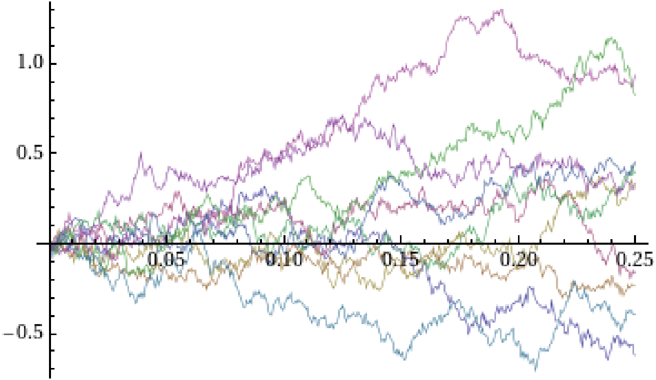


El moviment brownià (Brown, Bachelier, Einstein, Wiener)

Un procès $Z = (Z_t)$ és un brownià (unidimensional) si

• El increment ΔZ en un petit interval de temps Δt és $\Delta Z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, amb ε normal standard. Així, ΔZ té mitjana zero, desviació típica $\sqrt{\Delta t}$, variança Δt.

• Els increments ΔZ en diferents intervals de temps són independents.



• El futur $Z_t, t > T$ depen només del present Z_T i no del passat $Z_t, t < T$.
El increment $Z_T - Z_0$ en un interval llarg de temps és la suma d'increments en intervals $\Delta t = \frac{T}{N}$,

$$Z_T - Z_0 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t},$$

amb ε_i, normals standards independents. També és normal amb mitjana zero, variança $N\Delta t = T$ i desviació típica $\sqrt{T}$.
Quan fem $\Delta t \to 0$, $dZ = \varepsilon\sqrt{dt}$. Un brownià generalitzat X_t de paràmetres μ, σ té increments

$$dX = \mu dt + \sigma dZ.$$

El model per a un actiu. Brownià geomètric.

Bachelier (1900) proposà el moviment brownià per a modelar l'evolució dels preus dels actius financers.

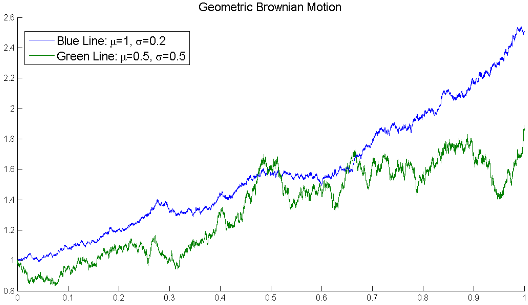
Model: el procès $S = (S_t)$ de l'evolució de preu d'un actiu compleix el *brownià geomètric*, són les *taxes d'increment* les que segueixen el brownià

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ.$$

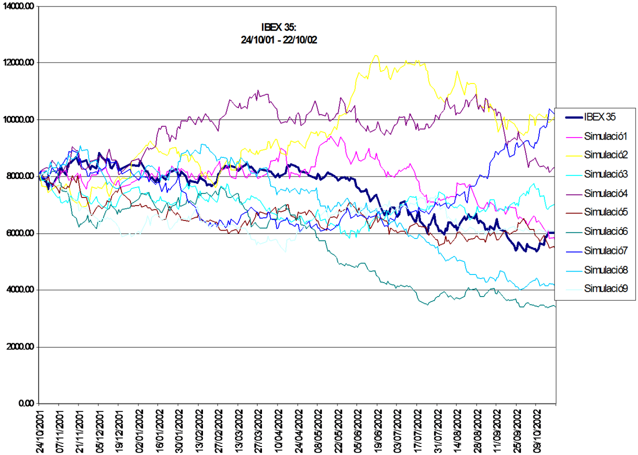
En un petit interval de temps Δt, l'increment esperat de S és $\mu S \Delta t$. La desviació típica de ΔS és $\sigma S \sqrt{\Delta t}$. σ s'anomena la *volatilitat*. Hom pot veure llavors que

$$d \ln S = (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) dt + \sigma dZ.$$

$\ln S_T - \ln S_0$ té llei normal d'esperança $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ i desviació típica $\sigma\sqrt{T}$. S_T té esperança $S_0 e^{\mu T}$.


Geometric Brownian Motion
Blue Line: μ=1, σ=0.2
Green Line: μ=0.5, σ=0.5
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

Són correctes aquests models?



Una primera aproximació al cost d'una opció

Si sabem que a l'instant 0 l'actiu val S_0, la llei de $\ln S_T$, segons el nostre model, és normal amb esperança $\ln S_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ i desviació típica $\sigma\sqrt{T}$. El valor de l'opció en l'instant T és $\max(S_T - K, 0)$, per tant en terme mig valdrà $E(\max(S_T - K, 0))$.

Sembla natural pensar que el preu que hem de demanar per l'opció en l'instant 0 sigui aquest mateix valor, descomptat a la taxa d'interès del diner sense risc,

$$e^{-rT}E(\max(S_T - K, 0)).$$

Malgrat que això ens pugui semblar natural, aquesta no és la solució correcta, doncs en general dóna oportunitat d'arbitratge.

Les persones

Fischer Black i Millon Scholes, 1973: "The Pricing of Options and Corporate Liabilities"

1978: models discrets de Cox, Ross, Rubinstein

1994: es funda Long Term Capital Management

Black mor el 1995

Merton i Scholes. Nobel el 1997

1998: collapse de LTCM

Model discret

Valor a temps zero $S_0 = 100$ d'una acció.

Valor a temps $T = 1$

$$\begin{cases} S_1 = 150 \\ S_1 = 70 \end{cases}$$

No diem amb quina probabilitat S_1 pren el valor 150 o 70.

Suposem que amb cost C es pot comprar a temps zero una opció de compra d'una acció, a temps 1 i amb $K = 130$. Suposem també que podem comprar accions a temps zero a 100 cadascuna.

Model discret

Posem-nos en la posició del venedor d'opcions. Dissenyem una cartera amb y opcions venudes i x accions comprades a temps zero. Després de signar el contracte, tindrem $Cy - 100x$ en cash, que posem al banc, i x accions.

El valor d'aquesta cartera (opcions venudes i accions) a temps 1 és

$$\begin{cases} 150x - 20y, S_1 = 150 \\ 70x, S_1 = 70 \end{cases}$$

mentre que tindrem $(Cy - 100x)(1 + r)$ al banc. Si triem x, y de forma que aquests dos valors siguin iguals,

$$150x - 20y = 70x, \;\; y = 4x$$

hem eliminat el risc.

Aleshores, haurem fet un guanyi de

$$70x + (4xC - 100x)(1+r) = x(1+r)\left(\frac{70}{1+r} - 100 + 4C\right).$$

d'on l'expressió E en parèntesi ha de ser zero:

$$C = 25 - \frac{70}{4(1+r)} = \frac{5(3+10r)}{2(1+r)}.$$

Si C és diferent d'aquest valor, hi ha oportunitat d'arbitratge:

si $E > 0$, prenem x positiu, comprem x accions i venem $4x$ opcions.

si $E < 0$, prenem x negatiu, venem x accions i comprem $4x$ opcions.

Teorema d'arbitratge

En l'exemple anterior, no ha intervingut pas cap estimació de la llei de S_1. En un cert sentit, el no arbitratge del mercat assigna automàticament aquestes probabilitats.

Considerem un experiment

• amb M possibles resultats, $j = 1, 2, \ldots, M$,

• que es poden fer N apostes sobre el resultat; a l'aposta $i = 1, 2, \ldots, N$, si surt j hi ha un guanyi/perdua de $r_i(j)$.

• Una *estratègia d'aposta* és un vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, on x_i és la quantitat que es juga en la i-sima aposta. Si surt j, el guanyi és

$$R(j) = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i(j).$$

Teorema d'arbitratge

Teorema. O bé hi ha un vector de probabilitat $P = (p_1, p_2, \ldots, p_M)$ tal que

$$\sum_{j=1}^{M} p_j r_i(j) = 0, i = 1, 2, \ldots, N,$$

o bé hi ha una estratègia d'aposta $X = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_i(j) > 0, j = 1, 2, \ldots, M.$$

Diu que o bé hi ha unes probabilitats $p_j = P(X = j)$ de forma que totes les apostes són justes o bé hi ha una estratègia que dóna un guanyi segur.

Les probabilitats neutres al risc

En el cas de l'opció de compra, el resultat de l'experiment és el valor de S_1. Hi ha dos possibles resultats, $S_1 = 150$ o $S_1 = 70$ i dues apostes a fer: comprar una acció o comprar una opció a temps zero. El teorema ens diu que no hi ha arbitratge si hi ha $p, 0 < p < 1$, de forma que el valor esperat de les dues apostes és zero.

El valor descomptat d'una acció a temps 1 és

$$\begin{cases} \frac{150}{1+r}, S_1 = 150 \\ \frac{70}{1+r}, S_1 = 70, \end{cases}$$

Si p designa la probabilitat que S_1 valgui 150, l'esperança de guanyi comprant una acció és

$$\frac{p150 + (1-p)70}{1+r} - 100 = p\frac{80}{1+r} - 100 + \frac{70}{1+r}.$$

Això val zero si $p = \frac{3+10r}{8}$.

El valor descomptat d'una opció a temps 1 és descomptant $\max(S_1 - 130, 0)$,

$$\begin{cases} \frac{20}{1+r}, S_1 = 150 \\ 0, S_1 = 70, \end{cases}$$

i l'esperança de guanyi d'aquesta estratègia

$$\frac{p20}{1+r} - C = \frac{3+10r}{8} \frac{20}{1+r} - C.$$

D'on obtenim $C = \frac{5(3+10r)}{2(1+r)}$, com abans. És a dir, C ha de ser el valor esperat de l'opció a temps 1, descomptat a temps zero, *respecte la probabilitat neutra al risc*.

Aproximació per un procés binomial multiperiode

Hem dit abans que $\ln S_T - \ln S_0$ té llei normal d'esperança $\hat{\mu} = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T$ i desviació típica $\sigma\sqrt{T}$.

El pas continu de S_0 a S_T pot ésser aproximat per salts discrets. Posem $\Delta = \frac{T}{n}$, n gran, Δ petit. Tenim uns salts $S_0, S_1, \ldots, S_n$.

El salt del valor de l'actiu cada Δ unitats de temps, de S_i a S_{i+1},l'aproximarem per quelcom més senzill: o bé s'incrementa per un factor u o bé es decrementa pel factor $d = \frac{1}{u}$, amb probabilitats $q, 1-q$.

Es pot provar matemàticament que triant

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, q = \frac{1}{2}(1 + \frac{\hat{\mu}}{\sigma}\sqrt{\Delta})$$

la iteració dels N salts convergeix a $\frac{S_T}{S_0}$, amb la mateixa llei.

El que hem après abans és que la probabilitat $q, 1-q$ ha de ser substituida a cada pas per la probabilitat neutra al risc $p, 1-p$. Calculem-la. Tenim que partint de S_i, l'experiment té dos possibles resultats:

$$S_{i+1} = \begin{cases} uS_i, \text{amb probabilitat } p \\ \frac{1}{u}S_i, \text{amb probabilitat } 1-p \end{cases} .$$

L'estratègia de comprar en l'instant i i vendre en l'instant $i+1$ tindria un guany

$$\frac{puS_i + (1-p)dS_i}{1+r\Delta} - S_i,$$

que és zero quan

$$p = \frac{1+r\Delta - d}{u-d} = \frac{1 + rT/n - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}}}.$$

La fórmula de Black-Scholes

Aquest valor resulta ser $p \sim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r-\sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}}\right)$

En conseqüència, **la llei de** $\ln S_T - \ln S_0$ **per la probabilitat neutra al risc és log-normal però amb el paràmetre** μ **original substituït per** r**.**

Amb això podrem ja calcular el valor just del preu d'una acció amb venciment T i strike K

$$C = e^{-rT}\hat{E}\left((S_T - K)^+\right) = e^{-rT}E\left((S_0 e^W - K)^+\right),$$

on W té llei normal de mitjana $(r - \frac{\sigma^2}{2})T$ i variança $\sigma^2 T$.

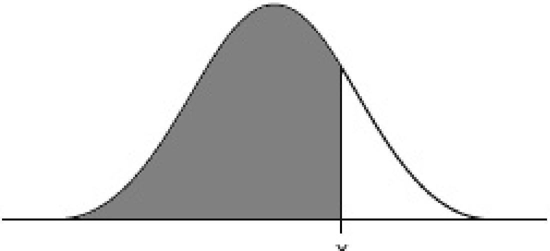
Un càlcul senzill dóna

$$C = S_0\Phi(\omega) - Ke^{-rT}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{T}),$$

on

$$\omega = \frac{rT + \sigma^2 T/2 - \ln(K/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}$$

i Φ és la funció de distribució de la llei normal standard.



L'equació de Black-Scholes

Una altra manera de procedir és mirar-se el preu C com a una funció de S mateix i del temps de venciment t. S segueix la llei

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ = \mu S dt + \sigma S \varepsilon \sqrt{dt}.$$

Pensem quina és la taxa de variació de C en un cert moment t quan el subjacent val S. Hem de considerar l'increment ΔC en un petit interval de temps Δt i fer $\Delta t \to 0$. Per la fórmula de Taylor

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial C}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(\Delta S)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial t}(\Delta S)(\Delta t) + \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \dots$$

Tenim que $\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$, per tant si només conservem els termes en Δt

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial S}(\mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}) + \frac{\partial C}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(\mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t})^2 + \ldots$$

$$= \frac{\partial C}{\partial S}(\mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}) + \frac{\partial C}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \epsilon^2 \Delta t + \ldots.$$

Ara bé, la variable $\varepsilon^2 \Delta t$ té esperança Δt i variança de l'ordre de $(\Delta t)^2$, la qual cosa diu que en el límit quan $\Delta t \to 0$ aquest terme és no estocàstic de l'ordre de dt. Tot plegat s'obté

L'equació de Black-Scholes

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S dZ.$$

És important observar que la variació dC té exactament la mateixa component dZ d'incertesa que S. Ara farem, en temps continu, exactament el mateix que abans. Produir una cartera consistent en una opció venguda i un cert nombre d'actius comprats que no tingui incertesa. La combinació adequada resulta ser tenir $\frac{\partial C}{\partial S}$ actius. El cost P d'aquesta cartera és

$$P = \frac{\partial C}{\partial S} S - C$$

i la seva variació

$$\Delta P = -\Delta C + \frac{\partial C}{\partial S}\Delta S.$$

Substituint ΔS, ΔC per les seves expressions s'arriba a

$$\Delta P = \left(-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t.$$

L'equació de Black-Scholes

Com que ara no hi ha incertesa, el rendiment de P hauria de ser el del diner sense risc, a taxa d'interès r, és a dir,

$$\Delta P = rP\Delta t,$$

d'on s'obté

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC.$$

Aquesta és l'equació de Black-Scholes. Amb un canvi de variable, es matemàticament equivalent a l'equació de difusió de la calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Imposant la condició

$$C(S,t) = \max(S-K,0), t = T,$$

s'obté la mateixa solució que abans.

Black-Scholes a la pràctica