



de poner de manifiesto la riqueza que se esconde en estas últimas sucesiones y lo útiles que resultan en la resolución de muchos problemas. En particular, casi todo el artículo va a estar dedicado a la sucesión de ceros y unos de Thue-Morse que denotaremos por  $(t)$  y en menor medida a otra sucesión de ceros y unos conocida como sucesión de Fibonacci que está asociada a la representación binaria de los números de la conocida sucesión de Fibonacci  $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ . Pero hay que tener en cuenta que pueden existir muchas más de gran interés. Un hecho a subrayar es el que en casi todos los casos, estas sucesiones son ubicuas en muchos problemas de las Matemáticas y también de las Ciencias Aplicadas. Hace muchos años que mis profesores del instituto nos explicaban aquello, que a su vez había dicho Galileo, de que la naturaleza está escrita en el lenguaje de las Matemáticas. *La verdad es que en aquella época, no hice caso a tal afirmación.*

## 2. La sucesión de Thue-Morse



Axel Thue

Se conoce con tal nombre la sucesión de ceros y unos

$$(t) = (t_n)_{n \geq 0} = 0110100110010\dots$$

Tal sucesión es un objeto matemático ubicuo ya que aparece en un buen número de problemas en Álgebra, Teoría de Números, Combinatoria, Topología, Física Matemática, etc. La sucesión puede ser introducida y construida de varias maneras dependiendo del problema que estemos considerando.

La sucesión de Thue-Morse apareció por primera vez de la mano de Eugène Prouhet en 1851 que la usó en la resolución de varios problemas de Teoría de Números (uno de ellos es el problema conocido en la actualidad como de Prouhet-Tarry-Scott) [24]. Sin embargo, Prouhet no la construyó explícitamente; esto lo hizo Axel Thue en 1906 [30]. Thue la usó introduciéndola en sus estudios sobre Combinatoria de Palabras. Pero la sucesión alcanzó el reconocimiento de la comunidad matemática por los trabajos realizados por Marston Morse en 1921 ([21]), cuando la aplicó en Geometría Diferencial a la construcción de geodésicas recurrentes en superficies de curvatura negativa. Esta construcción fue muy relevante a su vez para la introducción por parte de Hedlund de la Dinámica Simbólica ([22]) que es una potente herramienta para entender muchos problemas de la Dinámica Topológica.

La sucesión ha sido re-descubierta de forma independiente muchas veces por diferentes autores y no siempre en el contexto de la investigación matemática. Es el caso, por ejemplo, de Max Euwe, un gran maestro del ajedrez, que ostentó el título de campeón del mundo de 1935 a 1937 y que también fue profesor de matemáticas en la universidad de Amsterdam. Descubrió la sucesión en 1929 en una aplicación al ajedrez, usando una propiedad destacada que posee y demostrando que, con las reglas existentes en aquella época para regular el trascurso de las partidas de ajedrez, es posible diseñar partidas que serían infinitas, es decir, no terminarían nunca en el sentido de que al no haber una clara situación predominante de cualquiera de los jugadores, se podrían seguir jugando indefinidamente al no poder declararlas como tablas ([9]).

## 2.1. Diferentes métodos de introducción de la sucesión de Thue-Morse

A lo largo del tiempo y dependiendo del problema a resolver, se ha encontrado muchos caminos para su introducción. En esta sección indicaremos los que de una u otra forma van a ser utilizados en este artículo.

1. Dado el *alfabeto*  $\{0, 1\}$ , compuesto por las *letras* 0 y 1, denominamos *palabra* (denotada cuando tiene más de una letra por  $X$ ), a una sucesión finita de símbolos consecutivos del alfabeto. En lo que sigue, definimos una sucesión de palabras introducidas de forma recurrente

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_{n+1} &= X_n \bar{X}_n \end{aligned}$$

para  $n = 0, 1, \dots$  donde por  $\bar{X}$  denotamos la palabra complementaria de  $X$ , es decir, cambiamos los 0's de la palabra  $X$  por 1's y viceversa, y donde  $X_n \bar{X}_n$  representa la *concatenación* de las palabras  $X_n$  y  $\bar{X}_n$  que definimos como la palabra formada con las letras de  $X_n$  seguido de las de  $\bar{X}_n$ .

Siguiendo dicha recurrencia obtenemos

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_1 &= 01 \\ X_2 &= 0110 \\ X_3 &= 01101001 \\ X_4 &= 0110100110010110 \\ &\dots \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Es inmediato que la *concatenación* de todas las palabras anteriores (es decir  $X_0X_1\dots X_n\dots$ ) da lugar en el límite a una palabra descrita por una sucesión de símbolos que representamos por  $(a_n)_{n=0}^\infty$ .

Si suponemos que las anteriores palabras representan números escritos en base 2

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0,0_2 \\ \alpha_1 &= 0,01_2 \\ \alpha_2 &= 0,0110_2 \\ &\dots\end{aligned}$$

podemos obtener dichos números en base 10.

Por la forma en que se construyen las palabras  $X_n$ , es fácil demostrar por inducción que

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \bar{\alpha}_n 2^{-2^n}$$

para cada  $n \in \mathbb{N}$ , teniendo en cuenta que  $\alpha_0 = 0$ . Con  $\bar{\alpha}_n$  denotamos el número asociado a la palabra  $\bar{X}_n$ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\alpha_n + \bar{\alpha}_n &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{2^n} \frac{1}{2^k} - 1 \\ &= \frac{1 - (\frac{1}{2})^{2^n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 = 1 - 2^{-2^n}\end{aligned}$$

es decir,

$$\bar{\alpha}_n = 1 - 2^{-2^n} - \alpha_n$$

por lo que

$$\bar{\alpha}_n = 1 - 2^{-2^n} - \alpha_n$$

y

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + (1 - 2^{-2^n} - \alpha_n)2^{-2^n} = 2^{-2^{n+1}}(2^{2^n} - 1)(1 + 2^{2^n} \alpha_n) \quad (1)$$

Usando (1), podemos obtener aproximaciones racionales de un número que denotaremos por  $\tau_{MT}$  y que es el número real asociado a  $(t)$  de la forma  $0, t_0 t_1 \dots_2$ . Por ejemplo, las primeras aproximaciones se pueden calcular fácilmente y valen

$$0, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{105}{256}, \frac{13515}{32768}, \dots$$

El número  $\tau_{TM}$  viene dado por la suma de una subserie de la serie geométrica de razón  $\frac{1}{2}$  y primer término  $\frac{1}{2^2}$ . Como dicha serie suma  $1/2$ , es evidente que  $\tau_{TM} < 0,5$ . En [23] se puede ver un algoritmo para obtener aproximaciones decimales de tal número. En particular se obtiene que  $\tau_{TM} = 0,4124540336401075977\dots$

En el libro [10] dedicado a la descripción y propiedades de 137 constantes relevantes en Matemáticas,  $\tau_{TM}$  se puede obtener a través de un producto infinito por la fórmula

$$\begin{aligned}\tau_{TM} &= \frac{1}{4} \left[ 2 - \prod_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2^n-1}}{2^{2^n}} \right] = \frac{1}{4} \left[ 2 - \prod_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n} (2^{2^n} - 1) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left( 2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 255 \cdot 65535 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 256 \cdot 65536 \cdots} \right).\end{aligned}$$

- Recordemos que dadas dos palabras  $X, Y$ , denotamos por  $XY$  su *concatenación*. Un *morfismo* de palabras es una aplicación  $h$  definida en el conjunto de todas las palabras, que denotamos por  $\mathfrak{P}$ , que verifica la identidad  $h(XY) = h(X)h(Y)$  para cualquier par  $X, Y \in \mathfrak{P}$ .

Definimos el *morfismo de Thue-Morse* como la aplicación  $\theta$  que verifica  $\theta(0) = 01$ ,  $\theta(1) = 10$ . Entonces es inmediato que

$$\begin{aligned}\theta(0) &= 01 \\ \theta^2(0) &= \theta(\theta(0)) = 0110 \\ \theta^3(0) &= 01101001 \\ \theta^4(0) &= 0110100110010110\end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Se prueba inmediatamente por inducción respecto a  $n$  que  $\theta^n(0) = X_n$  y  $\theta^n(1) = \bar{X}_n$ .

Entonces se puede comprobar sin dificultad que  $\theta((t)) = (t)$  en  $\mathfrak{P}$ , por lo que  $(t)$  es un punto fijo de  $\theta$ , que además es el único.

- La sucesión de Thue-Morse se puede introducir también como la sucesión de ceros y unos  $(b_n)_{n=0}^{\infty}$  definida recurrentemente por

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_{2n} = b_n \quad \text{y} \quad b_{2n+1} = 1 - b_n \quad \text{para cualquier } n \geq 2.$$

Denominaremos *solapamiento* de palabras a una palabra de la forma  $aXaXa$  donde  $a$  sea una letra y  $X$  una palabra. Usando como alfabeto,

por ejemplo, todas las letras del idioma español, las palabras *alfalfa* y *entente* serían ejemplos de solapamientos. Decimos que una palabra está *libre de solapamientos* si no contiene ninguna palabra que sea un solapamiento. La palabra (*t*) es un ejemplo de una sucesión libre de ciertos solapamientos (esta afirmación fue demostrada por Morse en [21].)

4. Dado un número entero positivo  $n$ , con la siguiente descomposición binaria

$$n = \sum_{0 \leq i \leq k} p_i 2^i,$$

denotamos por  $s_2(n)$  la función suma de sus dígitos, es decir, la suma de los  $p_i$ 's.

Denotemos por

$$c_n = s_2(n) \pmod{2}$$

de aquí resulta que  $c_n = 0$  si la descomposición binaria de  $n$  contiene un número par de unos y  $c_n = 1$  si contiene un número impar. De esta forma hemos introducido la sucesión  $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ .

5. Dados  $d_0, d_1, \dots, d_i, \dots, d_{2^k-1}$  con  $d_0 = 0$ , para  $k = 1, 2, \dots$  construimos la palabra de longitud  $2^{k+1}$ :

$$d_0 d_0^* d_1 d_1^* \dots d_i d_i^* \dots d_{2^k-1} d_{2^k-1}^*$$

con el siguiente método: cada cero se reemplaza por el par  $\{0, 1\}$  y cada uno por  $\{1, 0\}$ . Esta operación deja invariante a los  $2^k$  primeros números. Repitiendo este proceso, obtenemos la sucesión  $(d_n)_{n=0}^{\infty}$ .

6. Otra forma que comprobaremos como muy interesante es tomar

$$\begin{aligned} e_0 &= 0 \\ e_{2^k+i} &= e_i^* \end{aligned}$$

para  $0 \leq i < 2^k$ . Con esta recursión, se toman los  $2^k$  números  $e_0, \dots, e_{2^k-1}$  para generar los siguientes  $2^k$ , obteniéndose la sucesión  $(e_n)_{n=0}^{\infty}$

Computando los elementos de las distintas sucesiones construidas y procediendo en cada caso por inducción, obtenemos que las sucesiones son la misma. La prueba se puede ver en [27].

## 2.2. El ajedrez es un juego finito



Max Euwe durante una partida

La sucesión de Thue-Morse fue redescubierta por Max Euwe, un aventajado ajedrecista y matemático en un artículo de 1929 ([9]) donde pretendía contestar a la pregunta de si *el ajedrez es, o no, un juego finito*, es decir, un juego cuyo desenlace es victoria para alguno de los jugadores o empate (tablas) tras un número finito de movimientos. La contestación a tal pregunta en la época de Euwe dependía, y depende también hoy en día, de las reglas que la FIDE (Federación Internacional de Ajedrez) tenga en cada momento para regular las condiciones bajo las que discurre una partida. La filosofía de estas reglas es conseguir que cualquier partida se pueda dar por terminada en un número finito de jugadas o, en otras palabras, que el ajedrez sea un juego finito. La parte más difícil de estas reglas es la de discernir la cuestión de las tablas. Las reglas actuales de competición se pueden consultar en [11].

En 1929, la regla que se aplicaba por parte de la FIDE, era la conocida como la *Regla Alemana (R.A.): una partida de ajedrez se declara tablas, tras la solicitud de un jugador o si una sucesión de jugadas por parte del mismo jugador conduce a que todas las piezas de los dos colores y de todas las clases queden al menos tres veces en los mismos cuadros. (No importa lo larga que sea la sucesión e independientemente de los movimientos intermedios que pueden ser los mismos o distintos)*.

El inconveniente de la aplicación de tal regla es que obliga a apuntar todas las jugadas y comprobar que se produzcan las repeticiones señaladas. A pesar de todo, con su aplicación se había reducido considerablemente el número de partidas aparentemente sin final. Pero la pregunta que se hizo Euwe fue la de si la (R.A.) fuerza a que las partidas acaben siempre después de un número finito de jugadas. Si esto fuera así, el ajedrez más la R.A., sería un juego finito.

El inconveniente de la aplicación de tal regla es que obliga a apuntar todas las jugadas y comprobar que se produzcan las repeticiones señaladas. A pesar de todo, con su aplicación se había reducido considerablemente el número de partidas aparentemente sin final. Pero la pregunta que se hizo Euwe fue la de si la (R.A.) fuerza a que las partidas acaben siempre después de un número finito de jugadas. Si esto fuera así, el ajedrez más la R.A., sería un juego finito.

Euwe demostró en [9] que a pesar de usar la R.A. puede haber partidas que nunca acaban. Su demostración la realizó usando la sucesión  $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ . Incluso en tales partidas no se debe producir ninguna posición inevitable de superioridad de alguno de los jugadores ya que en tal caso el juego terminaría en un número finito de jugadas o alternativamente, se podría declarar tablas. Este resultado resultó inconcebible para los propios jugadores ya que la opinión que mantenían era que antes o después, era inevitable el que se pudiera aplicarse la R.A. y terminar la partida.



Figura 1: Partida con final en tablas

El siguiente ejemplo de situación de un final es bien conocido. En la Figura 1, las blancas juegan y para no perder se ven obligadas a mover repetidamente su caballo dando jaque al rey negro que para defenderse tiene que ir cambiando alternativamente de posición. Aquí hay una posición de superioridad de las piezas negras. Las piezas blancas repiten las dos mismas jugadas y consiguen repetir la misma posición al menos tres veces seguidas por lo que puede solicitar al árbitro, que por aplicación de la R.A., declare tablas en una partida en la que haciendo cualquier otro movimiento, perdería.

Que la R.A. no controla el desenlace de cualquier partida, lo demuestra la siguiente. Supongamos que con 0 representamos los movimientos alternativos de dos jugadores (usando la notación usual para las partidas de ajedrez).

$$1Cc3 Cc6, 2Cb1 Cb8$$

Y con 1 representamos la siguiente secuencia de jugadas

$$1Cf3 Cf6, 2Cg1 Cg8$$

Naturalmente tal partida es posible pero no tiene ningún sentido para el juego ya que sería jugar por ambos jugadores a tener tablas desde la primera jugada. Lo normal es diseñar situaciones a las que se llega al final de las partidas.

La FIDE consideró que efectivamente, usando solo la R.A. había una posibilidad de tener partidas infinitas y dispuso dos reglas más que han llegado hasta nuestros días:

1. Una partida de ajedrez termina en tablas cuando la misma posición, para



el mismo jugador, se repite en el primer movimiento cuando empieza la tercera vez consecutiva.

2. Una partida de ajedrez termina en tablas cuando en 50 pares de movimientos sucesivos (blancas-negras o negras-blancas) no se mueve ningún peón ni se captura ninguna otra pieza.

Estas dos reglas actuales son bastante efectivas. La primera regla se apoya en el hecho de que el ajedrez permite solo un número finito de posiciones. La segunda regla fuerza a los jugadores a hacer movimientos irreversibles si no quieren incurrir en tablas. Pero también hay un número irreversibles de movimientos.



Marston Morse

La construcción de Euwe consistió en diseñar como estrategia 0 un conjunto de movimientos para los dos jugadores y estrategia 1 otra que no condujera a posiciones de superioridad. Después los 0's y 1's de  $(T-M)$  se sustituyen por estas estrategias que generan la partida completa. El fundamento de lo anterior es el hecho de que en  $(T-M)$  no podemos tener un bloque de palabras de la forma  $aAaAa$  donde  $A$  es cualquier palabra y  $a$  una letra del alfabeto.

Demostramos a continuación el resultado de Euwe de una forma más simplificada a como lo hizo en su artículo, incluyendo la demostración de M. Morse [21], porque es muy clara en sus ideas y no necesita de maquinaria complicada.

**Teorema 2.1.** *La sucesión de Thue-Morse no contiene ninguna palabra  $B$  de la forma  $D\bar{D}d$  donde  $D = \bar{D}$  y  $d$  es el símbolo inicial de la palabra  $D$ .*

*Demostración.* Supongamos que la sucesión  $(t)$  contuviera una palabra de la forma citada en el enunciado y denotemos por  $\omega$  la longitud de  $D$  (número de letras contenida en  $D$ ). Diremos que  $D$  es una  $\omega$ -palabra. Con  $(t')$  denotaremos la sucesión que se obtiene a partir de  $(t)$  intercambiando los dos símbolos y por  $(t_1)$  la que se obtiene comenzando en 1 y continuando con los símbolos de  $(t)$ .

Analizaremos diferentes posibilidades de existencia de la palabra dada, según los diferentes valores de  $\omega$ .

1. Caso I:  $\omega$  es impar.

Si  $\omega = 1$ , entonces  $B = 000$  o  $111$ . Pero esto es imposible de acuerdo con la construcción 1 de la Sección 2.1.

Si  $\omega \geq 3$ , entonces la longitud de  $B$  sería por lo menos 7. Usando la construcción indicada, es inmediato que cada palabra de longitud 5 contenida en  $(t)$  contiene por lo menos una de las palabras 00 o 11. Supongamos que  $B$  contuviera la palabra 00. Si fuera la 11 obtendríamos el mismo resultado.

Como  $B = D\bar{D}d$ ,  $D = \bar{D}$  y  $d$  es el primer símbolo de  $D$ , cualquier 2-palabra que apareciera en  $B$  debiera aparecer en la  $(\omega + 1)$ -palabra inicial de  $B$ . Si denotamos por  $c_i c_{i+1}$  la primera vez que aparece 00 en  $B$ , entonces si vemos la palabra  $B$  como parte de la sucesión  $t$ ,  $c_{i+\omega} c_{i+1+\omega}$  pertenecería también a  $B$  siendo la palabra 00. Ya que  $\omega$  es impar, entonces  $i$  o es par o lo es  $i + \omega$ . Pero teniendo en cuenta que  $(t)$  se puede obtener por desarrollo de los símbolos  $a_1$  y  $b_1$  en las palabras 01 y 10 respectivamente y el hecho de que los índices iniciales de las 2-palabras obtenidas por desarrollo de los símbolos de  $(t_1)$  son todos impares, se sigue que en la representación de  $(t)$ ,  $c_j c_{j+1}$  pudieran ser únicamente 00 ó 11 solo si  $j$  fuera impar. Como consecuencia  $\omega$  no puede ser impar.

## 2. Caso II, $\omega$ es par.

Supongamos que  $B$  ocurriera a partir de un índice inicial  $i + 1$ , por lo que

$$\begin{aligned} D &= c_{i+1} c_{i+2} \dots c_{i+\omega} \\ \bar{D} &= c_{i+\omega+1} c_{i+\omega+2} \dots c_{i+2\omega} \\ d &= c_{i+2\omega+1}. \end{aligned}$$

### a) Caso IIa, $i + 1$ es impar.

Ya que  $c_j c_{j+1}$  puede ser 00 o 11 solo si  $j$  es impar, se sigue que si  $i + 1$  es impar entonces  $c_i c_{i+1}$  tiene que ser 01 o 10 y como  $\omega$  es par inferimos que  $i + \omega$  es par y por tanto que  $c_{i+\omega} c_{i+\omega+1}$  debe ser 01 o 10. Como es  $c_{i+1} = c_{i+\omega+1}$ , se sigue que  $c_i = c_{i+\omega}$  y entonces la palabra

$$c_i c_{i+1} \dots c_{i+\omega-1} \dots c_{i+2\omega-1} c_{i+2\omega} c_{i+2\omega+1} \quad (2)$$

satisface las condiciones

$$c_i = c_{i+\omega}, \quad j = i, i + 1, \dots, i + \omega + 1,$$

e  $i$  es par. Como consecuencia hay una palabra de  $(t_1)$  cuyo desarrollo es (2) y por tanto es de la forma

$$D^* \bar{D}^* d^*$$

donde  $D^* = \bar{D}^*$  y  $d^*$  es el símbolo inicial de  $D^*$ . La longitud de la palabra  $D^*$  es  $\frac{1}{2}\omega$ .

También hemos visto en las propiedades previas que cada palabra de  $(t')$  tiene una copia en  $(t)$ . Usando tales propiedades obtenemos que  $(t')$  debe contener una palabra de la forma  $B^* = E\bar{E}e$ , donde  $E = \bar{E}$ ,  $e$  es el símbolo inicial de  $E$  y la longitud de  $E$  es  $\frac{1}{2}\omega$ . Si fuera  $\frac{1}{2}\omega$  impar, entonces estamos en el caso descrito como Caso I que es imposible. Si fuera  $\frac{1}{2}\omega$  par y  $B^*$  ocurre teniendo un índice inicial impar, estamos en el Caso IIa. Si  $B^*$  ocurre con un índice inicial par, entonces tenemos el Caso IIb que analizamos a continuación.

b) Caso IIb,  $i + 1$  es par.

Como  $c_j c_{j+1}$  pudiera ser 00 o 11 solo si  $j$  fuera impar, se sigue que si  $i + 1$  fuera par, entonces  $c_{i+2\omega+1} c_{i+2\omega+2}$  podría ser 01 o 10 y como  $\omega$  es par, inferimos que  $i + \omega + 1$  es par, entonces  $c_{i+\omega+1} c_{i+\omega+2}$  podría ser 01 o 10. Como  $c_{i+\omega+1} = c_{i+2\omega+1}$ , se sigue que  $c_{i+\omega+2} = c_{i+2\omega+2}$ . Entonces, la palabra

$$c_{i+1} \cdots c_{i+\omega} c_{i+\omega+1} \cdots c_{i+2\omega} c_{i+2\omega+1} c_{i+2\omega+2} \quad (3)$$

satisface las condiciones

$$c_i = c_{i+\omega}, \quad j = i + 1, i + 2, \dots, i + \omega + 2$$

y por tanto,  $i + 1$  sería par. Pero entonces existiría una palabra en  $t_1$  que desarrollada sería de la forma (3) y por tanto de la (2) con  $D^*$  de longitud  $\frac{1}{2}\omega$ . De nuevo nos habríamos reducido a una situación semejante a las presentadas en el Caso I, que es imposible, o a uno de los sub-casos IIa o IIb con  $\omega$  la mitad de su valor original. Ya que cualquier número entero positivo contiene al factor 2 un número finito de veces, aplicando los razonamientos anteriores recaeríamos en el Caso I que, recordemos, es imposible.

□

**Corolario 2.2.** *Como consecuencia del resultado anterior se obtiene que  $(t)$  es una sucesión que no puede contener una palabra de la forma  $aAaAa$  donde  $a$  es un símbolo y  $A$  una palabra, es decir, está libre de tal solapamiento, obteniéndose la conclusión de Euwe.*

### 2.3. El número de Thue-Morse es un número trascendente

Recordemos que la constante de Thue-Morse es

$$\tau_{TM} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t_n}{2^{-(n+1)}},$$

es decir, si dispusiéramos del número  $P = 0.t_0t_1t_2t_3 \dots_2$  en base dos, en base decimal obtendríamos el número  $\tau_{TM} \approx 0,4124540336401075977 \dots$  (ver [23] para la aplicación de un algoritmo que permita obtener sus aproximaciones).

Introducido el número de Thue-Morse, es natural preguntarse por la naturaleza numérica del mismo. Es inmediato que el número generado es un número irracional, ya que si lo suponemos representado en base dos, en la sucesión  $(t)$  no puede haber ninguna palabra que se repita infinitas veces.

Ahora podemos analizar sus propiedades *diofánticas*.

Vamos a comprobar que  $\tau_{TM}$  es un irracional trascendente y a estudiar cómo se comporta con respecto a sus aproximaciones.

La demostración de que  $\tau_{TM}$  es trascendente no es sencilla e implica el entrar en el mundo de las aproximaciones de números irracionales por racionales. Primero observamos directamente que  $(t)$  comienza con una palabra *palíndromo*, como es la palabra 0110 y que usando la segunda forma de introducir la sucesión, es  $\theta^2(0) = 0110$  y  $\theta^2(1) = 1001$  que son dos palabras que son palíndromos. Como consecuencia, para cada entero positivo  $k$ , la primera parte de la palabra de longitud  $4^k$  es también una palabra que es un palíndromo. Denotando ahora por  $\frac{p_n}{q_n}$  el número racional que aproxima a  $\tau_{TM}$  en su descomposición en fracciones continuas, es decir  $\frac{p_n}{q_n} = [t_0, t_1, \dots, t_n]$  (ver por ejemplo [12]) vamos a ver que se satisface que

$$\max\left\{\left|\tau_{TM} - \frac{p_{4^k-2}}{q_{4^k-2}}\right|, \left|\tau_{TM}^2 - \frac{p_{4^k-1}}{q_{4^k-2}}\right|\right\} < \frac{3}{q_{4^k-2}^2} \quad (4)$$

ocurre para cada entero positivo  $k$ .

Demostraremos la desigualdad (4) en un contexto más general al necesario aquí. Sea  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$  un número irracional positivo escrito en forma de fracción continua y denotemos para cada  $n$  con  $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  su correspondiente aproximación racional. Usando la teoría general de las fracciones continuas (ver de nuevo [12]), tenemos que

$$M_n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Si suponemos que la palabra  $a_0 a_1 \dots a_n$  fuera palíndromo, es decir, que  $a_j = a_{n-j}$  para  $0 \leq k \leq n$ , entonces la transpuesta de la matriz  $M_n$  representada por  ${}^t M_n$  satisfaría que  $M_n = {}^t M_n$  (ver [12]) y como  $M_n$  es simétrica, se cumpliría que  $q_n = p_{n-1}$ . Recordando que  $|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}| < \frac{1}{q_{n-1}^2}$  y dado que se verifica siempre que  $a_0 < \alpha < a_0 + 1$ ,  $a_0 = a_n$  y que  $|p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n| = 1$ , entonces sería

$$\begin{aligned} \left| \alpha^2 - \frac{p_n}{q_n} \right| &= \left| \alpha^2 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \cdot \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \alpha + \frac{p_n}{q_n} \right| \cdot \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| + \frac{a_0 + 1}{q_n q_{n-1}} \\ &\leq 2(a_0 + 1) \left| \alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| + \frac{a_0 + 1}{p_n q_n} < \frac{3(a_0 + 1)}{q_{n-1}^2}. \end{aligned}$$

Recordemos aquí el siguiente resultado de Schmidt ([26]): *Sea  $\alpha$  un número real que no sea racional ni irracional cuadrático. Si existe un número real  $\omega > \frac{3}{2}$  y un número infinito de ternas  $(p, q, r)$  de enteros no nulos para los que se verifica*

$$\max\left\{ \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|, \left| \alpha^2 - \frac{r}{q} \right| \right\} < \frac{1}{q^\omega}$$

*entonces  $\alpha$  es trascendente.*

Así, si la sucesión de cocientes parciales de  $\alpha$  empezara con palíndromos de longitud arbitraria, entonces tanto  $\alpha$  como  $\alpha^2$  serían de forma simultánea *bien aproximables* por números racionales con el mismo denominador y usando el resultado de Schmidt obtendríamos que si  $\alpha$  no es un irracional cuadrático, entonces  $\alpha$  es trascendente.

La sucesión  $(t)$  empieza con el palíndromo 0110 y como al ser  $\theta^2(0) = 0110$  y  $\theta^2(1) = 1001$  dos palíndromos, usando las observaciones del párrafo anterior. Entonces obtenemos que para entero positivo  $k$ , la palabra prefijo de longitud  $4^k$  de  $(t)$  es también un palíndromo. Si  $\frac{p_n}{q_n}$  es la aproximación por convergentes a  $\tau_{TM}$ , entonces (4) se verifica para todo entero positivo  $k$  permitiendo aplicar el resultado de Schmidt. Como  $\tau_{TM}$  no es un irracional cuadrático (cosa fácil de comprobar), resulta que  $\tau_{TM}$  es trascendente, tal y como queríamos probar.

## 2.4. Una organización de apellidos

En [13] se estudia la información que se podría facilitar sobre nuestro árbol genealógico si se pudiera alargar el número y denominación de nuestros apellidos usando para ello no solo los de nuestros padres, sino también el de nuestros antepasados de varios niveles. Un ejemplo de la utilidad de lo anterior lo tenemos en el personaje central de las películas recientes de mucho

éxito en nuestras pantallas de cine *Ocho Apellidos Vascos* o *Ocho Apellidos Catalanes*, donde por ciertas circunstancias, el mismo se ve forzado a justificar sus raíces con los ocho apellidos vascos o catalanes de sus padres y abuelos.

Una manera de organizar tal información sería la de añadir tras nuestro segundo apellido, el segundo de nuestro padre y después el segundo de nuestra madre; tras los anteriores añadiríamos el tercero de nuestro padre y el tercero de nuestra madre (suponiendo que tal extensión de apellidos se hubiera hecho con ellos) y proseguiríamos de la misma forma con generaciones anteriores. La disposición resultante de apellidos sería más fácil de construir usando la siguiente regla: *poner en las posiciones impares los apellidos de los antepasados con nuestro mismo sexo y en las posiciones pares las de sexo contrario*, luego si somos un varón consistiría en poner los apellidos sucesivos de nuestro padre y si somos una mujer, los de nuestra madre. Esto lo vamos a realizar asignando un 0 siempre que tengamos que poner un apellido que pertenezca a un antepasado de nuestro mismo sexo y un 1 a cada apellido que sea el primero de un antepasado de sexo contrario.

Tal descripción la haremos poniendo el bloque de los apellidos de nuestros padres, luego nuestros abuelos, bisabuelos, tatarabuelos, etc. Considerando los apellidos de nuestros padres, si somos un varón, nuestro primer apellido (ocupando el primer índice impar) sería el primero de nuestro padre y lo representamos por un 0 y el segundo (índice par) por el primero de nuestra madre los representamos por un 1. Si somos una mujer, pondremos como primer apellido el primero de nuestra madre, representado por un 0 y después el primero de nuestro padre, representado por un 1. Como el resultado en ambos casos sería 01, para simplificar la construcción seguiremos con la representación en el caso de que seamos un varón. Con relación a nuestros abuelos, los que estén ocupando posiciones impares corresponden a nuestro padre que corresponden a un varón y por tanto aparecería un 0 para el primer lugar y un 1 para el tercer lugar. Nos quedaría la descripción 0110. Si usamos la representación de los apellidos de los bisabuelos, usando las anteriores reglas, nos quedaría 01101001 y así sucesivamente. Es evidente que en las distintas representaciones con 0's y 1's nos van a ir apareciendo palabras de incrementada longitud de la sucesión de  $(t)$ . Probemos con nuestros propios apellidos y veremos el interesante resultado.

## 2.5. La sucesión de Thue-Morse y los Fractales

La *curva de von Koch* o *copo de nieve de von Koch* es una curva plana bien conocida, que es continua pero no es derivable en ningún punto, que se obtiene realizando un número infinito de iteraciones y que tiene la propiedad de ser *autosemejante*, es decir, se va reproduciendo del mismo modo infinitamente.

Es un caso particular de lo que conocemos como un *fractal*.

El procedimiento de obtención de la curva de von Koch por iteración es como sigue. Como iteración cero comenzamos por un triángulo equilátero plano (esto se puede hacer partiendo de cualquier otro polígono cerrado regular o no). En la primera iteración, tomamos el tercio central de cada lado, dibujamos un triángulo equilátero hacia afuera del triángulo usando como base dicho tercio y después borramos el segmento empleado. En la segunda iteración en cada segmento de la figura resultante realizamos la misma operación, tomamos el tercio central y construimos un triángulo equilátero cuya base sea dicho segmento y borramos la parte central. En todas las operaciones efectuadas, el triángulo resultante lo colocamos hacia el exterior de la figura agrandándola. En general creamos la iteración  $n$ ésima, usando el mismo procedimiento aplicado a la iteración  $n - 1$ . Repitiendo el procedimiento indefinidamente, se obtiene una sucesión de polígonos  $P_0, P_1, \dots$ . La figura resultante la podemos representar como la frontera de una figura rellenando el interior con distintos colores, (ver Figura 2).

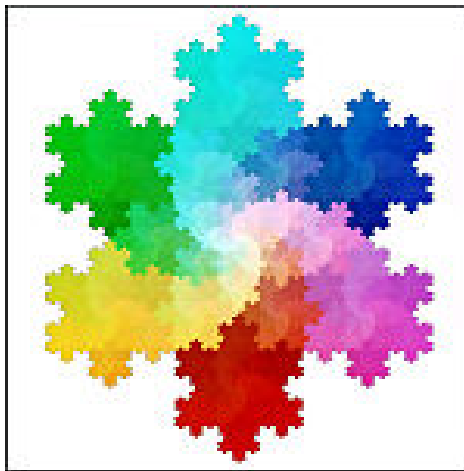


Figura 2: La curva de van Koch como frontera de un conjunto

El límite en el plano de tal sucesión es una curva realmente notable ya que su longitud es infinito, pero la superficie del que la curva es frontera es finita. Para demostrar que el área es finita, basta tomar una circunferencia de un radio adecuado pero finito de centro el triángulo inicial. Es evidente que toda la curva quedaría dentro dentro del círculo limitado por dicha circunferencia. Para calcular la longitud, denotemos por  $l$  el lado del triángulo equilátero inicial. Es inmediato que la longitud de la curvas resultantes de la iteración

$n$  es:

$$3l + l + \frac{4}{3}l + \left(\frac{4}{3}\right)^2 l + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^n l$$

y la longitud de la curva es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n l$$

que evidente es una serie divergente de números reales de suma infinito.

Lo interesante de este caso, es que la curva de von Koch se puede obtener también fácilmente, programando un algoritmo sujeto a las siguientes condiciones: Se parte de un triángulo equilátero colocado en la misma posición inicial que en la anterior construcción de la curva. A continuación usamos la sucesión de  $(t)$ . Siempre que nos encontremos con un 0 la figura que tengamos en ese momento se traslada hacia su derecha una longitud que sea la del lado del triángulo y en dirección paralela al lado opuesto al vértice inicial de arriba del triángulo, si nos encontramos con un 1 entonces sin desplazar la figura que tengamos, la giramos un ángulo de  $60^\circ$  con centro en el baricentro del triángulo. La figura que se obtiene parece la curva de Koch, más aun, es la curva de Koch, aunque esto último hay que demostrarlo (se puede ver dicha demostración en [19]). La Figura 3 muestra lo que vamos obteniendo después de aplicar varios pasos de la construcción y usando el método de *turtle graphics* ([31]).

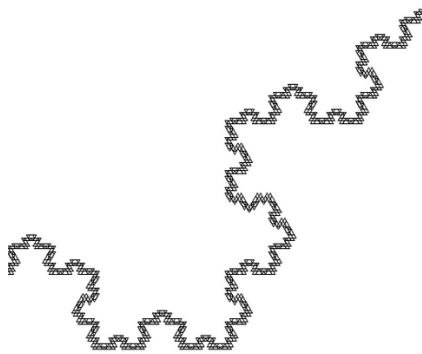


Figura 3: Una aproximación a la curva de van Koch mediante turtle graphics

Repitiendo el proceso descrito haciendo para cada caso los oportunos cambios, podemos obtener la representación de diferentes fractales.



## 2.6. La sucesión de Thue-Morse y los cuasi-cristales

Los *cristales* son sustancias cuyos átomos se disponen en los vértices de sólidos tridimensionales que se repite según patrones ordenados que cambian dependiendo de su composición química. Una característica fundamental es la existencia de simetrías espaciales. Es el caso por ejemplo de los organizados en forma de cubos, los átomos ocupan los vértices de cada cubo que a su vez se van pegando con otros dando lugar a una estructura regular. En este caso, se aprecia fácilmente la existencia de cuatro simetrías. También existen sustancias cuyos átomos tienen organizaciones planas de átomos ocupando los vértices de triángulos equiláteros planos. En tal caso se dispone de tres ejes de simetría.

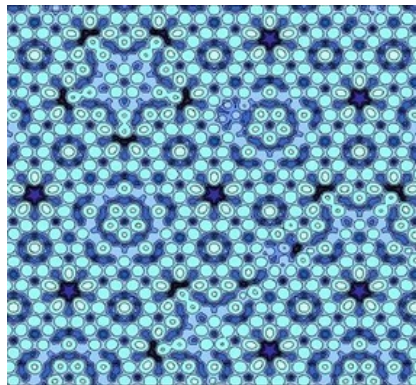


Figura 4: Cuasi-cristal con repeticiones pentagonales

Los *cuasi-cristales* se comportan de manera distinta a los cristales. Poseen patrones de orden que incluyen pentágonos o formas pentagonales, pero al contrario de los cristales, los patrones nunca se repiten exactamente. En el mundo plano, si queremos enlosar el suelo de un baño, es bien conocido que solamente las losas de ciertas formas se acoplan entre sí de modo que no dejan agujeros. Tal enlosado se podrá hacer usando losas en forma de cuadrados, rectángulos, triángulos o hexágonos. Cualquier otra forma deja agujeros. En los cuasi-cristales, la simetría pentagonal es la relevante y si se acoplan pentágonos (incluso de distinta forma), es inevitable la aparición de huecos que son ocupados por átomos distintos a los que están ubicados en los vértices de los pentágonos. Una representación de este hecho se puede apreciar en la Figura 4. Se pueden obtener unos vistosos dibujos que incluso han llegado al mundo de los tejidos, por ejemplo, en la Figura 5.

Los químicos y físicos estudian habitualmente los cristales usando microscopios electrónicos o realizando una difracción por rayos X. Estudiando tal

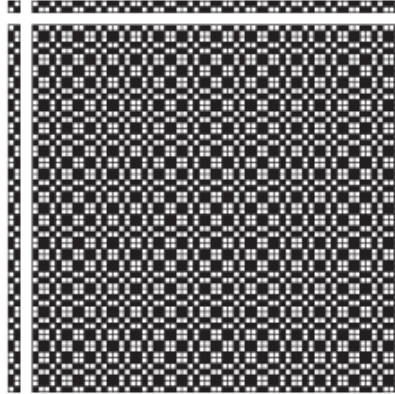


Figura 5: Tejido con dibujo en forma de disposición en cuasi-cristal

difracción, se puede determinar los patrones bajo los que los átomos se organizan en el interior de los cristales. Si se hace lo mismo en los cuasi-cristales, la difracción es mucho más complicada y resulta mucho más difícil el apreciar los patrones.

Las propiedades físicas de los cuasi-cristales varían según la dirección al contrario de lo que ocurre en el caso de los cristales. En una dirección, un cuasi-cristal puede conducir la electricidad fácilmente, mientras que en otra puede que no sea ni siquiera conductor. En general tienen una pobre conductividad térmica, lo que los hace que sean buenos aislantes térmicos.

El descubrimiento de los *cuasi-cristales* (ver [25]) y su posible modelado uni-dimensional ha conducido a un modelo matemático de evolución por las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de Schrödinger aplicadas a sucesiones de potenciales definidos a priori. En el camino natural que hay entre las sucesiones periódicas y las aleatorias, las investigaciones se han centrado en sistemas cuasi-periódicos dados por *cadena de Fibonacci* y en sistemas a-periódicos propios de *cadena de Thue-Morse*.

En [2] se considera una cadena compuesta de una línea recta (que podemos suponer es el eje de coordenadas  $OX$ ) donde consideramos una sucesión de puntos cuyas abscisas son la sucesión de números reales positivos o cero  $(x_i)_{i=0}^n$ . En tales puntos se supone ubicados átomos de manera que cada uno se comporta como productor de un potencial a una distancia  $x$  del átomo con función de potencial  $\nu(x)$ . Ahora construimos otra sucesión de números reales  $(y_i)_{i=0}^n$  mediante diferencias de coordenadas  $y_i = x_{i+1} - x_i$  cuyos valores

sean solamente dos posibles,  $d_1$  y  $d_2$  elegidos del siguiente modo

$$y_i = x_{i+1} - x_i = \begin{cases} d_1 & \text{si } \psi_i = 0, \\ d_2 & \text{si } \psi_i = 1, \end{cases}$$

donde  $\psi_i = [1 + (-1)^{s(i)}]/2$  y  $[a]$  denota la parte entera del número real  $a$ . En tales condiciones, el movimiento descrito por una partícula eléctrica cargada sujeta a la influencia de los potenciales que producen los citados átomos, se puede entender por la aplicación de la ecuación de Schrödinger para una dimensión espacial.

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \nu(x - x_n) \right) \Psi = E\Psi$$

De forma alternativa, podemos suponer que los átomos están colocados en las abscisas que son números enteros y donde con  $V_n = V(t_n)$  para cada  $n = 0, 1, \dots$  denotamos la energía local provocada por cada uno de ellos. Entonces el siguiente esquema numérico

$$-(\Psi_{n+1} + \Psi_{n-1}) + V_n \Psi_n = E\Psi_n,$$

puede ser aplicado a la resolución de la ecuación anterior (ver [3]). No entramos aquí a describir el método por ser complicado desde el punto de vista técnico.

En los artículos [1] y [2], este problema se ha resuelto tomando como patrón de ubicación de puntos con potencial eléctrico, las sucesiones  $(t)$  o la de Fibonacci que será considerada más adelante. Para esta primera explicación usaremos la primera. Repasando la sucesión de  $(t)$ , donde encontremos un 0 los valores de las abscisas  $y_i$  toman el valor  $d_1$  y si encontramos un 1 tomaremos respectivamente el valor  $d_2$ . Es evidente que el proceso dependerá finalmente del valor de  $V$

Entonces el problema abordado en [2] es el de decidir si la cadena de potenciales cumpliendo reglas asociadas a  $(t)$  se comportará como un conductor o un aislante eléctrico o como algo intermedio. En general para una tal cadena se concluye que para ciertos valores de  $V$  se comporta como cada una de las clases aludidas.

La anterior descripción y la geometría que se obtiene es un ejemplo de un cuasi-cristal unidimensional. La figura siguiente es un ejemplo de un cuasi-cristal de  $(t)$  unidimensional correspondiente a la palabra  $\theta(0)$ . En la siguiente figura con los colores blanco y negro en los cuadrados de la representación queremos distinguir entre dos tipos de átomos.



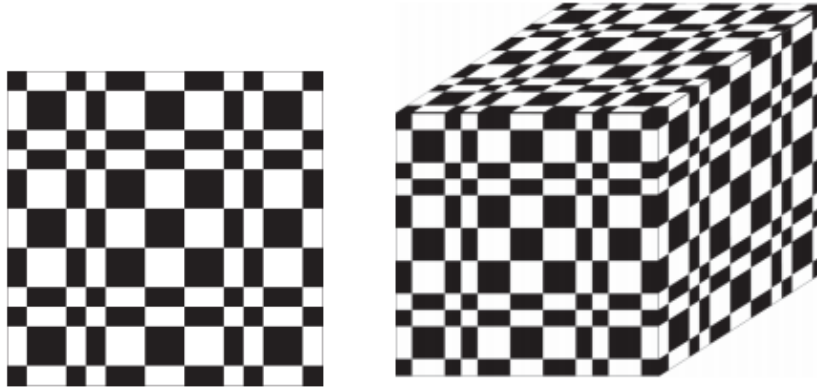


Figura 6: Cuasicristales bidimensional y tridimensional

Esta construcción puede ser extendida a dos dimensiones si en cada cuadrado ponemos en sentido vertical cuadrados siguiendo en anterior criterio. El resultado se puede apreciar en la Figura 6. Completando la misma con representaciones de palabras cada vez de mayor longitud, obtendríamos el *plano de Thue-Morse* que es un conjunto fractal. A pesar de su apariencia de simetría y regularidad, no hay periodicidades. Es decir, ninguna porción finita del plano puede ser tomada como una baldosa que lo reproduzca o cubra completamente. El procedimiento se puede extender también a tres dimensiones (ver también la Figura 6).

## 2.7. Solución de un problema de Prouhet-Tarry-Scott de Teoría de Números

Este problema fue formulado en 1910 por G.Tarry y C.Scott. Se trata de determinar dos conjuntos disjuntos de números enteros  $A, B$  tales que

$$\sum_{a \in A} a^i = \sum_{b \in B} b^i$$

para cada  $1 \leq i \leq k$  donde  $k$  está fijado de antemano. Este problema tiene su origen en la correspondencia mantenida por Christian Goldbach y Leonhard Euler en los años 1750/51. El mismo problema en un caso particular fue planteado y resuelto por E. Prouhet en 1850 y es la versión que aquí se presenta. Sea  $N = 2^{n+1}$ . Sean  $A_N$  el conjunto de enteros  $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  que verifiquen  $t_i = 0$  y  $B_N$  el conjunto de enteros  $j \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

cumpliendo  $t_j = 1$ . Probar que

$$\sum_{i \in A_N}^k i = \sum_{j \in B_N}^k j$$

para todos los enteros  $k$  desde 1 a  $n$ .

El punto importante de la prueba consiste en cambiar los números 0, 1 de la sucesión  $(T-M)$  por  $-1, 1$ . Una vez hecho esto denotamos tal sucesión por  $(t'_i)_{i=0}^\infty$ . Ahora se trata de probar que

$$\sum_{i=0}^{N-1} t'_i i^k = 0$$

para todos los enteros  $k$  entre 1 y  $n$ . Se puede comprobar inmediatamente que la fórmula es cierta cuando  $k = 0$ . Ahora procedemos por inducción sobre  $n$ . El caso  $n = 1$  es sencillo de comprobar. Supongamos ahora que la fórmula fuera cierta para  $n - 1$  (entonces sería  $N = 2^n$  y  $k = 1, \dots, n - 1$ ). De este modo para  $N = 2^{n+1}$  y cualquier  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  tendríamos

$$\sum_{i=0}^{N-1} t'_i i^k = \sum_{i=0}^{2^n-1} (t'_i i^k + t'_{i+2^n} (i+2^n)^k) = \sum_{i=0}^{2^n-1} (t'_i i^k - t'_i (i+2^n)^k)$$

ya que  $t'_{i+2^n} = -t'_i$  para  $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$  de acuerdo con una de las definiciones de la sucesión  $(T-M)$ . Como consecuencia

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2^n-1} t'_i (i^k - (i+2^n)^k) \\ &= \sum_{i=0}^{2^n-1} t'_i (i - (i+2^n))(i^{k-1} + i^{k-2}(i+2^n) + \dots + i(i+2^n)^{k-2} + (i+2^n)^{k-1}) \\ &= -2^n \sum_{i=0}^{2^n-1} t'_i P_{n,k}(i) \end{aligned}$$

donde  $P_{n,k} = x^{k-1} + x^{k-2}(x+2^n) + \dots + x(x+2^n)^{k-2} + (x+2^n)^{k-1}$  es un polinomio de grado  $k - 1$ . Si escribimos el polinomio como  $P_{n,k}(x) = a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \dots + a_1x + a_0$ , nos queda

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{2^n-1} t'_i (a_{k-1} i^{k-1} + a_{k-2} i^{k-2} + \cdots + a_1 i + a_0) \\ = a_{k-1} \sum_{i=0}^{2^n-1} t'_i i^{k-1} + \cdots + a_0 \sum_{i=0}^{2^n-1} t'_i = 0 \end{aligned}$$

y junto con el caso  $k = 0$  queda probada por inducción la primera fórmula.

## 2.8. Productos infinitos de números

Algunos productos infinitos se pueden calcular haciendo uso de la sucesión  $(t)$ . Sea el producto infinito

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{t'_0} \left(\frac{3}{4}\right)^{t'_1} \left(\frac{5}{6}\right)^{t'_2} \cdots = \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{t'_n}$$

Para obtenerlo escribimos

$$P = \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{t'_n} \quad \text{y} \quad Q = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{t'_n}$$

Ignorando por el momento, la convergencia de los productos infinitos y operando obtenemos

$$\begin{aligned} PQ &= 2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{t'_n} = 2 \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{2k+1}\right)^{t'_{2k}} \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{t'_{2k+1}} \\ &= 2 \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^{-t'_k} = 2 \frac{Q}{P}. \end{aligned}$$

Simplificando respecto de  $Q$ , obtenemos  $P^2 = 2$ , es decir  $P = \sqrt{2}$ .

Para asegurarnos de que las anteriores operaciones sean correctas vamos a comprobar que si reescribimos  $P$  como

$$P = \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4k+1}{4k+2}\right)^{t'_{2k}} \left(\frac{4k+3}{4k+4}\right)^{t'_{2k+1}} = \prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(4k+1)(4k+4)}{(4k+2)(4k+3)}\right)^{t'_{2k}}$$

el producto del lado derecho es absolutamente convergente. Esto es debido a que

$$\frac{(4k+1)(4k+4)}{(4k+2)(4k+3)} = \frac{16k^2 + 20k + 4}{16k^2 + 20k + 6} = 1 - \frac{2}{16k^2 + 20k + 6} = 1 - \frac{1}{8k^2 + 10k + 3}$$

y de forma semejante

$$\frac{(4k+2)(4k+3)}{(4k+1)(4k+4)} = 1 + \frac{2}{16k^2 + 20k + 6} = 1 + \frac{1}{8k^2 + 10k + 3}$$

Desarrollando el producto, es inmediato que

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 \pm \frac{1}{8k^2 + 10k + 5/2 \mp 1/2} \right)$$

es absolutamente convergente si y solo si

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \pm \frac{1}{8k^2 + 10k + 5/2 \mp 1/2} \right)$$

es absolutamente convergente (basta compararla con la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Usando los mismos argumentos obtenemos que  $Q$  es absolutamente convergente tras haber escrito  $Q$  como un producto de pares de consecutivos términos. Finalmente, ya que las manipulaciones que hemos hecho pueden ser escritas también como reagrupamientos de pares de términos consecutivos, los cálculos realizados son correctos.

De la fórmulas anteriores se puede deducir también que la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}, \frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{5}{6}}, \frac{\frac{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}}{\frac{5}{6}}}{\frac{7}{8}}, \dots$$

converge a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### 3. Dinámica del sistema de ecuaciones en diferencias de Thue-Morse

En [2] el problema de la transmisión eléctrica a través de disposición de dimensión uno de cargas eléctricas puntuales asociada a una *cadena de Thue-Morse* conduce al tratamiento y estudio del sistema de ecuaciones en diferencias

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n(4 - x_n - y_n) \\ y_{n+1} &= x_n y_n \end{aligned}$$

donde con  $x_n, y_n$  denotamos las *trazas* de dos matrices asociadas al método numérico empleado para la obtención de las correspondientes soluciones numéricas del proceso. El sistema de ecuaciones en diferencias es no-lineal y complicado de estudiar. El sistema también puede interpretarse como un sistema dinámico dos dimensional, no lineal, en el espacio  $\mathbb{R}^2$  dado por la siguiente transformación:

$$T(x, y) = (x(4 - x - y), xy).$$

Denominaremos *sistema dinámico de Thue-Morse* al sistema dinámico  $(\mathbb{R}^2, T)$ . Un estudio detallado del mismo se puede ver en [5]. Aquí describiremos solamente algunas de sus propiedades más directas.

Lo primero es que es sencillo comprobar que los sistemas dinámicos  $S$  y  $B$  son *topológicamente conjugados* en  $\mathbb{R}^2$ , donde

$$S(x, y) = ((y - 2)^2, xy) \quad \text{y} \quad B(x, y) = (xy, (x - 2)^2),$$

y a su vez topológicamente conjugados a  $T(x, y)$ . Esto significa que existen aplicaciones biyectivas en  $\mathbb{R}^2$ , que denotaremos por  $\Phi$  y  $\Psi$ , tales que

$$\Phi \circ T = S \circ \Phi \quad \text{y} \quad \Phi \circ T = B \circ \Psi.$$

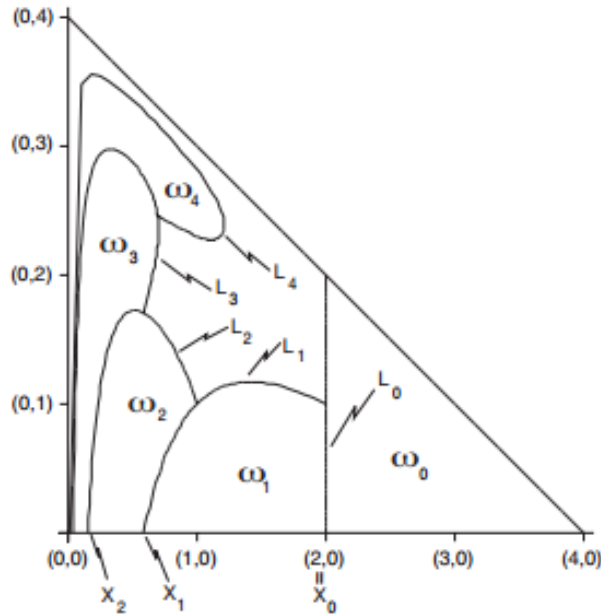
Estas propiedades son interesantes habida cuenta de las ventajas que se pueden sacar de ellas, ya que es fácil probar que ciertas propiedades de los sistemas dinámicos se conservan por conjugación topológica, tales como existencia de *órbitas periódicas, densidad de las mismas, transitividad, etc.* En lo que sigue nos centraremos en el sistema dinámico de Thue-Morse dado por la transformación  $T$ .

La parte más interesante de la dinámica está concentrada en el interior del triángulo  $\Delta$  que conecta los puntos  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(0, 4)$ . La hipotenusa, denotada por  $\Gamma$ , conecta  $(4, 0)$  y  $(0, 4)$  y está contenida en la recta de ecuación  $x + y = 4$ . Denotamos por  $\Gamma_1$  el segmento que conecta los puntos  $(0, 0)$  y  $(0, 4)$  y por  $\gamma$  el segmento que conecta los puntos  $(0, 0)$  y  $(4, 0)$ . Dado cualquier punto  $P \in \mathbb{R}^2$ , denominamos *órbita de  $P$*  y lo denotaremos por  $\text{Orb}_T(P)$  al conjunto de puntos  $\{P, T(P), T^2(P), \dots\}$ .

En el interior de  $\Delta$  ( $\text{Int } \Delta$ ) existe una sucesión de dominios  $\omega_i$  con intersección vacía dos a dos y tales que la órbita que comienza en uno de ellos recorre parte de la sucesión  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ . Estos dominios quedan determinados por las siguientes propiedades (ver [4])

$$\begin{aligned} T(\omega_0) &= \text{Int } \Delta, & T(\omega_{n+1}) &= \omega_n, & n &\geq 0, \\ \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{\omega_n} &= \Delta, & \omega_n \cap \omega_{n+i} &= \emptyset, & n &\geq 0, i > 0. \end{aligned}$$



Figura 7: Descomposición de  $\Delta$ 

Es decir, para cada  $n$  la órbita de un punto de  $\omega_n$  recorrerá todos los dominios a partir de  $\omega_{n+1}$ .

En el interior de  $\Delta$  ( $\text{Int } \Delta$ ) existe una sucesión de dominios con intersección vacía dos a dos y tales que la órbita de cada punto que comienza en uno de ellos recorre parte de la sucesión de dominios  $\omega_1 \subseteq \omega_2 \subseteq \dots \subseteq \omega_n \dots$ . Es decir, la órbita de un punto de  $\omega_n$  recorrerá todos los dominios a partir de  $\omega_{n+1}$  para cada  $n$ .

Para ver esto, dividimos  $\Delta$  en dos subconjuntos

$$\Delta = \Delta_l \cup \Delta_r$$

donde  $\Delta_l = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\}$  y  $\Delta_r = \{(x, y) : 2 < x \leq 4\}$ . Ya que  $\text{Int } \Delta$  tiene dos pre-imágenes,  $T$  no es invertible en  $\Delta$ , pero es fácil ver que en las restricciones a  $\text{Int } \Delta_l$  y  $\text{Int } \Delta_r$ ,  $T$  es invertible. De hecho se obtienen expresiones explícitas de dichas funciones inversas (todo lo anterior se puede observar en [4]).

Por otra parte, se puede ver en [28] que el conjunto de pre-imágenes del punto fijo  $(1, 2)$  y del  $(0, 0)$  son conjuntos densos en  $\text{Int } \Delta$ . Todos los puntos que están fuera del segmento  $\Gamma$  pero pertenecientes a la recta que lo contiene son también pre-imágenes de  $(0, 0)$  y que  $(3, 0)$  no posee ninguna pre-imagen en el interior de  $\Delta$  y dicho conjunto es un subconjunto denso del intervalo

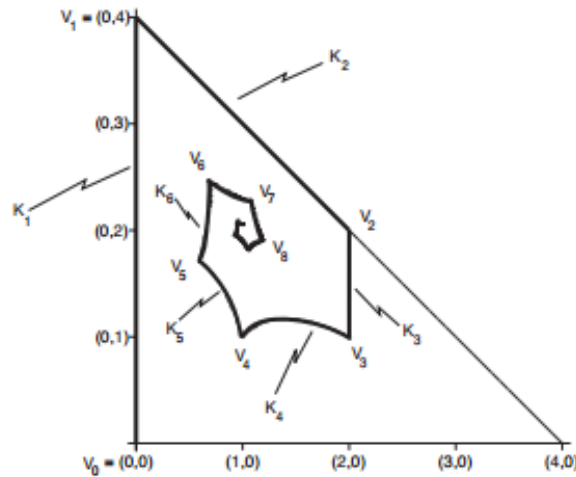


Figura 8: Una curva invariante de aproximación al punto fijo  $(1, 2)$

$I = [0, 4]$ . Con estas descripciones se puede se dar la siguiente descomposición de  $\Delta$

$$\Delta = (\cup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(0, 0) \setminus \Delta) \cup (\cup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(1, 2)) \cup (\cup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(3, 0)) \cup W$$

donde  $W$  denota el conjunto complementario de la unión de los conjuntos densos cuyas intersecciones son vacías dos a dos. Usando esta descomposición de  $\Delta$ , queda claro que las órbitas periódicas de  $T$ , si existen, tienen que pertenecer a  $W$ .

Todo lo comentado antes se refiere al interior del triángulo  $\Delta$ . Si con  $\partial\Delta$  denotamos la *frontera* de  $\Delta$  y con  $\text{Int } \Delta$  su interior, es inmediato describir la dinámica de  $T|_{\Delta}$ . Usando los signos que tienen las coordenadas de los puntos en los cuatro cuadrantes del plano y en la frontera e interior de  $\Delta$ , obtenemos que  $T(\partial\Delta) = \partial\Delta$  y  $T(\text{Int } \Delta) = \text{Int } \Delta$ .

En [4] se representan diferentes formas de *curvas invariantes* que existen en  $\text{Int } \Delta$  y que son curvas que se obtienen pegando las diferentes iteradas de puntos de tal recinto.

Nos gustaría comentar aquí que en 1993, A. N. Sharkovskii ya planteó un programa de investigación sobre la transformación  $T$ , ver [29].

### 3.1. Consideración de las órbitas periódicas de $T$ en $\text{Int } \Delta$

Dado  $P \in \Delta$ , la órbita de  $P$  por la transformación  $T$  es la sucesión  $(T^n(P))_{n=0}^{\infty}$  construida con las sucesivas iteraciones de  $T$  del punto inicial  $P$ . La obtención de las órbitas periódicas en el interior de  $\Delta$  es un problema difícil y todavía no resuelto. Por ello, en lo que sigue presentamos algunos resultados parciales obtenidos en [4] y [17]. Lo primero que ocurre es que en la aparición de puntos periódicos en este problema, no existen patrones de forzamiento de periodos en la línea de lo que ocurre en las transformaciones en el intervalo unidad que se deduce del sorprendente resultado del celebrado teorema de *Sharkovskii* (ver una de las últimas demostraciones de este resultado en [6]) En cambio, en  $T|_{\gamma}$  la transformación  $T$  es la parábola uni-dimensional  $p(x) = 4(1-x)$ , lo que hace que en  $\gamma$  existan infinitos puntos periódicos por  $T|_{\gamma} = p$  y además que el conjunto de puntos periódicos sea denso.

Haciendo un cálculo algebraico elemental, es fácil ver que en  $\text{Int}$  existe un único punto fijo,  $(1, 2)$ . En  $\partial\Delta$  encontramos dos puntos fijos,  $(0, 0)$  y  $(3, 0)$ . También es inmediato que en el exterior de  $\Delta$  no pueden existir puntos fijos. Igualmente por cálculos algebraicos, no existen puntos periódicos de periodos dos o tres.

La aplicación a este problema del *método de la resultante* (ver [4]) se obtiene que el punto

$$(1 - \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2)$$

es periódico de periodo 4 y da lugar a la única órbita 4-periódica. A partir de aquí los métodos algebraicos se hacen prohibitivos debido a la complejidad de los cálculos. Usando ahora resoluciones aproximadas de ecuaciones en [4] se prueba la existencia de por lo menos un punto periódico de periodo 5 y por comprobación directa que  $(1, (3 + \sqrt{5})/2)$  es un punto periódico de periodo 6.

Usando una adaptación de la dinámica simbólica introducida en [22], en [17] se demuestra que para  $n \geq 4$  en  $\text{Int}$  existe por lo menos un punto periódico de periodo  $n$ . Queda pendiente el problema de dar una expresión explícita de su órbita y también el de obtener algún criterio que permita decidir si tal órbita de periodo  $n$  es única o no.

El punto crucial en la demostración del resultado anterior es probar que siempre que en  $\gamma$  tengamos un punto *silla periódico* (atractor por un lado y repulsor por el otro), existe en  $\text{Int}$  un punto silla periódico con el mismo *itinerario* (por aplicación de la terminología de la Dinámica Simbólica de [22]) y de aquí se deduce que tal punto periódico debe tener periodo  $n$ .

Un problema de interés abordado en [17] es el de obtener un criterio

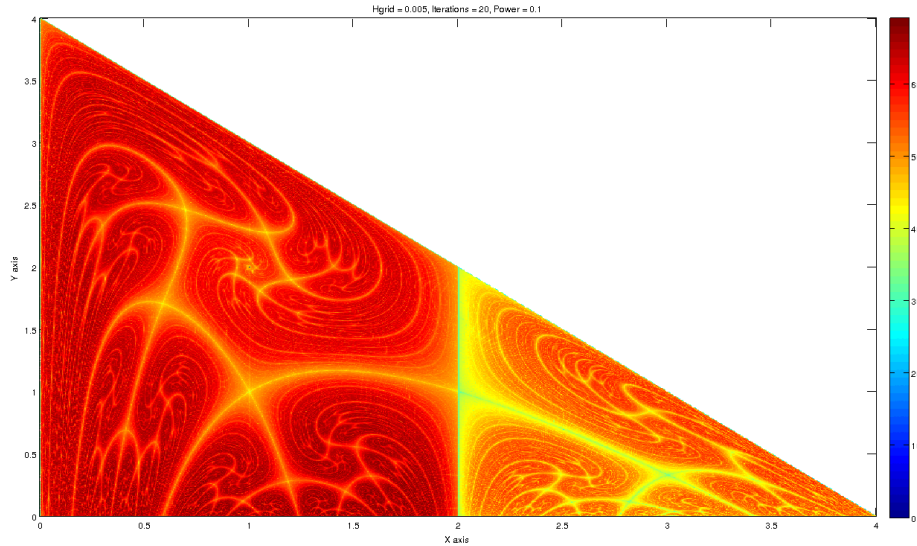


Figura 9: Puntos de silla en Int. (Figura amablemente cedida por Carlos Lopesino)

que permita probar la existencia de puntos de silla periódicos en  $\gamma$ . Esto se consigue del siguiente modo: Sea  $Q = (4 \sin^2(k\pi/(2^n \pm 1)), 0)$ , donde  $n > 0, k$  son números enteros. Si se verifica que

$$1 \leq k \leq \frac{\sqrt{2}(2^n \pm 1)}{\pi 2^{\sqrt{2n+1/4}}}$$

entonces  $Q$  es un punto de silla fijo de  $T^n$ . Con relación a los puntos silla ubicados en  $\text{Int } \Delta$ , la interesante Figura 9 nos permite hacernos una idea de su ubicación y forma. En diferentes colores se presenta desde el rojo al amarillo la suma de distancias entre dos puntos consecutivos de los cuatro primeros puntos de las órbitas de los puntos de  $\text{Int } \Delta$ , de acuerdo con una técnica de representación que se puede ver en [15].

## 4. La sucesión de Fibonacci

Otra sucesión importante compuesta de  $0$ 's y  $1$ 's es la siguiente

$$f = (f_n)_{n=0}^{\infty} = 0100101001001 \dots$$

Y. Avishai and D. Berend in *Transmission through a one-dimensional Fibonacci sequence of  $\delta$ -function potentials*, repitiendo lo hecho en el caso de

Thue-Morse, pero usando las reglas de sustitución dadas por:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 01 \\ 1 &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

y de tal manera que si denotamos por  $X_0 = 0$  la palabra de índice cero, por  $X_1 = 01$  la palabra de índice 1 y en general se construye para cada  $n > 1$  la palabra de índice  $n+1$  por la relación  $X_{n+1} = X_n X_{n-1}$ , entonces construimos la sucesión anterior poniendo sucesivamente todas las palabras de todos los índices y haciendo tender el índice a infinito. La sucesión obtenida se llama de Fibonacci porque el número de ceros de todas las palabras siguen la conocida sucesión de Fibonacci de números enteros positivos construida mediante la recurrencia  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  para  $n > 1$  con  $F_0 = F_1 = 1$ .

Las sustituciones que engendran la sucesión son  $\sigma(0) = 01$  y  $\sigma(1) = 0$ . Esto permite definir *homomorfismo de Fibonacci* como una aplicación del conjunto de todas las palabras compuestas de ceros y unos en él mismo y cuya construcción es la del párrafo anterior. Este homomorfismo se puede iterar y usando inducción podemos ver fácilmente que

$$\sigma^{n+1}(0) = f_{n+2} \quad \text{y} \quad \sigma^{n+1}(1) = f_{n+1}$$

concluyéndose que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(1) = f.$$

Estas propiedades son ejemplos de lo que se estudia en Combinatoria de Cadenas, que es una rama reciente de las matemáticas discretas que estudia cadenas finitas e infinitas de símbolos y que encuentra aplicaciones en la teoría de autómatas y lenguajes formales y también en la teoría de números, entre otras.

También se puede construir de una manera semejante a lo que realizado con la sucesión de Thue-Morse, el llamado *fractal de Fibonacci* con amplia repercusión en las representaciones gráficas, además de poder construir los *cuasi-cristales de Fibonacci*.

Con relación a esta última consideración, en [1] se consideran los problemas similares a los ya tratados de disposiciones de cargas puntuales en *cadena de Fibonacci* para estudiar el carácter conductor o aislante de dichas cadenas. En tal caso y siguiendo un tratamiento semejante a lo hecho en las *cadena de Thue-Morse* las trazas de las matrices empleadas en el tratamiento de las ecuaciones diferenciales correspondientes verifican la siguiente ecuación en diferencias finitas de tercer orden

$$\alpha_{n+3} = \alpha_{n+1}\alpha_{n+2} - \alpha_n$$

realizando un desplegado de tal ecuación, la misma se puede estudiar a través del sistema dinámico discreto en  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$F(x, y, z) = (y, z, yx - z)$$

que es un sistema discreto no-lineal y que aún no ha sido estudiado, constituyendo por el momento un problema abierto.

*Después de todo lo que hemos repasado y expuesto en este artículo, creo que empiezo a tomarme en serio aquello que con acierto me decían mis profesores.*

## Agradecimientos

Este trabajo se ha financiado parcialmente por el Proyecto MTM2014-51891-P del MINECO de España. El autor agradece el apoyo de esta institución. También quiero agradecer a Carlos Lopesino su amabilidad y ayuda en la construcción de la figura 9.

## Referencias

- [1] Avishai Y. and Berend D., *Transmission through Fibonacci chain*, Phys. Rev. B, 43 (1991), 6873–6880.
- [2] Avishai Y. and Berend D., *Transmission through a Thue-Morse chain*, Phys. Rev. B, Vol 45, Number 6, (1992), 2717–2724.
- [3] Avishai Y. and Berend D., *Trace maps for arbitrary substitution sequences*, J. Phy. A: Matg. Gen. 26 (1993), 2437–2443.
- [4] Balibrea F., García-Guirao J. L., Lampart M. and Llibre J., *Dynamics of a Lotka-Volterra map*, Fund. Mathematicae, 191 (2006), 265–279.
- [5] Balibrea F., *Some problems connected with Thue-Morse, Fibonacci and Shapiro systems of difference equations*, Preprint (2015)
- [6] Bau-Send-Du, *A Simple Proof of Sharkovsky's Theorem*, Amer. Math. Monthly, 111 (2004), 595–599.
- [7] Burgos J. de y Martínez Fernández R., *Disquisiciones acerca de las "leyes de formación" de ciertas sucesiones*, MATerials MATèmaticas, Vol. 2014, treball no.1, pp 10.

- [8] SMT 2014 Power Round, <https://sumo.stanford.edu/pdfs/smt2014/thuemorse-problems>
- [9] Euwe Max, *Mengentheoretische Betrachtungen über das Schachspiel*, Proc. Koninklijke Nederlandske Akademie van Wetenschappen, Vol 32, (1929), 633–642.
- [10] Finch S. R., *Mathematical Constants*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 94; Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [11] FIDE LAWS of CHESS (página web de la FIDE).
- [12] Frame J. S., Continued fractions and matrices, *Amer. Math. Monthly* 56 (1949), 98–103.
- [13] Santos F., *Una curiosidad matemática sobre nuestros apellidos*, <http://gaussianos.com/una-curiosidad-matematica-sobre-nuestros-apellidos/>
- [14] García-Guirao J. L. and Lampart M., *Transitivity of a Lotka-Volterra map*, Discrete Cont. Dyn. Syst. Ser B 9(1)(2008), 75–82.
- [15] Lopesino C., Balibrea-Iniesta F., Wiggins S. and Mancho A. M., *Lagrangian Descriptors for Two Dimensional Area Preserving Autonomous and Non-Autonomous Maps*, Commun. Nonlinear Sci. Simul., 27 (1-3),(2015). 152–166.
- [16] Maličký P., *On a number of interior points of a Lotka-Volterra map*, Acta Universitatis Matthiae Belli, series Mathematics 19(2011), 21–30.
- [17] Maličký P., *Interior periodic points of a Lotka-Volterra map*, J. of Diff. Eq. App., Vol 18, No 4, (2012), 553–567.
- [18] Maličký P., *Modified Lotka-Volterra maps and their interior periodic points*, Proceedings ESSAIM-2014.
- [19] Ma J. and Holdener J., *When Thue-Morse meets Koch*, Fractals, 13 (2005), no 3, 191–206.
- [20] Morse M., *Recurrent geodesics on a surface of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. 22(1921), 84–100.
- [21] Morse M., *Unending chess, symbolic dynamics and a problem in semi-groups*, Duke Math. J., 11 (1944), 1–7.

- [22] Morse M. and Hedlund A., *Symbolic dynamics*, American J. of Math., vol. 60 (1938), 815–866.
- [23] [The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, A014571.](#)
- [24] Prouhet E., *Mémoire sur quelques relations entre les puissances des nombres*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. Sér. I, 33 (1851), 225.
- [25] Schechtman D., Blech I, Gratias D. and Chan J. W., *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry*, Phys. Rev. Lett., 53 (1984), 1951–1953.
- [26] Schmidt W. M., *On simultaneous approximations of two algebraic numbers by rationals*, Acta Math. 119 (1967), 27–50.
- [27] SMT 2014 Power Round,  
<https://sumo.stanford.edu/pdfs/smt2014/thuemorse-problems>
- [28] Swirszcz G., *On a certain map of the triangle*, Fund. Mathematicae, 155 (1998), 45–57.
- [29] Sharkovskii A. N.; *Low Dimensional Dynamics*, Tagungsbericht 20/1993, Proceedings of Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, (1993),(17).
- [30] Thue A., *Über die gegenseitige lafe gleicher teite gewisser Zeichersihen*, Kra. Vidensk. Selsk., Skrifter 1, Mat.-Nat. Kl., Chistiana, Nr. 10.
- [31] *Turtle Graphics Method*, The Python Standard Library.



Departamento de Matemáticas  
Universidad de Murcia  
[balibrea@um.es](mailto:balibrea@um.es)

*Publicat el 28 de juliol de 2016*